З а м е ч а н и е. Количество обращений к процедурам вычисления значений функций $f_j(x)$, $j=1,\ldots,n$ не превосходит $2n\log_2 H$.

Список литературы

1. G i r l i c h E., K o w a l i o w M. Nichtlineare discrete Optimierung.— Berlin, 1981.
2. Г э р и М., Д ж о н с о н Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М., 1982.
3. L a w l e r E.— Math. Oper. Res. 1979, v. 4, № 4, p. 339.
4. А х о А., Х о п к р о ф т Д., У л ь м а н Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М., 1979.
5. К о в а л е в М. М., К о т о в В. М.— Докл. АН БССР, 1982, т. 26, № 11, с. 969.

Поступила в редакцию 26.04.84.

УДК 517.544.8

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. А. КРУШЕВСКИЙ, В. В. МИТЮШЕВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ КОЛЬЦА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Пусть заданы константы r, R, h, θ такие, что $0<r<R<+\infty$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $h=\frac{r}{R}e^{i\theta}$. Рассмотрим задачу нахождения всех функций Φ, аналитических в кольце $r<|z|<R$, H-непрерывно продолжимых на граничные окружности, по краевому условию

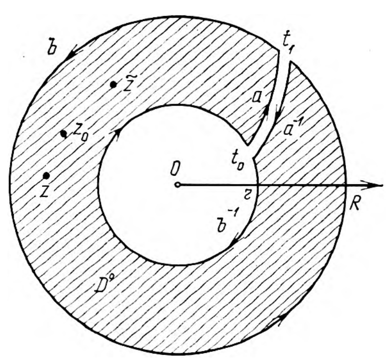
$$\Phi(ht)=G(t)\Phi(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{1}$$

где L — окружность $|t|=R$, ориентированная по часовой стрелке, $G(t)\neq 0$ и $g(t)$ — заданные на L H-непрерывные функции. Если произвести конформное склеивание [1] граничных окружностей замкнутого кольца $r\leqslant|z|\leqslant R$, отождествляя все пары точек вида $t\in L$ и ht, то кольцо превратится в замкнутую риманову поверхность $\mathbf{M}$ рода 1 (гомеоморфную тору). При этом задача (1) перейдет в задачу Римана на $\mathbf{M}$, изученную в общем виде в [2]. Здесь ставится задача построить явное (т. е. в квадратурах) решение задачи (1) и применить его к исследованию и решению функционального уравнения

$$\Phi(hz)=G(z)\Phi(z)+g(z),\quad |z|\leqslant R \tag{2}$$

для нахождения функций Φ, аналитических в круге $|z|<R$, предполагая, что коэффициенты G и g аналитичны в круге $|z|<R$, кроме конечного числа полюсов, и могут иметь там конечное число нулей.

2. В [2] показано, что задача Римана на римановой поверхности решается явно, если известны функционалы поверхности, т. е. всюду мероморфные функции и абелевы дифференциалы с заданными особенностями. Функционалы введенной здесь поверхности $\mathbf{M}$ можно явно выразить через эллиптические функции. Проще, однако, их выразить непосредственно через тэта-ряды, обладающие свойством автоморфности относительно бесконечной циклической группы, порожденной преобразованием $\mathrm{T}: z\to hz$. Фиксируя кольцо $r<|z|\leqslant R$, являющееся одной из фундаментальных областей указанной группы, произведем вспомогательные построения (каноническое рассечение) так, как указано на рисунке. Точка $t_1\in L$ фиксируется произ-



Каноническое рассечение римановой поверхности М вольно, а $t_0=ht_1$. Линия $\mathbf{a}$ — простая гладкая кривая, лежащая в кольце и соединяющая точки t_0 и t_1. Линия $\mathbf{b}$ — окружность $|t|=R$, ориентированная против часовой стрелки. Обозначим через D^0 односвязную область, заштрихованную на рисунке. Ее край ∂D состоит из кривых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, показанных вместе с ориентацией на рисунке. Точки $z_0 \in D^0$, $\tilde{z} \in D^0 \cup \partial D$ фиксируются так, что $z_0 \neq \tilde{z}$. Точка $z \in D^0$ считается переменной. Очевидно, что дифференциал $\frac{d\tau}{\tau}$ образует базис абелевых дифференциалов 1 рода на $\mathbf{M}$. Его периоды таковы

$$\int_{\mathbf{a}} \frac{d\tau}{\tau} = \ln \frac{1}{h}, \quad \int_{\mathbf{b}} \frac{d\tau}{\tau} = 2\pi i. \tag{3}$$

Далее, в точках, отличных от полюсов, тэта-ряд

$$\omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\tau - h^k z} - \frac{1}{\tau - h^k z_0} \right) d\tau \tag{4}$$

абсолютно сходится и при фиксированных z, $z_0 \in D^0$, $z \neq z_0$ является по переменной τ абелевым дифференциалом 3-го рода с двумя простыми полюсами в точках $\tau = z$ и $\tau = z_0$, вычеты в которых равны $(+1)$ и (-1) соответственно. Периоды дифференциала (4) таковы

$$\int_{\mathbf{a}} \omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau = -\ln \frac{z}{z_0}, \quad \int_{\mathbf{b}} \omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau = 0, \tag{5}$$

где под $\ln \frac{z}{z_0}$ понимается ветвь, непрерывная в D^0 и равная нулю при $z = z_0$. Исследуя выражение (4) как функцию переменного z, можно заключить, что оно является некоторым аналогом ядра Коши на $\mathbf{M}$. Однако для построения решения однородной задачи (1) нужен другой аналог ядра Коши, нормированный относительно выбранного нами канонического рассечения (см. рисунок):

$$\Omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau := \omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau - \frac{d\tau}{\tau \ln h} \ln \frac{z}{z_0}. \tag{6}$$

Его периоды таковы:

$$\int_{\mathbf{a}} \Omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau = 0, \quad \int_{\mathbf{b}} \Omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau = -\frac{2\pi i}{\ln h} \ln \frac{z}{z_0}. \tag{7}$$

Для решения неоднородных задач требуются такие аналоги ядра Коши, которые были бы автоморфными по переменной z. Простейшее из таких ядер $A(z, \tau)\, d\tau$ выражается равенством

$$A(z, \tau)\, d\tau := \omega_{z\tilde{z}}(\tau)\, d\tau - z_1 \omega_{z\tilde{z}}(z_1) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{8}$$

Далее, для каждого $\nu = 2, 3, \ldots$ введем еще автоморфную функцию

$$f_\nu(z, z_0) := \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\nu-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h^k}{(z - h^k z_0)^\nu}, \tag{9}$$

которая имеет на $\mathbf{M}$ единственный полюс в точке $z = z_0$ кратности ν с главной частью $(z - z_0)^{-\nu}$.

3. Рассмотрим вначале однородную ($g(t) \equiv 0$) задачу (1). Пусть $\varkappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_L$ — индекс коэффициента G. Известно, что при $\varkappa < 0$ однородная задача (1) имеет только тривиальное решение, при $\varkappa \geqslant 1$ она имеет $\varkappa$ линейно независимых решений, а при $\varkappa = 0$ — не более одного. Общее решение однородной задачи (1) находится с использованием построенных выше функционалов и выражается по формуле

$$\Phi_0(z)=\varphi(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\,\Omega_{zz_0}(\tau)\,d\tau-{}'\!\!\int_{\tilde z}^{z_1}\Omega_{zz_0}(\tau)\,d\tau-\frac{2\pi i}{\ln h}m\ln\frac{z}{z_0}\right\},\quad(10)$$

где $\ln G(\tau)$ — произвольно зафиксированная непрерывная при $\tau\neq t_1$ ветвь, а точка z_1, а также целые числа m и n удовлетворяют уравнению

$$\ln\frac{z_1}{\tilde z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-n\ln h+2\pi i m,\qquad(11)$$

называемому «проблемой обращения Якоби». Ее единственное решение, удовлетворяющее условию $r<|z_1|\leqslant R$, легко находится из (11) явно. Входящая в (10) функция $\varphi(z)$ — произвольная автоморфная функция, кратная дивизору $(t_1)^{-\varkappa}(z_1)(\tilde z)^{-1}$ порядка $(-\varkappa)$, легко выражается в явном виде через построенные функционалы. Например, в случае, когда в дивизоре все точки t_1, z_1, $\tilde z$ различны, и при $\varkappa\geqslant 2$ имеем:

$$\varphi(z)=C_1\left(\omega_{zz_1}(t_1)-\frac{\tilde z}{t_1}\,\omega_{zz_1}(\tilde z)\right)+\sum_{\nu=2}^{\varkappa}C_\nu\left(f_\nu(z,t_1)-f_\nu(z_1,t_1)\right),\quad(12)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_\varkappa$ — произвольные постоянные. В случае $\varkappa=1$ в (12) надо оставить только член с C_1. При $\varkappa=0$ будет $\varphi(z)\equiv C$, если $z_1=\tilde z$ и $\varphi(z)\equiv 0$, если $z_1\neq\tilde z$.

Условия разрешимости и решения неоднородной задачи (1) из-за недостатка места выпишем только в случае $\varkappa=0$. Обозначая

$$X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\,\Omega_{zz_0}(\tau)\,d\tau-{}'\!\!\int_{\tilde z}^{z_1}\Omega_{zz_0}(\tau)\,d\tau-\frac{2\pi i}{\ln h}m\ln\frac{z}{z_0}\right\},\quad(13)$$

рассмотрим два случая $z_1\neq\tilde z$ и $z_1=\tilde z$. В первом случае неоднородная задача (1) разрешима безусловно, а ее единственное решение выражается равенством

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X(h\tau)}A(z,\tau)\,d\tau.\qquad(14)$$

Во втором случае она разрешима лишь при выполнении условия $\int_L\frac{g\tau}{X(h\tau)}\times\frac{d\tau}{\tau}=0$, а ее общее решение имеет вид

$$\Phi(z)=CX(z)+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X(h\tau)}\,\omega_{zz_0}(\tau)\,d\tau.$$

4. Применим полученные результаты к исследованию функционального уравнения (2). Выберем ρ такое, чтобы функция $G(z)$ не имела нулей и полюсов в области $0<|z|<\rho$. Решим задачу Карлемана для кольца $\frac{r\rho}{R}<|z|<\rho$. Очевидно, что из неразрешимости задачи Карлемана следует неразрешимость уравнения (2), а из разрешимости уравнения (2) следует разрешимость задачи Карлемана. Ясно также, что в случае разрешимости любое решение уравнения (2) содержится в формуле общего решения задачи (1).

Полагая $g(z)\equiv 0$, рассмотрим несколько подробнее случай однородного уравнения (2). Пусть $\Phi(z)$ — решение задачи Карлемана (1) для кольца $\frac{r\rho}{R}<|z|<\rho$. Функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается в область $0<|z|<\frac{r\rho}{R}$ по формуле (2), а в кольцо $\rho<|z|<R$ по соотношению $\Phi(z)=\Phi(hz)/G(z)$. Тогда справедлива

Теорема. Для существования нетривиального решения однородного ($g(z)\equiv 0$) уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы

1) при некотором $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялось равенство $G(0) = h^n$,

2) существовало натуральное число m такое, что функция $G(z)G(hz)\ldots G(h^m z)$ не обращалась в нуль в кольце $\rho < |z| < R$. При выполнении этих условий общее решение однородного уравнения (2) дается формулой

$$\Phi(z) = CP(z) \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln H(\tau)\, \Omega_{zz_0}(\tau)\, d\tau\right\},$$

где C — произвольная постоянная; $P(z)$ — многочлен, дивизор нулей которого совпадает с дивизором нулей функции $\Phi(z)$, а $H(z) = G(z)P(z)/P(hz)$.

Отметим, что дивизор функции $\Phi(z)$ легко находится из (2).

Полученные результаты о задаче (1) и об уравнении (2) содержат в себе результаты работ [3, с. 248; 4, 5], где эти задачи решались методом разложения в степенные ряды и рассматривались в связи с приложениями. Так, в работах [4, 5] задача А. И. Маркушевича $\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t)$ для кругового кольца исследовалась путем преобразования к функциональному уравнению типа (2). Идея этого преобразования принадлежит Э. И. Зверовичу.

Список литературы

1. Зверович Э. И.— Сибирск. мат. ж., 1973, т. 14, № 1, с. 64.
2. Зверович Э. И.— Успехи мат. наук, 1971, т. 26, вып. 1 (157), с. 113.
3. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнение типа свертки.— М., 1978.
4. Жукова Н. И.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех. 1979, № 3, с. 72.
5. Комяк И. И., Митюшев В. В.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 3, с. 25.

Поступила в редакцию 04.06.84.

УДК 681.14

А. А. КОЛЯДА

О СТРУКТУРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДУЛЯРНОГО КОДА

Интегральные характеристики модулярного кода (коэффициенты полиадического представления, ранг, ядро, характер, минимальный след, интервальный индекс числа) играют ключевую роль в рамках соответствующих им вариантов модулярной арифметики [1—5], поэтому исследование структуры и разработка методов формирования интегральных характеристик являются вопросами первостепенной важности.

В [2—5] установлено, что ранг, ядро и характер в нормированной модулярной системе счисления (МСС) с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(m_k \geqslant k-2,\ k > 2)$ имеют одинаковую структуру, описываемую соотношением $\pi(A) = \hat{\pi}(A) + c\theta_k(A)$, где $\hat{\pi}(A)$ — некоторое оценочное значение интегральной характеристики $\pi(A)$ модулярного кода числа A; C — постоянный коэффициент, а $\Theta_k(A)$ — двузначная величина, называемая поправкой Амербаева. В данной работе показано, что аналогичным свойством обладают коэффициенты полиадического представления, а следовательно, минимальный след и интервальный номер числа A.

Введем обозначения:

$D_l = \{0, 1, \ldots, M_l - 1\}$ — диапазон МСС с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_l$ $((m_i, m_j) = 1;\ i, j = 1, 2, \ldots, l;\ i \neq j)$, $M_l = \prod\limits_{i=1}^{l} m_i,\ l \geqslant 1$.