УДК 517.38

ВУ КИМ ТУАН

ОДНА ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работах [2—5] с помощью теории представлений групп получены многие свойства гипергеометрической функции Гаусса [1] и интегралы, ее содержащие. В настоящей работе теория представлений групп применяется для вывода одной теоремы умножения обобщенных гипергеометрических функций типа ${}_{n+1}F_n$, которые при $n=1$ переходят в функцию Гаусса. Пояснение используемых терминов можно найти в монографии [2].

Пусть G — группа верхних треугольных матриц порядков $2n+4$, на диагоналях которых стоят единицы, а на первых строках, кроме единицы, находятся еще $2n+3$ произвольных комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, a, b, c. Все остальные элементы матриц полагаются равными нулю. Итак,

$$g(\alpha, \beta; a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \ldots \alpha_n & \beta_1 \ldots \beta_n & a\, b\, c \\ & 1 & & \\ & & \cdot & 0 \\ & 0 & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Пусть D — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций от $n+1$ переменных $f(y_1, \ldots, y_n, y)$, равных нулю в окрестности нуля, а D^* — пространство функций $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda)$, являющихся преобразованием Меллина функций $f(y_1, \ldots, y_n, y)$.

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty y_1^{\lambda_1-1} \ldots y_n^{\lambda_n-1} y^{\lambda-1} f(y_1, \ldots, y_n, y) \times$$
$$\times\, dy_1 \ldots dy_n\, dy. \tag{2}$$

Как известно, формула обращения (2) имеет вид

$$f(y_1, \ldots, y_n, y) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \ldots \int y_1^{-\lambda_1} \ldots y_n^{-\lambda_n} y^{-\lambda} F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) \times$$
$$\times\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n\, d\lambda, \tag{3}$$

где $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим представления $T(g)$ группы G в пространстве D, задаваемые следующим образом:

$$T(g) f(y_1, \ldots, y_n, y) = y^c \prod_{i=1}^{n} [y_i^{\alpha_i} (y_i+1)^{-\alpha_i-\beta_i}] \exp \times$$
$$\times \left(-ay \prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{y_i+1} - by\right) f(y_1, \ldots, y_n, y). \tag{4}$$

В пространстве D^* они соответствуют представлениям $Q(g)$:

$$Q(g) F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty y^{c+\lambda-1} \prod_{i=1}^{n} [y_i^{\alpha_i+\lambda_i-1} (y_i+1)^{-\alpha_i-\beta_i}] \times$$
$$\times \exp\left(-ay \prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{y_i+1} - by\right) \cdot \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \ldots \int y^{-\mu} \prod_{i=1}^{n} y_i^{-\mu_i} \times$$
$$\times F(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu)\, d\mu_1 \ldots d\mu_n\, d\mu\, dy_1 \ldots dy_n\, dy. \tag{5}$$

Если интеграл (5) сходится абсолютно, то представления $Q(g)$ являются интегральными операторами вида

$$Q(g)F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) = \int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty}\ldots\int K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g) \times$$
$$\times F(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu)\, d\mu_1 \ldots d\mu_n\, d\mu, \tag{6}$$

где

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty y^{c+\lambda-\mu-1} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}[y_i^{\alpha_i+\lambda_i-\mu_i-1}(y_i+1)^{-\alpha_i-\beta_i}]\exp\left(-ay\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i}{y_i+1} - by\right)dy_1\ldots dy_n dy. \tag{7}$$

Непосредственное вычисление этого интеграла дает значение

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g) = \frac{\Gamma(c+\lambda-\mu)}{(2\pi i)^{n+1}\, b^{c+\lambda-\mu}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} B(\alpha_i+\lambda_i-\mu_i, \beta_i+\mu_i-\lambda_i)_{n+1}F_n\Big(\alpha_1+\lambda_1-\mu_1 \ldots, \alpha_n+\lambda_n-\mu_n,$$
$$c+\lambda-\mu; \beta_1+\mu_1-\lambda_1, \ldots, \beta_n+\mu_n-\lambda_n; -\frac{a}{b}\Big) \tag{8}$$

при условиях: $\mathrm{Re}\, b > 0$, $\mathrm{Re}\, a \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_i+\lambda_i-\mu_i) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta_i+\mu_i-\lambda_i) > 0$, $\mathrm{Re}(c+\lambda-\mu) > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Из формулы $Q(g'g) = Q(g')Q(g)$ следует тождество

$$\int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty}\ldots\int K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g'g)F(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu)\,d\mu_1\ldots d\mu_n d\mu =$$
$$= \int\limits_{\rho' - i\infty}^{\rho' + i\infty}\ldots\int K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; x_1, \ldots, x_n, x; g')\,dx_1 \ldots dx_n\, dx \times$$
$$\times \int\limits_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty}\ldots\int K(x_1, \ldots, x_n, x; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g)F(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu)d\mu_1 \ldots d\mu_n d\mu. \tag{9}$$

Если интегралы в (9) абсолютно сходятся, то имеем

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g'g) = \int\limits_{\rho' - i\infty}^{\rho' + i\infty}\ldots\int K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda;$$
$$x_1, \ldots, x_n, x; g')K(x_1, \ldots, x_n, x; \mu_1, \ldots, \mu_n, \mu; g)\,dx_1\ldots dx_n\, dx. \tag{10}$$

Заменив в (10) значения $K(g)$, $K(g')$, $K(g'g)$ по формуле (8), где $g = g(\alpha, \beta; a, b, c)$, $g' = g(\alpha', \beta'; a', b', c')$, $g'g = g(\alpha+\alpha', \beta+\beta'; a+a', b+b', c+c')$, получим соотношение

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n+1}}\int\limits_{\rho' - i\infty}^{\rho' + i\infty}\ldots\int\frac{\Gamma(c'+\lambda-x)\,\Gamma(c+x-\mu)}{b'^{\,c'+\lambda-x}\, b^{c+x-\mu}}\prod_{i=1}^{n}B(\lambda_i - x_i + \alpha_i', \beta_i' - \lambda_i + x_i) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}B(\alpha_i+x_i-\mu_i, \beta_i+\mu_i-x_i)_{n+1}F_n\Big(\alpha_1'+\lambda_1-x_1, \ldots, \alpha_n'+\lambda_n-x_n;$$
$$c'+\lambda-x; \beta_1'+x_1-\lambda_1, \ldots, \beta_n'+x_n-\lambda_n; -\frac{a'}{b'}\Big)_{n+1}F_n\Big(\alpha_1+x_1-\mu_1, \ldots,$$
$$\alpha_n+x_n-\mu_n, c+x-\mu; \beta_1+\mu_1-x_1, \ldots, \beta_n+\mu_n-x_n; -\frac{a}{b}\Big)\times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_n\, dx = \frac{\Gamma(c+c'+\lambda-\mu)}{(b+b')^{c+c'+\lambda-\mu}} \prod_{i=1}^{n} B(\alpha_i+\alpha_i'+\lambda_i-\mu_i,\ \beta_i+\beta_i'+\mu_i-$$

$$-\lambda_i)_{n+1}F_n\Big(\alpha_1+\alpha_1'+\lambda_1-\mu_1,\ \ldots,\ \alpha_n+\alpha_n'+\lambda_n-\mu_n,\ c+c'+\lambda-\mu;$$

$$\beta_1+\beta_1'+\mu_1-\lambda_1,\ \ldots,\ \beta_n+\beta_n'+\mu_n-\lambda_n;\ -\frac{\alpha+\alpha'}{b+b'}\Big), \qquad (11)$$

которое будет справедливо при условиях $\mathrm{Re}a$, $\mathrm{Re}a' \geqslant 0$, $\mathrm{Re}b$, $\mathrm{Re}b' > 0$; $\mathrm{Re}(\alpha_i'+\lambda_i-x_i) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta_i'+x_i-\lambda_i) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_i+x_i-\mu_i) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta_i+\mu_i-x_i) > 0$, $\mathrm{Re}(c'+\lambda-x) > 0$, $Re(c+x-\mu) > 0$, $i=\overline{1,n}$. Положив в (11) $\rho'=0$ и заменив $c'+\lambda$, $c-\mu$, $\alpha_i'+\lambda_i$, $\beta_i'-\lambda$, $\alpha_i-\mu_i$, $\beta_i+\mu_i$, x_i соответственно на λ, λ' λ_i, λ_i', μ_i, μ_i', ix_i, окончательно получим следующую теорему умножения обобщенных гипергеометрических функций ${}_{n+1}F_n$:

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda-ix)\,\Gamma(\lambda+ix)}{b'^{\lambda-ix}\, b^{\lambda'+ix}} \prod_{i=1}^{n} [B(\lambda_i-ix_i,\ \lambda_i'+ix)B(\mu_i+ix,\ \mu_i'-$$

$$-ix_i)]_{n+1}F_n\Big(\lambda_1-ix_1,\ \ldots,\ \lambda_n-ix_n,\ \lambda-ix;\ \lambda_1'+ix_1,\ \ldots,\ \lambda_n'+ix_n;\ -\frac{a'}{b'}\Big)\times$$

$$\times\, {}_{n+1}F_n\Big(\mu_1+ix_1,\ \ldots,\ \mu_n+ix_n,\ \lambda'+ix;\ \mu_1'-ix_1,\ \ldots,\ \mu_n'-ix_n;\ -\frac{a}{b}\Big)\times$$

$$\times\, dx_1 \ldots dx_n\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+\lambda')}{(b+b')^{\lambda+\lambda'}} \prod_{i=1}^{n} B(\lambda_i+\mu_i,\ \lambda_i'+\mu_i')\, {}_{n+1}F_n \times$$

$$\times\Big(\lambda_1+\mu_1,\ \ldots,\ \lambda_n+\mu_n,\ \lambda+\lambda';\ \lambda_1'+\mu_1',\ \ldots,\ \lambda_n'+\mu_n';\ -\frac{a+a'}{b+b'}\Big), \qquad (12)$$

где $\mathrm{Re}a$, $\mathrm{Re}a' \geqslant 0$; $\mathrm{Re}b$, $\mathrm{Re}b'$, $\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Re}\lambda'$, $\mathrm{Re}\lambda_i$, $\mathrm{Re}\mu_i$, $\mathrm{Re}\lambda_i'$, $\mathrm{Re}\mu_i' > 0$.

Автор выражает глубокую благодарность доценту О. И. Маричеву за внимание к работе.

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М., 1965.— Т. 1.— С. 296.
2. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М., 1965.— С. 588.
3. Виленкин Н. Я. // Матем. сб.— 1964.— Т. 64 (106).— № 4.— С. 497.
4. Виленкин Н. Я. Там же.— Т. 65 (107).— № 1.— С. 28.
5. Miller W. Jr. Lie Theory and Special Functions.— New York, 1968.— P. 338.

Поступила в редакцию 02.07.84.

УДК 539.3:534.1

В. И. ПРУСОВ

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Построена математическая модель распространения упругих волн в однородной изотропной полосе, опирающейся на абсолютно жесткое основание *. Предполагалось, что объемными силами являются силы инерции, силы сопротивления и восстанавливающие силы. Общие формулы представлены в виде, позволяющем получать решения основных граничных задач методом сопряжения.

* Ю. В. Василевич, В. И. Прусов. Об одном представлении общих формул упругих колебаний однородной изотропной полосы.— Рукопись деп. в БелНИИНТИ.— № 902 Бе-Д84.—Деп. от. 20.06.84.