

Из существования и единственности решения исходной краевой задачи следует существование и единственность решения системы (12).

Список литературы

1. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах.— Минск, 1968.
2. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения и решение краевых задач математической физики: Тез. докл. V Республиканской конференц. матем. Белоруссии.— Гродно.— 1980.— Ч. 2.— С. 84.
3. Ерофеев В. Т. // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19.— № 8.— С. 1416.
4. Уфлянд Я. С. Методы парных уравнений в задачах математической физики.— Л., 1977.
5. Минков И. М. // ЖТФ.— 1971.— Т. 41.— № 1.— С. 17.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.— М., 1953.

Поступила в редакцию 17.04.84.

УДК 532.516

В. В. ВИДЯКИН, О. Н. ВЯРЬВИЛЬСКАЯ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О СДАВЛИВАНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА

В работе рассматривается плоская задача о стационарном сдавливании вязкого газа между параллельными пластинами. В отличие от [1, 3] учитывается сжимаемость смазки, скольжение газа вдоль пластин, на неподвижной перфорированной плоскости скорость просачивания определяется функцией специального вида от избыточного давления. Уравнение состояния, согласно [4], принимается в виде экспоненциальной зависимости плотности от давления. Получены выражения для компонент скорости, давления, плотности и массовых расходов через эллиптические функции Якоби. Проведен качественный и количественный анализ влияния исходных параметров задачи на кинематические и динамические характеристики процесса.

Переходя в системе уравнений движения, неразрывности [2] и уравнении состояния [4] к безразмерным переменным, полагая числа Рейнольдса

$Re = \frac{\rho_0 V H}{\mu_0} \sim \varepsilon$, Маха $M = V \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda \mu_0}} \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, безразмерные коэффициенты скольжения и проницаемости $\alpha = \frac{\rho_0}{\lambda \mu_0} \sim \varepsilon^0$, $n = \frac{k}{V} \exp(2\rho_0) \sim \varepsilon^0$, где ρ_0 ,

ρ_0 , μ_0 — характерные значения плотности, давления и вязкости; V — скорость движения верхней пластины; H — толщина смазочного слоя; L — ширина пластин; λ — коэффициент скольжения; k — коэффициент проницаемости; $\varepsilon = \frac{H}{L}$ — малый безразмерный параметр, и сохраняя в уравнениях только члены порядка ε^0 , получим следующую систему уравнений в безразмерных переменных:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (3) \quad \rho = \exp(p), \quad (4)$$

где u , v , p , ρ — безразмерные компоненты скорости, давление и плотность. Безразмерная координата x отсчитывается от оси симметрии нижней перфорированной пластины в поперечном направлении, ось Oy перпендикулярна к плоскости этой пластины и направлена противоположно скорости движения верхней пластины.

Граничные условия частичного скольжения [5], проницаемости на перфорированной поверхности и непрерывности давления на торцах в безразмерных переменных примут вид:

при $y = 0$:

$$u = \alpha \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = -n (\exp(2\rho) - \exp(2)), \quad (5) - (6)$$

при $y = 1$:

$$u = -\alpha \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = -1. \quad (7) - (8)$$

при $x = \pm \frac{1}{2}$:

$$\rho = 1. \quad (9) - (10)$$

Повторяя обычные рассуждения гидродинамической теории смазки из (3) с учетом результата интегрирования (1) и граничных условий (6), (8), получим основное уравнение для давления:

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} + \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 - n\alpha \exp(2\rho) + \alpha (n \exp(2) + 1) = 0, \quad (11)$$

где $\alpha = \frac{12}{1 + 6 \cdot \alpha}$.

Общее решение (11) может быть выражено через эллиптические функции

Якоби $\rho = \ln \{ \theta_2 \operatorname{cd}(\beta x/m) \}$, где $\theta_1^2 = \exp(2) + \frac{1}{n} + \chi$, $\beta = \sqrt{\frac{n\alpha\theta_1^2}{2}}$, $\theta_2^2 = \exp(2) + \frac{1}{n} - \chi$, $m = \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}$, $m + m_1 = 1$. Здесь χ — произвольная постоянная интегрирования, определяемая из условия (10), которое приводит к трансцендентному уравнению

$$\theta_2 \operatorname{cd}(\beta/2m) = \exp(1). \quad (12)$$

Последнее уравнение решалось численно с использованием таблиц [6]. Для остальных искомых функций получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\beta m_1}{2\theta_2} \cdot \frac{\operatorname{sc}(\beta x/m)}{\operatorname{dn}(\beta x/m)} (y^2 - y - \alpha), \\ v &= -\frac{\beta^2 m_1}{2\theta_2^2} \left[\frac{\alpha + (1 + m_1) \operatorname{sc}^2(\beta x/m)}{\operatorname{dn}^2(\beta x/m)} - 1 \right] \times \\ &\times \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2 - \alpha y \right) + n \exp(2) - n\theta_2^2 \operatorname{cd}^2(\beta x/m), \\ \rho &= \theta_2 \operatorname{cd}(\beta x/m). \end{aligned}$$

Несущая способность определяется интегралом

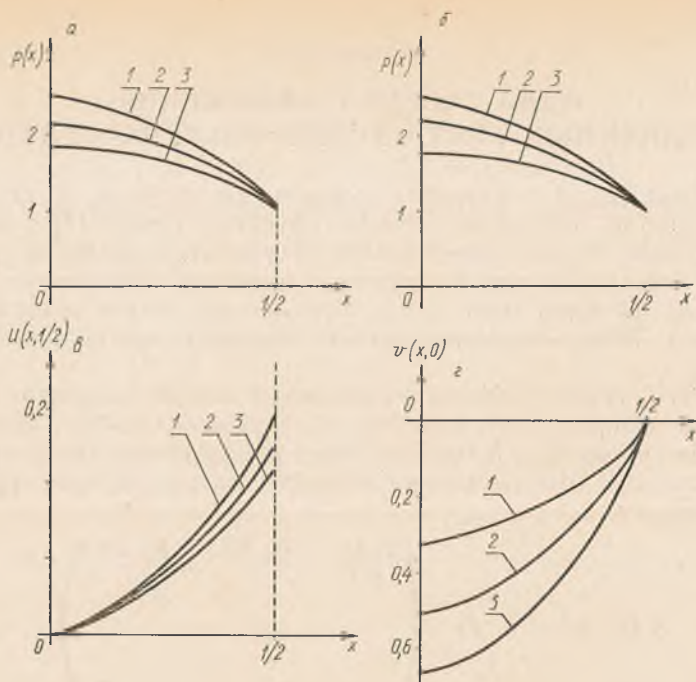
$$P = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\theta_2 \operatorname{cd}(\beta x/m) - \exp(1)) dx.$$

Массовый расход через перфорированную поверхность:

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{\theta_2 n}{\beta} \left[\frac{\theta_2^2 m_1}{m} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\beta}{2} / m\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{\beta}{2} / m\right)} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\exp(2)}{\sqrt{m}} - \frac{m+1}{2\sqrt{m^3}} \theta_2^2 \right) \ln \left| \frac{1 + \sqrt{m} \operatorname{sn}\left(\frac{\beta}{2} / m\right)}{1 - \sqrt{m} \operatorname{sn}\left(\frac{\beta}{2} / m\right)} \right| \right]. \end{aligned}$$

Массовый расход через боковые сечения:

$$M_6 = \beta m_1 \operatorname{sn}\left(\frac{\beta}{2} / m\right) \cdot \operatorname{cd}^2\left(\frac{\beta}{2} / m\right) \left(\frac{1}{6} + \alpha \right).$$



Влияние безразмерных коэффициентов проницаемости и скольжения на распределение давления и компонент скорости:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 1-n=0,003 \\ 2-n=0,01 \\ 3-n=0,023 \end{array} \right\} \alpha=0; \quad \left. \begin{array}{l} 1-\alpha=0 \\ 2-\alpha=0,083 \\ 3-\alpha=0,333 \end{array} \right\} n=0,003; \\
 \left. \begin{array}{l} 1-n=0,003 \\ 2-n=0,01 \\ 3-n=0,023 \end{array} \right\} \alpha=0; \quad \left. \begin{array}{l} 1-n=0,003 \\ 2-n=0,01 \\ 3-n=0,023 \end{array} \right\} \alpha=0;
 \end{array}$$

Графики распределения давления, продольной компоненты скорости при $y = 1/2$ и поперечной компоненты скорости на проницаемой пластине приведены на рисунке. По ним можно судить о влиянии на процесс безразмерных коэффициентов проницаемости и скольжения. Рост n уменьшает несущую способность и массовый расход через боковые сечения, увеличивая массовый расход через перфорированную поверхность. Рост α уменьшает несущую способность, массовый расход через перфорированную поверхность, увеличивая M_6 . Влияние α наиболее существенно при малых значениях n .

Список литературы

1. Ван Чжан - И. // Проблемы трения и смазки.— 1975.— № 4.— С. 79.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М., 1978.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М., 1955.
4. Снек Н. // Теоретические основы инженерных расчетов.— 1965.— № 4.— С. 230.
5. Мурти Р. // Проблемы трения и смазки.— 1973.— № 4.— С. 128.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган.— М., 1979.

Поступила в редакцию 29.06.84.