УДК 517.925

Т. И. РОГАЧЕВИЧ

О КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОЖИТЕЛЯ КОШИ — РИМАНА

В теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений определенное место занимают методы, связанные с нахождением интегрирующего множителя. И хотя возможности теории интегрирующего множителя ограничены, представляется естественным расширить применение этой теории к решению конкретных вопросов не только теории интегрирования, но и общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом плане интересной и полезной является связь, которая имеет место между уравнениями Гамильтона и уравнениями, удовлетворяющими условиям Коши — Римана (уравнениями Коши — Римана) [1].

Ниже, используя понятие множителя Коши — Римана, приводим факты, имеющие отношение к решению указанной задачи.

Итак, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

где функции P и Q будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми в некоторой области D фазовой плоскости xOy и такими, что в D $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$. Кроме того, будем предполагать, что (1) не удовлетворяет условиям Коши — Римана.

Определение 1. Скалярная класса C^2_{xy} и C^2_{yx} функция $\varkappa : D \to R$ называется множителем Коши—Римана для системы (1), если правые части дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = \varkappa(x, y)\,P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \varkappa(x, y)\,Q(x, y) \tag{2}$$

удовлетворяют условиям Коши—Римана, т. е. если

$$\frac{\partial(\varkappa P)}{\partial x} = \frac{\partial(\varkappa Q)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\varkappa P)}{\partial y} = -\frac{\partial(\varkappa Q)}{\partial x}. \tag{3}$$

Из определения 1 вытекает следующее очевидное, но полезное утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы функция $\varkappa : D \to R$ была множителем Коши — Римана для системы (1), необходимо и достаточно, чтобы $\varkappa$ была интегрирующим множителем систем

$$\frac{dx}{dt} = -P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = P(x, y)$$

одновременно.

Теорема 2. Если $\varkappa$ — множитель Коши—Римана для системы (1), то $\mu(x, y) = \dfrac{1}{\varkappa(x, y)\,(P^2(x, y) + Q^2(x, y))}$ ее интегрирующий множитель.

Для доказательства этого факта достаточно заметить (см., например, [2], с. 35), что если дифференциальная система $\dfrac{dx}{dt} = X(x, y)$, $\dfrac{dy}{dt} = Y(x, y)$ является системой Коши—Римана, то она имеет интегрирующий множитель μ, определяемый равенством

$$\mu(x, y) = \frac{1}{X^2(x, y) + Y^2(x, y)}.$$

Теорема 3. Для того чтобы система (1) имела множитель Коши—Римана, необходимо и достаточно, чтобы функция $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)$ была в D функцией гармонической.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) имеет в D множитель Коши—Римана $\varkappa$. Тогда функции $f(z)=\varkappa(x, y)(P(x, y)+iQ(x, y))$ и $\ln f(z)=\ln(|\varkappa|\sqrt{P^2+Q^2})+i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ будут в D аналитическими, а из [3] следует гармоничность $\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$.

Достаточность. Пусть функция $\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ гармоническая в D. Если в качестве множителя $\varkappa$ взять функцию

$$\frac{\exp\left[\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P}\right)dx-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P}\right)dy\right]}{\sqrt{P^2+Q^2}},$$

то $f(z)=P+iQ$ будет аналитической. Отсюда следует, что $\varkappa$ — множитель Коши—Римана.

Следствие. Если функция $\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$ гармоническая в D, то система (1) имеет множитель Коши—Римана вида

$$\varkappa(x, y)=\frac{\exp\left[\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)dx-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\right)dy\right]}{\sqrt{P^2(x, y)+Q^2(x, y)}}.$$

В соответствии с изложенным нетрудно проверить, что, например, дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=\sin(x-y)(e^{2(x+y)}+1),\quad \frac{dy}{dt}=\cos(x-y)(e^{2(x+y)}-1)$$

имеет множитель Коши—Римана $\varkappa=\frac{1}{e^{x+y}}$.

Список литературы

1. Еругин Н. П.— ПММ, 1950, т. 3, с. 315.
2. Креер Л. И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям.— М., 1940.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М., 1967.

Поступила в редакцию 27.04.84.

УДК 517.911

А. А. САМОДУРОВ

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ

В настоящей заметке метод построения первого интеграла или интегрирующего множителя квадратичной системы двух дифференциальных уравнений по известным частным интегралам [1, 2] обобщается на систему n уравнений ($n \geqslant 2$).

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

где

$$X_i(x_1, \dots, x_n)=\sum_{p, q=1}^{n} a_{pq}^{(i)}x_px_q+\sum_{p=1}^{n}(b_p^{(i)}x_p+c_p^{(i)}),$$

$$a_{pq}^{(i)},\ b_p^{(i)},\ c_p^{(i)} \in C,\ p,\ q,\ i=\overline{1, n}. \tag{2}$$