

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурунжиев Р. И., Лебедев А. Л. Оптимальное оценивание нестационарных систем с последствием.—Рукопись деп. в БелНИИТИ. № 582-83. Деп. от 29.03.83.

2. Забелло Л. Е., Лебедев А. Л.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех., 1982, с. 46.

3. Забелло Л. Е.—В кн.: Исследования по теории многосвязных систем.—М., 1982, с. 47.

Поступила в редакцию 31.03.84.

УДК 517.925

А. КЕССИ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РЯДА

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$w'' + P(z, w)w' + Q(z, w)w' + R(z, w) = 0, \quad (1)$$

где $P(z, w) = p_2(z)$; $Q(z, w) = q_2(z)w^2 + q_3(z)w + q_4(z)$; $R(z, w) = r_3(z)w^3 + r_4(z)w^2 + r_5(z)w + r_6(z)$; $p_k(z)$, $q_l(z)$, $r_m(z)$ — аналитические функции от z .

Задача состоит в том, чтобы найти соотношения между коэффициентами дифференциального уравнения (1), так чтобы оно имело только однозначные подвижные точки. Очевидно, для уравнения (1) выполняются первое и второе условия Фукса, но трудно проверить выполнение третьего и четвертого условий Фукса, поэтому предлагается применять метод Пенлеве.

Дифференцируя уравнение (1), получаем [2]:

$$w'' = - \frac{w'^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w} \right) + w' \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w} \right) + \frac{\partial R}{\partial z}}{3w'^2 + 2Pw' + Q} = G(z, w, w'). \quad (2)$$

Пусть правая часть уравнения (2) имеет вид

$$G(z, w, w') = L(z, w)w'^2 + M(z, w)w' + N(z, w). \quad (3)$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$-w'^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w} \right) - w' \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w} \right) - \frac{\partial R}{\partial z} = 3Lw'^4 + w'^3(3M + 2PL) + w'^2(3N + 2PM + LQ) + w'(2PN + MQ) + NQ. \quad (4)$$

Подставляя в (4) значение w'^3 из (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях w' , получаем систему:

$$\begin{aligned} 3N - MP &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial w} + 2LQ - LP^2, \\ 2PN - 2MQ &= -\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial w} + 3LR - LPQ, \\ NQ - 3MP &= -\frac{\partial R}{\partial z} - LPR. \end{aligned} \quad (5)$$

После некоторых преобразований Пенве́ле и Гамбье показали, что уравнения вида (2) с неподвижными критическими точками могут быть приведены к 50 различным частным видам [1]. Тогда, приравнявая коэффициенты уравнения (1) к коэффициентам каждого уравнения из этих 50 уравнений, получаем достаточные условия для отсутствия подвижных критических точек в уравнении (1).

Непосредственно из системы (5) следует, что целая часть M относительно w степени не выше нуля и целая часть N степени не выше первой. Таких уравнений будет 24.

1) $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + (c_1z^2 - c_2z + c_3)w'^2 + [(-2c_1z + c_2)w + (-c_4z + c_5)]w' + c_1w^2 + c_4w + c_6 = 0$.

2) $L = \frac{1}{w}$, $M=0$, $N=0$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + c_1 w^2 w' + c_2 w^3 = 0$.

3) $L = \frac{1}{w}$, $M=0$, $N = -r'(z) + \frac{r(z)}{w}$. Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением без подвижных критических точек при следующих условиях:

$$-3r' + p_2' = q_3; \quad r_3' = q_2' = 0; \quad -r'q_2 = r_4' - p_2r_3; \quad -r'q_3 + rq_2 = -r_5' - p_2r_4; \quad -r'q_4 + rq_3 = -r_6' - p_2r_5; \quad rq_4 = -p_2r_6; \quad q_3' = r_4 - p_2q_2; \quad -2p_2r' + q_4' = 2r_5 - p_2q_3; \quad 2p_2r = 3r_6 - p_2q_4; \quad 3r = 2q_4 - p_2^2.$$

4) $L = \frac{1}{w}$, $M=0$, $N = \gamma + \frac{\delta}{w}$. Подставляя в 3) вместо $(r'(z), r(z))$ $(-\gamma, \delta)$, получим достаточные условия для отсутствия подвижных критических точек в решении уравнения (1).

5) $L = \frac{1}{w}$, $M = -\frac{1}{z}$, $N = \frac{\beta}{z} + \frac{\delta}{w}$. Из (1) и (5) получим: а) $p_2 = 0$ $w'^3 + c_1 z^{-2} w^2 w' + c_2 z^{-3} w^3 = 0$; б) $p_2 \neq 0$ $w' + \beta = 0$.

6) $L = \frac{1}{w}$, $M = \frac{1}{w}$, $N=0$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + 3w'^2 + (w^2 + 3)w' + w^3 + w^2 + 1 = 0$.

7) $L = \frac{3}{\varphi w}$, $M=0$, $N=-1$. Этот случай невозможен.

8) $L = \frac{m-1}{mw}$, $M = \varphi(z) - \frac{m-2}{mw}$, $N = \psi(z) - \varphi(z) - \frac{1}{mw}$. Уравнение (1) является уравнением без подвижных критических точек при следующих условиях:

$$\psi q_2 - 3\psi r_3 = -r_3'; \quad m\psi q_3 - m\varphi q_2 - 3m\varphi q_4 + 3(m-2)r_3 = -mr_4' - (m-1)p_2r_3; \quad m\psi q_4 - m\varphi q_3 - q_2 - 3m\varphi r_5 + 3(m-2)r_4 = -mr_5' - (m-1)p_2r_4; \quad -m\varphi q_4 - 3m\varphi r_6 - 3(m-2)r_5 = -mr_6' - (m-1)p_2r_5; \quad -q_4 + 3(m-2) = (m-1)p_2r_6; \quad -2m\varphi q_2 - mq_2' - 3mr_3 + (3m-1)r_3 = -mq_2 - 3r_3; \quad 2mp_2\psi - 2m\varphi q_3 + 2(m-2)q_2 = -mq_3' + (m-3)r_4 - (m-1)p_2q_2; \quad -2m\varphi p_2 - 2m\varphi q_4 + 2(m-2)q_3 = -mq_4' + (2m-3)r_5 - (m-1)p_2q_3; \quad -2p_2 + 2(m-2)q_4 = 3(m-1)r_6 - (m-1)p_2q_4; \quad 3m\psi = -2q_2; \quad -3m\varphi - mp_2\varphi = -mp_2' + (m-2)q_3; \quad -3 + (m-2)p_2 = 2(m-1)q_4 - (m-1)p_2^2.$$

9) $L = \frac{1}{2w}$, $M=0$, $N = \frac{1}{2w}$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + p_2 w'^2 + q_4 w' + r_6 = 0$, где $q_4 = -p_2 r_6$; $2p_2 = 3r_6 - p_2 q_4$; $3 = 2q_4 - p_2^2$.

10) $L = \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}$, $M=0$, $N = \frac{\beta(w-1)^2}{w} + \gamma w + \frac{\delta w}{w-1}$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + p_2 w'^2 + q_4 w' + r_6 = 0$, где $-2\beta q_4 = p_2 r_6$; $-4p_2 \beta = -3r_6 + p_2 q_4$; $-6\beta = -2q_4 + p_2^2$.

11) $L = \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}$, $M = 2 \frac{q(z) - r(z)}{w-1}$, $N = \frac{\varphi(z)(w-1)^2}{w} + \psi(z)w$,

где $\varphi(z) = -\frac{1}{2}t^2$; $\psi(z) = 2\{q^2 - r^2 - (q' + r')\}$; $t' = -2rt$. Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением без подвижных критических точек при следующих условиях:

$$2\varphi q_2 + 2\psi q_2 - 12r_3 = -2r_3'; \quad 2\varphi q_3 - 6\varphi q_2 + 2\psi q_3 - 2\psi q_2 - 12qr_4 - 12rr_3 = -2r_4' + 2r_3' - 3p_2r_3; \quad 2\varphi q_4 - 6\varphi q_3 - 6\varphi q_2 - 2\psi q_4 - 2\psi q_3 - 12qr_5 - 12rr_4 = -2r_5' + 2r_4' - 3p_2r_4 + p_2r_3; \quad -6\varphi q_4 + 6\varphi q_3 - 2\varphi q_2 - 2\psi q_4 - 12qr_6 - 12rr_5 = -2r_6' + 2r_5' - 3p_2r_5 + p_2r_4; \quad 6\varphi q_4 - 2\varphi q_3 - 12rr_6 = -2r_6' - 3p_2r_6 + p_2r_5; \quad -2\varphi q_4 = p_2r_6; \quad -8\varphi q_2 + 2q_2' = 3r_3; \quad 4\varphi p_2 + 4\psi p_2 - 8qq_3 - 8rq_2 - 2q_2' + 2q_3' = r_4 + 3r_3 - 3p_2q_2; \quad -12\varphi p_2 - 4\psi p_2 - 8qq_4 - 8rq_3 + 2q_4' - 2q_3' = 7r_5 + r_4 - 3p_2q_3 + p_2q_2; \quad 12\varphi p_2 - 8rq_4 - 2q_4' = 9r_6 - r_5 - 3p_2q_4 + p_2q_3; \quad -4\varphi p_2 = 3r_6 + p_2q_4; \quad 3\varphi + 3\psi = q_2; \quad -9\varphi + 3\psi - 2qp_2 + p_2' - q_2 = 2q_3; \quad 18\varphi - 4rp_2 - 2p_2' = 6q_4 - 3p_2^2; \quad -6\varphi = -2q_4 + p_2^2.$$

$$12) L = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right), M = \frac{2\varphi w + (3-2\varphi)}{2(w-1)}, N = \frac{N_1 w^2 + N_2 w - 2H}{2(w-1)}.$$

Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением без подвижных критических точек при следующих условиях:

$$\begin{aligned} 2N_1 q_2 + 12r_3 = -4r'_3; \quad 2N_1 q_3 + 2N_2 q_2 + 12\varphi r_4 + 18r_3 - 12\varphi r_3 = -4r'_4 + 4r'_3; \\ -4Hq_2 + 2N_2 q_3 + 12\varphi r_5 + 18r_4 - 12\varphi r_4 = -4r'_5 + 4r'_4; \quad 4Hq_3 + 18r_5 - 12\varphi r_5 = \\ = 4r'_5; \quad 8\varphi q_2 = -4q'_2 + 6r_3; \quad 8\varphi q_3 + 12q_2 - 8\varphi q_2 = 4q'_2 - 4q'_3 + 4r_3 + 10r_4; \\ 12q_3 - 8\varphi q_3 = 4q'_3 - r_4 + 14r_5; \quad -8H = -5r_5; \quad 6N_1 = 4q_2; \quad 6N_2 = 2q_2 + 8q_3; \\ 6H = q_3; \quad p_2 = q_4 = r_6 = 0. \end{aligned}$$

$$13) L = \frac{2}{3w} + \frac{1}{2(w-1)}, M = \frac{Bw^2 + (C-B)w - c}{w(w-1)}, N = \frac{N_1 w^3 + N_2 w^2 + N_3 w + N_4}{3w(w-1)}.$$

Из (1) и (5) следует, что уравнение (1) будет уравнением с неподвижными критическими точками при следующих условиях:

$$\begin{aligned} 2N_1 q_2 - 18Br_3 = -6r'_3; \quad 2N_1 q_3 + 2N_2 q_2 - 18Br_4 - 18(C-B)r_3 = -6r'_4 + \\ + 6r'_3 - 7r_3 p_2; \quad 2N_1 q_4 + 2N_2 q_3 + 2N_3 q_2 - 18Br_5 - 18(C-B)r_4 = -6r'_5 + 6r'_4 - 7p_2 r_4 + \\ + 4p_2 r_3; \quad 2N_2 q_4 + 2N_3 q_3 + 2N_4 q_2 - 18Br_6 - 18(C-B)r_5 + 18Cr_4 = -6r'_6 + \\ + 6r'_5 - 7p_2 r_5 + 4p_2 r_4; \quad 2N_3 q_4 + 2N_4 q_3 - 18(C-B)r_6 + 18Cr_5 = 6r'_6 - 7p_2 r_6 + \\ + 4p_2 r_5; \quad 2N_4 q_4 + 18Cr_6 = 4p_2 r_6; \quad -12Bq_2 = -6q'_2 + 4r_3; \quad 4p_2 N_1 - 12Bq_3 = \\ -12(C-B)q_2 = -6q'_3 + 6q'_2 + 6r_3 + 9r_4 - 7p_2 q_2; \quad 4p_2 N_2 - 12Bq_4 - 12(C- \\ -B)q_3 + 12Cq_2 = -6q'_4 + 6q'_3 + 15r_5 - 7p_2 q_3 + 4p_2 q_2; \quad 4p_2 N_3 - 12(C-B)q_4 + \\ + 12Cq_3 = 6q'_4 - 6r_5 + 21r_6 - 7p_2 q_4 + 4p_2 q_3; \quad 4p_2 N_4 + 12Cq_4 = -12r_6 + 4p_2 q_4; \\ 6N_1 = 2q_2; \quad 6N_2 - 6Bp_2 + 6p'_2 = 8q_3 + 4q_2; \quad 6N_3 - 6(C-B)p_2 - 6p'_2 = \\ -2q_3 + 12q_4 - 7p'_2; \quad 6N_4 + 6Cp_2 = -8q_4 + 2p'_2. \end{aligned}$$

Для всех остальных значений вектора (L, M, N) мы получаем тривиальное уравнение $w' = 0$.

Список литературы

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А. Дифференц. уравнения, 1953—1961, 1972, т. 8, № 10.

Поступила в редакцию 17.05.83.

УДК 519.1

Н. А. НАУМОВИЧ

ДИХОТОМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общеизвестна роль эвристических процедур и приближенных алгоритмов решения задач оптимизации на графах, сетях и других дискретных структурах. В настоящее время утверждает себя теория градиентных алгоритмов дискретной оптимизации, имеющая в своем арсенале богатые семейства алгоритмов, условия, при которых они дают оптимальные решения, методики оценки точности алгоритмов для различных классов задач. Исследования градиентных алгоритмов обобщены в монографии [1], которая содержит и детальную библиографию.

Настоящая заметка посвящена построению эффективного, с точки зрения количества выполняемых операций, алгоритма решения следующей задачи целочисленного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (1), \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (2)$$