(13) имеет место для всех $l = 1, 2, \ldots, k$; при этом $a_1 = \alpha_1$, $a_2 = \hat{\eta}_2(A)$, а $a_3 = |\dot{J}_2(T_3(A))|_{m_3}$, так как, согласно формуле (5), $\Theta_2(A) = 0$.

Для получения входящего в состав формулы (13) ядерного интервального индекса $\dot{J}_{l-1}(T_l(A))$ числа $T_l(A)$ достаточно над его интервально-модулярным представлением (11) выполнить операцию сужения на модули $m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}$ [5]. Искомое расчетное соотношение имеет вид

$$\dot{J}_{l-1}(T_l(A)) = \left[\frac{1}{m_{l-1}} \sum_{i=1}^{l-1} \left[\frac{m_{l-1}\,\alpha_{i,\,l-1}}{m_i}\right]\right] + \hat{\eta}_l(A).$$

С использованием двухместных функциональных преобразователей вычетов при максимуме распараллеливаний оно может быть реализовано за $1+]\log_2 k[$ модульных операций. Вычисление поправки Амербаева ($l = 3, 4, \ldots, k$) быстродействующими формирователями интегральных характеристик модулярного кода [7] занимает $2 +]\log_2 l[$ модульных операций. Таким образом, процесс формирования коэффициентов полиадического представления числа, базирующийся на формуле (13), является $(2+]\log_2 k[)$-тактовым, в то время как с помощью известной рекурсивной процедуры данная операция выполняется не менее, чем за k модульных тактов (см., например, [8]).

Список литературы

1. S r a b o N. S. and T a n a k a R. I. Residuc Arithmetic and Its Application to Computer Technology.— New York: Mc. Graw — Hill, 1967.
2. А м е р б а е в В. М. Теоретические основы машинной арифметики.— Алма-Ата, 1976, с. 324.
3. А к у ш с к и й И. Я., Б у р ц е в Б. М., П а к И. Т.— В кн.: Теория кодирования и оптимизации сложных систем. Алма-Ата, 1977, с. 17.
4. К о л я д а А. А.— Кибернетика, 1982, № 3, с. 124.
5. К о л я д а А. А., К р а в ц о в В. К.— В сб.: Математические вопросы исследования операций. Минк, 1982, с. 82.
6. К о л я д а А. А. Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.
7. К о л я д а А. А. А. с. 1007098 (СССР). Устройство для формирования позиционных признаков непозиционного кода.— БИ, 1983, № 11.
8. П о л и с с к и й Ю. Д., Ф а к т о р о в и ч М. Г. А. с. 637809 (СССР). Преобразователь кодов из системы остаточных классов в полиадический код. БИ, 1978, № 46.

Поступила в редакцию 20.06.84.

УДК 517.977.58

А. И. КАЛИНИН, Г. А. РОМАНЮК

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

1. В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, рассматривается следующая задача терминального управления:

$$\dot{x} = A(\mu)x + b(\mu)u,\ x(0) = x_0(\mu), \quad (1) \qquad |u(t)| \leqslant 1,\ t \in T, \qquad (2)$$

$$H(\mu)x(t_1) = g(\mu), \quad (3) \qquad J_\mu(u) = c'(\mu)x(t_1) \to \max, \qquad (4)$$

где $x \in R_n$, $g(\mu) \in R_m$, μ — малый положительный параметр; $A(\mu)$, $H(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$, $x_0(\mu)$ — матрицы и векторы соответствующих размеров; $\operatorname{rank} H(0) = m$.

Ниже будет постоянно использоваться понятие асимптотического разложения функции. Полином $\sum_{i=0}^{k} \mu^i f_i$ назовем асимптотическим разложением до

k-го члена для функции $f(\mu)$, если $f(\mu)=\sum_{i=0}^{k}\mu^i f_i+O(\mu^{k+1})$. Этот факт будем записывать следующим образом: $f(\mu)\sim\sum_{i=0}^{k}\mu^i f_i$.

Предполагается, что функции $A(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$, $g(\mu)$, $H(\mu)$, $x_0(\mu)$ допускают асимптотические разложения:

$$A(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i A_i,\ b(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i b_i,\ c(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i c_i,$$
$$g(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i g_i,\ H(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i H_i,\ x_0(\mu)\sim\sum_{i=0}^{l}\mu^i x_{0i};\ l\in N. \tag{5}$$

Кусочно-непрерывное управление, удовлетворяющее неравенству (2), назовем допустимым, если порожденная им траектория системы (1) при достаточно малых μ удовлетворяет краевому условию (3). Если же это условие выполняется с точностью $O(\mu^{k+1})$, то управление будем называть k-допустимым. Допустимое (k-допустимое) управление назовем s-оптимальным, если оно отличается по критерию качества от оптимального на величину $O(\mu^{s+1})$.

В [1] предложена процедура, позволяющая для любого $k=\overline{0,\ l}$ построить k-допустимое управление, являющееся и k-оптимальным. Суть этой процедуры состоит в малой корректировке оптимального управления так называемой базовой задачи, которая получается формально из (1)—(4) при $\mu=0$. При этом естественно предполагалось, что $b_0\neq 0$. В настоящей работе рассматривается случай, когда система (1) является слабоуправляемой, т. е. $b_0=0$. В этом случае необходимо дополнительно потребовать, чтобы

$$H_0x_0(t_1)=b_0, \tag{6}$$

где

$$\dot{x}_0=A_0x_0,\ x_0(0)=x_{00}, \tag{7}$$

так как иначе при достаточно малых μ в задаче (1)—(4) не существует допустимых управлений. Предположим также, что $b_1\neq 0$. Оказывается, что схема, предложенная в [1], применима и к задаче (1)—(4) со слабоуправляемой системой, если в качестве базовой взять следующую задачу:

$$\dot{x}_1=A_0x_1+A_1x_0+b_1u,\ x_1(0)=x_{01},\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in T,$$
$$H_0x_1(t_1)=g_1-H_1x_0(t_1),\ c'x_1(t_1)\to\max, \tag{8}$$

где $x_0(t)$, $t\in T$, есть решение системы (7).

Существуют различные методы решения класса линейных задач оптимального управления, к которому относится базовая задача. Для наших целей наиболее удобен прямой опорный метод [2], поскольку кроме оптимального управления он дает дополнительную информацию, необходимую для малой корректировки. Понятия, которыми оперирует этот метод, введем на примере возмущенной задачи (1)—(4); для базовой задачи соответствующие понятия определяются по аналогии.

2. Пусть τ_j, $j=\overline{1,\ m}$, — различные точки из T, занумерованные в порядке их возрастания. Назовем эти точки опорными моментами, а их совокупность $T_{\text{оп}}=\{\tau_j,\ j=\overline{1,\ m}\}$ — опорой, если не вырождена опорная матрица $\Phi_{\text{оп}}(\mu)=[\varphi(\tau_j,\ \mu),\ j=\overline{1,\ m}]$, где $\varphi(t,\ \mu)=H(\mu)q(t,\ \mu)$, $t\in T$, а функция $q(t,\ \mu)$, $t\in T$, есть решение уравнения

$$\dot{q}=-A(\mu)q,\ q(t_1)=b(\mu). \tag{9}$$

Пару $\{u_\mu,\ T_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления $u_\mu(t)$, $t\in T$, и опоры $T_{\text{оп}}$ назовем опорным управлением. Опоре $T_{\text{оп}}$ поставим в соответствие m —

вектор потенциалов $\pi'(\mu) = \Gamma_{оп}(\mu)\Phi_{оп}^{-1}(\mu)$, где $\Gamma_{оп}(\mu) = [\gamma(\tau_j, \mu), j = \overline{1, m}]$, $\gamma(t, \mu) = c'(\mu) q(t, \mu)$, $t \in T$. Через вектор потенциалов определим скалярную функцию $\Delta(t, \mu) = \pi'(\mu)\varphi(t, \mu) - \gamma(t, \mu)$, $t \in T$, которая называется коуправлением. Легко видеть, что в опорные моменты коуправление обращается в нуль.

В [2] показано, что опорное управление $\{u_\mu, T_{оп}\}$ будет оптимальным, если выполняются соотношения: $\Delta(t, \mu) \geqslant 0$ при $u_\mu(t) = -1$; $\Delta(t, \mu) \leqslant 0$ при $u_\mu(t) = 1$; $\Delta(t, \mu) = 0$ при $-1 < u_\mu(t) < 1$. Эти соотношения будем называть критерием оптимальности.

3. Рассмотрим теперь базовую задачу (8). Как уже отмечалось, она может быть решена прямым опорным методом; применение его приводит к оптимальному опорному управлению $\{u_\mu^{(0)}, T_{оп}^{(0)}\}$, удовлетворяющему критерию оптимальности [2]. Соответствующее коуправление базовой задачи обозначим через $\Delta^{(0)}(t)$, $t \in T$. Предположим, что оно обращается в нуль лишь в опорные моменты $\tau_j^{(0)} \in T_{оп}^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$, причем $\dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}) \neq 0$, $j = \overline{1, m}$. Тогда, согласно критерию оптимальности, управление $u^{(0)}(t)$, $t \in T$, имеет вид

$$u^{(0)}(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_1^{(0)}), & t \in [0, \tau_1), \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_m^{(0)}), & t \in [\tau_{m-1}, \tau_m), \\ -\operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_m^{(0)}), & t \in [\tau_m, t_1], \end{cases} \tag{10}$$

где $\tau_j = \tau_j^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$.

Покажем, что в возмущенной задаче (1)—(4) при достаточно малых μ существует допустимое управление $u_\mu^{(0)}(t)$, $t \in T$, вида (10) с точками переключения $\tau_j = \tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$, причем $\tau_j(0) = \tau_j^{(0)}$. Запишем траекторию системы (1) при этом управлении по формуле Коши и подставим в краевое условие (3). Произведя несложные преобразования, получим уравнение, задающее неявные функции $\tau_j = \tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$:

$$H(\mu) x^{(0)}(t, \mu) + 2H(\mu) \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}) \int_{\tau_j^{(0)}}^{\tau_j} q(t, \mu)\, dt - g(\mu) = 0, \tag{11}$$

где $x^{(0)}(t, \mu)$, $t \in T$, есть траектория системы (1), порожденная оптимальным управлением $u^{(0)}(t)$, $t \in T$, базовой задачи. В силу разложения (5) для матрицы $A(\mu)$ и предположений относительно $b(\mu)$ функция $q(t, \mu)$, $t \in T$, допускает асимптотическое разложение до l-го члена, причем равномерное по $t \in T$:

$$q(t, \mu) \sim \sum_{i=1}^{l} \mu^i q_i(t), \quad t \in T, \tag{12}$$

где $\dot{q}_i = -\sum_{j=1}^{i} A_{i-j} q_j$, $q_i(t_1) = b_i$, $i = \overline{1, l}$.

Обозначим через $K(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu)$ выражение, стоящее слева в (11), и рассмотрим m — вектор-функцию $R(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu) = \frac{1}{\mu} K(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu)$, определенную в области $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < t_1$, $0 < \mu < \mu_0$, где μ_0 — достаточно малое положительное число.

С учетом разложений (5), (12) и предположения (6) понятно, что эта функция допускает асимптотическое разложение до $(l-1)$-го члена: $R(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu) \sim \sum_{i=0}^{l-1} \mu^i r_i(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, коэффициенты которого таковы:

$$r_i(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \sum_{j=0}^{i+1} H_{i-j+1} x_j(t_1) + 2 \sum_{k=1}^{i+1} H_{i-k+1} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}) \times$$
$$\times \int_{\tau_j^{(0)}}^{\tau_j} q_k(t)\, dt - g_{i+1}, \quad i = \overline{0, l-1},$$

где $x_j(t)$, $t \in T$, — траектория системы $\dot{x}_j = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k + b_j u$, $x_j(0) = x_{0j}$, при управлении $u^{(0)}(t)$, $t \in T$; $j = \overline{0, l}$. Доопределим $R(\tau_1, \ldots, \tau_m, 0) = r_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$. Тогда функция $R(\tau_1, \ldots, \tau_m, \mu)$ будет непрерывной в области $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < t_1$, $0 \leqslant \mu < \mu_0$ вместе со своими частными производными по τ_j, $j = \overline{1, m}$. Из того, что управление $u^{(0)}(t)$, $t \in T$, является допустимым в базовой задаче, следует, что $R(\tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}, 0) = 0$. Кроме того, отличен от нуля якобиан

$$\frac{D(R_1, \ldots, R_m)}{D(\tau_1, \ldots, \tau_m)}(\tau_1^{(0)}, \ldots, \tau_m^{(0)}, 0) = 2^m \det [H_0 q_1(\tau_j^{(0)}) \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}), \ j = \overline{1, m}],$$

так как $\Phi_{\text{оп}}^{(0)} = [H_0 q_1(\tau_j^{(0)}), \ j = \overline{1, m}]$ есть опорная матрица базовой задачи. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой правосторонней окрестности нуля однозначно определены непрерывные функции $\tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$ $(\tau_j(0) = \tau_j^{(0)})$, удовлетворяющие соотношению $R(\tau_1(\mu), \ldots, \tau_m(\mu), \mu) = 0$ и, следовательно, уравнению (11). Таким образом, при достаточно малых μ существует единственное допустимое управление $u_\mu^{(0)}(t)$, $t \in T$, задачи (1) — (4) вида (10) с точками переключения $\tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$. Покажем, что это управление будет оптимальным в задаче (1) — (4).

4. Несложно убедиться в том, что функции $\tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$, допускают асимптотические разложения $\tau_j(\mu) \sim \sum_{i=0}^{l-1} \mu^i \tau_{ji}$, $\tau_{j0} = \tau_j^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$, причем при каждом $k = \overline{0, l-1}$ многочлены

$$\tau_{jk}(\mu) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \tau_{ji}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{13}$$

являются полиномами Тейлора k-й степени для функций $\bar{\tau}_{jk}(\mu)$, $j = \overline{1, m}$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i=0}^{k} \mu^i r_i(\bar{\tau}_{1k}(\mu), \ldots, \bar{\tau}_{mk}(\mu)) = 0 \tag{14}$$

в некоторой правосторонней окрестности нуля. Вычисляя правосторонние производные в нуле (до порядка k включительно) функции, стоящей слева в (14), и приравнивая их к нулю, получим k невырожденных систем линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов τ_{ji}, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, k}$:

$$Q_{001} v_1^{(1)} = g_2 - \sum_{i=0}^{2} H_{2-i} x_i(t_1),$$

$$Q_{001} v_2^{(1)} = g_3 - \sum_{i=0}^{3} H_{3-i} x_i(t_1) - (Q_{101} + Q_{002}) v_1^{(1)} - \frac{1}{2} Q_{011} v_1^{(2)}, \tag{15}$$

. . . .

где

$$Q_{prs} = \left[H_p \frac{d^r}{dt^r} q_s(\tau_j^{(0)}), \ j = \overline{1, m}\right], \quad v_r^{(s)} = \begin{bmatrix} \tau_{jr}^s \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}) \\ j = \overline{1, m} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Заметим, что Q_{001} есть опорная матрица базовой задачи, соответствующая опоре $T_{\text{оп}}^{(0)}$.

Совокупность точек $T_{\text{оп}}(\mu) = \{\tau_j(\mu),\ j = \overline{1, m}\}$ является опорой задачи (1) — (4), если μ достаточно мало. Соответствующее ему коуправление $\Delta(t, \mu)$, $t \in T$, допускает асимптотическое разложение $\Delta(t, \mu) \sim \sim \sum_{i=1}^{l} \mu^i \Delta_i(t)$, $t \in T$, со старшим коэффициентом $\Delta_1(t) = (\pi_0' H_0 - c_0')q_1(t)$, $t \in T$; $\pi_0' = [c_0' q_1(\tau_j^{(0)}),\ j = \overline{1, m}]\ [H_0 q_1(\tau_j^{(0)}),\ j = \overline{1, m}]^{-1}$. При этом существенно, что $\Delta_1(t)$, $t \in T$, совпадает с коуправлением $\Delta^{(0)}(t)$, $t \in T$, базовой задачи, отвечающим опоре $T_{\text{оп}}^{(0)}$. Отсюда и из предположений относительно $\Delta^{(0)}(t)$, $t \in T$, следует, что при достаточно малых μ функция $\Delta(t, \mu)$, $t \in T$, обращается в нуль лишь в опорные моменты $\tau_j(\mu)$, $j = \overline{1, m}$, причем $\operatorname{sgn} \dot{\Delta}(\tau_j(\mu), \mu) = \operatorname{sgn} \dot{\Delta}^{(0)}(\tau_j^{(0)}) \neq 0$, $j = \overline{1, m}$, а тогда опорное управление $\{u_\mu^{(0)}, T_{\text{оп}}(\mu)\}$ удовлетворяет критерию оптимальности.

Зададим теперь число k, $k = \overline{0, l-1}$, и рассмотрим управление $u_{\mu k}(t)$, $t \in T$, вида (10) с точками переключения $\tau_j = \tau_{jk}(\mu)$, $j = \overline{1, m}$, т. е. в виде многочленов (13). Это управление отличается от оптимального управления $u_\mu^{(0)}(t)$, $t \in T$, исходной задачи на множестве меры $O(\mu^{k+1})$. Тогда с учетом предположения относительно функции $b(\mu)$ получаем, что управление $u_{\mu k}(t)$, $t \in T$ является $(k+1)$-оптимальным $(k+1)$-допустимым в возмущенной задаче (1)—(4). Отметим, что оптимальное управление $u^{(0)}(t)$, $t \in T$, базовой задачи будет 1-оптимальным 1-допустимым в задаче (1)—(4).

Список литературы

1. Калинин А. И., Романюк Г. А.— Докл. АН БССР, 1985, т. 29, № 2.
2. Габасов Р., Гневко С. В., Кириллова Ф. М.— Автоматика и телемеханика, 1983, № 8, с. 30.

Поступила в редакцию 20.06.84.

УДК 517.38

ВУ КИМ ТУАН, ДИНЬ ХОАНГ АНЬ

ОБОБЩЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $_3F_2$ ПРИ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА И ПАРАМЕТРОВ

Известно много формул, выражающих величины обобщенного гипергеометрического ряда $_3F_2(z) \equiv {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z)$ при $z = 1$ [1, 2]. В настоящей работе устанавливаются некоторые новые формулы приведения функции $_3F_2$ в функцию Гаусса $_2F_1$ (1°) и с их помощью вычисляются значения функции $_3F_2(z)$ при некоторых других величинах аргумента z (2°).

1°. Подставив значение $e = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в известную формулу [1]

$$
{}_5F_4\left[\begin{matrix} a,\ \frac{a}{2}+1,\ c,\ d,\ e;\ 1 \\ \frac{a}{2},\ 1+a-c,\ 1+a-d,\ 1+a-e \end{matrix}\right] =
$$

$$
= \frac{\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(1+a-d)\,\Gamma(1+a-e)\,\Gamma(1+a-c-d-e)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-d-e)\,\Gamma(1+a-c-e)\,\Gamma(1+a-c-d)} \tag{1}
$$

и воспользовавшись равенствами