

Список литературы

1. Амеликин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка.— Минск, 1982.
2. Горбузов В. Н.— Докл. АН БССР, 1983, т. 25, № 7, с. 584.
3. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М., 1977.

Поступила в редакцию 04.06.84

УДК 517.911

ЗАРУП ТАУФИК

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ИТАРАЦИЙ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим на множестве $E \subset R \times R^n$ с точками (t, x) треугольную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $f_k(t, x) = f_k(t, x_1, \dots, x_k)$, $k = \overline{1, n}$. Взаимодействие между компонентами решений треугольной системы носит односторонний характер: компоненты решений с последующими номерами не влияют на компоненты решений с предыдущими номерами. Такой характер взаимодействия определяет многие специальные свойства треугольных систем. Специфика треугольных систем позволяет уточнить некоторые теоремы общей теории дифференциальных уравнений и существенно ослабить обычные предположения об аналитической природе внедиагональных элементов правых частей.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на области E и компоненты f_k удовлетворяют неравенствам $|f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k) - f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)| \leq \Phi_k(|x_k - x'_k|)$, где функции Φ_k непрерывны, $\Phi_k(u) > 0$ при $u > 0$ и $\int_0^{+\infty} du/\Phi_k(u) = +\infty$. Тогда для любой точки $(s, \xi) \in E$ начальная задача $x(s) = \xi$ для уравнения (1) однозначно разрешима.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на множестве $E = |\alpha, \beta| \times R^n$ и f_k удовлетворяют неравенствам $|f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)| \leq g_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}) + h_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}) \Phi_k(|x_k|)$, где g_k , h_k и Φ_k непрерывны, $\Phi_k(u) > 0$ при $u > 0$ и $\int_0^{+\infty} \frac{du}{\Phi_k(u) + 1} = +\infty$, то все решения уравнения (1) продолжимы на промежутке $|\alpha, \beta|$. Доказательство следует из возможности интегрирования треугольных систем «сверху вниз» и классических теорем об однозначной разрешимости и продолжимости решений (см., например, [1]).

З а м е ч а н и е. Индуктивный характер доказательства позволяет распространить теоремы 1, 2 на бесконечномерные треугольные системы.

Используя идеи работ [2—4], а также учитывая односторонний характер взаимодействия компонент решений треугольных систем, построим модификацию метода итераций для систем с выделенной диагональю вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p(t)x + f(t, x) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) + q(t)y, \end{cases}$$

где функции p, q, f, g непрерывны. Предположим, что $|p(t)| \leq \alpha_1$, $|q(t)| \leq \alpha_2$, $f(t, 0) \equiv 0$, $g(t, x, 0) \equiv 0$, $|f(t, x') - f(t, x'')| \leq \beta_1|x' - x''|$, $|g(t, x', y') - g(t, x'', y'')| \leq \beta_2(|x' - x''| + |y' - y''|)$. Для построения

последовательных приближений $x_s(t)$ и $y_s(t)$ решений $x(t)$ и $y(t)$ применим следующую схему:

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{dt} = p(t)x_s + f(t, x_{s-1}), & x_s(0) = x_0 \\ \frac{dy_s}{dt} = g(t, x_s, y_{s-1}) + q(t)y_s, & y_s(0) = y_0. \end{cases}$$

Лемма 1. Для любых $s = 0, 1, 2, \dots$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |x_{s+1}(t) - x_s(t)| &\leq \frac{\beta_1^s |x_0| (\alpha_1 + \beta_1)}{s!} \int_0^t \tau^s e^{\alpha_1 \tau} d\tau, \\ |y_{s+1}(t) - y_s(t)| &\leq \frac{\beta_2^s |y_0| (\alpha_2 + \beta_2)}{s!} \int_0^t \tau^s e^{\alpha_2 \tau} d\tau + \\ &+ \frac{\beta_2 |x_0| (\alpha_1 + \beta_1)}{s!} \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} d\tau \int_0^{t-\tau} (\beta_1 \sigma + \beta_2 \tau^s) e^{\alpha_2 \sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Лемма 2.

$$|x(t) - x_s(t)| \leq \Delta_{x_s} = \frac{\beta_1^s |x_0| (\alpha_1 + \beta_1)^{s+1} t^{s+1} e^{(\alpha_1 + \beta_1)t}}{(s+1)!}, \quad (2)$$

$$|y(t) - y_s(t)| \leq \Delta_{y_s} = \frac{\beta^s (\alpha + \beta)^{s+1} e^{(\alpha + \beta)t} (|y_0| + \beta_2 |x_0| t)}{(s+1)!}, \quad (3)$$

где $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Доказательство лемм 1, 2 проводится методом математической индукции по s с применением обобщенной леммы Гронвола и равенства

$$\sum_{k=s}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!} = \frac{\gamma^s}{(s-1)!} e^{\gamma} \int_0^1 \tau^{s-1} e^{-\gamma \tau} d\tau.$$

Для классической схемы метода последовательных приближений Пикара

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{dt} = p(t)x_{s-1} + f(t, x_{s-1}), & x_s(0) = x_0 \\ \frac{dy_s}{dt} = g(t, x_{s-1}, y_{s-1}) + q(t)y_{s-1}, & y_s(0) = y_0 \end{cases}$$

имеем оценки

$$|x(t) - x_s(t)| \leq \Delta_{x_s}^{\Pi} = \frac{|x_0| (\alpha_1 + \beta_1)^{s+1} t^{s+1} e^{(\alpha_1 + \beta_1)t}}{(s+1)!} \quad (4)$$

$$|y(t) - y_s(t)| \leq \Delta_{y_s}^{\Pi} = \frac{(\alpha + \beta)^{s+1} t^{s+1} e^{(\alpha + \beta)t}}{s!} \left(\beta_2 |x_0| + \frac{|y_0| (\alpha + \beta)}{s+1} \right). \quad (5)$$

Сравнивая оценки (2), (4) и (3), (5), получаем

$$\frac{\Delta_{x_s}}{\Delta_{x_s}^{\Pi}} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^s, \quad \frac{\Delta_{y_s}}{\Delta_{y_s}^{\Pi}} = O \left(\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^s \frac{1}{s+1} \right).$$

Таким образом, построенная модификация метода итераций сходится быстрее классического метода итераций Пикара.

Список литературы

1. Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б. Дифференц. уравнения.— Минск, 1983.
2. Бауссау Р.— Periodica Polytechnica, 1959, v. 3, № 3, p. 217.
3. Еругин А. Н.— ИФЖ, 1961, т. 4, № 5, с. 111.
4. Лаптинский В. Н.— Докл. АН БССР, 1965, т. 9, № 5, с. 219.