Список литературы

1. Kabir P. K.— Phys. Rev., 1982, v. D 25, p. 2013.
2. Сушков О. П., Фламбаум В. В.— УФН, 1982, т. 136, с. 3.
3. Барышевский В. Г.— Докл. АН БССР, 1983, т. 23, с. 121.
4. Барышевский В. Г.— Ядерная физика, 1983, т. 37, с. 255.
5. Stodolsky L.— Nucl. Phys., 1982, v. B197, p. 213.
6. Лобов Г. А.— Ядерная физика, 1982, т. 35, с. 1408.
7. Лобов Г. А.— Препринт ИТЭФ, 1984, № 73.
8. Барышевский В. Г., Черепица С. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 21.

Поступила в редакцию 05.10.84.

УДК 530.12; 530.145

Г. В. ШИШКИН, И. Е. АНДРУШКЕВИЧ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. II

1. Ковариантное обобщение уравнения Дирака (КОУД)

$$\{\gamma^\nu(\partial_\nu-\Gamma_\nu)+m_0\}\Psi=0$$

в полях тяготения общей теории относительности (ОТО) с метрикой вида

$$ds^2=A\cdot(dx^1)^2+B\cdot(dx^2)^2+C\cdot(dx^3)^2-D\cdot(dx^4)^2, \tag{1}$$

где A, B, C, D — произвольные положительно определенные функции переменных x^1, x^2, x^3, x^4, при диагональной калибровке тетрады записывается в следующем виде [1]:

$$\left\{\frac{\tilde\gamma^1}{\sqrt{A}}\left[\partial_1-\frac{\partial_1 A}{4A}\right]+\frac{\tilde\gamma^2}{\sqrt{B}}\left[\partial_2-\frac{\partial_2 B}{4B}\right]+\frac{\tilde\gamma^3}{\sqrt{C}}\left[\partial_3-\frac{\partial_3 C}{4C}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\tilde\gamma^4}{\sqrt{D}}\left[\partial_4-\frac{\partial_4 D}{4D}\right]+m_0\right\}\Phi(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=0. \tag{2}$$

Здесь

$$\Psi=(A\cdot B\cdot C\cdot D)^{-\frac{1}{4}}\Phi,\quad \partial_\nu=\frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

а $\tilde\gamma$ — матрицы Дирака специальной теории относительности (СТО), связанные с матрицами Дирака γ в ОТО соотношением

$$\gamma^\nu=h^\nu_i\tilde\gamma^i,\ h^\nu_i=\mathrm{diag}\,(A^{-\frac{1}{2}},\ B^{-\frac{1}{2}},\ C^{-\frac{1}{2}},\ D^{-\frac{1}{2}}).$$

Настоящая работа является продолжением работы [1], поэтому мы сохраняем ее обозначения и символику.

Запишем (1) в форме

$$\begin{aligned}ds^2=&\ \mathrm{sign}(\beta-i)\cdot A_{ijmn,i}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)\cdot(dx^i)^2+\\&+\mathrm{sign}(\beta-j)\cdot A_{ijmn,j}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)\cdot(dx^j)^2+\\&+\mathrm{sign}(\beta-m)\cdot A_{ijmn,m}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)\cdot(dx^m)^2+\\&+\mathrm{sign}(\beta-n)\cdot A_{ijmn,n}(x^i,\ x^j,\ x^m,\ x^n)\cdot(dx^n)^2.\end{aligned}$$

Здесь и далее индексы i, j, m, n могут принимать целые значения от 1 до 4, причем $i\neq j$, $i\neq m$, $i\neq n$, $j\neq m$, $j\neq n$, $m\neq n$, и они не носят тензорного характера, т. е. не используется условие суммирования по двум одинаковым индексам; β — число такое, что $3<\beta<4$, $\mathrm{sign}(\alpha)$ — знаковая функция. Тогда (3) представим в виде

$$\left\{\frac{\tilde\gamma^i}{\sqrt{A_{ijmn,i}}}\left[\partial_i-\frac{\partial_i A_{ijmn,i}}{4A_{ijmn,i}}\right]+\frac{\tilde\gamma^j}{\sqrt{A_{ijmn,j}}}\left[\partial_j-\frac{\partial_j A_{ijmn,j}}{4A_{ijmn,j}}\right]+\frac{\tilde\gamma^m}{\sqrt{A_{ijmn,m}}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\partial_m-\frac{\partial_m A_{ijmn,m}}{4A_{ijmn,m}}\right]+\frac{\tilde\gamma^n}{\sqrt{A_{ijmn,n}}}\left[\partial_n-\frac{\partial_n A_{ijmn,n}}{4A_{ijmn,n}}\right]+m_0\right\}\Phi=0. \tag{3}$$

Как и в [1], в дальнейшем будем работать с уравнением (3).

Займемся исследованием закономерностей попарного разделения переменных по методу выделения дифференциальных операторов первого порядка. Иначе говоря, определим условия, позволяющие осуществить отделение переменных x^i, x^j от x^m, x^n, не интересуясь разделимостью x^i и x^j, равно как и x^m, x^n, между собой. Подобная задача возникает, например, при определении зависимости волновой функции от угловых переменных в нестатических полях тяготения центральной симметрии [2].

Отметим также, что разделение переменных методом выделения некоторых дифференциальных операторов первого порядка сводится в конечном итоге к доумножению (3) слева на некоторую функцию $F = F(x^i, x^j, x^m, x^n)$ и матрицу Ω размерности 4×4.

2. Отделение переменных x^i, x^j, от x^m, x^n. Предположим, что в (3) возможно отделение переменных x^i, x^j от x^m, x^n, т. е. вместо (3) можно записать

$$\{\hat{K}_{ij} + \hat{K}_{mn}\}\,\Phi(x^i, x^j, x^m, x^n) = 0, \tag{4}$$

где $\hat{K}_{ij}$, $\hat{K}_{mn}$ — некоторые операторы, полностью определяющие зависимость волновой функции Φ от переменных x^i, x^j и x^m, x^n соответственно, причем

$$[\hat{K}_{ij}, \hat{K}_{mn}] = [\hat{K}_{ij}, f(x^m, x^n)] = [\hat{K}_{mn}, f(x^i, x^j)] = 0. \tag{5}$$

Тогда операторы $\hat{K}_{ij}$, $\hat{K}_{mn}$ в общем случае необходимо представить выражениями:

$$\begin{aligned}\hat{K}_{ij} = {} & \Gamma^i f_i(x^i, x^j)\partial_i + \Gamma^j f_j(x^i, x^j)\partial_j + \Gamma^i f_{ii}(x^i, x^j) + \Gamma^j f_{jj}(x^i, x^j) + \\ & + \Gamma^m f_{mi}(x^i, x^j) + \Gamma^n f_{ni}(x^i, x^j) + m_0\Omega\varphi_i(x^i, x^j),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}_{mn} = {} & \Gamma^m f_m(x^m, x^n)\,\partial_m + \Gamma^n f_n(x^m, x^n)\,\partial_n + \Gamma^i f_{im}(x^m, x^n) + \Gamma^j f_{jm}(x^m, x^n) + \\ & + \Gamma^m f_{mm}(x^m, x^n) + \Gamma^n f_{nn}(x^m, x^n) + m_0\Omega\varphi_m(x^m, x^n).\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\Gamma^i = \Omega\tilde{\gamma}^i,\ \Gamma^j = \Omega\tilde{\gamma}^j,\quad \Gamma^m = \Omega\tilde{\gamma}^m,\ \Gamma^n = \Omega\tilde{\gamma}^n, \tag{8}$$

f, φ — некоторые функции соответствующих переменных.

Сравнивая (3) и (4) с учетом (5)—(8), приходим к необходимости выполнения тождеств:

$$F\cdot(A_{ijmn,i})^{-\frac{1}{2}} = f_i,\quad F\cdot(A_{ijmn,j})^{-\frac{1}{2}} = f_j, \tag{9}$$

$$F\cdot(A_{ijmn,m})^{-\frac{1}{2}} = f_m,\quad F\cdot(A_{ijmn,n})^{-\frac{1}{2}} = f_n, \tag{10}$$

$$-\Omega\tilde{\gamma}^i F\cdot 4^{-1}\cdot(A_{ijmn,i})^{-\frac{3}{2}}\partial_i A_{ijmn,i} = \Gamma^i(f_{ii} + f_{im}), \tag{11}$$

$$-\Omega\tilde{\gamma}^j F\cdot 4^{-1}\cdot(A_{ijmn,j})^{-\frac{3}{2}}\partial_j A_{ijmn,j} = \Gamma^j(f_{jj} + f_{jm}), \tag{12}$$

$$-\Omega\tilde{\gamma}^m F\cdot 4^{-1}\cdot(A_{ijmn,m})^{-\frac{3}{2}}\partial_m A_{ijmn,m} = \Gamma^m(f_{mi} + f_{mm}), \tag{13}$$

$$-\Omega\tilde{\gamma}^n F\cdot 4^{-1}\cdot(A_{ijmn,n})^{-\frac{3}{2}}\partial_n A_{ijmn,n} = \Gamma^n(f_{ni} + f_{nn}), \tag{14}$$

$$F = \varphi_i + \varphi_m, \tag{15}$$

а матрица Ω должна быть решением системы уравнений (16):

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\gamma}^i\Omega\tilde{\gamma}^j - \tilde{\gamma}^j\Omega\tilde{\gamma}^i = 0, \qquad \tilde{\gamma}^i\Omega\tilde{\gamma}^n - \tilde{\gamma}^n\Omega\tilde{\gamma}^i = 0,\\ &\tilde{\gamma}^i\Omega\tilde{\gamma}^m - \tilde{\gamma}^m\Omega\tilde{\gamma}^i = 0, \qquad \tilde{\gamma}^j\Omega\tilde{\gamma}^m - \tilde{\gamma}^m\Omega\tilde{\gamma}^j = 0,\end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

$$\tilde{\gamma}^j\Omega\tilde{\gamma}^n-\tilde{\gamma}^n\Omega\tilde{\gamma}^l=0,\qquad \tilde{\gamma}^m\Omega\tilde{\gamma}^n-\tilde{\gamma}^n\Omega\tilde{\gamma}^m=0, \tag{16.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\gamma}^i\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^l=0, \qquad \tilde{\gamma}^m\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^m=0,\\ &\tilde{\gamma}^j\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^j=0, \qquad \tilde{\gamma}^n\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^n=0.\end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

Из шестнадцати матриц Дирака решением подсистемы (16.2) является только $\Omega=\mathrm{diag}(1,1,1,1)=I$, но $\Omega=I$ не удовлетворяет ни одному из уравнений подсистемы (16.1).

Заметим далее, что если в (6), (7) φ_i и φ_m одновременно не равны нулю, то для выполнения коммутационных соотношений (5) матрица Ω с необходимостью должна являться решением подсистемы (16.2), а поэтому в таком случае в соответствии со сказанным разделение невозможно, что противоречит предположению, сделанному в самом начале п. 2. Для устранения отмеченного противоречия необходимо считать функции φ_i и φ_m взаимоисключающими, т. е. если $\varphi_i\equiv0$, то $\varphi_m\not\equiv0$ и наоборот. С учетом (15) это значит, что $F=F(x^i,x^j)$ либо $F=F(x^m,x^n)$. Тогда для выполнения (11)—(14) необходимо потребовать, чтобы функции $A_{ijmn,k}$, $(k=i,j,m,n)$ имели вид

$$A_{ijmn,k}(x^i,x^j,x^m,x^n)=A_{ij,k}(x^i,x^j)\cdot A_{mn,k}(x^m,x^n). \tag{17}$$

Это позволяет нам переписать (3) в несколько иной форме

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{ij,i}A_{mn,i}}}\left[\partial_i-\frac{\partial_iA_{ij,i}}{4A_{ij,i}}\right]+\frac{\tilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{ij,j}A_{mn,j}}}\left[\partial_j-\frac{\partial_jA_{ij,j}}{4A_{ij,j}}\right]+\frac{\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{ij,m}A_{mn,m}}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\partial_m-\frac{\partial_mA_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right]+\frac{\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{ij,n}A_{mn,n}}}\left[\partial_n-\frac{\partial_nA_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right]+m_0\right\}\Phi=0. \tag{18}$$

Из сравнения (4) и (18) следует, что функции f_{mi}, f_{ni}, f_{jm}, f_{im} с необходимостью будут удовлетворять условию $f_{im}\equiv f_{jm}\equiv f_{mi}\equiv f_{ni}\equiv0$, т. е. $\hat{K}_{ij}$, $\hat{K}_{mn}$ принимают вид

$$\hat{K}_{ij}=\Gamma^i(f_i\partial_i+f_{ii})+\Gamma^j(f_j\partial_j+f_{jj})+m_0\Omega\varphi_i, \tag{19}$$

$$\hat{K}_{mn}=\Gamma^m(f_m\partial_m+f_{mm})+\Gamma^n(f_n\partial_n+f_{nn})+m_0\Omega\varphi_m. \tag{20}$$

Пусть, далее, $F=F(x^i,x^j)$, т. е. $\varphi_i\not\equiv0$, $\varphi_m\equiv0$. Для определения Ω из (5) с учетом (19), (20) получим систему уравнений: $\tilde{\gamma}^i\Omega\tilde{\gamma}^m-\tilde{\gamma}^m\Omega\tilde{\gamma}^i=0$, $\tilde{\gamma}^i\Omega\tilde{\gamma}^n-\tilde{\gamma}^n\Omega\tilde{\gamma}^i=0$, $\tilde{\gamma}^m\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^m=0$, $\tilde{\gamma}^j\Omega\tilde{\gamma}^m-\tilde{\gamma}^m\Omega\tilde{\gamma}^j=0$, $\tilde{\gamma}^j\Omega\tilde{\gamma}^n-\tilde{\gamma}^n\Omega\tilde{\gamma}^j=0$, $\tilde{\gamma}^n\Omega-\Omega\tilde{\gamma}^n=0$, откуда $\Omega=\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j$.

Перепишем тождества (9), (10) с учетом (17):

$$\frac{F(x^i,x^j)}{\sqrt{A_{ij,i}A_{mn,i}}}=f_i(x^i,x^j),\qquad \frac{F(x^i,x^j)}{\sqrt{A_{ij,j}A_{mn,j}}}=f_j(x^i,x^j), \tag{21}$$

$$\frac{F(x^i,x^j)}{\sqrt{A_{ij,m}A_{mn,m}}}=f_m(x^m,x^n),\qquad \frac{F(x^i,x^j)}{\sqrt{A_{ij,n}A_{mn,n}}}=f_n(x^m,x^n). \tag{22}$$

Для выполнения (21), (22) необходимо потребовать

$$A_{mn,i}=\mathrm{const},\quad A_{mn,j}=\mathrm{const},\quad \frac{F}{\sqrt{A_{ij,m}}}=\mathrm{const},\quad \frac{F}{\sqrt{A_{ij,n}}}=\mathrm{const},$$

или, что то же самое $F=(A_{ij,m})^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{const}$,

$$A_{ij,m}/A_{ij,n}=\mathrm{const},\quad A_{mn,i}=\mathrm{const},\quad A_{mn,j}=\mathrm{const}. \tag{23}$$

Если же $F=F(x^m,x^n)$, т. е. $\varphi_i\equiv0$, $\varphi\not\equiv0$, то аналогично только что рассмотренному случаю будем иметь $\Omega=\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$,

$$A_{mn,i}/A_{mn,j} = \text{const},\ A_{ij,m} = \text{const},\ A_{ij,n} = \text{const}. \qquad (24)$$

Из вышеизложенного следует, что если в уравнении (3) произошло отделение переменных x^i, x^j от x^m, x^n методом выделения некоторых дифференциальных операторов первого порядка, то с необходимостью метрика пространства удовлетворяет условию (17) и одному из наборов условий (23), (24). Достаточность полученных требований доказывается рассуждениями, обратными только что проведенным.

Таким образом, доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. Для отделения переменных x^i, x^j от x^m, x^n в КОУД методом выделения дифференциальных операторов первого порядка при диагональной калибровке тетрады необходимо и достаточно, чтобы интервал ds^2 представлялся в виде (17), а компоненты метрического тензора удовлетворяли одному из наборов условий (23) или (24).

3. Следствия теоремы (явный вид операторов).

1) Если выполнены условия (17) и (23), то в (4)

$$\hat{K}_{ij} = -\eta^{ii}\tilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{ij,m}}{A_{ij,i}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{ij,i}}{4A_{ij,i}}\right) + \eta^{jj}\tilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{ij,m}}{A_{ij,j}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{ij,j}}{4A_{ij,j}}\right) + m_0\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j(A_{ij,m})^{\frac{1}{2}},$$

$$\hat{K}_{mn} = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\left(\frac{1}{A_{mn,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right) +$$

$$+\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n\left(\frac{1}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right).$$

2) При выполнении (17) и (24) в (4) имеем

$$\hat{K}_{ij} = \tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\left(\frac{1}{A_{ij,i}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{ij,i}}{4A_{ij,i}}\right) +$$

$$+\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^j\left(\frac{1}{A_{ij,j}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{ij,j}}{4A_{ij,j}}\right),$$

$$\hat{K}_{mn} = -\eta^{mm}\tilde{\gamma}^n\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right) +$$

$$+\eta^{nn}\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right) + m_0\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n(A_{mn,i})^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

1. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1985, № 3, с. 26.

2. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е.— Тез. докл. Всесоюзн. конференц.: Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации. М., 1984, с. 137.

Поступила в редакцию 06.11.84.

УДК 621.396.963.8

Б. Н. КРАСНОГОЛОВЫЙ, И. М. ЧУШЕНКОВ, Б. Н. ШПИЛЕВОЙ

ФОРМИРОВАТЕЛЬ МАГНИТНОЙ РАЗВЕРТКИ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

С учетом дисторсии, т. е. искажений отклонения луча за счет отличающейся от сферической формы поверхности экрана электронно-лучевой трубки (ЭЛТ), и параметров отклоняющей системы (ОС) выраже-