

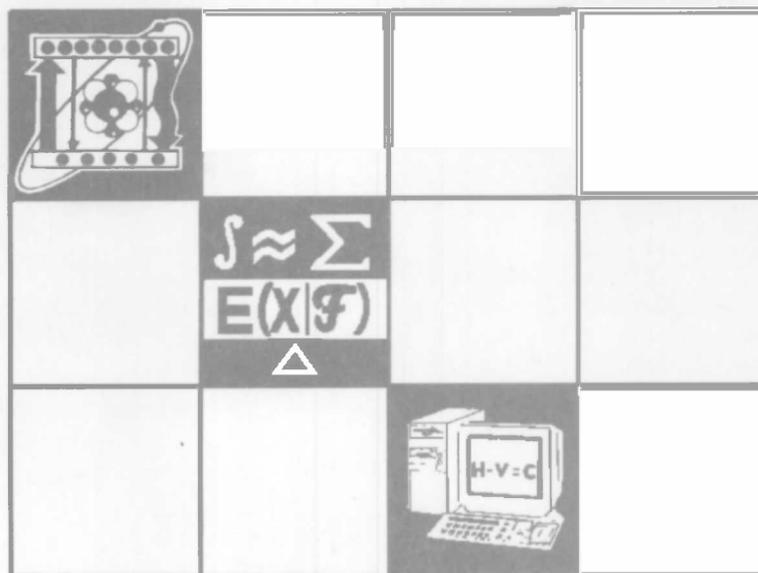
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

1/2004



СОДЕРЖАНИЕ

НАШИ ЛАУРЕАТЫ

<i>Воропай Е.С., Клищенко А.П., Минько А.А., Попечич В.И.</i> Анизотропия процессов поглощения и испускания света сложными органическими соединениями	3
---	---

ФИЗИКА

✓ <i>Стражев В.И., Ционенко Д.А.</i> О квантовомеханической интерпретации уравнения Дирака – Кэлера в искривленном пространстве	17
✓ <i>Горбач Д.В., Кицак М.А., Миксюк Ю.И., Толстик А.Л.</i> Динамика преобразования световых полей при нелинейных взаимодействиях в молекулярных средах с фотопереносом протона	21
✓ <i>Мартинович Г.Г., Черенкевич С.Н.</i> Внутриклеточный эффективный редокс-потенциал – новый фактор регуляции клеточных процессов	28
✓ <i>Веселова Т.М., Поклонский Н.А., Самуйлов В.А.</i> Модель низкочастотных токовых осцилляций в полуизолирующих кристаллических полупроводниках	34
✓ <i>Воропай Е.С., Зажогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И.</i> Исследование процесса поступления элементов в плазму разряда при атомно-эмиссионном анализе растворов золота и серебра	39
✓ <i>Гайдук П.И., Траутман К. (ФРГ), Толемонд М. (Франция), Ларсен А.Н. (Дания).</i> Роль скорости ионов при формировании треков в сплавах $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$	44
✓ <i>Колодинский А.М., Соколовская Н.Г., Война В.В.</i> Рост и образование смешанных кристаллов из водных растворов в поле рентгеновского излучения	49
✓ <i>Шишкина Т.В., Марфин И.Б.</i> Поляризационные асимметрии неупругого рассеяния в рамках калибровочных моделей с дополнительным нейтральным бозоном	54

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

✓ <i>Демеш Н.Н., Чехменок С.Л.</i> Применение сглаженной периодограммы к оцениванию спектров устойчивых процессов с дискретным временем	59
✓ <i>Марзан С.А.</i> Системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций	63
✓ <i>Громак В.И., Голубева Л.Л.</i> Автопреобразования Беклунда третьего уравнения Пенлеве	68
✓ <i>Соболевский С.Л.</i> Подвижные особые точки одного класса иррациональных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка	70
✓ <i>Савчук В.П., Титюра О.В.</i> Прогиб струны под движущейся нагрузкой	75
✓ <i>Савенков В.А.</i> Динамическая контактная задача для ортотропной полосы	78
✓ <i>Босяков С.М., Медведев Д.Г.</i> Метод разрывных решений в теории упругости анизотропных стеклопластиков	82
✓ <i>Ролч О.Ч., Шестаков К.М., Садов В.С., Черняевский А.Ф.</i> Приближенное целочисленное дискретное косинусное преобразование	86
✓ <i>Коваленко Н.С., Самаль С.А.</i> Организация распределенной обработки конкурирующих процессов в синхронных режимах	91

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

✓ <i>Демидчик В.И., Корнев Р.В.</i> Анализ микроволновых свойств проволочных киральных рассеивателей методом интегрального уравнения	100
✓ <i>Лапто П.М.</i> Вероятность разорения в модели коллективного риска со случайными премиями	103
✓ <i>Задорожнюк Е.А.</i> Об одном критерии сверхразрешимости конечных групп	105
✓ <i>Шмуратко А.С.</i> Асимптотическое разложение распределений сумм зависимых случайных величин	108
✓ <i>Котов В.М.</i> Динамические оценки в задачах разбиения	110
✓ <i>Леваков А.А.</i> Среднеквадратические характеристические показатели стохастических систем	113

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

✓ Владимир Михайлович Борздов	116
✓ Рефераты	118

ВЕСТНИК

**Белорусского государственного
университета**

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Информатика**

1/2004

Январь

МИНСК
БГУ

Главный редактор В.Г. РУДЬ

Редакционная коллегия серии:

В.М. АНИЩИК (*ответственный редактор*),
Л.М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*), В.Г. БА-
РЫШЕВСКИЙ, В.В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*),
Е.С. ВОРОПАЙ (*ответственный секретарь*), М.А. ЖУРАВКОВ,
Э.И. ЗВЕРОВИЧ, А.И. КАЛИНИН, Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КО-
МЯК, В.И. КОРЗЮК, П.Д. КУХАРЧИК, П.А. МАНДРИК, В.И. МИ-
РОНЕНКО, С.Г. МУЛЯРЧИК, И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ,
Ю.С. ХАРИН, С.М. ЧЕРЕНКЕВИЧ, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,
Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Регистрационный № 805

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2004. № 1

На русском и белорусском языках

Адрес редакции: 220050, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 209-54-00.
E-mail: vestnikbsu@bsu.by

Редактор *И.А. Лешкевич*
Корректор *Л.А. Меркуль*
Технический редактор *Ю.И. Денисов*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Р.Е. Овсянниковым и Ю.И. Денисовым*

Подписано в печать 29.01.04. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.
Гарнитура Times New Roman. Усл.печ. л. 10,5. Усл. кр.-отг. 10,85. Уч.-изд. л. 10,74.
Тираж 415 экз. Заказ 111. Цена 5830 р.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в РУП «Издательский центр БГУ».
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.
ЛП № 461 от 14.08.01

© Вестник БГУ, 2004

Наши лауреаты

Решением Ученого совета университета от 30 октября 2003 г. премия им. А.Н. Севченко была присуждена Е.С. Воропаю, А.П. Клищенко, А.А. Минько, В.И. Попечицу за развитие теории анизотропии процессов поглощения и испускания света сложными органическими соединениями, разработку и внедрение в практику новых лазерных сред, жидкокристаллических материалов, спектрофлуориметрических приборов и систем отображения информации.

Вниманию читателей предлагаются основные положения доклада, подготовленного лауреатами премии им. А.Н. Севченко к заседанию Ученого совета.



Евгений Семенович Воропай – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии.

Анатолий Петрович Клищенко – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой атомной физики и информатики.

Анатолий Антонович Минько – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Владимир Иванович Попечиц – доктор физико-математических наук, ученый секретарь НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

АНИЗОТРОПИЯ ПРОЦЕССОВ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИСПУСКАНИЯ СВЕТА СЛОЖНЫМИ ОРГАНИЧЕСКИМИ СОЕДИНЕНИЯМИ

In the work the principles of light absorption and emission by different complex molecular compounds (dyes, glass-like and liquid-crystal materials) are considered. The features of two-photon-excited fluorescence of solutions and luminescence decay are presented.

Среди множества оптико-спектроскопических методов изучения строения и структуры сложных молекулярных соединений важнейшее место занимают исследования процессов анизотропии поглощения и испускания, а для люминесцирующих веществ – анизотропии люминесценции. Анизотропия, или поляризация, люминесценции является одной из главных характеристик люминесцентных веществ. Она тесным образом связана с основными параметрами и структурными особенностями молекул, а также с окружающей средой. Ее изучение дает разнообразную информацию о свойствах и строении веществ, которую невозможно получить иными методами. Закономерности поляризованной люминесценции растворов сложных молекул в рамках наиболее целесообразной применительно к таким системам осцилляторной модели исследованы достаточно подробно. В данной работе изложены основные аспекты дальнейшего развития теории поляризованной люминесценции, связанного с учетом нелинейных эффектов, в частности двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции (ДФВФ).

1. Поляризация двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции

Расчеты степени поляризации ДФВФ флуоресценции $P_{2\phi}$ выполнены на основании осцилляторной модели, используемой при описании поляризационных характеристик флуоресценции сложных молекул [1–5]. Процесс поглощения моделировался посредством двух параллельных осцилляторов поглощения и ориентированного под определенным углом осциллятора испускания. При этом предполагалось, что за испускание ответственны переходы из тех же возбужденных состояний, что и при одноквантовом возбуждении. Основанием для этого послужили работы, указывающие на независимость спектра флуоресценции от вида возбуждения (одно- и двухквантовое). В результате проведенных расчетов получено аналитическое соотношение, связывающее предельное значение $P_{2\phi}$ с углом α между осциллятором испускания и параллельными осцилляторами поглощения [1]. По структуре эта формула схожа с известной формулой Левшина – Перрена для однофотонно-возбуждаемой флуоресценции (ОФВФ). Анализ полученного соотношения позволил установить, что ДФВФ более анизотропна (интервал изменения степени поляризации от $2/3$ до $-1/2$), чем ОФВФ (значения степени поляризации от $1/2$ до $-1/3$). Аналогичные выводы сделаны и на основании квантовомеханических расчетов с использованием матрицы плотности.

Выполнен расчет предельного значения степени поляризации $\bar{P}_{n\phi}$ для n -квантового процесса возбуждения при параллельности всех n осцилляторов поглощения и одного осциллятора испускания:

$$P_{n\phi} = n/(n+1).$$

Исследован более общий случай расположения осцилляторов поглощения и испускания [2]. В рамках этой модели рассматривался один осцилля-

тор испускания и два диполя поглощения, составляющие угол γ . Ориентация осциллятора испускания задавалась углом α , образованным этим осциллятором и биссектрисой между диполями поглощения. Именно для такой модели получено достаточно компактное аналитическое соотношение. Несмотря на то что соотношение получено для ДФВФ, оно полностью применимо и при описании люминесценции из высоких возбужденных состояний при их двухступенчатом возбуждении. Подобная методика исследования более высоких, чем S_1 , состояний, в настоящее время находит широкое применение, в частности при изучении «синей» и «горячей» люминесценции из непрорелаксированных состояний.

Установлена связь между значениями P при возбуждении естественным и линейно-поляризованным светом. В результате выявлена взаимосвязь предельной степени поляризации с симметрией молекулы. Установлено, что для молекул, имеющих ось симметрии второго порядка и выше (независимо от симметрии), $P_{2\phi} \leq 1/5$. Отметим, что для ОФВФ значение $P_{1\phi} < 1/7$ для молекул, имеющих ось симметрии третьего порядка и выше.

Как и в случае однофотонно-возбуждаемой люминесценции, наиболее точную информацию о мультиплетности поглощающих и излучающих систем дают поляризационные диаграммы. Для определения вида диаграмм классически и квантовомеханически выполнен расчет зависимости степени поляризации излучения от величины угла между электрическими векторами возбуждающих потоков. Для случая с одним промежуточным состоянием в рамках осцилляторной модели выполнены расчеты степени поляризации ДФВФ от угла поворота направления поляризации возбуждающих световых потоков и угла наблюдения для всех возможных комбинаций π - и σ -осцилляторов – поляризационных диаграмм ДФВФ [4]. Измерения, проведенные для ряда производных фталимида, показали, что ДФВФ описывается моделью трех π -осцилляторов. Для сложных молекул имеет место диполь-дипольный характер, что подтверждает возможность использования осцилляторной модели при описании характеристик ДФВФ.

В результате исследования зависимости степени поляризации ДФВФ от частоты возбуждения и регистрации (спектры поляризации по поглощению и люминесценции) были обнаружены более значительные по сравнению с ОФВФ изменения степени поляризации по спектру ДФВФ, обусловленные электронно-колебательным взаимодействием. Измерения степени поляризации ДФВФ в зависимости от температуры и вязкости, а также в стеклюющихся растворителях [3] показали, что предельная степень поляризации ряда сложных молекул, которая определена путем экстраполяции к нулевой температуре и бесконечной вязкости с учетом ее зависимости от частоты, близка к теоретическому значению, равному $2/3$.

На основании установленных значительных изменений степени поляризации ДФВФ по спектру флуоресценции, а также при изменении суммарной частоты двухквантового возбуждения в пределах основной полосы поглощения выбрана модель для расчета, в которой учтено электронно-колебательное взаимодействие во втором порядке теории возмущений. Совокупный анализ теоретических и экспериментальных зависимостей подтверждает тот факт, что конечными для двухквантового перехода рассматриваемой природы являются электронно-колебательные состояния [5].

Измерение характеристик достаточно малого по величине двухфотонного поглощения (ДФП) требует специальных подходов [6–15]: разработки

методов, обеспечивающих высокое разрешение применительно к ДФП, а также к исследованию характеристик ДФВФ растворов сложных молекул. К ним относятся, в частности, внутрирезонаторный метод [7], различные разностные и компаративные методы. Повышение точности амплитудных и временных измерений обеспечивается применением оригинальных методов и устройств [8–14]. Для измерений кинетики и поляризации люминесценции времяразрешенных спектров [14, 15] был создан опытный образец импульсного спектрофлуориметра.

2. Поляризационные характеристики люминесценции органических молекул из высоких возбужденных электронных состояний (ВВЭС)

Большие возможности для исследования структуры многоатомных молекул и процессов трансформации энергии возбуждения, проходящих в растворах под воздействием мощных лазерных потоков, представляет изучение люминесценции из ВВЭС [16–19] (коротковолновая, или «синяя», люминесценция).

Для заселения ВВЭС в работе применялось возбуждение раствора двумя световыми потоками, частоты которых резонансны переходам $S_0 \rightarrow S_1$ и $S_1 \rightarrow S_n$ (двойной резонанс). При таком способе возбуждения поляризационные исследования оказываются эффективными для изучения конкуренции

двухступенчатого $(S_1 \xrightarrow{h\nu_1} S_1^*; S_1 \xrightarrow{h\nu_2} S_n)$ и двухфотонного $(S_0 \xrightarrow{h\nu_1 + h\nu_2} S_n)$ поглощений в области двойного резонанса, а также

излучения процесса кумуляции энергии (КЭ), при котором происходит безызлучательный переход энергии с одной синглетно-возбужденной молекулы на другую, также возбужденную, что приводит к переходу одной из них в ВВЭС.

В результате исследований, связанных с изучением поляризационных характеристик «синей» люминесценции растворов сложных молекул, в рамках осцилляторной модели обоснована зависимость степени поляризации люминесценции растворов ксантеновых красителей и производных фталимида от ориентации дипольных моментов переходов между возбужденными состояниями в молекуле при ступенчатом возбуждении $(S_0 \rightarrow S_1^* \rightarrow S_n)$ двумя световыми потоками с различным расположением векторов поляризации. Предложен метод определения взаимной ориентации дипольных моментов переходов в молекуле, основанный на измерении степени поляризации люминесценции из ВВЭС [18, 19].

В пределах нескольких электронных полос излучения проведены экспериментальные исследования поляризационных спектров, установившие зависимость их вида от способа возбуждения и вязкости растворов. Анализ поляризационных спектров по испусканию позволил оценить время жизни первого и последующих более высоких возбужденных состояний, отвечающих за «горячую» и коротковолновую люминесценции, и показать возможность определения каналов дезактивации энергии электронного возбуждения в поле световой волны.

Поляризационные исследования «синей» люминесценции в вязких и маловязких растворителях при ступенчатом возбуждении системы двумя резонансными световыми потоками (двойной резонанс) показали возможность конкуренции между несколькими механизмами заселения ВВЭС.

Проведены квантовомеханические расчеты вероятностей ДФП и ДСП для многоатомных молекул в области двойного резонанса. Предложен экспериментальный метод разделения обоих процессов заселения S_n , основанный на поляризационных и временных измерениях.

Разработана модель описания КЭ синглетно-возбужденных молекул, возникающей при высокой плотности населенности возбужденного состояния и обусловленной безызлучательным переносом энергии. Поляризационные и кинетические исследования люминесценции из ВВЭС позволили экспериментально обнаружить и теоретически обосновать наличие КЭ синглетно-возбужденных молекул в растворах. Показано, что посредством исследования концентрационной деполяризации «синей» люминесценции можно определить эффективность вклада КЭ в заселенность состояния S_n .

3. Поляризация индуцированного излучения и его особенности в припороговой области накачки

Описание поляризации излучения (в том числе и индуцированного) связано с выделением двух ортогональных компонент, называемых поляризационными модами. Метод поляризационных мод удобен для описания широкого круга лазерных систем – от газовых лазеров до лазеров на растворах красителей.

Однако может возникнуть ситуация, для которой такой подход неприемлем, поскольку не учитывает возможность возникновения сложной фазово-поляризационной структуры (ФПС). Источниками излучения со сложной ФПС могут выступать лазеры на растворах красителей с низкой добротностью резонатора, работающие вблизи порога генерации. Был предложен и теоретически обоснован новый подход к проблеме формирования поляризационных и энергетических характеристик индуцированного излучения жидкостных лазеров в припороговой области накачки, связанный с развитием метода поляризационных компонент [20–28] (полный набор поляризационных состояний). На основе этого метода удалось рассчитать энергетические и поляризационные характеристики генерируемого излучения, а также объяснить ряд экспериментально наблюдаемых эффектов, связанных с условиями накачки в припороговой области и поляризацией возбуждающего излучения. В частности, для жидкостных лазеров впервые выявлены особенности формирования и развития генерации в припороговой области значений энергии накачки.

Обнаружена зависимость эффективности генерации излучения в припороговой области от линейной и круговой поляризации накачки, причем эффективность линейно-поляризованной накачки значительно выше (в 2–3 раза), чем круговой.

Теоретически показано, что данные закономерности хорошо согласуются в рамках модели, обосновывающей формирование частично поляризованного излучения генерации, обусловленной некогерентной смесью колебаний всех возможных поляризаций, независимо от поляризации излучения накачки и ее геометрии.

Нами предложен способ получения неполяризованного света генерации в результате накачки активного вещества светом круговой поляризации при значительном превышении порога генерации, следствием чего является отсутствие фазовой корреляции между различными поляризационными колебаниями.

Аргументирован и экспериментально подтвержден метод оптимизации энергетических и поляризационных характеристик излучения жидкостного лазера при околопороговом режиме накачки путем подбора концентрации активного вещества. Причем значения концентрации зависят от геометрии накачки и состояния поляризации возбуждающего излучения, а также ориентации электрического вектора относительно оси резонатора, что возможно лишь при условии учета процесса, определяющегося концентрацией излучательных центров, – безызлучательного переноса энергии (БПЭ).

Проведено теоретическое обоснование метода поляризационных компонент. Получено решение уравнения Фоккера – Планка для функции распределения интенсивности отдельных компонент и построены функции распределения степени поляризации излучения генерации, анализ экспериментальных данных позволил определить значения коэффициентов потерь для поляризационной компоненты.

4. Поляризация флуоресценции при световом тушении. Механизм тушения

Выполнено детальное исследование спектрально-поляризационных характеристик растворов сложных молекул при световом тушении (СТ) [29–32]. Указанное явление проявляется в изменении интенсивности флуоресценции при воздействии сильного невозбуждающего излучения. Из сравнения спектральных зависимостей коэффициентов Эйнштейна для вынужденных переходов, полученных методом СТ, с найденными из спектров люминесценции установлено, что для большинства изученных сложных молекул основным каналом СТ являются вынужденные переходы из первого возбужденного на колебательные подуровни основного состояния. Аналогичные выводы сделаны по результатам исследования анизотропии флуоресценции при СТ. Исходя из определения механизма последнего предложен и реализован оригинальный способ измерения спектров люминесценции, обладающий рядом преимуществ по сравнению с традиционным. Он наиболее эффективен при исследовании низкочастотных участков спектра люминесценции, а также применительно к многокомпонентным растворам и при наличии излучения примесей.

На примере ряда производных фталимида и ксантеновых красителей с известной ориентацией осцилляторов перехода в растворах различной вязкости обнаружена существенная зависимость эффективности СТ от взаимной ориентации единичных векторов поляризации линейно-поляризованного возбуждающего и тушащего световых потоков, а также осцилляторов поглощения и флуоресценции. Установлено, что максимальная эффективность СТ наблюдается при совпадении направления осцилляторов поглощения и флуоресценции, а также при параллельности векторов поляризации возбуждающего и тушащего световых потоков. Минимальная эффективность зафиксирована при взаимно перпендикулярной ориентации осцилляторов поглощения и флуоресценции.

Изучение эффективности СТ по спектру флуоресценции показало, что она увеличивается при переходе к низкочастотному краю полосы флуоресценции. Обнаружена значительная зависимость степени поляризации и эффективности СТ от частоты флуоресценции в глицериновых растворах и ее отсутствие в этанольных растворах. Изменение этих характеристик в пределах спектра люминесценции ослабляется при уменьшении частоты возбуждения. Данный эффект обусловлен ориентационной и спектральной се-

лективностью СТ, а также конкуренцией процесса релаксационного сдвига спектра люминесценции и дополнительного обеднения возбужденных состояний при СТ. Показана возможность изучения динамики процесса перестройки сольватной оболочки при квазистационарном возбуждении и СТ интенсивным импульсным излучением.

С использованием уравнений баланса выполнены расчеты спектрально-поляризационных характеристик растворов в условиях СТ. Проанализирована зависимость изменения эффективности СТ и степени поляризации от сдвига мгновенного спектра люминесценции в процессе релаксации и соотношения между временем жизни и временем релаксации при различной ориентации осцилляторов поглощения и испускания, а также взаимной ориентации векторов поляризации возбуждающих и тушащих световых потоков. В целом проведенные исследования спектрально-поляризационных характеристик позволили обосновать механизм СТ в конденсированной фазе сложных органических соединений.

5. Концентрационная деполяризация люминесценции растворов сложных органических молекул

Получены формулы, описывающие концентрационную деполяризацию и квантовый выход люминесценции при изменении трех параметров – концентрации люминесцентных молекул, температуры и вязкости раствора. Очевидно, что увеличение температуры и/или уменьшение вязкости раствора приводят к возрастанию вероятности безызлучательного переноса энергии возбуждения и, следовательно, к уменьшению степени поляризации и квантового выхода люминесценции. Теоретически показано, что наиболее сильно зависимость концентрационной деполяризации и тушения люминесценции от температуры и вязкости раствора проявляется в области средних концентраций $\sim 10^{-7}$ моль/л, т. е. когда в «активной сфере» А. Яблонского находятся одна-две люминесцентные молекулы. Как следует из проведенных расчетов, максимально возможное уменьшение анизотропии испускания, вызванное диффузией флуоресцентных молекул, в области указанных концентраций составляет примерно 7 %, а квантового выхода – 12 % по сравнению с твердым раствором [33–35]. Полученные результаты показали хорошую согласованность теоретических и экспериментальных данных [35].

6. Спектрально-поляризационные свойства люминесценции красителей в условиях неоднородного уширения спектральных уровней

Установлено, что в условиях неоднородного уширения электронных уровней энергии при переходе от стокового возбуждения к антистоксовому коротковолновой температурный сдвиг спектров переходит в длинноволновую, а степень поляризации флуоресценции возрастает с уменьшением частоты регистрации. При стоковом возбуждении степень поляризации по спектру флуоресценции снижается при уменьшении частоты регистрации. Эти эффекты объяснены с помощью предложенной схемы неоднородно уширенных электронных уровней люминесцентных молекул. При стоковом возбуждении для вязких полярных растворов красителей высокой концентрации установлено изменение концентрационной деполяризации свечения по спектру испускания и изменение формы спектров флуоресценции потушенных растворов, зависящие от соотношения между временем жизни

люминесцентных молекул в возбужденном состоянии и временем ориентационной релаксации молекул растворителя. Теоретически и экспериментально показано, что уширение и длинноволновой сдвиг спектров флуоресценции, уширение и коротковолновой сдвиг спектров возбуждения флуоресценции, изменение степени поляризации по спектрам флуоресценции и возбуждения при повышении концентрации твердых полярных растворов красителей зависят от частоты возбуждения или регистрации, температуры раствора и структуры «элементарных» спектров. Установлена зависимость затухания свечения растворов флуоресцентных молекул от температуры, концентрации, частоты возбуждения и регистрации свечения; отличие этих зависимостей во многих случаях от экспоненциальных; разгорания флуоресценции при регистрации на длинноволновом краю спектра испускания. Показано существование в твердых полярных растворах красителей концентрационного тушения флуоресценции, вызванного безызлучательным переносом энергии возбуждения на длинноволновые флуоресцентные центры, обладающие повышенной способностью к безызлучательной дезактивации энергии возбуждения [36–43].

Разработанные методы изучения поляризованной люминесценции растворов сложных органических молекул и установленные при этом закономерности были использованы при исследовании термо- и фотостабильности активных и пассивных лазерных сред на основе органических красителей, а также радиационной стойкости органических красителей в конденсированных средах [44–49].

7. Спектрально-поляризационные характеристики стеклообразных систем

Развитие таких областей науки и техники, как квантовая электроника, волоконно-оптическая связь, ядерная энергетика, космонавтика и др., требует создания оптических материалов с заданным набором физико-химических свойств. В частности, большое внимание в последнее время уделяется стеклообразным матрицам, которые активируются различными молекулярными структурами (пористыми стеклами, заполненными растворами красителей, центрами окраски и др.). Оптические свойства таких структур в немалой степени определяются свойствами матриц, поэтому их изучение представляется актуальной задачей.

Среди различных типов стекол важная роль принадлежит кварцевому стеклу (SiO₂). Проведенные исследования [50–56] показывают, что практически для всех видов кварцевых стекол наблюдается полоса поглощения с максимумом около 242 нм, фотовозбуждение в которую приводит к появлению полос люминесценции при 280 и 396 нм, для некоторых типов стекол наблюдается слабая полоса поглощения в области 330 нм и соответствующая ей полоса излучения при 400 нм. До настоящего времени не выяснен вопрос о природе дефектов, обуславливающих УФ-поглощение и люминесценцию кварцевых стекол. В кварцевых стеклах, легированных германием, максимум коротковолновой полосы люминесценции расположен при 792 нм. В случае освещения стекол линейно-поляризованным светом излучение поляризовано. Нами получены поляризационные диаграммы и рассчитано время жизни различных полос люминесценции [50]. На основании анализа экспериментальных данных определена природа (мультипольность) элементарных излучателей, ответственных за полосы поглощения и люминесценции. Установлено, что полосам люминесценции в области 292

и 396 нм в стеклах с германием соответствуют осцилляторы испускания *oe* и *ot*, а осциллятор поглощения для обеих полос излучения одинаков (*oe*). Время жизни полос при 292 и 396 нм равно 5 нс и 107 мкс соответственно. Спектры возбуждения этих полос свечения, измеренные в области 230–260 нм, совпадают. Анализ полученных результатов позволил предположить, что полоса при 292 нм обусловлена синглет-синглетным, а полоса при 396 нм – триплет-синглетным переходом одного излучающего центра.

Относительно невысокое значение степени поляризации полосы люминесценции 292 нм (+13 %) свидетельствует о высокой симметрии излучающих центров. Поскольку в стеклообразном состоянии высокая симметрия сохраняется в пределах только первой координационной сферы (тетраэдры SiGe), очевидно, что такими центрами могут быть отдельные тетраэдрические комплексы с незначительным взаимодействием с ближайшим окружением. Анализ полученных нами данных и сопоставление их с имеющимися в литературе позволили сделать выбор в пользу дефекта типа «вакансии» кислорода =Si–Ge= [50, 53].

В стеклах KB и KY-2, специально не активированных германием, может наблюдаться сложная коротковолновая полоса излучения. При повышении спектрального разрешения у этих стекол проявляются два максимума люминесценции – 282 и 290 нм. Для стекла KI также можно выделить полосу в области 290 нм, если использовать более коротковолновое возбуждение (~230 нм).

Таким образом, во всех исследованных кварцевых стеклах можно наблюдать две компоненты коротковолновой полосы излучения, а их соотношение зависит от марки стекла. Из этого следует вывод, что компоненты обусловлены двумя типами центров со схожей структурой. Проведено исследование влияния термообработки кварцевых стекол на параметры их люминесценции. Установлено, что термический отжиг (ТО) стекол приводит к ослаблению интенсивности коротковолновых полос излучения.

Проведено исследование природы радиационных дефектов. Установлено, что при нейтронном облучении возникают дефекты типа =Si–Si=, формирующие полосу излучения вблизи 280 нм.

Проведено исследование спектрально-люминесцентных характеристик при мощном импульсном возбуждении второй гармоникой рубинового лазера (347 нм) в полосу поглощения церия в кварцевом стекле. Обнаружено и интерпретировано длительное интенсивное послесвечение [52, 56].

8. Межмолекулярные взаимодействия и оптико-физические свойства жидких кристаллов

Получила дальнейшее развитие молекулярно-статистическая теория показателей преломления одноосных жидких кристаллов (ЖК) с учетом корреляций ориентации и положения молекул, что позволило оценить величину, проанализировать характер и относительные вклады анизотропии межмолекулярных взаимодействий (ММВ) типа диполь – индуцированный диполь и ближнего порядка в изменение макроскопических оптических свойств мезофазы.

Теоретически и экспериментально исследовано влияние ММВ на изменение дипольного момента перехода молекул в мезофазе. Установлено, что универсальные межмолекулярные взаимодействия, изменяя полный дипольный момент перехода молекул, оказывают существенное влияние на

дихроизм ИК-поглощения в ЖК, на основании чего рассчитаны величины фактора структурной анизотропии [57, 58].

Решена задача связи формы колебательных полос с колебательной и ориентационной функциями автокорреляции для одноосных ЖК. Показано, что, в отличие от ИК-спектров, исследование спектров КР позволяет определять по отдельности функции автокорреляции как для колебаний, так и для вращения молекул вокруг различных осей [59].

Разработан алгоритм расчета состояния поляризации света, прошедшего через деформированный ЖК-слой, позволяющий, опираясь на физико-химические и электрооптические параметры конкретного ЖК-материала, целенаправленно изменять его эксплуатационные характеристики и оптимизировать такие параметры твист-экранов, как мультиплексная способность и углы обзора. Показана возможность значительно варьировать крутизну вольт-контрастной характеристики, пороговые и динамические параметры твист-эффекта, подбирая оптически активную добавку и ее концентрацию в зависимости от толщины слоя ЖК [59–62].

Теоретически и экспериментально исследованы оптические свойства хирально-нематических сред при больших углах закрутки. Показано, что в этом случае можно создать условия, при которых ЖК-вещество ведет себя как изотропная оптически активная среда. Обоснована возможность создания электрически управляемых фильтров кругового двулучепреломления типа фильтров Лيو.

На основании исследования мезоморфных и оптико-физических свойств жидкокристаллических соединений и анализа данных литературы установлены закономерности влияния строения циклических и мостиковых фрагментов, боковых и концевых заместителей молекул жидких кристаллов на их мезоморфные, оптические и диэлектрические свойства, что позволило выработать критерии для целенаправленного поиска новых ЖК-соединений. Показано, что перспективными компонентами ЖК-материалов, предназначенных для электрооптических устройств отображения информации, являются соединения с числом атомов углерода в алкильной цепочке от 3 до 6, содержащие в различных сочетаниях наряду с бензольным и циклогексановым циклогексановое и бороксановое кольца, соединенные непосредственно друг с другом или посредством $\text{CH}_2 - \text{CH}_2-$, COO -мостиков; сочетание в концевом фрагменте нитрильной группы и атома фтора в сопряжении с бензольным кольцом позволяет получать жидкие кристаллы с высоким значением положительной диэлектрической анизотропии [63].

Анализ мезоморфных, оптико-физических и электрооптических свойств некоторых полярных цианопроизводных в различных ЖК-матрицах показал, что для создания высокомультиплексных, низковольтных и высокодинамичных ЖК-материалов наиболее перспективными в сочетании с неполярными ЖК-соединениями являются новые цианофторфенилпроизводные 1,3,2-диоксаборинана, характеризующиеся высокими (до 90) значениями положительной диэлектрической анизотропии. Для высокомультиплексных (до 1:128) электрооптических устройств разработаны, запатентованы и рекомендованы новые ЖК-материалы, в состав которых входят производные 1,3,2-диоксаборинана [64, 65].

Использована перспективная технология и для создания различных высокоинформативных электрооптических ЖК-экранов (супертвистовой, двойной супертвистовой, сегнетоэлектрической, активно-матричной), требую-

щих точного удержания зазора, включая формирование монолитно с подложкой по всей площади экрана с определенной топологией одинаковых по высоте спейсеров [66]. Для супертвистовых экранов разработаны ЖК-материалы и показано, что с увеличением угла закрутки повышается не только крутизна вольт-контрастной характеристики, но расширяется полоса пропускания экрана и яркость его становится выше.

9. Молекулярное рассеяние света в нематических жидких кристаллах

На основании теоретического анализа механизмов формирования спектра молекулярного рассеяния света, комплекса экспериментальных исследований различных видов рассеяния (спонтанного и резонансного КР, рэлеевского), изучения спектров электронного поглощения и рефрактометрии, а также компьютерного моделирования мезогенов на молекулярном уровне установлено, что универсальные межмолекулярные взаимодействия в жидких кристаллах проявляются в спектрах рассеяния двояким образом: на макроскопическом уровне за счет перенормировки электромагнитного поля (эффекты локального поля) и на молекулярном – за счет изменения поляризуемости вследствие межмолекулярных взаимодействий; значительная часть рассеянного света (до 30–40 %) в комбинационном рассеянии и преобладающая часть интенсивности в крыле линии Рэля обусловлены универсальными межмолекулярными взаимодействиями [57]. Показано, что при учете электростатических взаимодействий в приближении диполь – индуцированный диполь удается корректно описать основные особенности зависимости спектральной интенсивности рассеянного света от структурных параметров среды, оптических характеристик и симметрии молекул.

Показано, что изменение изотропной составляющей рассеянного света под действием межмолекулярных взаимодействий обусловлено ориентационно-трансляционными корреляциями, а для анизотропной составляющей значительную роль играют еще и корреляции ориентации соседних молекул. Это приводит к тому, что в изотропной и нематической фазах степень деполяризации рассеянного света изменяется по-разному. Данное явление нельзя свести лишь к эффектам локального поля, что неизбежно ограничивает точность определения параметров ориентационного порядка по степени деполяризации полос КР [68].

Установлено, что экспериментально наблюдаемые значения анизотропии парной функции распределения молекул, в отличие от существующих представлений, не пропорциональны параметру ориентационного порядка примеси, а зависят от параметров матрицы; поляризация спонтанного комбинационного рассеяния на глобулярных молекулах примеси однозначно определяется анизотропией локального поля и флуктуациями межмолекулярных взаимодействий. Разработан метод определения влияния корреляций ориентации молекул на степень деполяризации полос КР нематических ЖК [58].

Дано описание экспериментально наблюдаемых зависимостей интенсивности, степени поляризации и формы спектров рассеяния от состава и фазового состояния мезогенной среды, которое позволило не только определить степень достоверности существующих спектральных методов расчета молекулярно-структурных параметров, мезофазы, а также предложить ряд новых методов выявления анизотропии локального поля, индуцирован-

Наши лауреаты

ного межмолекулярными взаимодействиями рассеяния и ориентационных функций автокорреляции.

На основе результатов проведенных исследований разработан ряд новых материалов и устройств для практического приложения: органические красители, перспективные в качестве лазерных сред и управляющих элементов, а также соединений для создания на их основе медицинских препаратов; новые жидкокристаллические соединения для электрооптических устройств; комплексы аппаратуры и высокоинформативные системы отображения информации.

Цикл работ посвящен памяти академика А.Н. Севченко в 100-летнюю годовщину со дня его рождения.

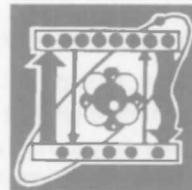
1. Воропай Е.С., Саржевский А.М. // Опт. и спектр. 1972. Т. 33. № 3. С. 486.
2. Воропай Е.С., Жолнеревич И.И., Саржевский А.М. // Журн. прикл. спектр. 1973. Т. 19. № 4. С. 730.
3. Воропай Е.С., Жолнеревич И.И., Саржевский А.М. // Там же. 1972. Т. 17. № 3. С. 421.
4. Севченко А.Н., Буров Л.И., Воропай Е.С. и др. // Докл. АН БССР. 1973. Т. 16. № 2. С. 117.
5. Бутько А.И., Воропай Е.С., Гайсенко В.А. и др. // Опт. и спектр. 1984. № 5. Т. 56. С. 808.
6. Воропай Е.С., Саржевский А.М., Торпачев П.А. // Журн. прикл. спектр. 1981. Т. 34. № 1. С. 150.
7. Воропай Е.С., Торпачев П.А. // Там же. 1985. Т. 42. № 3. С. 372.
8. А. с. 759865 СССР, МКИ G 01 J 1/44. / Воропай Е.С., Саржевский А.М., Севченко А.Н., Торпачев П.А. (СССР) № 2624004/18-25. Заявл. 02.06.78; Оpubл. 30.08.80, Б. И. № 32.
9. Воропай Е.С., Саржевский А.М., Севченко А.Н., Торпачев П.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1979. № 1. С. 21.
10. Воропай Е.С., Саржевский А.М., Торпачев П.А. Техника эксперимента в спектроскопии многофотонного поглощения. Ч. 1. Косвенные методы измерений двухфотонного поглощения. М., 1980. 51 с. Деп. в ВИНТИ, № 5274-80.
11. Воропай Е.С., Саржевский А.М., Торпачев П.А. Техника эксперимента в спектроскопии многофотонного поглощения. Ч. 2. Квазипрямые методы исследования двухфотонного поглощения. М., 1981. Деп. в ВИНТИ 04.08.81, № 3862-81.
12. А. с. 1198387 СССР МКИ G01 J 1/10 / Воропай Е.С., Торпачев П.А., Карась В.И., Ломако В.М. (СССР). № 3694478/24-05. Заявл. 26.01.84; Оpubл. 15.12.85, Б. И. № 46.
13. Бык А.П., Воропай Е.С., Гусенков С.Н. и др. // Журн. прикл. спектр. 1989. Т. 50. № 2. С. 227.
14. Воропай Е.С., Данилевич В.В., Чернявский А.Ф. // Там же. 1993. Т. 58. № 1-2. С. 13.
15. Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н. и др. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 7.
16. Гайсенко В.А., Дударев И.А., Кадум М.А., Клищенко А.П. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 29. № 4. С. 35.
17. Гайсенко В.А., Дударев И.А., Клищенко А.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1980. № 1. С. 34.
18. Гайсенко В.А., Клищенко А.П., Слободенюк А.И., Саржевский А.М. // Опт. и спектр. 1984. Т. 56. № 2. С. 371.
19. Гайсенко В.А., Клищенко А.П., Слободенюк А.И., Саржевский А.М. // Там же. 1985. Т. 59. № 3. С. 295.
20. Буров Л.И., Жвалеvский А.В., Клищенко А.П., Козлов И.Н., Листолад А.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1983. № 1. С. 6.
21. Аль-Бек М.А., Гайсенко В.А., Клищенко А.П., Сергеев С.В. Влияние безызлучательного переноса энергии на энергетические и поляризационные характеристики лазера на красителе с поляризованной накачкой. Мн.: Препринт АН БССР, 1991. С. 3.
22. Гончаренко И.И., Жвалеvский А.В., Клищенко А.П., Козлов А.Н. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 12. № 12. С. 28.
23. Буров Л.И., Жвалеvский А.В., Клищенко А.П. и др. // ЖПС. 1993. Т. 8. № 1-2. С. 108.
24. Буров Л.И., Клищенко А.П., Листолад А.П. // ЖПС. 1997. Т. 64. № 5. С. 595.

25. Бутько А.И., Клищенко А.П., Козлов И.Н. Исследование анизотропных свойств излучения жидкостного лазера на родамине 6Ж при поляризованной поперечной накачке: Тез. докл. III Междунар. конф. по лазер. физике и спектроскопии. Гродно, 1997. С. 232.
26. Буров Л.И., Варакса И.Н., Клищенко А.П. Обобщенный метод описания формирования поляризованного излучения в простых системах усиления и генерации: Тез. докл. III Междунар. конф. по лазер. физике и спектроскопии. Гродно, 1997. С. 174.
27. Буров Л.И., Варакса И.Н., Клищенко А.П. // Оптика и спектроскопия молекулярных и надмолекулярных функциональных систем: Сб. науч. тр. Мн., 2000. С. 223.
28. Буров Л.И., Варакса И.Н., Клищенко А.П., Козлов И.Н. // ЖПС. 2003. Т. 70. № 4. С. 474.
29. Гайсенок В.А., Клищенко А.П., Дударев И.А., Колев И.Н. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1975. Т. 39. № 11. С. 2308.
30. Гайсенок В.А., Дударев И.А., Клищенко А.П. // Там же. 1978. Т. 42. № 2. С. 405.
31. Воропай Е.С., Гайсенок В.А., Жолнеревич И.И. // Спектроскопия и люминесценция молекулярных систем / Под ред. Е.С. Вороная, К.Н. Соловьева, Д.С. Умрейко. Мн., 2002. С. 229.
32. Бабичев С.Г., Буров Л.И., Клищенко А.П. // Журн. прикл. спектр. 2002. Т. 69. № 6. С. 736.
33. Попечиц В.И., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1973. № 1. С. 38.
34. Попечиц В.И., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Там же. Сер. 1. 1973. № 2. С. 36.
35. Попечиц В.И., Козлов И.Н., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Журн. прикл. спектр. 1973. Т. 18. № 4. С. 653.
36. Исаченкова Л.А., Попечиц В.И., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Там же. 1974. Т. 20. № 2. С. 225.
37. Попечиц В.И., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Там же. 1977. Т. 27. № 4. С. 664.
38. Коява В.Т., Попечиц В.И. // Там же. 1979. Т. 31. № 6. С. 982.
39. Коява В.Т., Попечиц В.И., Саржевский А.М. // Там же. 1980. Т. 32. № 2. С. 283.
40. Коява В.Т., Попечиц В.И., Саржевский А.М. // Опт. и спектр. 1980. Т. 48. № 5. С. 896.
41. Акимов А.Н., Коява В.Т., Попечиц В.И. // Там же. 1980. Т. 49. № 2. С. 255.
42. Коява В.Т., Павлович В.С., Пикулик Л.Г. и др. // Там же. 1980. Т. 49. № 2. С. 296.
43. Коява В.Т., Павлович В.С., Попечиц В.И., Саржевский А.М. // Журн. прикл. спектр. 1981. Т. 34. № 6. С. 1017.
44. Попечиц В.И., Самцов М.П. // Опт. и спектр. 1984. Т. 56. № 1. С. 66.
45. Попечиц В.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 2. С. 36.
46. Попечиц В.И. // Там же. 2002. № 3. С. 33.
47. Воропай Е.С., Попечиц В.И., Самцов М.П. // Спектроскопия и люминесценция молекулярных систем / Под ред. Е.С. Вороная, К.Н. Соловьева, Д.С. Умрейко. Мн., 2002. С. 265.
48. Попечиц В.И. // Журн. прикл. спектр. 2003. Т. 70. № 1. С. 34.
49. Кухарчик Л.В., Попечиц В.И., Сагайдак Д.И., Тимофеева Г.И. Цвет в ЖК-дисплее, модели цвета, цветовосприятие. Мн., 2003.
50. Воропай Е.С., Горбачев С.М., Козлов И.Н., Черенда Н.Г. // Журн. прикл. спектр. 1985. Т. 43. № 2. С. 213.
51. Bilan O.N., Voropai J.S., Cherenda N.G. et al. // Radiation Effects. 1986. Vol. 97. № 1. P. 67. Деп. в ВИНТИ 04.08.81, № 3862-81.
52. Воропай Е.С., Горбачев С.М., Саечников В.А., Черенда Н.Г. // Журн. прикл. спектр. 1988. Т. 48. № 2. С. 228.
53. Воропай Е.С., Горбачев С.М., Козлов И.Н., Черенда Н.Г. Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1986. № 2. С. 17.
54. Bilan O.N., Gorbachev S.M., Cherenda N.G. et al. // Radiation Eff and Defects in Solids. 1991. Vol. 115. P. 285.
55. Билан О.Н., Воропай Е.С., Горбачев С.М. и др. // Журн. прикл. спектр. 1990. Т. 52. № 3. С. 434.
56. Воропай Е.С., Саржевский А.М. // Там же. 1971. Т. 14. № 3. С. 534.
57. Игнатович Р.Р., Минько А. А., Яковенко С.Е. // Там же. 1992. Т. 56. № 3. С. 429.

Наши лауреаты

58. Kroemer G., Geiger A., Minko A.A., Yakovenko S.Y. // *Liquid crystals*. 1994. Vol. 17. № 1. P. 127.
59. Konovalov V.A., Minko A.A., Muravski A.A. et al. // *J. of SID*. 1999. Vol. 7. № 3.
60. Минько А. А., Тимофеев С.Н., Яковенко С.Е. // *Опт. журн.* 2000. Vol. 67. № 11. С. 107.
61. Бакеев Н.Ф., Беляев В.В., Волынский А.Л., Иванов С.А. и др. // *Там же*. 2001. Т. 68. № 9. С. 89.
62. Минько А. А., Тимофеев С.Н., Оджаева И.Н. // *Электроника*. 2003. № 1 (51). С. 41.
63. UK Patent GB 2201150 B от 24.04.91 / Bezborodov V.S., Minko A.A., Grinkevich O.A. et al.
64. А. с. 1793725 СССР от 08.10.92 / Безбородов В.С., Лапаник В.И., Минько А.А. и др.
65. А. с. 1822190 СССР от 12.10.92 / Безбородов В.С., Коновалов В.А., Лапаник В.И. и др.
66. А. с. 1599801 СССР от 15.06.90 / Абдулин А.З., Лапаник В.И., Минько А.А. и др.
67. А. с. 1725658 СССР от 08.12.91 / Коновалов В.А., Кислый В.И., Минько А.А. и др.
68. Минько А. А., Яковенко С.Е. // *Спектроскопия и люминесценция молекулярных систем* / Под ред. Е.С. Воропая, К.Н. Соловьева, Д.С. Умрейко. Мн., 2002. С. 315.

Поступила в редакцию 15.12.2003.



УДК 539.12

В.И. СТРАЖЕВ, Д.А. ЦИОНЕНКО

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА – КЭЛера В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The quantum-mechanical interpretation of the Dirac – Kaehler equation in a curved space-time is given. The equation is generalized by introduction of interacting with a gauge field corresponding of a localization of the internal symmetry group. It is establish that a choice of a system of reference determinate the choice of gauge condition.

Уравнение Дирака – Кэлера (далее – уравнение Д – К) в плоском пространстве-времени (см., например, [1])

$$(\Gamma_{ab}^{\mu} \partial_{\mu} + m I_{ab}) \Phi_a(x) = \bar{0}; \quad a, b = 1+16, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad (1)$$

где Γ_{ab}^{μ} – матрицы размерностью 16×16 , I_{ab} – единичная матрица в пространстве представления, $\Phi_a(x)$ – волновая функция уравнения, определяемая полным набором антисимметричных тензорных полей в четырехмерном пространстве, является уравнением первого порядка по производной от времени. Уравнение (1) – дираковского типа: его матрицы подчиняются перестановочным соотношениям:

$$\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени. Минимальный полином матриц Γ_{μ} , как следует из перестановочных соотношений (2), не имеет кратных нулевых корней, т. е. система (1) не содержит дополнительных условий.

Матрицы Γ_{μ} осуществляют 4-кратно вырожденное представление алгебры Клиффорда в 4-мерном пространстве, поэтому существуют матрицы Γ'_{μ} , коммутирующие с матрицами Γ_{μ} и подчиняющиеся перестановочным соотношениям:

$$[\Gamma_{\mu}, \Gamma'_{\nu}]_{-} = 0, \quad \{\Gamma'_{\mu}, \Gamma'_{\nu}\}_{+} = 2g_{\mu\nu}.$$

Генераторы преобразований волновой функции $\Phi_a(x)$ уравнения Д – К в представлении группы Лоренца задаются следующим образом:

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]}),$$

что согласуется с набором представлений:

$$(0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right), \quad \left(\frac{\tilde{1}}{2}, \frac{\tilde{1}}{2}\right), \quad (\tilde{0}, \tilde{0}),$$

где (0, 0) соответствует скаляру, (1/2, 1/2) – вектору, (0, 1)/(1, 0) – асимметричному тензору второго ранга, $(\bar{1}/2, \bar{1}/2)$ – псевдовектору и $(\bar{0}, \bar{0})$ – псевдоскаляру. С точки зрения общей теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) волновая функция уравнения (1) описывает частицу с набором спиновых состояний (0, 1) и с 2-кратным вырождением по оператору внутренней четности. По отношению к преобразованиям Лоренца волновая функция уравнения Д – К может рассматриваться как прямое произведение биспинора на зарядово-сопряженный биспинор.

Уравнение Д – К в плоском пространстве обладает группой $SU(2,2)$ внутренней симметрии, генераторы которой в рассматриваемом представлении группы Лоренца задаются следующим образом: $\Gamma_{\mu}, 1/4 \Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]}, \Gamma_{\mu}^{\nu}, \Gamma_{\mu}^{\nu}, \Gamma_{\mu}^{\nu}$, где $\Gamma_5 = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$. Действие преобразований группы внутренней симметрии на волновую функцию уравнения приводит к перемешиванию тензорных полей, соответствующих разным представлениям группы Лоренца. Преобразования внутренней симметрии содержат в качестве подгруппы группу, изоморфную $SO(3,1)$ с генераторами $d_{\mu\nu} = 1/4 \Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]}$. Переопределив генераторы преобразований волновой функции уравнения (1) для группы Лоренца следующим образом: $\bar{J}_{\mu\nu} \rightarrow J_{\mu\nu} - d_{\mu\nu} = 1/4 \Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]}$, рассмотрим в рамках плоского пространства теорию Дирака – Кэлера в качестве геометризованного описания частиц со спином $s=1/2$, обладающих группой $SU(2,2)$ внутренней симметрии.

Уравнение Д – К для случая искривленного пространства-времени имеет вид [2]:

$$(\Gamma_{ab}^{\mu} (\partial_{\mu} + N_{\mu} + N'_{\mu}) + I_{ab} m) \Phi_a(x) = 0; \quad a, b = 1 \div 16, \quad (3)$$

где биспинорная и сопряженная биспинорная связности задаются соответственно соотношениями:

$$N_{\mu} = I_4 \otimes G_{\mu} = \frac{1}{4} I_4 \otimes \gamma^{\nu} \gamma_{\nu, \mu} = \frac{1}{4} \Gamma^{\nu} \Gamma_{\nu, \mu},$$

$$N'_{\mu} = G_{\mu}^T \otimes I_4 = \frac{1}{4} (\gamma^{\nu} \gamma_{\nu, \mu})^T \otimes I_4 = \frac{1}{4} \Gamma^{\nu} \Gamma_{\nu, \mu},$$

где $G_{\mu} = 1/4 (\gamma^{\nu} \gamma_{\nu, \mu})$. Точка (.) обозначает ковариантное дифференцирование со связностью

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} (\delta_{\mu\sigma, \nu} + \delta_{\nu\sigma, \mu} - \delta_{\mu\nu, \sigma}).$$

Сопряженная волновая функция $\bar{\Phi}(x) = \Phi^{\dagger}(x)\theta$ подчиняется уравнению:

$$\bar{\Phi}_a(x) (I_{ab}^{\mu} (\bar{\sigma}_{\mu} - N_{\mu} - N'_{\mu}) + I_{ab} m) = 0; \quad a, b = 1 \div 16.$$

Здесь θ – матрица билинейной инвариантной формы: $\theta = \beta \otimes \beta$, $\beta = i\gamma_4$ и γ_{μ} – матрицы Дирака.

Общековариантное уравнение Дирака в квантовомеханической интерпретации выступает как уравнение движения в координатном представлении с неортонормированными базисными векторами [1]. В [2] показано, что спинорное описание уравнения Д – К допускает аналогичную интерпретацию, т. е. волновая функция является координатным представлением вектора состояния квантовой системы:

$$\Phi_a(x) = \Phi_a(y^{\alpha}, \lambda) = \langle \Phi | u_a(y^{\alpha}, \lambda) \rangle,$$

где y^{α} ($\alpha=1 \div 3$) – собственные значения оператора положения $\hat{a}^{\alpha} : \hat{a}^{\alpha} | u(y^{\alpha}, \lambda) \rangle = y^{\alpha} | u(y^{\alpha}, \lambda) \rangle$, а $| u_a(y^{\alpha}, \lambda) \rangle$ – его собственные функции. Указанная интерпре-

тация возможна в системах отсчета, в которых выполняется закон сохранения величины $Q = \int_f J_\nu^\mu \zeta^\nu df_\mu$, где df_μ – элемент пространственной гиперповерхности $f(\lambda)$ при $\lambda = \text{const}$, и $J_\nu^\mu = \Phi(x) \Gamma_\mu \Gamma^\nu \Phi(x)$, а ζ^ν – векторное поле, касательное к конгруэнции мировых линий тел отсчета x^μ . Закон сохранения $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ имеет место при условии, что ζ^ν будет полем векторов Киллинга:

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0.$$

В соответствии с данной величиной выбирается скалярное произведение векторов в гильбертовом пространстве:

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int_f d^3 y \Phi_1^\dagger(y^\alpha, \lambda) \theta \Gamma^\mu \Gamma_\nu \zeta^\nu n_\mu \Phi_2(y^\alpha, \lambda). \quad (4)$$

Сохранение величины (4) требует эрмитовости оператора Гамильтона, определяющего динамику системы:

$$\hat{H}^\circ = \hat{H}, \quad H_{Д-К}^\circ = H_{Д-К} - ih \dot{G} G^{-1},$$

где G и G^{-1} задаются уравнениями:

$$G^{-1} = \theta \Gamma^\mu \Gamma_\nu n_\mu \zeta^\nu, \quad G = n^{-2} \zeta^{-2} \Gamma^\mu \Gamma_\nu n_\mu \zeta^\nu \theta, \quad \hat{H}^\circ = G \hat{H} G^{-1}.$$

Следовательно, при рассмотрении общековариантного уравнения Д – К в отсутствие взаимодействия с калибровочным полем, соответствующим локализации преобразований диальной симметрии, ограничен выбор систем отсчета, в которых возможна его интерпретация как координатного представления уравнений движения квантовой системы.

Целью данной работы является построение теории, допускающей указанную интерпретацию в общем случае. Это возможно при введении в теорию взаимодействия с неабелевым калибровочным полем, соответствующим локальной группе внутренней симметрии (см. [3]).

В пределе плоского пространства-времени при введении в теорию Дирака – Кэлера взаимодействия с неабелевым калибровочным полем минимальным способом сохраняющийся ток записывается в виде [4]:

$$\hat{J}_\mu^A = J_\mu^A - C_{BD}^A A_\nu^D F_\mu^{\nu B}, \quad J_\mu^A = \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu D^A \Phi(x),$$

где D^A , C_{BD}^A ($A, B, D=1+15$) – генераторы и структурные постоянные группы $SU(2,2)$, A_ν^D – калибровочное поле и $F_\mu^{\nu D}$ – напряженность калибровочного поля

$$F_{\mu\nu}^A = A_{\mu;\nu}^A - A_{\nu;\mu}^A - q C_{BD}^A A_\mu^B A_\nu^D.$$

В случае искривленного пространства-времени при взаимодействии с калибровочным полем $\hat{A}_\mu = A_\mu^A \bar{D}_A$ уравнение Д – К может быть представлено в виде:

$$(\Gamma^\mu \nabla_\mu + m) \Phi(x) = 0, \quad (5)$$

где ∇_μ – ковариантная производная, определенная биспинорной связностью N_μ и полем \hat{A}_μ . Правило коммутации для производной ∇_μ имеет вид:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu = R_{\mu\nu} - F_{\mu\nu},$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор кривизны, упрощенный по двум индексам, $F_{\mu\nu}$ – тензор напряженностей поля, соответствующего локализации подгруппы $SO(3,1)$ внутренней симметрии.

Умножим уравнение (5) на $\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu^\nu$ слева, а сопряженное уравнение на $\Gamma_\mu^\nu\Phi(x)$ – справа и, складывая полученные тождества, после приведения подобных слагаемых получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} \bar{\Phi} \Gamma_\nu^\mu \Gamma^\nu \Phi - \bar{\Phi} \Gamma_\rho^\nu \Gamma^\mu \Phi \Gamma_{\mu\nu}^\rho + iq A_\mu^{(ab)} \bar{\Phi} (\Gamma^\mu h_{\nu(c)} (\delta_{(b)}^{(c)} \Gamma_{(a)}^\nu - \delta_{(a)}^{(c)} \Gamma_{(b)}^\nu)) \Phi = 0, \quad (6)$$

где $\delta_{(a)}^{(c)}$ – символы Кронекера, $h_{\nu(c)}$ – элементы тетрады, индексы, относящиеся к локальным преобразованиям группы Лоренца, заключены в круглые скобки.

Сравнивая выражение (6) с ковариантным законом сохранения, приходим к выводу, что закон сохранения тока $J_\nu^\mu = \bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu^\nu\Phi(x)$ может быть

представлен в виде $\frac{\partial J_\nu^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, если положить:

$$\bar{\Phi} \Gamma_\nu^\mu \Gamma^\nu \Phi \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} - \bar{\Phi} \Gamma_\rho^\nu \Gamma^\mu \Phi \Gamma_{\mu\nu}^\rho + iq A_\mu^{(ab)} \bar{\Phi} (\Gamma^\mu h_{\nu(c)} (\delta_{(b)}^{(c)} \Gamma_{(a)}^\nu - \delta_{(a)}^{(c)} \Gamma_{(b)}^\nu)) \Phi = 0. \quad (7)$$

Этого можно добиться, используя калибровочный произвол в определении \hat{A}_μ . Поскольку второе слагаемое в (6) определяет выбор систем отсчета, пригодных для исследования уравнения Д – К в рамках квантовой механики, то уравнение (7) связывает выбор систем отсчета с заданием калибровочного условия.

Условие (7) является дополнительным, нарушающим калибровочный произвол, и приводит к фиксации базиса во внутреннем (зарядовом) пространстве. Иными словами, проводя аналогии с геометрической интерпретацией полей Янга – Миллса, предложенной в [5], делаем вывод, что выбор калибровки в соответствии с (7) эквивалентен заданию системы отсчета во внутреннем пространстве.

На основании условия (7) заключаем, что в случае теории Дирака – Кэлера необходим выбор системы отсчета и калибровочного условия, приводящего к фиксации базиса в пространстве представления группы внутренней симметрии таким образом, что выполняется закон сохранения величины J_ν^μ . Тогда определение скалярного произведения, выбранное в соответствии с этим законом, будет иметь место во всех (не только консервативных) системах отсчета. В этом можно убедиться, записывая уравнение (5) в виде уравнения Шредингера и при помощи условия (7), доказывая эрмитовость соответствующего гамильтониана:

$$H_{Д-К} = \frac{i}{g^{44}} (g^{44} (N_4 + N'_4 + \frac{1}{4} iq A_4^{(ab)} \Gamma_{((a)}^\nu \Gamma_{(b)}^\nu)) + \\ + \Gamma^4 \Gamma^\alpha (N_\alpha + N'_\alpha + \frac{1}{4} iq A_\alpha^{(ab)} \Gamma_{((a)}^\nu \Gamma_{(b)}^\nu)) + m \Gamma^4 + i \Gamma^4 \Gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

При этом следует заметить, что включение взаимодействия с калибровочным полем, соответствующим локализации группы внутренней симметрии уравнения Д – К, в случае обобщения его на искривленное пространство не приносится извне, а является следствием тензорной формулировки этого уравнения. В плоском пространстве-времени его волновой функцией является полный набор антисимметричных лоренц-тензоров. Действие преобразований группы внутренней симметрии на волновую функцию приво-

дит к перемешиванию ее компонент, преобразующихся по различным неприводимым представлениям группы Лоренца. Последняя при переходе к искривленному пространству уже не является группой пространственно-временной симметрии, и ее преобразования – локальны. Тогда и преобразования группы внутренней симметрии также не могут быть глобальными. Действительно, оператор уравнения (3) содержит произведение матриц Γ_μ и уже не коммутирует с генераторами группы $SU(2,2)$ внутренней симметрии, т. е. уравнение Д – К не может в искривленном пространстве обладать группой глобальной внутренней симметрии. Это обстоятельство отмечено и в [6], где делается вывод о невозможности описания частиц со спином $1/2$ посредством общековариантного уравнения Д – К. Ситуация изменяется, если при переходе к искривленному пространству одновременно с локализацией преобразований Лоренца вводить и локальные преобразования группы внутренней симметрии. Тогда в рамках калибровочной теории уравнения Д – К, взаимодействующего с неабелевым калибровочным полем в искривленном пространстве, возможно установление локального соответствия между его решениями и решениями общековариантного уравнения Дирака, также взаимодействующего с калибровочным полем, соответствующим локализации группы $SU(2,2)$ внутренней симметрии. В плоском пространстве указанное соответствие можно установить глобально при введении взаимодействий, не нарушающих симметрию теории Дирака – Кэлера. В искривленном пространстве соответствие между решениями обоих уравнений возможно только в точке.

1. Горбачевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Мн., 1985.
2. Ционенко Д. А. // Вестн НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2002. № 4. С. 75.
3. Стражев В. И., Ционенко Д. А. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 25.
4. Стражев В. И. Спиновые степени свободы и калибровочные симметрии: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1985.
5. Брайс С. Де-Витт. Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
6. Banks T., Dothan Y., Horn D. // Phys. Lett. 1982. Vol. 117B. № 6. P. 413.

Поступила в редакцию 09.06.2003.

Василий Иванович Стражев – ректор БГУ, доктор физико-математических наук, профессор.

Дмитрий Александрович Ционенко – младший научный сотрудник Национального научно-учебного центра физики частиц и высоких энергий БГУ.

УДК 535.34

Д.В. ГОРБАЧ, М.А. КИЦАК, Ю.И. МИКСЮК, А.Л. ТОЛСТИК

ДИНАМИКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ В МОЛЕКУЛЯРНЫХ СРЕДАХ С ФОТОПЕРЕНОСОМ ПРОТОНА

The theoretical models for transformation of light fields by nonlinear interferometers and by dynamic holograms formed upon multiwave interactions in molecular media with proton phototransfer have been developed. The conditions for the formation of different dynamic interaction modes have been determined including regular intensity oscillations of light fields at the output of nonlinear optical systems with constant input intensity.

Исследования в области динамической голографии позволили разработать новые методы коррекции пространственной структуры световых по-

лей, осуществить интегральные преобразования (типа корреляции и свертки) в реальном времени, создать управляемые динамические дифракционные структуры, которые можно использовать в качестве пространственно-временных модуляторов света. Для улучшения информационных характеристик нелинейно-оптических систем, реализации управления параметрами оптической записи представляется перспективным применение сред со сложным нелинейным откликом на световое воздействие [1]. В этой связи вызывает несомненный интерес поиск путей создания таких сред на основе фотофизических процессов, определяющих коллективный характер формирования нелинейно-оптического отклика. В частности, можно выделить молекулярные среды с фотопереносом протона. Отличительной особенностью рассматриваемых молекулярных систем является формирование сложного нелинейного отклика за счет фотоиндуцированного самовоздействия посредством изменения текущих параметров раствора (состав сольватной оболочки, рН-фактор).

В настоящей работе представлены результаты теоретического моделирования преобразования световых полей в нелинейном интерферометре, а также в распределенных нелинейных системах при реализации многоволновых взаимодействий. Исследована динамика взаимодействия в зависимости от интенсивности световых пучков, спектроскопических характеристик среды и параметров кислотно-основного равновесия.

Для модельных исследований была выбрана схема переходов между энергетическими уровнями исходной молекулы и ее радикала (рис. 1 а), отвечающая одному из распространенных вариантов протекания реакции фотодиссоциации протона (случай резкого смещения химического равновесия в растворе в сторону прямой реакции при переводе молекул в возбужденное состояние). Сплошными линиями обозначены вынужденные переходы молекулы под действием излучения. Штриховые линии отвечают спонтанным и безызлучательным переходам. Кинетические уравнения, описывающие динамику переходов в такой четырехуровневой среде, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= -N_1(B_{12}U + K_1) + N_2(B_{21}U + P_{21}) + K_2N_HN_3, \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= N_1B_{12}U - N_2(B_{21}U + P_{21} + K_n), \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} &= N_1K_1 + N_2(B_{23}U + P_{43}) - N_3(B_{34}U + N_HK_2), \\ \frac{\partial N_4}{\partial t} &= N_2K_n + N_3B_{34}U - N_4(B_{43}U + P_{43}), \\ N &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \quad N_H = N_3 + N_4 + N_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где N – общая концентрация нейтральных молекул и радикалов, N_0 и N_H – исходная и текущая концентрации протонов в растворе, $B_{ij}U$ – вероятности вынужденных переходов между уровнями i и j , P_{ij} – вероятности спонтанных и безызлучательных переходов, K_1 и K_n – вероятности фотодиссоциации протона молекулами, находящимися в основном и возбужденном состояниях, K_2N_H – вероятность присоединения протона в основном состоянии (обратная протолитическая реакция).

Для определения коэффициента экстинкции учитываем поглощение молекул, находящихся в исходной форме, а также их радикалов:

$$\kappa = \frac{\hbar n_0}{2} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21} + N_3 B_{34} - N_4 B_{43}), \quad (2)$$

где n_0 – исходное значение показателя преломления (определяется растворителем).

С учетом (2) и используя соотношение Крамерса – Кронига (дисперсионное соотношение) $n(\omega) = 1/\pi \int \kappa(\omega')/(\omega' - \omega)d\omega'$, связывающее действительную и мнимую части комплексного показателя преломления $\tilde{n} = n + i\kappa$ (см., например, [2, 3]), можно определить резонансное изменение этого показателя, обусловленное переходом молекул в возбужденное состояние или образованием радикала.

Такой подход позволил проанализировать влияние смещения полос поглощения различных форм молекул, вероятностей спонтанных и безызлучательных переходов, а также стока сдвига полос поглощения и люминесценции на нелинейный отклик среды [4]. В частности, определены условия, при которых имеет место немонотонная зависимость коэффициента поглощения и показателя преломления от интенсивности возбуждающего излучения, свидетельствующая о проявлении (наряду с кубической) нелинейностей пятого и более высоких порядков и позволяющая реализовывать эффективное многоволновое взаимодействие.

Анализ многоволнового взаимодействия проведем на примере записи пропускающей динамической голограммы попутно распространяющимися сигнальной I_s и опорной I_1 волнами. При встречном направлении распространения считывающей волны I_2 формируется дифрагированная волна I_D , и имеем традиционный вариант обращения волнового фронта при четырехволновом взаимодействии. При изменении направления считывающей волны и использовании дифракции во второй и более высокие порядки можно реализовать N -волновое взаимодействие ($N=2(M+1)$) на нелинейности $(N-1)$ порядка, где M – порядок дифракции (рис. 1 б).

Система уравнений, описывающих формирование дифрагированной волны, имеет вид:

$$\frac{\partial I_1}{\partial(k_0 z)} = -I_1 \Delta \bar{\kappa}_0 - \sqrt{I_1 I_s} \Delta \bar{\kappa}_1,$$

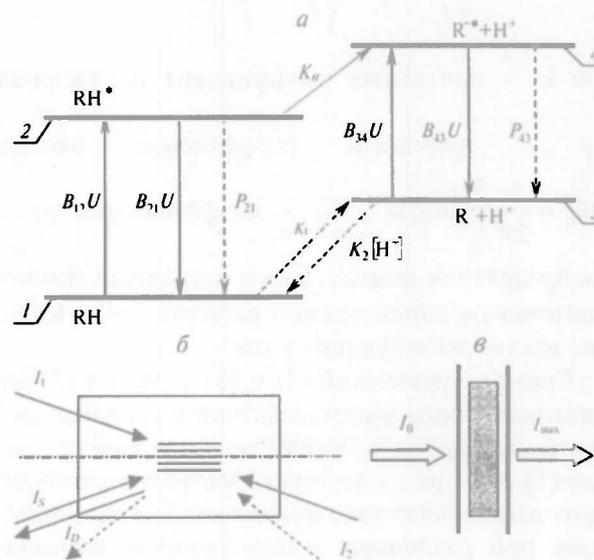


Рис. 1. Схема переходов между энергетическими уровнями исходной формы молекулы RH и ее радикала R⁻ – а; схема многоволнового взаимодействия – б; схема взаимодействия светового пучка с нелинейным интерферометром – в

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_2}{\partial(k_0 z)} &= I_2 \Delta \kappa_0 + \sqrt{I_2 I_s} (\Delta \kappa_{..} \cos(\Phi) - \Delta \tilde{n}_{..} \sin(\Phi)), \\
 \frac{\partial I_s}{\partial(k_0 z)} &= -I_s \Delta \bar{\kappa}_0 - \sqrt{I_1 I_s} \Delta \bar{\kappa}_{-1}, \\
 \frac{\partial I_c}{\partial(k_0 z)} &= I_c \Delta \bar{\kappa}_0 + \sqrt{I_2 I_c} (\Delta \kappa_{..} \cos(\Phi) + \Delta \tilde{n}_M \sin(\Phi)), \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial(k_0 z)} &= \frac{1}{2} \left(M \sqrt{\frac{I_s}{I_1}} \Delta \tilde{n}_1 - M \sqrt{\frac{I_1}{I_s}} \Delta \tilde{n}_{-1} + \left(\sqrt{\frac{I_2}{I_c}} \Delta \tilde{n}_M - \sqrt{\frac{I_c}{I_2}} \Delta \tilde{n}_{-M} \right) \cos(\Phi) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sqrt{\frac{I_2}{I_c}} \Delta \bar{\kappa}_M + \sqrt{\frac{I_c}{I_2}} \Delta \bar{\kappa}_{-M} \right) \sin(\Phi) \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где k_0 – начальный коэффициент поглощения, $\Delta \tilde{n}_m = \frac{\Delta n_m}{\kappa_0}$, $\Delta \kappa_m = \frac{\Delta \kappa_m}{\kappa_0}$, κ_0 – линейный коэффициент экстинкции; $\Delta \tilde{n}_m = \Delta n_m + i \Delta \kappa_m$, $\Delta \tilde{n}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta \tilde{n}(\xi) e^{-im\xi} d\xi$ – коэффициенты разложения пространственного

распределения комплексного показателя преломления $\Delta \tilde{n}$ в ряд Фурье по гармоникам динамической решетки $\xi = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_s) \mathbf{r}$, Φ – фазовое рассогласование взаимодействующих волн.

Системы уравнений (1) и (3) с учетом (2) позволяют описать динамику многоволнового взаимодействия в сложных молекулярных средах с фотопереносом протона. Ввиду того что точного аналитического решения систем (1) и (3) не существует, построена компьютерная модель нестационарного взаимодействия, позволяющая анализировать особенности энергообмена при различных интенсивностях взаимодействующих волн и спектральной отстройке частоты излучения относительно полос поглощения.

Численный анализ проведен на примере четырехволнового взаимодействия в приближении гауссовой аппроксимации зеркально-симметричных полос поглощения и испускания. Расчеты проводились в предположении равенства коэффициентов Эйнштейна B_{ij} в максимумах контуров и их полуширин. Контур поглощения и испускания смещены относительно друг друга на 1,6 полуширины. Отстройка частоты четырехволнового взаимодействия отсчитывалась от центра полосы поглощения основного канала

$\eta = \frac{\omega - \omega_s}{\Delta}$, где Δ – полуширина контура поглощения. Интенсивности взаимодействующих волн нормировались на интенсивность насыщения исходной молекулярной формы в максимуме контура поглощения. Моделирование проводилось при постоянных величинах интенсивностей взаимодействующих волн на входе в нелинейную среду.

Выбор исходных параметров основывался на исследованиях стационарного четырехволнового взаимодействия [5, 6], которые позволили определить условия реализации высокой эффективности энергообмена между взаимодействующими волнами. Характерные зависимости коэффициента отражения обращенной волны $R = I_D / I_S$ от времени отражены на рис. 2 (длительность взаимодействия t нормирована на время жизни молекулы в возбужденном состоянии $\tau = P_{21}^{-1}$). Расчеты выполнены при соотношении ин-

тенсивностей сигнальной и опорной волн $I_5(z=0)/I_1(z=0)=10^{-4}$, оптической толщине среды $k_0L=2$, отношении вероятностей переходов $K_1/K_2N_H=0,01$ и различных начальных концентрациях протонов в растворе. Видно, что, изменяя кислотность среды, можно управлять динамическими режимами взаимодействия. Так, например, при концентрации протонов $N_0/N=0,5$ процесс перекачки энергии может приводить либо к выходу коэффициента отражения R на стационар (рис. 2 а, $\eta=2,2$), либо при изменении отстройки частоты и увеличении эффективности энергообмена – к режиму самопulsаций (рис. 2 б, $\eta=2,5$). С увеличением исходной концентрации протонов в растворе амплитуда самопulsаций уменьшается (рис. 2 в), и при превышении значения $N_0/N=7$ самопulsации пропадают (рис. 2 г).

При других параметрах взаимодействия может быть реализована иная последовательность переходов: пulsации могут не наблюдаться при малых концентрациях протонов и проявляться при больших. Такая зависимость динамических режимов взаимодействия от кислотности среды позволяет рассчитывать на расширение возможностей систем обработки информации, а также дистанционных методов измерения параметров нелинейных сред.

Наряду со схемой многоволнового взаимодействия представляет интерес и схема взаимодействия светового пучка с нелинейным интерферометром Фабри – Перо (ИФП) [7, 8]. Нелинейные интерферометры являются типичными примерами систем с оптической обратной связью, в которых проявляются разнообразные эффекты пространственно-временной самоорганизации. На их основе разработаны разнообразные методы генерации пulsаций интенсивности при постоянной входной интенсивности.

Теоретически можно предположить, что динамическое поведение системы определяется кинетическими уравнениями для населенностей уровней, а интенсивность на выходе интерферометра адиабатически отслеживает изменения параметров среды. Такая ситуация имеет место при характерном временном масштабе изменения населенностей уровней, существенно превышающем время установления квазистационарной структуры поля в ИФП при многократном обходе резонатора. Поэтому для нахождения интенсивности прошедшего через интерферометр излучения воспользуемся классическим уравнением для стационарного ИФП, связывающим интенсивность на входе I_0 и выходе $I_{\text{вых}}$ интерферометра (рис. 1 в):

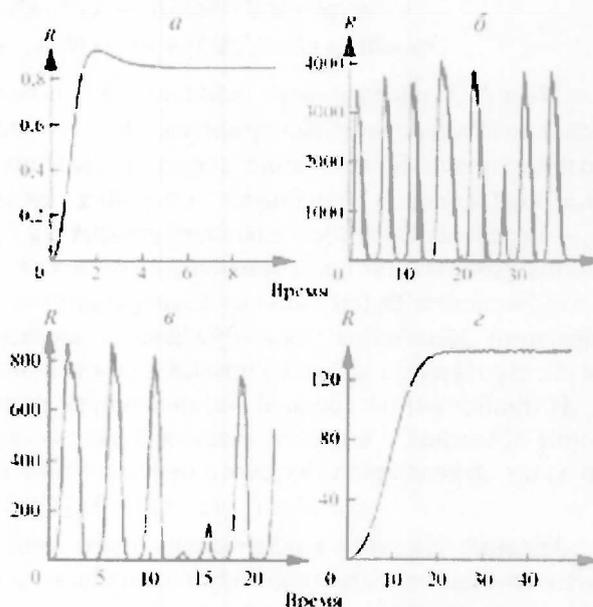


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения обращенной волны R от времени:

а – $\eta=2,2$, $N_0/N=0,5$, б – $\eta=2,5$, $N_0/N=0,5$;

в – $\eta=2,5$, $N_0/N=5$; г – $\eta=2,5$, $N_0/N=7,5$

$$I_{\text{вых}} = \frac{I_0(1-R)^2\tau}{(1-R\tau)^2 + 4R\tau\sin^2(\Phi)}, \quad (4)$$

где $\tau = \exp(-kL)$ – пропускание слоя толщиной L , R – коэффициент отражения зеркал, $\Phi = 2\pi nL/\lambda - m\pi$ – фазовая отстройка интерферометра от резонанса, n – показатель преломления среды, k – коэффициент поглощения, λ – длина волны излучения, m – целое число.

Нестационарность взаимодействия учитывается через зависимости пропускания нелинейного слоя τ и фазового набег световых волн Φ от времени. Эти зависимости можно определить, используя соотношения Крамерса – Кронига, выразив τ и Φ через населенности энергетических уровней:

$$\tau = \exp(-(\hbar\omega L/V)(N_1B_{12} - N_2B_{21} + N_3B_{34} - N_4B_{43})), \quad (5)$$

$$\Phi = \Phi_0 + (\hbar\omega L/2V)(N_1\Theta_{12} - N_2\Theta_{21} + N_3\Theta_{34} - N_4\Theta_{43}), \quad (6)$$

где N_1 и N_2 – населенности основного РН и возбужденного РН* состояний исходной формы молекул красителя, N_3 и N_4 – населенности основного R⁻ и возбужденного R^{*-} состояний диссоциировавших протон молекул красителя, $\Phi_0 = 2\pi n_0L/\lambda - m\pi$ – начальная отстройка интерферометра от резонанса, n_0 – нерезонансная составляющая показателя преломления среды (определяется показателем преломления растворителя), V – скорость света в среде. Коэффициенты $\Theta_{ij}(\omega)$ связаны дисперсионными соотношениями с коэффициентами Эйнштейна для вынужденных переходов $B_{ij}(\omega)$ [2] и определяют спектральными характеристиками резонансного перехода $i-j$.

В приближении средней интенсивности поля в среде эффективное значение объемной плотности энергии U связано с интенсивностью выходящего из интерферометра светового пучка соотношением [9]:

$$U = I_{\text{вых}}(1-\tau)(1+R\tau)/V\tau kL(1-R). \quad (7)$$

Решение системы кинетических уравнений (1) с учетом (4) – (7) дает возможность описать динамику нелинейного интерферометра. Компьютерное моделирование взаимодействия светового пучка с нелинейным ИФП позволило обнаружить режимы генерации световых импульсов на выходе интерферометра при постоянной входной интенсивности. Найдены параметры резонансной среды и резонатора, для которых возможен переход к регулярным пульсациям интенсивности. На рис. 3 а – г приведены кинетические зависимости выходной интенсивности, полученные при различных значениях интенсивности на входе в интерферометр I_0 . Расчеты проведены при следующих параметрах интерферометра: коэффициенты отражения зеркал $R=0,99$, начальная оптическая толщина среды $k_0(\omega_{12})L=1$, частота лазерного пучка ω смещена относительно максимума контура поглощения ω_{12} на 2,2 полуширины контура в коротковолновую область спектра, полоса поглощения радикала смещена относительно основной частоты поглощения на одну полуширину, стоксов сдвиг полос поглощения и испускания равен 0,4 полуширины контура, вероятности переходов между различными энергетическими состояниями составили $K_1/P_{21}=0,001$, $K_2/P_{21}=0,06$, $K_n/P_{21}=0,7$, $P_{43}/P_{21}=10$, начальная отстройка интерферометра от резонанса $\Phi_0=0,06$, начальная концентрация протонов $N_0/N=0,5$. На рис. 3 д – з отражена зависимость динамики нелинейного интерферометра от начальной концентрации протонов в среде. Как видно, динамическое поведение интерферометра весьма чувствительно к изменениям входной интенсивности и кислотности среды. За счет изменения указанных параметров легко реа-

лизуется управление динамикой ИФП, осуществляется переход от затухающих к регулярным пульсациям интенсивности.

Пояснить наблюдаемый режим пульсаций можно, используя зависимость пропускания интерферометра от фазовой отстройки интерферометра от резонанса $\Phi=2\pi nL/\lambda - m\pi$ (кривая Эйри). Отстройка частоты возбуждающего излучения выбрана таким образом, что при заселении возбужденного уровня RH^+ величина Φ уменьшается и пропускание интерферометра возрастает. При этом увеличивается интенсивность на выходе. Затем через уровень R^- заселяется метастабильный уровень R^- . Расположение контура поглощения радикала выбрано так, что коэффициенты $\Theta_{21}(\omega)$ и $\Theta_{34}(\omega)$ имеют одинаковые знаки. Тогда при заселении уровня R^- в соответствии с (6) знак светоиндуцированного изменения показателя преломления меняется на противоположный. Фазовая отстройка интерферометра от резонанса возрастает, что приводит к уменьшению интенсивности. Происходит быстрое опустошение возбужденного уровня RH^+ и медленная релаксация с метастабильного уровня R^- . Интерферометр возвращается в свое исходное состояние, и весь цикл изменения интенсивности повторяется.

В заключение отметим, что рассмотренные схемы взаимодействия являются типичными нелинейными системами с внутренней (распределенной обратной связью на динамических голограммах) и внешней (резонаторной) обратной связью. Большое разнообразие резонансных сред позволяет говорить о реализации разных динамических режимов взаимодействия, включая генерацию регулярных пульсаций интенсивности, частотой которых можно управлять, изменяя интенсивность входного светового пучка, спектроскопические и протолитические параметры раствора. Использование сложных молекулярных сред с фотопереносом протона расширяет возможности интерференционно-голографических методов преобразования световых полей и дистанционной диагностики нелинейных сред.

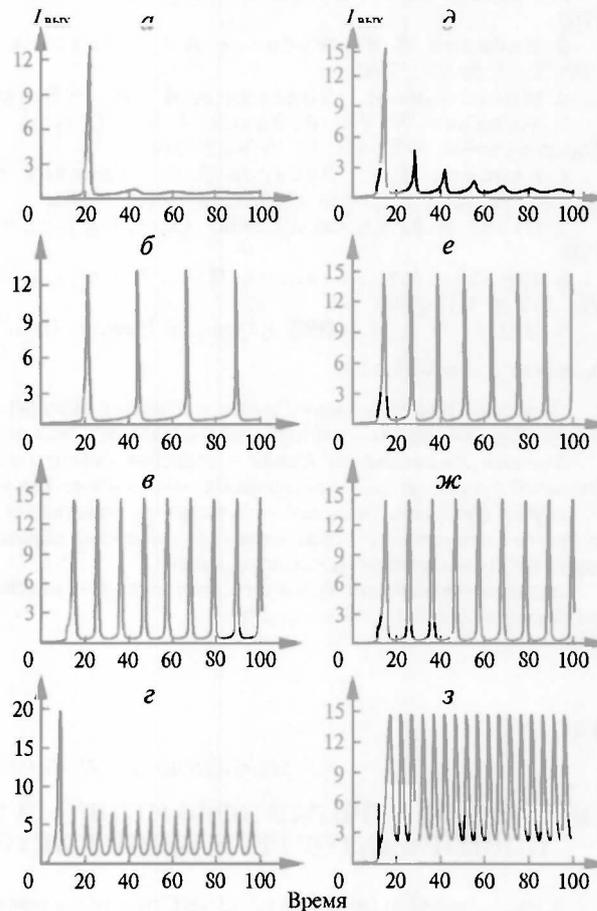


Рис. 3. Временные развертки интенсивности $I_{\text{вых}}$ на выходе интерферометра при различных интенсивностях на входе I_0 при $N_0/N=0,5$; $I_0=13,5$ - а, 13,51 - б, 15,0 - в и 20,0 - г и различных начальных концентрациях протонов в среде $N_0/N=0,375$ - д, 0,4 - е, 0,5 - ж и 1,0 - з; $I_0=15$

1. Толстик А.Л. Многоволновые взаимодействия в растворах сложных органических соединений. Мн., 2002. 160 с.
2. Pantell R.H., Puthoff H.E. // Fundamentals of Quantum Electronics. New York, 1969.
3. Кабанов В.В., Рубанов А.С., Толстик А.Л. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 8. С. 1681.
4. Миксюк Ю.И., Толстик А.Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 2. С. 11.
5. Kabanov V.V., Rubanov A.S., Tolstik A.L., Chaley A.V. // Optics Communications. 1989. Vol. 71. № 3-4. P. 219.
6. Кабанов В.В., Рубанов А.С., Толстик А.Л., Чалей А.В. // Изв. Академии наук СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54. № 6. С. 1092.
7. Gibbs H.M. Optical Bistability: Controlling Light with Light. Academic Press. Orlando, 1985.
8. Agishev I.N., Ivanova N.A., Tolstik A.L. // Optics Communications. 1998. Vol. 156. № 3. P. 199.
9. Miller D.A.V. // IEEE J. Quantum. Electron. 1981. Vol. QE-17. P. 306.

Поступила в редакцию 27.10.2003.

Дмитрий Владиславович Горбач – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.Л. Толстик.

Максим Анатольевич Кицак – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.Л. Толстик.

Юрий Иванович Миксюк – заместитель начальника Главного управления высшего и среднего специального образования Министерства образования Республики Беларусь, кандидат физико-математических наук, доцент.

Алексей Леонидович Толстик – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии.

УДК 577.3

Г.Г. МАТИНОВИЧ, С.Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ

ВНУТРИКЛЕТОЧНЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ РЕДОКС-ПОТЕНЦИАЛ – НОВЫЙ ФАКТОР РЕГУЛЯЦИИ КЛЕТОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

It was proposed to use a concept of «effective redox potential» for the quantitative description of physical and chemical parameters of cellular oxidation-reduction state. Effective redox potential was calculated on the basis of thermodynamic ideas with use of the Nernst equation. The contribution of different oxidative and reductive reagents in the formation of effective redox potential was determined. The theoretical estimation of cellular redox potentials values for the different types of cellular activity was carried out with use of developed method. On the basis of own and literature data the dependence of the functional cellular state on intracellular redox potential values was established.

В биологических системах большое число функционально значимых процессов происходит за счет физических механизмов, обеспечивающих перенос электронов. С точки зрения химии межмолекулярный перенос электрона представляет собой окислительно-восстановительную реакцию, а для участвующих в ней конкретных редокс-пар одним из наиболее значимых факторов является окислительно-восстановительный потенциал, или редокс-потенциал.

Количественная зависимость последнего от природы редокс-пары, температуры, соотношения концентраций окисленной и восстановленной форм вещества устанавливается уравнением Нернста:

$$E = E^0 - \frac{R T}{z F} \ln \frac{[A]}{[A^+]}, \quad (1)$$

где E – окислительно-восстановительный потенциал редокс-пары; E^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал; R – универ-

сальная газовая постоянная ($R=8,314 \text{ Дж К}^{-1} \text{ моль}^{-1}$); T – температура (К); F – постоянная Фарадея ($F=9,6485 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$); z – число электронов, которые присоединяет частица окисленной формы A^+ , переходя в восстановленную форму вещества A ; $[A^+]$ – концентрация окисленной и $[A]$ – концентрация восстановленной форм вещества соответственно.

Для сопоставления редокс-потенциалов отдельных пар используют стандартные условия (активность ионов в растворе окислительно-восстановительных пар равна единице, $T=298 \text{ К}$, $\text{pH}=0$ или $\text{pH}=7$ – в случае биологических систем). Измеряют напряжение между двумя электродами, погруженными в растворы, содержащие редокс-пары. Окислительно-восстановительная реакция, протекающая в приэлектродном пространстве, приводит к возникновению разности потенциалов на границе раздела физически и химически разнородных материалов – металла и раствора, называемой редокс-потенциалом. Значения редокс-потенциала (или восстановительного, поскольку он характеризует реакцию восстановления) определяют относительно стандартного водородного электрода, потенциал которого принято считать равным нулю. Измерение редокс-потенциалов отдельных редокс-пар с помощью электродов лежит в основе таких физико-химических методов анализа, как оксидометрия, потенциометрия и вольтамперометрия. В настоящее время эти методы широко используются в медико-биологических исследованиях и клиническом анализе.

Достижения клеточной биологии и биофизики последних 3–4 лет привели к существенным изменениям в представлениях о роли окислительно-восстановительных процессов в регуляции клеточной активности, в связи с чем возник вопрос о количественном определении параметров, характеризующих редокс-состояние клетки [1, 2].

Перспективной представляется оценка изменения редокс-потенциала клетки с использованием значений концентраций внутриклеточных окислителей и восстановителей. Следует отметить, что концентрации окислительно-восстановительных реагентов четко регулируются в многочисленных процессах, протекающих в клетке. К примеру, H_2O_2 – компонент редокс-пары $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$ – образуется в результате большого числа реакций. Молекула пероксида водорода может легко диффундировать через клеточную мембрану, поступая внутрь или выходя наружу [3]. В клетках обнаружены многочисленные ферменты, генерирующие и утилизирующие H_2O_2 [4]. В них существуют также системы регуляции концентрации других участников окислительно-восстановительных реакций [5].

На основе исследований роли окислителей и восстановителей в регуляции клеточной активности сформулированы представления о сопряженной работе всех оксидант-генерирующих и антиоксидантных систем. Их сопряженное функционирование, формирующее баланс процессов накопления и утилизации окислителей и восстановителей, определяет физико-химические параметры редокс-состояния клетки. Малые ее размеры и развитая внутренняя компартментализация не позволяют использовать электроды для измерения внутриклеточного редокс-потенциала. Однако в настоящее время существует множество физико-химических методов анализа, применяемых для мониторинга изменений внутриклеточной концентрации основных окислителей и восстановителей, в том числе пероксида водорода (H_2O_2), окиси азота (NO^*), окисленной и восстановленной формы глутатиона (GSSG и GSH), окисленной и восстановленной формы никотинамидадениндинуклеотида (НАД^+ и НАДН) и др. [6, 7].

Несмотря на существенный прогресс в понимании механизмов клеточных окислительно-восстановительных процессов, возможность использования электрохимического понятия «редокс-потенциал» для характеристики редокс-состояния клеток в целом до сих пор не изучалась.

В настоящей работе на основе термодинамических представлений развит теоретический метод определения эффективного редокс-потенциала среды; на его основе произведена теоретическая оценка значений редокс-потенциала клеток при проявлении различных типов клеточной активности.

Определение эффективного редокс-потенциала многокомпонентной среды

Прогнозировать направление протекания редокс-процессов и влияние различных физико-химических факторов на редокс-состояние клетки можно с помощью термодинамического описания физико-химических процессов.

Рассмотрим среду, содержащую большое количество редокс-пар, концентрации восстановленных форм которых равны c_1, c_2, \dots, c_k . Перенос заряда в клетках может происходить между компонентами нескольких типов редокс-пар. Не представляется возможным определить суммарное значение редокс-потенциалов всех редокс-пар, присутствующих в биологической среде, так как редокс-потенциал не является функцией состояния. Иначе говоря, при изменении величины редокс-потенциала (ΔE) в серии реакций с переносом электрона $A \xrightarrow{e^-} B \xrightarrow{e^-} C \xrightarrow{e^-} D$ не всегда выполняется условие аддитивности ($\Delta E_{AD} \neq \Delta E_{AB} + \Delta E_{BC} + \Delta E_{CD}$). Однако оно выполняется для такой функции состояния, как энергия Гиббса.

При изобарно-изотермических условиях работа, которая может быть осуществлена системой ($W_{эл}$) в обратимом процессе, равна убыли в ней свободной энергии Гиббса ($-\Delta G$). Работа по переносу заряда при восстановлении n молей вещества в окислительно-восстановительной реакции будет определяться выражением:

$$W_{эл} = -\Delta G = q\Delta E = znF\Delta E, \quad (2)$$

где q – перенесенный заряд, n – количество вещества в молях, ΔE – восстановительный потенциал для данного вещества.

Воспользуемся выражением (2) для определения эффективного редокс-потенциала многокомпонентной среды. Свободная энергия Гиббса системы, соответствующая установлению равновесия между компонентами среды, будет определяться суммой равновесных значений энергии Гиббса всех реакций:

$$\Delta G_{\text{сист}}^0 = \sum_i \Delta G_i^0. \quad (3)$$

При восстановлении k типов веществ в окислительно-восстановительных реакциях переносится заряд, равный

$$Q = \sum_i z_i n_i F, \quad (4)$$

где z_i – число электронов, переносимых в i -й реакции, n_i – количество вещества восстановленной формы i -й редокс-пары в молях. Работа по переносу электронов в условиях протекания всех внутриклеточных окислительно-восстановительных реакций будет равна:

$$W_{эл} = -\sum_i \Delta G_i^0 = \sum_i z_i n_i F \Delta E_i^0, \quad (5)$$

ΔE_i^0 – стандартный редокс-потенциал i -й редокс-пары. Тогда эффективный редокс-потенциал системы ($E_{\text{эфф}}^0$) можно определить как

$$\Delta E_{\text{эфф}}^0 = \frac{W_{\text{эл}}}{Q} = \frac{\sum_i z_i n_i F \Delta E_i^0}{\sum_i z_i n_i F} = \frac{\sum_i z_i n_i \Delta E_i^0}{\sum_i z_i n_i} \quad (6)$$

В выражении (6) количество вещества можно выразить через его концентрацию, применяя соотношение $c_i = n_i/V_p$, где V_p – объем раствора:

$$\Delta E_{\text{эфф}}^0 = \frac{\sum_i z_i n_i \Delta E_i^0}{\sum_i z_i n_i} \frac{V_p}{V_p} = \frac{\sum_i z_i \left(\frac{n_i}{V_p}\right) \Delta E_i^0}{\sum_i z_i \left(\frac{n_i}{V_p}\right)} = \frac{\sum_i z_i c_i \Delta E_i^0}{\sum_i z_i c_i} \quad (7)$$

Используя формулу (7), можно получить следующее выражение для эффективного редокс-потенциала среды:

$$\Delta E_{\text{эфф}}^0 = \sum_i a_i \Delta E_i^0, \quad (8)$$

где коэффициенты $a_i = \frac{n_i z_i}{\sum_i n_i z_i}$ представляют собой «удельный заряд», пе-

реносимый в i -й реакции, т. е. отношение заряда, перенесенного в i -й реакции, к суммарному заряду, перенесенному во всех реакциях. В частном случае для одноэлектронных редокс-реакций коэффициенты a_i являются мольной долей вещества, тогда

$$\Delta E_{\text{эфф}}^0 = \sum_i x_i \Delta E_i^0, \quad (9)$$

где x_i – мольная доля вещества (восстановленной формы).

На основании предложенного подхода и с учетом собственных, а также данных литературы нами рассчитан внутриклеточный редокс-потенциал для различных функциональных состояний клетки.

Расчет эффективного редокс-потенциала внутриклеточной среды при различных функциональных состояниях клеток

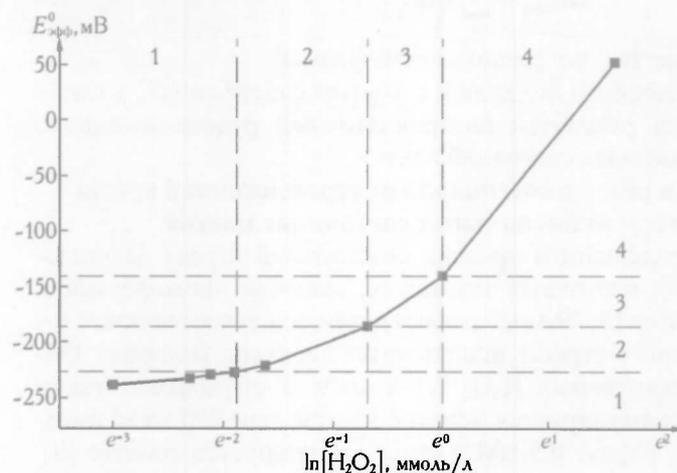
Установлено, что определенный уровень окислителей играет физиологическую роль во многих клеточных процессах, включая пролиферацию, дифференцировку и апоптоз [8]. В модельных системах в качестве основного индуктора окислительного стресса используется пероксид водорода. Обнаружено, что при концентрациях H_2O_2 0,1–1 мкМ в опухолевой ткани предстательной железы стимулируется деление клеток, при 200 мкМ ингибируется рост клеток, а в случае 0,5 мМ и выше индуцируется апоптоз [9]. В фибробластах млекопитающих митогенетическое действие наблюдается при 3–15 мкМ H_2O_2 [10], при 120–150 мкМ H_2O_2 вызывает временную задержку роста [11]. H_2O_2 при более высоких концентрациях индуцирует апоптоз (0,5–1 мМ) и некроз (5–10 мМ) [12]. С помощью предложенного метода нами оценено изменение среднего значения эффективного редокс-потенциала в клетках при добавлении H_2O_2 . Значения эффективного редокс-потенциала клетки для различных концентраций H_2O_2 и типов клеточной активности приведены в таблице.

Клеточная активность и эффективный редокс-потенциал

Тип объекта	Концентрация H_2O_2 , ммоль/л	Редокс-потенциал*, мВ	Тип клеточной активности
Фибробласты линии ВНК-21	0,003–0,015	-246+(-245)	Увеличение пролиферативной активности [10]
Фибробласты человека	0,05–0,1	-240+(-234)	Увеличение пролиферативной активности [13]
Гладкососудистые мышечные клетки	0,1	-234	Стимуляция роста клеток [14]
Эпителиальные клетки	0,2	-221	Ингибирование роста [14]
Фибробласты линии ВНК-21	0,12–0,15	-231+(-228)	Ингибирование роста [11]
Клетки опухолевой ткани предстательной железы	0,5	-188	Апоптоз [9]
Фибробласты линии ВНК-21	0,5–1	-188+(-140)	Апоптоз [15]
Фибробласты линии ВНК-21	5+10	51–137	Некроз [12]

Примечание. * Расчет редокс-потенциала выполнен с учетом вкладов основных компонентов антиоксидантной системы (GSH – 3 ммоль/л, НАДН – 1, витамин С – 0,2 ммоль/л) и действующего окислителя H_2O_2 . Вклад остальных окислителей и восстанавливающих агентов не учитывался, так как их концентрация в клетках на несколько порядков ниже. Стандартные редокс-потенциалы названных веществ при $T=298$ К и $pH=7$ соответственно равны: $\Delta E^0_{GSH} = -240$ мВ, $\Delta E^0_{НАДН} = -320$ и $\Delta E^0_{vitC} = 282$, $\Delta E^0_{H_2O_2} = 295$ мВ [16].

Из анализа представленных в ней данных следует, что различным функциональным состояниям клетки соответствует свой диапазон значений эффективного редокс-потенциала. Можно проследить следующую зависимость функционального состояния клетки от значений редокс-потенциала: смещение внутриклеточного эффективного редокс-потенциала к положительным значениям сопровождается переключением клеточной активности от пролиферации к дифференцировке, от дифференцировки к апоптозу, от апоптоза к некрозу (рисунок).



Зависимость эффективного редокс-потенциала клетки от концентрации пероксида водорода. Области протекания процессов: 1 – пролиферации; 2 – дифференцировки; 3 – апоптоза; 4 – некроза

В рамках предложенной модели предполагается, что действие факторов различной природы, которые могут приводить к изменениям клеточной активности, также индуцирует изменения редокс-состояния среды, аналогичные действию окислителей.

В экспериментах *in vitro* показано, что аскорбиновая кислота в миллимолярных концентрациях вызывает апоптоз в некоторых типах клеток [17, 18]. С помощью описанного подхода нами обнаружено, что увеличение внутриклеточной концентрации аскорбиновой кислоты с 0,2 до 2 ммоль/л вызывает смещение

значения редокс-потенциала с -247 до -151 мВ, т. е. до величин, получаемых и при действии H_2O_2 в концентрациях, вызывающих апоптоз.

Таким образом, есть все основания утверждать, что изменение редокс-состояния клетки может выступать одним из основных факторов переключения клеточной активности, в том числе и при иницировании процессов пролиферации, дифференцировки и апоптоза. В связи со сказанным понятие «эффективный редокс-потенциал» следует, на наш взгляд, включить в число физико-химических параметров, характеризующих клеточный гомеостаз.

Введение и использование этого понятия (можно рекомендовать также новый термин «суммарный внутриклеточный редокс-потенциал») позволяют избежать ряда проблем, связанных с интерпретацией экспериментальных данных об участии окислителей в процессах внутриклеточной и межклеточной сигнализации. Наличие многочисленных мишеней не позволяет обосновать универсальность механизмов действия конкретных типов окислителей [19]. Возникших трудностей можно избежать, если рассматривать не отдельные типы мишеней действия окислителей, а изменения окислительно-восстановительного статуса биологической среды при изменении концентрации, индуцированной окислителем. Имеющиеся экспериментальные данные указывают на существование зависимости функциональной активности ряда белков от редокс-состояния среды [20, 21].

Введение нового параметра для характеристики состояния биологических сред продиктовано также необходимостью количественного описания протекающих в клетке редокс-процессов, которые до настоящего времени рассматривались только на качественном уровне. Понятие «эффективный редокс-потенциал» позволяет не только описать соответствующие состояния клеток, но и количественно оценить изменения в них активности биомолекул под действием редокс-факторов.

Термодинамический подход, предложенный в работе, демонстрирует возможность использования новых количественных параметров среды для описания биологических явлений. Изучение роли редокс-гомеостаза в поддержании функциональной активности клетки помимо фундаментального теоретического значения вносит существенный вклад в решение ряда практических вопросов, таких как разработка новых подходов к фармакологическому контролю клеточной активности, регуляция роста клеток в условиях *in vitro*, контроль дифференцировки стволовых клеток, создание эффективных фармакологических средств профилактики и лечения ряда заболеваний.

1. Schafer F., Buettner G. // *Free Radic. Biol. Med.* 2001. Vol. 30. P. 1191.
2. Kirilin W., Cai J., Thompson S. et al. // *Free Radic. Biol. Med.* 1999. Vol. 27. P. 1208.
3. Antunes F., Cadenas E. // *FEBS Letters.* 2000. Vol. 475. P. 121.
4. Chance B., Sies H., Boveris A. // *Physiol. Rev.* 1979. Vol. 59. P. 527.
5. Pryor W., Squadrito G. // *Am. J. Physiol.* 1995. Vol. 268. L699.
6. Tarpey M., Fridovich I. // *Circ. Res.* 2001. Vol. 89. P. 224.
7. Adams J., Klaidman L., Chang M., Yang J. // *Current Topics in Med. Chem.* 2001. Vol. 1. P. 473.
8. Droge W. // *Physiol. Rev.* 2002. Vol. 82. P. 47.
9. Wartenberg M., Deidershagen H., Hescheler J., Sauer H. // *J. Biol. Chem.* 1999. Vol. 274. P. 27759.
10. Burdon R., Rice-Evans C. // *Free Radic. Res. Commun.* 1989. Vol. 6. P. 345.
11. Wiese A., Pacifici R., Davies K. // *Arch. Biochem. Biophys.* 1995. Vol. 318. P. 231.
12. Davis K. // *IUBMB Life.* 1999. Vol. 48. P. 41.

Физика

13. Bladier C., Wolvetang E., Hutchinson P. et al. // Cell Gr. Differ. 1997. Vol. 8. P. 589.
14. Rao G., Berk B. // Circ. Res. 1992. Vol. 70. P. 593.
15. Burdon R., Gill V., Alliangana D. // Free Radic. Res. 1996. Vol. 24. P. 81.
16. Buettner G. // Arch. Biochem. Biophys. 1993. Vol. 300. P. 535.
17. Buettner G., Jurkiewicz B. // Radiat. Res. 1996. Vol. 145. P. 532.
18. Sakagami H., Satoh K. // Anticancer Res. 1997. Vol. 17. P. 3513.
19. Kamata H., Hirata H. // Cell Signal. 1999. Vol. 11. P. 1.
20. Ullmann G., Knapp E. // Eur. Biophys. J. 1999. Vol. 28. P. 533.
21. Veine D., Arscott L., Williams C. // Biochemistry. 1998. Vol. 37. P. 15575.

Поступила в редакцию 15.03.2003.

Григорий Григорьевич Мартинович – младший научный сотрудник кафедры биофизики.

Сергей Николаевич Черенкевич – доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биофизики.

УДК 621.315.592

Т.М. ВЕСЕЛОВА, Н.А. ПОКЛОНСКИЙ, В.А. САМУЙЛОВ

МОДЕЛЬ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ТОКОВЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ПОЛУИЗОЛИРУЮЩИХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ*

A model of low frequency current oscillations in semi-insulating crystalline semiconductors with deep levels has been developed. A combination of the approaches of field-enhanced trapping, field-enhanced emission and negative differential mobility of carriers was used. A linear analysis of the model was done. The dispersion relations of the model were found to describe the experimentally observed dependences of the activation energies and of the fundamental frequency on the electric field and the temperature.

Полуизолирующие полупроводники при внешних воздействиях (электрическое и магнитное поля, градиент температуры и др.) могут образовывать пространственно-временные структуры: волны плотности заряда, домены сильного поля в форме спонтанных периодических и хаотических токовых осцилляций [1–4].

Исследованиям токовых неустойчивостей в полуизолирующих полупроводниках, включая их хаотическое поведение, посвящено много работ [5–9], однако до сих пор нет модели, описывающей экспериментально наблюдаемые немонотонные зависимости частоты осцилляций тока от внешних воздействий [7, 9–17].

Цель данной статьи – построение количественной модели низкочастотных токовых осцилляций в полуизолирующих кристаллических полупроводниках с одним типом носителей заряда и одним глубоким энергетическим уровнем примеси в запрещенной зоне.

Процессы переноса электронов и дырок с образованием пространственно-временных структур в полупроводниках могут быть описаны [3] системой уравнений генерационно-рекомбинационной кинетики с учетом диффузионного и дрейфового токов, а также уравнений Максвелла.

Для полупроводника *n*-типа проводимости с одним глубоким донорным уровнем в запрещенной зоне [3, 18] модель электронных процессов [6, 8] может быть представлена в виде уравнений:

* Авторы статьи – сотрудники кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} &= -C_n(F)N_{i,+1}n + X_n(F)N_{i,0} + \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x}, \\
\frac{\partial N_{i,0}}{\partial t} &= C_n(F)N_{i,+1}n - X_n(F)N_{i,0}, \\
J_n &= q \left(n\mu_n F + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0} (N_a + n - N_d - N_{i,+1}),
\end{aligned} \tag{1}$$

где q – модуль заряда электрона; F – напряженность электрического поля в кристаллическом образце; μ_n – дрейфовая подвижность электронов проводимости; D_n – коэффициент диффузии; N_a – концентрация полностью ионизированных водородоподобных акцепторов; N_d – концентрация полностью ионизированных водородоподобных мелких доноров; n – концентрация электронов в c -зоне, $N_{i,0}$ – концентрация глубоких доноров с уровнем EL2 в зарядовом состоянии 0; $N_{i,+1}$ – концентрация положительно заряженных глубоких доноров, $N_i = N_{i,0} + N_{i,+1}$ – полная концентрация глубоких доноров; $C_n(F)$ – коэффициент захвата электрона проводимости на донор (уровень EL2); $X_n(F)$ – коэффициент выброса электрона с уровня ловушки в c -зону; $\epsilon_r \epsilon_0$ – статическая диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки.

В отсутствие внешнего электрического поля ($F=0$) количества актов захвата и выброса электронов с глубоких доноров в c -зону равны (это следует из принципа детального равновесия [8]). В результате вблизи термодинамического равновесия существует устойчивое состояние, и спонтанные осцилляции тока не могут иметь места, даже если процессы захвата-выброса электронов проводимости с глубоких доноров имеют очень сильную нелинейную зависимость от концентрации носителей заряда [3]. Появление осцилляций тока в модели [6] связано с отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП), а коэффициенты захвата и выброса электронов с глубокого донора равны в соответствии с принципом детального равновесия [8].

Известно [1], что ОДП может существовать в случае немонотонной зависимости дрейфовой скорости $v(F)$ от F . Для n -GaAs (при $n=2,5 \cdot 10^8 - 2,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$) это происходит при $F > 3,2 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ [5] (согласно модели [6] осцилляции не могут иметь места при $F < 3,2 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$). В [6] не учитывается зависимость C_n от напряженности электрического поля.

Для возникновения токовой неустойчивости в слабых электрических полях достаточно, чтобы коэффициенты захвата и выброса электронов с глубоких доноров были такими же, как и в сильных полях. Как упоминалось в [7], задача точного определения значений величин сечений захвата и выброса электронов с уровня EL2 не решена.

Существуют два типа моделей токовых неустойчивостей в полупроводниках с глубокими ловушками: в первом учитывается стимулированный электрическим полем захват электронов на глубокий уровень; во втором – стимулированный выброс электронов в c -зону. Первый тип моделей основан на эмпирических уравнениях для уменьшения коэффициента захвата и немонотонной зависимости дрейфовой скорости от напряженности электрического поля [5–7]; второй учитывает уменьшение энергии ионизации донора с ростом напряженности электрического поля из-за эффекта Пула –

Френкеля и также принимает во внимание немонотонную зависимость $v(F)$ от F [8]. Обе модели дают осцилляции тока, но ни одна из них в полной мере не объясняет зависимости частотных мод осцилляций тока от внешних параметров – электрического поля (бифуркационные кривые) и температуры (аррениусовские зависимости).

В представляемой модели величина немонотонной зависимости $v(F)$ от F дается эмпирическим соотношением [9]:

$$v(F) = v_0 \frac{2F/F_0}{1 + (F/F_0)^2}, \quad (2)$$

где v_0 – максимум дрейфовой скорости при $F = F_0$. В соответствии с [19] при уменьшении поля $\mu_n(F \rightarrow 0) = 2v_0/F_0$.

Зависимость $C_n(F)$ на ловушку (глубокий донор) от F примем в виде [19]:

$$C_n(F) = C_n(0) \left[1 + \beta_1 \frac{(F/F_1)^{\beta_0}}{1 + (F/F_1)^{\beta_0}} \right], \quad (3)$$

где $C_n(0) = \sigma v_{th}$, σ – сечение захвата электронов проводимости на EL2-центр в отсутствие поля; $v_{th} = (3k_B T/m^*)^{1/2}$ – тепловая скорость электрона; k_B – постоянная Больцмана; T – температура; m^* – эффективная масса электрона проводимости в центре зоны Бриллюэна (Γ -подзоны) в n -GaAs; F_1 , β_0 , β_1 – величины, определяемые по кривой зависимости v от F [5]. Выражение (3) не учитывает захват электронов из подзон L (c -зоны n -GaAs), так как модель стимулированного полем захвата для EL2 электронов из L -подзон не соответствует экспериментальным данным [7].

Зависимость коэффициента выброса электронов с ловушки от электрического поля выражается соотношением [8]:

$$X_n(F) = C(0)N_c(T) \exp \left[-\frac{E_t - \beta E_{PF}(F)}{k_B T} \right], \quad (4)$$

где $N_c = 2(2\pi m^* k_B T/h^2)^{3/2}$ – эффективная плотность состояний в зоне проводимости; $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка; β – безразмерный фактор, зависящий от природы ловушек [8]; $E_{PF} = (Fe^3/\epsilon\epsilon_0)^{1/2}$ – уменьшение энергии ионизации E_t дефекта EL2 из-за эффекта Пула – Френкеля.

При линеаризации системы уравнений (1) согласно [20] использовались зависимости $v(F)$, $C_n(F)$, $X_n(F)$, предоставленные формулами (2–4). Для проверки стабильности стационарного решения n^s , $N_{i,0}^s$, F^s малые отклонения рассматривались как плоские волны с затуханием [6, 21]:

$$\begin{aligned} \delta n &= \delta n_k \exp [ikx + if(k)t + \tau^{-1}(k)t], \\ \delta N_{i,0} &= \delta N_{(i,0)k} \exp [ikx + if(k)t + \tau^{-1}(k)t], \\ \delta F &= \delta F_k \exp [ikx + if(k)t + \tau^{-1}(k)t]. \end{aligned} \quad (5)$$

где k – действительное волновое число; $\tau^{-1}(k) < 0$, $f(k) > 0$ – действительная и мнимая части комплексной частоты $\omega = \tau^{-1}(k) + if(k)$; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Подстановка соотношений (5) в систему уравнений (1) после линеаризации дает:

$$\begin{aligned} -\frac{qn^s}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial v}{\partial F} \Big|_{F=F'} (1+B_1) - (1+B_1)\tau^{-1} + fB_2 - D_n k^2 &= 0, \\ -\frac{qn^s}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial v}{\partial F} \Big|_{F=F'} B_2 - (1+B_1)f - B_2\tau^{-1} + v^s k &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$B = B_1 + iB_2 = \frac{C_n^s N_{i+1}^s + iA}{C_n^s n^s + X_n^s + \tau^{-1} - i(f+A)},$$

$$A = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 k} \left[N_{i+1}^s n^s \frac{\partial C_n}{\partial F} \Big|_{F=F'} - N_{i,0}^s \frac{\partial X_n}{\partial F} \Big|_{F=F'} \right].$$

Полученные уравнения (6) могут быть трансформированы в форму дисперсионных отношений для модели [6], если положить $A=0$ (т. е. C_n и X_n не зависят от F) и $X_n^s = C_n^s N_n \exp(-E_i/k_B T)$.

Решая систему уравнений (6) численно, получаем комплексную частоту $\omega = \text{Re}\omega + i\text{Im}\omega$, где $\text{Re}\omega = \tau^{-1} < 0$ – постоянная затухания осцилляций тока, $\text{Im}\omega = f > 0$ – частота осцилляций тока. Частота ω является функцией k , F и T .

Параметры, используемые в расчетах зависимостей частотных мод токовых осцилляций от поля и температуры, приведены в таблице.

На рис. 1 а представлены результаты решения дисперсионных уравнений (6) (частота осцилляций f и частота столкновений τ^{-1} как функции k при фиксированных значениях $F=F_s$ и $T=T_s$), которые были выбраны в соответствии с экспериментальными результатами [14, 16] существования осцилляций тока в полуизолирующем GaAs.

При фиксированном $k=k_s$ и T_s получаем зависимости f и τ^{-1} от F (рис. 1 б). Так как осцилляции тока возможны только при отрицательных значениях τ^{-1} [7], то в случае $E_i=0,75$ эВ (половина ширины запрещенной зоны GaAs при $T=78$ К) они возникают, когда величина τ^{-1} изменяет знак при $F=3,8 \cdot 10^5$ В·м⁻¹. Осцилляции такой низкой частоты возможны только при большой напряженности электрического поля. Это видно из рис. 1 б: осцилляции существуют для $f > 0$, $\tau^{-1} < 0$.

Следует отметить, что рассчитанные зависимости частотных мод осцилляций тока от F для различных значений глубин залегания E_i уровня ло-

Параметры, использованные при моделировании низкочастотных осцилляций тока в полуизолирующем GaAs

Параметр	Значение	Источник
N_i	$5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$	[6]
n_{is}	$2,5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$	[6]
n_s	$1 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$	[6]
μ_n	$0,6 \text{ м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$	[6]
ν_0	$0,96 \cdot 10^5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$	[5]
$\nu_0 = \mu_n F_0 / 2$		[5]
F_0	$3,2 \cdot 10^5 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$	[5]
F_1	$2,1 \cdot 10^5 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$	[5]
β_0	4	[5]
β_1	9	[5]
σ	$9,71 \cdot 10^{-22} \text{ м}^2$	[5]
$C_n(0)$	$4,35 \cdot 10^{-16} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$	[5]
m^*	$0,068 m_0$	[14]
β	2	[14]
ϵ	12,5	[14]
E_i	1 – 0,75; 2 – 0,70; 3 – 0,68; 4 – 0,66; 5 – 0,64; 6 – 0,62; 7 – 0,59 эВ	1–6 [10, 14]; 7 – [17]
F_s	$5 \cdot 10^5 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$	[14]
T_s	300 К	[14]
k_s	$2 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$	[14]

вушки относительно дна *c*-зоны немонотонны (рис. 2). Это соответствует экспериментальным результатам по бифуркационным кривым [11, 16].

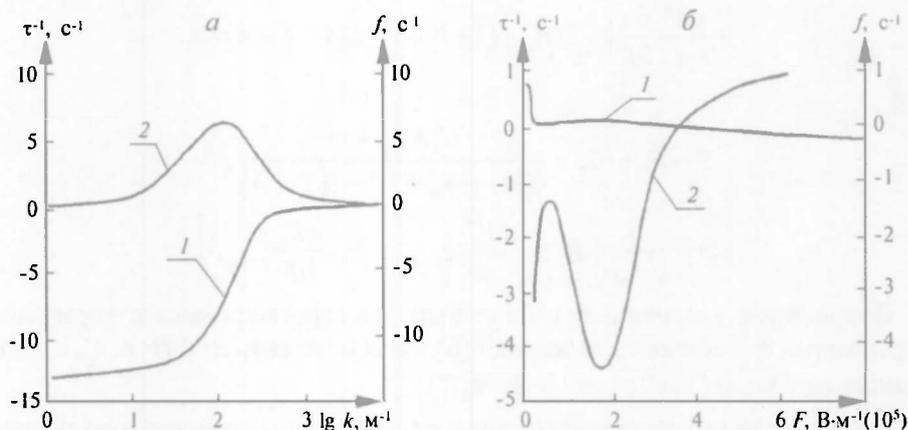


Рис. 1. Зависимости действительной τ^{-1} (1) и мнимой f (2) частей комплексной частоты ω от волнового вектора k осцилляций тока (а) при $E_i=0,75$ эВ, $F_s=5 \cdot 10^4$ В·м $^{-1}$ и частоты ω от напряженности F внешнего электрического поля (б) при $E_i=0,75$ эВ, $k=2 \cdot 10^3$ м $^{-1}$

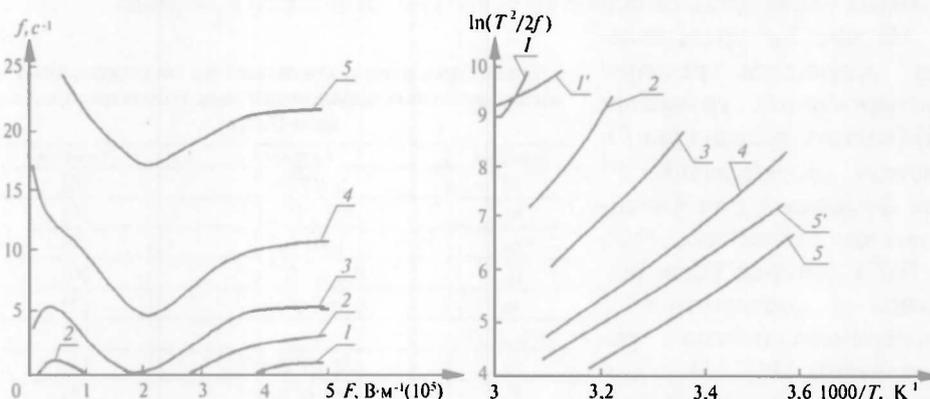


Рис. 2. Зависимость частоты осцилляций f от напряженности F электрического поля для различных значений энергий донорного уровня E_i (эВ):
1 - 0,75; 2 - 0,70; 3 - 0,68; 4 - 0,66; 5 - 0,64; $k=2 \cdot 10^3$ м $^{-1}$

Рис. 3. Зависимость $\ln(T^2/2f)$ от $10^3/T$ для различных значений энергий донорного уровня E_i (эВ):
1, 1' - 0,75; 2 - 0,70; 3 - 0,66; 4 - 0,62; 5, 5' - 0,59;
 $k = 2 \cdot 10^3$ м $^{-1}$; F (В·м $^{-1}$): 1, 2, 3, 4, 5 - $2,5 \cdot 10^4$; 1', 5' - $5 \cdot 10^5$

Рассчитанная температурная зависимость частотных мод для различных значений E_i уровня ловушки относительно дна *c*-зоны представлена на рис. 3. Наклон кривых дает значения E_i при низких электрических полях.

Сравнивая наклон кривых 1 и 1', 5 и 5' на рис. 3, необходимо отметить, что с увеличением напряженности электрического поля энергия активации глубокого донора уменьшается. Это согласуется с экспериментальными результатами [17].

Таким образом, представленная в работе модель количественно описывает появление немонотонных зависимостей частоты f осцилляций тока от F и влияние F на уменьшение E_i [22], которые ранее не поддавались теоретической интерпретации.

1. Шелль Е. Самоорганизация в полупроводниках. М., 1991.
2. Abe Y. // Appl. Phys. 1989. Vol. A48. P. 93.

3. Schoell E. // Ibid. P. 95.
4. Huebner B.R., Peinke J., Parisi J. // Ibid. P. 107.
5. Sacks H.K., Milnes A.G. // Int. J. Elect. 1970. Vol. 28. № 6. P. 565.
6. McAlister S.P., Li Z.-M., Day D.J. // Canadian J. of Phys. 1991. Vol. 69. P. 207.
7. Johnson D.A., Puechner R.A., Maracas G.N. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67. № 1. P. 300.
8. Schoell E. // Physica Scripta. 1989. Vol. T29. P. 152.
9. Пирагас К., Пожела Ю., Тамашавичус А., Ульбикас Ю. // ФТП. 1987. Т. 21. С. 335.
10. Goronkin H., Maracas G.N. // IEDM Conf. Proc. 1984. P. 182.
11. Maracas G.N., Johnson D.A., Goronkin H. // Appl. Phys. Lett. 1985. Vol. 46. № 3. P. 305.
12. Backhouse C., Young L. // Solid-State Electronics. 1992. Vol. 35. № 11. P. 1601.
13. Miller D.J., Bujatti M. // IEEE Trans. 1987. Vol. ED-34. P. 1239.
14. Maracas G.N., Johnson D.A., Puechner R.A. et al. // Solid-State Electron. 1989. Vol. 32. P. 1887.
15. Day D.J., Trudeau M., McAlister S.P., Hurd C.M. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 52. P. 2034.
16. Кнап W., Jesewski M., Lusakowski J., Kuszko W. // Solid-State Electronics. 1988. Vol. 31. № 34. P. 813.
17. Karpierz K., Lusakowski J., Кнап W. // Acta Physica Polonica. 1989. Vol. A75. № 2. P. 207.
18. Минаев Н.С., Поклонский Н.А., Стельмах В.Ф., Ткачев В.Д. // ФТП. 1974. Т. 8. № 6. С. 1076.
19. Schoell E. In Handbook on Semiconductors. Amsterdam, 1992. Vol. 1. P. 419.
20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
21. Ctnis A., Lassiene G., Pyragas K. // Solid-State Electronics. 1992. Vol. 35. P. 975.
22. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. М., 2000.

Поступила в редакцию 09.10.2003.

Татьяна Михайловна Веселова – научный сотрудник.

Николай Александрович Поклонский – доктор физико-математических наук, профессор.

Владимир Александрович Самуилов – кандидат физико-математических наук, докторант.

УДК 541.423

Е.С. ВОРОПАЙ, А.П. ЗАЖОГИН, К.И. ЧЕРВЯКОВСКИЙ, Ж.И. БУЛОЙЧИК

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОСТУПЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЛАЗМУ РАЗРЯДА ПРИ АТОМНО-ЭМИССИОННОМ АНАЛИЗЕ РАСТВОРОВ ЗОЛОТА И СЕРЕБРА

This paper presents an experimental investigation of the ingress processes of elements into alternating-current discharge plasma during atomic-emission analysis of gold and silver solutions. The obtained results demonstrate simultaneous ingress of these elements into the discharge, pointing to the fact that their oxidizability and volatility have no effect on their ingress processes.

Одновременное определение нескольких элементов, обычно в микроконцентрациях, может быть выполнено с помощью различных экспрессных инструментальных методов анализа, отличающихся простотой, не требующих большого количества исследуемого материала и обеспечивающих требуемую относительную точность. К таким методам в первую очередь относится эмиссионный спектральный анализ, который дает возможность одновременного определения до 35 элементов с достаточной чувствительностью и точностью и успешно применяется во многих областях науки.

Эмиссионная спектроскопия, использующая электрическую дугу или искровой разряд, – мощное средство, позволяющее обнаружить до 70 эле-

ментов при кратковременном возбуждении нескольких микрограммов анализируемого образца. Для качественного анализа этот вид спектроскопии не имеет равных, причем многие вещества практически не требуют предварительной обработки образца; метод высокоспецифичен, предел обнаружения элементов лежит в интервале 10^{-4} – 10^{-7} %.

Значение эмиссионной спектроскопии для количественных определений ограничено трудностями воспроизведения интенсивности излучения. Лишь при тщательном выполнении анализа можно довести относительную ошибку до 1–2 %; обычно погрешность достигает 10–15 %. При определении следов элементов такая ошибка часто приемлема и не сильно превышает ошибку других методов. Достоинство метода – в экспрессности получения информации. Часто спектральным методом можно определить несколько элементов уже через 3–5 мин после получения образца: бывают случаи (например, при контроле производственных процессов), когда скорость важнее высокой точности.

Анализ почти любого изучаемого объекта – трудная аналитическая задача. Главные причины затруднений – сложность и индивидуальность состава, его многокомпонентность. Из этого вытекает необходимость приспособления даже, казалось бы, несложных стандартных методов к особенностям состава и физико-химической структуры каждого исследуемого объекта, т. е. в каждом конкретном случае требуется проведение в той или иной мере аналитической исследовательской работы. В настоящее время имеется заметное отставание в существовании официально стандартизированных методик анализа.

Одной из основных причин систематических ошибок в спектральном анализе даже при правильной и аккуратной работе почти всегда являются эталоны. Эталон, не дающий систематических ошибок (назовем его идеальным), должен быть во всех отношениях тождествен пробам, отличаясь от нее только содержанием анализируемого элемента. Легче всего приблизиться к идеальным эталонам при исследовании растворов и газов. Во всех других случаях эталоны, если не по своему химическому составу, то по другим свойствам (плотности, степени дисперсности и т. п.), отличаются от анализируемых проб. В сплавах неоднородность обычно наблюдается среди зерен кристаллов.

Спектральный анализ веществ, находящихся в жидком состоянии, уже давно используется для решения большого числа практически важных задач. За последние десятилетия такой метод получил существенное развитие. Были разработаны новые способы введения вещества в пламя источника света, усовершенствована техника эксперимента. При этом все чаще практикуется перевод твердой пробы в раствор с последующим спектральным анализом образцов в жидком состоянии.

Спектральный анализ жидких проб обладает рядом преимуществ. При исследовании растворов легко получить чрезвычайно однородную по составу пробу, как бы мала она ни была, тогда как усреднение твердых образцов часто оказывается довольно сложной задачей и может существенно ограничивать точность анализа. Упрощается техника эксперимента, в частности составление эталонных смесей. Возможность разбавить раствор или упарить его до требуемого объема также облегчает проведение работы и способствует повышению ее относительной чувствительности и точности.

Метод анализа раствора – возбуждение спектра его сухого остатка, выпаренного на поверхности электрода, дает очень высокую абсолютную чув-

ствительность определений (по многим элементам 10^{-2} – 10^{-1} %). Следует, однако, учитывать, что наилучшая чувствительность достигается лишь в случае очень разбавленных растворов, т. е. тогда, когда на электродах находится лишь незначительное количество сухого остатка. Опыт нашей работы показывает, что значительное снижение чувствительности анализа начинается уже при массе проб порядка 100 мкг. Этот эффект, по-видимому, связан со значительным ухудшением качества слоя, покрывающего электрод. При увеличении массы сухого остатка раствора слой получается непрочным и легко разрушается в начале горения электрической дуги.

Высокая чувствительность, воспроизводимость, значительно меньшая трудоемкость подготовки проб позволили нам остановиться на выборе именно этого метода анализа. Здесь следует отметить, что довольно большая пористость угольных электродов ограничивает возможность повышения чувствительности анализа. При выпаривании часть раствора проникает в электрод на значительную глубину, и для полного испарения пробы необходимы нагревание электрода и длительная экспозиция при регистрации спектра. Для ослабления этого фактора объем раствора проб был выбран таким, чтобы процесс сушки был недолгим и не требовал высокой температуры. Экспериментально было установлено, что 25 мкл раствора обеспечивают требуемую чувствительность и хорошую воспроизводимость анализа. Следует отметить, что существует способ закрепления пробы в верхнем слое угольного электрода благодаря специальной подготовке электродов. Способ включает предварительное нанесение на них пленки полистирола в толуоле и последующее частичное разрушение ее каплей концентрированной серной кислоты. Проведенные нами предварительные опыты показали, что при выбранном количестве раствора оба метода практически равноценны, поэтому мы остановились на более простом, описанном выше методе. К тому же он вносит меньше погрешностей, чем способ с серной кислотой, так как последняя часто имеет ряд примесей в количестве большем, чем сама анализируемая проба [1].

Многообразие и взаимное влияние различных процессов (испарение, диффузия, окисление, эрозия), сопровождающих процесс перехода вещества из твердого состояния в газообразное, влияние матричных и «третьих» элементов на интенсивность спектральных линий не позволяют при количественном анализе отказаться от построения градуировочных графиков по эталонам – образцам, близким по составу к анализируемому. В связи с чем атомно-эмиссионный анализ является относительным методом, результат измерений в конечном счете сравнивается с эталоном.

К настоящему времени достаточно хорошо изучены процессы, происходящие при формировании аналитического сигнала от излучающего облака. Проанализировано влияние температуры, состава, электронной плотности и т. д. плазмы на интенсивность спектральных линий определяемого элемента. В то же время переход вещества из твердого состояния в газообразное изучен гораздо менее полно. Это связано в первую очередь с тем, что степень влияния на скорость поступления элементов в разряд различных процессов, протекающих в образце (окисление, диффузия, испарение и т. д.), зависит от метода анализа и материала самого анализируемого образца. Поэтому решение данной проблемы является одной из центральных в современной теории и практике спектрального анализа.

В настоящей работе рассматривается вопрос о выходе элементов различной летучести в разряд при атомно-эмиссионном анализе сухих остатков растворов золота и серебра. Изучение данной проблемы актуально, во-первых, с экономической точки зрения – приготовление растворов в качестве эталонов гораздо легче и дешевле, нежели металлических, в связи с чем дешевле и количественный анализ. Во-вторых, данные объекты можно рассматривать как модельные, в которых при выходе элементов в плазму разряда перестают играть существенную роль процессы окисления примесей (элементы в растворе находятся в виде окислов и солей), их диффузии в элементе-основе и эрозии (испарения) самого элемента-основы, определяющие характер выхода примесей в плазму при анализе твердых проб [2]. В-третьих, так как метод исследования сухих остатков растворов широко применяется при анализе зубных паст [3], биообъектов [4] и т. д., то накопление данных о выходе элементов в плазму из сухих остатков различных растворов имеет как научный, так и практический интерес.

Для решения поставленной задачи мы использовали так называемые кривые испарения либо кривые поступления элементов. Суть данного метода состоит в получении кривых, отражающих зависимость интенсивности спектральных линий от времени регистрации [2, 4]. Краткое описание применяемой установки дано в работе [2].

Раствор золота получали путем растворения пробы металлического золота в «царской водке» (раствор соляной и азотной кислоты в массовом соотношении 1:2).

Для получения раствора серебра проба металлического серебра предварительно растворялась в смеси азотной кислоты и перекиси водорода (в соотношении 1:3), после чего раствор выпаривали до получения сухого порошка соли AgNO_3 . Затем соль серебра растворялась в воде в соотношении 1:2.

Приготовление проб сухих остатков проводили следующим образом: 25 мкл полученных растворов наносились на сферическую поверхность нижнего электрода диаметром 6 мм на глубину 1 мм и высушивались в течение 30 мин (раствор золота) и 45 мин (раствор серебра). Затем нижний электрод помещался в камеру сгорания, и производилась регистрация «кривых поступления» элементов при силе тока 1,5 А в течение 60 с. Применяемые нами аналитические линии элементов приведены в таблице.

Нами представлены так называемые характерные «кривые поступления» золота, серебра и примесей из сухих остатков растворов золота и серебра (рис. 1, 2), так как все они имели аналогичный вид с приведенными.

Схожие между собой по виду «кривые поступления» элементов примесей совпадают с «кривыми поступления» золота и серебра, что означает совместное поступление элементного состава растворов в плазму. Такой характер выхода элементов в разряд возможен в случае их проникновения внутрь электрода и постепенного выгорания вместе с электродом. В данных условиях анализа практически отсутствует не только влияние на выход элементов процесса окисления, но и их летучести. Следовательно, при построении градуировочных графиков можно рекомендовать использовать не абсолютные, а относительные основе интенсивности линии примесей. При увеличении силы тока, температуры электрода можно ожидать, что поступление примесей будет иметь более фракционный характер [4].

В полученных «кривых поступления» как у примесей, так и у элементов основы – Au, Ag – существует следующая закономерность: все они имеют

повторный максимум через определенный промежуток времени, а затем интенсивность падает. В случае анализа сухих остатков золота этот интервал времени несколько дольше, нежели при анализе сухих остатков серебра, и составляет около 17 с, при анализе сухих остатков серебра – около 13 с.

Длины волн элементов-основ и примесей

Элемент-основа	Длина волны, нм	Элемент-основа	Длина волны, нм
Au I	270,072	Ag I	272,177
Элемент-примесь	–	Элемент-примесь	–
Ag I	338,289	Al I	309,271
Cu I	327,396	Au I	267,595
Pb I	283,306	Cu I	324,754
Pd I	340,458	Pb I	283,306
Sn I	317,505	Pd I	324,270
Mg I	285,213	Sn I	317,505
Ti I	319,992	Mg I	285,213
–	–	Ti I	319,992

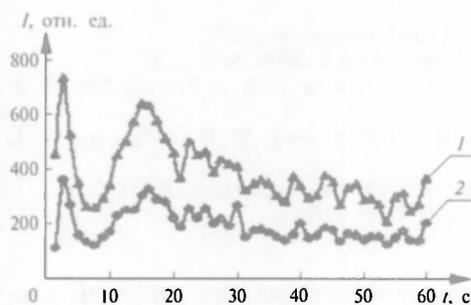


Рис. 1. «Кривая поступления» золота – 1 и характерная «кривая поступления» примесей из сухого остатка раствора золота – 2

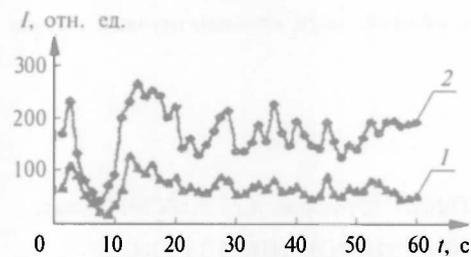


Рис. 2. «Кривая поступления» серебра – 1 и характерная «кривая поступления» примесей из сухого остатка раствора серебра – 2

Наличие данного повторного максимума, как и совместное поступление элементов, по нашему мнению, связано с проникновением их внутрь угольного электрода и выходом в разряд после удаления (сгорания) его верхнего слоя. Различие во времени появления максимума при анализе сухих остатков золота и серебра, по всей видимости, связано с различной величиной вязкости соответствующих растворов (у раствора серебра она больше). Это приводит к тому, что проникновение в электрод элементов из раствора золота происходит на большую глубину. Данное предположение подтверждает еще и тот факт, что время, требуемое для высушивания растворов золота и серебра на электроде, у раствора золота меньше.

«Кривые поступления» элементов из сухих остатков растворов золота и серебра подобны «кривым поступления» элементов из образцов серебра малой массы, подверженных внутреннему окислению [2]. Однако повторные максимумы у элементов появляются гораздо позже, и механизм их образования в данном случае иной. Если при внутреннем окислении обогащение поверхности металлической пробы происходило за счет всплывающих в виде окислов элементов из внутренних слоев, то в данном случае интенсивное поступление примесей спустя некоторый промежуток времени обусловлено нагреванием электрода и сгоранием его поверхностного слоя, благодаря чему примеси, проникнувшие в глубь электрода, выходят на его поверхность. Диффузионный процесс выхода примесей на поверхность

электрода из его внутренних слоев также присутствует, однако из-за сравнительно низкой температуры электрода скорость его протекания намного меньше скорости испарения поверхностного слоя электрода, в связи с этим и повторный максимум для всех примесей появляется одновременно и не зависит от коэффициента диффузии.

Таким образом, из полученных нами результатов можно сделать следующее заключение: все «кривые поступления» примесей из сухого остатка золота и серебра при малой силе тока вне зависимости от их летучести и окисляющей способности носят одинаковый характер и подобны «кривым поступления» основных элементов. В то же время характер выхода элементов примесей из твердых образцов малой массы существенно зависит от их летучести и степени сродства к кислороду [2, 5, 6]. Следовательно, данная работа еще раз подтверждает, что именно процессы окисления, диффузии и скорость испарения определяют характер выхода элемента в плазму разряда, что было предположено нами при описании поступления примесей из образцов серебра малой массы [2].

1. Химические реактивы и высокочистые вещества (каталог). М., 1983.
2. Червяковский К.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 37.
3. Булойчик Ж.И., Червяковский К.И., Юдина Н.А. // Там же. 2001. № 3. С. 29.
4. Зажогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И. // Там же. 2001. № 2. С. 3.
5. Спектральный анализ чистых веществ / Под ред. Х.И. Зильберштейна. Л., 1971.
6. Филимонов Л.Н. // Зав. лаб. 1950. Т. 16. № 10. С. 1200.

Поступила в редакцию 26.12.2003.

Евгений Семенович Воропай – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии.

Анатолий Павлович Зажогин – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии.

Климентий Иванович Червяковский – младший научный сотрудник «Унидрагмет БГУ».

Жанна Игнатьевна Булойчик – кандидат химических наук, старший научный сотрудник кафедры физической оптики.

УДК 621.315.592

П.И. ГАЙДУК, К. ТРАУТМАН (ФРГ), М. ТОЛЕМОНД (Франция), А.Н. ЛАРСЕН (Дания)

РОЛЬ СКОРОСТИ ИОНОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ТРЕКОВ В СПЛАВАХ $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$

We report the observation of a strong velocity effect in the single-crystalline $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ alloy layers. Transmission electron microscopy reveals tracks of different morphology when U^+ projectiles of energy between 0,8 and 2,64 GeV penetrate into the matrix with the same electronic stopping power S_e but different velocity. The structure of the tracks changes from separated dots of low density to discontinuous tracks when the energy of U^+ projectiles decreases from 2,64 to 0,8 GeV. The crystalline morphology of the tracks is confirmed. The formation of dislocation loops along the ion path is found in the case of slow ions. The results are deduced in the frame of the thermal-spike approach.

При прохождении через твердые материалы быстрые тяжелые ионы могут образовывать треки – специфические линейные дефекты, трассирующие траекторию ионов на участке преобладания электронных потерь (S_e). Треки легко формируются в диэлектриках, металлических сплавах и некоторых других материалах при превышении S_e пороговой величины. Несмотря на

сравнительную легкость дефектообразования при ядерном торможении ионов, полупроводники имеют неожиданно низкую чувствительность к S_e . До настоящего времени нет доказательств формирования треков в кристаллах Si, Ge, GaP, GaAs или алмаза [1–3] при их облучении моноатомными частицами, напротив, сообщалось об эффективном отжиге дефектов или даже о “ S_e -индуцированной рекристаллизации” [1, 2, 4]. Вместе с тем 20–40 МэВ кластеры фуллеренов C_{60} образуют аморфные треки в кристаллах Si [5] и Ge [6], что, однако, нельзя объяснить только высоким уровнем S_e . В частности, результаты [6] свидетельствуют о важной роли скорости ионов. Так, быстрые (1 ГэВ) ионы Pb ($S_e=38,3$ кэВ/нм) не создают трековых дефектов в Ge, тогда как более медленные (20–40 МэВ) кластеры C_{60} ($S_e=37,3$ кэВ/нм) производят хорошо выраженные аморфные треки диаметром 6–13 нм даже при меньших потерях энергии [6]. При этом величина упругих потерь энергии значительно меньше, чем неупругих, как в случае ионов Pb ($S_n=0,03$ кэВ/нм), так и C_{60} ($S_n=1,6$ кэВ/нм).

В [7] мы сообщали о первом наблюдении прерывистых треков в кристаллах $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ -сплавов при облучении 1,3 ГэВ ионами U^+ ($S_e=33,8$ кэВ/нм). В соответствии с [8] даже минимальные вариации как S_e , так и скорости ионов приводят к сильному изменению морфологии прерывистых треков, которые трансформируются от цепочек пространственно разделенных нанокластеров до вытянутых цилиндрических дефектов и далее до непрерывных треков. В настоящей работе такая высокая чувствительность морфологии прерывистых треков вблизи порога их формирования использована как инструмент для демонстрации влияния скорости ионов на формирование треков в эпитаксиальных слоях $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ -сплавов. С этой целью облучение проводилось в режимах, когда ионы U^+ имеют различную скорость (энергию) при неизменной величине S_e . В частности, использованы ионы U^+ с энергией 2,64 ГэВ ($4,27 \cdot 10^7$ м/с), 1,36 ГэВ ($3,31 \cdot 10^7$ м/с) и 0,8 ГэВ ($2,52 \cdot 10^7$ м/с). В соответствии с расчетами TRIM95 (рис. 1) при изменении скорости ионов почти в два раза величина S_e варьируется незначительно (около 3 %, в интервале от 32,4 до 33,5 кэВ/нм).

Материал и методика

В работе использовали 2 мкм слои эпитаксиального сплава $Si_{0,5}Ge_{0,5}$, полученные методом молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ) на пластинах (001)-Si p -типа проводимости с помощью установки VG Semicon V80. Для релаксации напряжений слои SiGe-сплава выращивали с применением буферов переменного состава в соответствии с алгоритмом, предложенным в [9]. Эпитаксиальные слои имели высокое структурное качество и содержали низкую плотность ростовых дислокаций (10^5 – 10^6 см $^{-2}$). Для обеспечения равных условий облучения (температуры, плотности тока, дозы и др.) образцы вырезали из соседних участков центра пластины, укрепляли на одном держателе и облучали ионами U^+ с энергией 2,64 ГэВ до дозы $5 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$ с плотностью тока $2 \cdot 10^8$ см $^{-2}$ с $^{-1}$ при комнатной температуре. Облучение проводили в незащищенные образцы или через фольгу Al тол-

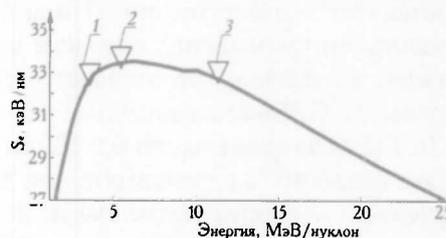


Рис. 1. Электронные потери энергии (S_e) ионов U^+ в слоях $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ -сплавов в зависимости от энергии (скорости) ионов (по результатам расчетов TRIM95): 1 – 0,8; 2 – 1,3; 3 – 2,7 ГэВ

щиной 47 или 67 мкм, получая ионы различной энергии (скорости) при одинаковой величине электронного торможения (см. рис. 1). В соответствии с расчетами TRIM95 электронные и ядерные потери энергии ионов составляли $S_e \sim 33$ кэВ/нм и $S_n \sim 0,024$ кэВ/нм соответственно и практически не изменялись в приповерхностном слое толщиной 2 мкм. Имплантированные слои исследовались с помощью методов просвечивающей электронной микроскопии в plan-view (PV-ПЭМ) или cross-section (X-ПЭМ) геометриях с использованием прибора Phillips CM-20. Образцы препарировались с применением обычной техники последовательного механического полирования в сочетании с ионно-лучевым травлением.

Результаты и их обсуждение

Результаты PV-ПЭМ-исследований (рис. 2) убедительно свидетельствуют о влиянии скорости ионов на формирование треков. Для демонстрации трековой корреляции дефектов по глубине образцы в колонне микроскопа размещались под углом $\sim 5^\circ$ по отношению к пучку электронов. Кроме того, количественная сопоставимость результатов исследований обеспечивалась тем, что образцы для ПЭМ-исследований были взяты в идентичных условиях в виде тонких приповерхностных срезов одинаковой толщины (около 0,5 мкм). Во всех исследованных образцах хорошо видны дефекты – контрастные черные наноразмерные пятна ~ 3 –10 нм. В соответствии с нашими исследованиями [7] дефекты имеют очень слабый контраст или практически невидимы в большинстве условий формирования изображения. Максимальный контраст достигается в двухлучевой геометрии формирования изображения при большом отклонении пучка электронов от точных дифракционных условий ($s \gg 0$), что указывает на преимущественно кристаллическую структуру треков. Вместе с тем установлено, что как плотность дефектов, так и их морфология в значительной степени зависят от скорости ионов. Так, только менее $2 \cdot 10^9$ см⁻² дефектов формируется в слоях SiGe-сплавов после прохождения наиболее быстрых 2,64 ГэВ ионов U⁺ (рис. 2 а). В этом случае дефекты распределены по образцу неупорядоченно. Не выявлено заметной трековой корреляции дефектов, по крайней мере внутри 0,5 мкм поверхностного слоя. Плотность дефектов резко увеличивается до $\sim 5 \cdot 10^{10}$ см⁻² (рис. 2 б) или до $\sim 7 \cdot 10^{10}$ см⁻² (рис. 2 в) при уменьшении энергии (скорости) ионов до 1,36 ГэВ или до 0,8 ГэВ (толщина фольги Al составляет соответственно 47 или 67 мкм). Однако наиболее важным последствием уменьшения скорости ионов является тенденция собирания дефектов в цепочки, что означает первую стадию формирования треков [8]. Согласно ПЭМ-исследованиям образцы, облученные ионами с энергией 1,36 ГэВ, содержат около $6,5 \cdot 10^9$ см⁻² прерывистых треков, имеющих в составе около 40 % отдельных пятен дефектов (см. рис. 2 б). Далее, слои, облученные наиболее медленными ионами (0,8 ГэВ), содержат $1,3 \cdot 10^{10}$ см⁻² треков, объединяющих более чем 70 % индивидуальных дефектов.

Важная составляющая морфологии треков получена из анализа ПЭМ-изображений образцов, приготовленных в виде поперечных сечений (рис. 3). Наряду с уже отмеченными особенностями формирования треков, X-ПЭМ-исследования выявляют необычную морфологию треков после прохождения наиболее медленных ионов, в частности полосы слабого серого контраста, трассирующие треки в промежутках между более контрастными (черными) пятнами дефектов. Серые полосы проявляются в двухлучевых условиях формирования светопольных изображений при больших

значениях параметра $\lambda \gg 0$. Однако в большинстве случаев эта особенность контраста практически неразличима. Подобные особенности контраста, как правило, обусловлены электронной дифракцией на кристаллических областях, обогащенных точечными дефектами и их кластерами. Другим важным результатом Х-ПЭМ-исследований является тенденция перекрытия отдельных пятен дефектов и их объединения в протяженные участки треков.

На рис. 2 *а* представлено темнопольное ПЭМ-изображение структуры, полученное в режиме слабого пучка. Видно, что в значительной части трековые дефекты являются дислокационными петлями; некоторые из таких дефектов (светлые двойные дуги) указаны стрелками (см. рис. 2 *з*). Размеры дислокационных петель варьируются от 5 до 10 нм. Их плотность составляет около $(1-2) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ в слое толщиной 0,5 мкм, т. е. доля дислокационных петель $\approx 20-40\%$ от общего числа трековых дефектов. Остальные дефекты являются кластерами точечных дефектов, что хорошо коррелирует с результатами наших ПЭМ-исследований в режиме атомного разрешения [7]. При этом не было обнаружено свидетельств формирования аморфной структуры треков. В то же время, как сообщалось в [5, 6], в кристаллах Si и Ge, облученных кластерами C_{60} , формируются аморфные треки, которые являются нестабильными и кристаллизуются уже во время ПЭМ-исследований. В настоящей работе, однако, использованы щадящие режимы таких исследований с низкой интенсивностью электронного пучка

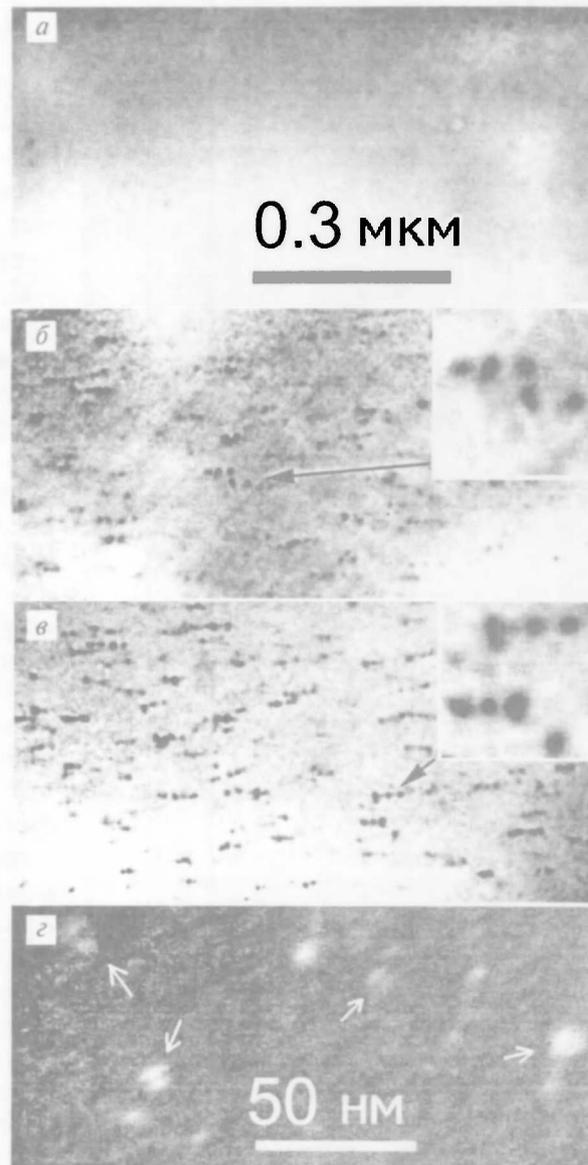


Рис. 2. Светлопольные PV-ПЭМ-микрофотографии структуры слоев $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ -сплавов, облученных 2,64 ГэВ ионами U^+ : *а* – без маскирования фольгой Al; *б* – через фольгу Al толщиной 47 мкм или *в* – 67 мкм. Темнопольное изображение (*г*) получено в слабом пучке от образца, облученного в тех же условиях, что и (*в*). Изображения (*а*), (*б*) и (*в*) имеют одинаковое увеличение. Вставки на (*б*) и (*в*) показывают увеличенные изображения трековых дефектов в указанных стрелками областях

и дополнительным охлаждением образцов в колонне электронного микроскопа.

Поверхность

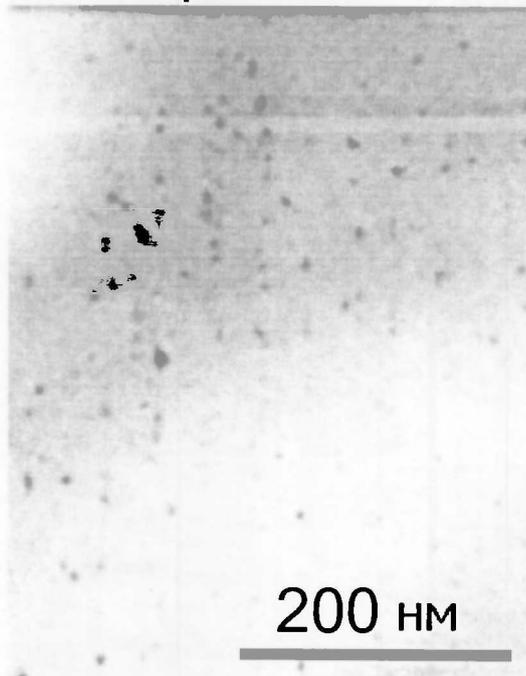


Рис. 3. Светлопольное X-ПЭМ-изображение структуры $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ -сплавов, облученных ионами U^+ через фольгу Al толщиной 67 мкм

При прохождении ионов через твердые тела быстрые тяжелые ионы теряют свою энергию преимущественно на возбуждение электронной подсистемы окружающего материала [1–8]. Скорость и плотность возбуждений зависит не только от величины S_e , но и от локальной длительности возбуждения (скорости ионов) [2, 6, 8]. Нагрев и плавление материала, окружающего траекторию проходящих ионов, а также и последующее формирование треков в значительной степени зависят и от выноса (диффузии) электронов и фононов (тепла) из зоны возбуждения. Следуя логике и аргументации, содержащихся в [7], мы полагаем, что критическим параметром формирования треков является качество рекристаллизации трекового расплава. В свою очередь, качество рекристаллизации контролируется переориентацией химических связей атомов при их присоединении к кристаллу, а также зависит от процессов наносегрегации и композиционного упорядочения сплавов SiGe [7, 10]. Указанные процессы зависят от скорости продвижения фронта кристаллизации при застывании трекового расплава, а следовательно, и от длительности существования трека в расплавленном состоянии. Вместе с тем для более подробного обсуждения эффекта скорости ионов в формировании треков необходимо проведение дополнительных исследований.

Таким образом, в работе показано, что при условии одинаковых потерь энергии морфология прерывистых треков в эпитаксиальных слоях $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ -сплавов сильно зависит от скорости ионов U^+ . Подтверждена кристаллическая структура трековых дефектов, а также показано формирование дислокационных петель вдоль ионных траекторий в случае прохождения медленных ионов.

Работа выполнялась при финансовом содействии Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф03МС-027), а также в рамках NATO LG (грант № 976564). Авторы выражают благодарность Дж. Хансену за выращивание слоев SiGe-сплавов методом МЛЭ.

1. Karamyan S. A. // Nuclear Tracks and Radiation Measurements. 1991. Vol. 18. P. 365.
2. Huber H., Assmann W., Karamian S. A. et al. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sect. B. 1998. Vol. 146. P. 309.
3. Marie P., Levalois M., Paumier E. // J. Appl. Phys. 1996. Vol. 79. P. 7555.

4. Antonova I.V., Dvurechenskii A.V., Karanovich A.A. et al. // Phys. Stat. Sol.(a) 1995. Vol. 147. P. K1.
5. Canut B., Bonardi N., Ramos S.M.M., Della-Negra S. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sect. B. 1998. Vol. 146. P. 296.
6. Colder A., Marty O., Canut B. et al. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sect. B. 2001. Vol. 174. P. 491.
7. Gaiduk P.I., Nylandsted Larsen A., Trautmann C., Toulemonde M. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. P. 045316.
8. Meftah A., Brisard F., Costantoni J.M. et al. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. P. 920.
9. Gaiduk P.I., Nylandsted Larsen A., Lundsgaard Hansen J. // Thin Solid Films. 2000. Vol. 367. P. 120.
10. Tischler Z., Budai J.D., Jesson D.E. et al. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. P. 10947.

Поступила в редакцию 04.11.2003.

Петр Иванович Гайдук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники.

Кристина Траутман – доктор, Центр исследований тяжелых ионов (Дармштадт, ФРГ).

Марсель Толемонд – доктор, Национальный центр исследований тяжелых ионов (Козен, Франция).

Арне Н. Ларсен – доктор, Институт физики и астрономии Орхусского университета (Дания).

УДК 541.15

А.М. КОЛОДИНСКИЙ, Н.Г. СОКОЛОВСКАЯ, В.В. ВОЙНА

РОСТ И ОБРАЗОВАНИЕ СМЕШАННЫХ КРИСТАЛЛОВ ИЗ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ В ПОЛЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

The research of process of crystallization of the mixed crystals from threefold systems $KCl - KBr - H_2O$, $KCl - NaCl - H_2O$, $KCl - CdCl_2 - H_2O$ in the field of X-rays was carried out. It is established, that X-ray radiation forms mixed crystals with more perfect structure and morphology of a surface. It was shown that the X-rays promotes insert of Cd^{2+} ions in a crystalline KCl.

Кристаллизация в многокомпонентных растворах всегда происходит в присутствии растворимых и нерастворимых примесей. При этом наблюдается воздействие друг на друга параллельно кристаллизующихся веществ, взаимное влияние компонентов на скорости зародышеобразования и роста, их взаимодействие, связанное с образованием различного рода твердых растворов, явление адсорбции одного вещества на поверхности растущих кристаллов другого и т. д. [1, 2].

Особого внимания заслуживает проблема влияния внешних факторов на рост кристаллов из водных растворов в присутствии примесей, в частности рентгеновского излучения на образование твердых растворов, или так называемых смешанных кристаллов.

Задача исследования заключалась в выявлении сходства и различий структуры, морфологии поверхности кристаллов хлорида калия и хлорида калия с примесью, выращенных в поле рентгеновского излучения.

Кристаллы KCl с примесью NaCl, KBr, $CdCl_2$ были получены из тройных водно-солевых систем $KCl - KBr - H_2O$, $KCl - NaCl - H_2O$, $KCl - CdCl_2 - H_2O$ методом медленного испарения в режиме свободной конвекции под действием рентгеновского излучения. Источником рентгеновских лучей являлась установка УРС 1.0, которая давала тормозное излучение в диапазоне

длин волн от 0,1 до 0,7 нм при напряжении 45 кВ на трубке с медным анодом и токе 10 мА. Интенсивность облучения составляла 820 кВт/см². Изучение влияния рентгеновского излучения на процесс роста кристаллов проводилось под микроскопом МП-3 в проходящем свете. Плотность кристаллов измеряли пикнометром. Во всех случаях кристаллы сушили при температуре 100 °С в течение 48 ч.

При кристаллизации из указанных тройных систем могут образовываться изоморфно-смешанные кристаллы с неограниченной и с ограниченной смесимостью. При этом рентгеновское излучение либо способствует появлению смешанных кристаллов и включению примесных ионов в кристаллическую решетку основного вещества, либо препятствует.

Первый вариант реализуется при кристаллизации из системы КСl – КВг – Н₂О [3]. В этом случае образуются смешанные кристаллы К(Cl, Вг), в структуре которых ионы К⁺ занимают вершины и центры граней кубической элементарной ячейки, а ионы Сl⁻ и Вг⁻ – середины ребер и центр ячейки, причем анионы распределены статистически [1–3].

Второй вариант можно наблюдать при образовании кристаллов из систем КСl – NaCl – Н₂О, КСl – CdCl₂ – Н₂О. Основной задачей здесь являлось изучение влияния рентгеновского излучения на границы смесимости исследуемых веществ.

Микроморфологический анализ показал, что при всех концентрациях ионов Вг⁻ в водном растворе КСl образуются кубы кристаллов с четкими гранями (рис. 1, 2).

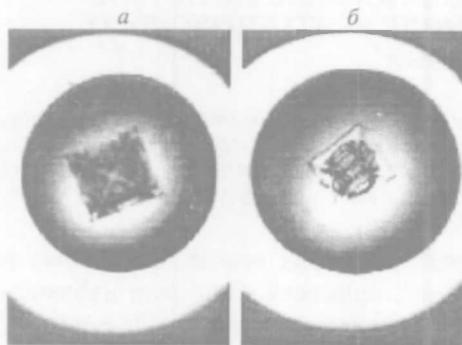


Рис. 1. Контрольные кристаллы К(Cl, Вг) с 10 % содержанием КВг в системе КСl – КВг – Н₂О:
а – без облучения, б – выращенные в поле рентгеновского излучения

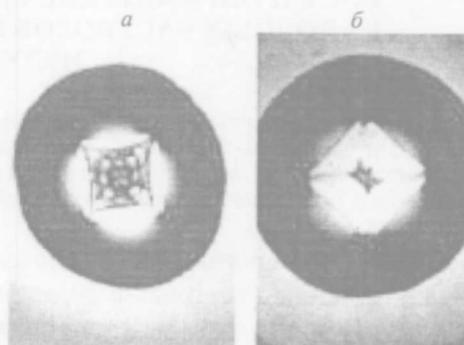


Рис. 2. Контрольные кристаллы К(Cl, Вг) с 70 % содержанием КВг в системе КСl – КВг – Н₂О:
а – без облучения, б – выращенные в поле рентгеновского излучения

Максимально деформированные кристаллы были получены при 30 % содержании раствора КВг в водном растворе КСl, при этом кристаллы, образованные в поле рентгеновского излучения, отличались совершенством формы и прозрачностью (рис. 1 б, 2 б). У необлученных же кристаллов хорошо просматривалось включение маточного рассола. По их расположению видно, что они образовывались на фронтах слабо развитых слоев. Такое отличие кристаллов, растущих под облучением, от контрольных (без воздействия рентгеновского излучения) указывает на различный механизм роста [4]. Рентгеновское излучение оказывает на рост кристаллов действие, аналогичное явлениям, наблюдаемым при более равновесных условиях. В этом случае питающие потоки обеспечивают достаточно стабильное снабжение

строительным материалом, не внося искажений в процесс отложения вещества [5], поэтому кристаллы растут с гладкой, без следов возмущения поверхностью.

Совсем иная картина наблюдалась в случае роста кристаллов из систем $KCl - NaCl - H_2O$. При концентрации $NaCl$, не превышающей 15 % в водном растворе KCl , в каплях как под излучением, так и без него образовывалось по одному кристаллику матового оттенка с характерным включением маточного рассола (рис. 3).

При изучении под микроскопом кристаллов KCl с исходной примесью 20 % $NaCl$ в растворе наблюдались агрегаты мелких непрозрачных молочно-белых кристаллов или же на единичных кристаллах отмечалось ориентированное нарастание совершенных прозрачных монокристаллов с прямыми ребрами и плоскими блестящими гранями (рис. 4). Облик смешанных кристаллов и их физические свойства сильно отличаются от свойств кристаллов KCl даже в том случае, если процент растворенной примеси очень мал, как это наблюдалось в случае выращивания кристаллов из водных растворов $KCl - NaCl - H_2O$. Объясняется это тем, что атом примеси, попадая в решетку на место атома основного вещества, в значительной степени искажает ее, что обуславливается отличием связи постороннего атома с атомами основного вещества от их связи между собой. При этом атомные радиусы примеси и основного вещества не равны [1].

Известно, что ионные кристаллы образуют твердые растворы, когда радиусы взаимозамещающихся ионов отличаются не более чем на 15 % [1]. При большей разнице образуются смешанные кристаллы с ограниченной смесимостью. Для KCl и KBr эта разница составляет 8,3 %, а для KCl и $NaCl$ – 26,3 % [6].

Влияние рентгеновского излучения на образование и рост смешанных кристаллов из систем компонентов с общими анионами и разновалентными катионами изучалось на системах $KCl - CdCl_2 - H_2O$. Исследование выращенных из этого раствора кристаллов показало, что при концентрации $CdCl_2$ до 0,1 % получаются правильные кубы. При более высоком содержании $CdCl_2$ в растворе (до 1 %) формировались кристаллы в виде трилистника жемчужно-белого цвета (рис. 5). При этом полученные в обычных условиях кристаллы отличались правильностью форм. В случае облучения они вырастали рыхлыми, а после извлечения их из кюветы – рассыпались (рис. 5 б).

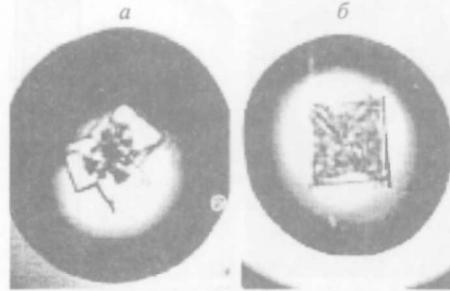


Рис. 3. Контрольный кристалл $(K, Na)Cl$ с 5 % содержанием $NaCl$ в системе $KCl - NaCl - H_2O$:
а – без облучения, б – выращенные в поле рентгеновского излучения

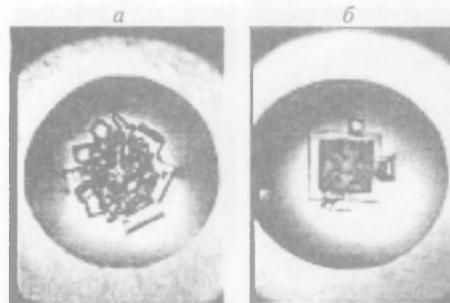


Рис. 4. Контрольный кристалл $(K, Na)Cl$ с 20 % содержанием $NaCl$ в системе $KCl - NaCl - H_2O$:
а – без облучения, б – выращенные в поле рентгеновского излучения

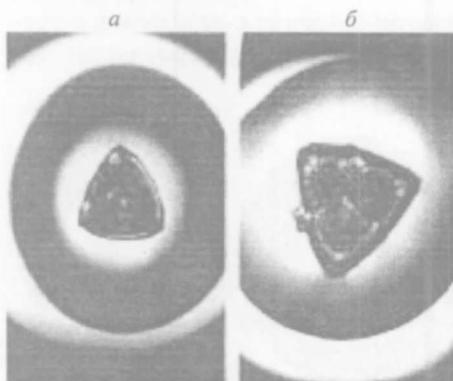


Рис. 5. Кристаллы, образованные из раствора $KCl - CdCl_2 - H_2O$ с исходным содержанием в нем 0,5 % $CdCl_2$:
a – без облучения, *б* – выращенные в поле рентгеновского излучения

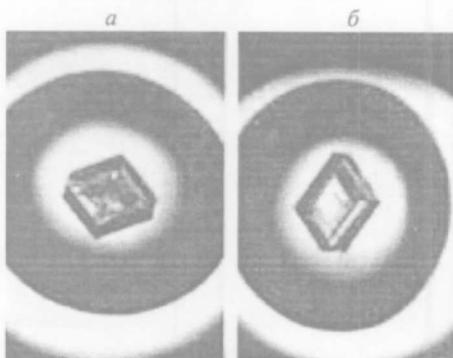


Рис. 6. Кристаллы, образованные из раствора $KCl - CdCl_2 - H_2O$ с исходным содержанием в нем 5 % $CdCl_2$:
a – без облучения, *б* – выращенные в поле рентгеновского излучения

При концентрации $CdCl_2$ от 1 до 10 % в $KCl - CdCl_2 - H_2O$ из раствора росли кристаллы в форме гексагональной призмы с ровными, равномерно развитыми гранями (рис. 6). На стадии зарождения наблюдались прямоугольные пластины с закругленными краями. Кристаллы, образованные в поле рентгеновского излучения, отличались прозрачностью и совершенством форм [7]. Такой различный механизм действия рентгеновского излучения на рост и образование кристаллов из тройных водно-солевых систем указывает на то, что излучение способствует включению примесных ионов в кристаллическую решетку основного вещества, тем самым изменяя границы смесимости и их физические свойства.

Для подтверждения данной гипотезы были измерены плотности кристалла при помощи пикнометра. На рис. 7, 8 приведены зависимости плотности кристаллов от процентного содержания ионов Na^+ , Br^- и Cd^{2+} в изучаемых системах. Из графиков видно, что облучение приводит к увеличению плотности смешанных кристаллов практически при всех исследуемых концентрациях. Обнаружено,

что с увеличением концентрации $NaCl$ в растворе KCl пикнометрическая плотность смешанных кристаллов $(K, Na)Cl$ уменьшается, что, по-видимому, связано с рыхлой структурой твердых растворов с ограниченной смесимостью. Степень совершенства таких кристаллов зависит от температуры их образования [8]. В то же время плотность кристаллов $K(Cl, Br)$ возрастает по мере увеличения количества ионов Br^- в растворе. Рост плотности кристаллов, полученных в поле рентгеновского излучения, по сравнению с необлученными может быть обусловлен снижением концентрации пор или меньшей величиной кристаллов.

Для подтверждения данного предположения некоторые кристаллы растирали в порошок, и затем определялась их плотность. Результаты измерений показали, что в этом случае плотность облученных и необлученных кристаллов была одинакова. Это является косвенным свидетельством улучшения структуры кристаллов, выращенных в поле рентгеновского излучения.

Из графика, представленного на рис. 8, видно, что у кристаллов, полученных из раствора $KCl - CdCl_2 - H_2O$ с исходным содержанием примеси до 1 %, в поле рентгеновского излучения плотность меньше по сравнению с необлученными. Минимальная плотность у облученных кристаллов наблюда-

ется при концентрации 0,2 % CdCl_2 в растворе, у необлученных – 0,5 %. Увеличение концентрации CdCl_2 вызывает рост плотности смешанных кристаллов, при этом ее максимальное значение приходится на 5 % CdCl_2 для облученных и 6 % – для необлученных.

Изучение процесса кристаллизации из водных растворов в поле рентгеновского излучения показало, что последнее воздействует также и на структуру кристаллов. Установлено, что ионизирующее излучение способствует включению примесных ионов Br^- , Na^+ , Cd^{2+} в кристаллическую решетку KCl .

В случае образования кристаллов из системы $\text{KCl} - \text{CdCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$ рентгеновское излучение способствует смещению положения границы смешимости в сторону уменьшения концентрации CdCl_2 в растворе KCl .

Наблюдаемое влияние облучения на формирование субструктуры является следствием сложного воздействия радиации на различные стороны процесса образования кристаллов, при этом необходимо учитывать физическое и химическое действие рентгеновских лучей на раствор и кристалл.

1. Пенкаля Т. Очерки кристаллохимии / Под ред. В.А. Франк-Каменецкого. Л., 1974.
2. Урусов В.С. Твердые растворы в мире минералов // Сорос. образоват. журн. 1996. № 11. С. 54.
3. Репникова Е.В. // Кристаллография. 2001. Т. 46. № 1. С. 108.
4. Круликовская М.П. // Физические основы рациональной технологии твердотельных электронных приборов. Киев, 1978. С. 79.
5. Колодинский А.М. // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2002. № 2. С. 83.
6. Китайгородский А.И. Смешанные кристаллы. М., 1983.
7. Анищик В.М., Колодинский А.М., Соколовская Н.Г., Война В.В. // ВИТТ-2003: Материалы V Междунар. конф. Мн., 2003. С. 14.
8. Новоселова А.В. Методы исследования гетерогенных равновесий. М., 1980.

Поступила в редакцию 03.12.2003.

Александр Макарович Колодинский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики ГрГУ им. Я. Купалы.

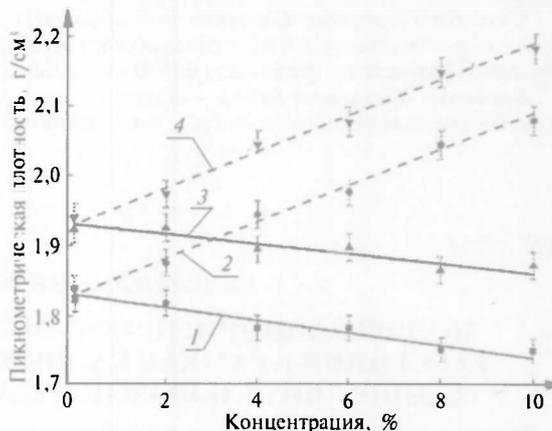


Рис. 7. Зависимость пикнометрической плотности кристаллов $\text{K}(\text{Cl}, \text{Br})$ и $(\text{Na}, \text{K})\text{Cl}$ от концентрации примесных ионов Br^- и Na^+ в системах $\text{KCl} - \text{KBr} - \text{H}_2\text{O}$ и $\text{KCl} - \text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$: 1, 2 – $(\text{Na}, \text{K})\text{Cl}$ и $\text{K}(\text{Cl}, \text{Br})$ без облучения, 3, 4 – $(\text{Na}, \text{K})\text{Cl}$ и $\text{K}(\text{Cl}, \text{Br})$, выращенные в поле рентгеновского излучения

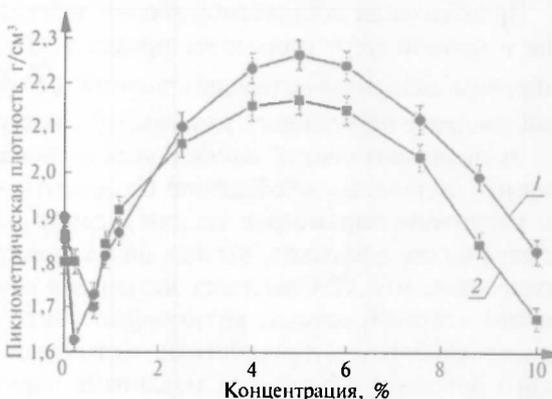


Рис. 8. Зависимость пикнометрической плотности смешанных кристаллов от концентрации CdCl_2 в системе $\text{KCl} - \text{CdCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$: 1 – выращенные в поле рентгеновского излучения и 2 – без облучения

Наталья Георгиевна Соколовская – аспирантка кафедры физики твердого тела БГУ. Научные руководители – А.М. Колодинский, доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета БГУ В.М. Анищик.

Владимир Васильевич Война – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей физики ГрГУ им. Я. Купалы.

УДК 539.12

Т.В. ШИШКИНА, И.Б. МАРФИН.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ АСИММЕТРИИ НЕУПРУГОГО РАССЕЙНИЯ В РАМКАХ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ НЕЙТРАЛЬНЫМ БОЗОНОМ

New types of electroweak asymmetries of deep inelastic scattering of polarized leptons with energies of 2–2000 GeV by polarized nucleons were calculated and analyzed in the quark-parton model. The results are obtained in framework of Standard Model and a set of gauge models of electroweak interaction with additional Z-boson. The comparison of asymmetries demonstrates that the difference in the results of gauge models increases with the energy of incidence scattering photons and reaches its maximal value for the largest possible scaling variable y .

Предсказания стандартной теории электрослабого взаимодействия, которая в полной мере описывает процессы с участием лептонов и адронов в широком диапазоне начальных энергий \sqrt{S} (от 100 ГэВ до 2–3 ТэВ) и значений квадрата переданного импульса Q^2 , постоянно подвергаются проверке.

Экспериментальный поиск новых физических явлений и разработка различных подходов к обобщению Стандартной Модели (СМ) направлены как на уточнение параметров теории Глэшоу – Вайнберга – Салама, так и на обнаружение эффектов, выходящих за рамки Модели. Как правило, предполагается, что СМ является исключительно низкоэнергетической эффективной теорией, которая не позволяет найти ответы на ряд вопросов теории электрослабого взаимодействия лептонов и адронов: 1) природы хиггсовского бозона и объяснения механизма нарушения симметрии; 2) экспериментального определения большого количества свободных параметров СМ; 3) объяснения причины нарушения четности в слабых взаимодействиях. Помимо этого, создание теории Великого Объединения остается одной из основных задач физики элементарных частиц.

Для решения перечисленных проблем возникает необходимость выхода за рамки СМ. Одним из вариантов увеличения возможностей теории электрослабого взаимодействия является использование расширенных калибровочных групп. Предположения, высказанные в рамках этих калибровочных теорий, могут быть согласованы с экспериментальными данными благодаря достаточно широкой области изменения дополнительных параметров в случае отклонения последних от СМ. Проверка различных калибровочных моделей с дополнительным нейтральным бозоном возможна в опытах по рассеянию поляризованных лептонов на неполяризованной нуклонной мишени лишь при достижении квадратом переданного импульса значений $\sim 10^{40}$ ГэВ², когда электрослабые асимметрии составляют десятки процентов [1]. В связи с этим актуальным является поиск дополнительной информации о структуре калибровочной группы электрослабого взаимодействия при исследовании процессов рассеяния с участием двух поляризованных частиц, например глубоконеупругого рассеяния (ГНР) поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах (см. соответствующие эксперименты на HERA [2, 3]). Ковариантный подход к расчету сечений процессов с

участием двух (и более) поляризованных частиц позволяет выполнять исследования, не зависящие от конкретной кинематики проводимых и планируемых экспериментов. В работах [4–7] нами были получены лоренц-инвариантные выражения дифференциальных сечений процесса электрослабого глубоконеупругого рассеяния поляризованных лептонов на мишени из поляризованных адронов в рамках ряда неминимальных калибровочных моделей с обменом двумя нейтральными бозонами, а также радиационных поправок низшего порядка к сечениям и поляризационным асимметриям.

Калибровочные модели электрослабого взаимодействия с дополнительным Z-бозоном

Взаимодействие между поляризованным лептоном и поляризованным нуклоном может быть представлено диаграммами Фейнмана (рис. 1).

Модель SU(3)×U(1). Лагранжиан электрослабого взаимодействия в данной модели имеет следующий вид:

$$L^{NC} = \frac{g \cos \theta_w}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \theta_w}} \{ X_\mu (\frac{1}{2} v_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e - \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u - \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d - \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d) + \frac{1}{2} t g^2 \theta_w Z_\mu (v_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e + \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u - \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d - 2J_{3,m}^\mu) \}.$$

Здесь X_μ и Z_μ – поля нейтральных калибровочных бозонов, $J_{3,m}^\mu$ – электромагнитный ток, θ_w – угол Вайнберга. Перейти к физическим бозонам можно, выполнив следующие ортогональные преобразования: $Z_1 = Z \cos \alpha - X \sin \alpha$, $Z_2 = Z \sin \alpha - X \cos \alpha$, где угол смешивания α принимает значения $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Массы физических бозонов равны соответственно $M_1 = 80$ ГэВ, $M_2 = 110$ ГэВ при $\alpha = -0,02\pi$.

Квадрат синуса угла Вайнберга $\sin^2 \theta_w$ в рамках обсуждаемой модели может принимать значения 0,18–0,30.

Модель SU(2)_L×SU(2)_R×U(1) характеризуется лагранжианом взаимодействия

$$L^{NC} = \frac{g \cos \theta_w}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \theta_w}} \{ X_\mu (\frac{1}{2} \bar{v}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u - \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d) + \frac{1}{2} t g^2 \theta_w Z_\mu (v_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e + \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u - \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d - 2J_{3,m}^\mu) \}$$

и соответствующими массами

$$M_1 = 96 \text{ ГэВ}, M_2 = 228 \text{ ГэВ при } \alpha = -0,02\pi, \sin^2 \theta_w = 0,16 - 0,34.$$

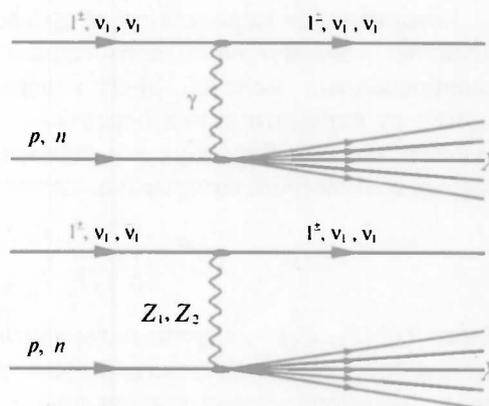


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана ГНР поляризованного лептона на нуклоне в неминимальных калибровочных моделях с двумя нейтральными бозонами

Модель $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ является более сложной для изучения, поскольку имеет три достаточно тяжелых нейтральных бозона [5–7]. В данной работе рассматривается случай, когда группа $SU(2)_R \times U(1)_R$ переходит в $U(1)$. При этом остаются лишь два тяжелых бозона:

$$L^{NC} = g \sin \theta_w Z'_1 (\bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e - \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u + \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 d) + \\ + \frac{g}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta_w}} Z'_2 (\frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e + \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u - \\ - \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d - 2 \sin^2 \theta_w \{-\bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e + \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d\}).$$

Массы определяются с помощью формул:

$$\frac{M_w^2}{M_1^2} = (1 - 2 \sin^2 \theta_w) (1 + \sqrt{\frac{\sin \theta_w^2 \cos \alpha}{1 - 2 \sin \theta_w^2 \sin \alpha}}), \\ \frac{M_w^2}{M_2^2} = (1 - 2 \sin^2 \theta_w) (1 - \sqrt{\frac{\sin \theta_w^2 \sin \alpha}{1 - 2 \sin \theta_w^2 \cos \alpha}}),$$

где $M_1 = 98$ ГэВ, $M_2 = 181$ ГэВ при $\alpha = -0,02\pi$.

Электрослабые асимметрии

Ковариантное выражение для дифференциального сечения ГНР поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах в рамках неминимальных калибровочных моделей [4–7] содержит существенную зависимость не только от кинематических переменных, но и от поляризаций взаимодействующих частиц. Варьируя эти переменные, можно получить ряд электрослабых асимметрий, которые определяются следующим общим выражением:

$$A^{e\omega} = \frac{\sigma^{e_1} (P_l, P_N) - \sigma^{e_2} (P_l, P_N)}{\sigma^{e_1} (P_l, P_N) + \sigma^{e_2} (P_l, P_N)},$$

Здесь $\sigma^j (P_l, P_N)$ – лоренц-инвариантное дифференциальное сечение рассеяния продольно-поляризованного лептона со степенью поляризации P_l на продольно-поляризованном нуклоне со степенью поляризации P_N . В этом случае 4-вектор поляризации нуклона $\eta = P_N (\mathbf{k}_1/E, 0)$, где \mathbf{k}_1 – импульс рассеиваемого лептона, E – его энергия, e_f – электрический заряд лептона.

Выражение (1) описывает все виды асимметрий, исследование которых возможно на базе продольно-поляризованных пучка и мишени, а также в случае взаимодействия двух поляризованных частиц инклюзивного лептон-нуклонного рассеяния. Последняя из указанных возможностей позволяет построить самый широкий набор электрослабых асимметрий [4–7]: поляризационных, зарядово-поляризационных и зарядовых.

Изучение масштаба и характера поведения электрослабых асимметрий рассеяния электронов и мюонов в области энергий от 2 ГэВ до 2 ТэВ в рамках СМ и неминимальных калибровочных моделей [7–27] обнаружило различный характер их зависимости от скейлинговых переменных x и y и значительное увеличение с ростом энергии. Данные асимметрии составляют несколько процентов при $E = 10$ – 100 ГэВ и несколько десятков процентов при достижении энергии в 2000 ГэВ, стремясь к наибольшим значениям в области максимальных x и y . Характер поведения всех асимметрий существенно зависит от знаков спиральностей взаимодействующих частиц. Асим-

метрии, построенные на основе сечений рассеяния лептонов и нуклонов, обладающих сонаправленными спинами, превышают по величине значения асимметрий с антипараллельными спинами во всей кинематической области. Сравнение предсказаний различных видов неминимальных калибровочных моделей обнаруживает, что наиболее благоприятными для их дискриминации являются значения $y > 0,6$ и $x < 0,7$, где различия могут достигать 100 % (особенно в случае рассеяния пучков отрицательно заряженных мюонов).

Наряду с обсуждаемыми традиционными видами электрослабых асимметрий при использовании ковариантных выражений сечений взаимодействия поляризованных лептонов и нуклонов в рамках расширенных калибровочных моделей могут быть предложены следующие дополнительные виды:

$$D_1^\pm = \frac{\sigma^{e^\pm}(0, 1) - \sigma^{e^\pm}(0, -1)}{\sigma^{e^\pm}(1, 1) - \sigma^{e^\pm}(1, -1)}, \quad D_2^\pm = \frac{\sigma^{e^\pm}(0, 1) - \sigma^{e^\pm}(0, -1)}{\sigma^{e^\pm}(-1, 1) - \sigma^{e^\pm}(-1, -1)},$$

$$F_1^\pm = \frac{\sigma^{e^\pm}(1, 0) - \sigma^{e^\pm}(-1, 0)}{\sigma^{e^\pm}(1, 1) - \sigma^{e^\pm}(-1, 1)}, \quad F_2^\pm = \frac{\sigma^{e^\pm}(1, 0) - \sigma^{e^\pm}(-1, 0)}{\sigma^{e^\pm}(1, -1) - \sigma^{e^\pm}(-1, -1)},$$

для которых обсуждаемые нами модели электрослабого взаимодействия дают результаты, существенно различающиеся в широкой кинематической области. Здесь $\sigma(0, \pm 1)$, $\sigma(\pm 1, 0)$ – дифференциальные сечения электрослабого глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах, полученные при следующих значениях спиральностей: $P_l=0$, $P_N=\pm 1$; $P_N=0$, $P_l=\pm 1$ соответственно.

Особое место в исследовании асимметрий занимают результаты модели $SU(2) \times U(1) \times [U(1)]'$, которые значительно отличаются от предсказаний всех остальных рассматриваемых моделей практически во всей кинематической области, в то время как предсказания на основе моделей $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ и $SU(3) \times U(1)$ очень близки между собой. На рис. 2 и 3 представлена зависимость рассматриваемых асимметрий D_1^\pm и F_2^\pm от скейлинговой переменной x . Рисунки демонстрируют хорошие перспективы дискриминации калибровочных моделей уже при сравнительно

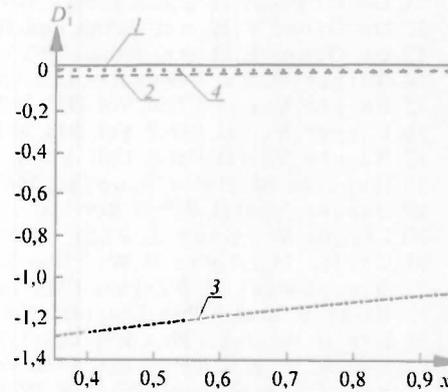


Рис. 2. Зависимость электрослабой асимметрии D_1^+ от скейлинговой переменной x . $E=100$ ГэВ, $Q^2=77$ ГэВ². 1 – CM, 2 – $SU(3) \times U(1)$, 3 – $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$, 4 – $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)_R$

небольшим значениям энергии $\sqrt{S}=100$ ГэВ, когда различия асимметрий превышают значение точности измерения в современных экспериментах, а эффекты высшего порядка теории возмущений еще не вносят определяющего вклада в дифференциальное сечение и асимметрии.

Выполненное нами исследование зависимостей асимметрий $D_{1,2}^\pm$ и $F_{1,2}^\pm$ от энергии показало, что и традиционные электрослабые асимметрии растут с энергией взаимодействия, пропорционально увеличиваются и различия в предсказаниях обсуждаемых калибровочных моделей с дополнительным нейтральным бозоном.

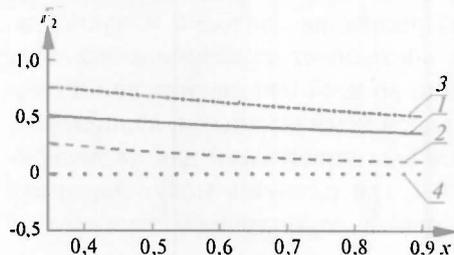


Рис. 3. Зависимость электрослабой асимметрии F_2^+ от скейлинговой переменной x .

$E=100$ ГэВ, $Q^2=77$ ГэВ². 1 – СМ, 2 – $SU(3)_C \times U(1)$, 3 – $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$, 4 – $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$

Отмеченные особенности электрослабых асимметрий в различных неминимальных калибровочных моделях предоставляют возможность проверки СМ и определения степени применимости альтернативных моделей в процессе анализа новых экспериментальных данных по неупругому рассеянию поляризованных лептонов и нуклонов. Возрастание асимметрий и различия предсказаний других калибровочных моделей при увеличении энергии частиц повышают воз-

можность дискриминации моделей в экспериментальных исследованиях.

1. Ruck R. // Phys. Lett. 1983. Vol. B129. P. 363; Nucl. Phys. 1984. Vol. B234. P. 91.
2. Cashmore R. J. et al. // Phys. Rep. 1985. Vol. 122. P. 275.
3. Martyn H. U. HERA Workshop. 1987. P. 801.
4. Кухто (Шишкина) Т. В., Шумейко Н. М. // ДАН БССР. 1985. Т. 29. С. 46.
5. Шишкина Т. В. Ковариантные методы в теоретической физике. Мн., 2001. Вып. 5. С. 172.
6. Shishkina T. V. // Nonlinear Phenomena in Complex System. 2002. Vol. 10. P. 261.
7. Shishkina T. V., Marfin I. B. // hep-ph/0212408.
8. Fritzsch M., Minkowski P. // Nucl. Phys. Vol. B103. № 1. P. 61.
9. Mohapatra R. N., Sidhu D. P. // Phys. Lett. 1977. Vol. 38. № 13. P. 667.
10. De Rujnle A. et al. // Ann. Phys. 1977. Vol. 109. № 1. P. 242.
11. De Groot E. H. et al. // Z. Phys. 1980. Vol. C5. № 2. P. 127.
12. De Groot E. H. et al. // Phys. Lett. 1979. Vol. B85. № 4. P. 399.
13. De Groot E. H. et al. // Ibid. 1980. Vol. B90. № 4. P. 427.
14. Barger V. et al. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. № 18. P. 1169.
15. Barger V. et al. // Ibid. Vol. D22. № 3. P. 727.
16. Barger V. et al. // Ibid. Vol. D94. № 3. P. 377.
17. Barger V. et al. // Ibid. 1981. Vol. 46. № 23. P. 1501.
18. Hayashi M. et al. // Nuovo Cim. 1983. Vol. A77. № 1. P. 76.
19. Barger V. et al. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. D25. № 5. P. 1384.
20. Liaofu V., Gang Z. // Lett. Nuovo Cim. 1985. Vol. 44. P. 319.
21. Cvetic M., Lynn B. W. // Phys. Rev. 1987. Vol. D35. № 1. P. 51.
22. Olechowski M. // Z. Phys. 1988. Vol. C37. № 3. P. 401.
23. Elias V. et al. // Phys. Lett. 1978. Vol. B73. № 4-5. P. 451.
24. Lee B. W. et al. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 36. № 22. P. 1237.
25. Lee B. W. et al. // Phys. Rev. 1978. Vol. D27. № 9. P. 2410.
26. Pati J. C. et al. Imperial College. 1977. (Preprint ICTP 176/II).
27. Elias V. et al. Technical reports. 1977. № 78-043, № 78-041.

Поступила в редакцию 30.12.2003.

Татьяна Викентьевна Шишкина – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики.

Игорь Борисович Марфин – аспирант кафедры теоретической физики. Научный руководитель – Т. В. Шишкина.

Математика и информатика



УДК 519.24

Н.Н. ДЕМЕШ, С.Л. ЧЕХМЕНОК

ПРИМЕНЕНИЕ СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ К ОЦЕНИВАНИЮ СПЕКТРОВ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

In this article a speed of convergence in probability of a smoothed periodogram to a spectral density of discrete stable process is investigated.

Рассмотрим комплекснозначный стационарный симметричный устойчивый с характеристическим показателем α , $0 < \alpha < 2$, случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, имеющий спектральное представление

$$X(t) = \int_{\Pi} e^{it\lambda} d\xi(\lambda), \quad (1)$$

где $\xi(\lambda)$ – комплекснозначный α -устойчивый случайный процесс с независимыми приращениями такой, что

$$\left[M |d\xi(\lambda)|^p \right]^{\frac{\alpha}{p}} = k(p, \alpha) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad 0 < p < \alpha, \quad \lambda \in \Pi = [-\pi; \pi],$$

где $k(p, \alpha)$ – некоторая положительная константа, а $\varphi(\lambda)$ – неотрицательная четная 2π -периодическая функция, которую будем называть спектральной плотностью процесса $X(t)$. При $\alpha=2$ функция $\varphi(\lambda)$ является спектральной плотностью в обычном смысле, а при $0 < \alpha < 2$ в задачах прогнозирования и фильтрации данная функция играет ту же роль, что и спектральная плотность для процессов второго порядка. Пусть

$$X(0), X(1) \dots X(T-1) \quad (2)$$

– T последовательных наблюдений за процессом $X(t)$, $t \in Z$, $T=2k(n-1)+1$,

$$n \in N = \{1, 2, \dots\}, \quad k \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup N.$$

В качестве оценки функции $f(\lambda) = [\varphi(\lambda)]^{\frac{\alpha}{p}}$, $\lambda \in \Pi$, рассмотрим сглаженную периодограмму вида

$$\hat{J}_T(\lambda) = \int_{\Pi} W_T(v) I_T(\lambda + v) dv, \quad (3)$$

где спектральное окно $W_T(v)$ представляет собой ядро Фейера, т. е.

$$W_T(\nu) = \frac{1}{2\pi M_T} \frac{\sin^2\left(\frac{M_T \nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\nu}{2}\right)},$$

в котором

$$M_T \in N, M_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty, \text{ но } \frac{M_T}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

а $I_T(\lambda)$ – модифицированная периодограмма наблюдений (2) за процессом $X(t), t \in Z$, вида

$$I_T(\lambda) = C(p, \alpha) |d_T(\lambda)|^p.$$

Здесь

$$d_T(\lambda) = A_T \operatorname{Re} \sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)} e^{-i\lambda m} h_k(m, n) X(m+n),$$

$$A_T = \left[\int_{\Pi} |H^{(T)}(\lambda)|^\alpha d\lambda \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$H^{(T)}(\lambda) = \sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)} h_k(m, n) \cos(m\lambda),$$

$h_k(m, n)$ – полиномиальное окно просмотра данных, для которого

$$|H_T(\mu)|^\alpha = |A_T H^{(T)}(\mu)|^\alpha = \frac{1}{B_{\alpha, T}} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\mu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)} \right|^{2k\alpha}, \quad (4)$$

где $B_{\alpha, T} = (A_T)^\alpha = \int_{\Pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\mu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)} \right|^{2k\alpha} d\mu, k = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup N$, а нормирующий коэф-

фициент $C(p, \alpha)$ определен аналогично [1]. Обозначим через $\varphi(\lambda) = \left[\hat{f}(\lambda) \right]^{\frac{\alpha}{p}}$.

Из [2] следует, что (3) является состоятельной оценкой для функции $\left[\varphi(\lambda) \right]^{\frac{p}{\alpha}}$ в смысле сходимости по вероятности. Исследуем скорость сходимости этой оценки. Введем в рассмотрение числовую последовательность L_T , удовлетворяющую следующим условиям:

$$L_T \in N, L_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty, \frac{M_T}{L_T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \text{ но } \frac{L_T}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Определение. Будем говорить, что $\varphi(\lambda), \lambda \in \Pi$, удовлетворяет в точке $\lambda_0 \in \Pi$ условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0; 1]$, если для любого λ , достаточно близкого к λ_0 , выполняется условие

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| \leq A(\lambda_0) |\lambda - \lambda_0|^\gamma, \quad (5)$$

где $0 < A(\lambda_0) < +\infty$.

Теорема. Пусть спектральная плотность $\varphi(\lambda), \lambda \in \Pi$, процесса $X(t), t \in Z$, ограничена на Π , удовлетворяет условию Гёльдера (5) в точке $\lambda_0 \in \Pi$, причем $\varphi(\lambda_0) > 0$, а $|H_T(\mu)|^\alpha$ определяется соотношением (4), тогда

$$a_n \{ \hat{\varphi}(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) \} \xrightarrow{P} 0,$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{\gamma(2k^2\alpha^2 - 1)}{2k^2\alpha^2 + 2k\alpha + 1} \frac{1}{\ln(n)} & \text{при } 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{n} \frac{2k^2\alpha^2}{2k^2\alpha^2 + 2k\alpha + 1} \frac{1}{\ln^2(n)} & \text{при } \gamma = 1 \end{cases}$$

для $k > \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

Доказательство. Имеем

$$M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 = D\hat{f}_T(\lambda_0) + (M\hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0))^2. \text{ Как показано в [3],}$$

$$\left| M\hat{f}_T(\lambda_0) - [\varphi(\lambda_0)]^\alpha \right|^2 = \begin{cases} O\left(\frac{1}{M_T^\gamma}\right), & \text{если } 0 < \gamma < 1, k > \frac{1+\gamma}{2\alpha}, \\ O\left(\frac{\ln M_T}{M_T}\right), & \text{если } \gamma = 1, k > \frac{1}{\alpha}. \end{cases} \quad (6)$$

В дальнейшем запись $x_T \equiv y_T$ будет означать, что $x_T - y_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Из [1] следует, что

$$D\hat{f}_T(\lambda_0) \underset{T \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2\pi}{L_T \Pi} \int_{\Pi} W_T^2(v) V(p, \alpha) [\psi_T(\lambda_0 + v)]^{2p} dv + \\ + \max_{\substack{s, r = -\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor \\ s \neq r}}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} \text{cov} \{ I_T(\lambda_0 + v_s); I_T(\lambda_0 + v_r) \} \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \left(\sum_{s=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} \sum_{r=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} W_T(v_s) W_T(v_r) \right),$$

$$\text{где } V(p, \alpha) = \frac{C(p, \alpha)}{C(2p, \alpha)} - 1, v_s = -\pi + \frac{2\pi}{L_T} s, v_r = -\pi + \frac{2\pi}{L_T} r,$$

$$\psi_T(\lambda) = \int_{\Pi} |H_T(v)|^\alpha \varphi(\lambda + v) dv. \text{ Поскольку } V(p, \alpha) [\psi_T(\lambda_0 + v)]^{2p} < +\infty \text{ и}$$

$$\frac{2\pi}{L_T \Pi} \int_{\Pi} W_T^2(v) dv \underset{T \rightarrow \infty}{\approx} \frac{M_T}{L_T} \int_{-\infty}^{\infty} k_T^2(x) dx, \text{ то}$$

$$\frac{2\pi}{L_T \Pi} \int_{\Pi} W_T^2(v) V(p, \alpha) [\psi_T(\lambda_0 + v)]^{2p} dv = O\left(\frac{M_T}{L_T}\right) = O(n^{-(\beta-q)}). \quad (7)$$

Рассмотрим

$$\left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \left(\sum_{\substack{s=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor \\ s \neq r}}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} \sum_{r=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} W_T(v_s) W_T(v_r) \right) \leq \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \left(\sum_{s=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} \sum_{r=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} W_T(v_s) W_T(v_r) \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{L_T} \sum_{s=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} W_T(v_s) \frac{2\pi}{L_T} \sum_{r=-\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{L_T}{2} \rfloor} W_T(v_r) \equiv \left(\int_{\Pi} W_T(v) dv \right)^2 = 1.$$

Пусть $M_T = n^{-q}$, $L_T = n^{-\beta}$. Из [1] известно, что

$$\text{cov}_{\substack{v_s, v_r=1, L_T \\ s \neq r}} \{I_T(\lambda_0 + v_s); I_T(\lambda_0 + v_r)\} = O \left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha} \right)} \right) \quad (8)$$

при $\beta < 1 - \frac{1}{2k^2\alpha^2}$, $\beta > q$. С учетом (7) и (8) получаем

$$D\hat{f}_T(\lambda_0) = O(n^{-(\beta-q)}) + O \left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha} \right)} \right). \quad (9)$$

Если $\gamma \in (0; 1)$, тогда с учетом (6) и (9) имеем

$$M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 = O(n^{-2q\gamma}) + O(n^{-(\beta-q)}) + O \left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha} \right)} \right).$$

Потребуем, чтобы все слагаемые в правой части последнего выражения стремились к нулю с одинаковой скоростью. Тогда

$$\begin{cases} 2q\gamma = \beta - q, \\ \beta - q = \frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \beta = \frac{(1+2\gamma)(2k^2\alpha^2-1)}{(2\gamma(1+2k\alpha)+2k^2\alpha^2(1+2\gamma))} \text{ и } \beta - q = \frac{\gamma(2k^2\alpha^2-1)}{\gamma(1+2k\alpha)+k^2\alpha^2(1+2\gamma)}.$$

$$\text{Следовательно, } M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 = O \left(n^{-\frac{\gamma(2k^2\alpha^2-1)}{\gamma(1+2k\alpha)+k^2\alpha^2(1+2\gamma)}} \right), \quad 2k^2\alpha^2 > 1.$$

Если $\gamma=1$, то с учетом (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 &= O(n^{-2q} \ln^2(n)) + O(n^{-(\beta-q)}) + O \left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha} \right)} \right) = \\ &= O(n^{-2q} \ln^2(n)) + O(n^{-(\beta-q)} \ln^2(n)) + O \left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha} \right)} \ln^2(n) \right). \end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 = O \left(n^{-\frac{2k^2\alpha^2-1}{3k^2\alpha^2+2k\alpha+1} \ln^2(n)} \right).$$

Применив неравенство $|x^q - y^q| \leq \frac{\alpha}{2} |x-y|(x^{q-1} + y^{q-1})$ при $q = \frac{\alpha}{p}$, $x, y > 0$, имеем

$$\left| \hat{\varphi}(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) \right| \leq \frac{\alpha}{2p} \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right| \left(\hat{f}_T^{\frac{\alpha}{p}}(\lambda_0) + f^{\frac{\alpha}{p}}(\lambda_0) \right), \quad (10)$$

где $\hat{f}_T^{\alpha-1}(\lambda_0) + f^{\alpha-1}(\lambda_0) \xrightarrow{P} 2f^{\alpha-1}(\lambda_0)$.

С учетом (10) для заданного $\varepsilon > 0$ получаем

$$P\left(a_n \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right| > \varepsilon\right) \leq \frac{a_n^2}{\varepsilon^2} M \left| \hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0) \right|^2 \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon^2} \frac{1}{\ln^2 n} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

1. Демеш Н. Н. // Применение полиномиальных ядер к оцениванию спектров дискретных устойчивых стационарных процессов. Препринт / АН УССР. Ин-т математики. № 88.64. Киев, 1988. С. 31.

2. Demesh N.N., Chekhmenok S.L. // Proceedings of the Six International Conference, Minsk, September 10–14, 2001. Minsk, 2001. P. 123.

3. Демеш Н. Н., Чехменок С. Л. // Статистический анализ данных и моделирование: Сб. тр. междунар. науч. конф. Мн., 2002. С. 35.

Поступила в редакцию 12.02.2003.

Николай Николаевич Демеш – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ИПМОАП.

Сергей Леонидович Чехменок – аспирант кафедры ИПМОАП. Научный руководитель – Н.Н. Демеш.

УДК 517.518.14, 517.927.21

С.А. МАРЗАН

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

A system of nonlinear equations of fractional order containing the Riemann – Liouville fractional derivative, is considered on a finite interval of the real axis in a weighted space of continuous functions. The equivalence of the Cauchy-type problem for such a system and of a system of nonlinear Volterra integral equations is established, and the existence and uniqueness of its solution is proved. The corresponding assertions for a system of ordinary differential equations are presented.

Пусть $I_{a+}^{\alpha} g$ и $D_{a+}^{\alpha} y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in C, \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

где $[\text{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\text{Re}(\alpha)$ [1, § 2.2, 2.4].

Рассмотрим задачу типа Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка

$$(D_{a+}^{\alpha_i} y_i)(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)] (i=1, \dots, m; n_i - 1 < \text{Re}(\alpha_i) < n_i, \bar{n}_i = -[\text{Re}(\alpha_i)]) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$(D_{a+}^{\alpha_i - h_j} y_i)(a+) = b_{ij} \in C \quad (i=1, \dots, m; j_i=1, \dots, n_i). \quad (4)$$

При $m=1$ задача (3) – (4) рассматривалась многими авторами (см. [1, § 42], [2]). Теоремы существования и единственности решения такой задачи в классе абсолютно интегрируемых функций $L(a, b)$ доказаны в [3], а в весовом классе непрерывных функций

$$C_{n-\alpha}[a, b] = \left\{ g(x) : \|g(x)\|_{C_{n-\alpha}} = \|(x-a)^{n-\alpha} g(x)\|_C < \infty \right\} \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$$

в [4]. Результаты работы [3] были перенесены в [5] на систему (3) – (4). Настоящая работа посвящена распространению результатов [4] на задачу типа Коши (3) – (4) в весовом классе вида

$$\overline{C}_{n-\alpha}[a, b] = C_{n-\alpha_1}[a, b] \times C_{n-\alpha_2}[a, b] \times \dots \times C_{n-\alpha_m}[a, b],$$

где $n_i - 1 < \operatorname{Re}(\alpha_i) < n_i, n_i = -[-\operatorname{Re}(\alpha_i)], i = 1, \dots, m$.

Наши исследования основаны на равносильности задачи (3) – (4) и соответствующей системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha_i - j + 1)} (x-a)^{\alpha_i - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_1(t), \dots, y_m(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

и применении метода последовательных приближений для доказательства существования и единственности решения задачи типа Коши (3) – (4).

Далее будем использовать обозначение

$$f_i[x, Y(x)] = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)] \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Теорема 1. Пусть $i=1, 2, \dots, m \in N, \alpha_i \in C, \operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$, функции $f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ действуют из $[a, b] \times Y$ в $R, Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m, Y_i \subset R (i=1, 2, \dots, m)$, а функции $(x-a)^{n_i-\alpha_i} f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ при фиксированных $y_i \in Y_i (i=1, 2, \dots, m)$ непрерывны по x на $[a, b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_m) \in [a, b] \times Y} |(x-a)^{n_i-\alpha_i} f_i[x, y_1, \dots, y_m]| = M_i < \infty. \quad (6)$$

Для того чтобы функции $y_1(x), \dots, y_m(x)$ являлись решением задачи типа Коши (3) – (4), необходимо и достаточно, чтобы они являлись решением системы интегральных уравнений (5).

Приведем схему доказательства. Так как $y_i(x) \in C_{n-\alpha_i}[a, b] (i=1, 2, \dots, m)$ и справедливы условия (6), то из (3) следует, что $(D_{a+}^{\alpha_i} y_i)(x) \in C_{n-\alpha_i}[a, b] (i=1, 2, \dots, m)$. А тогда в силу (2) и леммы 1 из [4], $(I_{a+}^{n_i-\alpha_i} y_i)(x) \in C_{n_i-\alpha_i}^{n_i}[a, b] (i=1, 2, \dots, m)$, где через $C_{n_i-\alpha_i}^{n_i}[a, b]$ обозначено пространство функций $g_i(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $(n-1)$ и имеющих производную порядка n_i , такую, что $g_i^{(n_i)}(x) \in C_{n-\alpha_i}[a, b]$. Это дает возможность воспользоваться леммой 5 из [4] с $\gamma = n_i - \alpha_i$. Применяя оператор $I_{a+}^{\alpha_i}$ к обеим частям каждого равенства (3), используя соотношения (15) из [4] и (4), учитывая (6) и лемму 2 из [4], согласно которой $(I_{a+}^{\alpha_i} f_i)[x, Y(x)] \in C_{n_i-\alpha_i}[a, b] (i=1, 2, \dots, m)$, мы приходим к системе интегральных уравнений (5). Обратно, если $y_i(x) \in C_{n-\alpha_i}[a, b] (i=1, 2, \dots, m)$ – решение системы интегральных уравнений (5), то применение оператора $D_{a+}^{\alpha_i}$ к обеим частям каждого уравнения системы (5) и использование леммы 4 из [4] и формулы [1 (2.35)] приводит к системе уравнений (3), а применение операторов $D_{a+}^{\alpha_i-k_i} (k_i \in N = \{1, 2, \dots\}, i=1, 2, \dots, m)$ к обеим частям уравнений системы (5) с использованием [1 (2.44)] и леммы 4 из [4] соответст-

венно при $1 \leq k_i \leq n_i - 1$ и $k_i = n_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) с последующим предельным переходом при $x \rightarrow a+$ к соотношениям (4).

Следствие 1. Пусть $i=1, \dots, m \in N$, $\alpha_i \in C$, $0 < \text{Re}(\alpha_i) \leq 1$, функции $f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ действуют из $[a, b] \times Y$ в R , $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$, $Y_i \subset R$ ($i=1, 2, \dots, m$), а функции $(x-a)^{n_i - \alpha_i} f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ при фиксированных $y \in Y_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) непрерывны по x на $[a, b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_m) \in [a, b] \times Y} |(x-a)^{n_i - \alpha_i} f_i[x, y_1, \dots, y_m]| = M_i < \infty. \quad (7)$$

Для того чтобы функции $y_1(x), \dots, y_m(x)$ являлись решением задачи типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha_i} y_i)(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)] \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

$$(I_{a+}^{1-\alpha_i} y_i)(a+) = b_i, \quad b_i \in C \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы они являлись решением системы интегральных уравнений

$$y_i(x) = \frac{b_i}{\Gamma(\alpha_i)} (x-a)^{\alpha_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_1(t), \dots, y_m(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (10)$$

Если $\alpha_i = n_i \in N$ ($i=1, 2, \dots, m$), то система дифференциальных уравнений (3) – (4) эквивалентна системе

$$y_i^{(n_i)}(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)] \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (11)$$

$$y_i^{(n_i - k_j)}(a) = b_{ij}, \quad b_{ij} \in C \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n_i - 1), \quad (12)$$

а система интегральных уравнений (5) эквивалентна системе

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{ij}}{(n_i - j_i)!} (x-a)^{n_i - j_i} + \frac{1}{(n_i - 1)!} \int_a^x \frac{f_i[t, y_1(t), \dots, y_m(t)] dt}{(x-t)^{1-n_i}} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (13)$$

Используя теорему 1, получаем следующее утверждение для задачи Коши (11) – (12).

Теорема 2. Пусть $i=1, 2, \dots, m$, $n_i \in N$, функции $f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ действуют из $[a, b] \times Y$ в R , $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$, $Y_i \subset R$ ($i=1, 2, \dots, m$), при фиксированных $y_i \in Y_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) непрерывны по x на $[a, b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_m) \in [a, b] \times Y} |f_i[x, y_1, \dots, y_m]| = M_i < \infty. \quad (14)$$

Для того чтобы функции $y_1(x), \dots, y_m(x)$ являлись решением задачи Коши (11) – (12), необходимо и достаточно, чтобы они являлись решением системы интегральных уравнений (13).

Следствие 2. Пусть $i=1, 2, \dots, m \in N$, и выполняются условия (14). Для того чтобы функции $y_1(x), \dots, y_m(x)$ являлись решением задачи Коши

$$y_i(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)], \quad y_i(a) = b_i, \quad b_i \in C \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы они являлись решением системы интегральных уравнений

$$y_i(x) = b_i + \int_a^x f_i[t, y_1(t), \dots, y_m(t)] dt \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (16)$$

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (3) – (4) в классе $C_{n-\alpha}[a, b]$ к условиям теоремы 1 добавим

два дополнительных условия: липшицевость $f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ ($i=1, 2, \dots, m$) относительно переменной y_i :

$$\begin{aligned} |f_i[x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_m] - f_i[x, Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_m]| < \\ < A_i |y_i - Y_i| \quad (i=1, 2, \dots, m; A_i > 0), \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$A_i (b-a)^{\operatorname{Re} \alpha_i} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha_i)) |\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]|}{|\Gamma(\alpha_i)| \Gamma[2 \operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]} < 1 \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (18)$$

Обозначим через $G_{m, n_m} [a, b]$ ($n \in N$) следующее пространство функций:

$$G_{m, n_m} [a, b] = \left\{ y_i(x) \in C_{n_i - \alpha_i} [a, b], \left\| y_i(x) - \sum_{j_i=1}^{n_i} \frac{b_{j_i} (x-a)^{\alpha_i - j_i}}{\Gamma(\alpha_i - j_i + 1)} \right\|_{C_{n_i - \alpha_i}} < d_i \right\}, \quad (19)$$

$$d_i \geq M_i (b-a)^{\operatorname{Re} \alpha_i} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha_i)) |\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]|}{|\Gamma(\alpha_i)| \Gamma[2 \operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]} \quad (i=1, 2, \dots, m; n_i = -[\operatorname{Re}(\alpha_i)]), \quad (20)$$

где постоянные b_{j_i} ($i=1, 2, \dots, m, j_i=1, \dots, n_i$) и M_i ($i=1, 2, \dots, m$) определяются в (4) и (6) соответственно.

Теорема 3. Пусть $i=1, 2, \dots, m, \alpha_i \in C, \operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$, функции $f_i[x, y_1, \dots, y_m]$ действуют из $[a, b] \times Y$ в $R, Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m, Y_i \subset R$ ($i=1, 2, \dots, m$), и выполняются условия (6), (17) и (18). Тогда существует единственное решение $y_i(t)$ задачи типа Коши (3) – (4) в пространстве $G_{m, n_m} [a, b]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать существование единственного решения $y_i(t) \in C_{n_i - \alpha_i} [a, b]$ ($i=1, 2, \dots, m$) системы интегральных уравнений (5). Существование такого решения доказывается методом последовательных приближений, если мы положим

$$\begin{aligned} y_{i0}(x) &= \sum_{j_i=1}^{n_i} \frac{b_{j_i}}{\Gamma(\alpha_i - j_i + 1)} (x-a)^{\alpha_i - j_i} \quad (i=1, 2, \dots, m), \\ y_{im_i}(x) &= y_{i0}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, Y_{im_i-1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i=1, 2, \dots, m; m_i=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

и покажем с помощью леммы 2 из [4] и условий теоремы справедливость неравенств

$$\|y_{im_i}(t) - y_{im_i-1}(t)\|_{C_{n_i - \alpha_i}} \leq M_i (A_i)^{m_i-1} \left((b-a)^{\operatorname{Re} \alpha_i} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha_i)) |\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]|}{|\Gamma(\alpha_i)| \Gamma[2 \operatorname{Re}(\alpha_i) - n_i + 1]} \right)^{m_i}$$

для каждого $i=1, 2, \dots, m$, из которых вытекает стремление всех последовательностей $y_{im_i}(x)$ к предельным функциям $y_i(x) \in C_{n_i - \alpha_i} [a, b]$:

$$\lim_{m_i \rightarrow \infty} \|y_{im_i}(t) - y_i(t)\|_{C_{n_i - \alpha_i}} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

являющимся решением системы уравнений (5). Единственность этого решения доказывается от противного: в предположении существования двух решений придем к неравенствам, обратным (18).

Таким образом, существует единственное решение $y_i(t) \in \overline{C_{n_i - \alpha_i}} [a, b]$ ($i=1, 2, \dots, m$) системы интегральных уравнений (5), а значит, и задачи типа Коши (3) – (4), что и доказывает теорему.

Если $\alpha_i = n_i \in N$, тогда условие (18) запишется в виде

$$\frac{A_i(b-a)^{n_i}}{n_i!} < 1 \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (21)$$

а (19) и (20) будут определены следующим образом:

$$G_{m,n_m}[a, b] = \left\{ y_i(x) \in C[a, b], \left\| y_i(x) - \sum_{j_i=1}^{n_i} \frac{b_{j_i}(x-a)^{n_i-j_i}}{(n_i-j_i)!} \right\|_C < d_i \right\}, \quad (22)$$

$$d_i \geq \frac{M_i(b-a)^{n_i}}{n_i!} \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (23)$$

где b_{j_i} ($i=1, 2, \dots, m, j_i=1, \dots, n_i$) определены в (4). Тогда из теоремы 3 получаем следующий результат для задачи Коши (11) – (12).

Теорема 4. Пусть $i=1, 2, \dots, m \in N$, и выполняются условия (14), (17) и (21). Тогда существует единственное решение $y_i(t)$ задачи Коши (11) – (12) в пространстве $G_{m,n_m}[a, b]$, определяемом (22) и (23).

Следствие 3. Пусть $i=1, 2, \dots, m \in N$, и выполняются условия (6), (17) и $A_i(b-a) < 1$ ($i=1, 2, \dots, m$),

тогда существует единственное решение $y(t) \in C[a, b]$ задачи Коши (15) в пространстве $G_{m,1}[a, b]$

$$G_{m,1}[a, b] = \left\{ y_i(x) \in C[a, b], \|y_i(x) - b_i\|_C \leq d_i \right\}, \quad (24)$$

где $d_i \geq M_i(b-a)$ ($i=1, 2, \dots, m$), а b_i ($i=1, 2, \dots, m$) определены в (15).

Если $0 < \text{Re} \alpha_i < 1$, то из (19) получим

$$G_{m,1}[a, b] = \left\{ y_i(x) \in C_{1-\alpha_i}[a, b], \left\| y_i(x) - \frac{b_i}{\Gamma(\alpha_i)}(x-a)^{\alpha_i-1} \right\|_{C_{1-\alpha_i}} \leq d_i \right\}, \quad (25)$$

где b_i ($i=1, 2, \dots, m$) определены в (9). Неравенства (18) и (20) примут соответственно вид

$$A_i(b-a)^{\text{Re} \alpha_i} \frac{\Gamma(\text{Re}(\alpha_i)) |\Gamma[\text{Re}(\alpha_i)]|}{|\Gamma(\alpha_i)| |\Gamma[2\text{Re}(\alpha_i)]|} < 1 \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (26)$$

$$d_i > M_i(b-a)^{\text{Re} \alpha_i} \frac{\Gamma(\text{Re}(\alpha_i)) |\Gamma[\text{Re}(\alpha_i)]|}{|\Gamma(\alpha_i)| |\Gamma[2\text{Re}(\alpha_i)]|} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (27)$$

С использованием теоремы 3 была получена

Теорема 5. Пусть $i=1, 2, \dots, m \in N$, $\alpha_i \in C$, $0 < \text{Re} \alpha_i < 1$, и выполняются условия (7), (17) и (26). Тогда существует единственное решение $y_i(x)$ задачи типа Коши (8) – (9) в пространстве $G_{m,1}$, определяемом (25) и (27).

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

2. Kilbas A.A., Trujillo J.J. // Appl. Analysis. 2001. Vol. 78. № 1-2. P. 153.

3. Kilbas A.A., Bonilla V., Trujillo J.J. // Demonstratio Math. 2000. Vol. 33. № 3. P. 583.

4. Килбас А.А., Бонилла В., Трухилло Х. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 6. С. 18.

5. Bonilla V., Kilbas A.A., Trujillo J.J. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 38.

Поступила в редакцию 10.02.2003.

Сергей Андреевич Марзан – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.А. Килбас.

**АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА
ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ***

The explicit form of the Auto-Becklund transformations and functional relation between solutions of the Third Painlevé equation are obtained.

Рассмотрим третье уравнение Пенлеве

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^2 + \frac{\delta}{w}, \quad (P_3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – параметры и выполняется условие $\gamma\delta \neq 0$.

Для решений $w = \varphi(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ уравнения (P₃) известны преобразования [1]
 $T_1(\sigma_1, \sigma_2): \varphi \rightarrow \bar{\varphi}(z, \alpha\sigma_1\sigma_2, \beta\sigma_1^{-1}\sigma_2, \gamma\sigma_1'\sigma_2', \delta\sigma_1^{-2}\sigma_2^2) := \sigma_1^{-1}\varphi(\sigma_2 z, \alpha, \beta, \gamma, \delta),$

$$T_2: \varphi \rightarrow \bar{\varphi}(z, -\beta, -\alpha, -\delta, -\gamma) := (\varphi(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta))^{-1}, \quad (1)$$

$$T_3: \varphi(z, \alpha, \beta, 0, 0) \rightarrow \varphi(z, 0, 0, 2\alpha, 2\beta) := (\varphi(z^2, \alpha, \beta, 0, 0))^{1/2}.$$

Очевидно, что при помощи масштабного преобразования $T_1(\sigma_1, \sigma_2)$ два ненулевых параметра уравнения (P₃) можно фиксировать. Поэтому далее без ограничения общности будем считать $\gamma = -\delta = 1$ и рассматривать уравнение

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + w^3 - \frac{1}{w}. \quad (2)$$

Для уравнения (2) существуют преобразования Беклунда [2]

$$T_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}: w(z, \alpha, \beta) \rightarrow \bar{w}(z, \alpha, \beta), \quad \epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = 1,$$

которые по известному решению позволяют строить новые решения при новых значениях параметров. В явной форме эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} T_{1,1,-1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, 2+\beta, -2+\alpha) = w + \frac{(\beta-\alpha+2)w^2}{zw' - w^2z - (1+\beta)w + z}, \\ T_{1,-1,1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, 2-\beta, 2-\alpha) = w + \frac{(\beta+\alpha-2)w^2}{-zw' + w^2z + (1-\beta)w + z}, \\ T_{1,-1,-1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, 4-\alpha, -\beta) = T_{1,-1,1} \circ T_{1,1,-1}, \\ T_{1,1,-1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, -2-\beta, -2-\alpha) = w + \frac{(\beta+\alpha+2)w^2}{zw' + w^2z - (1+\beta)w + z}, \\ T_{1,-1,1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, -2+\beta, 2+\alpha) = w - \frac{(\beta-\alpha-2)w^2}{zw' + w^2z - (1-\beta)w - z}, \\ T_{-1,-1,-1}: w(z, \alpha, \beta) &\rightarrow \bar{w}(z, -4-\alpha, -\beta) = T_{-1,-1,1} \circ T_{1,1,-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

В [3] на основе преобразований (3) приведены примеры построения автопреобразований Беклунда, позволяющих по известным решениям уравнения (2) строить новые решения при тех же значениях параметров, что и исходное решение. В [1] дана общая схема построения автопреобразований уравнения (2). В настоящей работе мы выписываем автопреобразования в явной форме, а для некоторых специальных значений параметров даем явные функциональные соотношения между решениями.

* Авторы статьи – сотрудники кафедры дифференциальных уравнений.

Теорема. Пусть $w = w(z, \alpha, \beta)$ – решение уравнения (2) при фиксированных значениях параметров α, β с условием $\alpha + \beta \varepsilon = 4m\mu, \varepsilon = \mu = 1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда функции

$$\bar{w}(z, \alpha, -\alpha + 4m) = T_{-1,1}^m T_2 T_{-1,1}^m w(z, \alpha, -\alpha + 4m), \quad (4)$$

$$\bar{w}(z, \alpha, -\alpha - 4m) = T_{-1,1}^m T_2 T_{-1,1}^m w(z, \alpha, -\alpha - 4m), \quad (5)$$

$$\bar{w}(z, \alpha, \alpha - 4m) = T_{1,1}^m T_1(-1, 1) T_{1,1}^m w(z, \alpha, \alpha - 4m), \quad (6)$$

$$\bar{w}(z, \alpha, \alpha + 4m) = T_{-1,-1}^m T_1(-1, 1) T_{-1,-1}^m w(z, \alpha, \alpha + 4m) \quad (7)$$

также являются решениями уравнения (2) при тех же значениях параметров, что и решение $w(z, \alpha, \beta)$. Если при этом $w(z, \alpha, \beta)$ нерациональное решение, то $\bar{w}(z, \alpha, \beta) \neq w(z, \alpha, \beta)$.

Доказательство. Функции $\bar{w}(z, \alpha, \beta)$ из (4) – (7) есть решения уравнения (2), так как они построены на основе (1) и (3), преобразующих решения в решения уравнения (2). Совпадение параметров «нового» и «старого» решений легко доказывается методом индукции по m . Действительно, при $m = 0$ автопреобразования вырождаются в простые симметрии (1), а при $m = 1$ легко проверяемы с помощью (1) и (3). Предположим справедливость (4) – (7) при $m = n, n > 1$, тогда утверждение теоремы доказывается однократным применением соответствующего автопреобразования к решению $\bar{w}(z, \alpha, -\alpha \varepsilon + 4n\mu)$.

Пример. Рассмотрим решение $w(z, 3, 1) = \frac{z \cosh(z)}{\cosh(z) - z \sinh(z)}$ из однопараметрического семейства решений уравнения (2) [1], порожденного уравнением Риккати

$$w' = w^2 + \frac{\alpha - 1}{z} w - 1, \quad \alpha - \beta = 2.$$

Тогда согласно (4), применяя автопреобразование $T_{1,-1,1} T_2 T_{1,-1,1}$, находим новое решение $\bar{w}(z, 3, 1) = \frac{z \sinh(z)}{-z \cosh(z) + \sinh(z)}$.

Замечание. Автопреобразования (4), (5) являются обобщением простой симметрии T_2 уравнения (2) с параметрами $(\alpha, -\alpha)$ на множество параметров $(\alpha, -\alpha \pm 4m)$. Аналогично (6), (7) есть обобщение простой симметрии

$$S_1 := T_2 T_1(-1, 1): w(z, \alpha, \alpha) \rightarrow w^{-1}(z, \alpha, \alpha)$$

уравнения (2) на множество параметров $(\alpha, \alpha \pm 4m)$.

Найдем явное соотношение между решениями $w = w(z, \alpha, \beta)$ и $\bar{w}(z, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, порожденными (4) при $\beta = 4 - \alpha$. В соответствии с теоремой новое решение $\bar{w}(z, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ будем строить по следующей схеме:

$$w(z, \alpha, 4 - \alpha) \xrightarrow{T_{1,-1,1}} w_1(z, \alpha - 2, 2 - \alpha) \xrightarrow{T_2} w_2(z, \alpha - 2, 2 - \alpha) \xrightarrow{T_{1,-1,1}} \bar{w}(z, \alpha, 4 - \alpha).$$

Здесь в соответствии с (1) и преобразованиями (3)

$$w_1 := w_1(z, \alpha - 2, 2 - \alpha) = T_{1,-1,1} w(z, \alpha, 4 - \alpha) = w + \frac{2w^2}{-zw' + zw'' + (\alpha - 3)w + z}, \quad (8)$$

$$w_2 := w_2(z, \alpha - 2, 2 - \alpha) = w^{-1}(z, \alpha - 2, 2 - \alpha), \quad (9)$$

$$\bar{w}(z, \alpha, 4 - \alpha) := T_{1,-1,1} w_2(z, \alpha - 2, 2 - \alpha) = w_2 + \frac{-2w_2^2}{-zw_2' + zw_2'' + (\alpha - 1)w_2 + z}. \quad (10)$$

Подставляя в правую часть (10) последовательно значения w_2 через w_1 из (9) и w_1 через w из (8), находим в явной форме соотношение между «новым» решением $\bar{w}(z, \alpha, 4-\alpha)$ и «старым» решением $w=w(z, \alpha, 4-\alpha)$

$$\bar{w}(z, \alpha, 4-\alpha) = \frac{Q_0(z, w) + Q_1(z, w)w' + Q_2(z, w)(w')^2 + Q_3(z, w)(w')^3 + Q_4(z, w)(w')^4}{P_0(z, w) + P_1(z, w)w' + P_2(z, w)(w')^2 + P_3(z, w)(w')^3 + P_4(z, w)(w')^4},$$

где

$$Q_0(z, w) = z^4 + w^8 z^4 + w^7(-6z^3 + 4z^3 \alpha) + w^6(20z^2 + 4z^4 - 22z^2 \alpha + 6z^2 \alpha^2) + w^5(-42z - 26z^3 + 56z \alpha + 12z^3 \alpha - 26z \alpha^2 + 4z \alpha^3) + w^4(27 + 80z^2 + 6z^4 - 54\alpha - 60z^2 \alpha + 36\alpha^2 + 12z^2 \alpha^2 - 10\alpha^3 + \alpha^4) + w^3(-90z - 34z^3 + 96z \alpha + 12z^3 \alpha - 34z \alpha^2 + 4z \alpha^3) + w^2(60z^2 + 4z^4 - 38z^2 \alpha + 6z^2 \alpha^2) + w(-14z^3 + 4z^3 \alpha),$$

$$Q_1(z, w) = -2z^4 - 2w^6 z^4 + w^5(8z^3 - 6z^3 \alpha) + w^4(-26z^2 - 6z^4 + 24z^2 \alpha - 6z^2 \alpha^2) + w^3(36z + 32z^3 - 42z \alpha - 12z^3 \alpha + 16z \alpha^2 - 2z \alpha^3) + w^2(-66z^2 - 6z^4 + 40z^2 \alpha - 6z^2 \alpha^2) + w(24z^3 - 6z^3 \alpha),$$

$$Q_2(z, w) = 2w^3 z^3 + w^2(6z^2 - 2z^2 \alpha) - 6wz^3,$$

$$Q_3(z, w) = 2z^4 + 2w^2 z^4 + w(-4z^2 + 2z^3 \alpha),$$

$$Q_4(z, w) = -z^4;$$

$$P_0(z, w) = w^9 z^4 + w^8(-2z^3 + 4z^3 \alpha) + w^7(4z^2 + 4z^4 - 10z^2 \alpha + 6z^2 \alpha^2) + w^6(-6z - 14z^3 + 16z \alpha + 12z^3 \alpha - 14z \alpha^2 + 4z \alpha^3) + w^5(3 + 32z^2 + 6z^4 - 10\alpha - 36z^2 \alpha + 12\alpha^2 + 12z^2 \alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4) + w^4(-22z - 22z^3 + 40z \alpha + 12z^3 \alpha - 22z \alpha^2 + 4z \alpha^3) + w^3(28z^2 + 4z^4 - 26z^2 \alpha + 6z^2 \alpha^2) + w^2(-10z^3 + 4z^3 \alpha) + wz^4,$$

$$P_1(z, w) = -2w^7 z^4 - 6w^6 z^3 \alpha + w^5(-2z^2 - 6z^4 + 8z^2 \alpha - 6z^2 \alpha^2) + w^4(4z + 16z^3 - 10z \alpha - 12z^3 \alpha + 8z \alpha^2 - 2z \alpha^3) + w^3(-26z^2 - 6z^4 + 24z^2 \alpha - 6z^2 \alpha^2) + w^2(16z^3 - 6z^3 \alpha) - 2wz^4,$$

$$P_2(z, w) = 6w^4 z^3 + w^3(-2z^2 + 2z^2 \alpha) - 2w^2 z^3,$$

$$P_3(z, w) = 2wz^4 + 2w^3 z^4 + w^2(-4z^3 + 2z^3 \alpha),$$

$$P_4(z, w) = -wz^4.$$

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.

2. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 373.

3. Он же // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 1. С. 17.

Поступила в редакцию 03.02.2003.

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой.

Лариса Леонидовна Голубева – старший преподаватель.

УДК 517.925

С.Л. СОБОЛЕВСКИЙ

ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОГО КЛАССА ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

A special class of irrational ordinary differential equations of the third order is considered. Necessary and sufficient conditions of its freedom from movable critical singularities are obtained.

Следуя [1, 2], биномиальными дифференциальными уравнениями будем называть уравнения вида

$$w^{(n)} = \sqrt[n]{K(w^{t-1}, w^{t-2}, \dots, w, z)},$$

где t – натуральное число, большее 1. R – рациональная функция по w и его производным с аналитическими по z коэффициентами. В [1, 2] найдены все классы биномиальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей. В настоящей работе рассмотрен один частный слу-

чай биномиальных уравнений третьего порядка, а именно дифференциальное уравнение вида

$$w''' = (w'' + l_1(z)w' + l_2(z)w + l_3(z))^r P(w', w, z), \quad (1)$$

где w – комплексная зависимая переменная, z – комплексная независимая переменная, r – положительное рациональное число, $l_j(z)$, $j = 0...3$, – функции, аналитические в некоторой односвязной области U комплексной плоскости, P – полином по w , w' с аналитическими по z в области U коэффициентами. Найдем все уравнения класса (1) без подвижных критических особых точек.

Получим сначала необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (1) в следующем виде.

Теорема. Для того чтобы решения уравнения (1) не допускали подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы это уравнение имело один из следующих видов:

- A. $w''' = a(z)(w'' + l_1(z)w' + l_2(z)w + l_3(z))$;
- B. $w''' = a(z)(h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{\nu}$;
- C. $w''' = a(z)(h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{\nu}$;
- D. $w''' = (h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{1/2} (a(z)w' + b(z)w + c(z))$;
- E. $w''' = (h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{2/3} (a(z)w' + b(z)w + c(z))$.

Здесь $h(z)$ – не тождественно равный нулю полином не выше второй степени, ψ – комплексное число, ν – произвольное натуральное число, большее 1, a, b, c, d – функции, аналитические в области U , за исключением разве что нулей полинома h , причем функция a отлична от тождественного нуля.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется вытекающая из теоремы 3 [3] следующая

Лемма. Для того чтобы уравнение (1) не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы:

- 1) при нецелых r выполнялись соотношения $l_1(z) \equiv -h'(z)/h(z)$, $l_2(z) \equiv h''(z)/h(z)$, $l_3(z) \equiv \psi/h(z)$, где h – ненулевой полином не выше второго порядка, ψ – комплексное число;
- 2) при $r < 1$ имело место соотношение $r = 1 - 1/\nu$, где ν – натуральное число, большее 1.

Предположим, что уравнение (1) не имеет подвижных критических особых точек. Отдельно рассмотрим случай $P = P(z)$. Тогда при $r = 1$ для уравнения (1) будем иметь уравнение А, при $r < 1$ на основании леммы – уравнение В, а при $r > 1$ на основании леммы уравнение (1) примет вид $w''' = a(z)(h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^r$, где a, h, ψ определены, как в лемме. Положим $u = h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi$. Будем иметь $u' = a(z)h(z)u^r$, откуда $u = \left((1-r) \int a(z)h(z)dz + C \right)^{1/(1-r)}$, где C – произвольная комплексная константа. Для того чтобы данное решение не допускало подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы $r = 1 + 1/\nu$, где ν – произвольное натуральное число, большее единицы. При этих условиях имеем уравнение С.

Пусть теперь полином P существенно зависит от w или w' . Положим $P(w', w, z) = \sum_{k=(k_1, k_2) \in K} p_k(z)(w')^{k_1} w^{k_2}$, где p_k – аналитические не тождественно

равные нулю в области U функции, K – множество мультииндексов, отличное от $\{(0, 0)\}$. Покажем сначала, что для всех k имеет место неравенство $2r+k_1 < 3$. Предположим обратное. Введем замену переменной $w = w_0 + \alpha' u$, $z = z_0 + \alpha x$, где t – положительное рациональное число, z_0 – произвольная точка области U , w_0 – произвольное комплексное число, а α – комплексный параметр. Будем иметь

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (u'' + O(\alpha))^r \left(\sum_{k \in K} \alpha^{3-2r-k_1+t(r+k_1-1)} p_k(z_0 + O(\alpha)) ((u')^{k_1} w_0^{k_2} + O(\alpha)) \right), \quad (2)$$

где $O(\alpha)$ – здесь и далее бесконечно малая при $\alpha \rightarrow 0$ величина, причем $O(\alpha)/\alpha$ ограничено при $\alpha \rightarrow 0$.

Положим $t = \max_{k, 2r+k_1 > 3} \frac{2r+k_1-3}{r+k_1-1}$. Определенное таким образом t является по-

ложительным рациональным числом, меньшим 2, так как $2r+k_1-3 < 2(r+k_1-1)$.

Обозначим множество всех k , для которых $t = \frac{2r+k_1-3}{r+k_1-1}$, через K_0 .

Пусть $t \neq 1$. Тогда для всех $k \in K_0$ компонента k_1 принимает одно и то же значение, и упрощенное уравнение (2) при $\alpha=0$ имеет вид $\frac{d^3 u}{dx^3} = \lambda (u'')^r (u')^{k_1}$,

где $\lambda = \sum_{k \in K_0} p_k(z_0) w_0^{k_2}$. Выберем z_0, w_0 так, чтобы $\lambda \neq 0$. Последнее уравнение

допускает решения вида $u = \eta(x+C)'$, где C – произвольная комплексная константа, $\eta = (t^{1-k_2-r} (t-1)^{1-r} (t-2))^{1/(1-k_2-r)}$. Следовательно, при $t \neq 1$ уравнение (2) при $\alpha=0$ допускает подвижные критические особые точки, а значит, в этом случае их допускают и уравнение (2) при $\alpha \neq 0$, а также исходное уравнение (1).

Пусть теперь $t=1$. Тогда имеем $r=2$, а множество K_0 содержит все k . Упрощенное уравнение (2) при $\alpha=0$ принимает вид

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (u'')^2 \left(\sum_{k \in K_0} p_k(z_0) w_0^{k_2} (u')^{k_1} \right). \quad (3)$$

При подходящем выборе z_0, w_0 правая часть последнего уравнения не обращается тождественно в нуль. Это уравнение после замены $v = u'$ становится хорошо известным уравнением второго порядка вида $v'' = (v')^2 \varphi(v)$, которое при ненулевой функции φ , не имеющей полюсов, всегда допускает подвижные критические особые точки [4]. Следовательно, в этом случае их допускает и уравнение (1).

Итак, мы установили, что $2r+k_1 < 3$ для всех k . Введем замену переменной $w = \alpha' u$, $z = z_0 + \alpha x$, где t – неотрицательное рациональное число, z_0 – произвольная точка области U , а α – комплексный параметр. Будем иметь

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (u'' + O(\alpha))^r \left(\sum_{k=(k_1, k_2)} \alpha^{3-2r-k_1-t(r+k_1+k_2-1)} p_k(z_0 + O(\alpha)) (u')^{k_1} u^{k_2} \right). \quad (3)$$

Положим $t = \min_{k \neq (0,0)} \frac{3-2r-k_1}{r+k_1+k_2-1}$. Несложно видеть, что определенное таким

образом t является неотрицательным рациональным числом, не превосходящим 4, поскольку в силу леммы $r > 1/2$ и, следовательно,

$t \leq \frac{3-2r}{r+1-1} \leq \frac{2}{1/2} = 4$. Обозначим множество всех k , для которых

$t = \frac{3 - 2r - k_1}{r + k_1 + k_2 - 1}$, через K_0 . Упрощенное уравнение (3) при $\alpha=0$ имеет вид

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (u'')^r \left(\sum_{k \in K_0} p_k(z_0) (u')^k u^{k_2} \right). \quad (4)$$

Выберем z_0 таким образом, чтобы правая часть уравнения (4) не обращалась тождественно в нуль. Тогда уравнение (4) допускает семейство решений вида $u = \eta(x+C)^{-t}$, где C – произвольная комплексная постоянная, а η – произвольное решение уравнения $-t \cdot (t+1)^{1-r} (t+2)\eta = \sum_{k \in K_0} p_k(z_0) (-t)^k \eta^{1+t_2}$.

Последнее уравнение всегда имеет ненулевые решения. Следовательно, при целом t уравнение (4), а значит, и исходное уравнение (1) допускают подвижные критические особые точки.

Таким образом, $t=0, 1, 2, 3, 4$. Пусть сначала $t=0$. Тогда с учетом леммы имеем либо $r=1$ и $\max k_i = 1$, либо $r=1/2$ и $\max k_i = 2$. Уравнение (4) имеет

вид $u''' = u' u' g(u)$ или $u''' = \sqrt{u''} (u')^2 g(u)$ соответственно, где g – не тождественно равный нулю полином. Пусть g_0 – старший коэффициент полинома g , а M – его степень. В первом уравнении, положив $u = \alpha^{-1} v$, $u' = \omega$, $x = \alpha^m \xi$, будем иметь $\frac{d^2 \omega}{d\xi^2} = \frac{d\omega}{d\xi} \omega v^{-m} g_0 + O(\alpha)$, $\frac{dv}{d\xi} = \alpha^{m+1} \omega$. Во втором уравнении, поло-

жив $u = \alpha^{-3} v$, $u' = \omega$, $x = \alpha^{2m} \xi$, будем иметь $\frac{d^2 \omega}{d\xi^2} = \sqrt{\frac{d\omega}{d\xi}} \omega^2 v^{-m} g_0 + O(\alpha)$,

$\frac{dv}{d\xi} = \alpha^{3m+2} \omega$. Первая из полученных систем допускает решение вида

$\omega = k/(\xi+C) + O(\alpha)$, $v = \alpha^{M+1} k \ln(\xi+C) + O(\alpha)$, а вторая – $v = \alpha^{3M+2} k \ln(\xi+C) + O(\alpha)$, где k – ненулевое комплексное число, C – произвольная комплексная постоянная. Таким образом, полученные системы, а значит, и исходные уравнения так же, как и уравнение (4), допускают подвижные критические особенности. Следовательно, случай $t=0$ невозможен.

С учетом леммы несложно видеть, что случай $t=4$ возможен лишь при $r=1/2$, $P(w', w', z) = a(z)w + b(z)$ (частный случай уравнения D), случай $t=3$ невозможен, случай $t=2$ возможен при $r=3/4$, $P(w', w, z) = a(z)w + b(z)$ или $r=1/2$, $P(w', w, z) = a(z)w' + b(z)w + c(z)$ (уравнение D), а случай $t=1$ при $r=2/3$, $P(w', w, z) = a(z)w' + b(z)w^2 + c(z)w + d(z)$ (уравнение, переходящее в E при $b(z) \equiv 0$) или $r=1$, $P(w', w', z) = a(z)w + b(z)$. Здесь a, b, c, d – аналитические в области U функции, причем a не тождественно равна нулю.

Из перечисленных уравнений четыре не имеют вид D, E. Три из них могут быть записаны в виде

$$w''' = (w'' + l_1(z)w' + l_2(z)w + l_3(z))' (a(z)w + b(z)), \quad (5)$$

где $r=1/2, 3/4, 1$; a, b – аналитические в области U функции, причем a не тождественно равна нулю. Четвертое имеет вид

$$w''' = (h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{2/3} (a(z)w' + b(z)w^2 + c(z)w + d(z)), \quad (6)$$

где a, b, c, d – аналитические в области U функции, причем a и b не тождественно равны нулю.

Применяя метод малого параметра для уравнений (5), (6), можно получить упрощенные уравнения вида $u''' = \bar{a}(u'')^r u$ и $v''' = (v'')^{2/3} (\bar{a}v' + \bar{b}v^2)$ соответственно, где \bar{a}, \bar{b} – ненулевые комплексные числа. Несложно показать, что эти упрощенные уравнения допускают подвижные критические особые точки, откуда их допускают и исходные уравнения (5), (6).

Таким образом, все уравнения вида (1) без подвижных критических особых точек – это уравнения А–Е. Теорема доказана.

Вытекающие из теоремы условия принадлежности к классам А–Е для уравнения (1) являются необходимыми в силу отсутствия у него подвижных критических особых точек. Для получения необходимых и достаточных условий отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (1) необходимы такие условия для уравнений А–Е.

Уравнение А является линейным, следовательно, оно всегда свободно от подвижных критических особых точек.

Уравнения В, С интегрируются заменой $u=h(z)w''-h'(z)w'+h''(z)w+\psi$, которая сводит их к уравнению вида $u' = f(z)u^{1+1/v}$. При этом исходная функция w связана с u посредством линейного дифференциального уравнения второго порядка. Для уравнения В функции u и w не допускают подвижных особых точек и тем более подвижных критических особых точек. Для уравнения С функция u допускает подвижный полюс порядка v . При этом функция w в общем случае может иметь подвижные критические особенности логарифмического характера. Для их отсутствия необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $v>3$ и $a(z) = \frac{1}{\sqrt[v]{\sigma(z)h(z)^{1+1/v}}}$, где σ – произвольный полином не выше $v-3$ -го порядка.

Уравнения D, E могут быть записаны в виде

$$\frac{d(h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi)^{1/v}}{dz} = \bar{a}(z)w' + \bar{b}(z)w + \bar{c}(z), \quad (7)$$

где $\bar{a}(z)=a(z)h(z)/v$, $\bar{b}(z)=b(z)h(z)/v$, $\bar{c}(z)=c(z)h(z)/v$, $v=2, 3$. Для уравнения E необходимым условием отсутствия подвижных критических особенностей является $\bar{a}'(z) = \bar{b}(z)$. В этом случае уравнение интегрируется. Первый интеграл имеет вид $h(z)w'' - h'(z)w' + h''(z)w + \psi = (\bar{a}(z)w + \int \bar{c}(z) + C)^3$. Необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений этого уравнения с параметром легко получаются из теории уравнений Пенлеве второго порядка [4].

Уравнение D в случае $\bar{a}'(z) = \bar{b}(z)$ интегрируется аналогично уравнению E. Однако для отсутствия у уравнения D подвижных критических особенностей условие $\bar{a}'(z) = \bar{b}(z)$ уже не является необходимым. В случае $\bar{a}'(z) \neq \bar{b}(z)$ уравнение D заменой переменного может быть сведено к виду $\ddot{u} = \lambda(t)\dot{u} + \mu(t) + \tau(t)u + \sigma(t)$. В соответствии с [5] это уравнение будет свободно от подвижных критических особых точек, если $\lambda(t) \equiv 0$, $\tau''(t) \equiv 0$, $\sigma''(t) = \tau(t)^2/6$. Это условие является необходимым и достаточным для отсутствия подвижных критических точек у уравнения D в случае $\bar{b}(z) \neq \bar{a}'(z)$.

Таким образом, нами получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у уравнений А–Е, что завершает исследование уравнения (1).

1. Cosgrove С.М., Scoufis G. // Stud. Appl. Math. 1993. Vol. 88. P. 25.
2. Cosgrove С.М. // Stud. Appl. Math. 1993. Vol. 90. P. 119.
3. Соболевский С. Л. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 3. С. 354.
4. Инсе Е. L. Ordinary differential equations. New York, 1956.
5. Chazy J. Acta math. 1911. Vol. 34. P. 317.

Поступила в редакцию 16.04.2003.

Станислав Леонидович Соболевский – кандидат физико-математических наук, докторант кафедры дифференциальных уравнений.

УДК 62-752.534

В.П. САВЧУК, О.В. ТИТЮРА

ПРОГИБ СТРУНЫ ПОД ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ

The differential equation with deviated argument describing a string bend under a moving mass is obtained and solved.

Исследование колебаний упругой балки при движении по ней нагрузки является важной прикладной задачей, решению которой посвящено большое количество работ (см., например, [1]). Кроме балочных пролетов, в ряде случаев используются конструкции, основой несущей способности которых является сильно натянутый гибкий элемент – струна [2]. Систематических исследований движения нагрузок по струне, по-видимому, не проводилось. В данной статье найден прогиб струны конечной длины под нагрузкой, движущейся вдоль струны с постоянной скоростью.

Пусть нагрузка массы m , скорость которой имеет постоянную горизонтальную составляющую V , при $t=0$ вступает на горизонтальную невозмущенную струну длины l с неподвижно закрепленными концами. В отличие от нагрузки струну будем считать свободной от силы тяжести [3]. Тогда уравнение малых колебаний струны с граничными и начальными условиями в безразмерных величинах запишется так:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t),$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad U(x, 0) = \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Здесь

$$f(x, t) = \begin{cases} -\frac{m}{M} (c + y''(t)) \delta(x-t), & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{Tl}{MV^2}, \quad c = \frac{g l}{V^2}, \quad y(t) = U(t, t),$$

T, M – натяжение и масса струны, $\delta(x)$ – δ -функция Дирака, g – ускорение свободного падения, “’” – производная по аргументу функции.

* Научных публикаций, посвященных этому вопросу, авторам найти не удалось.

Используя интегральное синус-преобразование Фурье в конечных пределах, представим функцию $U(x, t)$ в виде

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \sin k\pi x, \quad (1)$$

где

$$b = \frac{m}{2Ma}, \quad U_k(t) = \begin{cases} \varphi_k(t, t), & 0 \leq t \leq 1, \\ \varphi_k(t, 1), & t > 1, \end{cases}$$

$$\varphi_k(t, \beta) = -\frac{4b}{\pi} \int_0^{\beta} (c + y''(\tau)) \sin k\pi\tau \sin k\pi a(t - \tau) d\tau.$$

Для нахождения функции $y(t)$ – прогиба струны под нагрузкой – будем считать $0 < t \leq 1$ и положим $x = t$ в равенстве (1):

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t, t) \sin k\pi t. \quad (2)$$

Изменив в (2) порядок операций суммирования и интегрирования, получим уравнение

$$y(t) = -\frac{4b}{\pi} \int_0^t (c + y''(\tau)) F(t, \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi\tau \sin k\pi a(t - \tau) \sin k\pi t. \quad (4)$$

Используя известные ряды [4], ряд в правой части равенства (4) можно просуммировать, и для $1 < a < 3$ получим

$$F(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (t, \tau) \in B_3, \\ 0, & (t, \tau) \in B_5, \\ -\frac{\pi}{4}, & (t, \tau) \in B_4, \end{cases}$$

где $B = \{(t, \tau) | 0 < \tau < t < 1\}$, $B_1 = \{(t, \tau) | 0 < \tau < \alpha t\}$, $B_2 = \{(t, \tau) | t - t_1 < \tau < \frac{1}{\alpha}(t - t_1)\}$,

$$B_3 = B \setminus (B_1 \cup B_2), \quad B_4 = B_1 \cap B_2, \quad B_5 = B \setminus (B_3 \cup B_4), \quad \alpha = \frac{a-1}{a+1}, \quad t_1 = \frac{2}{a+1}.$$

Поскольку функция $F(t, \tau)$ кусочно-постоянна в области B , то интеграл в правой части уравнения (3) вычисляется, и уравнение примет вид

$$b(y'(t) - y'(\alpha t)) + y(t) = \begin{cases} bct(\alpha - 1), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{4bc}{a-1}(t-1) + b(y'(\frac{t-t_1}{\alpha}) - y'(t-t_1)), & t_1 < t \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, для определения функции $y(t)$ получено дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. Заметим, что условия $y(0) = y(1) = 0$ выполняются в силу самого уравнения (5) и это уравнение допускает произвольные значения $y'(0)$. Следовательно, для выделения частного решения из общего решения уравнения (5) необходимо задать вертикальную составляющую скорости нагрузки при входе на пролет:

$$y'(0) = V_0. \quad (6)$$

Заметим также, что функция

$$y_0(t) = \begin{cases} bct(\alpha - 1), & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{4bc}{\alpha^2 - 1}(t - 1), & t_1 < t \leq 1, \end{cases}$$

дает прогиб струны под нагрузкой, не имеющей массы, что согласуется с [5].

Уравнение (5) можно представить в виде

$$b(y_1'(t) - y_1'(\alpha t)) + y_1(t) = bct(\alpha - 1), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (7)$$

$$by_k'(t) + y_k(t) = \frac{4bc}{\alpha^2 - 1}(t - 1) + b(y_1'(\alpha t) - y_1'(t - t_1) + y_{k-1}'(\frac{t - t_1}{\alpha})), \quad (8)$$

$$t_{k-1} < t < t_k, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ y_k(t), & t_{k-1} < t < t_k, \quad k = 2, 3, \dots, \\ t_k = \alpha t_{k-1} + t_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что после определения функции $y_1(t)$ из уравнения (7) функции $y_k(t)$ последовательно найдутся из уравнения (8), которое уже не будет иметь отклонения аргумента. По физическому смыслу задачи $y(t)$ и $y'(t)$ – непрерывные функции, поэтому

$$y_{k+1}(t_k) = y_k(t_k), \quad y_{k+1}'(t_k) = y_k'(t_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Для выполнения этих двух условий можно распорядиться лишь одной произвольной постоянной из общего решения уравнения (8) для функции $y_{k+1}(t)$. Если выбором этой постоянной обеспечить непрерывность функции $y(t)$, то и ее производная также будет непрерывной в силу специфики уравнений (7), (8). Действительно, если в уравнении (7) и первом уравнении (8) положить $t = t_1$ и вычесть из (7) первое уравнение (8), затем из первого уравнения (8) вычесть второе при $t = t_2$ и т. д., то получим

$$y_1(t_1) + by_1'(t_1) = y_2(t_1) + by_2'(t_1),$$

$$y_k(t_k) + by_k'(t_k) = y_{k+1}(t_k) + by_{k+1}'(t_k) + b(y_{k-1}'(t_{k-1}) - y_k'(t_{k-1})), \quad k = 2, 3, \dots$$

Это значит, что выполнение первого условия (9) влечет выполнение и второго условия.

Найдем теперь функцию $y_1(t)$. Общее решение уравнения (7) будем искать в виде

$$y_1(t) = bct(\alpha - 1) + A\varphi(t), \quad (10)$$

где

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t}{b}} + c_1 e^{-\frac{t}{b}\alpha} + c_2 e^{-\frac{t}{b}\alpha^2} + \dots \quad (11)$$

После подстановки функции (10) в уравнение (7) найдем

$$c_k = \frac{\alpha^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\alpha - 1) \dots (\alpha^k - 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выполняя условие (6), получим

$$A = \frac{b^2c(\alpha - 1) - bV_0}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(\alpha - 1) \dots (\alpha^k - 1)}}. \quad (12)$$

Легко убедиться, что ряды в равенствах (11), (12) сходятся абсолютно и что знаменатель в (12) отличен от нуля. Таким образом, формулы (10) – (12)

дают решение уравнения (7). Заметим в заключение, что решение уравнения (8) с увеличением k становится весьма громоздким, поэтому находить его целесообразно в численном виде.

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
2. Юницкий А.Э., Савчук В.П., Савенков В.А., Вярвильская О.Н. // Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике "Механика-95": Тез. докл., Минск, 6–11 февр. 1995 г. Мн., 1995. С. 253.
3. Савчук В.П., Савенков В.А., Вярвильская О.Н. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 2. С. 54.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
5. Юницкий А.Э. Струнные транспортные системы на земле и в космосе. Гомель, 1995. С. 93.

Поступила в редакцию 28.12.2002.

Владимир Петрович Савчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Ольга Валентиновна Титюра – магистрант кафедры теоретической и прикладной механики.

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

This paper considers dynamic contact problem for orthotropic strip. A general solution in terms of two potential functions is presented. The mixed boundary conditions lead to dual integral equations, which solving may find in the form of series.

Рассмотрим упругую ортотропную полосу, занимающую в плоскости Ox_1x_2 область $S(0 < x_2 < h)$; $L(x_2=0)$ и $L_1(x_2=h)$ – нижняя и верхняя границы области S . Предположим, что полоса своей нижней стороной опирается без трения на гладкое жесткое основание. По верхней границе полосы с постоянной скоростью c движется штамп с плоским основанием. Трение на участке $L'(|x_1| \leq a)$ контакта штампа с полосой и внешняя нагрузка на остальной части $L''(|x_1| > a)$ контура L отсутствуют.

В предположении, что главные оси ортотропии совпадают с осями координат, используем следующие соотношения закона Гука [1]:

$$\sigma_{11} = c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{22} = c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$$

и соответствующие уравнения движения

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где c_{ij} – жесткостные характеристики материала, ρ – его плотность, σ_{ij} – компоненты напряжений, u_i – проекции перемещений на оси координат.

Примем новую систему координат, связанную со штампом. Производя преобразование для относительного движения

$$x = x_1 - ct, \quad y = x_2, \quad t = t,$$

приводим уравнения (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2\beta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

где

$$2\beta = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{11}(1 - M_1^2)}, \quad \alpha = \frac{c_{66}}{c_{11}(1 - M_1^2)}, \quad M_1 = c \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}},$$

$$2\beta_1 = \frac{c_{17} + c_{66}}{c_{66}(1 - M_{12}^2)}, \quad \alpha_1 = \frac{c_{22}}{c_{66}(1 - M_{12}^2)}, \quad M_{12} = c \sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}}.$$

Решение системы уравнений (2) ищем в виде

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_2 = m \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

где m – постоянная, а $\Phi = \Phi(x, y)$.

Уравнения (2) удовлетворяются, если

$$\alpha + 2\beta m = \frac{\alpha_1 m}{m + 2\beta_1} = \mu,$$

а функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_1(x, y) = 0.$$

Тогда $m_i = \frac{\mu_i - \alpha}{2\beta}$, где μ_i – корни уравнения $\mu^2 - 2a_1\mu + a_2 = 0$, в котором

$2a_1 = \alpha + \alpha_1 - 4\beta\beta_1$, $a_2 = \alpha\alpha_1$.

В дальнейшем будем рассматривать наиболее распространенный на практике материал первого типа [2], для которого $a_2 > 0$, $a_1 > \sqrt{a_2}$.

В результате получим следующие выражения для перемещений и напряжений:

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad u_2 = m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + m_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{c_{66}} = (1 + m_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + (1 + m_2) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y},$$

$$\sigma_{xx} = k_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + l_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = l_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + l_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2},$$

$$k_i = c_{12} m_i - c_{11} \mu_i, \quad \mu_i l_i = \mu_i c_{12} - c_{22} m_i.$$

В нашем случае необходимо удовлетворить условиям:

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{на } L_1(\eta = 1), \quad (3)$$

$$u_2 = -u_0 \quad \text{на } L'(|\xi| < \beta, \eta = 1), \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{на } L''(|\xi| > \beta, \eta = 1), \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = u_2 = 0 \quad \text{на } L(\eta = 0), \quad (6)$$

где $\xi = x/h$, $\eta = y/h$, $\beta = a/h$ – безразмерные переменные, u_0 – нормальное перемещение штампа.

Для решения задачи функции напряжений возьмем в форме интеграла Фурье [3]:

$$\Phi_i = \int_0^{\infty} f_i(\lambda) \operatorname{ch} \gamma_i \eta \lambda \cos \lambda \xi d\lambda, \quad i = 1, 2,$$

где $f_i(\lambda)$ – неизвестные функции, которые определяются из граничных условий, $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$.

Тогда перемещения и компоненты напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} hu_1 &= -\int_0^{\infty} \lambda (\varphi_{11} + \varphi_{12}) \sin \lambda \xi d\lambda, \quad hu_2 = \int_0^{\infty} \lambda (m_1 \gamma_1 \varphi_{21} + m_2 \gamma_2 \varphi_{22}) \cos \lambda \xi d\lambda, \\ h^2 \sigma_{xx} &= \int_0^{\infty} \lambda^2 (k_1 \gamma_1^2 \varphi_{11} + k_2 \gamma_2^2 \varphi_{12}) \cos \lambda \xi d\lambda, \\ h^2 \sigma_{yy} &= -\int_0^{\infty} \lambda^2 (l_1 \varphi_{11} + l_2 \varphi_{12}) \cos \lambda \xi d\lambda, \\ h^2 \sigma_{xy} &= -c_{66} \int_0^{\infty} \lambda^2 [\gamma_1 (1 + m_1) \varphi_{21} + \gamma_2 (1 + m_2) \varphi_{22}] \sin \lambda \xi d\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi_{1i} = f_i(\lambda) \operatorname{ch} \gamma_i \lambda \eta$, $\varphi_{2i} = f_i(\lambda) \operatorname{sh} \gamma_i \lambda \eta$.

При таком выборе функций напряжений условия (6) удовлетворяются автоматически.

Полагая $\eta=1$ для σ_{xy} из (7) и подставляя его в (3), получим

$$f_2(\lambda) = -\frac{(1+m_1)\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 \lambda}{(1+m_2)\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_2 \lambda} f_1(\lambda). \quad (8)$$

Подставляя (8) в выражения для u_2 и σ_{yy} из (7), полагая в них $\eta=1$, получим:

$$\frac{h(\sigma_{yy})_{\eta=1}}{u_0 l_1} = -\int_0^{\infty} F(\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda, \quad (9)$$

$$\frac{(u_2)_{\eta=1}}{u_0} = \int_0^{\infty} Q(\lambda) F(\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda. \quad (10)$$

Здесь

$$F(\lambda) = \frac{(1+m_1)\gamma_1 \lambda^2 \operatorname{sh} \gamma_1 \lambda}{u_0 h l_1} \left(\frac{\operatorname{cth} \gamma_1 \lambda}{\gamma_1 (1+m_1)} - \frac{l_2 \operatorname{cth} \gamma_2 \lambda}{l_1 \gamma_2 (1+m_2)} \right) f_1(\lambda),$$

$$Q(\lambda) = \frac{(m_2 - m_1) \gamma_1 \gamma_2 l_1}{\lambda [l_1 (1+m_2) \gamma_2 \operatorname{cth} \gamma_1 \lambda - l_2 (1+m_1) \gamma_1 \operatorname{cth} \gamma_2 \lambda]}.$$

Подставляя (9) и (10) в граничные условия (4) и (5), получим систему парных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} Q(\lambda) F(\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda = 1, \quad 0 \leq \xi \leq \beta, \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda = 0, \quad \xi > \beta. \quad (12)$$

Решение этой системы будем искать в виде ряда:

$$F(\lambda) = \tilde{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} a_j J_{2j}(\lambda \tilde{\rho}), \quad (13)$$

где $J_{2j}(\lambda \tilde{\rho})$ – функции Бесселя первого рода, a_j – неизвестные коэффициенты. В этом случае уравнение (12) удовлетворяется, так как [4]

$$\int_0^{\infty} J_{2j}(\lambda\beta) \cos \lambda\xi d\lambda = 0, \quad \xi > \beta, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнение (11) после подстановки выражения (13) примет вид:

$$\beta \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^{\infty} Q(\lambda) J_{2j}(\lambda\beta) \cos \lambda\xi d\lambda = 1, \quad 0 < \xi < \beta. \quad (14)$$

Используя разложение $\cos \lambda\xi$ в ряд Фурье [5],

$$\cos \lambda\xi = J_0(\lambda\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\lambda\beta) \cos 2k\omega,$$

где $\omega = \arcsin(\xi/\beta)$, уравнение (14) перепишем в виде:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^{\infty} Q(\lambda) J_{2j}(\lambda\beta) \left[J_0(\lambda\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\lambda\beta) \cos(2k\omega) \right] d\lambda = \frac{1}{\beta}. \quad (15)$$

Уравнение (15) удовлетворяется тождественно, если

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j A_{kj} = \begin{cases} 1/\beta, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

Здесь

$$A_{kj} = \int_0^{\infty} Q(\lambda) J_{2k}(\lambda\beta) J_{2j}(\lambda\beta) d\lambda.$$

Неизвестные коэффициенты в разложении (13) определяются в результате решения системы линейных алгебраических уравнений (16). После ее решения контактное напряжение $q = (\sigma_{yy})_{\eta=1}$ под штампом вычисляется по формуле:

$$\frac{nq}{u_0 l} = \beta \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^{\infty} J_{2j}(\lambda\beta) \cos \lambda\xi d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (-1)^j \frac{T_{2j}(\xi/\beta)}{\sqrt{1 - (\xi/\beta)^2}}, \quad |\xi| \leq \beta, \quad (17)$$

где T_{2j} – полиномы Чебышева.

Контактное напряжение под штампом

x/a		0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.95
$\frac{hq(x)}{u_0 l}$	A	0,486	0,49	0,532	0,617	0,874	1,785
	B	0,472	0,48	0,528	0,614	0,867	1,771

В таблице приведены значения функции $hq(x)/u_0 l$, рассчитанные по формуле (17) для материала A ($E_y/E_x=0,5$; $G_{xy}/E_x=0,6$; $\nu_{xy}=0,31$; $M_2=0,5$) и материала B ($E_y/E_x=0,2$; $G_{xy}/E_x=0,1$; $\nu_{xy}=0,28$; $M_2=0,3$).

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
2. De J., Patra B. // Indian J. pure appl. Math. 1994. Vol. 25. № 7. P. 767.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л., 1963.
4. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., 1949.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.

Поступила в редакцию 03.02.2003.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ*

The equation of the characteristics for combined equations of a motion of orthotropic fibreglass is obtained. With its help the bicharacteristics are removed and the wavefronts of elastic waves are constructed depending on orientation of hairlines of a filling compound at stacking.

Большинство конструкционных стеклопластиков являются ортогонально-анизотропными телами (стеклотекстолиты, стекловолокниты и др.), все модули упругости которых в сильной степени зависят от ориентации нитей наполнителя при укладке [1]. Этот фактор существенно усложняет изучение волновых движений в таких материалах даже в случае плоской деформации. Однако современные возможности и средства вычислительной техники позволяют обойти эти трудности. Ниже представлены результаты исследований закономерностей распространения упругих волн в одной из плоскостей упругого ортотропного стеклопластика на базе классического метода характеристик [2].

Будем считать, что основные линии упругости (направления стекловолокон) составляют угол φ с координатной осью x_1 . В этом случае закон Гука имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_1 e_{11} + c_2 e_{22} + 2c_3 e_{12}, \\ \sigma_{22} &= c_2 e_{11} + c_6 e_{22} + 2c_4 e_{12}, \\ \sigma_{12} &= c_3 e_{11} + c_4 e_{22} + 2c_5 e_{12}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $e_{ij}=(\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ – компоненты тензора деформаций, $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ – вектор перемещений, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i, j=1, 2$. Шесть констант c_k , $k=1, 6$, в формулах (1) выражаются через основные компоненты тензора модулей упругости [1]:

$$\begin{aligned} c_1 &= m_1 \cos^4 \varphi + m_2 \sin^4 \varphi + (m_3 + m_4/2) \sin^2 2\varphi, \\ c_2 &= (m_1 + m_2 - 4m_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + m_4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi), \\ c_3 &= (m_2 \sin^2 \varphi - m_1 \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi/2 + (m_4 + 2m_3) \sin 4\varphi/4, \\ c_4 &= (m_2 \cos^2 \varphi - m_1 \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi/2 - (m_4 + 2m_3) \sin 4\varphi/4, \\ c_5 &= (m_1 + m_2 - 2m_4) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + m_3 \cos^2 2\varphi, \\ c_6 &= m_1 \sin^4 \varphi + m_2 \cos^4 \varphi + (m_3 + m_4/2) \sin^2 2\varphi, \end{aligned}$$

m_l – основные модули упругости ортотропного тела, $l=1, 4$.

Подставляя (1) в уравнения плоских движений анизотропного тела, получим

$$\begin{aligned} c_1 \partial_1^2 u_1 + 2c_3 \partial_1 \partial_2 u_1 + c_5 \partial_2^2 u_1 + c_3 \partial_1^2 u_2 + (c_2 + c_5) \partial_1 \partial_2 u_2 + c_4 \partial_2^2 u_2 &= \rho \ddot{u}_1, \\ c_3 \partial_1^2 u_1 + (c_2 + c_5) \partial_1 \partial_2 u_1 + c_4 \partial_2^2 u_1 + c_5 \partial_1^2 u_2 + 2c_4 \partial_1 \partial_2 u_2 + c_5 \partial_1^2 u_2 &= \rho \ddot{u}_2, \end{aligned} \tag{2}$$

ρ – плотность, точкой обозначается дифференцирование по времени.

Чтобы найти уравнение характеристической поверхности, зададим начальные данные к системе (2) на гиперплоскости $Z(t, x_1, x_2)=0$ и перейдем к новым переменным $Z=Z(t, x_1, x_2)$ и $Z_{1, 2}=Z_{1, 2}(t, x_1, x_2)$ [2]. Выразим производ-

* Авторы статьи – сотрудники кафедры теоретической и прикладной механики.

ные по старым переменным через производные по новым переменным и подставим их в уравнения (2):

$$\begin{aligned} & (c_1 p_1^2 + 2c_3 p_1 p_2 + c_5 p_2^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial Z^2} + \\ & + (c_3 p_1^2 + (c_2 + c_5) p_1 p_2 + c_4 p_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial Z^2} + \dots = 0, \\ & (c_3 p_1^2 + (c_2 + c_5) p_1 p_2 + c_4 p_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial Z^2} + \\ & + (c_6 p_2^2 + 2c_4 p_1 p_2 + c_5 p_1^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial Z^2} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3), приравняв к нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных второго порядка по Z , получим уравнение характеристик (уравнение слабых разрывов):

$$A - \rho B p_0^2 + \rho^2 p_0^4 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A = & (c_1 c_6 - c_2^2 + 2c_3 c_4 - 2c_2 c_5) p_1^2 p_2^2 + (c_1 c_5 - c_3^2) p_1^4 + (c_5 c_6 - c_4^2) p_2^4 + \\ & + 2((c_1 c_4 - c_2 c_3) p_1^2 + (c_3 c_6 - c_2 c_4) p_2^2) p_1 p_2, \quad B = (c_1 + c_5) p_1^2 + (c_5 + c_6) p_2^2 + \\ & + 2(c_3 + c_4) p_1 p_2, \quad \bar{p}_{1,2} = \frac{\partial Z}{\partial x_{1,2}}, \quad p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Покажем, что уравнение слабых разрывов (4) совпадает с уравнением сильных разрывов. Для этого предположим, что первые производные от компонент вектора перемещения, испытывающие сильные разрывы на поверхности $Z(t, x_1, x_2)=0$, удовлетворяют следующим кинематическим и динамическим условиям совместности [2]:

$$p_j \frac{\partial u_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = M_{ij}, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} p_j - \rho p_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = M_i, \quad (6)$$

где M_{ij}, M_i – непрерывные функции, $i, j=1, 2$.

Чтобы привести систему уравнений первого порядка (5), (6) к более простому виду, запишем (5) в виде

$$p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = p_j \frac{\partial u_i}{\partial t} - M_{ij}. \quad (7)$$

Умножим (6) на p_0 и заменим $p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ соответствующими правыми частями равенств (7). После несложных преобразований получим систему из двух уравнений относительно частных производных $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $i=1, 2$:

$$\begin{aligned} & (c_1 p_1^2 + 2c_3 p_1 p_2 + c_5 p_2^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial u_1}{\partial t} + M_{11} p_0 + \\ & + (c_3 p_1^2 + (c_2 + c_5) p_1 p_2 + c_4 p_2^2) \frac{\partial u_2}{\partial t} + M_{12} p_0 + M_{12} p_2 + \dots = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (c_3 p_1^2 + (c_2 + c_5) p_1 p_2 + c_4 p_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial t} + M_2 p_0 + \\ & + (c_6 p_2^2 + 2c_4 p_1 p_2 + c_5 p_1^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial u_2}{\partial t} + M_{21} p_1 + M_{22} p_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение сильных разрывов получим из условия равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при производных первого порядка от u_1 и u_2 . Раскрывая определитель, приходим к уравнению (4).

Чтобы найти бихарактеристики системы (2), решим уравнение характеристик (4) относительно p_0 :

$$p_0^{(1, 2)} = \sqrt{(B \pm \sqrt{B^2 - 4A})} / 2\rho. \quad (9)$$

Отсюда вытекают следующие уравнения для бихарактеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^{(1, 2)}}{dt} = \frac{\partial p_0^{(1, 2)}}{\partial p_1} = & (p_1 (c_1 + c_5) + p_2 (c_3 + c_4) \pm ((p_1 (c_1 + c_5) + p_2 (c_3 + c_4)) \times \\ & \times B - 4(3p_1^2 p_2 (c_1 c_4 - c_2 c_3) - 2p_1^3 (c_3^2 - c_1 c_5) + p_1 p_2^2 (2(c_3 c_4 - c_2 c_5) - c_2^2 + \\ & + c_1 c_6) + p_2^2 (c_3 c_6 - c_2 c_4)) / \sqrt{B^2 - 4A}) / \sqrt{2\rho (B \pm \sqrt{B^2 - 4A})}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2^{(1, 2)}}{dt} = \frac{\partial p_0^{(1, 2)}}{\partial p_2} = & (p_2 (c_3 + c_6) + p_1 (c_3 + c_4) \pm ((p_2 (c_3 + c_6) + p_1 (c_3 + c_4)) \times \\ & \times B - 4(3p_2^2 p_1 (c_3 c_6 - c_2 c_4) - 2p_2^3 (c_4^2 - c_5 c_6) + p_2 p_1^2 (2(c_3 c_4 - c_2 c_5) - c_2^2 + \\ & + c_1 c_6) + p_1^2 (c_1 c_4 - c_2 c_3)) / \sqrt{B^2 - 4A}) / \sqrt{2\rho (B \pm \sqrt{B^2 - 4A})}. \end{aligned} \quad (11)$$

В формулах (9) – (11) и далее верхний индекс 1 относится к квазипродольной волне, 2 – к квазипоперечной.

Интегрируя (10), (11), получим выражения для координат $(x_1^{(1, 2)}, x_2^{(1, 2)})$ точек среды, до которых дошло возмущение к моменту времени t :

$$\begin{aligned} x_1^{(1, 2)} = & t (n_1 (c_1 + c_5) + n_2 (c_3 + c_4) \pm ((n_1 (c_1 + c_5) + n_2 (c_3 + c_4)) \times \\ & \times \bar{B} - 4(3n_1^2 n_2 (c_1 c_4 - c_2 c_3) - 2n_1^3 (c_3^2 - c_1 c_5) + n_1 n_2^2 (2(c_3 c_4 - c_2 c_5) - c_2^2 + \\ & + c_1 c_6) + n_2^2 (c_3 c_6 - c_2 c_4)) / \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}}) / \sqrt{2\rho (\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}})}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x_2^{(1, 2)} = & t (n_2 (c_3 + c_6) + n_1 (c_3 + c_4) \pm ((n_2 (c_3 + c_6) + n_1 (c_3 + c_4)) \times \\ & \times \bar{B} - 4(3n_2^2 n_1 (c_3 c_6 - c_2 c_4) - 2n_2^3 (c_4^2 - c_5 c_6) + n_2 n_1^2 (2(c_3 c_4 - c_2 c_5) - c_2^2 + \\ & + c_1 c_6) + n_1^2 (c_1 c_4 - c_2 c_3)) / \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}}) / \sqrt{2\rho (\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}})}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $n_1 = p_1/g = \cos\alpha$, $n_2 = p_2/g = \sin\alpha$, $g^2 = p_1^2 + p_2^2$, $\bar{B} = (c_1 + c_5)n_1^2 + (c_3 + c_4)n_2^2 + 2(c_3 + c_4)n_1 n_2$, $\bar{A} = (c_1 c_6 - c_2^2 + 2c_3 c_4 - 2c_2 c_5)n_1^2 n_2^2 + (c_1 c_5 - c_3^2)n_1^4 + (c_3 c_6 - c_4^2)n_2^4 + 2((c_1 c_4 - c_2 c_3)n_1^2 + (c_3 c_6 - c_2 c_4)p_2^2)n_1 n_2$.

С помощью (12), (13) можно построить фронты упругих волн в ортотронном стеклопластике в условиях плоской деформации. На рис. 1 пред-

ставлены волновые фронты L_1 и L_2 в плоскости $x_3=0$ стеклопластика с материальными константами $m_1=18,3$ ГПа, $m_2=25,2$, $m_3=35$, $m_4=27,7$ ГПа, $\rho=1850$ кг/м³ [1], построенные для различных углов φ ориентации нитей наполнителя в момент времени $t=1$ с.

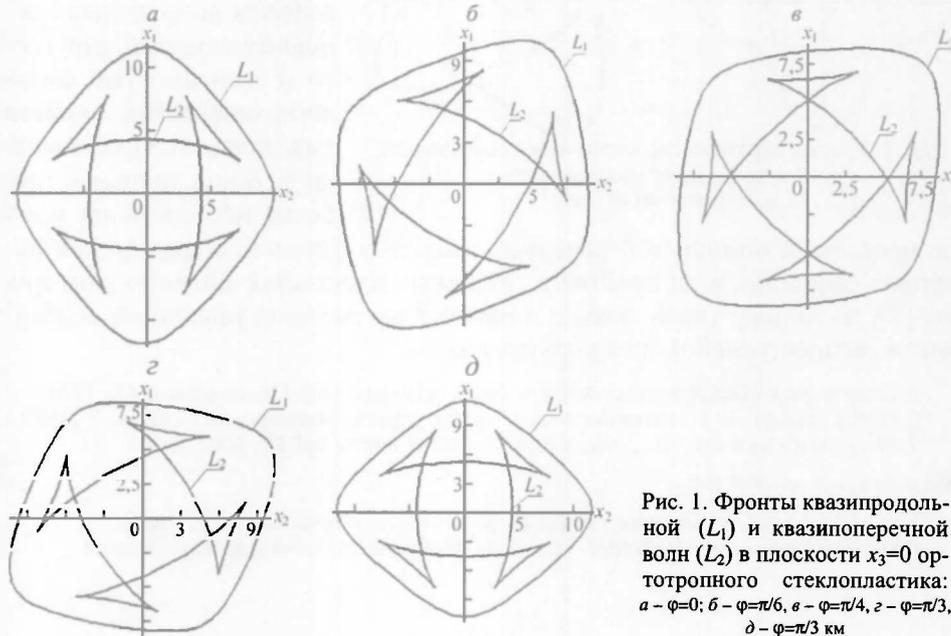


Рис. 1. Фронты квазипродольной (L_1) и квазипоперечной волн (L_2) в плоскости $x_3=0$ ортотропного стеклопластика: $a - \varphi=0$; $б - \varphi=\pi/6$, $в - \varphi=\pi/4$, $г - \varphi=\pi/3$, $д - \varphi=\pi/3$ км

Из рис. 1 следует, что независимо от угла φ при распространении квазипоперечной волны возникают две пары лакун, расположенные симметрично относительно начала координат. Однако ориентация нитей стекловолокна существенно влияет на расположение волновых фронтов в системе координат x_1, x_2 , и при изменении угла укладки нитей на $\Delta\varphi$ волновые фронты поворачиваются относительно оси x_1 против часовой стрелки на тот же угол $\Delta\varphi$. Заметим, что фронты упругих волн на рис. 1 являются кривыми лучевых скоростей в плоскости $x_3=0$.

Уравнение характеристик позволяет найти скорости распространения квазипродольной и квазипоперечной волн по направлению нормали к волновой поверхности. Для этого представим (4) в следующем виде:

$$\bar{A} - \rho \bar{B} V^2 + \rho^2 V^4 = 0, \quad V^2 = \rho_0^2 / g^2. \quad (14)$$

Отсюда

$$V^{(1, 2)} = \sqrt{(\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}}) / 2\rho}. \quad (15)$$

На рис. 2 показаны кривые обратных скоростей $R_{1, 2}=1/V_{1, 2}$ в плоскости $x_3=0$ стеклопластика, построенные для двух разных углов φ ориентации нитей наполнителей (основные модули упругости и плотность материала приведены выше).

Из рис. 2 видно, что кривые обратных скоростей $R_{1, 2}$, так же как и фронты упругих волн $L_{1, 2}$, поворачиваются против часовой стрелки на угол $\Delta\varphi$ при изменении угла φ намотки стекловолокна на $\Delta\varphi$.

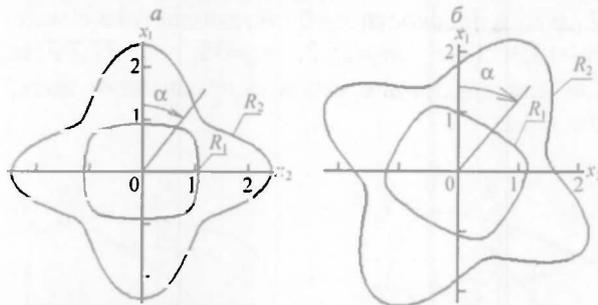


Рис. 2. Кривые обратных скоростей R_1 и R_2 в плоскости $x_3=0$ ортотропного стеклопластика:
 $a - \varphi=0$, $b - \varphi=\pi/6 \cdot 10^{-4} \text{ (м/с)}^{-1}$

Полученные результаты указывают на сложный характер волновых движений в ортотропных стеклопластиках, что объясняется анизотропией основных модулей упругости и зависимостью физико-механических свойств материала от угла намотки φ . Более точные и глубокие исследования можно

провести с помощью трехмерных волновых фронтов, поверхностей обратных скоростей и их сечений в различных плоскостях анизотропной среды [3], поскольку такой подход позволяет рассмотреть различные особенности распространения трех упругих волн.

1. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / Под ред. И.И. Гольденבלата. М., 1970.
2. Петрашень Г.И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.
3. Мартыненко М. Д., Босьяков С. М. // Вестн. БрГТУ. 2002. № 4. С. 55.

Поступила в редакцию 17.04.2003.

Сергей Михайлович Босьяков – кандидат физико-математических наук, доцент.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент.

УДК 621.372.5

О. Ч. РОЛИЧ, К. М. ШЕСТАКОВ, В. С. САДОВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ДИСКРЕТНОЕ КОСИНУСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

The algorithm of approximate discrete cosine transformation by using integer processors is described. The idea consists in basis (harmonic) function approximation by alternate power series with base 2.

Классическое N -точечное дискретное косинусное преобразование (ДКП) представляет собой суперпозицию дискретной сигнальной выборки \tilde{f}_k с ор-

тогональным базисом $b_n(t_k)=b_{nk}=\cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$ и выполняется по формуле

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right), \quad (1)$$

где N – это длина сигнальной выборки $N=2^q$, $q \in N$; k – номер отсчета ($k=1 \dots N$); t_k – значение временного отсчета; n – частотный коэффициент ($n=1 \dots N/2$); c_n – условное значение амплитуды n -й гармоники, составляющей временной дискретный сигнал f_k .

Современные методы вычисления ДКП и спектра сигналов благодаря свойствам симметричности и периодичности базисных функций предполагают группировку членов разложения Фурье и последующее применение рекурсивных алгоритмов [1, 2]. Этапы вычисления проводятся в пространстве вещественных чисел.

Во многих задачах спектрального анализа сигналов нет необходимости в высокоточных вычислениях. При их решении целесообразно ограничиваться пространством целых чисел, к которому принадлежит последовательность d -разрядных оцифрованных отсчетов обрабатываемых сигналов. В этом случае процесс вычислений ускоряется применением операций сдвига вместо умножения и деления, и его можно выполнить на целочисленных процессорах.

Данный подход достаточно просто реализуется, если в основе вычисления ДКП лежит аппроксимация с заданной абсолютной погрешностью ε гармонической функции-базиса $b_n(t_k)=b_{nk}=\cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$ степенным знакочередующимся рядом по основанию 2:

$$\tilde{b}_{nk} = r_{nk} + \sum_{i=1}^l (-1)^{s_{nik}} a_{nik} 2^{-p_{nik}}. \quad (2)$$

Здесь r_{nk} – базовый реперный уровень для k -го отсчета и n -й аппроксимируемой гармоники ($r_{nk} \in [-1, 1]$), i – номер приближения; l – предельный номер приближения для заданной погрешности ε аппроксимации ($l=1\dots d$); s_{nik} определяет знак последующего члена в ряду приближения и принимает значение либо нуля, либо единицы; p_{nik} – степень двойки для k -го отсчета в i -м приближении для аппроксимируемой n -й гармоники ($p_{nik}=1\dots d$); a_{nik} – коэффициент допуска вхождения nik -го члена в ряд приближения, принимающий значение либо нуля, либо единицы.

Основными параметрами в (2) являются: базовый реперный уровень, количество приближений, знак перед последующим членом приближения и степень p_{nik} двойки в ряду приближения. Если все эти величины для каждого k известны, то дискретное косинусное преобразование сводится к вычислению

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k \tilde{b}_{nk} = 2^{-q} \sum_{k=1}^N f_k \left(r_{nk} + \sum_{i=1}^l (-1)^{s_{nik}} a_{nik} 2^{-p_{nik}} \right), \quad (3)$$

где f_k – выборка оцифрованных сигнальных отсчетов. С учетом $r_{nk} \in \{\pm 2^{-w_k}, 0\}$, $w_k \in N^0$, при вычислении c_n требуются лишь операции изменения знака, сложения (вычитания) и сдвига.

Плотность сетки базовых реперов ($i=0$) в общем случае неравномерная и возрастает с приближением к нулю. Увеличение i на единицу приводит к разветвлению реперных уровней, и для i -го приближения количество Q_i реперов задается формулой

$$Q_i = \left[(Q_0 - 1) (2d)^i \prod_{j=1}^i v_j(a=1) \right], \quad (4)$$

где Q_0 – количество базовых реперов, $v_j(a=1)$ – удельное число реперов j -го приближения с единичным коэффициентом допуска.

Для варианта с $p_{nik} < p_{n(i+1)k}$

$$Q_i = \left[(Q_0 - 1) 2^i A_d^i \prod_{j=1}^i v_j(a=1) \right], \quad (5)$$

где A_d^i – число всевозможных размещений из d элементов по i .

С учетом изложенного задача аппроксимации базисной функции сводится к заданию абсолютной погрешности ε аппроксимации, разрядности d

внутреннего представления целого числа, длины N выборки и нахождению таких основных параметров ряда (2) для каждого k и n , при которых

$$|b_{nk} - \bar{b}_{nk}| < \varepsilon. \quad (6)$$

После ее решения сгенерированная последовательность, содержащая информацию об аппроксимирующих (основных) параметрах r_{nk} , l , s_{nik} , p_{nik} , записывается во Flash-память процессора, и затем производится вычисление элементов ДКП в пространстве операций изменения знака, сложения (вычитания) и сдвига.

Мощность множества $\{r\}$ базовых реперов определяется условием равномерности базовой сетки. Это значение конечно и в случае гармонической базисной функции равно пяти: $r = \{1, 1/2, 0, -1/2, -1\}$. Поэтому в формулах (4), (5) $Q_0=5$, и в сгенерированной последовательности данных каждому реперу сопоставляется номер num из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Аппроксимирующие параметры для каждого k и n представляются в формате последовательности $(l+1)$ байтов, причем младшему байту соответствует младший адрес (рис. 1). Формат рассчитан на 32-разрядное целое число, а в практических приложениях – на современные 24-разрядные аналого-цифровые преобразователи. В связи с тем, что в основной массе технических задач длина выборки фиксирована, сгенерированные параметры записываются в память программ либо во Flash-память.

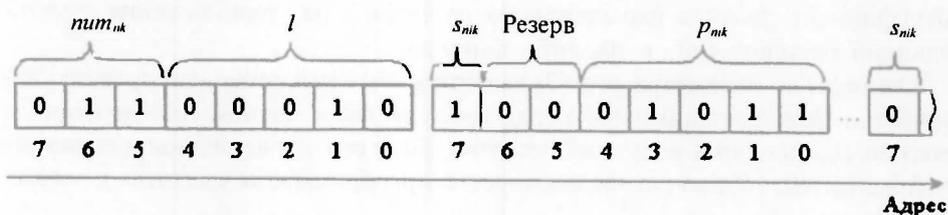


Рис. 1. Формат представления аппроксимирующих данных для $d=32$

Процесс генерации данных заключается в формировании на каждом шаге приближения к аппроксимируемому значению m близлежащих точек. Если наиболее близкая из них не удовлетворяет условию (6), то генерируются $2dm$ реперных уровня следующего приближения и т. д. Алгоритм генерации представлен на рис. 2, где $\{R_l\}$ – это множество реперов l -го шага приближения. Массив $M[]$ представляет собой массив C++-структур типа

```
struct er_R
{
    std::deque<int> numlsp;
    double er;
    double R;},
```

хранящий информацию соответственно об аппроксимирующих параметрах, невязке и текущем репере. Информация об аппроксимирующих параметрах представляется в виде двунаправленной очереди, а сортировка элементов массива приведенных структур в зависимости от значения m выполняется либо методом простого выбора ($m < 10$), либо методом Хоара.

В настоящее время оптимальными по шумовым характеристикам являются 12-разрядные аналого-цифровые преобразователи.

Для данной разрядности и $\varepsilon=0,05$ аппроксимация отсчетов базисной функции проводится с однократным приближением, а формат представления аппроксимирующих параметров сводится к одному байту. В этом байте

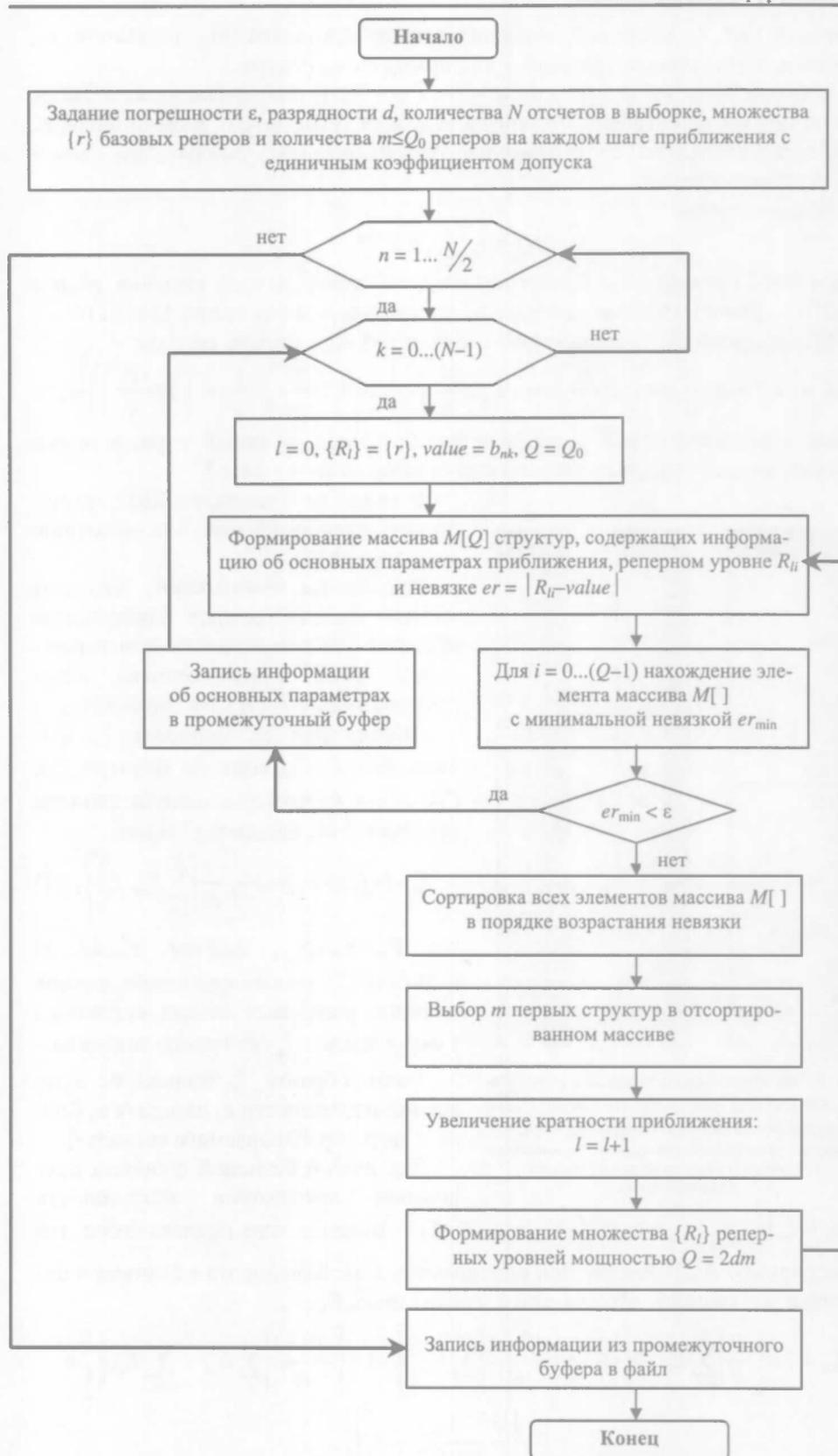


Рис. 2. Алгоритм получения информации об основных параметрах приближения

старший бит s_{nk} знаковый, младшая тетрада отводится под показатель p_{nk} степени, а оставшиеся три бита – под номер num_{nk} репера.

В таком представлении используются все биты информационного байта. А для показателя степени отводится младшая тетрада, что, в свою очередь, позволяет считывать ее с помощью одной команды, ускоряя тем самым процесс вычислений.

В этом случае

$$b_{nk} \approx r_{num_{nk}-1} \pm 2^{-p_{nk}}$$

и для $N=32$ косинусу $b_{11}=0,981$ соответствует приближенное значение, равное $r_4 \cdot 2^{-6} = 1 - 1/64 = 0,984$ (в двоичном представлении оно имеет вид 11010110₂).

Моделирование предложенного алгоритма на тестовом сигнале

$$f_k = \left[2^{d-1} + 2^d \frac{1}{4} \left(\cos \left(2\pi \frac{3k}{N} \right) - \cos \left(2\pi \frac{7k}{N} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{8k}{N} \right) - \frac{1}{3} \cos \left(2\pi \frac{12k}{N} \right) \right) \right],$$

представляющем собой суперпозицию базисных функций с различными амплитудами, приводит к результату, отраженному на рис. 3.

а		б		в	
	0		0		0
1	0	1	-1	1	-2
2	0	2	0	2	0
3	512	3	512	3	520
4	0	4	0	4	5
5	0	5	-1	5	-3
6	0	6	-1	6	-1
7	-512	7	-512	7	-529
8	256	8	256	8	256
9	0	9	0	9	-5
10	0	10	0	10	-1
11	0	11	0	11	17
12	-170.667	12	-171	12	-176
13	0	13	0	13	5
14	0	14	-1	14	0
15	0	15	0	15	-9

Рис. 3. Численное представление результата вычисления дискретного косинусного преобразования тестового сигнала: а – при непосредственном нахождении, б – многократной ($\epsilon=0,0001$) и в – однократной ($\epsilon=0,05$) аппроксимациях

$\xi_{пред} = \xi_n |_{\epsilon \rightarrow \epsilon_{пред}} \approx 1 + \epsilon(2^d - 1)$, где $(2^d - 1)$ – максимально представимое для d -разрядного АЦП число. Для определенных же базисов эта величина в несколько раз меньше, что связано с учетом знака E_{nk} :

$$\begin{aligned} \xi_n &\approx 1 + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{nk} f_k \right| < 1 + \left| \frac{2^d - 1}{N} \sum_{k=1}^N E_{nk} \right| = 1 + \left| \frac{2^d - 1}{N} \left(\sum_k E_{nk}^+ - \sum_k |E_{nk}^-| \right) \right| = \\ &= 1 + \left| \frac{2^d - 1}{N} [S_n^+ - S_n^-] \right|, \end{aligned}$$

В качестве эталонного ДКП применяется преобразование, вычисленное по формуле (1).

Результаты показывают, что для данной модели сигнала наибольшую абсолютную погрешность при вычислении ДКП предложенным алгоритмом имеют 7-я и 11-я гармоники.

Абсолютная погрешность ξ_n вычисления \bar{c}_n , исходя из формул (1), (3), (6) и специфики целочисленного пространства, определяется как

$$\xi_n \approx 1 + [|c_n - \bar{c}_n|] = 1 + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{nk} f_k \right|, \quad (7)$$

где $E_{nk} = b_{nk} - \bar{b}_{nk}$, причем $|E_{nk}| < \epsilon$. В формуле (7) первое слагаемое, равное единице, учитывает потери, связанные с округлением \bar{c}_n до целого значения.

Таким образом, ξ_n зависит от задаваемой погрешности ϵ , длины N выборки и вида обрабатываемого сигнала f_k .

Для любой базисной функции предельная абсолютная погрешность

где $S_n^+ = \sum_k E_{nk}^+$ и $S_n^- = \sum_k |E_{nk}^-|$ – соответственно суммы положительных и отрицательных абсолютных погрешностей аппроксимации отсчетов n -й гармоники базисной функции, зависящие от ε и N . После введения обозначений $S^+ = \max_n S_n^+$ и $S^- = \max_n S_n^-$ предельная погрешность $\xi_{\text{пред}}$ при вычислении ДКП запишется в виде

$$\xi_{\text{пред}} = 1 + \left[\frac{2^d - 1}{N} \max(S^+, S^-) \right].$$

Практические расчеты показывают, что для гармонической базы при $\varepsilon=0,05$ и $N=32$ $S^+=S^-=0,346313$, а $\xi_{\text{пред}}=45$. При этом наибольшая погрешность будет проявляться у нечетных гармоник.

Допустимость рассчитанной погрешности является основным преимуществом использования однократной аппроксимации по сравнению с многократной при ДКП или вычислении спектра посредством целочисленных процессоров с 12- или 16-разрядными аналого-цифровыми преобразователями.

Приведенные данные подтверждают эффективность использования предлагаемого алгоритма при вычислении ДКП, что позволяет выполнять эти процедуры на недорогих целочисленных процессорах.

Описанный алгоритм пригоден не только для ДКП, но и для преобразований с иными базисами, например для вейвлет-преобразования.

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. А.Л. Зайцева и др.; Под ред. Ю.Н. Александрова. М., 1978.

2. Блейхут Р.Э. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. И.И. Грушко. М., 1989.

Поступила в редакцию 18.04.2003.

Олег Чеславович Ролч – ассистент кафедры интеллектуальных систем.

Константин Михайлович Шестаков – кандидат технических наук, доцент кафедры интеллектуальных систем.

Василий Сергеевич Садов – кандидат технических наук, доцент кафедры интеллектуальных систем.

Александр Федорович Чернявский – академик НАН Беларуси, директор НИИПФП им. А.Н. Севченко.

УДК 681.3.06:51+612.821:007

Н.С. КОВАЛЕНКО, С.А. САМАЛЬ

ОРГАНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В СИНХРОННЫХ РЕЖИМАХ

Here the distributed processing organization of competing processes is examined in synchronic regimes. The methods to search minimal common time to implement the given volumes of calculations in synchronic regimes of competing processes interaction are proposed for the distributed organization and linear assessment of labor-intensiveness.

Информационно-аналитические системы поддержки принятия решений (ИАСППР) предназначены для сопровождения процесса планирования и управления сложными системами через использование данных, знаний и моделей. ИАСППР в социально-экономических системах являются «интел-

лектуальным» подклассом СППР, весьма сложны в реализации и дорогостоящи [1].

При решении таких задач существенное значение приобретают возможности, предоставляемые системами параллельной обработки конкурирующих процессов. Мы остановимся лишь на интересовавшем нас направлении параллельной обработки при проектировании интеллектуальных моделей социально-экономических систем.

При создании систем параллельной обработки данных, в том числе общесистемного и прикладного программного обеспечения для них, центральными являются две взаимосвязанные проблемы: минимизация времени реализации заданных объемов вычислений и синхронизация большого числа одновременно взаимодействующих параллельных процессов. Для решения каждой из них предлагаются свои подходы. Однако реализация сложных механизмов синхронизации влечет рост накладных расходов, что влияет на оперативность решения задач. В то же время неудовлетворительное решение этой проблемы приводит к тупиковым ситуациям [2, 3]. Поэтому целесообразно рассматривать эти проблемы вместе.

Один из путей решения указанных проблем состоит в разработке таких методов организации взаимодействия большого числа параллельных процессов, которые обеспечивают, с одной стороны, простоту механизмов синхронизации, а с другой – оперативность реализации заданных объемов вычислений.

В работе с помощью математического аппарата сетевых дуговзвешенных графов разработаны методы нахождения точных значений минимального общего времени выполнения заданных объемов вычислений в многопроцессорных системах (МС) с ограниченным числом процессоров и линейными оценками трудоемкости по числу блоков и процессов.

Предлагаемые методы минимизации общего времени выполнения заданных объемов вычислений в МС с ограниченным (по числу процессоров) параллелизмом основываются на структурировании программных ресурсов на параллельные блоки [4].

Пусть $p, p > 2$, – число процессоров МС; $n, n > 2$, – число конкурирующих процессов; $s, s > 2$, – число блоков структурированного программного ресурса, причем на множестве блоков установлен линейный порядок их выполнения $(1, 2, \dots, s)$. Предполагается, что все n процессов используют одну копию структурированного на блоки программного ресурса. В дальнейшем под процессом будем понимать выполнение блоков программного ресурса в порядке $(1, 2, \dots, s)$. При этом процесс называется сосредоточенным, когда для всех блоков задействован один и тот же процессор, и распределенным, если все блоки или часть из них выполняются на разных процессорах.

Предполагается также, что взаимодействие процессов, процессоров и блоков подчинено следующим условиям:

- 1) ни один из блоков программного ресурса не может обрабатываться одновременно более чем одним процессором;
- 2) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока;
- 3) обработка каждого блока осуществляется непрерывно;
- 4) распределение блоков программного ресурса по процессорам для каждого из процессов осуществляется по правилу: блок с номером $j = kp + i$, $j = 1, s$, $i = 1, p$, $k > 0$, распределяется на процессор с номером i .

Наряду с 1) – 4) введем дополнительные условия, которые определяют два синхронных режима взаимодействия процессов, процессоров и блоков:

5) для каждого из процессов момент окончания выполнения блока на i -м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего блока на $(i+1)$ -м процессоре, $i = \overline{1, p-1}$;

6) для каждого из блоков программного ресурса момент завершения его выполнения l -м процессом совпадает с моментом начала его выполнения $(l+1)$ -м процессом на том же процессоре, $l = \overline{1, n-1}$.

Условия 1) – 6) определяют два базовых синхронных режима взаимодействия процессов, процессоров и блоков программного ресурса, каждый из которых получается очередным добавлением к 1) – 4) условий 5) и 6) соответственно.

Первый синхронный режим, определяемый 1) – 5), обеспечивает непрерывное выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из процессов, а второй, определяемый 1) – 4), 6), обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

Далее будем предполагать, что система из n процессов является неоднородной, т. е. время выполнения блоков программного ресурса существенно зависит от объемов обрабатываемых данных и их структуры. Пусть $[t_{ij}]$ – $(n \times s)$ -матрица времени выполнения блоков программного ресурса, где t_{ij} – время выполнения j -го блока i -го процесса, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$.

1. Синхронный режим с непрерывным выполнением блоков программного ресурса каждым из процессов

Рассмотрим вначале первый синхронный режим. Минимальное общее время выполнения n конкурирующих процессов на p процессорах обозначим через $T_c^1(p, n, s)$, для вычисления этой величины рассмотрим два случая.

Первый случай – $s=p$, т. е. число процессоров МС является достаточным. Тогда, согласно условию 4), для всех n , $n > 2$, процессов каждый j -й блок, $j = \overline{1, s}$, распределяется на j -й процессор. При этом с учетом условия 5), которое определяет первый синхронный режим, начало выполнения первого блока для каждого из последующих процессов, начиная со второго, будет определяться величинами

$$\max_{1 \leq u \leq p} \left[\sum_{i=1}^u t_{ij} - \sum_{i=1}^{u-1} t_{i+1,j} \right]. \quad (1)$$

Физический смысл величин (1) состоит в том, что они указывают моменты старта очередного процесса по отношению к предыдущему.

Учитывая (1) и тот факт, что длительность выполнения последнего процесса составляет $\sum_{j=1}^p t_{nj}$, для вычисления величины $T_c^1(p, n, s)$ получим формулу:

$$T_c^1(p, n, s=p) = \sum_{i=1}^{n-1} \max_{1 \leq u \leq p} \left[\sum_{j=1}^u t_{ij} - \sum_{j=1}^{u-1} t_{i+1,j} \right] + \sum_{j=1}^p t_{nj}. \quad (2)$$

Заметим, что в условиях рассматриваемого режима взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса удобно отображать с помощью аппарата линейных диаграмм Ганта [5]. Такая диаграмма при $s=p$

приведена на рис. 1, причем время выполнения блоков для каждого из процессов указано на диаграмме.

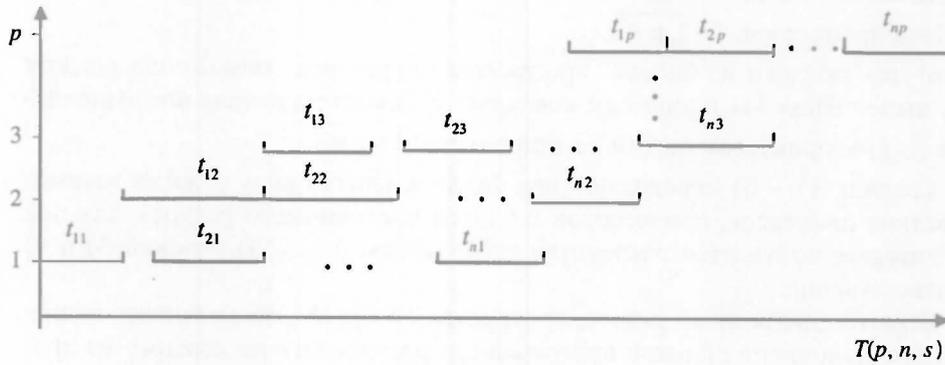


Рис. 1

Замечание. При $s < p$ для вычисления величины $T(p, n, s)$ достаточно взять s процессоров и воспользоваться соотношением (2), заменив в нем p на s . Оставшиеся $p-s$ процессоров в этом случае не будут задействованы.

Рассмотрим далее случай, когда $s > p$. Пусть $s = kp$, $k > 1$. Тогда разобьем множество блоков на k групп по p блоков в каждой, что равносильно разбиению исходной матрицы времени выполнения блоков $[t_{ij}]$ на k подматриц по p столбцов в каждой.

В дальнейшем понадобятся следующие обозначения:

$t'_{ij} = t_{i, (i-1)p+j}$ – время выполнения j -го блока i -го процесса в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, k}$;

T_i^l – суммарная длительность выполнения очередных p блоков i -го процесса в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, k}$;

δ_i^l – время задержки начала выполнения первого блока $(i+1)$ -го процесса по отношению к i -му процессу в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n-1}$, $l = \overline{1, k}$;

δ_n^l – время задержки начала выполнения первого блока первого процесса в $(l+1)$ -й группе блоков по отношению к первому блоку n -го процесса в l -й группе блоков, $l = \overline{1, k-1}$.

Вычислим значения T_i^l , δ_i^l и δ_n^l . В силу условия 5), которое определяет первый синхронный режим, получим:

$$T_i^l = \sum_{j=1}^p t'_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, l = \overline{1, k}. \quad (3)$$

$$\delta_i^l = \max_{1 \leq u \leq p} \left[\sum_{j=1}^u t'_{ij} - \sum_{j=1}^{u-1} t'_{i+1, j} \right], \quad i = \overline{1, n-1}, l = \overline{1, k}; \quad (4)$$

$$\delta_n^l = \max_{1 \leq u \leq p} \left[\sum_{j=1}^u t'_{nj} - \sum_{j=1}^{u-1} t'_{1, j} \right], \quad l = \overline{1, k-1}. \quad (5)$$

Отобразим далее взаимодействие процессов, процессоров и блоков с учетом условий 1) – 5), которые определяют рассматриваемый синхронный

режим в виде сетевого дуговзвешенного графа G_1 (рис. 2). Вершины графа расположим в узлах прямоугольной решетки размерности $n \times (k+1)$, при этом каждая из них, за исключением вершин $(k+1)$ -го уровня, будет определять момент начала выполнения очередных p блоков i -го процесса в l -и группе процессов. Пронумеруем эти вершины парой чисел (i, l) , $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, k}$. Вершины $(k+1)$ -го уровня определяют моменты завершения выполнения процессов и являются висячими.

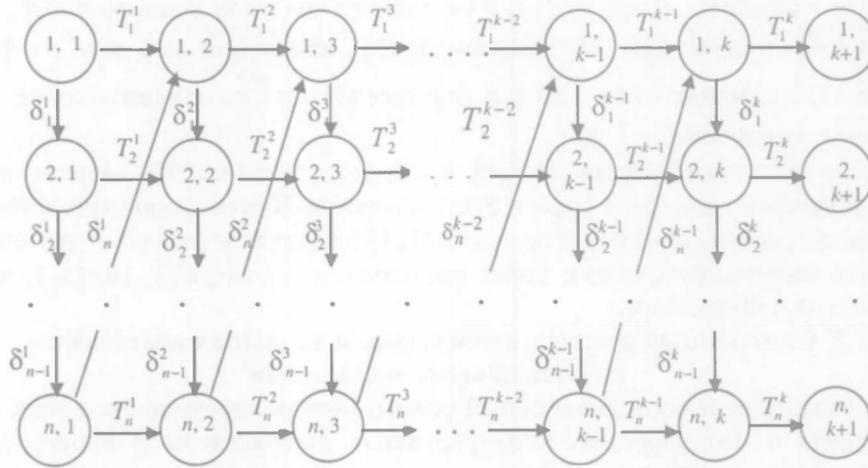


Рис. 2

Вершины в графе соединим дугами трех типов: горизонтальными дугами соединим вершины (i, l) и $(i, l+1)$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, k}$; вертикальными – вершины (i, l) и $(i+1, l)$, $i = \overline{1, n-1}$, $l = \overline{1, k}$; наклонными (диагональными) – вершины (n, l) и $(i, l+1)$, $l = \overline{1, k-1}$.

Горизонтальные дуги отражают продолжительность выполнения очередных p блоков i -го процесса в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, k}$. Их длины определяются по формулам (3). Вертикальные дуги в графе отражают время задержек начала выполнения первого блока $(i+1)$ -го процесса относительно начала выполнения первого блока i -го процесса в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n-1}$, $l = \overline{1, k}$. Длины этих дуг вычисляются по формулам (4). Наклонные дуги определяют время задержек начала выполнения первого блока первого процесса в $(l+1)$ -й группе блоков по отношению к первому блоку n -го процесса в l -й группе, $l = \overline{1, k-1}$. Их длины вычисляются по формулам (5).

Построенный таким образом сетевой дуговзвешенный граф G_1 полностью отображает во времени выполнение n конкурирующих процессов на p процессорах в первом синхронном режиме с непрерывным выполнением блоков программного ресурса каждым из процессов.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено условиям 1) – 5), то минимальное общее время выполнения n , $n > 2$, конкурирующих процессов на p , $p > 2$, процессо-

рах при $s=kp$, $k>1$, определяется длиной критического пути в сетевом дуговзвешенном графе G_1 из начальной вершины $(1, 1)$ в заключительную висячую вершину $(n, k+1)$.

В случае когда $s=kp+r$, $k>1$, $1<r<p-1$, минимальное общее время выполнения n процессов на p процессорах определяется аналогичным образом, как и при $s=kp$, $k>1$. Отличие состоит в том, что при разбиении исходной матрицы времени выполнения блоков $[t_{ij}]$ на подматрицы по p столбцов получится $k+1$ подматрица, причем последняя $(k+1)$ -я подматрица содержит только r столбцов. Формулы (3) и (4) аналогичны с той лишь разницей, что $l = \overline{1, k+1}$, причем при $l=k+1$ в формуле (3) j изменяется от 1 до r , а в формуле (4) u изменяется от 1 до r . В формуле (5) $l = \overline{1, k}$, причем при $l=k$ значение u изменяется от 1 до r .

Соответствующий сетевой граф будет содержать $n \times (k+2)$ вершин, причем n вершин на $(k+2)$ -м уровне будут висячими. Критический путь в таком сетевом графе из начальной вершины $(1, 1)$ в конечную $(n, k+2)$ будет определять минимальное общее время выполнения $s=kp+r$, $k>1$, $1<r<p-1$, процессов на p процессорах.

2. Синхронный режим с непрерывным выполнением каждого из блоков всеми процессами

Рассмотрим второй синхронный режим. Минимальное общее время выполнения n неоднородных конкурирующих процессов на p процессорах обозначим через $T_c^2(p, n, s)$. Заметим, что при $s=p$ рассматриваемый режим взаимодействия процессов, процессоров и блоков совпадает с технологией выполнения операций в многостадийной задаче теории расписаний с n требованиями и s приборами, когда каждый прибор обслуживает требования непрерывно одно за другим [5]. Следовательно, минимальное общее время выполнения n неоднородных конкурирующих процессов при $s=p$ будет определяться функционалом этой задачи. Полагая в нем время обслуживания i -го требования j -м прибором равным t_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, получим следующее равенство:

$$T_c^2(p, n, s = p) = \sum_{j=1}^{n-1} \max_{1 \leq v \leq n} \left[\sum_{i=1}^v t_{ij} - \sum_{i=1}^{v-1} t_{i, j+1} \right] + \sum_{i=1}^n t_{i, s} \quad (6)$$

В случае $s < p$ для вычисления величины $T_c^2(p, n, s)$ достаточно взять s процессоров и воспользоваться соотношением (6), заменив в нем p на s . Оставшиеся процессоры $(p-1)$ в этом случае не будут задействованы.

Пусть далее $s=kp+r$, $k>1$, $1<r<p-1$. Тогда произведем разбиение множества блоков на $k+1$ группы по p блоков в каждой, за исключением последней, которая может содержать r блоков, если s не кратно p . Это равносильно разбиению исходной матрицы времени выполнения блоков $[t_{ij}]$ на $k+1$ подматрицу по p столбцов в каждой, причем подматрица $k+1$ в случае, когда s не кратно p , будет содержать r столбцов.

При $s=kp$, $k>1$, введем следующие обозначения:

$t_{ij} = t_{i, (l-1)p+j}$ – время выполнения j -го блока i -го процесса в l -й группе блоков, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, k}$;

T_j^l – суммарная длительность выполнения j -го блока в l -й группе блоков всеми n процессами, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, k}$;

Δ_j^l – время задержки начала выполнения $(j-1)$ -го блока по отношению к j -му блоку для первого процесса в l -й группе блоков, $j = \overline{1, p-1}$, $l = \overline{1, k}$;

Δ_p^l – время задержки начала выполнения первого блока в $(l-1)$ -й группе по отношению к p -му блоку в l -й группе, $l = \overline{1, k-1}$.

В силу того что рассматриваемый режим распределенной обработки обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока программного ресурса всеми процессами и с учетом введенных обозначений, имеют место следующие соотношения:

$$T_j^l = \sum_{i=1}^n t_{ij}^l, \quad j = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, k}; \quad (7)$$

$$\Delta_j^l = \max_{1 \leq v \leq n} \left[\sum_{i=1}^v t_{ij}^l - \sum_{i=1}^{v-1} t_{i, j+1}^l \right], \quad j = \overline{1, p-1}, \quad l = \overline{1, k}; \quad (8)$$

$$\Delta_p^l = \max_{1 \leq v \leq n} \left[\sum_{i=1}^v t_{ip}^l - \sum_{i=1}^{v-1} t_{i, l+1}^l \right], \quad l = \overline{1, k-1}. \quad (9)$$

При $s=kp+r$, $k \geq 1$, $1 < r < p-1$, в формулах (6), (7) $l = \overline{1, k+1}$, причем при $l=k+1$ j изменяется от 1 до r . Формула (8) для первых k групп блоков имеет тот же вид, но при $l=k+1$ j изменяется от 1 до $r-1$. В формуле (9) $l = \overline{1, k}$. Далее строим сетевой дуговзвешенный граф специального вида G_2 (рис. 3). В узлах прямоугольной решетки размерности $(k+2) \times p$ расположим вершины графа, каждая из которых, за исключением p заключительных вершин (из них $p-r$ находятся на $(k+1)$ -м уровне и r – на $(k+2)$ -м), определяет момент старта j -го блока в l -й группе блоков, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, k}$, а для $(k+1)$ -го уровня – $j = \overline{1, r}$. При этом на $(k+2)$ -м уровне граф G_2 будет содержать $p-r$

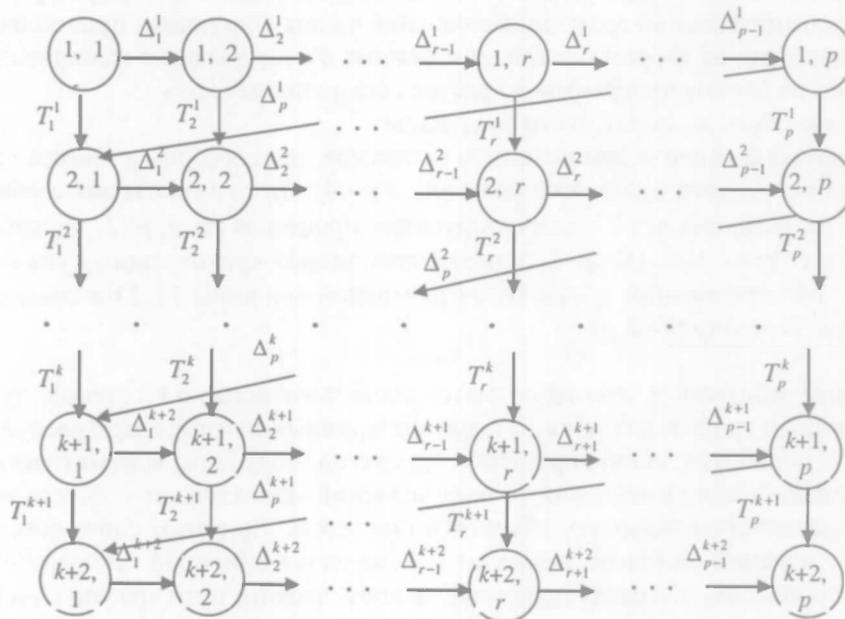


Рис. 3

фиктивных вершин. Заключительные висячие вершины определяют моменты завершения выполнения процессов.

Пронумеруем вершины графа G_2 парой чисел (l, j) , первое из которых означает номер группы блоков $l = (1, k + 2)$, а второе – номер блока первого процесса в этой группе $j = (1, p)$.

Вершины в графе соединим дугами трех типов: горизонтальными дугами соединим вершины (l, j) и $(l, j+1)$, $l = \overline{1, k+2}$, $j = \overline{1, p}$; вертикальными – вершины (l, j) и $(l+1, j)$, $l = \overline{1, k+2}$, $j = \overline{1, p}$; наклонными (диагональными) – вершины (l, p) и $(l+1, 1)$, $l = \overline{1, k+1}$.

Горизонтальным дугам припишем время задержки начала выполнения $(j+1)$ -го блока по отношению к j -му для первого процесса в каждой из l групп блоков, $j = \overline{1, p-1}$, $l = \overline{1, k}$, которые вычисляются по формулам (8). При этом горизонтальным дугам, соединяющим соседние вершины, начиная с вершины $(k+1, r)$ до вершины $(k+1, p)$, на $(k+1)$ -м уровне и всем горизонтальным дугам на $(k+2)$ -м уровне припишем нулевую длительность. Вертикальным дугам припишем суммарные длительности выполнения j -го блока в l -й группе блоков всеми n процессами, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, k}$, которые вычисляются по формулам (7), с учетом того, что при $l=k+1$, $j = \overline{1, r}$. При этом вертикальным дугам, выходящим из вершин $(k+1)$ -го уровня, начиная с вершины $(k+1, r+1)$, припишем нулевую длительность. Наклонным (диагональным) дугам припишем время задержки начала выполнения первого блока в $(l+1)$ -й группе по отношению к p -му блоку в l -й группе, $l = \overline{1, k}$, которое вычисляется по формулам (9). При этом наклонной дуге $((k+1, p), (k+2, 1))$ припишем нулевую длительность.

Построенный таким образом сетевой дуговзвешенный граф G_2 полностью отображает во времени выполнение n конкурирующих процессов на p процессорах во втором синхронном режиме с непрерывным выполнением каждого из блоков программного ресурса всеми процессами.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. Если взаимодействие процессов, процессоров и блоков программного ресурса подчинено условиям 1) – 4), 6), то минимальное общее время выполнения n , $n > 2$, конкурирующих процессов на p , $p > 2$, процессорах при $s = kp + r$, $k > 1$, $1 < r < p - 1$, определяется длиной критического пути в сетевом дуговзвешенном графе G_2 из начальной вершины $(1, 1)$ в заключительную вершину $(k+2, p)$.

Таким образом, с помощью математического аппарата сетевых дуговзвешенных графов для двух базовых синхронных режимов при распределенной обработке конкурирующих процессов получены математические соотношения для вычисления точных значений минимального общего времени выполнения заданных объемов вычислений. При этом сложность таких вычислений, согласно теоремам 1, 2, является линейной по числу блоков и процессов, что следует из свойств критического пути графов G_1 и G_2 , регулярности их структуры и линейности по числу дуг в зависимости от s и n . Заметим, что ранее аналогичная задача решалась с использованием аппарата теории расписаний и приемов совмещения линейных диаграмм Ганта,

при этом были получены достижимые оценки (в отдельных случаях точные значения), сложность вычислений по которым квадратичная [6]. Предложенный подход с использованием аппарата дуговзвешенных графов позволил получить не только точные значения, но и обеспечить линейную трудоемкость соответствующих алгоритмов, базирующихся на предложенных методах.

Полученные формулы и математические соотношения служат отправной точкой в решении проблем синхронизации множества взаимодействующих конкурирующих процессов в многопроцессорных системах с распределенной обработкой данных.

1. Морозевич А.Н., Железко Б.А., Самаль С.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3.
2. Воеводин В.В. Математические основы параллельных вычислений. М., 1991.
3. Иванников В.П., Гайсарян С.С. // Кибернетика и вычислительная техника / Под ред. В.А. Мельникова. М., 1986. Вып. 2. С. 3.
4. Капитонова Ю.В., Коваленко Н.С. // Кибернетика. 1981. № 3. С. 17.
5. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевиц В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М., 1989.
6. Коваленко Н.С., Метельский В.М. // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 3. С. 31.

Поступила в редакцию 16.10.2003.

Николай Семенович Коваленко – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики БГЭУ.

Сергей Александрович Самаль – кандидат экономических наук, доцент, проректор по учебной работе БГЭУ.



УДК 396.677

В.И. ДЕМИДЧИК, Р.В. КОРНЕВ

АНАЛИЗ МИКРОВОЛНОВЫХ СВОЙСТВ ПРОВОЛОЧНЫХ КИРАЛЬНЫХ РАССЕЙВАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

A numerical technique of polarizabilities calculation of wire elements having chiral properties is offered. The calculations are based on the method of the integral equation. The comparison of numerical results and the analytical calculations is carried out.

Электродинамика композиционных материалов является активно развивающейся отраслью науки. Применение в различных СВЧ-приборах подобных материалов представляется весьма перспективным направлением, с которым связаны надежды как на улучшение характеристик традиционных устройств, так и на разработку новых технических решений.

Как известно, композиты, используемые в СВЧ-технике, представляют собой диэлектрические матрицы, в которые диспергированы частицы, произвольные по геометрии и внутренней структуре. Основной задачей при проектировании подобных сред является определение эффективных электродинамических параметров по геометрии отдельных включений, их электромагнитным свойствам и характеру расположения в диэлектрике. Особый интерес вызывают киральные среды на основе частиц в виде проводящих волокон различной конфигурации, так как подобные материалы находят все большее применение в пассивных элементах техники СВЧ для создания радиопоглощающих покрытий и материалов [1].

Для макроскопического описания электромагнитных свойств отдельной частицы используются коэффициенты поляризуемости (КП) [2]. В данной работе предлагается методика расчета КП тонкопроволочных рассеивателей, основанная на численном решении методом коллокаций с применением кусочно-постоянных базисных функций интегрального уравнения (ИУ) Поклинггона для распределения тока [3].

В качестве примера рассмотрим киральную частицу в виде витка спирали с присоединенными проводниками, как показано на рис. 1. Задав падающее поле и решив ИУ, находим ток $I(s)$ вдоль рассеивателя.

По найденному распределению тока определяются значения электрического p и магнитного m моментов проволочного элемента [4]:

$$p = \frac{1}{i\omega} \int \mathbf{l}(s) ds, \quad (1)$$

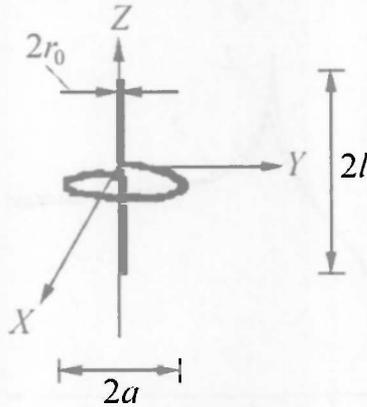


Рис. 1. Геометрия частицы

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}(s) \times \mathbf{I}(s)] ds, \quad (2)$$

где ω – частота падающего поля, $\mathbf{I}(s)$ – ток вдоль частицы.

Интегрирование в формулах (1), (2) ведется по длине проводника.

Дипольные моменты исследуемой частицы связаны с КП следующими соотношениями [2]:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 [\chi_{ee} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}) + i\eta \chi_{em} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{H})] \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

$$\mathbf{m} = [-\chi_{mm} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{H}) - i\eta^{-1} \chi_{me} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E})] \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0},$$

которые дают возможность определить χ_{ee} , χ_{em} , χ_{em} , χ_{me} , для чего рассматриваются два способа возбуждения частицы.

В случае когда вектор \mathbf{E} падающего поля направлен параллельно оси проволочного элемента ($\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$, при этом $\mathbf{H} \perp \mathbf{e}_z$), коэффициенты χ_{ee} и χ_{me} в (3), (4) выражаются через дипольные моменты $\mathbf{p}^E = p_z^E \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{m}^E = m_z^E \mathbf{e}_z$ следующим образом:

$$\chi_{ee} = \frac{p_z^E}{\epsilon_0 E_z}, \quad \chi_{me} = i \frac{m_z^E \eta}{E_z}. \quad (5)$$

Аналогично определяются коэффициенты χ_{mm} , χ_{em} , если ось частицы параллельна вектору \mathbf{H} падающего поля ($\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z$):

$$\chi_{em} = -i \frac{p_z^H}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} H_z}, \quad \chi_{mm} = -\frac{m_z^H}{H_z}. \quad (6)$$

Таким образом, численно решив ИУ относительно распределения тока и определив по формулам (1), (2) дипольные моменты тонкопроволочного рассеивателя, нетрудно рассчитать его КП.

Проведено сравнение результатов расчета с данными, полученными на основе теории цепей. В этом случае проволочный элемент представляется в виде резонансного контура, образованного кольцом и проводниками с заданными значениями их емкости, индуктивности и сопротивления. Подробный анализ исследуемых частиц и приближенные аналитические выражения для КП в этом случае приведены в работе [5].

На рис. 2 показаны зависимости КП от частоты при численном решении (5), (6) (кривая 1) и приведены результаты аналитического приближения [5] (кривая 2). Рассматриваемая частица (см. рис. 1) имеет следующую геометрию: $l=5$ мм; $a=5$ мм; $r_0=0,1$ мм. Как видно, хорошее соответствие численного решения аналитическому наблюдается в широком диапазоне частот, кроме областей, в которых частота падающего поля приближается к резонансной частоте частицы. Стоит обратить внимание на идентичность кривых, изображенных на рис. 2 в и рис. 2 г (кривая 1), которая свидетельствует о выполнении принципа взаимности $\chi_{em} = \chi_{me}$ и может служить дополнительным критерием адекватности предложенной модели расчета.

Предлагаемая методика анализа электромагнитных свойств проволочных частиц применима к расчету произвольных по геометрии рассеивателей. На основе полученных результатов сравнительно просто можно опре-

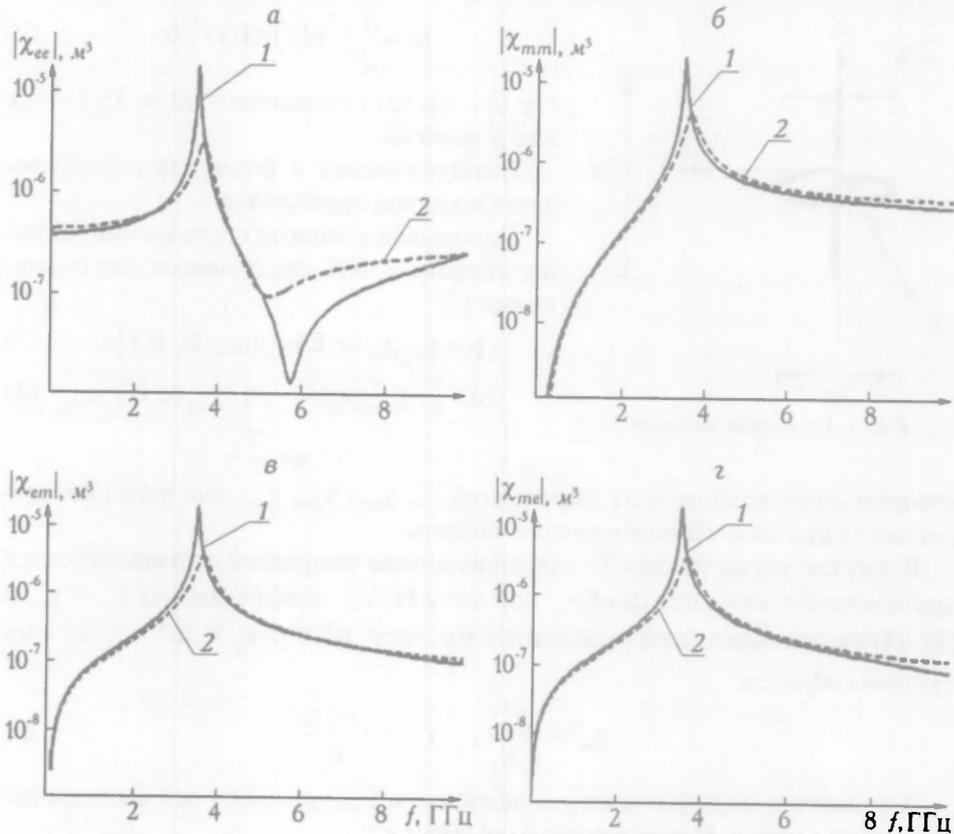


Рис. 2. КП киральной частицы:
1 – расчет по формулам (3), (4); 2 – расчет по формулам (5)

делить эффективные электродинамические параметры композиционного материала. К примеру, если размеры отдельного рассеивателя малы по сравнению с длиной волны и объемный коэффициент заполнения $f=nV$ (n – число частиц в единице объема, V – объем рассеивателя) мал, то эффективные параметры среды можно рассчитать методом Максвелла – Гарнета [6]:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + 3 \left[\frac{1 - b_{mm}/3}{(1 - b_{ee}/3)(1 - b_{mm}/3) - b_{em}b_{me}/9} - 1 \right],$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 3 \left[\frac{1 - b_{ee}/3}{(1 - b_{ee}/3)(1 - b_{mm}/3) - b_{em}b_{me}/9} - 1 \right],$$

$$\kappa = \frac{ib_{em}}{(1 - b_{ee}/3)(1 - b_{mm}/3) - b_{em}b_{me}/9},$$

$$b_{ee} = n\chi_{ee}, \quad b_{em} = in\chi_{em},$$

$$b_{me} = -b_{em}, \quad b_{mm} = -n\chi_{mm},$$

где ϵ , μ – эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости, κ – параметр киральности композита, а коэффициенты χ_{ee} , χ_{mm} , χ_{em} , χ_{me} определяются из соотношений (5), (6).

Таким образом, метод ИУ позволяет провести расчет КП тонкопроводящих структур произвольной геометрии, что дает возможность анализа композиционных материалов на основе проводящих волокон.

1. Третьяков С. А. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 10. С. 1457.
2. Jaggard D.L., Mickelson A.R., Papas C.H. // J. Appl. Phys. 1979. Vol. 8. P. 211.
3. Демидчик В.И., Рунов А.В., Калашников Н.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 3. С. 82.
4. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М., 2001.
5. Tret'yakov S.A., Mariotte F., Heliot J.P. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1996. Vol. 44. № 7. P. 1006.
6. Шатров А. Д. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 10. С. 1168.

Поступила в редакцию 14.03.2003.

Валерий Иосифович Демидчик – кандидат технических наук, доцент кафедры радиофизики и электроники.

Руслан Владимирович Корнев – аспирант кафедры радиофизики и электроники. Научный руководитель – В.И. Демидчик.

УДК 336:519

P.M. LAPPO

PROBABILITY OF RUIN IN COLLECTIVE RISK MODEL WITH RANDOM PREMIUMS*

Рассмотрена модель коллективного риска со случайными премиями и получено выражение для вероятности разорения за бесконечное время.

For $t > 0$, let $U(t)$ denote the surplus of the insurer at time t . In the classic model (see, for example, [1, 2]) it is assumed that premiums are received continuously at a constant rate, $c > 0$. Let $S(t) = \sum_{i=1}^{N_2(t)} X_i$, where $N_2(t)$ is the claim number process, X_i – are the claim amounts. We assume that $N_2(t)$ is the Poisson process with parameter λ_2 , and X_j are independent identically distributed random variables with moment generation function (m. g. f.) $M_X(r)$. If $U(0) = u$ is the surplus at time 0, then in the classic model

$$U(t) = u + ct - S(t). \quad (1)$$

In the papers [3, 4] the premium income is an arbitrary nonnegative function. In this paper we assume that the premium income is a compound Poisson process

$$V(t) = \sum_{j=1}^{N_1(t)} Y_j,$$

where $N_1(t)$ denote the number of premiums, and Y_j denote the amount of the j th premium. We assume that the process $N_1(t)$ is the Poisson process with parameter λ_1 , and Y_j are independent identically distributed random variables with m. g. f. $M_Y(r)$. The processes $N_1(t)$, $N_2(t)$ and random variables X_i and Y_j are independent with $\mu_X = E\{X_i\}$ and $\mu_Y = E\{Y_j\}$. In our model the surplus is

$$U(t) = u + \sum_{j=1}^{N_1(t)} Y_j - \sum_{i=1}^{N_2(t)} X_i. \quad (2)$$

Let us define $T = \inf\{t: t > 0, U(t) < 0\}$ as the time when ruin occurs (with the understanding that $T = \infty$ is the symbolic for $U(t) > 0$ for all $t > 0$; that is, ruin does not occur). Further we denote by $\psi(u) = P(T < \infty)$ the probability of ruin considered as

* Статья публикуется в авторской редакции.

a function of initial surplus u . It is well known (see Theorem 12.1 from [1]) that for the model (1) for $u > 0$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\{e^{-RU(T)} \mid T < \infty\}},$$

where R is the adjustment coefficient. It is defined as a positive solution of the equation $\lambda_2 + cr = \lambda_2 M_X(r)$. Here we are obtaining the expression for $\psi(u)$ for the model (2).

Theorem. If $U(t)$ is defined by (2), and $\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X > 0$ then

$$\psi(u) = \frac{e^{-\bar{R}u}}{E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T < \infty]},$$

where R is a positive solution of the equation

$$\lambda_1 \{M_Y(-r) - 1\} = -\lambda_2 \{M_X(r) - 1\}. \quad (3)$$

Proof of Theorem. For $t > 0$ and $r > 0$ we consider

$$E\{e^{-rU(t)}\} = E\{e^{-rU(t)} \mid T \leq t\}P(T \leq t) + E\{e^{-rU(t)} \mid T > t\}P(T > t). \quad (4)$$

Since $U(t) = u + V(t) - S(t)$, the term on the left-hand side of (4) is

$$\exp\{-ru + \lambda_1 t(M_Y(-r) - 1) + \lambda_2 t(M_X(r) - 1)\}. \quad (5)$$

In the first term of the right-hand side, we write

$$U(t) = U(T) + [U(t) - U(T)] = U(T) + \{V(t) - V(T)\} - \{S(t) - S(T)\}.$$

For given $T \leq t$, the terms in brackets are independent and independent from $U(T)$. The term in the first brackets has a compound Poisson distribution with parameter $\lambda_1(t-T)$, the term in the second brackets – with parameter $\lambda_2(t-T)$. Hence the first term on the right-hand side of (4) can be written as

$$E[\exp(-rU(T)) \exp\{\lambda_1(t-T)(M_Y(-r) - 1) + \lambda_2(t-T)(M_X(r) - 1)\} \mid T \leq t] P(T \leq t). \quad (6)$$

If we choose r such that $\lambda_1 \{M_Y(-r) - 1\} = -\lambda_2 \{M_X(r) - 1\}$, expressions (5) and (6) can be simplified. Substituting the simplified expressions with $r = \bar{R}$ into (4) we obtain

$$e^{-\bar{R}u} = E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T \leq t] P(T \leq t) + E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T > t] P(T > t). \quad (7)$$

The first term on the right-hand side converges to

$$E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T < \infty] \psi(u).$$

To prove Theorem we show that the second term on the right-hand side of (7) vanishes for $t \rightarrow \infty$.

We obtain from (2) that $E[U(t)] = u + \lambda_1 \mu_Y t - \lambda_2 \mu_X t = u + (\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X)t$. $Var[U(t)] = (\lambda_1 p_2^Y + \lambda_2 p_2^X)t$, where $p_2^Y = E\{X^2\}$ and $p_2^X = E\{\bar{X}^2\}$. Then

$$\begin{aligned} & E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T > t, 0 < U(t) < u + (\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1 p_2^Y + \lambda_2 p_2^X)t^{2/3}}] \times \\ & \times P\{T > t, 0 < U(t) < u + (\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1 p_2^Y + \lambda_2 p_2^X)t^{2/3}}\} + \\ & + E[e^{-\bar{R}U(T)} \mid T > t, U(t) > u + (\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1 p_2^Y + \lambda_2 p_2^X)t^{2/3}}] \times \\ & \times P\{T > t, U(t) > u + (\lambda_1 \mu_Y - \lambda_2 \mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1 p_2^Y + \lambda_2 p_2^X)t^{2/3}}\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< P\left\{U(t) < u + (\lambda_1\mu_Y - \lambda_2\mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1\rho_2^Y + \lambda_2\rho_2^X)t^{2/3}}\right\} + \\
&+ \exp\left\{-\bar{R}(u + (\lambda_1\mu_Y - \lambda_2\mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1\rho_2^Y + \lambda_2\rho_2^X)t^{2/3}}\right\} \leq \\
&\leq t^{-1/3} + \exp\left\{-\bar{R}(u + (\lambda_1\mu_Y - \lambda_2\mu_X)t - \sqrt{(\lambda_1\rho_2^Y + \lambda_2\rho_2^X)t^{2/3}}\right\}
\end{aligned}$$

by Chebyshev's inequality. But if $(\lambda_1\mu_Y - \lambda_2\mu_X) > 0$ this upper bound tends to 0 for $t \rightarrow \infty$.

Example. Derive an expression for \bar{R} in the special case where the Y_i' s common distribution is an exponential with parameter β_1 , and X_i' s distribution is an exponential with parameter β_2 . We assume that $\lambda_1 \neq \lambda_2$, and $\lambda_1/\beta_1 > \lambda_2/\beta_2$. Then the equation (3) has the form

$$\lambda_1 \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + r} - 1 \right) = -\lambda_2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - r} - 1 \right).$$

Hence the positive solution is

$$\bar{R} = \frac{\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

We can show like in [1, p. 353, 354] that in the case of exponential distribution of the random variables X_i' s

$$E\left[e^{-rU(T)} \mid T < \infty \right] = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \bar{R}}.$$

This gives us the expression for $\psi(u)$

$$\psi(u) = \frac{\lambda_2(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2(\lambda_1 + \lambda_2)} \exp\left\{-\frac{\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1}{\lambda_1 + \lambda_2} u\right\}.$$

1. Newton L., Bowers J.R. et al. Actuarial Mathematics / The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1986.

2. Gerber H.G. An Introduction to Mathematical Risk Theory / University Of Michigan, 1979.

3. Ignatov Z.G., Kaishev V.K. // Scandinavian Actuarial J. 2000. № 1. P. 46.

4. Lappo P.M. Computer Data Analysis and Modeling. Proceedings of the six International Conference. Robustness and Computer Intensive Methods (September 10–14, 2001, Minsk). Minsk, 2001. P. 45.

Поступила в редакцию 31.01.2003.

Петр Михайлович Ланно – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.

УДК 512.542

Е.А. ЗАДОРЖНИК

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

It is proved that if N is a normal subgroup of a finite group G with supersolvable faktorgroup G/N and if every nonpronormal in G subgroup from N of prime order and every its subgroup of order 4 have a supersolvable supplement in G , than G is supersolvable.

Будем рассматривать только конечные группы. Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [1]. Напомним некоторые из них.

Подгруппа H группы G называется пронормальной в G , если любая подгруппа K из G , сопряженная с H в G , сопряжена с H и в подгруппе, порожденной H и K . Добавлением к подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G , что $HK=G$. Группа называется сверхразрешимой, если она обладает нормальным рядом с циклическими факторами.

Согласно Хупперту [2], группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп являются простыми числами. Этот красивый и весьма нетривиальный результат положил начало большому числу исследований, связанных с нахождением критериев сверхразрешимости групп и изучением различных обобщений сверхразрешимых групп. В частности, один интересный критерий сверхразрешимости группы был получен в работе [3], где доказано, что группа G нечетного порядка сверхразрешима, если у нее все минимальные подгруппы нормальны.

Существенно расширяет этот и соответствующий результат работы [4] следующая

Теорема. Пусть N – нормальная подгруппа группы G , такая, что факторгруппа G/N сверхразрешима. Если каждая непронормальная в G подгруппа из N простого порядка, а также каждая ее подгруппа порядка 4 имеют в G сверхразрешимое добавление, то группа G сверхразрешима.

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т. е. существуют несверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди них группу G , имеющую наименьший порядок. Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G . Из нормальности N в G следует, что $N \cap H < H$. Так как подгруппа сверхразрешимой группы сверхразрешима, то факторгруппа $H/N \cap H \cong HN/N$ также сверхразрешима.

Пусть A – некоторая непронормальная в H подгруппа простого порядка или порядка 4, содержащаяся в $N \cap H$. Подгруппа A является непронормальной и в G , так как в противном случае она была бы пронормальной и в любой подгруппе группы G , в частности в H . Ввиду условия теоремы подгруппа A имеет в G сверхразрешимое добавление, т. е. $AT=G$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы T из G . Но так как, согласно тождеству Дедекинда, верно равенство $H=H \cap AT=A(H \cap T)$, то подгруппа A имеет сверхразрешимое добавление $H \cap T$ в H . Ввиду того что группа H удовлетворяет условию теоремы, а для собственных подгрупп группы G теорема верна, получаем, что H сверхразрешима.

Таким образом, G – минимальная несверхразрешимая группа. Используя результаты работ [2] и [5], видим, что в группе G имеется нормальная неединичная силовская p -подгруппа P , удовлетворяющая условиям:

1) P – наименьшая нормальная подгруппа, такая, что факторгруппа G/P сверхразрешима;

2) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G ;

3) P имеет экспоненту p , если p нечетно, либо экспонента P равна 2 или 4, если $p=2$;

4) $P'=\Phi(P)=P \cap \Phi(G)$ и либо P – элементарная абелева подгруппа, либо $P'=Z(P)$.

Пусть $x \in P/\Phi(P)$ и $L=\langle x \rangle$. Тогда либо $|L|=p$, либо $|L|=4$ (при $p=2$). Предположим, что L пронормальна в G . Так как подгруппа L также субнормальна в G , ввиду леммы 1.6.3 [1] следует, что L нормальна в G . Тогда $L\Phi(P)$ нормальна в G и $\Phi(P) < L\Phi(P) \leq P$. Отсюда следует, что $L\Phi(P)=P$. Так как

$$P/\Phi(P) = L\Phi(P)/\Phi(P) \cong L/\Phi(P) \cap L$$

и $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева группа, то $\Phi(L) \subseteq \Phi(P) \cap L$. Из того, что $L/\Phi(P) \cap L$ – группа простого порядка, следует, что $P/\Phi(P)$ – циклическая группа. Ввиду изоморфизма

$$G/P \cong (G/\Phi(P))/\Phi(P)$$

и того, что G/P сверхразрешима, а $P/\Phi(P)$ циклическа, из теоремы 1.1.2 [6] следует, что факторгруппа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима. Противоречие. Значит, подгруппа L не является пронормальной в G .

Ввиду условия теоремы в G существует сверхразрешимая подгруппа T , такая, что $G=LT$. Так как G – несверхразрешимая группа, то $T \neq G$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , содержащая T . Если $P \leq M$, то $L \leq M$ и поэтому $G=LT=LM=M$. Противоречие. Значит, подгруппа P не содержится в M .

Так как $P < G$, то по теореме 1.9.2 [1] $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$. Отсюда следует, что $\Phi(P) \subseteq M$ и поэтому $P \cap M = P \cap M_G = \Phi(P)$. Следовательно, главный фактор $P/\Phi(P)$ является G -изоморфным факторгруппе $M_G P/M_G$. А так как G/M_G – примитивная группа и по лемме 1.15.8 [1] $M_G P/M_G$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G/M_G , то

$$|G/M_G : M/M_G| = |M_G P/M_G| = |P/\Phi(P)| = |G : M|.$$

Из равенства $LM=G$ следует, что $|G:M| \leq |L|$. Если $|L|=4$, то $x^2 \in \Phi(P)$ и поэтому $M \cap L \neq 1$. Тогда $|M \cap L|=2$. В этом случае $|P/\Phi(P)| = |G:M|$ – простое число. Получили рассмотренный случай, который, как мы уже знаем, невозможен. Вновь полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. Если каждая ненормальная в G подгруппа простого порядка или порядка 4 имеет в G сверхразрешимое добавление, то группа G сверхразрешима.

Следствие 2. Пусть G – группа нечетного порядка. Если все ее минимальные подгруппы нормальны в G , то G является сверхразрешимой [3].

Следствие 3. Пусть N – нормальная подгруппа группы G нечетного порядка, такая, что факторгруппа G/N сверхразрешима. Если каждая минимальная подгруппа группы N пронормальна в G , то группа G сверхразрешима [4].

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter. Berlin; New York, 1992.

2. Huppert B. // Math. Zeitschr. 1954. Bd. 60. S. 409.

3. Buckley J. // Math. Z. 1970. 116. P. 15.

4. Asaad M. // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1981. 38. P. 57.

5. Doerk K. // Math. Z. 1966. 91. P. 198.

6. Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable. Passaic, 1982.

Поступила в редакцию 31.01.2003.

Елена Андреевна Задорожнюк – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины А.Н. Скиба.

А.С. ШМУРАТКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Given a strongly mixed sequence of random variables with mean zero and moments of order greater than three. We obtain the asymptotic expansion of length two for the distribution function of the normalized sum of random variables. The case when the strong mixing coefficient decreases exponentially is investigated. The theorem requires that the characteristic function of the sum be small in the specified interval.

Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность случайных величин с $EX_j=0, j>1$, и коэффициентом сильного перемешивания α . Обозначим

$$\sigma_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2, \quad S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{ES_n^3}{6} \varphi(x)(x^2 - 1), \quad \rho(F_n, G_n) = \sup_{x \in R} |F_n(x) - G_n(x)|,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n}, \quad g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{it^3}{6} ES_n^3\right),$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального распределения соответственно.

В работе [1] мы получили верхние оценки для величины $\rho(F_n, G_n)$ в случае степенного убывания коэффициента $\alpha(n)$. В настоящей работе рассматривается случай, когда $\alpha(n)$ убывает экспоненциально.

Введем следующие условия:

$$\sup_k E|X_k|^{3+\delta} \leq C_1 < \infty, \quad (1)$$

$$\sigma_n^2 > C_2 n, \quad (2)$$

$$\alpha(n) < C_3 e^{-\beta n}, \quad (3)$$

$$\int_{\left[\frac{C_4 \varepsilon_n}{\ln^2 n}, C_5 \varepsilon_n^{-1}\right]} \left| \frac{f_n(t)}{t} \right| dt < C_6 \varepsilon_n, \quad (4)$$

$$|f_n(t)| \leq C_7 |t|^{-\tau}. \quad (4')$$

Теорема. Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots существуют такие постоянные $C_i > 0$ ($i=1,6$), $\delta \in (0, 1]$, $\beta > 0$, и такая величина

$$\varepsilon_n, \quad \frac{(\ln n)^{2+\delta}}{(\sqrt{n})^{1+\delta}} \leq \varepsilon_n \leq (\sqrt{n})^{-1-\varepsilon}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, что для всех $n > 2$ выполня-

ются условия (1) – (4). Тогда найдется такое $B > 0$, не зависящее от n , что для всех $n \geq 2$

$$\rho(F_n, G_n) < B \varepsilon_n. \quad (5)$$

Обозначим $a \vee b = \max(a, b)$ и положим

$$\varepsilon_n = \frac{(\ln n)^{2+\delta}}{(\sqrt{n})^{1+\delta}} \sqrt{\left(\frac{\ln^{5/2} n}{n}\right)^{\frac{\tau}{\tau+1}}} \quad (6)$$

Приведенное далее следствие аналогично теореме из [1].

Следствие. Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots существуют такие постоянные $C_i > 0$ ($i = \overline{1,6}$), $\delta \in (0, 1]$, $\beta > 0$, $\tau > 1$, что для всех $n > 2$ выполняются условия (1) – (3) и условие (4') в области $|t| \in \left[C_4 \varepsilon_n \frac{n}{\ln^{5/2} n}, C_5 \varepsilon_n^{-1} \right]$,

где ε_n определено в (6). Тогда найдется такое $B > 0$, не зависящее от n , что для всех $n > 2$

$$\rho(F_n, G_n) < B \varepsilon_n.$$

При доказательстве теоремы используем результаты работы [1].

Положим $s = 3 + \delta$, $s_0 = \min(s - 1, 3)$. Пусть для некоторых $\delta > 0$ ($s > 3$) и $\beta > 0$ выполняются условия (1) и (3). Тогда можно повторить все рассуждения работы [1] до соотношения (14) включительно.

Итак, имеет место (14) [1]. Для оценки коэффициентов Q_i в указанном соотношении применим условия (2) и (3) (здесь и далее используются формулы только настоящей работы), а также неравенства

$$\sum_{k=m+1}^n e^{-\gamma k} \leq c_1(\gamma) e^{-\gamma m}, \quad \sum_{k=m+1}^n k e^{-\gamma k} \leq c_2(\gamma) m e^{-\gamma m}.$$

Здесь $\gamma > 0$, $0 < m < n$, постоянные $c_i(\gamma)$ зависят только от γ . Кроме того, $|ES_n| < B n^{-1/2}$. В результате получим, что для всех достаточно больших n

$$\rho(F_n, G_n) < B \left\{ e^{-\gamma_2 m} + \frac{m}{\sqrt{n}} e^{-\gamma_3 m} + \frac{m^{s_0}}{(\sqrt{n})^{s_0-i}} + \frac{1}{n} + \sqrt{n} e^{-\gamma_1 m} + \right. \\ \left. + \frac{T m^{3/2}}{n} + \left(\frac{T m}{\sqrt{n}}\right)^{\lfloor \frac{R-1}{2} \rfloor} m + \int_{|t| < U} \left| \frac{f_n(t) - g_n(t)}{t} \right| dt + \frac{1}{U} \right\}. \quad (7)$$

Здесь выбором величины $R > 3$, функций $T(n) > 0$, $U(n) > 0$ и $m(n) \in \mathbb{N}$ мы можем распоряжаться, но с условием выполнения соотношения $T \leq B_0 \sqrt{nm}^{\frac{s_0}{s-1}}$; B и B_0 – некоторые положительные ограниченные постоянные, не зависящие от n, m, T, U ; $\gamma_i = \beta \frac{s-i}{s}$ ($i = 1, 2, 3$).

Положим $m = \lfloor A_0 \ln n \rfloor$. За счет выбора постоянной A_0 все слагаемые в (7), содержащие экспоненту, можно сделать достаточно малыми. Положим также

$$T = C_4 \varepsilon_n \frac{n}{\ln^{5/2} n}, \quad U = C_5 \varepsilon_n^{-1}$$

и возьмем такое $R = R(\varepsilon) > 3$, чтобы выполнялось соотношение $\left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor \varepsilon > 2$.

Тогда из (7) с учетом (4) и определения ϵ_n нетрудно получить (5) и доказательство теоремы.

1. Шмуратко А.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 52.

Поступила в редакцию 05.02.2003.

Александр Сергеевич Шмуратко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.М. Зуев.

УДК 519.95

В.М. КОТОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ РАЗБИЕНИЯ

We present a new approach for solving on-line version of partitioning problems using dynamic lower bounds.

Рассматривается следующая задача теории расписаний: множество $N=\{1, 2, \dots, n\}$ работ обслуживается в системе из $M=\{1, 2, \dots, m\}$ параллельных процессоров. В любой момент времени каждая работа обслуживается не более чем одним прибором и каждый прибор обслуживает не более одной работы одновременно. Требуется построить расписание выполнения всех работ, при котором минимизируется общее время завершения их обслуживания. В on-line-версии задачи работы поступают друг за другом, очередная работа должна быть сразу назначена на прибор, после чего уже нельзя что-либо изменить. И только затем поступит новая работа или информация, что работ больше нет. Качество работы алгоритмов для подобного рода задач оценивается как предел отношения значения построенного решения к значению оптимального решения соответствующей off-line-версии (все ее входные параметры известны) в пространстве всех индивидуальных задач.

До сих пор не было лучшей стратегии распределения работ по процессорам, чем назначение работы на наименее загруженный процессор, когда известно, что длительность следующей работы не превышает длительность предыдущей [1]. Оценка алгоритма «в минимально загруженный» равна $4/3 - 1/(3m)$. В работе предлагается принципиально новый алгоритм, оценка которого равна 1,264 для любого m .

Важнейшим фактором при оценке точности приближенного алгоритма является величина нижней оценки значения целевого функционала. Традиционно в качестве таковой используется средняя загрузка процессоров или максимальная длительность работы. Предлагаемый алгоритм состоит из нескольких стадий, при этом на каждой из них используется своя нижняя оценка значения целевого функционала и своя стратегия загрузки процессоров. Пусть C^* соответствует величине оптимального решения, S – величине построенного решения, а L – нижней границе. Через $w(B)$ будем обозначать суммарную загрузку процессора B , и если она равна 0, то такой процессор будем называть *пустым*.

Стадия 1. В качестве L используется длительность первой работы p_1 :
 $L=p_1$.

Пока $i < m$ выполнять:

если $p_i > 5L/8$, то назначаем работу i на пустой процессор; $i := i + 1$;
 если $L/2 < p_i \leq 5L/8$ и $L/2 \leq p_{i+1} \leq 5L/8$, то назначаем их на пустой процессор;
 $i := i + 2$;
 если $p_i \leq L/2$, то назначаем i на пустой процессор; $i := i + 1$.

После получения p_{m+1} вычисляется новая граница $L = \max\{p_1, p_m + p_{m+1}\}$.

Пока есть пустые процессоры выполнять:

Назначаем работу i на пустой процессор; $i := i + 1$.

После завершения стадии 1 структура загрузки процессоров имеет вид:

			C	C	C			
B	B	B	C	C	C	D	D	D
Класс B			Класс C			Класс D		

Здесь класс B – это процессоры с одной назначенной работой, длительность которой $t > 5p_1/8$, класс C – процессоры с двумя назначенными работами, длительности которых лежат в интервале $(L/2, 5L/8]$, класс D – процессоры с одной назначенной работой, длительность которой $t < L/2$. При этом классы C и D могут быть пусты.

Стадия 2. На этой стадии нельзя назначать на один процессор более двух работ.

Пока $i < 2m$ и имеется процессор в классе D с одной назначенной работой выполнять:

если имеется процессор из класса B со свойством $w(B) + p_i < 1,25L$, то назначаем работу на него, причем выбираем максимально загруженный; $i := i + 1$;

если такового нет, то назначаем работу на минимально загруженный процессор из класса D; $i := i + 1$.

После стадии 2 структура загрузки процессоров имеет вид:

		E	E	ES1	ES2	C	C	C2	E1	E2	E3
B1	B1	B2	B2	BS	BS	C	C	C1	D1	D2	D3
Класс B1		Класс B2		Класс BS		Класс C			Класс D		

Класс B1 – это процессоры с одной работой, длительность которой $t > 0,75L$, класс B2 – процессоры с двумя работами, причем длительность большей из них $t > 0,75L$, класс BS – процессоры с двумя работами, причем длительность большей $t \leq 0,75L$, классы C и D остались прежними.

Свойства:

- $E \leq D \leq L/2 < C < 5 * P_1/8 < BS < 0,75L < B2 \leq B1 \leq L$,
- $D + E < L$,
- $E1 \leq E2 \leq E3 \leq ES2 \leq ES1 \leq D3 \leq D2 \leq D1$,
- Все процессоры имеют загрузку не больше $1,25L$.

Пусть F соответствует длительности выполнения текущей не назначенной работы и пусть все процессоры имеют загрузку не больше $1,25C^*$. Кроме того, будем полагать, что $F > 0,25C^*$ (так как погрешность не превысит величины F).

Случай 1. Класс B1 пуст. Тогда $i \geq 2m + 1$, поэтому текущая работа должна быть третьей в оптимальном решении, тогда $F < C^*/3$.

Краткие сообщения

Пусть в оптимальном решении имеется процессор с тремя работами $[F, E, J]$, $F \leq E \leq J$, причем $J \geq E1$. Тогда $C^* > F + F + E1$. Рассмотрев комбинацию $D1 + E1 + F$ (одно из возможных назначений), имеем

$$(D1 + E1 + F) / C^* = 1 + (D1 + E1 + F - C^*) / C^* < 1 + (D1 + E1 + F - F - E1) / C^* = 1 + (D1 - F) / C^* < 1,25.$$

Пусть в оптимальном решении имеется процессор с тремя работами $[F, E, J]$, но $J < E1$. Тогда обязана быть пара одной из работ $E1, E2$ с $B2$ (не имеет смысла пара с BS в силу $ES \geq E3$), чтобы обеспечить наличие процессора с тремя работами $[F, E, E]$, где $E < E1$. Но E может быть взято только из пары $[B2, E]$. В силу выбора алгоритма пара E с $B2$ самая лучшая из возможных (при замене пары $[B2, E]$ на пару $[B2, E1]$ при $E1 > E$ справедливо $B2 + E1 > 1,25L$). Следовательно, имеем цепочку неравенств $C^* > 1,25L$, $D1 + E1 + F > 1,25 \cdot 1,25L$, $F > 1,5625L - D1 - E1 > 0,5625L$, которая противоречит $F < 0,5L$.

Случай 2, когда класс $B1$ не пуст, доказывается аналогично случаю 1.

Следствие 1. Назначение второй работы в классе $B1$ или третьей в классе D сохраняет свойство 4.

Структура загрузки процессоров после стадии 2 имеет вид

E	E	E	E	$ES1$	$ES2$	C	C	$C2$	$E1, E$	$E2, E$	$E3, E$
$B1$	$B1$	$B2$	$B2$	BS	BS	C	C	$C1$	$D1$	$D2$	$D3$
Класс $B1$		Класс $B2$		Класс BS		Класс CC		Класс D			

Стадия 3. Назначаем текущую работу на минимально загруженный процессор.

Теорема 1. При каждом назначении величина построенного текущего решения не превышает $1,264C^*$.

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи.

1. В оптимальном решении есть процессор вида (F, E, J) , причем $J \geq C1$. Тогда $C1 + F + F < C^*$. Из $F > C^* / 4$ получаем $C2 < C1 < C^* / 2$, поэтому $(C1 + C2 + F) / C^* = 1 + (C1 + C2 + F - C^*) / C^* < 1,25$. Следовательно, очередная работа может быть назначена.

2. Такого процессора нет. Тогда возможны два способа распределения работ по процессорам:

а) $C1$ с BS в паре $[BS, C1]$ и $C2$ в тройке $[F, E, C2]$. Тогда $C1, C2 \leq C^* / 2$, поэтому $(C1 + C2 + F) / C^* = 1 + (C1 + C2 + F - C^*) / C^* \leq 1 + (C1 - F) / C^* < 1,25$. Следовательно, очередная работа может быть назначена;

б) $C1$ с BS в паре $[BS, C1]$ и $C2$ с BS в паре $[BS, C2]$. Но тогда $ES1$ обязана быть в тройке $[F, F, ES1]$ или $ES1$ должна быть в паре с $B1$ или $B2$.

Пусть имеются комбинации $[BS, C1]$, $[BS, C2]$ и $[F, F, ES1]$. Тогда $C^* \geq \max\{F + F + ES1, BS + C1\}$, а загрузка при назначении очередной работы $S < \min\{BS + ES2 + F, C1 + C2 + F\}$. Поэтому

$$S / C^* \leq (BS + ES2 + F + C1 + C2 + F) / (2 \max\{F + F + ES1, BS + C1\}) \leq 1 + (BS + ES2 + F + C1 + C2 + F - (F + F + ES1 + BS + C1)) / (2 \max\{(F + F + ES1, BS + C1)\}) \leq 1,25.$$

Следовательно, очередная работа может быть назначена.

Пусть имеются пары $(BS, C1)$, $(BS, C2)$, но нет тройки $(F, F, ES1)$. Тогда работы $ES1, ES2$ образуют пары с работами из класса B .

Но в силу лучшего выбора пар выполняется $C^* \geq \max\{(B + ES1, B + ES2, BS + C1, BS + C2)\}$, причем загрузка при назначении очередной работы $S < \min\{BS + ES2 + F, C1 + C2 + F\}$.

1) $C_1+C_2 \leq 1,176L$ или $BS+ES_2 \leq 1,176L$. Пусть $Y=1,176L$ и $C_1+C_2 < Y$. Чтобы гарантировать $(C_1+C_2+F)/C^* > 1,264$, из $C^* \leq 3F$ имеем $F \leq Y/2,792$. Поэтому $(C_1+C_2+F)/C^* \leq (1,358166Y)/1,264 < 1,264$.

2) $C_1+C_2 > 1,176L$ и $BS+ES_2 > 1,176L$. Рассмотрим возможное назначение $BS+ES_2+F = BS+C_1+(ES_1+F-C_1)$, но из $(F+C_1+C_2)/(3*F) > 1,264$ получаем $C_1 > 1,396F$ или $F < 0,7164C_1$, откуда $ES_1+F-C_1 < 0,5L-0,2836*C_1$. Следовательно, $(ES_1+F-C_1)/C^* < 0,264$.

Доказательство завершено.

1. Seiden S., Sgall J., Woeginger G // Operations Research Letters. 2000. 27. P. 215.

Поступила в редакцию 23.04.2003.

Владимир Михайлович Котов – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики.

УДК 517.926

А.А. ЛЕВАКОВ

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The higher mean square characteristic exponent of stochastic differential system is introduced. The central exponent of linear unperturbed differential system is the attainable upper bound of the mobility for higher mean square characteristic exponent of stochastic perturbed system.

Введенное А.М. Ляпуновым понятие характеристического показателя линейной нестационарной системы является ключевым в первом методе Ляпунова исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных систем. Характеристические показатели Ляпунова стохастических систем впервые изучались В.М. Милионщиковым [1], который установил, что почти для всякой линейной системы почти все близкие к ней системы имеют показатели, близкие к ее показателям. Эти исследования были продолжены Нгуен Динь Конгом [2, 3] и др.

В данной работе вводится старший среднеквадратический характеристический показатель стохастической дифференциальной системы Ито и показано, что, как и для обыкновенных систем, центральный показатель линейной невозмущенной дифференциальной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя возмущенной системы со случайными возмущениями, что дает возможность использования первого метода Ляпунова и для стохастических систем Ито.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t) = A(t)x(t) dt + f(t, x(t)) dW(t), \quad (1)$$

где $A: R_+ \rightarrow R^{n \times n}$, $f: R_+ \times R^n \rightarrow R^{n \times 1}$ – непрерывные ограниченные функции. Для любого $x_0 \in R^n$ уравнение (1) имеет слабое решение с начальным условием x_0 [4].

Определение. Число $\alpha(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} (2t)^{-1} \ln E(\|x(t)\|^2)$ называем верхним среднеквадратическим характеристическим показателем слабого решения $x(t)$ уравнения (1), а число $\sup_{x \in A} \alpha(x) = \Lambda$, где A – множество всех слабых решений уравнения (1), – старшим среднеквадратическим показателем уравнения (1).

Число Ω' называется верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1), если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции f , удовлетворяющей условию $\|f(t, x)\| \leq \delta \|x\|$, $\forall (t, x) \in R_+ \times R^d$, старший среднеквадратический показатель системы (1) не превосходит $\Omega' + \epsilon$.

Число Ω называется достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического характеристического показателя системы (1), если оно является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя, и для любых $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется система (1) с функцией f , удовлетворяющей неравенству $\|f(t, x)\| < \delta \|x\|$, $\forall (t, x) \in R_+ \times R^d$, и со старшим среднеквадратическим показателем не меньшим, чем $\Omega - \epsilon$.

Теорема. *Верхний центральный показатель [5] системы*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \quad (2)$$

является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Верхний центральный показатель диагональной системы (2) является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Доказательство. Пусть $R(t)$ – верхняя функция для системы (2), т. е. $\forall \epsilon, \exists D_\epsilon$, что $\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\| \leq D_\epsilon \exp\left(\int_\tau^t (R(s) + \epsilon/2) ds\right)$, где $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2), тогда для любого слабого решения системы (1) с функцией f , удовлетворяющей неравенству $\|f(t, x)\| < \epsilon \|x\|/2$, $\forall (t, x) \in R_+ \times R^d$, используя представление решения из [6], имеем

$$E(\|x(t)\|^2) < 2D_\epsilon^2 E(\|x(0)\|^2) \exp\left(2 \int_0^t (R(\tau) + \epsilon) d\tau\right),$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы.

Рассмотрим систему

$$dx(t) = A(t)x(t) dt + \Phi x(t) dW(t), \quad (3)$$

где $A(t) = \text{diag}[p_i(t)]$, $p_i(t)$, $i=1, \dots, d$, $t \geq 0$, – непрерывные ограниченные функции, Φ – $(d \times d)$ -матрица, у которой все элементы, находящиеся под главной диагональю, равны $\delta > 0$, элемент, стоящий в первой строке и в последнем столбце, тоже равен δ , а остальные элементы нулевые. $W(t)$ – одномерное F_t -броуновское движение, заданное на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , с потоком F_t . Используя метод последовательных приближений [7, с. 171], d -компоненту $x_d(t)$ сильного решения $x(t)$ системы (3) с начальным условием $x(0) = S \in R^d$, $S_i = s > 0$, $i=1, \dots, d$, можно представить в виде

$$x_d(t) = s \exp\left(\int_0^t p_d(\tau) d\tau\right) + \sum_{r=1}^{\infty} \delta^r s J_d^r(t), \quad (4)$$

где

$$J_d^r(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{r-1}} \exp\left(\int_0^{t_1} p_{d-r}(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} p_{d-r+1}(\tau) d\tau + \dots + \int_{t_{r-1}}^t p_d(\tau) d\tau\right) dW(t_1) dW(t_2) \dots dW(t_r),$$

$d - i$ равняется $d - m$ для $i = kd + m$, $k \in N$, $0 \leq m < d - 1$. Легко увидеть, что

$$E(J_d^r J_d^m) = \begin{cases} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} \exp \left(2 \left(\int_0^{t_1} p_{d-r}(\tau) d\tau + \dots + \int_{t_r}^{t_1} p_d(\tau) d\tau \right) \right) dt_1 \dots dt_r, & m = r, \\ 0, & r \neq m. \end{cases}$$

Из соотношений (4), (5) следует, что

$$E(|x_d(t)|^2) \geq s \delta^r \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_1} \exp \left(2 \left(\int_0^{t_1} p_{d-r}(\tau) d\tau + \dots + \int_{t_r}^{t_1} p_d(\tau) d\tau \right) \right) dt_1 \dots dt_r.$$

Теперь для завершения доказательства надо повторить соответствующую часть доказательства теоремы 13.3.1 из [5].

1. Милионщиков В. М. // Мат. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 503.
2. Конг Нгуен Динь // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 3. С. 420.
3. Song Nguyen Dink // Stoch. Dyn. 2001. Vol. 1. № 1. P. 127.
4. Леваков А. А. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1041.
5. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
6. Леваков А. А. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 213.
7. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.

Поступила в редакцию 06.06.2003.

Анатолий Афанасьевич Леваков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

Наши юбиляры



ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ БОРЗДОВ



Исполнилось 50 лет доктору физико-математических наук, профессору кафедры физической электроники Владимиру Михайловичу Борздову.

В.М. Борздов родился 12 января 1954 года в г. Риге. В 1976 г. закончил факультет радиофизики и электроники БГУ. С этого времени вся педагогическая и научная деятельность Владимира Михайловича связана с Белорусским государственным университетом: работал младшим научным сотрудником лаборатории когерентных явлений НИИПФП (1976–1978 гг.), младшим научным сотрудником отдела биоэнергетики НИЧ (1979–1981 гг.). В 1982–1984 гг. учился в аспирантуре при кафедре радиофизики и электроники сверхвысоких частот. С 1984 г. и по настоящее

время работает на кафедре физической электроники сначала в качестве ассистента, затем доцента и профессора.

В 1986 г. В.М. Борздов защитил кандидатскую диссертацию «Оценка параметрической надежности танталовых тонкопленочных резистивных элементов ИС», в 1999 г. – докторскую диссертацию «Моделирование влияния внешних и технологических факторов на электрофизические свойства твердотельных слоистых структур интегральной электроники».

С 1999 г. Владимир Михайлович – профессор кафедры физической электроники. На факультете радиофизики и электроники читает основной курс «Основы радиоэлектроники», спецкурсы «Физика отказов интегральных схем», «Физические основы надежности в микроэлектронике», «Наноэлектроника». Его лекции отличаются высоким научно-теоретическим уровнем и педагогическим мастерством, логичностью построения и глубиной изложения материала. Он – автор учебного пособия с грифом Министерства образования Республики Беларусь «Основы радиоэлектроники: Лабораторный практикум» (2002 г.) и курса лекций «Основы радиоэлектроники» для студентов, обучающихся по специальностям «Радиофизика», «Физическая электроника», «Компьютерная безопасность» (2003 г.). В соавторстве им подготовлено и издано 11 учебно-методических пособий.

Как ученый, профессор В.М. Борздов активно работает в области физики МОП-структур, вычислительной электроники, физики надежности полупроводниковых приборов и интегральных схем. Он является научным руководителем НИЛ «Материалы и приборные структуры микро- и наноэлектроники», основные направления исследований которой связаны с компьютерным моделированием процессов переноса носителей заряда в элементах субмикронной техники и наноэлектроники, изучением электрофизических свойств и электрических характеристик субмикронных МОП-транзисторов и приборов наноэлектроники, а также с наноразмерным структурированием материалов электронной техники с помощью ионной имплантации для разработки новых приборов и технологий.

Под руководством В.М. Борздова разработаны алгоритмы и программные комплексы моделирования переноса электронов в инверсионных слоях кремния, приповерхностных слоях гетероструктур на основе соединений A^3B^5 , проводящих каналах кремниевых и арсенид-галлиевых полевых транзисторов, полупроводниковых квантовых проволоках, позволяющие исследовать квантовые и квазибаллистические эффекты при переносе носителей заряда, разработаны методики численного самосогласованного решения уравнений Шредингера и Пуассона в структурах с пониженной размерностью электронного газа, с помощью которых изучены электрофизические свойства этих структур. С его активным участием разработан и в 2000 г. внедрен на НПО «Интеграл» программный комплекс для моделирования кремниевых субмикронных МОП-транзисторов с коротким каналом, позволяющий исследовать эффекты горячих электронов. В.М. Борздов является автором 122 научных работ, в том числе монографии в соавторстве с членом-корреспондентом НАН Беларуси Ф.Ф. Комаровым «Моделирование электрофизических свойств твердотельных слоистых структур интегральной электроники». Им подготовлены три кандидата наук.

Приближенность тематики исследований к учебному профилю кафедры позволили Владимиру Михайловичу использовать результаты научных разработок в учебном процессе. Программные средства расчета электрических и электрофизических характеристик субмикронных кремниевых МОП-транзисторов, кремниевых и арсенид-галлиевых квантовых проволок, квазиодномерных кремниевых МОП-транзисторов и двухбарьерных резонансно-туннельных диодов используются в лабораторных практикумах по спецкурсам «Нанoeлектроника» и «Субмикронные МОП-ПТ», а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

В.М. Борздов сотрудничает с учеными Института электроники и Института физики твердого тела и полупроводников НАН Беларуси, БГУИР, НПО «Интеграл», а также ряда университетских научных центров Германии, Голландии, Польши, Австрии. Он является членом двух специализированных советов по защите диссертаций, членом экспертных советов Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Электроника» и межвузовской программы фундаментальных исследований «Низкоразмерные системы», заместителем председателя секции «Solid State Circuits» IEEE (с 2000 г.), членом Ученого совета факультета радиофизики и электроники.

В 2001 г. за успешную научно-педагогическую деятельность В.М. Борздов награжден грамотой БГУ, в 2002 г. получил стипендию Президента Республики Беларусь, присуждаемую деятелям науки, образования, культуры, здравоохранения.

Доброжелательность, эрудиция и трудолюбие снискали Владимиру Михайловичу авторитет и уважение коллег-ученых, преподавателей и студентов.

Профессорско-преподавательский коллектив, сотрудники и студенты факультета радиофизики и электроники, редакционная коллегия журнала «Вестник БГУ» сердечно поздравляют Владимира Михайловича Борздова с пятидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, дальнейших успехов в подготовке высококвалифицированных специалистов и реализации новых творческих замыслов.

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.37

Воропай Е.С., Клищенко А.П., Минько А.А., Попечиц В.И. Анизотропия процессов поглощения и испускания света сложными органическими соединениями // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Развиваются основные положения процессов поглощения и испускания света применительно к широкому кругу сложных молекулярных соединений – красителей, стеклообразных и жидкокристаллических материалов, а также поляризованной двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции растворов и люминесценции при световом тушении. Изучены и интерпретированы люминесценция из высоких возбужденных состояний, процессы кумуляции энергии синглетно-возбужденных молекул, спектрально-поляризационные свойства люминесценции красителей в условиях неоднородного уширения спектральных уровней, а также методы и средства изучения спектрально-поляризационных характеристик нелинейной люминесценции. Разработана модель описания поляризационных характеристик вынужденного излучения в области припороговых накачек. Установлены закономерности влияния строения жидкокристаллических соединений на их мезоморфные, молекулярные и оптико-физические свойства.

Библиогр. 68 назв.

УДК 539.12

Стражев В.И., Ционенко Д.А. О квантовомеханической интерпретации уравнения Дирака – Кэлера в искривленном пространстве // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Дана квантовомеханическая интерпретация общековариантного уравнения Дирака–Кэлера. Уравнение обобщено введением взаимодействия с неабелевым калибровочным полем, соответствующим локализации группы внутренней симметрии теории. Установлено, что в этом случае выбор системы отсчета определяет выбор калибровочного условия.

Библиогр. 6 назв.

УДК 535.34

Горбач Д.В., Кицак М.А., Миксюк Ю.И., Толстик А.Л. Динамика преобразования световых полей при нелинейных взаимодействиях в молекулярных средах с фотопереносом протона // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Построены теоретические модели преобразования световых полей нелинейными интерферометрами, а также динамическими голограммами, сформированными при многоволновом взаимодействии в молекулярных средах с фотопереносом протона. Определены условия формирования различных динамических режимов взаимодействия, включая регулярные пульсации интенсивности световых пучков на выходе нелинейно-оптических систем при постоянной входной интенсивности.

Библиогр. 9 назв., ил. 3.

УДК 577.3

Мартинovich Г.Г., Черенкевич С.Н. Внутриклеточный эффективный редокс-потенциал – новый фактор регуляции клеточных процессов // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Для количественного описания физико-химических параметров окислительно-восстановительного состояния клетки введено понятие «эффективный редокс-потенциал». Эффективный редокс-потенциал рассчитан на основе термодинамических представлений с использованием уравнения Нернста. Определен вклад отдельных внутриклеточных окислительных и восстановительных реагентов при формировании эффективного редокс-потенциала. С использованием разработанного метода проведена теоретическая оценка значений редокс-потенциала клеток при проявлении различных типов клеточной активности. На основании собственных и имеющихся в литературе данных установлена зависимость функционального состояния клетки от значений внутриклеточного эффективного редокс-потенциала.

Библиогр. 21 назв., табл. 1, ил. 1.

УДК 621.315.592

Веселова Т.М., Поклонский Н.А., Самуйлов В.А. Модель низкочастотных токовых осцилляций в полуизолирующих кристаллических полупроводниках // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Развита модель низкочастотных токовых осцилляций в полуизолирующих кристаллических полупроводниках, описывающая экспериментальные зависимости частотных мод токовых осцилляций и энергии термической активации глубоких доноров в *n*-GaAs от величины приложенного электрического поля и температуры. Модель учитывает немонотонную зави-

симось дрейфовой скорости электронов, а также коэффициентов их захвата и выброса с глубокого донорного уровня от электрического поля.

Библиогр. 22 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 541.423

Воропай Е.С., Зажогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И. Исследование процесса поступления элементов в плазму разряда при атомно-эмиссионном анализе растворов золота и серебра // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

На основе экспериментального исследования процесса поступления элементов в плазму разряда переменного тока при атомно-эмиссионном анализе растворов золота и серебра получены результаты, указывающие на совместный выход элементов в разряд, что отражает отсутствие влияния на выход элементов их окисляющей способности и летучести.

Библиогр. 6 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 621.315.592

Гайдук П.И., Траутман К. (ФРГ), Толемонд М. (Франция), Ларсен А.Н. (Дания). Роль скорости ионов при формировании треков в сплавах $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Мы сообщаем о сильном влиянии скорости ионов на формирование треков в слоях сплава $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$. Исследования структуры методом просвечивающей электронной микроскопии выявили различную морфологию прерывистых треков при прохождении ионов U^+ , имеющих разную скорость, но одинаковые потери энергии при торможении. При уменьшении энергии ионов от 2,64 до 0,8 ГэВ морфология трековых дефектов изменяется от отдельных точек с малой плотностью до высокой концентрации прерывистых треков. Подтверждена кристаллическая структура трековых дефектов, часть из которых являются мелкими дислокационными петлями. Результаты обсуждаются в рамках модели термических пиков.

Библиогр. 10 назв., ил. 3.

УДК 541.15

Колодинский А.М., Соколовская Н.Г., Война В.В. Рост и образование смешанных кристаллов из водных растворов в поле рентгеновского излучения // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Проведено исследование процесса кристаллизации смешанных кристаллов из тройных систем $\text{KCl} - \text{KBr} - \text{H}_2\text{O}$, $\text{KCl} - \text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$, $\text{KCl} - \text{CdCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$ в поле рентгеновского излучения. Установлено, что воздействие мягкого рентгеновского излучения приводит к образованию изоморфно-смешанных кристаллов с более совершенной структурой и морфологией поверхности. Показано, что при образовании смешанных кристаллов с ограниченной смесью рентгеновское излучение способствует включению ионов примеси в решетку основного вещества, изменяя границы смесимости.

Библиогр. 8 назв., ил. 8.

УДК 539.12

Шишкина Т.В., Марфин И. Б. Поляризационные асимметрии неупругого рассеяния в рамках калибровочных моделей с дополнительным нейтральным бозоном // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Выполнены расчет и анализ нескольких новых видов электрослабых асимметрий глубокого неупругого рассеяния поляризованных лептонов, обладающих энергией от 2–2000 ГэВ, на поляризованных нуклонах в рамках кварк-партоновой модели. Результаты получены в Стандартной Модели электрослабого взаимодействия и ряде калибровочных моделей с дополнительным Z-бозоном. Сравнение асимметрий показало, что разность результатов различных калибровочных моделей возрастает с энергией рассеиваемых лептонов и достигает максимума при наибольших значениях скейлинговой переменной y .

Библиогр. 27 назв., ил. 3.

УДК 519.24

Демеш Н.Н., Чехменок С.Л. Применение сглаженной периодограммы к оцениванию спектров устойчивых процессов с дискретным временем // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Исследована скорость сходимости по вероятности сглаженной периодограммы к спектральной плотности устойчивого процесса с дискретным временем.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.518.14, 517.927.21

Марзан С.А. Системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Исследуется задача типа Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений производной комплексного порядка с дробными производными Римана – Лиувилля в весовом пространстве непрерывных функций на конечном отрезке действительной оси. Доказывается равносильность поставленной задачи и системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. Метод последовательных приближений используется для доказательства теоремы существования и единственности решения поставленной задачи типа Коши. Приводятся соответствующие утверждения для задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.925.6

Громак В.И., Голубева Л.Л. Автопреобразования Беклунда третьего уравнения Пенлеве // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Построены в явной форме автопреобразования и функциональные соотношения между решениями третьего уравнения Пенлеве.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.925

Соболевский С.Л. Подвижные особые точки одного класса иррациональных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Рассмотрен специальный класс иррациональных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для него получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек.

Библиогр. 5 назв.

УДК 62-752.534

Савчук В.П., Титюра О.В. Прогиб струны под движущейся нагрузкой // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Найден динамический прогиб струны конечной длины под движущейся с постоянной скоростью сосредоточенной массой.

Библиогр. 5 назв.

УДК 539.3

Савенков В.А. Динамическая контактная задача для ортотропной полосы // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Рассматривается задача о движущемся штампе по ортотропной упругой полосе, которая сводится к системе парных интегральных уравнений. Решение ищется в виде ряда. Рассчитано распределение контактного напряжения под штампом.

Библиогр. 5 назв., табл. 1.

УДК 539.3

Босьяков С.М., Медведев Д.Г. Метод разрывных решений в теории упругости анизотропных стеклопластиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Получены уравнения слабых и сильных разрывов для системы уравнений движения ортотропного стеклопластика в условиях плоской деформации. С его помощью выведены бихарактеристики и построены волновые фронты упругих волн в зависимости от ориентации нитей наполнителя при укладке.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 621.372.5

Ролич О.Ч., Шестаков К.М., Садов В.С., Чернявский А.Ф. Приближенное целочисленное дискретное косинусное преобразование // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Предлагается алгоритм приближенного вычисления дискретного косинусного преобразования на основе арифметики целочисленных процессоров путем аппроксимации с заданной погрешностью гармонической функции степенным знакопеременным рядом по основанию 2.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 681.3.06:51+612.821:007

Коваленко Н.С., Самаль С.А. Организация распределенной обработки конкурирующих процессов в синхронных режимах // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Рассматривается организация распределенной обработки конкурирующих процессов в синхронных режимах. Предлагаются методы нахождения минимального общего времени

трудоемкости.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 396.677

Демидчик В.И., Корнев Р.В. Анализ микроволновых свойств проволочных киральных рассеивателей методом интегрального уравнения // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Предложена методика исследования рассеивающих свойств проволочных частиц произвольной конфигурации. Методика основана на численном решении интегрального уравнения Поклингтона для токораспределения в тонком проводнике. По известному амплитудно-фазовому распределению тока находятся электрический и магнитный дипольные моменты и, как следствие, коэффициенты поляризуемости, характеризующие частицу. Проведено сравнение результатов расчета коэффициентов поляризуемости с данными, полученными на основе теории цепей. Показана возможность определения эффективных электродинамических параметров композиционных материалов по известным коэффициентам поляризуемости частиц, являющихся дисперсной компонентой композита.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 336:519

Лаппо П.М. Вероятность разорения в модели коллективного риска со случайными премиями // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Рассмотрена модель коллективного риска, в которой процесс поступления премий и процесс поступления исков являются независимыми активными пуассоновскими процессами. Получено выражение для вероятности разорения за бесконечное время. Проанализирована ситуация, когда размеры исков и премий имеют показательные распределения.

Библиогр. 4 назв.

УДК 512.542

Задорожнюк Е.А. Об одном критерии сверхразрешимости конечных групп // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Доказано, что если N – нормальная подгруппа группы G , такая, что факторгруппа G/N сверхразрешима, и если каждая непропорциональная в G подгруппа из N простого порядка, а также каждая ее подгруппа порядка 4 имеют в G сверхразрешимое добавление, то группа G сверхразрешима.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.214.5

Шмуратко А.С. Асимптотическое разложение распределений сумм зависимых случайных величин // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Дана последовательность сильно перемешанных случайных величин с нулевыми средними и моментами порядка $s \in (3, 4]$. Получено асимптотическое разложение длины два для функции распределения нормированной суммы случайных величин. Рассматривается случай экспоненциального убывания коэффициента сильного перемешивания. Предполагается, что характеристическая функция указанной суммы достаточно мала в определенном интервале.

Библиогр. 1 назв.

УДК 519.95

Котов В.М. Динамические оценки в задачах разбиения // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Предлагается новый подход для решения on-line-версии задачи назначения с использованием динамических нижних оценок.

Библиогр. 1 назв.

УДК 517.926

Леваков А.А. Среднеквадратические характеристические показатели стохастических систем // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1.

Введен старший среднеквадратический характеристический показатель стохастической дифференциальной системы и показано, что центральный показатель линейной невозмущенной дифференциальной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя возмущенной системы.

Библиогр. 7 назв.

CONTENTS

OUR PRIZE WINNERS

- Voropay E.S., Klishchenko A.P., Min'ko A.A., Popechits V.I.* Anisotropy of the processes of light absorption and emission by complex organic compounds 3

PHYSICS

- Strazhew V.I., Tsionenko D.A.* On a quantum-mechanical interpretation of Dirac – Kaehler equation in a curved space-time 17
- Gorbach D.V., Kitsak M.A., Miksyuk Yu.I., Tolstik A.L.* Dynamics of the light-field transformation upon nonlinear interactions in molecular media with proton phototransfer 21
- Martinovich G.G., Cherenkevich S.N.* Intracellular effective redox potential – a new factor of the regulation of the cellular processes 28
- Veselova T.M., Poklonski N.A., Samuilov V.A.* Model of low frequency current oscillations in semi-insulating crystalline semiconductors 34
- Voropay E.S., Zazhigin A.P., Chervyakovsky K.I., Bulovich J.I.* Investigation of the ingress processes of elements into discharge plasma during atomic-emission analysis of gold and silver solutions 39
- Gaiduk P.I., Trautmann C. (GFR), Toulemonde M. (France), Larsen A.N. (Denmark).* A velocity effect in latent track formation in $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5}$ alloy layers 44
- Kolodinskiy A.M., Sokolovskaya N.G., Vojna V.V.* Growth and formation of mixed crystals from water solutions in a field of X-rays radiation 49
- Shishkina T.V., Marfin I.B.* Polarized asymmetries of inelastic scattering in frame of gauge models including additional neutral boson 54

MATHEMATICS AND INFORMATICS

- Demesh N.N., Chekhmenok S.L.* Using a smoothed periodogram in evaluating of spectrum of stable processes with discrete time 59
- Marzan S.A.* A system of nonlinear of fractional order in a weighted space of continuous functions 63
- Gromak V.I., Goloubeva L.L.* Auto-Becklund transformations of the third Painlevé equation 68
- Sobolevsky S.L.* Movable singularities of one class of irrational ordinary differential equations of the third order 70
- Savchuk V.P., Titioura O.V.* A string bend under a moving load 75
- Savenkov V.A.* Dynamic contact problem for orthotropic strip 78
- Bosiakov S.M., Medvedev D.G.* Method of the discontinuity solutions in the theory of elasticity of anisotropic fibreglasses 82
- Rolich O.Ch., Shestakov K.M., Sadov V.S., Chernyavskii A.F.* Approximate integer discrete cosine transformation 86
- Kovalenko N.S., Samal S.A.* Organization of distributed processing of competing processes in in-sync states 91

BRIEF COMMUNICATIONS

- Demidchik V.I., Kornev R.V.* The analysis of microwave properties of chiral particles by the method of integral equation 100
- Lappo P.M.* Probability of ruin in collective risk model with random premiums 103
- Zadorozhniuk E.A.* About one criterion of the supersolvability of finite groups 105
- Shmuratko A.S.* Asymptotic expansion of the distributions of sums of dependent random variables 108
- Kotov V.M.* Dynamic bounds for partitioning problem 110
- Levakov A.A.* Mean square characteristic exponents of stochastic systems 113

OUR JUBILEE

- Vladimir Mihailovich Borzdov 116
- Summary 118