



УДК 517.977

А. Л. ЛЕБЕДЕВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть движение объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h_1) + B(t)u(t) + G(t)w(t), \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{\varphi(\tau), \tau \in [t_0-h, t_0]\}, \quad (2)$$

а измерению доступен выходной l -вектор

$$y(t) = C(t)x(t-h_2) + v(t). \quad (3)$$

Здесь $x(t)$ — n -вектор; $u(t)$ — m -вектор; $w(t)$, $v(t)$, $\varphi(t)$ — векторные случайные процессы типа «белый шум» с нулевым средним и ковариационными матрицами $Q(t)$, $R(t)$, $X(t)$ соответственно (причем $R(t) > 0$), $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $G(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующей размерности с непрерывными элементами, $h_1 > 0$, $h_2 \geq 0$ — постоянные запаздывания, $h = \max\{h_1, h_2\}$. Все случайные процессы, действующие на систему (1) — (3), некоррелированы между собой.

Требуется по измерениям $y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ построить такую оценку $\hat{x}(t)$ координат объекта (1) в момент t_1 , что

$$e(t) = M[x(t) - \hat{x}(t)]^T [x(t) - \hat{x}(t)] \rightarrow \min, \quad (4)$$

где M — знак математического ожидания; $(\cdot)^T$ — транспонирование.

Для решения задачи рассмотрим дискретную систему

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = [E_n + \theta A(t_k)] x(t_k) + \theta A_1(t_k) x(t_{k-N}) + \theta B(t_k) u(t_k) + \theta G(t_k) w(t_k) / \sqrt{\theta}, \\ x_0(\cdot) = \{\varphi(t_k) / \sqrt{\theta}, k = -NL, -NL + 1, \dots, -1, 0\}, \\ y(t_k) = C(t_k) x(t_{k-L}) + v(t_k) / \sqrt{\theta}, \end{cases} \quad (5)$$

где $k = 0, 1, \dots, k_1$, $\theta = (t_1 - t_0) / k_1$ — период дискретности, $N = h_1 / \theta$, $L = h_2 / \theta$, $NL = \max\{L, N\}$, $t_{k+1} = t_k + \theta$.

Оптимальная в смысле (4) оценка координат для (5) имеет вид [1] (развитие результатов [2])

$$\hat{x}(t_k) = \hat{x}^*(t_k) + \sum_{i=0}^{NL} K_i(t_k) [y(t_{k-i}) - C(t_{k-i}) \hat{x}^*(t_{k-i-L})],$$

$$\hat{x}^*(t_{k+1}) = [E_n + \theta A(t_k)] \hat{x}(t_k) + \theta A_1(t_k) \hat{x}(t_{k-N}) + \theta B(t_k) u(t_k),$$

где оптимальные коэффициенты усиления находятся из соотношений

$$K_i(t_k) = \bar{P}_{k,i+L} C^T(t_{k-i}) [C(t_{k-i}) \bar{P}_{k-i,L} C^T(t_{k-i}) + R(t_{k-i}) / \theta]^{-1}, \quad (6)$$

а ковариационные матрицы ошибок оценивания $P_k = M[\bar{x}(t_k) \bar{x}^T(t_k)]$,

$$P_{k,i} = M[\bar{x}(t_k) \bar{x}^T(t_{k-i})], P_{k,i,j} = M[\hat{x}(t_{k-i}) \bar{x}^T(t_{k-j})], \bar{x}(t_k) = x(t_k) - \hat{x}(t_k)$$

удовлетворяют уравнениям

$$P_k = \bar{P}_k - \sum_{i=0}^{NL} K_i(t_k) C(t_{k-i}) \bar{P}_{k,i+L}^T, \quad (7)$$

$$P_{k,i} = [E_n + \theta A(t_{k-1})] P_{k-1,i-1} + \theta A_1(t_{k-1}) P_{k-1,N,i-1} - \\ - \sum_{j=0}^{NL} K_j(t_k) C(t_{k-j}) \{ [E_n + \theta A(t_{k-1-j-L})] P_{k-1,j+L,i-1} + \\ + \theta A_1(t_{k-1-j-L}) P_{k-1,j+N+L,i-1} \}, \quad (8)$$

$$P_{k,i,j} = P_{k-1,i-1,j-1}. \quad (9)$$

Априорные ковариационные матрицы ошибок оценивания $\bar{P}_k, \bar{P}_{k,i}, \bar{P}_{k,i,j}$ вычисляются по формулам (9)–(11) работы [2] с учетом специфики системы (5). Краевые условия для (7)–(9) имеют вид

$$P_0 = X(t_0)/\theta, P_{0,j} = 0, j = \overline{1, NL}, P_{0,i,j} = X(t_i) \delta(i-j)/\theta, i, j = \overline{1, NL},$$

$$P_{k,0} = P_k, P_{k,0,j} = P_{k,j}, j = \overline{0, NL}, k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Данный алгоритм справедлив для моментов времени $t_k > t_{NL}$, так как $A(\tau) \equiv 0, A_1(\tau) \equiv 0, \tau \in \{t_0, t_1, \dots, t_{k1}\}$. Далее введем обозначения:

$$\omega(t) = \omega(t_k)/\sqrt{\theta}, v(t) = v(t_k)/\sqrt{\theta}, \varphi(t) = \varphi(t_k)/\sqrt{\theta},$$

$$\dot{P}(t) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \eta > 0}} (P_k - P_{k-1})/\theta, \hat{x}(t) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \eta > 0}} (\hat{x}(t_k) - \hat{x}(t_{k-1}))/\theta, t_{k-1} \leq t \leq t_k,$$

$$P(t) = M[\bar{x}(t) \bar{x}^T(t)], P(t, s) = M[\bar{x}(t) \bar{x}^T(t-s)], \quad (11)$$

$$P(t, s, r) = M[\bar{x}(t-s) \bar{x}^T(t-r)], S(t, s) = C^T(t-s) R^{-1}(t-s) C(t-s), \\ s, r \in [0, h].$$

Подставляя $K_i(t_k), \bar{P}_k, \bar{P}_{k,i}, \bar{P}_{k,i,j}$ (смотри [2]) в (7)–(9), раскрывая скобки и перегруппировывая члены, а затем переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в соотношениях дискретного фильтра с учетом (11), получим алгоритм оценивания для системы (1)–(3) в виде

$$\hat{x}(t) = A(t) \hat{x}(t) + A_1(t) \hat{x}(t-h_1) + B(t) u(t) + \\ + \int_0^h P(t, s+h_2) C^T(t-s) R^{-1}(t-s) [y(t-s) - C(t-s) \hat{x}(t-s-h_2)] ds, \quad (12)$$

$$\hat{x}(\tau) = 0, \tau \in [t_0-h, t_0],$$

$$\dot{P}(t) = A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + A_1(t) P^T(t, h_1) + P(t, h_1) A_1^T(t) + \\ + G(t) Q(t) G^T(t) - \int_0^h P(t, s+h_2) S(t, s) P^T(t, s+h_2) ds, P(t_0) = X(t_0), \quad (13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} P(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} P(t, s) = A(t) P(t, s) + A_1(t) P(t, h_1, s) - \\ - \int_0^h P(t, r+h_2) S(t, r) P(t, s, r+h_2) dr, \quad (14)$$

$$P(t, 0) = P(t), P(t_0, s) = 0, s \in [t_0-h, t_0],$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} P(t, s, r) + \frac{\partial}{\partial s} P(t, s, r) + \frac{\partial}{\partial r} P(t, s, r) = 0, \quad (15)$$

$$P(t_0, s, r) = X(t_0-s) \delta(s-r), P(t, 0, s) = P(t, s), s, r \in [t_0-h, t_0],$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака. Уравнения имеют место при $t > h_2$.

Аналогичный результат получен в [3] из уравнения Винера — Хопфа для стохастических систем с запаздыванием (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурунжиев Р. И., Лебедев А. Л. Оптимальное оценивание нестационарных систем с последствием.—Рукопись деп. в БелНИИТИ. № 582-83. Деп. от 29.03.83.

2. Забелло Л. Е., Лебедев А. Л.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех., 1982, с. 46.

3. Забелло Л. Е.—В кн.: Исследования по теории многосвязных систем.—М., 1982, с. 47.

Поступила в редакцию 31.03.84.

УДК 517.925

А. КЕССИ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РЯДА

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$w'' + P(z, w)w' + Q(z, w)w' + R(z, w) = 0, \quad (1)$$

где $P(z, w) = p_2(z)$; $Q(z, w) = q_2(z)w^2 + q_3(z)w + q_4(z)$; $R(z, w) = r_3(z)w^3 + r_4(z)w^2 + r_5(z)w + r_6(z)$; $p_k(z)$, $q_l(z)$, $r_m(z)$ — аналитические функции от z .

Задача состоит в том, чтобы найти соотношения между коэффициентами дифференциального уравнения (1), так чтобы оно имело только однозначные подвижные точки. Очевидно, для уравнения (1) выполняются первое и второе условия Фукса, но трудно проверить выполнение третьего и четвертого условий Фукса, поэтому предлагается применять метод Пенлеве.

Дифференцируя уравнение (1), получаем [2]:

$$w'' = - \frac{w'^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w} \right) + w' \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w} \right) + \frac{\partial R}{\partial z}}{3w'^2 + 2Pw' + Q} = G(z, w, w'). \quad (2)$$

Пусть правая часть уравнения (2) имеет вид

$$G(z, w, w') = L(z, w)w'^2 + M(z, w)w' + N(z, w). \quad (3)$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$-w'^2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w} \right) - w' \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w} \right) - \frac{\partial R}{\partial z} = 3Lw'^4 + w'^3(3M + 2PL) + w'^2(3N + 2PM + LQ) + w'(2PN + MQ) + NQ. \quad (4)$$

Подставляя в (4) значение w'^3 из (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях w' , получаем систему:

$$\begin{aligned} 3N - MP &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial w} + 2LQ - LP^2, \\ 2PN - 2MQ &= -\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial w} + 3LR - LPQ, \\ NQ - 3MP &= -\frac{\partial R}{\partial z} - LPR. \end{aligned} \quad (5)$$

После некоторых преобразований Пенве́ле и Гамбье показали, что уравнения вида (2) с неподвижными критическими точками могут быть приведены к 50 различным частным видам [1]. Тогда, приравнявая коэффициенты уравнения (1) к коэффициентам каждого уравнения из этих 50 уравнений, получаем достаточные условия для отсутствия подвижных критических точек в уравнении (1).

Непосредственно из системы (5) следует, что целая часть M относительно w степени не выше нуля и целая часть N степени не выше первой. Таких уравнений будет 24.

1) $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Из (1) и (5) получим: $w'^3 + (c_1z^2 - c_2z + c_3)w'^2 + [(-2c_1z + c_2)w + (-c_4z + c_5)]w' + c_1w^2 + c_4w + c_6 = 0$.