12) $L=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}\right)$, $M=\frac{2\varphi w+(3-2\varphi)}{2(w-1)}$, $N=\frac{N_1w^2+N_2w-2H}{2(w-1)}$.
Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением без подвижных критических точек при следующих условиях:

$2N_1q_2+12r_3=-4r_3'$; $2N_1q_3+2N_2q_2+12\varphi r_4+18r_3-12\varphi r_3=-4r_4'+4r_3'$; $-4Hq_2+2N_2q_3+12\varphi r_5+18r_4-12\varphi r_4=-4r_5'+4r_4'$; $4Hq_3+18r_5-12\varphi r_5=$ $=4r_5'$; $8\varphi q_2=-4q_2'+6r_3$; $8\varphi q_3+12q_2-8\varphi q_2=4q_2'-4q_3'+4r_3+10r_4$; $12q_3-8\varphi q_3=4q_3'-r_4+14r_5$; $-8H=-5r_5$; $6N_1=4q_2$; $6N_2=2q_2+8q_3$; $6H=q_3$; $p_2=q_4=r_6=0$.

13) $L=\frac{2}{3w}+\frac{1}{2(w-1)}$, $M=\frac{Bw^2+(C-B)w-c}{w(w-1)}$, $N=\frac{N_1w^3+N_2w^2+N_3w+N_4}{3w(w-1)}$.
Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением с неподвижными критическими точками при следующих условиях:
$2N_1q_2-18Br_3=-6r_3'$; $2N_1q_3+2N_2q_2-18Br_4-18(C-B)r_3=-6r_4'+$ $+6r_3'-7r_3p_2$; $2N_1q_4+2N_2q_3+2N_3q_2-18Br_5-18(C-B)r_4=-6r_5'+6r_4'-7p_2r_4+$ $+4p_2r_3$; $2N_2q_4+2N_3q_3+2N_4q_2-18Br_6-18(C-B)r_5+18Cr_4=-6r_6'+$ $+6r_5'-7p_2r_5+4p_2r_4$; $2N_3q_4+2N_4q_3-18(C-B)r_6+18Cr_5=6r_6'-7p_2r_6+$ $+4p_2r_5$; $2N_4q_4+18Cr_6=4p_2r_6$; $-12Bq_2=-6q_2'+4r_3$; $4p_2N_1-12Bq_3-$ $-12(C-B)q_2=-6q_3'+6q_2'+6r_3+9r_4-7p_2q_2$; $4p_2N_2-12Bq_4-12(C-$ $-B)q_3+12Cq_2=-6q_4'+6q_3'+15r_5-7p_2q_3+4p_2q_2$; $4p_2N_3-12(C-B)q_4+$ $+12Cq_3=6q_4'-6r_5+21r_6-7p_2q_4+4p_2q_3$; $4p_2N_4+12Cq_4=-12r_6+4p_2q_4$; $6N_1=2q_2$; $6N_2-6Bp_2+6p_2'=8q_3+4q_2$; $6N_3-6(C-B)p_2-6p_2'=-$ $-2q_3+12q_4-7p_2^2$; $6N_4+6Cp_2=-8q_4+2p_2^2$.

Для всех остальных значений вектора (L, M, N) мы получаем тривиальное уравнение $w'=0$.

Список литературы

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А. Дифференц. уравнения, 1953—1961, 1972, т. 8, № 10.

Поступила в редакцию 17.05.83.

УДК 519.1

Н. А. НАУМОВИЧ

ДИХОТОМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общеизвестна роль эвристических процедур и приближенных алгоритмов решения задач оптимизации на графах, сетях и других дискретных структурах. В настоящее время утверждает себя теория градиентных алгоритмов дискретной оптимизации, имеющая в своем арсенале богатые семейства алгоритмов, условия, при которых они дают оптимальные решения, методики оценки точности алгоритмов для различных классов задач. Исследования градиентных алгоритмов обобщены в монографии [1], которая содержит и детальную библиографию.

Настоящая заметка посвящена построению эффективного, с точки зрения количества выполняемых операций, алгоритма решения следующей задачи целочисленного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \quad (1), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leqslant b, \quad (2)$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant H,\ j = 1, \ldots, n, \quad (3), \qquad x_j \text{ — целые},\ j = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Здесь $f_j(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$ — неубывающие выпуклые вверх функции одного аргумента; h_j, a_j, $j = 1, \ldots, n$, b — целые положительные числа. Кроме того, не нарушая общности, считаем, что $a_j \leqslant b$, $j = 1, \ldots, n$.

Задача (1)—(4) является NP-трудной, поскольку даже в случае $H = 1$ и линейных функций f_j ее аналог в форме задачи распознавания свойств входит в список NP-полных задач в [2].

Линейная задача о рюкзаке. Пусть в (1)—(4) $f_j(x_j) = c_j x_j$, $H = 1$. Получаем задачу

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (5), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, \qquad (6)$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n \quad (7), \qquad x_j \text{ — целые},\ j = 1, \ldots, n. \qquad (8)$$

Широко известен «стандартный» градиентный алгоритм решения задачи (5)—(8), который может быть сформулирован следующим образом: если c_j — «стоимости», a_j — «объемы», то упорядочим «предметы» по неубыванию «удельной ценности» c_j/a_j, а затем, начиная с пустого рюкзака, будем класть в него предметы с наибольшей среди оставшихся удельной ценностью до тех пор, пока позволяет емкость рюкзака. Затем сравним стоимость полученного решения с максимальной из стоимостей отдельных предметов и выберем большую. Легко показать, что построенное таким образом решение имеет стоимость, отличающуюся от стоимости оптимального решения не более, чем на 50 % для любой конкретной задачи вида (5)—(8).

Описанный алгоритм требует сортировки множества из чисел — удельных ценностей, и, следовательно, сложность его работы в наихудшем случае составляет $O(n \log_2 n)$.

Однако эта оценка может быть уменьшена с помощью алгоритмов нахождения медианы множества [3]. Назовем медианой линейно упорядоченного множества $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $[n/2]$-й после наименьшего элемент в множестве S. Как показано в [4], медиана линейно упорядоченного n-элементного множества может быть найдена за линейное время. Пусть МЕДИАНА (n, S) — процедура, которая находит медиану в n-элементном множестве S.

Опишем алгоритм, который строит то же решение задачи (5)—(8), что и стандартный градиентный алгоритм, но имеет лучшую оценку трудоемкости.

Алгоритм А1.

Вход. Множество предметов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, стоимости c_j, $j \in N$, веса a_j, $j \in N$, емкость рюкзака b.

Выход. Множество предметов S, составляющих градиентное решение задачи (5)—(8).

Метод. $S := \{\varnothing\}$

Вызвать рекурсивную процедуру 1-ДИХОТОМИЯ (N, b, S)

Если $\sum_{j \in S} c_j \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} c_j = c_{j_0}$, то $S := \{j_0\}$.

Процедура 1-ДИХОТОМИЯ (N, b, S).

```
ЕСЛИ
        N = {∅}
ТО
    ВЫДАТЬ (S)
ИНАЧЕ
        пусть Г = {c_j/a_j | j ∈ N}
        γ := МЕДИАНА (|N|, Г).
        I := {i | c_i/a_i ≥ γ}
        ЕСЛИ
            ∑_{j∈I} a_j ≥ b
```

11. ТО
12. 1-ДИХОТОМИЯ ($\dot{I}$, b, S)
13. ИНАЧЕ
14. 1-ДИХОТОМИЯ ($N \setminus \dot{I}$, $b - \sum_{j \in \dot{I}} a_j$, $S \cup \dot{I}$)
15. Конец

Утверждение 1. Время работы процедуры 1-ДИХОТОМИЯ в наихудшем случае составляет $O(n)$, где n — мощность множества N.

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $n = 2^k$, где k — некоторое целое положительное число. Общее время, затрачиваемое процедурой в строках 2, 4, 6, 8, 10, не превосходит $c_1 n$, где c_1 — некоторая константа. Время работы процедуры МЕДИАНА в строке 7 не превосходит $c_2 n$, где c_2 — некоторая константа. Мощность множества $\dot{I}$ в строке 8 равна $n/2$.

Если $T(n)$ — время работы всей процедуры, то, поскольку строки 12 и 14 альтернативны, то $T(n) \leqslant cn + T(n/2)$, где c — некоторая константа. По индукции можно показать, что $T(n) = O(n)$.

Выпуклая задача о рюкзаке. Рассмотрим задачу (1)—(4). Ввиду того, что она является обобщением задачи (5)—(8), назовем ее «выпуклой» задачей о рюкзаке.

В [5] предложен градиентный субоптимальный алгоритм решения задачи (1) — (4), гарантирующий в худшем случае не более, чем 50-процентное отклонение от оптимума и имеющий в наихудшем случае оценку числа операций $O(n^2 H^2 \log_2^2 (nH))$.

Опишем алгоритм, позволяющий уменьшить эту оценку. Не нарушая общности, будем считать, что в задаче (1)—(4) $H = 2^m$ для некоторого целого положительного m, $n = 2^k$ для некоторого целого положительного k.

Пусть $\Delta_j(i) = f_j(i) - f_j(i-1)$, $i = 1, \ldots, H$, $j = 1, \ldots, n$, j—градиент [1] функции $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ в точке $x = i$.

Для неубывающей выпуклой вверх функции $f_j(x_j)$ выполняются соотношения

$$\Delta_j(1) \geqslant \Delta_j(2) \geqslant \ldots \geqslant \Delta_j(H), \; j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Пусть $\delta_j(i) = \Delta_j(i)/a_j$, $i = 1, \ldots, H$, $j = 1, \ldots, n$ — обобщенный градиент функции $f(x)$.

Применим к решению задачи (1)—(4) следующий

Алгоритм А2.

Вход. Функция $f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$, граница H изменения целочисленных переменных, правая часть ограничения b, коэффициенты ограничения a_j, $j = 1, \ldots, n$.

Выход. Вектор $x^g = (x_1^g, \ldots, x_n^g)$ — градиентное решение задачи (1) — (4).

Метод. Пусть K — множество триплетов вида $(j, [h^-, h^+])$, где $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $0 \leqslant h^- \leqslant h^+ \leqslant H$.

$x^g := (0, \ldots, 0)$

$K := \{(1, [0, H]), (2, [0, H]), \ldots, (n, [0, H])\}$, $|K| = n$

Вызвать процедуру H-ДИХОТОМИЯ (K, b, x^g).

Если $\sum_{j \in \{1, \ldots, n\}} f_j(x_j^g) \leqslant \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} \Delta_j(1) = \Delta_{j_0}(1)$, то $x^g := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Пусть для каждого триплета t вида $t = (j, [h^-, h^+])$ $\mathrm{IND}_t = j$, $h_t^- = h^-$, $h_t^+ = h^+$, $t \in K$.

Процедура H-ДИХОТОМИЯ (K, b, x^g)

1. ПОКА
2. $H \neq 1$
3. ПОВТОРЯТЬ

4. пусть $\Omega = \left\{\Delta_{\mathrm{IND}_t}\left(\frac{h_t^- + h_t^+}{2}\right),\ t \in K\right\}$
5. $\omega := $ МЕДИАНА $(|K|,\ \Omega)$
6. пусть $J = \left\{t \in K \mid \Delta_{\mathrm{IND}_t}\left(\frac{h_t^- + h_t^+}{2}\right) \geqslant \omega\right\}$
7. ЕСЛИ
8. $\qquad s = \sum_{t \in J} a_{\mathrm{IND}_t} \cdot \left(\frac{h_t^- + h_t^+}{2}\right) \leqslant b$
9. ТО
10. ДЛЯ
11. $\qquad t \in J$
12. ВЫПОЛНЯТЬ
13. $\qquad h_t^+ := (h_t^- + h_t^+)/2$
14. $\qquad K := J$
15. ИНАЧЕ
16. ДЛЯ $t \in J$
17. ВЫПОЛНЯТЬ
18. $\qquad x^g_{\mathrm{IND}_t} := (h_t^- + h_t^+)/2$
19. $\qquad h_t^- := (h_t^- + h_t^+)/2$
20. пусть $\tilde{I} = \{(\mathrm{IND}_t,\ [(h_t^- + h_t^+)/2,\ h_t^+]) \mid t \in K \setminus J\}$
21. $K := K \cup \tilde{I}$
22. $H := H/2$
23. ИНАЧЕ
24. $S := \{\varnothing\}$
5. $c_t := \Delta_{\mathrm{IND}_t}(h_t^+)$
26. 1-ДИХОТОМИЯ $(K,\ b,\ S)$
27. $x_{\mathrm{IND}_t} := h_t^+,\ t \in S$
28. Конец процедуры.

Утверждение 2. Алгоритм А2 строит градиентное решение задачи (1)—(4).

В [5] показано, что градиентное и оптимальное значения целевой функции задачи (1)—(4) совпадают с соответственно градиентным и оптимальным значениями целевой функции в задаче

$$\max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{H} \Delta_j(i)\, y_{ji} \qquad (10), \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{H} a_j y_{ji} \leqslant b \qquad (11)$$

$$y_{ji} \in \{0,\ 1\},\ j = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, H. \qquad (12)$$

Алгоритм А2 является применением алгоритма А1 к задаче (10)—(12), и, следовательно, строит градиентное решение задачи (1)—(4).

Утверждение 3. Сложность работы алгоритма А2 в худшем случае составляет $O(nH^{\log_2(3/2)}) = O(nH^{0{,}59\ldots})$.

Доказательство. Как было сказано ранее, сложность работы процедуры МЕДИАНА, вызываемой в строке 5 процедуры H-ДИХОТОМИЯ, составляет в наихудшем случае $O(n)$ на множестве из n элементов.

При вызове процедуры H-ДИХОТОМИЯ мощность множества K в строке 6 равна n, поэтому наихудший случай, когда условие строки 8 не выполняется и производятся действия в строках 16—22. После выполнения строки 21 мощность множества $K \cup \tilde{I}$ равна $3/2\ |K|$. Таким образом, в наихудшем случае процедура МЕДИАНА в строке 5 вызывается для множеств мощности n, $3/2\,n$, $9/4\,n, \ldots, (3/2)^{\log_2 H} n$.

Пусть время работы процедуры H-ДИХОТОМИЯ составляет $T(n)$ для первоначального множества K, тогда

$$T(n) = cn + O(n) + O(3/2\,n) + O(9/4\,n) + \ldots + O((3/2)^{\log_2 H} n) \leqslant$$
$$\leqslant c'n + c''nH^{\log_2 1{,}5} = O(nH^{\log_2 1{,}5}),$$

где c' и c'' — некоторые константы, не зависящие от n.

Замечание. Количество обращений к процедурам вычисления значений функций $f_j(x)$, $j=1,\ldots,n$ не превосходит $2n\log_2 H$.

Список литературы

1. Girlich E., Kowaliow M. Nichtlineare discrete Optimierung.— Berlin, 1981.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М., 1982.
3. Lawler E.— Math. Oper. Res. 1979, v. 4, № 4, p. 339.
4. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М., 1979.
5. Ковалев М. М., Котов В. М.— Докл. АН БССР, 1982, т. 26, № 11, с. 969.

Поступила в редакцию 26.04.84.

УДК 517.544.8

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. А. КРУШЕВСКИЙ, В. В. МИТЮШЕВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ КОЛЬЦА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Пусть заданы константы r, R, h, θ такие, что $0<r<R<+\infty$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $h=\frac{r}{R}e^{i\theta}$. Рассмотрим задачу нахождения всех функций Φ, аналитических в кольце $r<|z|<R$, H-непрерывно продолжимых на граничные окружности, по краевому условию

$$\Phi(ht)=G(t)\Phi(t)+g(t),\ t\in L, \tag{1}$$

где L — окружность $|t|=R$, ориентированная по часовой стрелке, $G(t)\neq 0$ и $g(t)$ — заданные на L H-непрерывные функции. Если произвести конформное склеивание [1] граничных окружностей замкнутого кольца $r\leqslant|z|\leqslant R$, отождествляя все пары точек вида $t\in L$ и ht, то кольцо превратится в замкнутую риманову поверхность $\mathbf{M}$ рода 1 (гомеоморфную тору). При этом задача (1) перейдет в задачу Римана на $\mathbf{M}$, изученную в общем виде в [2]. Здесь ставится задача построить явное (т. е. в квадратурах) решение задачи (1) и применить его к исследованию и решению функционального уравнения

$$\Phi(hz)=G(z)\Phi(z)+g(z),\ |z|\leqslant R \tag{2}$$

для нахождения функций Φ, аналитических в круге $|z|<R$, предполагая, что коэффициенты G и g аналитичны в круге $|z|<R$, кроме конечного числа полюсов, и могут иметь там конечное число нулей.

2. В [2] показано, что задача Римана на римановой поверхности решается явно, если известны функционалы поверхности, т. е. всюду мероморфные функции и абелевы дифференциалы с заданными особенностями. Функционалы введенной здесь поверхности $\mathbf{M}$ можно явно выразить через эллиптические функции. Проще, однако, их выразить непосредственно через тэта-ряды, обладающие свойством автоморфности относительно бесконечной циклической группы, порожденной преобразованием $T:z\to hz$. Фиксируя кольцо $r<|z|\leqslant R$, являющееся одной из фундаментальных областей указанной группы, произведем вспомогательные построения (каноническое рассечение) так, как указано на рисунке. Точка $t_1\in L$ фиксируется произ-

Каноническое рассечение римановой поверхности M