

1) при некотором $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнялось равенство $G(0) = h^n$,
 2) существовало натуральное число m такое, что функция $G(z)G(hz)\dots G(h^m z)$ не обращалась в нуль в кольце $\rho < |z| < R$. При выполнении этих условий общее решение однородного уравнения (2) дается формулой

$$\Phi(z) = CP(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln H(\tau) \Omega_{zz}(\tau) d\tau \right\},$$

где C — произвольная постоянная; $P(z)$ — многочлен, дивизор нулей которого совпадает с дивизором нулей функции $\Phi(z)$, а $H(z) = G(z)P(z)/P(hz)$.

Отметим, что дивизор функции $\Phi(z)$ легко находится из (2).

Полученные результаты о задаче (1) и об уравнении (2) содержат в себе результаты работ [3, с. 248; 4, 5], где эти задачи решались методом разложения в степенные ряды и рассматривались в связи с приложениями. Так, в работах [4, 5] задача А. И. Маркушевича $\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t)$ для кругового кольца исследовалась путем преобразования к функциональному уравнению типа (2). Идея этого преобразования принадлежит Э. И. Зверовичу.

Список литературы

1. Зверович Э. И. — Сибирск. мат. ж., 1973, т. 14, № 1, с. 64.
2. Зверович Э. И. — Успехи мат. наук, 1971, т. 26, вып. 1(157), с. 113.
3. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнение типа свертки. — М., 1978.
4. Жукова Н. И. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех. 1979, № 3, с. 72.
5. Комяк И. И., Митюшев В. В. — Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1979, № 3, с. 25.

Поступила в редакцию 04.06.84.

УДК 681.14

А. А. КОЛЯДА

О СТРУКТУРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДУЛЯРНОГО КОДА

Интегральные характеристики модулярного кода (коэффициенты полиадического представления, ранг, ядро, характер, минимальный след, интервальный индекс числа) играют ключевую роль в рамках соответствующих им вариантов модулярной арифметики [1—5], поэтому исследование структуры и разработка методов формирования интегральных характеристик являются вопросами первостепенной важности.

В [2—5] установлено, что ранг, ядро и характер в нормированной модулярной системе счисления (МСС) с модулями $m_1, m_2, \dots, m_k$ ($m_k \geq k-2$, $k \geq 2$) имеют одинаковую структуру, описываемую соотношением $\pi(A) = \hat{\pi}(A) + c\theta_k(A)$, где $\pi(A)$ — некоторое оценочное значение интегральной характеристики $\pi(A)$ модулярного кода числа A ; C — постоянный коэффициент, а $\theta_k(A)$ — двузначная величина, называемая поправкой Амербаева. В данной работе показано, что аналогичным свойством обладают коэффициенты полиадического представления, а следовательно, минимальный след и интервальный номер числа A .

Введем обозначения:

$D_l = \{0, 1, \dots, M_l - 1\}$ — диапазон МСС с модулями $m_1, m_2, \dots, m_l$ ($(m_i, m_j) = 1$; $i, j = 1, 2, \dots, l$; $i \neq j$), $M_l = \prod_{i=1}^l m_i$, $l \geq 1$.

$|X|_m$ — наименьший неотрицательный вычет, сравнимый с величиной X по модулю m .

$[X]$ — целая часть действительного числа X .

$\{X\}$ — наименьшее целое число, не меньшее X .

$(\alpha_{1,l}, \alpha_{2,l}, \dots, \alpha_{l,l})$ — нормированное модулярное представление целого числа A в МСС с модулями $m_1, m_2, \dots, m_l$, где $\alpha_{i,l} = |AM_{l,l}^{-1}|_{m_i}$, $M_{l,l} = \frac{M_l}{m_l}$ ($i = 1, 2, \dots, l$; $l \geq 1$).

Определение 1. Величину $N_l(A) = \left[\frac{A}{M_l} \right]$ назовем интервальным номером l -ого порядка целого числа A относительно модулей $m_1, m_2, \dots, m_l$ ($l \geq 1$).

Определение 2. Представление целого числа A вида

$$A = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \alpha_{i,l-1} + I_{l-1}(A) M_{l-1} \quad (1)$$

называется интервально-остаточным или интервально-модулярным представлением, при этом целые числа $I_{l-1}(A)$ и $J_l(A) = \left[\frac{I_{l-1}(A)}{m_l} \right]$ называются соответственно интервальным и ядерным интервальным индексами числа A относительно системы модулей $m_1, m_2, \dots, m_l$ ($l \geq 1$).

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. (Об интервальном индексе числа). Для интервального индекса $I_{l-1}(A)$ произвольного целого числа A имеет место формула

$$I_{l-1}(A) = \hat{\eta}_l(A) + J_l(A) m_l, \quad (2)$$

в которой

$$\hat{\eta}_l(A) = \left| \alpha_{l,l} - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\alpha_{i,l-1}}{m_i} \right|_{m_l}, \quad (3)$$

при этом

$$N_l(A) = J_l(A) + \Theta_l(A), \quad (4)$$

где $\Theta_l(A)$ — поправка Амербаева l -ого порядка, соответствующая числу A в системе с модулями $m_1, m_2, \dots, m_l$, определяемая соотношением

$$\theta_l(A) = - \left[\frac{1}{m_l} (N_{l-1}(|A|_{m_l}) - \rho_{l-1}(A)) \right], \quad (5)$$

$$\rho_{l-1}(A) = -I_{l-1}(|A|_{m_{l-1}}). \quad (6)$$

Доказательство. Согласно лемме Евклида из теории делимости и определению 2, интервальный индекс $I_{l-1}(A)$ числа A единственны образом представим в виде $I_{l-1}(A) = |I_{l-1}(A)|_{m_l} + J_l(A) m_l$. Следовательно

но, соотношение (2) выполняется тогда и только тогда, когда $\hat{\eta}_l(A) = |I_{l-1}(A)|_{m_l}$. Так как модуль m_l взаимно прост с модулями $m_1, m_2, \dots,$

m_{l-1} , то из (1) находим $\hat{\eta}_l(A) = |I_{l-1}(A)|_{m_l} = \left| \frac{1}{M_{l-1}} (A - \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \times \right.$
 $\left. \times \alpha_{i,l-1}) \right|_{m_l} = \left| AM_{l,l}^{-1} \right|_{m_l} \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\alpha_{i,l-1}}{m_i} \Big|_{m_l}$, что доказывает соотношение (3).

Применяя (1) и (6), можно записать

$$|A|_{m_{l-1}} = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i,l-1} \alpha_{i,l-1} - \rho_{l-1}(A) M_{l-1}. \quad (7)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$A = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i, l-1} \alpha_{i, l-1} + \hat{\eta}_l(A) M_{l-1} + J_l(A) M_l, \quad (8)$$

откуда с учетом (7) имеем $A = |A|_{M_{l-1}} + \rho_{l-1}(A) M_{l-1} + \hat{\eta}_l(A) M_{l-1} + J_l \times \times (A) M_l$. Разделив последнее соотношение на M_{l-1} и взяв затем от обеих его частей антье, находим, что

$$N_{l-1}(A) = \rho_{l-1}(A) + \hat{\eta}_l(A) + J_l(A) m_l. \quad (9)$$

Но так как по лемме Евклида $A = |A|_{M_l} + N_l(A) M_l$, то

$$N_{l-1}(A) = N_{l-1}(|A|_{M_l}) + N_l(A) m_l, \quad (10)$$

поэтому из (9) и (10) вытекает равенство

$$N_l(A) m_l + N_{l-1}(|A|_{M_l}) - \rho_{l-1}(A) = \hat{\eta}_l(A) + J_l(A) m_l,$$

которое после деления на m_l и последующего перехода к антье ввиду неравенства $0 \leq \hat{\eta}_l(A) < m_l$ принимает вид $N_l(A) + \left[\frac{1}{m_l} (N_{l-1}(|A|_{M_l}) - \rho_{l-1}(A)) \right] = J_l(A)$, что в соответствии с обозначением (5) эквивалентно (4).

Теорема доказана.

Теорема 2. (О полиадическом коде числа). Пусть в МСС с модулями $m_1, m_2, \dots, m_k$ ($k \geq 3$) задано число $A \in D_k$ и пусть

$$T_l(A) = \sum_{i=1}^{l-1} M_{i, l-1} \alpha_{i, l-1} + \hat{\eta}_l(A) M_{l-1}. \quad (11)$$

Тогда для коэффициента a_l полиадического представления числа A :

$$A = \sum_{i=1}^k a_i M_{i-1}, \quad 0 \leq a_i < m_i, \quad M_0 = 1 \quad (12)$$

справедлива формула

$$a_l = |J_{l-1}(T_l(A)) + \Theta_{l-1}(A)|_{m_l}, \quad l = 3, 4, \dots, k, \quad (13)$$

где $\hat{\eta}_l(A)$ определяется соотношением (3), $J_{l-1}(T_l(A))$ — ядерный интервальный индекс числа $T_l(A)$, а $\Theta_{l-1}(A)$ — поправка Амербаева $(l-1)$ -ого порядка, соответствующая числу A в системе с модулями $m_1, m_2, \dots, m_{l-1}$ (см. определение 2 и формулу (5)).

Доказательство. Из (12) следует, что при любом $l = 1, 2, \dots, k-1$ $|A|_{M_l} = \sum_{i=1}^l a_i M_{i-1}$, в результате чего $N_{l-1}(|A|_{M_l}) = a_l$, но так как, согласно (8) и (11), $A = T_l(A) + J_l(A) M_l$, а значит, $|A|_{M_l} = |T_l(A)|_{M_l}$, то и $N_{l-1}(|T_l(A)|_{M_l}) = a_l$. Применяя с учетом последнего соотношения к числу $T_l(A)$ формулу (10), будем иметь $N_{l-1}(T_l(A)) = a_l + N_l(T_l(A)) m_l$, откуда заключаем, что $a_l = |N_{l-1}(T_l(A))|_{m_l}$. Теперь для получения искомого результата формулы (13) достаточно к интервальному номеру $(l-1)$ -ого порядка числа $T_l(A)$ применить формулу (4) из теоремы 1 при $l = 3, 4, \dots, k$.

Теорема доказана.

Замечание. Примем по определению $I_0(A) = J_0(A) = A$, $J_1(A) = N_1(A)$, $T_1(A) = \alpha_1 = |A|_{m_1}$. Тогда нетрудно проверить, что формула

(13) имеет место для всех $l = 1, 2, \dots, k$; при этом $\alpha_1 = \alpha_1$, $\alpha_2 = \hat{\eta}_2(A)$, а $\alpha_3 = |\hat{J}_2(T_3(A))|_{m_3}$, так как, согласно формуле (5), $\Theta_2(A) = 0$.

Для получения входящего в состав формулы (13) ядерного интервального индекса $\hat{J}_{l-1}(T_l(A))$ числа $T_l(A)$ достаточно над его интервально-модулярным представлением (11) выполнить операцию сужения на модули $m_1, m_2, \dots, m_{l-1}$ [5]. Искомое расчетное соотношение имеет вид

$$\hat{J}_{l-1}(T_l(A)) = \left[\frac{1}{m_{l-1}} \sum_{i=1}^{l-1} \left[\frac{m_{l-1} \alpha_{l, l-1}}{m_i} \right] \right] + \hat{\eta}_l(A).$$

С использованием двухместных функциональных преобразователей вычетов при максимуме распараллеливаний оно может быть реализовано за $1 + \lceil \log_2 k \rceil$ модульных операций. Вычисление поправки Амербаева ($l = 3, 4, \dots, k$) быстродействующими формирователями интегральных характеристик модулярного кода [7] занимает $2 + \lceil \log_2 l \rceil$ модульных операций. Таким образом, процесс формирования коэффициентов полиадического представления числа, базирующийся на формуле (13), является $(2 + \lceil \log_2 k \rceil)$ -тактовым, в то время как с помощью известной рекурсивной процедуры данная операция выполняется не менее, чем за k модульных тактов (см., например, [8]).

Список литературы

1. Srabo N. S. and Tanaka R. I. Residuc Arithmetic and Its Application to Computer Technology.— New York: Mc. Graw — Hill, 1967.
2. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики.— Алма-Ата, 1976, с. 324.
3. Акушский И. Я., Бурцев Б. М., Пак И. Т.— В кн.: Теория кодирования и оптимизации сложных систем. Алма-Ата, 1977, с. 17.
4. Коляда А. А.— Кибернетика, 1982, № 3, с. 124.
5. Коляда А. А., Кравцов В. К.— В сб.: Математические вопросы исследования операций. Минск, 1982, с. 82.
6. Коляда А. А. Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.
7. Коляда А. А. А. с. 1007098 (СССР). Устройство для формирования позиционных признаков непозиционного кода.— БИ, 1983, № 11.
8. Полисский Ю. Д., Факторович М. Г. А. с. 637809 (СССР). Преобразователь кодов из системы остаточных классов в полиадический код. БИ, 1978, № 46.

Поступила в редакцию 20.06.84.

УДК 517.977.58

А. И. КАЛИНИН, Г. А. РОМАНЮК

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

1. В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, рассматривается следующая задача терминального управления:

$$\dot{x} = A(\mu)x + b(\mu)u, x(0) = x_0(\mu), \quad (1) \quad |u(t)| \leq 1, t \in T, \quad (2)$$

$$H(\mu)x(t_1) = g(\mu), \quad (3) \quad J_\mu(u) = c'(\mu)x(t_1) \rightarrow \max, \quad (4)$$

где $x \in R_n$, $g(\mu) \in R_m$, μ — малый положительный параметр; $A(\mu)$, $H(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$, $x_0(\mu)$ — матрицы и векторы соответствующих размеров; $\text{rank } H(0) = m$.

Ниже будет постоянно использоваться понятие асимптотического разложения функции. Полином $\sum_{i=0}^k \mu^i f_i$ назовем асимптотическим разложением до