Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) имеет в D множитель Коши—Римана $\varkappa$. Тогда функции $f(z)=\varkappa(x, y)(P(x, y)+iQ(x, y))$ и $\ln f(z)=\ln(|\varkappa|\sqrt{P^2+Q^2})+i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ будут в D аналитическими, а из [3] следует гармоничность $\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$.

Достаточность. Пусть функция $\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ гармоническая в D. Если в качестве множителя $\varkappa$ взять функцию

$$\frac{\exp\left[\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P}\right)dx-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P}\right)dy\right]}{\sqrt{P^2+Q^2}},$$

то $f(z)=P+iQ$ будет аналитической. Отсюда следует, что $\varkappa$ — множитель Коши—Римана.

Следствие. Если функция $\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ гармоническая в D, то система (1) имеет множитель Коши—Римана вида

$$\varkappa(x, y)=\frac{\exp\left[\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)dx-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)dy\right]}{\sqrt{P^2(x, y)+Q^2(x, y)}}.$$

В соответствии с изложенным нетрудно проверить, что, например, дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=\sin(x-y)(e^{2(x+y)}+1),\quad \frac{dy}{dt}=\cos(x-y)(e^{2(x+y)}-1)$$

имеет множитель Коши—Римана $\varkappa=\frac{1}{e^{x+y}}$.

Список литературы

1. Еругин Н. П.— ПММ, 1950, т. 3, с. 315.
2. Креер Л. И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям.— М., 1940.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М., 1967.

Поступила в редакцию 27.04.84.

УДК 517.911

А. А. САМОДУРОВ

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ

В настоящей заметке метод построения первого интеграла или интегрирующего множителя квадратичной системы двух дифференциальных уравнений по известным частным интегралам [1, 2] обобщается на систему n уравнений ($n\geqslant 2$).

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

где

$$X_i(x_1, \dots, x_n)=\sum_{p, q=1}^{n}a_{pq}^{(i)}x_px_q+\sum_{p=1}^{n}(b_p^{(i)}x_p+c_p^{(i)}),$$
$$a_{pq}^{(i)},\ b_p^{(i)},\ c_p^{(i)}\in C,\ p,\ q,\ i=\overline{1, n}. \tag{2}$$

Пусть известны $n+1$ независимых полиномиальных частных интегралов системы (1)

$$\omega_j(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{3}$$

Тогда имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} X_i(x_1, \ldots, x_n) = \omega_j(x_1, \ldots, x_n) K_j(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где $K_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i + \varepsilon_j$, γ_{ji}, $\varepsilon_j \in C$.

Рассмотрим функцию

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n+1} \omega_j^{\alpha_j}(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

где α_j — комплексные постоянные, подлежащие определению.

Дифференцируя (5) по t, в силу правых частей системы (1) с учетом (4) имеем

$$\frac{dH}{dt} = H(x_1, \ldots, x_n) \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j K_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Если $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j K_j(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, то $H(x_1, \ldots, x_n) = C$ — первый интеграл системы (1). Это возможно тогда и только тогда, когда система

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \gamma_{ji} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \varepsilon_j = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{6}$$

имеет нетривиальное решение $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.

Функция (5) является последним множителем системы (1) [3], если она удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (H X_j)}{\partial x_j} = 0. \tag{7}$$

Подставив (5) в (7), после преобразований имеем

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j K_j(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Соотношение (8) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \gamma_{ji} = -\sum_{i,\, q=1}^{n} a_{iq}^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \varepsilon_j = -\sum_{i=1}^{n} b_i^{(i)}. \tag{9}$$

В случае $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \equiv 0$ — (система сохраняет фазовый объем [3]) система (9) совпадает с системой (6). Тогда последний множитель $H(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$.

При $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \not\equiv 0$ одна из систем (6) или (9) имеет ненулевое решение.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема. Пусть известны $n+1$ независимых полиномиальных интеграла системы (1). Тогда можно построить первый интеграл или последний множитель вида (5).

Список литературы

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка.— Минск, 1982.
2. Горбузов В. Н.— Докл. АН БССР, 1983, т. 25, № 7, с. 584.
3. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М., 1977.

Поступила в редакцию 04.06.84

УДК 517.911

ЗАРУР ТАУФИК

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим на множестве $E \subset R \times R^n$ с точками (t, x) треугольную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $f_k(t, x) = f_k(t, x_1, \dots, x_k)$, $k = \overline{1, n}$. Взаимодействие между компонентами решений треугольной системы носит односторонний характер: компоненты решений с последующими номерами не влияют на компоненты решений с предыдущими номерами. Такой характер взаимодействия определяет многие специальные свойства треугольных систем. Специфика треугольных систем позволяет уточнить некоторые теоремы общей теории дифференциальных уравнений и существенно ослабить обычные предположения об аналитической природе внедиагональных элементов правых частей.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на области E и компоненты f_k удовлетворяют неравенствам $|f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k') - f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k'')| \leqslant \Phi_k(|x_k' - x_k''|)$, где функции Φ_k непрерывны, $\Phi_k(u) > 0$ при $u > 0$ и $\int\limits_{+0} du/\Phi_k(u) = +\infty$. Тогда для любой точки $(s, \xi) \in E$ начальная задача $x(s) = \xi$ для уравнения (1) однозначно разрешима.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на множестве $E = |\alpha, \beta| \times R^n$ и f_k удовлетворяют неравенствам $|f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)| \leqslant g_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}) + h_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}) \Phi_k(|x_k|)$, где g_k, h_k и Φ_k непрерывны, $\Phi_k(u) > 0$ при $u > 0$ и $\int\limits^{+\infty} \frac{du}{\Phi_k(u) + 1} = +\infty$, то все решения уравнения (1) продолжимы на промежуток $|\alpha, \beta|$. Доказательство следует из возможности интегрирования треугольных систем «сверху вниз» и классических теорем об однозначной разрешимости и продолжимости решений (см., например, [1]).

Замечание. Индуктивный характер доказательства позволяет распространить теоремы 1, 2 на бесконечномерные треугольные системы.

Используя идеи работ [2—4], а также учитывая односторонний характер взаимодействия компонент решений треугольных систем, построим модификацию метода итераций для систем с выделенной диагональю вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p(t)x + f(t, x) \\ \dfrac{dy}{dt} g(t, x, y) + q(t)y, \end{cases}$$

где функции p, q, f, g непрерывны. Предположим, что $|p(t)| \leqslant \alpha_1$, $|q(t)| \leqslant \alpha_2$, $f(t, 0) \equiv 0$, $g(t, x, 0) \equiv 0$, $|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \beta_1 |x' - x''|$, $|g(t, x', y') - g(t, x'', y'')| \leqslant \beta_2(|x' - x''| + |y' - y''|)$. Для построения