гамма-резонансных линий). При толщине контролируемого слоя ~ 10 мкм концентрация аустенита практически не изменилась.

Таким образом, облучение поверхности металла ионами вызывает эффекты, в определенной степени аналогичные локальной поверхностной термической обработке. Характер фазовых превращений свидетельствует о том, что режим такой термообработки существенно различается по глубине поверхностного слоя. Общая толщина слоя, на которой наблюдаются фазовые превращения в системе Fe — C, как минимум на два порядка превышает пробег ионов в мишени.

Помимо наличия фазовых переходов наблюдается изменение вероятности безотдачного взаимодействия f после облучения. В слое ~ 10 мкм вероятность f после облучения существенно возросла и составила 140 % f контрольного образца (оценка проведена по площади спектров). Следовательно, этот поверхностный слой характеризуется более стабильной и равновесной структурой. В слое толщиной $\sim 10^3$ Å вероятность f практически не изменилась. В этом случае можно предположить существование факторов, действие которых направлено как на увеличение, так и на уменьшение f, и их вклад взаимно компенсируется.

Список литературы

1. Gibson W. M. Ion Beam Effects in Metals: Материалы 2-го советско-американского семинара по ионной имплантации.— Новосибирск.— 1979.— С. 268.
2. Гурачевский В. Л., Солнцев А. С. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1980.— № 3.— С. 60.
3. Литвинов В. С., Каракишев С. Д., Овчинников В. В. Ядерная гамма-резонансная спектроскопия сплавов.— М., 1982.

Поступила в редакцию 04.02.85.

УДК 530.12; 530.145

Г. В. ШИШКИН, И. Е. АНДРУШКЕВИЧ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. III

1. Ковариантное обобщение уравнения Дирака (КОУД) в полях тяготения общей теории относительности с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = &\operatorname{sign}(\beta - i) A_{ijmn,i}(x^i, x^j, x^m, x^n)(dx^i)^2 + \\ &+ \operatorname{sign}(\beta - j) A_{ijmn,j}(x^i, x^j, x^m, x^n)(dx^j)^2 + \\ &+ \operatorname{sign}(\beta - m) A_{ijmn,m}(x^i, x^j, x^m, x^n)(dx^m)^2 + \\ &+ \operatorname{sign}(\beta - n) A_{ijmn,n}(x^i, x^j, x^m, x^n)(dx^n)^2 \end{aligned}$$

при диагональной калибровке тетрады имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{ijmn,\,i}}} \left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{ijmn,\,i}}{4A_{ijmn,\,i}} \right) + \frac{\tilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{ijmn,\,j}}} \left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{ijmn.\,i}}{4A_{ijmn,\,j}} \right) + \right. \\ &+ \frac{\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{ijmn,\,m}}} \left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{ijmn,\,m}}{4A_{ijmn,\,m}} \right) + \frac{\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{ijmn,\,n}}} \left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{jimn,\,n}}{4A_{ijmn,\,n}} \right) + \\ &\left. + m_0 \right\} \Phi = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее индексы i, j, m, n не носят тензорного характера, а $\tilde{\gamma}$ — матрицы Дирака специальной теории относительности.

Настоящая работа продолжает исследования по разделению переменных в КОУД, начатые в [1, 2]. В [1] уравнение (1) исследовалось на предмет отделения переменной x^i по методике выделения дифференциальных операторов первого порядка (ОПП). Показано, что для отделения x^i необходимо и достаточно, чтобы функции $A_{ijmn,k}$, $(k=i,\ j,\ m,\ n)$ удовлетворяли условию

$$A_{ijmn,k}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)=A_{i,k}(x^i)A_{jmn,k}(x^j,\ x^m,\ x^n) \tag{2}$$

и выполнялся один из наборов требований:

$$A_{i,j}=\mathrm{const},\quad A_{i,m}=\mathrm{const},\quad A_{i,n}=\mathrm{const}, \tag{3}$$

$$A_{i,j}/A_{i,m}=\mathrm{const},\quad A_{i,j}/A_{i,n}=\mathrm{const},\ A_{jmn,i}=\mathrm{const}. \tag{4}$$

Согласно [2], для осуществления в (1) попарного разделения переменных x^m, x^n и x^i, x^j необходимо и достаточно выполнения требования

$$A_{ijmn,k}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)=A_{ij,k}(x^i,\ x^j)A_{mn,k}(x^m,\ x^n) \tag{5}$$

и одного из наборов условий:

$$A_{ij,m}/A_{ij,n}=\mathrm{const},\ A_{mn,i}=\mathrm{const},\ A_{mn,j}=\mathrm{const}, \tag{6}$$

$$A_{ij,m}=\mathrm{const},\ A_{ij,n}=\mathrm{const},\ A_{mn,i}/A_{mn,j}=\mathrm{const}. \tag{7}$$

Теперь определим условия, позволяющие методикой ОПП осуществить в (1) отделение x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^m, x^n.

Следует иметь в виду три возможности: 1) отделение переменной x^i, а затем в уравнении, которое будет определять зависимость волновой функции (ВФ) от трех оставшихся переменных x^j, x^m, x^n — отделение x^j от x^m, x^n;

2) попарное разделение x^m, x^n и x^i, x^j, а в уравнении, определяющем зависимость ВФ от x^i, x^j — разделение последних между собой;

3) одновременное отделение x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^i, x^m, x^n.

2. Отделение x^i от x^j, x^m, x^n, а затем x^j от x^m, x^n. Предположим, что выполнены условия (2), (3). Тогда вместо (1) можем записать

$$\Big\{\widetilde{\gamma^i\gamma^j}\left(-\frac{A_{jmn,\,i}}{A_{jmn,\,j}}\right)^{1/2}\left(\partial_j-\frac{\partial_j A_{jmn,\,j}}{4A_{jmn,\,j}}\right)+\widetilde{\gamma^i\gamma^m}\left(-\frac{A_{jmn,\,i}}{A_{jmn,\,m}}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{jmn,\,m}}{4A_{jmn,\,m}}\right)+\widetilde{\gamma^i\gamma^n}\left(-\frac{A_{jmn,\,i}}{A_{jmn,\,n}}\right)^{1/2}\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{jmn,\,n}}{4A_{jmn,\,n}}\right)+$$
$$+m_0\tilde{\gamma}^i(A_{jmn,\,i})^{1/2}+k_i\Big\}\Phi=0, \tag{8}$$

где k_i — собственное значение оператора $\widehat{K}_i$, соответствующего отделенной переменной x^i [1]. Предполагая возможность отделения в (8) переменной x^j от x^m, x^n методикой ОПП, вместо (8) имеем

$$\{\widehat{K}_j+\widehat{K}_{mn}\}\Phi=0,$$

причем

$$[\widehat{K}_j,\ \widehat{K}_{mn}]=[\widehat{K}_j,\ f(x^m,\ x^n)]=[\widehat{K}_{mn},\ f(x^j)]=0. \tag{9}$$

В самом общем случае для операторов $\widehat{K}_j$, $\widehat{K}_{mn}$ необходимо принять [1]:

$$\widehat{K}_j=\Gamma^j f_j(x^j)\partial_j+\Gamma^j f_{1j}(x^j)+\Gamma^m f_{mj}(x^j)+\Gamma^n f_{nj}(x^j)+$$
$$+\Omega\tilde{\gamma}^i m_0 f_{jj}(x^j)+k_i\Omega\varphi_j(x^j),$$

$$\widehat{K}_{mn}=\Gamma^m f_m(x^m,\ x^n)\partial_m+\Gamma^n f_n(x^m,\ x^n)\partial_n+\Gamma^j f_{jm}(x^m,\ x^n)+$$
$$+\Gamma^m f_{mm}(x^m,\ x^n)+\Gamma^n f_{nn}(x^m,\ x^n)+$$
$$+\Omega\tilde{\gamma}^i m_0 f_{mn}(x^m,\ x^n)+k_i\Omega\varphi_m(x^m,\ x^n).$$

Здесь $\Gamma^j=\Omega\widetilde{\gamma^i\gamma^j}$, $\Gamma^m=\Omega\widetilde{\gamma^i\gamma^m}$, $\Gamma^n=\Omega\widetilde{\gamma^i\gamma^n}$,

а f, φ — некоторые функции соответствующих переменных.

Подобно тому, как это делалось в [2], можно показать, что предположение о возможности отделения в (8) переменной x^j с необходимостью требует, чтобы функции $A_{ijmn,k}$ имели вид

$$A_{ijmn,h}=A_{i,h}(x^i)A_{j,h}(x^j)A_{mn,h}(x^m,\ x^n) \tag{10}$$

и выполнялись тождества

$$f_{jm}=f_{mj}=f_{nj}=0.$$

Для выполнения коммутационных соотношений (9) необходимо считать φ_j и φ_m, равно как и f_{jj}, f_{mn}, взаимоисключающими, т. е. одна из них в названных парах тождественно равна нулю. Это значит, что следует рассмотреть четыре возможных ситуации:

$$\varphi_j\neq0,\quad \varphi_m=0,\quad f_{jj}\neq0,\quad f_{mn}=0; \tag{11}$$

$$\varphi_j\neq0,\quad \varphi_m=0,\quad f_{jj}=0,\quad f_{mn}\neq0; \tag{12}$$

$$\varphi_j=0,\quad \varphi_m\neq0,\quad f_{jj}\neq0,\quad f_{mn}=0; \tag{13}$$

$$\varphi_j=0,\quad \varphi_m\neq0,\quad f_{jj}=0,\quad f_{mn}\neq0. \tag{14}$$

Требуя выполнения коммутационных соотношений (9), для (11)—(14) соответственно получаем, что необходимо выполнение наборов условий:

$$A_{mn,i}=\mathrm{const},\ A_{mn,j}=\mathrm{const},\ A_{j,m}/A_{j,n}=\mathrm{const}; \tag{15}$$

$$A_{mn,i}/A_{mn,j}=\mathrm{const},\ A_{j,m}=\mathrm{const},\ A_{j,n}=\mathrm{const}; \tag{16}$$

$$A_{j,i}/A_{j,m}=\mathrm{const},\ A_{j,i}/A_{j,n}=\mathrm{const},\ A_{mn,j}=\mathrm{const}; \tag{17}$$

$$A_{j,i}=\mathrm{const},\ A_{j,m}=\mathrm{const},\ A_{j,n}=\mathrm{const}. \tag{18}$$

Если x^i отделилась ввиду выполнения (2), (4), то вместо (8) будем иметь [1]:

$$\left\{\frac{\eta^{jj}\widetilde{\gamma}^m\widetilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{jmn,\,j}}}\left(\partial_j-\frac{\partial_j A_{jmn,\,j}}{4A_{jmn,\,j}}\right)+\frac{\eta^{mm}\widetilde{\gamma}^n\widetilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{jmn,\,m}}}\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{jmn,\,m}}{4A_{jmn,\,m}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\eta^{nn}\widetilde{\gamma}^j\widetilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{jmn,\,n}}}\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{jmn,\,n}}{4A_{jmn,\,n}}\right)+k_i\right\}\Phi=0. \tag{19}$$

Предположив возможность отделения в (19) x^j и повторив рассуждения предыдущего случая, приходим к необходимости выполнения условия (10) и набора требований

$$A_{j,m}=\mathrm{const},\quad A_{j,n}=\mathrm{const}. \tag{20}$$

3. Отделение x^m, x^n от x^i, x^j и разделение последних между собой. Пусть выполнены требования (5), (6). Тогда вместо (1) можно записать [2]:

$$\left\{-\eta^{ii}\widetilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{ij,\,m}}{A_{ij,\,i}}\right)^{1/2}\left(\partial_i-\frac{\partial_i A_{ij,\,i}}{4A_{ij,\,i}}\right)+\eta^{jj}\widetilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{ij,\,m}}{A_{ij,\,j}}\right)^{1/2}\left(\partial_j-\frac{\partial_j A_{ij,\,j}}{4A_{ij,\,j}}\right)+\right.$$

$$\left.+m_0\widetilde{\gamma}^i\widetilde{\gamma}^j(A_{ij,\,m})^{1/2}-k_{ij}\right\}\Phi=0. \tag{21}$$

Дальнейшие рассуждения не имеют принципиальных отличий от тех, которыми мы воспользовались в п. 2, и поэтому приводим лишь конечные результаты.

Предположение о разделении x^i и x^j в (21) требует выполнения условия (10) и одного из наборов ограничений:

$$A_{j,m}=\mathrm{const},\ A_{j,i}=\mathrm{const}. \tag{22}$$

$$A_{i,m}=\mathrm{const},\ A_{i,j}=\mathrm{const}. \tag{23}$$

Аналогично при выполнении (5) и (8) вместо (1) имеем

$$\left\{\frac{\widetilde{\gamma}^m\widetilde{\gamma}^n\widetilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{ij,\,i}}}\left(\partial_i-\frac{\partial_i A_{ij,\,i}}{4A_{ij,\,i}}\right)+\frac{\widetilde{\gamma}^m\widetilde{\gamma}^n\widetilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{ij,\,j}}}\left(\partial_j-\frac{\partial_j A_{ij,\,j}}{4A_{ij,\,j}}\right)-k_{ij}\right\}\Phi=0, \tag{24}$$

а предположение об отделении в (24) переменной x^i с необходимостью требует выполнения (10) и одного из условий

$$A_{j,i}=\mathrm{const},\quad A_{i,j}=\mathrm{const}. \qquad (25),\ (26)$$

4. Одновременное отделение x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^i, x^m, x^n. Под одновременным отделением x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^i, x^m, x^n методикой ОПП будем понимать выделение в уравнении (1) двух операторов $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_j$ или $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_{mn}$, или $\widehat{K}_j$, $\widehat{K}_{mn}$, полностью определяющих зависимость ВФ от соответствующих переменных, коммутирующих между собой и с полным оператором КОУД. Аналогично предыдущему можно показать, что предположение о возможности подобной операции требует, чтобы матрица Ω была решением системы:

$$\widetilde{\gamma}^i \Omega \widetilde{\gamma}^j - \widetilde{\gamma}^j \Omega \widetilde{\gamma}^i = 0, \quad \widetilde{\gamma}^i \Omega \widetilde{\gamma}^m - \widetilde{\gamma}^m \Omega \widetilde{\gamma}^i = 0, \quad \widetilde{\gamma}^j \Omega \widetilde{\gamma}^m - \widetilde{\gamma}^m \Omega \widetilde{\gamma}^j = 0,$$

$$\widetilde{\gamma}^i \Omega \widetilde{\gamma}^n - \widetilde{\gamma}^n \Omega \widetilde{\gamma}^i = 0, \quad \widetilde{\gamma}^j \Omega \widetilde{\gamma}^n - \widetilde{\gamma}^n \Omega \widetilde{\gamma}^j = 0.$$

Но ни одна из шестнадцати матриц Дирака не является ее решением, а потому и разделение осуждаемым способом невозможно.

5. Сравнение полученных результатов. Анализируя полученные результаты (15)—(18), (20), (22), (23), (25), (26) и принимая во внимание (2)—(7), с учетом симметрии по индексам i, j, имеем следующие различные наборы условий, обеспечивающие отделение x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^m, x^n:

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,m}/A_{j,n},\ A_{mn,i},\ A_{mn,j}; \tag{27}$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,m},\ A_{j,n},\ A_{mn,i}/A_{mn,j}; \tag{28}$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i}/A_{j,m},\ A_{j,i}/A_{j,n},\ A_{mn,j}; \tag{29}$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i},\ A_{j,m},\ A_{j,n}. \tag{30}$$

Здесь перечисленные функции и отношения функций должны быть постоянными.

Кроме того, сравнение результатов показывает, что в общем случае не всегда, когда x^i отделилась от x^j, x^m, x^n, а x^j от x^m, x^n, можно выделить оператор $\widehat{K}_{ij}$, определяющий зависимость ВФ от переменных x^i, x^j и коммутирующий с полным оператором КОУД.

Рассуждениями, обратными использованным в пп. 2, 3, можно показать и достаточность требований (10) и (27)—(30). Все это означает, что доказана следующая

Теорема. Для отделения x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^m, x^n в КОУД методикой ОПП при диагональной калибровке тетрады необходимо и достаточно, чтобы имело место условие (10) и один из наборов требований (27)—(30).

6. Следствия теоремы (явный вид операторов).

1) При выполнении (10), (27) имеем:

а)
$$\widehat{K}_i = \eta^{ii} \frac{1}{\sqrt{A_{i,i}}} \left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{i,i}}{4A_{i,i}} \right), \tag{31}$$

$$\widehat{K}_j = -\eta^{jj} \widetilde{\gamma}^i \left(\frac{A_{j,m}}{A_{j,j}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,j}}{4A_{j,j}} \right) + k_i \widetilde{\gamma}^j \left(\frac{A_{j,m}}{A_{j,i}} \right)^{\frac{1}{2}} + \widetilde{\gamma}^j \widetilde{\gamma}^i m_0 (A_j,\ m)^{\frac{1}{2}},$$

$$\widehat{K}_{mn} = \frac{\widetilde{\gamma}^j \widetilde{\gamma}^i \widetilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{mn,m}}} \left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}} \right) + \frac{\widetilde{\gamma}^j \widetilde{\gamma}^i \widetilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{mn,n}}} \left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}} \right). \tag{32}$$

б)
$$\widehat{K}_i = \eta^{ii} \Omega \widetilde{\gamma}^j \frac{1}{\sqrt{A_{i,i}}} \left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{i,i}}{4A_{i,i}} \right),$$

$$\widehat{K}_j = -\eta^{jj} \Omega \widetilde{\gamma}^i \left(\frac{A_{j,i}}{A_{j,j}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,j}}{4A_{j,j}} \right) - k_{ij} \Omega \left(\frac{A_{j,i}}{A_{j,m}} \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ m_0 \Omega \widetilde{\gamma}^j \widetilde{\gamma}^i (A_{j,i})^{\frac{1}{2}}$$

$\widehat{K}_{mn}$ — в соответствии с (32), а матрица Ω принимает одно из значений: $\widetilde{\gamma}^j$, $\widetilde{\gamma}^i \widetilde{\gamma}^m$, $\widetilde{\gamma}^i \widetilde{\gamma}^n$, $\widetilde{\gamma}^j \widetilde{\gamma}^m \widetilde{\gamma}^n$.

2) Если выполнены (10) и (28), то операторы примут вид

а) $$\hat{K}_j = \frac{\tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^n \tilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{j,\,j}}}\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,\,j}}{4A_{j,\,j}}\right) + \eta^{ii} k_i \frac{\tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^n \tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{j,\,i}}},$$

$$\hat{K}_{mn} = -\eta^{mm}\tilde{\gamma}^n\left(\frac{A_{mn,\,i}}{A_{mn,\,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,\,m}}{4A_{mn,\,m}}\right) +$$

$$+ \eta^{nn}\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,\,j}}{A_{mn,\,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,\,n}}{4A_{mn,\,n}}\right) + m_0\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n(A_{mn,\,i})^{\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

$\hat{K}_i$ определяется выражением (31).

б) $$\hat{K}_i = \Omega\,\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\frac{1}{\sqrt{A_{i,\,i}}}\left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{i,\,i}}{4A_{i,\,i}}\right),$$

$$\hat{K}_j = \Omega\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{j,\,i}}{A_{j,\,j}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,\,j}}{4A_{j,\,j}}\right) - \Omega\,k_{ij}\,(A_{j,\,i})^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{K}_{mn}$ определяется выражением (33), а Ω принимает одно из значений: $\tilde{\gamma}^i$, $\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m$, $\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n$, $\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$.

3) Когда справедливы (10), (29), имеем:

а) $\hat{K}_i$ определяется выражением (31),

$$\hat{K}_j = \tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{j,\,i}}{A_{j,\,j}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,\,j}}{4A_{j,\,j}}\right) + m_0\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\sqrt{A_{j,\,i}}, \tag{34}$$

$$\hat{K}_{mn} = \eta^{mm}\frac{\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{mn,\,m}}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,\,m}}{4A_{mn,\,m}}\right) + \eta^{nn}\frac{\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{mn,\,n}}}\times$$

$$\times\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,\,n}}{4A_{mn,\,n}}\right) + k_i\frac{\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{mn,\,i}}}.$$

б) $$\hat{K}_i = \eta^{ii}\,\Omega\,\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\frac{1}{\sqrt{A_{i,\,i}}}\left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{i,\,i}}{4A_{i,\,i}}\right),$$

$$\hat{K}_{mn} = \eta^{mm}\,\Omega\,\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{mn,\,i}}{A_{mn,\,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,\,m}}{4A_{mn,\,m}}\right) +$$

$$+ \eta^{nn}\Omega\,\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,\,i}}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,\,n}}{4A_{mn,\,n}}\right) + \Omega\,k_j\sqrt{A_{mn,i}}.$$

$\hat{K}_j$ определяется выражением (34), а матрица Ω может принимать одно из значений: $\tilde{\gamma}^i$, $\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i$, $\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$, $\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$.

4) При выполнении (10), (30) получаем: для $\hat{K}_i$ по-прежнему справедливо соотношение (31),

$$\hat{K}_j = \eta^{jj}\frac{1}{\sqrt{A_{j,\,j}}}\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{j,\,j}}{4A_{j,\,j}}\right),$$

$$\hat{K}_{mn} = \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,\,j}}{A_{mn,\,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,\,m}}{4A_{mn,\,m}}\right) + \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n\left(\frac{A_{mn,j}}{A_{mn,\,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,\,n}}{4A_{mn,\,n}}\right) + \eta^{ii}k_i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{mn,\,j}}{A_{mn,\,i}}\right)^{\frac{1}{2}} + m_0\tilde{\gamma}^j(A_{mn,\,j})^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь k_i, k_j, k_{ij} — собственные значения соответствующих операторов.

Список литературы

1. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1985.— № 3.— С. 26.
2. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 1.— С. 6.

Поступила в редакцию 17.01.85.

УДК 535.012.2

А. В. ЛАВРИНЕНКО

ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОТОКА ЭНЕРГИИ ПРЕЛОМЛЕННОЙ ВОЛНЫ В ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

При падении плоской поляризованной волны на границу анизотропного кристалла в нем в общем случае возбуждается несобственная преломленная волна, т. е. волна, состояние поляризации которой изменяется в процессе распространения [1, 2]. Такая волна является суперпозицией двух собственных (характеристических) волн с неизменной поляризацией. Выражение для вектора Пойнтинга суперпозиции двух плоских гармонических волн, распространяющихся в непараллельных направлениях в изотропной среде, получено в [3]. Вектор Пойнтинга плоской несобственной волны, возбуждаемой в анизотропном кристалле при нормальном падении света на его границу, исследовался в [4]. В настоящей работе преследуется цель найти общее выражение для потока энергии неплоской несобственной волны в прозрачной анизотропной и гиротропной среде.

Пусть из изотропной среды на границу анизотропного кристалла с линейными уравнениями связи общего вида [5]

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} + i\alpha\bar{H}, \quad \bar{B} = i\beta\bar{E} + \mu\bar{H} \tag{1}$$

наклонно падает плоская электромагнитная волна $\bar{H}(\bar{r}, t) = \bar{H}_0 \exp[i(k\bar{m}\bar{r} - \omega t)]$. Здесь $\bar{E}$ и $\bar{D}$, $\bar{H}$ и $\bar{B}$ — векторы напряженности и индукции электрического и магнитного полей соответственно, ε и μ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; α и β — псевдотензоры гирации [5]; $k = \omega/c$ — волновое число, $\bar{m}$ — вектор рефракции. Тензоры материальных констант для недиссипативной среды удовлетворяют соотношениям $\varepsilon = \varepsilon^+$, $\mu = \mu^+$, $\beta = -\alpha^+$ [5], где ε^+, μ^+, α^+ — эрмитово сопряженные по отношению к ε, μ, α тензоры. Уравнения связи (1) описывают анизотропную среду, обладающую как естественной, так и собственной гиротропией, т. е. они описывают наиболее общий вид анизотропной непоглощающей среды [5].

Найдем выражение для среднего вектора Пойнтинга преломленной волны $\bar{S} = \frac{c}{16\pi}\{[\bar{E}\bar{H}^*] + [\bar{E}^*\bar{H}]\}$ у границы. Для дальнейшего анализа удобно выразить вектор $\bar{S}$ через вектор тангенциальной составляющей (относительно границы раздела) напряженности магнитного поля $\bar{H}_\tau$ преломленной волны. Полные векторы $\bar{H}$ и $\bar{E}$ восстанавливаются по тангенциальным составляющим $\bar{H}_\tau = I\bar{H}$, $\bar{E}_\tau = I\bar{E}$ с помощью операторной матрицы восстановления V [2, 6], где $I = 1 - \bar{q}\cdot\bar{q} = -\bar{q}^{\times 2}$ — проективный оператор границы раздела; $\bar{q}^\times$ — антисимметричный тензор, дуальный единичному вектору нормали к границе раздела $\bar{q}$ [5]; точка между векторами обозначает их кронекеровское произведение (диаду). Нетрудно показать, что матрица восстановления V в анизотропной среде, характеризуемой уравнениями связи (1), имеет структуру

$$\begin{pmatrix}\bar{H}\\ \bar{E}\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\bar{H}_\tau\\ \bar{E}_\tau\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{q}\cdot\bar{v}_1 & \bar{q}\cdot\bar{v}_2\\ \bar{q}\cdot\bar{v}_3 & \bar{q}\cdot\bar{v}_4\end{pmatrix}, \tag{2}$$