

В. а 52
Б437

мк3(6)

ISSN 0321-0367

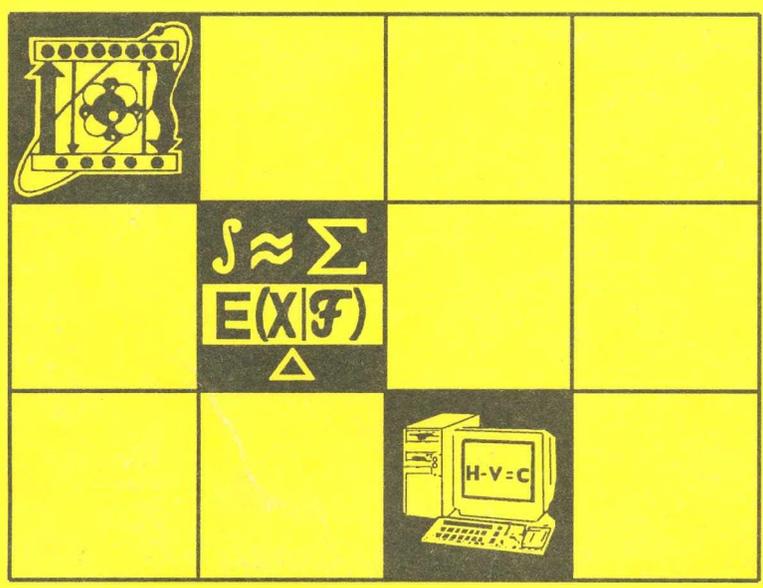
ВЕСНІК

Беларускага дзяржаўнага
універсітэта

СЕРИЯ 1

Фізика
Математика
Информатика

3/2003



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Галынский В.М., Фурс А.Н.</i> Поверхностные электромагнитные волны в поглощающих анизотропных структурах.....	3
<i>Умрейко Д.С., Сытько В.В., Барсуков И.В., Аleshевич Н.А., Покаташкин В.И.</i> Люминесценция ионов UO_2^{2+} в соактивированных UO_2^{2+} и Ln^{3+} люминофорах при больших плотностях мощности возбуждения.....	8
<i>Станкевич А.И., Могильный В.В.</i> Рельефообразование на поверхности полимерных слоев, содержащих фотовосстанавливающиеся ароматические кетоны.....	13
<i>Бумай Ю.А., Лукашевич М. Г., Скрипка Д.А.</i> Магниторезистивный эффект слабо разупорядоченного гетероперехода GaAs – AlGaAs.....	18
<i>Соловьев В.С., Гусаков Г.А., Крекотень О. В.</i> Омические контакты к кристаллам алмаза типа IIb на основе трехслойной металлизации Ti/TiN/Au.....	24
<i>Гайдук П.И., Траутман К. (ФРГ), Толемонд М. (Франция), Ларсен А.Н. (Дания).</i> Трековая преципитация в пересыщенных слоях $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ -сплавов.....	31
<i>Доброго В.П.</i> Межпримесная рекомбинация в прыжковой фотопроводимости. 2. Релаксации роста и спада.....	36
<i>Жавнерчик В.В., Борздов В.М., Галенчик В.О.</i> Влияние ориентации подложки на концентрацию инверсных электронов в Si-МОП-структуре.....	39
<i>Клищенко А. П., Хвалей С. В., Шупляк В. И.</i> Моделирование эквипотенциальных поверхностей двойной звезды.....	43

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

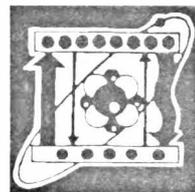
<i>Труш Н.Н., Илюкевич Т.И.</i> Оценка математического ожидания стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями.....	49
<i>Шмуратко А.С.</i> Асимптотическое разложение распределений сумм слабо зависящих случайных величин.....	52
<i>Ковальчук А.Н.</i> Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением. Многомерный случай.....	57
<i>Новохрост В.Г.</i> Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами.....	62
<i>Калитин Б.С.</i> Устойчивость динамической модели монопольного рынка.....	67
<i>Громак Е.В.</i> Обобщенное преобразование Струве в весовых пространствах суммируемых функций.....	72
<i>Чичуриш А.В.</i> О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля.....	76
<i>Кравцов В.М.</i> О новых типах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.....	80

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Коваленок Н.Н.</i> Синтез позиционного решения терминальной задачи оптимального управления в классе релейных функций.....	86
<i>Красовская Т.Г.</i> О числе различных значений функций Боля бесконечно дифференцируемых линейных диагональных систем.....	88
<i>Бобков В.В., Кучмиенко И.А.</i> Численное решение жестких систем с использованием методов гармонического анализа.....	90
<i>Хомицкая Т.Г.</i> Численный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления.....	93
<i>Чехменок С.Л.</i> О вычислении плотности и функции распределения вероятностей строго симметричных устойчивых случайных величин.....	95
<i>Емеличев В. А., Коваленко К.Э.</i> Критерий квазиустойчивости векторной комбинаторной задачи с частными критериями вида MINMIN MODUL.....	98

ХРОНИКА

<i>Кугейко М.М., Манак И.С.</i> Кафедре квантовой радиофизики и фотонике – 50 лет.....	101
<i>Воробей Е.С., Комяк А.И.</i> Кафедре лазерной физики и спектроскопии – 50 лет.....	103
.....	107
.....	111



УДК 535.13

В.М. ГАЛЫНСКИЙ, А.Н. ФУРС

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПОГЛОЩАЮЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

Influence of absorption of the boundary media on characteristics of the dispersionless surface electromagnetic waves is investigated. Existence of these waves is caused by the anisotropy of the media. Existence conditions of the surface waves on the interface of a positive uniaxial crystal and an isotropic medium are established.

Теоретическое и экспериментальное изучение поверхностных поляритонов в металлах, полупроводниках и диэлектриках привлекает внимание многих исследователей [1, 2]. Поверхностные поляритоны являются модами электромагнитного поля с амплитудами, экспоненциально убывающими при удалении от границы раздела сред. Простейший пример системы, в которой возможно существование поверхностных поляритонов, – граница двух изотропных сред. Для этого диэлектрическая проницаемость одной из них должна быть отрицательной (поверхностно-активная среда), а другой – положительной. Диэлектрическая проницаемость отрицательна при некоторых частотах волн в металлах, а также в других материалах вблизи линий поглощения, когда проявляется сильная дисперсия.

В [3, 4] предсказан новый тип поверхностных электромагнитных возбуждений – бездисперсионные или слабодисперсионные поверхностные поляритоны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух прозрачных сред различной симметрии. Пограничные среды при этом могут быть поверхностно-неактивными, но одна из них должна быть анизотропной, а на материальные параметры сред накладываются некоторые дополнительные ограничения. Анизотропия хотя бы одной из пограничных сред, таким образом, является необходимым условием существования таких волн. В работе [5] были сформулированы общие условия существования бездисперсионных поверхностных электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропного кристалла любого типа симметрии, описываемого положительно определенным тензором диэлектрической проницаемости. Было показано, что в такой системе поверхностные моды возникают лишь на некотором ограниченном непрерывном множестве ориентаций плоскостей среза кристалла и направлений распространения волн по отношению к элементам его симметрии.

В [3] исследовались поверхностные электромагнитные волны, локализованные на границе прозрачной изотропной среды с диэлектрической про-

ницаемостью ϵ и прозрачного одноосного кристалла, характеризуемого проницаемостями ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} в случае, когда оптическая ось параллельна границе раздела. Было показано, что такие волны могут распространяться лишь в некоторых направлениях относительно оси кристалла, при этом для материальных параметров сред должны выполняться условия $\epsilon_{\parallel} > \epsilon > \epsilon_{\perp}$.

Цель настоящей работы – исследование поверхностных волн на границах раздела поглощающих анизотропных сред. Простейшей здесь является структура одноосный кристалл – изотропная среда. Важно учесть влияние поглощения на характеристики поверхностных волн и оценить связанные с ним поправки по сравнению с идеализированным случаем прозрачных сред [3].

Наше рассмотрение базируется на общем (бескоординатном) операторно-тензорном подходе в описании поверхностных волн с использованием математического аппарата тензоров поверхностных импедансов и так называемого интегрального формализма [6].

Уравнения Максвелла и материальные уравнения для анизотропной диэлектрической поглощающей среды имеют вид [7]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Для монохроматических полей частоты ω обычно используется обобщенная индукция \mathbf{D}' , связанная с электрическим полем \mathbf{E} эффективным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$:

$$\mathbf{D}' = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{4\pi i \sigma}{\omega} = \epsilon - i\tau,$$

где $\tau = (4\pi\sigma)/\omega$ – тензорный параметр поглощения. В этом случае уравнения Максвелла отличаются от соответствующих уравнений для прозрачных диэлектриков лишь заменой вещественной величины ϵ на комплексную.

Рассмотрим распространение поверхностных электромагнитных волн вдоль плоской границы раздела изотропной среды и одноосного кристалла. Совместим с этой границей плоскость xz декартовой системой координат. Пусть нормаль к границе, направления распространения поверхностной волны и оси кристалла задаются единичными векторами \mathbf{q} , \mathbf{b} , \mathbf{c} соответственно, при этом вектор \mathbf{q} направлен вдоль оси z .

Будем считать, что полубесконечная изотропная среда с диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}' = \epsilon' - i\tau'$ занимает верхнее полупространство $z > 0$, а кристалл, оптическая ось которого параллельна плоскости раздела, характеризуемый тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon} = \epsilon - i\tau$, – нижнее полупространство $z < 0$. Угол между векторами \mathbf{b} и \mathbf{c} задан и равен α . Тогда величины τ , ϵ , входящие в $\hat{\epsilon}$, – одноосные тензоры [7]:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_{\perp} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \\ \tau &= \tau_{\perp} + (\tau_{\parallel} - \tau_{\perp}) \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{b} \cos \alpha - \mathbf{a} \sin \alpha$, $\mathbf{a} = [\mathbf{b} \mathbf{q}]$.

Поле в каждой из сред представляет собой суперпозицию двух неоднородных парциальных монохроматических волн, экспоненциально затухающих при удалении от границы раздела. В изотропной среде напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) = \sum_s^2 C'_s \mathbf{H}_s^0 \exp[ik(\mathbf{br} + \eta'_s \mathbf{qr}) - i\omega t], \quad (1)$$

а в одноосном кристалле

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_s^2 C_s \mathbf{H}_s^0 \exp[ik(\mathbf{br} + \eta_s \mathbf{qr}) - i\omega t], \quad (2)$$

где $\mathbf{H}_s^0, \mathbf{H}_s^0$ – комплексные амплитуды парциальных волн на границе раздела сред, определяемые из системы уравнений Максвелла, C'_s, C_s – весовые коэффициенты, η_s, η'_s – безразмерные коэффициенты затухания парциальных волн. Коэффициенты η_s подчиняются условиям затухания поверхностной волны при удалении от границы раздела: в изотропной среде – $\text{Im}(k\eta_s) > 0$, в кристалле – $\text{Im}(k\eta'_s) < 0$.

Дисперсионное уравнение для поверхностных волн в рассматриваемом случае можно получить с использованием формализма тензоров поверхностных импедансов, который для плоской волны вводится как «тензорный коэффициент пропорциональности» между тангенциальными компонентами напряженностей электрического и магнитного полей: $[\mathbf{qE}] = \gamma \mathbf{H}_\tau$. Для одноосного кристалла он имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{i}{\sqrt{b(a-v^2)} + \sqrt{a(d-v^2)}} \left[v^2 \left(d \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} + \sqrt{ab} \right) \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \right. \\ & \left. + v^2(b-a) \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} \sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) - \right. \\ & \left. - \left(\sqrt{ab}(a-v^2) + \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} (ab - v^2(a+b-d)) \right) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

а для изотропной среды

$$\gamma' = -iv^2 \sqrt{\frac{a'}{a'-v^2}} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + i \sqrt{a'(a'-v^2)} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad (4)$$

где $a = 1/\hat{\epsilon}_\perp, b = 1/\hat{\epsilon}_\parallel, a' = 1/\hat{\epsilon}', d = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha$. Безразмерная величина $v = \omega/(ck)$ представляет собой скорость распространения поверхностной волны (фазовую скорость) в единицах скорости света c в вакууме и называется приведенной частотой.

Из равенства тангенциальных составляющих поля на границе раздела следует дисперсионное уравнение для поверхностных волн $\det(\gamma - \gamma') = 0$. После подстановки в него (3), (4) имеем

$$F(v) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F(v) = & \sqrt{ab} \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} + a' + \\ & + \frac{i}{\sqrt{b(a-v^2)} + \sqrt{a(d-v^2)}} \left[\left(d \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} + \sqrt{ab} \right) \sqrt{a'(a'-v^2)} + \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{ab}(a-v^2) + \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} (ab - v^2(a+b-d)) \right) \sqrt{\frac{a'}{a'-v^2}} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку функция $F(v)$ для поглощающих сред является комплексно-значной функцией переменной v , численный метод решения уравнения (5) состоит в переходе к системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(v) = \operatorname{Re}(F(v)) = 0, \\ f_2(v) = \operatorname{Im}(F(v)) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

На основе данного метода нами была разработана программа для численного решения дисперсионного уравнения. Расчеты проводились для модельных сред с параметрами: $\hat{\epsilon}_\perp = 3 - i0,003$, $\hat{\epsilon}_\parallel = 10 - i0,01$, $\hat{\epsilon}' = 4,5 - i0,005$. Такой выбор обусловлен тем, что ширина интервала углов, в котором возможно существование поверхностных волн, тем больше, чем выше степень анизотропии $\epsilon_\parallel/\epsilon_\perp - 1$ [3]. Известно, что сильная анизотропия может проявляться как в искусственных нетрадиционных материалах (композитных, мезокопических и др.), так и в материалах с перестраиваемыми (модулируемыми) свойствами [8].

Как было показано в [3], а затем в [5], на границе прозрачных одноосного кристалла и изотропной среды поверхностные волны могут быть возбуждены, если угол α , отсчитываемый от оптической оси s и определяющий направление их распространения, лежит в интервале $0 < \varphi_{\min} < \varphi_{\max} < \pi/2$. Граничные углы φ_{\min} , φ_{\max} в этом случае находятся из следующих уравнений:

$$\sin^2 \varphi_{\min} = \frac{\zeta}{2} \left\{ 1 - \eta \zeta + \left[(1 - \eta \zeta)^2 + 4\eta \right]^{1/2} \right\}, \quad (7)$$

$$\sin^2 \varphi_{\max} = \frac{(1 + \eta)^3 \zeta}{(1 + \eta)^2 (1 + \eta \zeta) - \eta^2 (1 - \zeta)^2}, \quad (8)$$

где $\eta = \epsilon_\parallel/\epsilon_\perp - 1$, $\zeta = (\epsilon' - \epsilon_\perp)/(\epsilon_\parallel - \epsilon_\perp)$. Далее мы показываем, что учет поглощения лишь незначительно изменяет интервал углов разрешенных направлений распространения.

Численное решение системы (6) позволяет найти зависимость действительной части приведенной частоты v (фазовой скорости в единицах c) от направления распространения волны (рис. 1). Сравнение значений действительной части v для сред с поглощением и без поглощения показывает, что они незначительно отличаются друг от друга на величину порядка τ^2 . Таким образом, для слабо поглощающих кристаллов ($\tau = 10^{-3} - 10^{-4}$) наличие поглощения не приводит к заметному изменению фазовой скорости поверхностной волны по сравнению с идеализированным случаем прозрачных кристаллов.

Представив пространственную зависимость векторов поля в виде

$$\mathbf{H}(x, y) = \mathbf{H}_0 \exp[i(k\mathbf{br})] = \mathbf{H}_0 \exp\left[i\left(\frac{\omega}{cv} \mathbf{br}\right)\right]$$

(см. также (1), (2)), заключаем, что интенсивность волны уменьшается в e раз на расстоянии $L = 1/\chi$ вдоль направления распространения, где

$\chi = \frac{2\omega}{c} \operatorname{Im} \frac{1}{v}$ – коэффициент поглощения, L – длина пробега. На рис. 2 при-

ведены графики зависимости $c/\omega \operatorname{Im}[k] = \operatorname{Im}[1/v]$ от угла α (направления распространения). Проведенный нами анализ показывает, что значения мнимой части $1/v$, ответственной за затухание волны при ее распространении вдоль границы раздела, пропорциональны параметру поглощения τ .

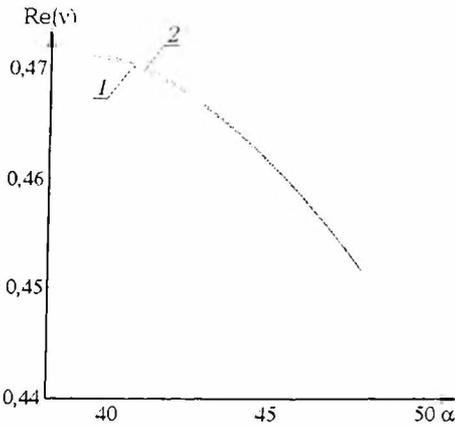


Рис. 1. Зависимость действительной части приведенной частоты ν от направления распространения для различных значений τ : 1 - 0; 2 - 0.1

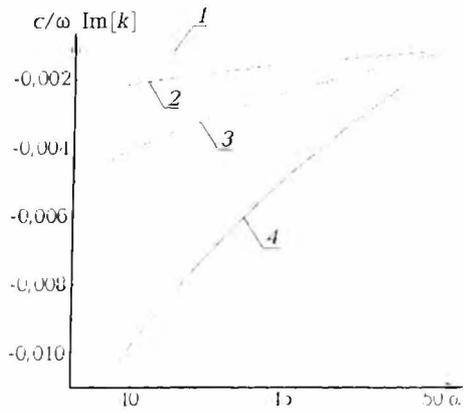


Рис. 2. Зависимость $c/\omega \text{Im}[k] = \text{Im}[1/\nu)$ от направления распространения для различных значений τ : 1 - 0.005; 2 - 0.01; 3 - 0.02; 4 - 0.05

Отметим, что в случае поглощающих сред, для которых τ имеет порядок $10^{-3}-10^{-4}$, значения длины пробега равны $L=10^{-4}-10^{-5}$ м в видимой и $L=10^{-3}-10^{-1}$ м в микроволновой области, что хорошо согласуется с экспериментальными и теоретическими результатами [2, гл. 3].

На рис. 3 приведены графики зависимости φ_{\min} , φ_{\max} от величины параметра поглощения τ изотропной среды при постоянных τ_{\parallel} , τ_{\perp} . Видно, что поглощение в пограничных средах приводит к сужению диапазона разрешенных углов распространения поверхностных волн по сравнению со случаем прозрачных сред. Отметим, что и при увеличении значений параметров τ_{\parallel} , τ_{\perp} интервал углов существования также уменьшается.

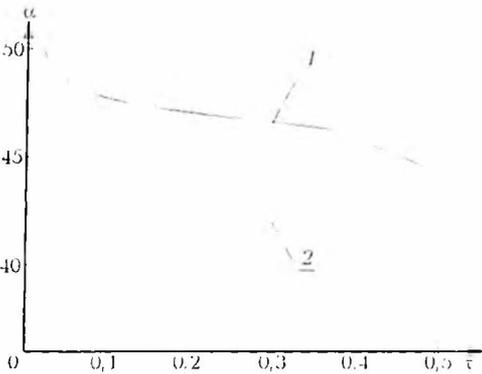


Рис. 3. Зависимость диапазона углов, в которых возможно существование поверхностного поляритона, от параметра поглощения τ в изотропной среде:

1 - φ_{\max} ; 2 - φ_{\min}

Таким образом, учет поглощения в анизотропном одноосном кристалле и изотропной среде несущественно влияет на расположение разрешенных направлений распространения поверхностных волн вдоль границы раздела: как и в случае прозрачных сред, поверхностные волны могут быть возбуждены лишь вдоль ограниченного множества направлений, характеризующихся граничными углами φ_{\min} , φ_{\max} . Эти углы зависят от параметров поглощения τ , τ_{\parallel} , τ_{\perp} и при малых ($\sim 10^{-2}$) их значениях слабо отличаются от φ_{\min} (7), φ_{\max} (8) для случая непоглощающих сред.

Длина пробега поверхностной волны оказывается обратно пропорциональной значениям параметров поглощения τ , τ_{\parallel} , τ_{\perp} .

1. Виноградов Е. А. // УФН. 2002. Т. 172. № 12. С. 1371.
2. Поверхностные поляритоны / Под ред. В.М. Аграновича и Д.Л. Миллса. М., 1985.
3. Дьяконов М. И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 4. С. 119.

4. Аверкиев Н.С., Дьяконов М.И. // Оптика и спектроскопия. 1990. Т. 68. № 5. С. 1118.
5. Furs A.N., Barkovsky L.M. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 1999. Vol. 1. P. 109.
6. Furs A.N., Barkovsky L.M. // Microwave and Opt. Technol. Lett. 1997. Vol. 14. P. 301.
7. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
8. Gleiter H. // Acta Materialia. 2000. Vol. 48. № 1. P. 1.

Поступила в редакцию 09.06.2003.

Владимир Михайлович Галынский – аспирант кафедры теоретической физики. Научный руководитель – А.Н. Фурс.

Александр Николаевич Фурс – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.

УДК 535.37

*Д.С. УМРЕЙКО, В.В. СЫТЬКО, И.В. БАРСУКОВ,
Н.А. АЛЕШКЕВИЧ, В.И. ПОКАТАШКИН*

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ИОНОВ UO_2^{2+} В СОАКТИВИРОВАННЫХ UO_2^{2+} И Ln^{3+} ЛЮМИНОФОРАХ ПРИ БОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЯХ МОЩНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

The effect of the induced absorption and excitation-radiation accumulation on the population of the lower excited state of uranyl complex has been considered.

Уранил UO_2^{2+} является эффективным сенсбилизатором люминесценции трехвалентных ионов редкоземельных элементов Ln^{3+} . Уже первые исследования переноса энергии электронного возбуждения от UO_2^{2+} к Ln^{3+} показали [1, 2], что его квантовая эффективность может достигать значений, близких к единице. Это обусловлено прежде всего преимущественным вкладом $U5f$ -электронов в образование нижних возбужденных (донорных) состояний ураниловых комплексов и f -природой акцепторных состояний Ln^{3+} [3–5].

Вопросам использования данного явления в материалах, соактивированных ионами UO_2^{2+} и Ln^{3+} , уделяется достаточно большое внимание. Рассматривается, в частности, возможность их применения в качестве оптических трансформаторов [4–7] и лазерных сред [8, 9], а также перспективность соактивированных UO_2^{2+} и Ln^{3+} апротонных жидкостей как генерационных материалов с ядерной накачкой [10, 11]. Другим из направлений является создание на их базе квантронов ОКГ с люминесцентными фильтрами и диффузно-люминесцентными покрытиями. В связи с этим возникает необходимость рассмотреть особенности преобразования энергии электронного возбуждения в уранил-лантанидной системе при высоких плотностях мощности возбуждения.

Нами исследована динамика населенности нижних электронных состояний активных ионов в соактивированных UO_2^{2+} и Ln^{3+} фосфатных системах при возбуждении импульсом лампы накачки, традиционно используемой в лазерной технике.

Имея в виду роль уранила как сенсбилизатора, для начала рассмотрим «пассивную» фосфатную матрицу, содержащую только ураниловые комплексы. Особенности люминесценции уранила при повышенных плотностях мощности возбуждения изучались Н.А. Толстым и А.П. Абрамовым [12, 13]. Ими было показано, что квантовый выход и время затухания лю-

минесценции уранила уменьшаются с увеличением интенсивности возбуждения, причем это не может быть связано с эффектами температурного и концентрационного тушения и просветления среды. Предполагалось, что наблюдаемое нелинейное тушение может быть обусловлено встречей мигрирующих возбуждений на одном центре свечения. Следуя логике работ [12, 13], мы дополнительно учтем возможность переходов с нижнего возбужденного состояния уранилового комплекса в более высоковозбужденные состояния.

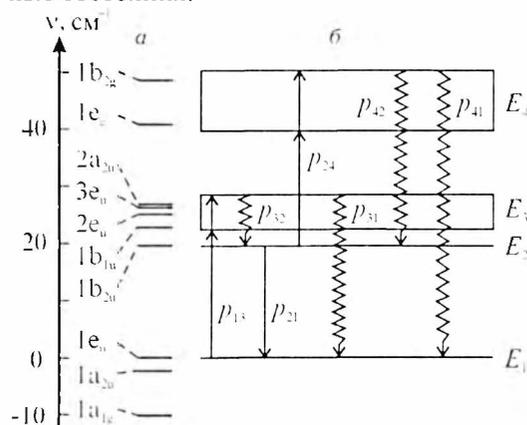


Рис. 1. Диаграмма энергетических уровней и обобщенная схема электронных состояний комплексов уранила в фосфатных системах

Для дальнейшего рассмотрения обратимся к особенностям электронного строения и оптическим свойствам ураниловых комплексов в фосфатных системах (рис. 1). Согласно [4, 14–16] в спектральном диапазоне $19\,000 \div 30\,000 \text{ см}^{-1}$ наблюдаются запрещенные по правилу Лaporte переходы с верхней заполненной ($1e_u$) молекулярной орбитали (МО) уранилового комплекса на подсистему орбиталей ($1b_{2u}$, $1b_{1u}$, $2e_u$, $3e_u$ и $2a_{2u}$), образованных 5f-электронами урана. Переходы в ближней УФ-области (примерно

$30\,000 \div 40\,000 \text{ см}^{-1}$) связаны с возбуждением электронов с более глубокой валентной МО ($1a_{1g}$) на ту же подсистему МО U5f-характера. Разрешенные электронные переходы с верхней заполненной МО наблюдаются в диапазоне частот свыше $40\,000 \text{ см}^{-1}$. При анализе заселенности люминесцентного состояния уранилового комплекса мы воспользуемся моделью четырех-уровневой схемы, показанной на рис. 1. Здесь уровень E_1 соответствует основному состоянию уранилового комплекса, E_2 – нижнему возбужденному состоянию; E_3 и E_4 условно представляют подсистемы высоковозбужденных вибронных состояний. При этом учтем, что длительность импульса накачки соизмерима со временем жизни нижнего возбужденного состояния уранила.

Тогда можно полагать, что заселенность нижнего возбужденного состояния E_2 будет дополнительно зависеть от следующих процессов. Прежде всего это наведенное поглощение (переходы $E_2 \rightarrow E_4$) и последующая релаксация ($E_4 \rightarrow E_2$):

$$\left(\frac{dn_2}{dt} \right)_{2 \leftrightarrow 4} = -(n_2 - n_4) \int \epsilon_2(\nu) P(t, \nu) d\nu,$$

где $P(\nu, t)$ – спектрально-временное распределение плотности мощности возбуждения, $\epsilon_2(\nu)$ – сечение поглощения с уровня E_2 . Затем необходимо учесть перепоглощение люминесценции:

$$\left(\frac{dn_2}{dt} \right)_{2(2 \leftrightarrow 4)} = -n_2 (n_2 - n_4) \frac{\eta \delta}{\tau_2} \int \epsilon_2(\nu) I(\nu) d\nu,$$

где τ_2 и η – время жизни и квантовый выход люминесценции соответственно, $I(v)$ – нормированное спектральное распределение мощности люминесценции ($\int I(v)dv=1$), δ – параметр формы, зависящий от соотношения длины и поперечного сечения образца. Третий фактор, обуславливающий «дополнительное» заселение состояния E_2 , связан с миграцией электронного возбуждения по ураниловым комплексам, приводящей к аккумуляции возбуждения активным центром (процесс типа $*\text{UO}_2^{2+} + *\text{UO}_2^{2+} \rightarrow **\text{UO}_2^{2+} + \text{UO}_2^{2+}$):

$$\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 2} = -\eta_{\text{UU}} n_2^2,$$

где η_{UU} – коэффициент аккумуляции возбуждения активным центром.

Если пренебречь процессами вынужденного испускания (что экспериментально оправдано) и учесть, что в реальной ситуации время жизни нижнего возбужденного состояния соизмеримо с длительностью импульса накачки, то

$$\frac{dn_2}{dt} = \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \leftrightarrow 4} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2(2 \leftrightarrow 4)} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{2 \rightarrow 2} + p_{32}n_3 + p_{42}n_4, \quad (1)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = -p_{32}n_3 + n_1 \int \varepsilon_1(v)P(t,v)dv, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_4}{dt} = & -p_{41}n_4 - p_{42}n_4 + (n_2 - n_4) \int \varepsilon_2(v)P(t,v)dv + \\ & + (n_2 - n_4)n_2 \frac{\eta\delta}{\tau_2} \int \varepsilon_2(v)I(v)dv + \eta_{\text{UU}}n_2^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_0,$$

где p_{ij} – скорость перехода $i \rightarrow j$, $\varepsilon_1(v)$ – сечение поглощения с уровня E_1 .

Решение системы уравнений (1)–(3) для простейшего случая П-образной накачки позволяет оценить максимальную заселенность люминесцентного состояния активного центра. Для упрощения решения целесообразно учесть следующие эмпирические данные. Оценки времен жизни высоковозбужденных состояний (типа E_3 и E_4 на рис. 1) [4] и прямые измерения показывают, что при комнатных температурах скорости безызлучательной дезактивации $p_{42} \approx p_{32} \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$, $p_{41} \approx p_{31} \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$. При этом удовлетворяются условия

$$\int \varepsilon_k(v)P(v)dv < p_{ij}, \quad k=1,2; \quad i=3,4; \quad j=0,2.$$

Тогда

$$n_2^* \cong \frac{-[1/\tau_2 + A] + \{[1/\tau_2 + A]^2 + 4BCn_0\}^{1/2}}{2C},$$

где параметры A , B и C связаны с микро- и макропараметрами рассматриваемой системы и мощностью накачки уравнениями

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_{41}}{p_{41} + p_{42}} \int \varepsilon_2(v)P(v)dv, \\ B &= \int \varepsilon_1(v)P(v)dv, \\ C &= \frac{\eta\delta}{\tau_2} \frac{p_{41}}{p_{41} + p_{42}} \int \varepsilon_2(v)I(v)dv + \eta_{\text{UU}} \left(1 + \frac{p_{41}}{p_{41} + p_{42}}\right) = C_1 + C_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь отношение $p_{41}/(p_{41}+p_{42})$ определяет квантовую эффективность дезактивации высоковозбужденных состояний, не приводящих к «дополнитель-

ному» заселению нижнего возбужденного состояния активного центра. Параметры A и B характеризуют процессы наведенного поглощения и поглощения из основного состояния. Первое слагаемое параметра C в (4) учитывает перепоглощение люминесценции образца, второе – аккумуляцию возбуждения. Для образца цезиевого уранилфосфатного стекла диаметром 1,5 см и толщиной 0,5 см при концентрации ионов уранила $n_0=5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ получены следующие оценки численных значений параметров при интегральной по спектру плотности мощности накачки $P_{\text{II}} \approx 2 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2}$ и температуре $T=293 \text{ К}$: $\tau_2=4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, $\eta=0,3$, $A \sim 10^{-19} \text{ см}^2$, $B \sim 10^{-19} \text{ см}^2$, $C_1 \sim 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с}$, $C_2 \sim 10^{-14} \text{ см}^3/\text{с}$.

В системе $\text{UO}_2^{2+}-\text{Ln}^{3+}$ появляются дополнительные стоки энергии возбуждения уранилового комплекса, что существенно меняет характер рассмотренных процессов. Высокая эффективность переноса энергии возбуждения по типу $^* \text{UO}_2^{2+} + \text{Ln}^{3+} \rightarrow \text{UO}_2^{2+} + ^* \text{Ln}^{3+}$ обуславливает резкое сокращение времени жизни нижнего возбужденного состояния. Это приводит к различному влиянию процессов поглощения из основного и первого возбужденного состояний уранилового комплекса на заселенность нижнего возбужденного состояния UO_2^{2+} :

$$n_2^* \cong \frac{\{[1/\tau_2 + A + D]^2 + 4BC'n_0\}^{1/2} - 1/\tau_2 + A + D}{2C'}, \quad (5)$$

где

$$D \cong \frac{p_{41}}{p_{41} + p_{42}} \left[n_2^{(a)} \frac{\delta}{\tau_a} \int \epsilon_2(\nu) I_a(\nu) d\nu + \eta_{\text{ULn}} \right],$$

η_{ULn} – коэффициент аккумуляции возбуждения в паре $^* \text{UO}_2^{2+}-^* \text{Ln}^{3+}$, индекс (а) означает акцептор, выражение для C' соответствует выражению для C [11], но вместо τ_2 берется естественное время жизни $\tau_2^{(0)}$ нижнего возбужденного состояния уранила. Вследствие высокой эффективности переноса энергии от UO_2^{2+} к Ln^{3+} $\tau_2 \ll \tau_a$, причем при соотношении активных ионов $\text{UO}_2^{2+}:\text{Ln}^{3+} \leq 1:1$ влиянием перепоглощения люминесценции Ln^{3+} можно пренебречь. Тогда для диапазона плотности мощности возбуждения, удовлетворяющей условию

$$[1/\tau_2 + A + D]^2 \gg 4BC'n_0,$$

выражение (5) может быть представлено в более простом виде:

$$n_2^* \cong \frac{n_0 B}{\tau_2^{-1} + A + \eta_{\text{ULn}} \frac{p_{41}}{p_{41} + p_{42}} n^{(a)}}.$$

Экспериментальная проверка полученных соотношений (рис. 2) проводилась на соактивированных UO_2^{2+} и Eu^{3+} цезиевых фосфатных стеклах с содержанием активных ионов 2 и 4 % соответственно. Образцы изготавливались в виде цилиндров диаметром 15 мм и длиной 5, 8 и 15 мм. Возбуждение осуществлялось излучением ксеноновой лампы ИФП-800 через фильтр СС-8 (диапазон возбуждения – $20\,000 \div 30\,000 \text{ см}^{-1}$). Измерения проводились на автоматизированном спектрофотометре на базе КСВУ-12 с ФЭУ-84 с временным разрешением 200 нс. В качестве зондирующего использовалось монохроматизированное (через монохроматор МДР-4) излучение ксеноновой лампы ДКСШ-1000.

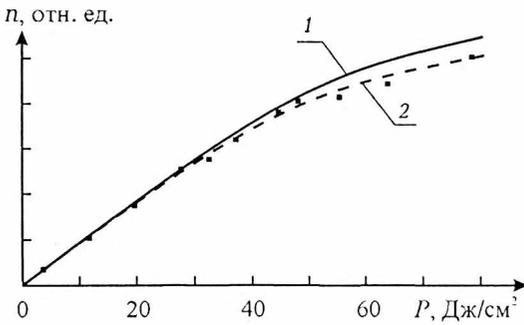


Рис. 2. Зависимость заселенности нижнего возбужденного состояния уранилового комплекса в цезиевом уранилфосфатном стекле, соактивированном Eu^{3+} , от плотности мощности возбуждения P : 1 – расчет, 2 – эксперимент

Из экспериментальных данных следует, что длина образца практически не влияет на насыщение населенности донорного состояния UO_2^{2+} , что свидетельствует о незначительном вкладе перепоглощения люминесценции. Примерно до 40 Дж/см^2 населенность донорного состояния UO_2^{2+} пропорциональна плотности мощности накачки, т. е. наведенное поглощение не является существенным. В то же время при наличии акцепторов порог насыщения заселенности нижнего возбужденного состояния доноров UO_2^{2+} повышается на порядок и более (в зависимости от концентрации активных ионов).

Таким образом, при соактивации пассивной среды ионами UO_2^{2+} и Ln^{3+} , удовлетворяющими условиям переноса энергии возбуждения $*\text{UO}_2^{2+} + \text{Ln}^{3+} \rightarrow \text{UO}_2^{2+} + *\text{Ln}^{3+}$, наблюдается резкое уменьшение эффективности наведенного поглощения и его влияния на заселенность нижнего возбужденного («донорного» по отношению к Ln^{3+}) состояния UO_2^{2+} . Это позволяет рассматривать соактивированные UO_2^{2+} и Ln^{3+} материалы в качестве перспективных люминесцентных преобразователей для систем оптической накачки ОКГ.

1. De Shazer L.G., Cabezas A.J. // Proc. IEEE. 1964. Vol. 52. P. 1355.

2. Gandy H.W., Ginter R.J., Weller J. // Appl. Phys. Lett. 1964. Vol. 4. P. 188.

3. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения: В 2 т. Мн., 1981. Т. 1.

4. Сытько В.В., Умрейко Д.С. Фотоника соединений шестивалентного урана. Гомель, 2000.

5. Reisfeld R., Jorgensen C.K. Lasers and Excited States of Rare Earths. Berlin; Heidelberg; New York, 1977.

6. Reisfeld R., Kalisky Y. // Nature. 1980. Vol. 283. P. 281.

7. Сытько В.В., Алешкевич Н.И., Кайдала Ю.М. и др. // Геллотехника. 1989. № 5. С. 19.

8. Melamed N.T., Hirayama C., French P.W. // Appl. Phys. Lett. 1965. Vol. 6. P. 43.

9. Белокриницкий Н.С., Жаботинский М.Е., Мануильский А.Л. и др. // Докл. АН СССР. Сер. физ. 1969. Т. 185. С. 557.

10. Дьяченко П.П., Калинин В.В., Серегина Е.А. Лазер на основе неорганической жидкости, легированной неодимом и уранилом. Обнинск, 1991.

11. Добровольский А.Ф., Дьяченко П.П., Серегина Е.А., Тихонов Г.В. Проблемы синтеза и генерационные свойства ураносодержащей неорганической жидкости на основе оксихлорида фосфора, активированного неодимом. Обнинск, 1994.

12. Толстой Н.А., Абрамов А.П. // Оптика и спектроскопия. 1966. Т. 20. С. 496.

13. Толстой Н.А., Абрамов А.П. // Там же. 1966. Т. 21. С. 171.

14. Сытько В.В., Красилов Ю.И., Кузнецов Н.Т. и др. // Там же. 1985. Т. 59. С. 81.

15. Сытько В.В., Умрейко Д.С. // Журн. прикл. спектроскопии. 1998. Т. 65. С. 819.

16. Сытько В.В., Умрейко Д.С. // Спектроскопия и люминесценция молекулярных систем / Под ред. Е.С. Ворояя и др. Мн., 2002. С. 23.

Поступила в редакцию 16.06.2003.

Дмитрий Степанович Умрейко – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Владимир Владимирович Сытько – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики ГГУ им. Ф. Скорины.

Иван Владимирович Барсуков – младший научный сотрудник кафедры оптики ГГУ им. Ф. Скорины.

Николай Александрович Алешикевич – кандидат физико-математических наук, и.о. доцента кафедры оптики ГГУ им. Ф. Скорины.

Виктор Иннокентьевич Покаташкин – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Национального научно-исследовательского центра мониторинга озоносферы БГУ.

УДК 547.572:535.217

А.И. СТАНКЕВИЧ, В.В. МОГИЛЬНЫЙ

РЕЛЬЕФООБРАЗОВАНИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ СЛОЕВ, СОДЕРЖАЩИХ ФОТОВОССТАНАВЛИВАЮЩИЕСЯ АРОМАТИЧЕСКИЕ КЕТОНЫ

Photoreduction of aromatic ketones in polymeric matrices initiates a formation of surface photorelieves under thermal annealing. We have revealed that polymeric layers containing aromatic ketones of planar molecular structure (xanthone, anthrone) can demonstrate a transformation of positive photorelief to negative one. This phenomenon occurs at annealing temperatures close to vitrification temperature of polymeric matrix and improves a reproducibility of high spatial frequencies of periodic photorelieves.

Релаксационные рельефы образуются на поверхности фоточувствительных полимерных слоев под воздействием неоднородной деформации материала при термическом отжиге после экспонирования [1–3]. Технологическая простота получения фоторельефов позволяет рассчитывать на их применение для записи рельефно-фазовых голограмм и формирования других оптических элементов.

Поверхностные фоторельефы формируются в результате термоактивируемой релаксации неравновесных центров фотопродукта и его полимерного окружения в экспонированном материале. Для инициирования рельефообразования необходимо существенное изменение молекулярной геометрии при фотореакции. Оно достигается, в частности, изменением планарных молекулярных структур на объемные (фотодимеризация замещенных антраценов [1–3]) и раскрытием ненасыщенных связей (фотовосстановление ароматических кетонов [2]). Применение в рельефообразующих композициях фоточувствительных соединений, сочетающих названные свойства, способно повысить эффективность рельефообразования и чувствительность записи поверхностных фоторельефов.

Основными факторами, ограничивающими разрешение периодических релаксационных фоторельефов, являются возникающие в процессе отжига сдвиговые напряжения. Высокоэластичные полимерные матрицы позволяют повысить разрешение более чем на порядок, но способствуют развитию диффузии, вызывающей быструю деградацию рельефа [3]. Для получения устойчивых фоторельефов со значительной степенью разрешения необходимы материалы с высокой температурой стеклования, допускающие отжиг при близких к ней температурах и выше. К таким материалам относятся композиции фоточувствительных карбонильных соединений с полимерами, имеющими точку стеклования ~ 373 К.

Цель настоящей работы – повышение разрешения периодических релаксационных фоторельефов, возникающих в стеклообразных композициях на основе полиметилметакрилата (ПММА) с ароматическими кетонами пла-

нарной структуры в качестве фоточувствительных соединений в условиях высокотемпературного отжига.

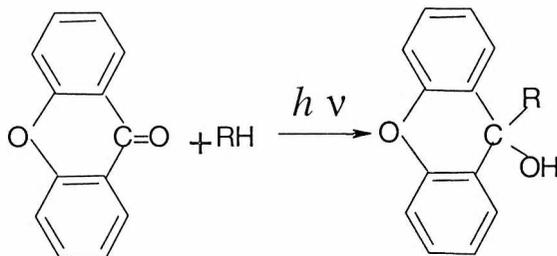
Материал и методика

Для эксперимента готовили полимерные слои толщиной 25–30 мкм на мире (период штрихов $d=20-80$ мкм) путем полива растворенных в хлороформе ингредиентов (ПММА + 9 мас. % кетона) с последующей сушкой в течение не более 24 ч при 293 К. Свежеприготовленные образцы экспонировали со стороны подложки в течение 1 ч лампой ДРШ-350 через фильтр УФС-6. Постфотолитный термический отжиг приводил к образованию периодических поверхностных фоторельефов. Толщину слоя, высоту рельефа и амплитуду его модуляции Δl определяли с помощью микроинтерферометра МИИ-4. Величину Δl считали положительной, если толщина экспонированной области превышала толщину неэкспонированной.

Результаты и их обсуждение

Некоторые ароматические кетоны обладают планарной структурой, а вступая в реакцию фотовосстановления, образуют неплоские молекулы – фотопродукты. К ним относятся ксантон (в композициях – КС) и антрон, общая планарность молекулы которых обеспечивается наличием мостиковой группы –O– или –CH₂– в ортоположениях по отношению к карбонильной группе. Бензофенон с незамкнутыми бензольными кольцами имеет неплоскую молекулу.

В результате акта фотовосстановления карбонильная группа кетонов превращается в спиртовую, увеличивая размеры молекулы. Возникающая



объемность фотопродуктов антрона и ксантона за счет потери планарности может создавать дополнительные по сравнению с бензофеноном напряжения в полимерном окружении.

Было установлено, что для всех трех кетонов в пределах температур порядка 340 К постфотолитный отжиг приводит только к положительным фоторельефам. Однако для композиции КС-ПММА повышение температуры отжига до 358 К вызывает инверсию фоторельефов, особенно для периодов меньше 40 мкм (рис. 1, кривые 1, 2). Для антрона и бензофенона при этом температурном режиме величины Δl положительны (рис. 2, кривые 1, 1'). Если температуру отжига поднять до 373 К (точка стеклования полимера), то инверсия фоторельефов для КС-ПММА происходит на всех пространственных частотах (рис. 1, кривые 3–5). Для композиций на основе бензофенона и антрона наблюдается уменьшение величин Δl (с небольшим обращением рельефа для антрона при малых периодах решетки, рис. 2, кривые 2, 2'). При температурном режиме, близком к точке стеклования, для КС-ПММА можно подобрать такое время отжига, когда амплитуда модуляции фоторельефа для периодов меньше 40 мкм практически постоянна (например, рис. 1, кривая 3). В этом случае можно добиться максимально возможного разрешения для этой композиции.

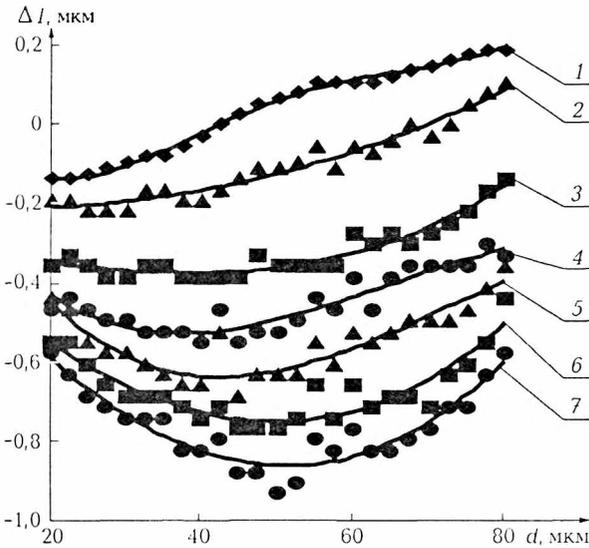


Рис. 1. Зависимость амплитуды фоторельефа для композиции КС-ПММА от пространственного периода. Отжиг при 358 К 10 мин (1) и 50 мин (2); отжиг при 373 К 10 мин (3), 1 ч (4), 2 ч (5), 4 ч (6) и 7 ч (7)

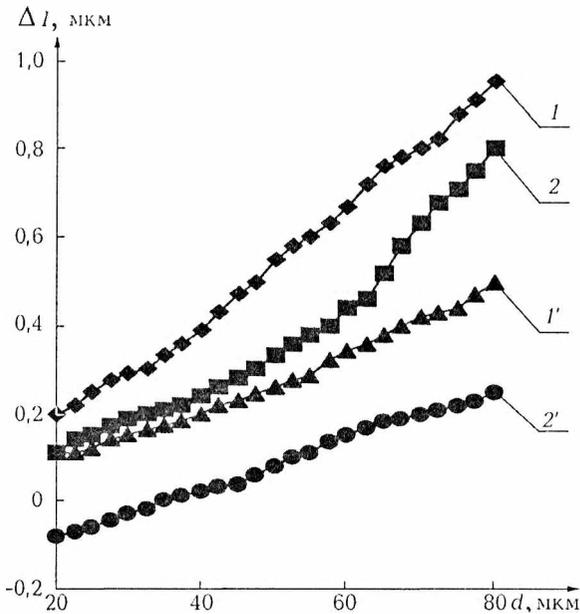


Рис. 2. Зависимость амплитуды фоторельефа для композиции бензофенон-ПММА (1, 2) и антрон-ПММА (1', 2') от пространственного периода. Отжиг при 358 К 1 ч (1); отжиг при 373 К 1 ч (2)

Рассмотрим более детально изменение рельефа в процессе термического отжига слоев композиции КС-ПММА, для которой разрешение периодических релаксационных фоторельефов наилучшее. На рис. 3 представлена эволюция профиля периодического рельефа на поверхности пленок КС-ПММА для двух пространственных периодов (d): 80 и 20 мкм. После постфотолитного отжига в течение 10 мин при 358 К фоторельеф положителен для $d=80$ мкм, но уже отрицателен для $d=20$ мкм (рис. 3, кривые 1 и 1').

Продолжение нагревания пленок при 358 К и при 373 К приводит к инвертированию рельефа для всех пространственных периодов (рис. 3, кривые 2–4 и 2'–4'). Обращает на себя внимание тот факт, что по мере усадки экспонированного материала в неэкспонированных местах толщина слоя сначала незначительно возрастает, а затем также уменьшается (т. е. можно подобрать такой момент термического отжига, когда для малых периодов рельеф образуется только за счет усадки экспонированных участков поверхности). Для

больших периодов ($d=80$ мкм) усадка в основном происходит на границе свет – тень (рис. 3, кривые 2–4), для малых ($d=20$ мкм) профиль рельефа напоминает синусоиду. Градиент освещенности приводит к усадке материала до 0,6 мкм на границе свет – тень, тогда как в центре экспонированного участка эта величина составляет всего 0,2 мкм, т. е. в 3 раза меньше, чем на краях (рис. 3, кривая 4). По мере уменьшения пространственного пе-

риода мираы граничные зоны сближаются и взаимно усиливают влияние друг на друга. Это приводит к трансформации профиля рельефа от сложного (при больших периодах решетки d) к синусоидальному (при d меньше 30 мкм), что позволяет сохранять амплитуду рельефа при малых пространственных периодах и повышает разрешающую способность материала КС-ПММА.

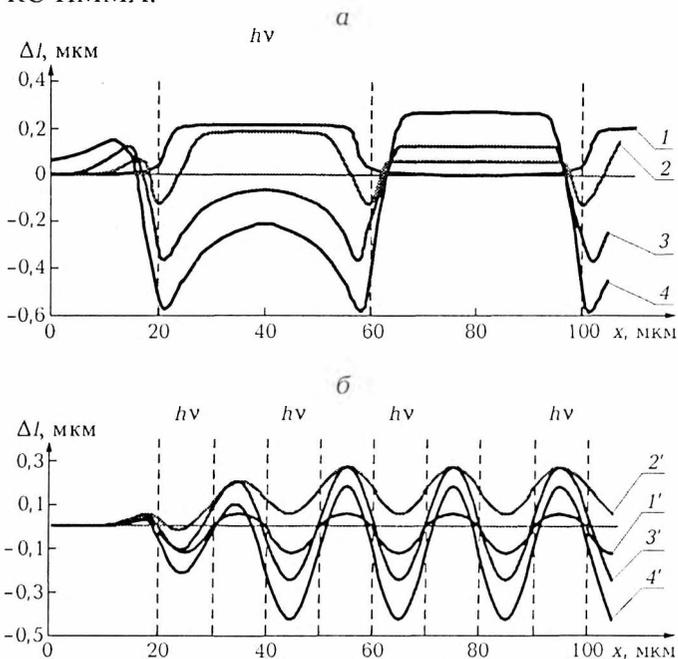


Рис. 3. Эволюция профиля периодического рельефа на поверхности композиции КС-ПММА для $d=80$ мкм – а (1–4) и $d=20$ мкм – б (1'–4').

Отжиг при 358 К 10 мин (1) и 50 мин (2); отжиг при 373 К 10 мин (3), 2 ч (4)

После фотовосстановления различие во взаимодействии с растворителем становится еще сильнее, так как в полной мере проявляются особенности заместителей в бензольных кольцах. В экспонированных объемах молекулы кетонов превращаются в соответствующие спирты, и электроноакцепторные свойства карбонильной группы теперь не компенсируют электронодонорный эффект мостиковых групп $-CH_2-$ для фотопродукта антраона и $-O-$ для фотопродукта ксантона по сравнению с фотовосстановленным бензофеноном (причем электронодонорные свойства неподеленной пары p -электронов мостикового кислорода сильнее, чем у метиленовой группы).

Согласно электронным эффектам заместителей в ряду продуктов фотовосстановления бензофенона – антраона – ксантона, увеличивается способность образовывать π -комплексы с молекулами хлороформа. Для антраона и ксантона этот эффект усиливается искажением структуры молекулы после фотовосстановления, что способствует взаимодействию уже двух бензольных колец, расположенных под углом друг к другу, с молекулой растворителя. Чем больше степень фотопревращения ксантона, тем легче молекулы растворителя переходят от слабого комплексообразователя – кетона (в неэкспонированной области) к более сильному – спирту (в экспонированной области). Предположение о существенной роли растворителя в формирова-

Рассмотрим возможную причину различного поведения полимерных композиций при формировании фоторельефов, содержащих близкие по строению ароматические кетоны. В ряду бензофенон – антраон – ксантон увеличивается поддача электронной плотности на бензольные кольца, усиливая способность молекул кетонов к взаимодействию через π -электроны с окружением (в том числе и с молекулами остаточного растворителя). После

нии рельефа подтверждается отсутствием инверсии при экспонировании полимерной пленки с ксантоном, предварительно отожженной 5–6 ч при 373 К. При времени экспозиции, как и для неотожженного образца, величина Δl везде положительна и составляет всего 0,15–0,2 мкм для $d = 80$ мкм, быстро падая по мере уменьшения пространственного периода решетки.

Поскольку десорбция хлороформа является одним из ключевых моментов при образовании рельефов с большой амплитудой, мы проследили за потерей массы одинаковых по площади и толщине экспонированных и неэкспонированных полимерных пленок при различных температурах. Было установлено, что десорбция хлороформа при постоянной температуре близка к экспоненциальной. По известным величинам Δm для ряда временных значений рассчитали конечное изменение массы образца для трех температур (таблица). Как видно из приведенных в таблице данных, при комнатной температуре экспонированные образцы теряют меньше хлороформа, чем неэкспонированные. Причем наименьшее изменение массы наблюдается для композиции, содержащей ксантон. При температуре, близкой к точке кипения хлороформа, потеря массы для всех образцов примерно одинакова (небольшое отставание все еще заметно для композиции, содержащей ксантон и подвергшейся экспонированию). При достижении точки стеклования полимера изменение массы для экспонированного образца с ксантоном превышает эту величину для неэкспонированного, что свидетельствует об удержании части растворителя фотовосстановленными молекулами ксантона.

Десорбция хлороформа из полимерных композиций

ПММА, содержащий ароматический кетон	Рассчитанное изменение массы (мг) при различных значениях T		
	293 К	339 К	375 К
Ксантон (фотоэкспонированный)	0,56	1,40	2,50
Антрацен (фотоэкспонированный)	0,73	1,54	2,27
Бензофенон (фотоэкспонированный)	1,24	1,51	1,96
Ксантон	1,85	1,71	2,21
Антрацен	1,72	1,52	2,19
Бензофенон	1,86	1,51	1,93
Без добавки кетона (фотоэкспонированный)	1,73	1,71	2,03
Без добавки кетона	1,82	1,53	1,98

Влияние хлороформа на рельефообразование заключается в следующем. При температурах постфотолизного отжига, которые значительно ниже точки стеклования и температуры кипения растворителя, хлороформ лучше десорбируется из неэкспонированных участков и частично мигрирует к экспонированным. Приток молекул хлороформа усиливает релаксацию полимерной матрицы, происходит относительное поднятие поверхности пленки. Однако при приближении температуры к точке стеклования полимера (в более пластифицированных областях она, естественно, ниже) подвижность растворителя увеличивается и он интенсивно испаряется. В полимерной матрице образуются дополнительные кластеры свободного объема, материал, находясь в высокоэластичном состоянии, быстро релаксирует – происходит усадка слоя вплоть до инверсии рельефа.

Таким образом, для повышения разрешения периодических релаксационных фоторельефов в стеклообразных композициях ароматических кетонов и ПММА термический отжиг для свежеприготовленных образцов, содержащих остаточный растворитель, необходимо проводить вблизи точки

стеклования полимера, что приводит к инверсии фоторельефов. Возникающие в процессе экспонирования фотопродукты в этом случае способны инициировать формирование поверхностных фоторельефов и удерживать хлороформ при низких температурах. Десорбция растворителя вблизи точки стеклования полимера способствует инвертированию фоторельефа для композиции КС-ПММА, позволяя стабилизировать модуляцию амплитуды для малых периодов. После удаления растворителя матрица становится более жесткой, препятствуя диффузии фотопродуктов и деградации рельефов.

1. Могильный В.В., Грицай Ю.В. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. № 24. С. 66.

2. Mogilny V.V., Gritsai Y.V., Lazareva A.M. // Proceed. SPIE. 1996. Vol. 2890. P. 64.

3. Могильный В.В., Грицай Ю.В., Ковалев С.В. // Журн. техн. физ. 1999. Т. 69. № 8. С. 79.

Поступила в редакцию 09.06.2003.

Александр Ильич Станкевич – старший научный сотрудник кафедры физической оптики.

Владимир Васильевич Могильный – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической оптики.

УДК 537.311.33

Ю.А. БУМАЙ, М.Г. ЛУКАШЕВИЧ, Д.А. СКРИПКА

МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЙ ЭФФЕКТ СЛАБО РАЗУПОРЯДОЧЕННОГО ГЕТЕРОПЕРЕХОДА GaAs – AlGaAs

Weak localization and electron-electron interaction processes in two dimensional electron (2D) gas of single GaAs – AlGaAs heterojunction with two occupied quantum subbands have been studied using low temperature transport measurements. The transport characteristics have been interpreted within the model with two conductive layers corresponding to 2D and 3D electron gasses. The effects of weak localization on transport properties of two-dimensional (2D) electron gas in low magnetic fields and electron-electron interaction in large ones have been observed.

Изучение электронных систем пониженной размерности в последнее десятилетие превратилось в ведущее направление физики конденсированного состояния вещества. Электронные свойства двумерных систем на основе полупроводниковых гетеропереходов, широко используемых при производстве ряда приборов, являются предметом активных экспериментальных и теоретических исследований [1–6]. Применение техники селективного легирования повышает подвижность двумерных носителей заряда [1], поскольку они отделены от доноров, что позволяет значительно увеличить рабочие частоты приборов на их основе. Вместе с тем даже слабое разупорядочение двумерного электронного газа приводит к проявлению эффектов слабой локализации и усилению роли электрон-электронного взаимодействия [2–5]. Эти эффекты, а также присутствие крупномасштабных флуктуаций потенциала в двумерном канале приводят к существенному изменению электрических характеристик электронных систем пониженной размерности.

Материал и методика

Гетероструктуры были получены методом молекулярно-лучевой эпитаксии на полуизолирующих подложках из арсенида галлия с использованием селективного легирования кремнием и состояли из нижнего нелегированного активного слоя GaAs толщиной 500 нм, нелегированного $Al_{0,3}Ga_{0,7}As$

слоя-спейсера (3 нм), сильно легированного кремнием ($n_e \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$) n^+ -слоя $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ (40 нм) и верхнего, сильно легированного кремнием ($n_e \sim 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$) n^{++} -слоя GaAs (50 нм). Омические контакты к образцам изготавливались путем вжигания индия в потоке водорода при температуре 400°C . Поперечный магниторезистивный эффект измерен на линейном участке вольт-амперной характеристики в магнитном поле сверхпроводящего соленоида с индукцией до 8 Тл в температурном интервале 1,5–300 К. Измерения проведены квазичетырехзондовым методом в режиме генератора постоянного тока и конфигурациях, когда магнитное поле перпендикулярно (конфигурация эффекта Холла) и параллельно плоскости гетероперехода.

Результаты и их обсуждение

Изучение температурных зависимостей проводимости гетероструктур показало, что характерное для металлического типа переноса зарядов уменьшение сопротивления при понижении температуры сменяется его увеличением при температурах ниже $T_m = 8\text{--}10 \text{ К}$. Температурная зависимость сопротивления $R(T)$ для двух структур показана на рис. 1. Такое изменение знака температурного коэффициента сопротивления в области низких температур, согласно современным представлениям, интерпретируется в рамках теории квантовых поправок к классической проводимости Друде для слабо разупорядоченных электронных систем. При этом рост сопротивления при $T < T_m$ может вызываться либо процессами слабой локализации [2], либо процессами электрон-электронного взаимодействия [3], а температурную зависимость проводимости названных систем из-за аддитивности этих процессов можно представить в виде

$$\sigma(T) = \sigma_0(T) + \Delta\sigma_L(T) + \Delta\sigma_I(T), \quad (1)$$

где $\sigma_0(T)$ – классическая проводимость Друде, а $\Delta\sigma_L(T)$ и $\Delta\sigma_I(T)$ – квантовые поправки за счет слабой локализации и электрон-электронного взаимодействия соответственно. При этом характер зависимости $\Delta\sigma(T)$ определяется размерностью электронной системы. Так, для трехмерного (3D) электронного газа соответствующие квантовые поправки имеют разную степенную зависимость от температуры, в то время как для 2D электронного газа они имеют вид

$$\Delta\sigma_L^{2D}(T) = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln\left(\frac{1}{L_L}\right) = \frac{\alpha p e^2}{2\pi^2\hbar} \ln T, \quad (2)$$

$$\Delta\sigma_I^{2D}(T) = (1 - F) \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln T, \quad (3)$$

где e – заряд электрона, \hbar – постоянная Планка, $L_L = (D\tau_{in})^{1/2}$ – длина диффузии, на которой сохраняется фаза волновой функции электрона, $\tau_{in} \propto T^{-p}$ – время неупругого рассеяния, α и $p > 1$ – подгоночные параметры, D – коэффициент диффузии, F – фактор экранирования [2, 3].

Как следует из формул (2), (3), для 2D слабо разупорядоченного электронного газа квантовые поправки как за счет процессов слабой локализации, так и за счет процессов электрон-электронного взаимодействия имеют логарифмическую зависимость от температуры (вставка на рис. 1). Видно, что низкотемпературные участки имеют линейный характер, т. е. хорошо описываются формулами (2) и (3). Это свидетельствует о двумерном характере переноса заряда по отношению к процессам слабой локализации и/или электрон-электронного взаимодействия.

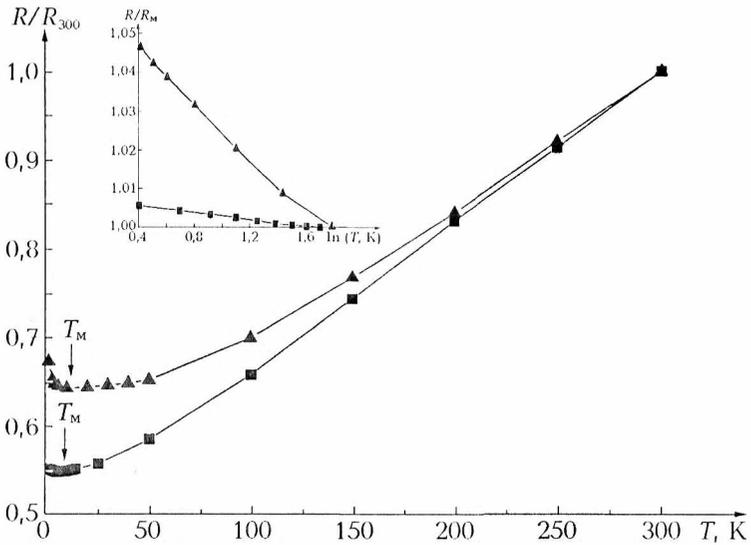


Рис. 1. Температурная зависимость сопротивления двух гетероструктур. На вставке показаны низкотемпературные участки зависимости сопротивления от логарифма температуры

Относительный вклад процессов слабой локализации и электрон-электронного взаимодействия в проводимость может быть определен путем наложения внешнего магнитного поля, которое по-разному влияет на данные процессы. Так, слабое магнитное поле расстраивает квантовую интерференцию электронных волн, распространяющихся по замкнутой траектории в двух противоположных направлениях, что ведет к антилокализации, т. е. уменьшению сопротивления в магнитном поле или отрицательному магниторезистивному эффекту [2, 4]. В то же время в случае преобладания электрон-электронного взаимодействия магниторезистивный эффект положителен [3, 4]. На рис. 2 показаны магнитополевая зависимость поперечного магнитосопротивления (МС) (кривая 1) и ее первая производная (кривая 2), измеренные в конфигурации Холла. В области слабых магнитных полей ($B < 0,5$ Тл) наблюдается достаточно большое, квадратичное по магнитному полю положительное МС. В более сильных полях эта зависимость становится практически линейной, и на ней заметны осцилляции Шубникова – де Хааза, отчетливо проявляющиеся на первой производной (кривая 2). Квадратичное положительное МС типично для классических магнитных полей и лоренцевского механизма магниторезистивного эффекта, в то время как линейная зависимость МС от поля может быть обусловлена рядом причин: существенной неоднородностью исследуемых структур [7], переходом в область квантующих полей [8], в которой показатель степени определяется механизмом рассеяния носителей заряда и изменяется в широких пределах, а также наличием параллельных каналов проводимости с разными величинами концентрации носителей и их подвижности. В частности, в структурах могут быть параллельные $2D$ электронному газу каналы $3D$ электронной проводимости по верхнему слою n^{++} -GaAs и не обедненной части слоя n^+ -AlGaAs. Энергетическая диаграмма структуры, соответствующая данному случаю, изображена на вставке рис. 2 а.

Проведем анализ зависимостей МС по двухслойной модели, включающей $2D$ канал (слоевая электропроводность σ_1 и подвижность электронов μ_1) и параллельный ему $3D$ канал с параметрами интегрального слоя, объеди-

няющего остальные слои структуры (слоевая электропроводность σ_2 и подвижность μ_2). Зависимость сопротивления от магнитного поля $R(B)$ в этом случае может быть записана в виде [7]

$$R(B) = \frac{\sigma_1(1 + \mu_2^2 B^2) + \sigma_2(1 + \mu_1^2 B^2)}{\sigma_1^2(1 + \mu_2^2 B^2) + \sigma_2^2(1 + \mu_1^2 B^2) + 2\sigma_1\sigma_2(1 + \mu_1\mu_2 B^2)} \frac{l}{b}, \quad (4)$$

где l, b – длина и ширина образца соответственно.

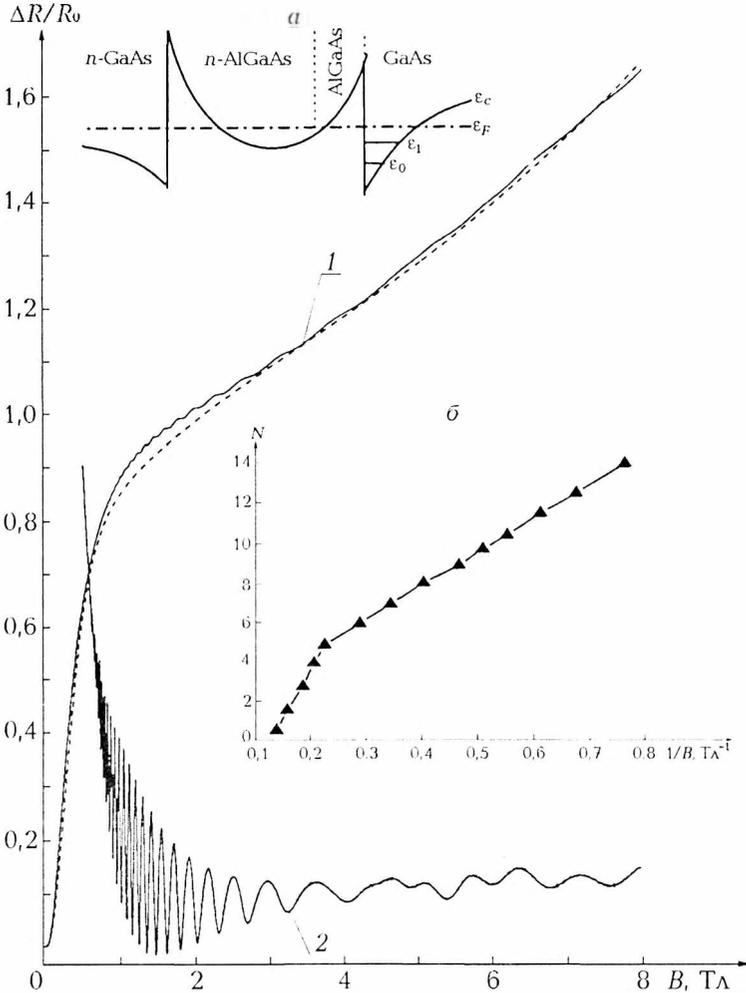


Рис. 2. Магнитополевая зависимость МС гетероструктуры в конфигурации Холла при $T=2$ К (1) и ее первая производная (2).

На вставках: а – энергетическая диаграмма, б – зависимость номера осцилляций Шубникова – де Хааза от обратного магнитного поля.

Пунктирная линия – расчет МС по двухслойной модели

Для трехмерных сильно легированных слоев GaAs и AlGaAs подвижность электронов не превышает $\mu \sim 1000 \text{ см}^2/\text{Вс}$ [9] и условие слабых магнитных полей $\mu B \ll 1$ выполняется во всем исследованном интервале, в то время как для 2D газа, имеющего подвижность, как минимум, на порядок больше, при гелиевых температурах оно выполняется только до полей $B < 0,15\text{--}0,3$ Тл. Следовательно, особенности зависимости $\Delta R(B)$, наблюдаемые при $B > 1$ Тл, в первую очередь могут быть связаны с выполнением условия сильных классических и квантующих магнитных полей для 2D элек-

тронного газа. Наилучшее совпадение результатов расчета по формуле (4) (пунктирная линия на рис. 2) с экспериментальной магнитополевой зависимостью наблюдается при использовании следующих параметров $2D$ и $3D$ слоев: $\sigma_1=1,33\cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$, $\mu_1=26\ 000$ см 2 /Вс, $n_{s1}=3,2\cdot 10^{11}$ см $^{-2}$, $\sigma_2=1,57\cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$, $\mu_2=744$ см 2 /Вс, $n_{s2}=1\cdot 10^{13}$ см $^{-2}$. Отметим, что для согласования расчета с результатами измерений в сильных магнитных полях в формуле (4) была введена квадратичная зависимость σ_1 и σ_2 от магнитного поля, а использование в расчете двух и более параллельных $2D$ каналу $3D$ каналов проводимости не давало существенного улучшения совпадения расчета с результатами измерений. Близость величин проводимостей $2D$ и $3D$ каналов σ_1 и σ_2 свидетельствует о существенном влиянии шунтирования трехмерным каналом двумерного. Таким образом, резкое возрастание МС в слабом поле обусловлено $2D$ каналом, в то время как в сильном поле – трехмерным.

Периодичность осцилляций Шубникова – де Хааза по обратному магнитному полю позволяет определить основные характеристики $2D$ электронного газа, так как условия квантования для трехмерного канала проводимости не выполняются. На вставке рис. 2 б показана зависимость номера пика N осцилляции МС от обратного магнитного поля. Изменение наклона двух линейных участков происходит при значении индукции магнитного поля $B=4$ Тл. Это свидетельствует о заполнении в исследуемых структурах двух подзон размерного квантования [10, 11]. В этом случае в области слабых магнитных полей происходит наложение осцилляционных пиков первой и второй подзон размерного квантования. В связи с этим определение слоевой концентрации $2D$ электронов было проведено на основе анализа осцилляций в области сильных ($B>4$ Тл) полей, когда заполненной остается только первая подзона размерного квантования. Концентрации $2D$ электронов в первой $n_{s0}=7,6\cdot 10^{11}$ см $^{-2}$ и второй $n_{s1}=1,3\cdot 10^{11}$ см $^{-2}$ подзонах размерного квантования, а также энергетическое положение подзон и уровня Ферми относительно дна зоны проводимости нелегированного активного слоя GaAs: $\epsilon_0=107,4$ мэВ, $\epsilon_1=126,9$ мэВ, $\epsilon_F=131$ мэВ определены из условия ультраквантового предела для $2D$ электронов второй подзоны при $B=4$ Тл и плотности состояний $D=3,24\cdot 10^{17}$ м $^{-2}$ эВ $^{-1}$ [9].

Как величина, так и характер поперечного МС существенно изменяются при переходе от холловской конфигурации измерения $\Delta R(B)$ к ориентации магнитного поля в плоскости гетероперехода. В этом случае (рис. 3) поперечное МС отрицательно и по абсолютной величине на порядок меньше положительного, измеренного при тех же условиях в конфигурации Холла (см. рис. 2). Отрицательный знак магниторезистивного эффекта в первую очередь обусловлен двумерностью электронного газа, т. е. отсутствием возможности носителям двигаться в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям, что приводит к исключению положительной лоренцевской компоненты МС. В области слабых магнитных полей отрицательное МС логарифмически зависит от поля (см. вставку на рис. 3) и насыщается в поле $B=0,3$ Тл. Магниторезистивный эффект в режиме слабой локализации отрицателен и для $2D$ газа логарифмически зависит от магнитного поля [2], что и наблюдается экспериментально. Насыщения локализационной поправки МС следует ожидать в магнитном поле $B_1=\hbar/4eD\tau$, где τ – время релаксации импульса. Оценка величины поля B_1 с использованием указанных параметров $2D$ канала проводимости хорошо согласуется с полем $B_1\approx 0,3$ Тл, при котором наступает насыщение отрицательного МС.

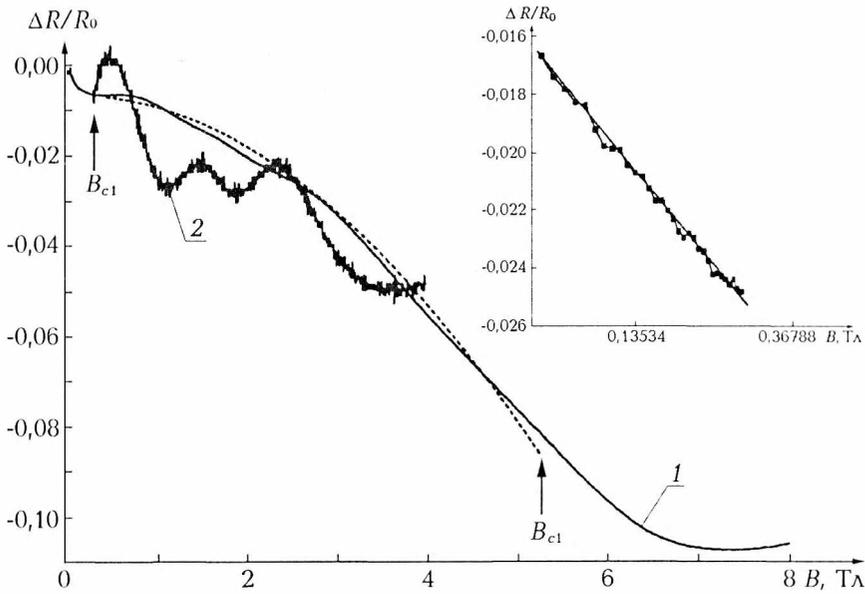


Рис. 3. Магнитопольевая зависимость МС той же гетероструктуры при $T=2$ К в конфигурации, когда магнитное поле находится в плоскости гетероперехода (1), и ее первая производная (2).

На вставке начальный участок МС в логарифмическом масштабе.
Пунктирная линия – экстраполяция $MS \propto B^2$

Как отмечалось ранее, влияние магнитного поля на квантовые поправки, обусловленные электрон-электронным взаимодействием, приводит к росту сопротивления. Однако в работах [12, 13] показано, что в диффузионном канале проводимости в случае доминирования электрон-электронного взаимодействия квантовая поправка сохраняет свое значение и в сильном магнитном поле при $\omega_c \tau > 1$, где ω_c – циклотронная частота. При этом МС остается отрицательным и квадратичным по магнитному полю. Дальнейшее увеличение поля ($B > B_1$) ведет к параболическому уменьшению сопротивления вплоть до полей $B \approx 5$ Тл (см. рис. 3). Отметим, что максимальное магнитное поле, при котором еще может наблюдаться отрицательный магниторезистивный эффект, можно определить из соотношения $B_2 = k_B T / g \mu_B$ [13], где g – фактор, μ_B – магнетон Бора, k_B – постоянная Больцмана. Используя величину g -фактора арсенида галлия, равную $g = 0,52$ [6], легко оценить величину поля $B_2 = 5,7$ Тл, что хорошо согласуется с интервалом магнитного поля, в котором еще преобладает отрицательная параболическая компонента МС (см. рис. 3). Отметим также, что большое параболическое отрицательное МС наблюдалось ранее в гетеропереходах на основе арсенида галлия с экстремально большими величинами подвижности $\mu \approx 650\,000$ $\text{см}^2/\text{Vs}$ [13], однако выдвинутое предположение об определяющем влиянии крупномасштабных флуктуаций потенциала на МС таких структур, на наш взгляд, не соответствует действительности.

Бесструктурные осцилляционные максимумы отрицательного МС при $B = 0,75, 1,65$ и $2,85$ Тл для случая, когда магнитное поле находится в плоскости гетероперехода (см. рис. 3), нельзя связать с независимым от направления поля спиновым расщеплением уровней Ландау. Скорее всего, эти осцилляции могут вызываться либо неточной установкой плоскости образца параллельно магнитному полю, либо проявлением классического размерно-

го эффекта в МС, когда магнитная длина сравнима с толщиной шунтирующих 3D каналов проводимости.

Таким образом, в исследованных гетеропереходах процессы слабой локализации определяют транспорт заряда в слабом, а электрон-электронное взаимодействие – в сильном магнитном поле. Обнаружено заполнение двух подзон размерного квантования 2D электронного газа с концентрациями $n_{s0}=7,6 \cdot 10^{11} \text{см}^{-2}$ и $n_{s1}=1,3 \cdot 10^{11} \text{см}^{-2}$, а транспортные характеристики интерпретированы в рамках двухслойной модели, учитывающей наличие двух параллельных каналов проводимости, соответствующих двумерному и трехмерному электронному газу.

Авторы выражают благодарность профессору Г. Миклицу (г. Кельн, ФРГ) за предоставленную возможность проведения низкотемпературных измерений.

1. Ченг Л., Плог К. // Молекулярно-лучевая эпитаксия. М., 1989.
2. Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V. // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 42. P. 673.
3. Альтшулер Б. Л., Аронов А. Г. // ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 2028.
4. Lee P.A., Ramakrishnan T.V. // Rev. Modern Phys. 1985. Vol. 57. P. 287.
5. Полянская Т.А., Шмарцев Ю. В. // ФТП. 1989. Т. 23. С. 3.
6. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. // Электронные свойства двумерных систем. М., 1985.
7. Кучис Е.В. // Гальваномагнитные эффекты и методы их исследования. М., 1990.
8. Adams E. N., Holstein T.D. // J. Phys. Chem. Solids. 1959. Vol. 10. P. 254.
9. Шур М. // Современные приборы на основе арсенида галлия. М., 1991.
10. Poole D.A., Pepper M., R.W. // J. Phys. C: Solid State Phys. 1981. Vol. 14. P. L995.
11. Кадушкин В.И. // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. 2000. № 1. С. 53.
12. Houghton A., Senna J.R., Ying S.C. // Phys. Rev. B. 1982. Vol. 25. P. 2196.
13. Girvin S.M., Jonson M., Lee P.A. // Ibid. 1982. Vol. 26. P. 1651.
14. Paalanen M. A., Tsui D.C., Hwang J.C. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 2226.

Поступила в редакцию 15.05.2003.

Юрий Александрович Бумай – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики БНТУ.

Михаил Григорьевич Лукашевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников и наноэлектроники.

Дмитрий Алексеевич Скрипка – аспирант кафедры физики полупроводников и наноэлектроники. Научный руководитель – М.Г. Лукашевич.

УДК 548.736.15:621.385

В.С. СОЛОВЬЕВ, Г.А. ГУСАКОВ, О.В. КРЕКОТЕНЬ

ОМИЧЕСКИЕ КОНТАКТЫ К КРИСТАЛЛАМ АЛМАЗА ТИПА ПЬ НА ОСНОВЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛИЗАЦИИ Ti/TiN/Au*

The Ti/TiN/Au threelayer metallization scheme has been investigated as a contact metallization to semiconducting diamond. The optimum treatment regimes for which the current-voltage curves of Ti/TiN/Au contacts become linear and nitrogen does not diffuse into the carbide layer and adjacent region of diamond have been determined. Using this contact metallization system, Hall mobility, charge carriers concentration and the temperature dependences of resistivity in IIb type synthetic diamond have been measured.

* Авторы статьи – сотрудники лаборатории функциональных материалов и электроники НИИФФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Среди широкозонных полупроводников алмаз выделяется уникальным сочетанием физических характеристик, таких как наивысшие теплопроводность и электрическая прочность, высокая радиационная стойкость, твердость и износостойкость, низкая диэлектрическая проницаемость, химическая инертность [1]. Названные свойства алмаза делают его весьма перспективным, а иногда единственно пригодным материалом для изготовления мощных полупроводниковых приборов и элементов сенсорики, предназначенных для работы в условиях высоких температур (до 873 К), химически агрессивных средах и при больших уровнях радиации [1, 2]. В настоящее время уже созданы приборные структуры на основе алмаза, включающие различные сенсоры, диоды и транзисторы [1–7]. Однако требуется оптимизировать некоторые важные элементы этих устройств. Прежде всего это касается проблемы формирования высокостабильных низкоомных электрических контактов к полупроводниковым алмазам. Методика создания таких контактов до сих пор остается несовершенной, что является основным технологическим тормозом при разработке на базе алмаза электронных приборов с заданными электрическими характеристиками.

В наиболее простом варианте для формирования омических контактов к алмазу, обладающих высокой адгезией и низким сопротивлением, используется двухслойная система карбидообразующий металл/Au; в качестве контакта – тонкие пленки (толщина – 10–50 нм) Ti, Ta, Mo и V [8–13], гораздо реже – Ni, Cr и Co [2, 14]. Толщина защитного слоя золота достигает 0,5–1 мкм. После нанесения контакты подвергаются термообработке в вакууме с целью образования карбидного слоя на границе металл/алмаз. С точки зрения обеспечения максимальной адгезии к поверхности алмаза при минимальном сопротивлении контакта наилучшие результаты показала система Ti/Au [8, 13]. Однако она имеет серьезные недостатки. При температурах термообработки, необходимых для эффективного карбидообразования на границе Ti/алмаз, наблюдается значительная диффузия титана через слой золота и выход его на поверхность контакта [2, 8], что приводит к его окислению и непредсказуемому изменению характеристик. Для предотвращения этого процесса необходимо использовать третий слой, выполняющий роль диффузионного барьера между Ti и Au. В настоящее время для этих целей наиболее часто используется слой Pt толщиной 50–100 нм, реже – Mo, Ni или W [2, 9]. Наличие барьера предотвращает выход титана на поверхность и обеспечивает высокую стабильность контакта. Тем не менее в [11] было показано, что при термообработке происходит значительная взаимная диффузия Ti и Pt, приводящая к перемешиванию слоев. Наличие платины на границе металл/алмаз должно подавлять карбидообразование и таким образом уменьшать адгезию контакта к поверхности.

До сих пор нет единого мнения о параметрах термообработки, необходимых для формирования надежного контакта к алмазу на основе титана. Температуры отжига, при которых вольт-амперные характеристики контактов становились строго линейными, по разным данным [3, 8–13] лежат в диапазоне 673–1073 К. Длительность термообработки колеблется от нескольких минут до нескольких часов.

В настоящей работе рассмотрена возможность применения нитрида титана в качестве барьерного слоя в составе трехслойной системы металлизации алмаза Ti/TiN/Au. Использование TiN для этой цели представляет несомненный интерес по следующим причинам:

– нитрид титана показал хорошую пригодность к использованию в качестве диффузионного барьера в системах металлизации кремниевых планарных приборов;

– нитрид, карбид и монооксид титана являются изоморфными соединениями, имеющими кубическую решетку и способными образовывать друг с другом непрерывный ряд твердых растворов [15]; по этой причине загрязнение TiN примесями углерода и кислорода, например при нанесении, не должно приводить к существенному ухудшению его свойств;

– нанесение слоев Ti и TiN возможно производить в одном цикле, что повышает технологичность операции формирования контактов.

Для выбранной металлизационной системы было исследовано влияние температуры термообработки на перераспределение примесей и характеристики получаемых контактов.

Экспериментальная часть

В качестве подложек использовались пластины из монокристаллов синтетического алмаза типа Ib, выращенных на предприятии РУП «Адамас-БГУ» (Минский р-н, пос. Атолино). Эти кристаллы являются полупроводниками *p*-типа, свойства которых обусловлены примесью бора, создающего в запрещенной зоне акцепторный уровень с глубиной залегания $E_a=0,37$ эВ [1, 2]. Синтез кристаллов осуществлялся по методу температурного градиента с использованием аппаратов высокого давления типа «разрезная сфера» [16, 17]. В исходную шихту вводились добавки карбида бора, а также алюминия с целью снижения примеси азота в выращиваемых кристаллах. Для обеспечения воспроизводимости характеристик образцов все использованные пластины были вырезаны из секторов роста {111} одного и того же кристалла. Линейные размеры подложек колебались от 2×3 до 3×4 мм, а толщина – от 0,8 до 1,6 мм. По данным оптических измерений, проведенных по методике [1, 16], средняя концентрация нескомпенсированных акцепторов в образцах составляла $2 \cdot 10^{18}$ см⁻³.

После резки пластины были подвергнуты механической полировке. Непосредственно перед металлизацией проводилась химобработка подложек, заключающаяся в кипячении образцов последовательно в «царской водке», хромпике и ДМФА. После каждой обработки подложки промывались дионизованной водой.

Осаждение слоев Ti и TiN производилось при комнатной температуре с помощью магнетронного распыления на постоянном токе в одном цикле. В качестве плазмообразующего газа использовались либо Ag (при нанесении Ti), либо смесь Ag/N₂ (TiN). Поверхностный слой золота наносился методом термического испарения. Толщины слоев Ti, TiN и Au составляли около 50, 100 и 30 нм соответственно. На каждой пластине формировались 4 контактные площадки в геометрии Ван-дер-Пау для измерения электрофизических характеристик. Затем для карбидизации области границы раздела алмаз/Ti проводилась термообработка образцов в вакууме не хуже $6 \cdot 10^{-4}$ Па в интервале температур 973–1173 К в течение 30 мин.

Элементный анализ полученных контактов изучался при помощи метода Оже-электронной спектроскопии. Регистрация Оже-спектров осуществлялась на сканирующем Оже-микророзонде Perkin Elmer PHJ-660. Профили распределения элементов по толщине слоев получались при распылении мишени пучком ионов Ag⁺ с энергией 3 кэВ.

Результаты и их обсуждение

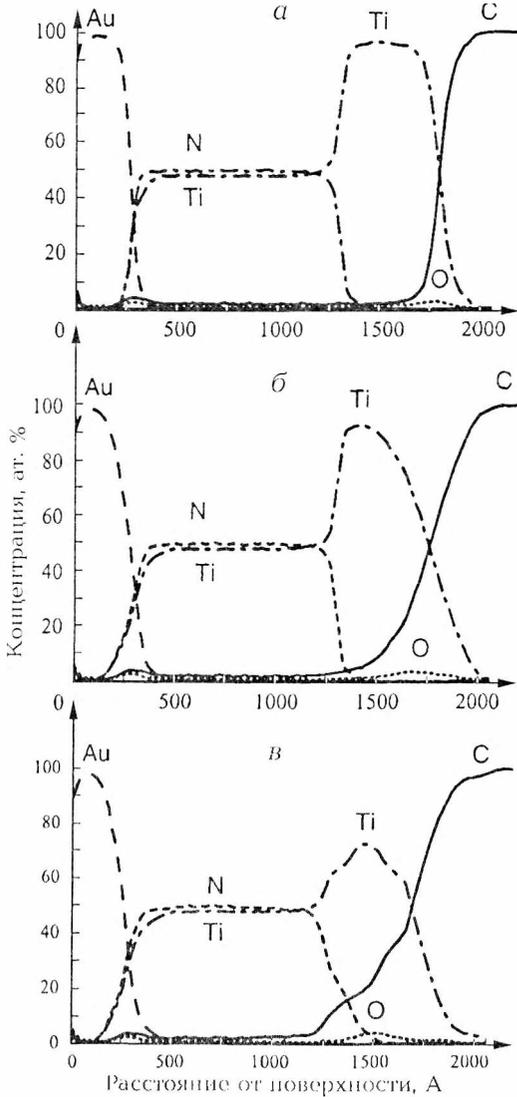


Рис. 1. Профили распределения элементов по толщине в металлизационной системе Ti/TiN/Au после: а) осаждения; б) термообработки при $T = 973$ К и в) термообработки при $T = 1123$ К

В данном случае титан и нитрид титана характеризуются одинаковой эффективностью гетерирования в отношении углерода. Следует также отметить наличие небольших пиков кислорода и углерода на границе раздела TiN/Au. Известно [19], что слои TiN, полученные магнетронным распылением, имеют пониженную (до 80 %) плотность по сравнению с массивным материалом. Поэтому можно предположить, что при контакте образцов с атмосферой в промежутке между нанесением TiN и Au происходит адсорбция атмосферных газов микропорами.

Осажденные слои TiN визуально имеют золотистый оттенок, характерный для качественного нитрида титана. Эффективное удельное электрическое сопротивление двухслойной системы TiN/Ti, измеренное 4-зондовым

На рис. 1 а представлен типичный профиль распределения элементов по толщине в системе контактной металлизации Ti/TiN/Au непосредственно после нанесения. На границе раздела алмаз/Ti присутствует пик кислорода (концентрация в максимуме составляет $\sim 3,5$ ат. %), хемосорбированного, скорее всего, уже на исходной поверхности алмаза. Такое его значительное количество на поверхности алмаза, по-видимому, связано с использованием сильных окислителей при химобработке исходных подложек, приводящей к образованию довольно устойчивых гидроксильных и эфирных групп [18]. В самих же слоях контактной металлизации Ti и TiN кислород распределен относительно равномерно и его концентрация не превышает 2 ат. %, что для используемого метода нанесения следует считать вполне удовлетворительным результатом. Концентрация углерода также практически не изменяется по толщине слоев Ti и TiN и остается на уровне 2–2,5 ат. %. Присутствие углерода связано с захватом углеводородов из вакуумного объема, откачка которого производилась паромасляными насосами.

методом, составляет $7,5 \cdot 10^{-5}$ Ом·см, что типично для таких свежесозданных слоев и вполне приемлемо для контактной металлизации алмаза.

На рис. 1 б, в представлены профили распределения элементов по толщине в металлизационной системе после отжига при температурах 973 и 1123 К соответственно. Хорошо видно, что в выбранном интервале температур не наблюдается сколь-нибудь заметной диффузии титана и золота сквозь слой нитрида, т. е. последний выполняет роль диффузионного барьера.

В области границы раздела алмаз/Тi происходит реакция карбидообразования. Возрастает концентрация углерода во всем слое титана и в граничащей с ним части слоя нитрида. Эффективность этого процесса возрастает с увеличением температуры отжига.

При $T \leq 1073$ К (см. рис. 1 б) профиль распределения азота остается практически неизменным. Можно с достаточно большой долей уверенности утверждать, что азот при данных условиях не диффундирует в слой титана и карбида титана, образующегося в области границы раздела алмаз/Тi. Следовательно, отпадает опасность легирования приграничной области алмаза азотом, ответственным за основные примесные дефекты. При $T > 1073$ К (см. рис. 1 в) наблюдается заметная диффузия азота из слоя нитрида в слой титана, т. е. активизируется процесс замещения азота в нитриде титана углеродом. Следует отметить, что в процессе отжига при $T = 1123$ К в течение 30 мин азот, диффундирующий из слоя нитрида, еще не достигает поверхности алмаза, однако этот режим термообработки, по-видимому, является критическим с точки зрения предотвращения нежелательного загрязнения приграничной области алмаза азотом.

Особый интерес представляет перераспределение в металлизационной системе кислорода. При $T = 973$ К значительных изменений в распределении кислорода не происходит. Наблюдается некоторое выравнивание его концентрации в области карбидообразования на границе раздела алмаз/Тi. В слое титана отмечается незначительное увеличение концентрации кислорода, по-видимому, за счет его диффузии из приграничной области слоя нитрида. При $T \geq 1073$ К происходит смещение максимума концентрации кислорода от границы раздела алмаз/Тi к середине слоя титана и начинается реакция восстановления монооксида титана углеродом.

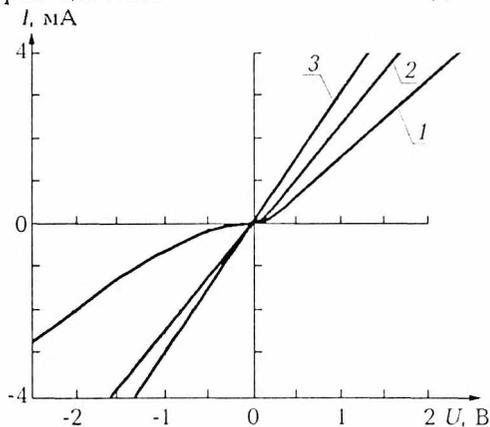


Рис. 2. ВАХ контактов Ti/TiN/Au, прошедших термообработку при различных T , К: а) 973; б) 1073 и в) 1123

На рис. 2 представлены вольт-амперные характеристики (ВАХ), снятые между двумя ближайшими контактами, для образцов, прошедших термообработку при различных температурах. Необходимо отметить, что, поскольку исследованные образцы имели различные линейные размеры, приведенные ВАХ носят качественный характер. Как следует из рисунка, для образца, отожженного при $T = 973$ К, при малых токах наблюдается значительное отклонение ВАХ от линейности. При $T \geq 1073$ К эти характеристики становятся строго линейными, что хорошо со-

гласуется с данными [11]. Сопоставление характера изменения ВАХ контактов с ростом температуры термообработки и перераспределения примеси кислорода в системе металлизации позволяет сделать предположение о том, что их отклонение от линейности при $T < 1073$ К, наблюдавшееся в данной работе, а также в [3, 11], связано с наличием на границе раздела алмаз/Ti тонкого окисного слоя.

Независимо от температуры термообработки систем контактной металлизации удельное сопротивление пластин полупроводникового алмаза составило $\rho \sim 20$ Ом·см. Для образца, отожженного при $T = 1073$ К, были выполнены измерения концентрации и холловской подвижности дырок при комнатной температуре, а также температурной зависимости электросопротивления в диапазоне температур от комнатной до 473 К. Полученные значения концентрации и подвижности ($3,9 \cdot 10^{14}$ см⁻³ и 817 см²/В·с соответственно) несколько превосходят известные экспериментальные результаты для данного уровня легирования и соответствуют теоретическим оценкам при содержании глубоких компенсирующих доноров 10^{16} ат./см⁻³ [20]. Учитывая тот факт, что таким донором в синтетических алмазах является преимущественно C-дефект, можно утверждать, что содержание азота в наших монокристаллах не превышает 10^{16} ат./см⁻³.

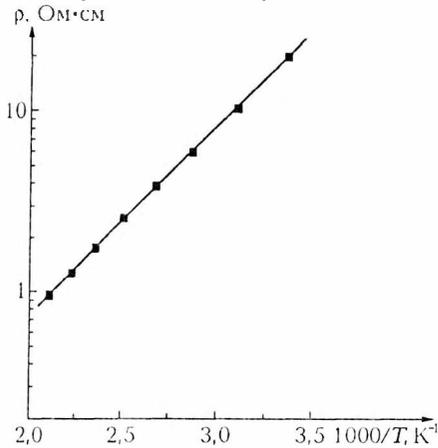


Рис. 3. Температурная зависимость удельного сопротивления образцов с содержанием примеси бора $2 \cdot 10^{18}$ см⁻³

Предполагалось, что в используемом диапазоне температур (рис. 3) преобладает механизм рассеяния носителей на акустических фононах [21], и, следовательно, их подвижность с T изменяется пропорционально $T^{-3/2}$. Это должно компенсировать влияние температурной зависимости плотности состояний в валентной зоне, пропорциональной $T^{3/2}$. Таким образом, температурная зависимость сопротивления должна следовать чисто экспоненциальному закону, что в действительности и имеет место. Определенная из этой зависимости энергия ионизации акцепторов составляет 0,22 эВ и хорошо согласуется с теоретическими оценками для данного уровня легирования [22].

Полученные результаты измерения электрофизических характеристик синтетического алмаза типа IIb свидетельствуют как о хорошем качестве использованных подложек, так и о низком сопротивлении электрических контактов.

* * *

1. Трехслойная система Ti/TiN/Au перспективна для создания стабильных омических контактов к кристаллам полупроводникового алмаза p -типа. В условиях вакуумной термообработки нитрид титана является достаточно эффективным диффузионным барьером для золота и титана.

2. Термообработка данной системы контактной металлизации оптимальна при $T \sim 1073$ К. В этом случае ВАХ контакта имеет линейный характер и не наблюдается заметной диффузии азота из нитридного слоя в слой карби-

да, образующийся в области границы раздела алмаз/Ti, что устраняет опасность легирования им приконтактного слоя алмаза. При более низких температурах термообработки ВАХ контактов имеют отклонения от линейности при малых токах, что, возможно, связано с наличием тонкого окисного слоя на границе раздела алмаз/Ti. В то же время зафиксирована диффузия азота из слоя нитрида в слой титана, вызванная, по-видимому, активизацией процесса замещения азота в нитриде титана углеродом.

3. С использованием омических контактов на основе трехслойной системы Ti/TiN/Au для кристаллов полупроводниковых алмазов типа Пь с концентрацией нескомпенсированных акцепторов $2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ были определены значения концентрации и холловской подвижности дырок при комнатной температуре. Полученные значения концентрации и подвижности ($3,9 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $817 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ соответственно) несколько превосходят известные из литературы экспериментальные результаты для данного уровня легирования, что говорит как о хорошем качестве использованных подложек, так и о низком сопротивлении электрических контактов.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф00-182).

1. Природные алмазы России / Под ред. В.Б. Кваскова. М., 1997.
2. Алмаз в электронной технике: Сб. ст. / Под ред. В.Б. Кваскова. М., 1990.
3. Geiss M. W., Rathman D. D., Ehrlich D. J. et al. // IEEE Electron Dev. Lett. 1987. Vol. 8. P. 341.
4. Shiomi H., Nakahata H., Imai T. et al. // Jpn. J. Appl. Phys. 1989. Vol. 28. P. 758.
5. Zeisse C. R., Hewwett C. A., Nguyen R. et al. // IEEE Electron Dev. Lett. 1991. Vol. 12. P. 602.
6. Fox B. A., Hatsell M. L., Malta D. M. et al. // Diamond and Related Mater. 1995. Vol. 4. P. 622.
7. Ito T., Nishimura M., Yakoyama M. et al. // Ibid. 2000. Vol. 9. P. 1561.
8. Venkatesan V., Malta D. M., Das K. et al. // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74. № 2. P. 1179.
9. Kawaguchi G., Nakanishi J., Otsuki A. et al. // Ibid. 1994. Vol. 75. № 10. P. 5165.
10. Nakanishi J., Otsuki A., Oku T. et al. // Ibid. 1994. Vol. 76. № 4. P. 2293.
11. Hoff H. A., Waytena G. L., Vold C. L. et al. // Diamond and Related Mater. 1996. Vol. 5. P. 1450.
12. Lucazeau E., Gheeraert E., Deneuille A. et al. // Ibid. 1997. Vol. 6. P. 843.
13. Brandes G. R., Beetz C. P., Feger C. F. et al. // Ibid. 1999. Vol. 8. P. 1936.
14. Koide Y., Yokoba M., Otsuki A. et al. // Ibid. 1997. Vol. 6. P. 847.
15. Лучинский Г. П. Химия титана. М., 1971.
16. Соловьев В. С., Гусаков Г. А., Рейман С. В. и др. // Порошковая металлургия. 2000. Вып. 23. С. 23.
17. Соловьев В. С., Гусаков Г. А., Кречотень О. В. и др. // Сверхтвердые материалы. 2001. № 4. С. 76.
18. Богатырева Г. П. // Там же. 1980. № 2. С. 23.
19. Kattelus H. P., Tandon J. L., Sala C. et al. // J. Vac. Sci. Technol. 1986. № 4. P. 1850.
20. Werner M., Locher R. // Rep. Prog. Phys. 1998. Vol. 61. P. 1665.
21. Вавилов В. С., Гиппиус А. А., Конорова Е. А. Электронные и оптические процессы в алмазе. М., 1985.
22. Bourgoin J. C., Krynicki J., Blanchard B. // Phys. Stst Sol. (a). 1979. Vol. 52. P. 293.

Поступила в редакцию 26.02.2003.

Валерий Сергеевич Соловьев – кандидат физико-математических наук.

Григорий Анатольевич Гусаков – кандидат физико-математических наук, и. о. заведующего лабораторией.

Олег Владимирович Кречотень – научный сотрудник.

П.И. ГАЙДУК, К. ТРАУТМАН (ФРГ), М. ТОЛЕМОИД (Франция), А.И. ЛАРСЕН (Дания)

ТРЕКОВАЯ ПРЕЦИПИТАЦИЯ В ПЕРЕСЫЩЕННЫХ СЛОЯХ Si_{0,5}Ge_{0,5}-СПЛАВОВ

We report the first observation of latent tracks in a single-crystalline Si_{0,5}Ge_{0,5} alloy layers irradiated with 1,3 GeV U ions in the electronic stopping power regime. Transmission electron microscopy in both conventional and high-resolution mode reveals more or less discontinuous tracks depending on the composition of the Si_{1-x}Ge_x alloy and on the arsenic doping level. The morphology and the atomic structure of the tracks are analyzed. The results are discussed in the frame of the thermal-spike approach which assumes both track melting and imperfect crystallization.

Скрытые треки – длинные узкие цилиндрические области с модифицированным структурно-фазовым составом – формируются при прохождении тяжелых ионов сверхвысоких энергий через диэлектрики или интерметаллиды в условиях, когда электронные потери энергии ионов S_e превышают пороговый уровень [1]. В случае полупроводников критерий трекообразования не столь однозначен и может сильно зависеть от структурных и электронных свойств материала [1–4]. К настоящему времени известны факты формирования треков в сложных полупроводниках [2–4]. Напротив, неоднократно показана структурная нечувствительность Si и Ge к прохождению тяжелых ионов МэВ – ГэВ-диапазона энергий [1, 5]. В настоящей работе сообщается о формировании прерывистых треков и трековой преципитации в SiGe- и SiGe+As-сплавах при облучении ионами U⁺ с энергией 1,3 ГэВ ($S_e = 33,8$ кэВ/нм).

Материал и методика

Методом молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ) на пластинах (001)-Si *p*-типа проводимости выращивали слои эпитаксиального сплава Si_{0,5}Ge_{0,5} толщиной $2 \cdot 10^3$ нм. Для релаксации напряжений использовали буферы переменного состава [6]. Эпитаксиальные слои имели высокое структурное качество и содержали низкую плотность ростовых дислокаций (10^5 – 10^6 см⁻²). На глубине 50 и 250 нм формировали две полосы высоколегированного сплава толщиной 60 нм каждая путем *in-situ* имплантации ионов As⁺ с энергией 1 кэВ при 450 °С. Концентрация As в полосах составляла $1,1 \cdot 10^{21}$ см⁻³, что в 10 раз выше предела равновесной растворимости и благоприятно для преципитации GeAs [7]. Образцы облучали ионами U⁺ с энергией 1,3 ГэВ до дозы 10^{10} см⁻² с плотностью тока $2 \cdot 10^8$ ион/см⁻²·с⁻¹ при комнатной температуре. В соответствии с расчетами TRIM95 электронные и ядерные потери энергии ионов составляли соответственно $S_e = 33,8$ кэВ/нм и $S_n = 0,024$ кэВ/нм и практически не изменялись в приповерхностном слое. Имплантированные слои исследовались с помощью методов просвечивающей электронной микроскопии в *plan-view* (PV-ПЭМ) или *cross-section* (X-ПЭМ) геометриях с использованием прибора Philips CM-20. Образцы препарировались с применением обычной техники последовательного механического полирования в сочетании с ионно-лучевым травлением.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 *a* представлено типичное светлопольное PV-ПЭМ-изображение структуры SiGe, полученное при наклоне образца под углом 5° в колонне микроскопа по отношению к пучку электронов. Хорошо видны точечные и удлиненные темные пятна размером около 3–10 нм, большая часть которых упорядочена вдоль траекторий ионов U⁺. Такая прерывистая

морфология треков сопровождается вариацией диаметра отдельных дефектов вдоль ионных траекторий. В приповерхностной области, равной $\sim 0,5 - 1$ мкм (толщина образца, приготовленного для РВ-ПЭМ-исследований), треки состоят из 1–5 отдельных точечных (удлиненных) фрагментов. Плотность прерывистых треков составляет около $(8-9) \cdot 10^9$ см⁻², что хорошо коррелирует с дозой имплантированных ионов U⁺.

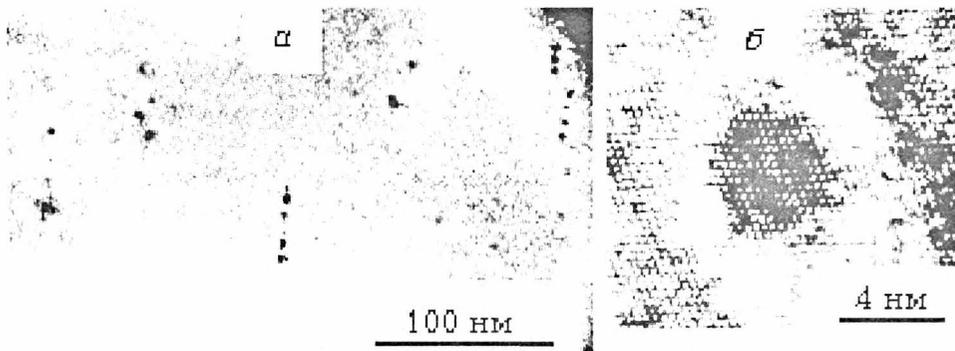


Рис. 1. Светлопольное РВ-ПЭМ-изображение структуры слоев $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ сплава, облученного ионами U⁺ с энергией 1,3 ГэВ при комнатной температуре (а); изображение атомной структуры трекового дефекта, полученное в режиме высокого разрешения (б)

Дефекты имеют очень слабый ПЭМ-контраст или практически невидимы для большинства условий формирования изображения. Максимальный контраст достигается в двухлучевых условиях при большом отклонении пучка электронов от точных дифракционных условий ($s \gg 0$), что свидетельствует о преимущественно кристаллической структуре треков. Этот вывод подтверждается также изображением атомной структуры поперечного сечения одного из них (см. рис. 1 б). Внутренняя область трека (темная зона) имеет диаметр 4–5 нм. Сильный контраст атомных цепочек свидетельствует о структурном совершенстве внутренней части ядра трека. Периферийное кольцо диаметром около 10 нм содержит светлую область с более размытым контрастом, что, по-видимому, связано с большим содержанием точечных дефектов и кластеров. Граница раздела между центральной и периферийной областями достаточно четкая и имеет заметную границу вдоль (111)-плоскостей.

На рис. 2 приведены микрофотографии структуры, полученные в поперечном сечении образца (Х-ПЭМ). Формирования трековых дефектов в подложке Si или в буферном слое SiGe не обнаружено. Напротив, в верхнем слое $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ выявлены прерывистые треки, содержащие кластеры дефектов различной плотности и формы. Установлено, что вероятность трекообразования существенно возрастает, когда траектория ионов U⁺ с энергией 1,3 ГэВ пересекает слой SiGe с уровнем легирования As выше предела равновесной растворимости. Четко прослеживается явная тенденция трансформации изолированных точек в протяженные трековые сегменты (указаны стрелками) в областях высокого легирования. Согласно [8] это означает улучшение условий для формирования треков в слоях SiGe, легированных мышьяком. Другая важная особенность прохождения ионов через пересыщенный слой SiGe+As – формирование выделений другой фазы (см. рис. 2). Некоторое количество сферических дефектов (P) с диаметром около 10 нм было зарегистрировано в пересыщенных слоях SiGe+As на пересечении с траекториями ионов U⁺. Эти дефекты имели черно-белый контраст в двух-

лучевых условиях формирования изображения. Вдали от брэгговских условий дифракции дефекты имеют слегка ограненную форму и однородный темный контраст. Все это указывает на то, что дефекты являются включениями другой фазы, имеющими в своем составе атомы большей, чем Si, массы. В соответствии с нашими недавними исследованиями [7] эти дефекты могут быть идентифицированы как преципитаты GeAs. Дополнительным свидетельством является наличие контраста Муара на некоторых дефектах с характерными расстояниями между полосами [7].

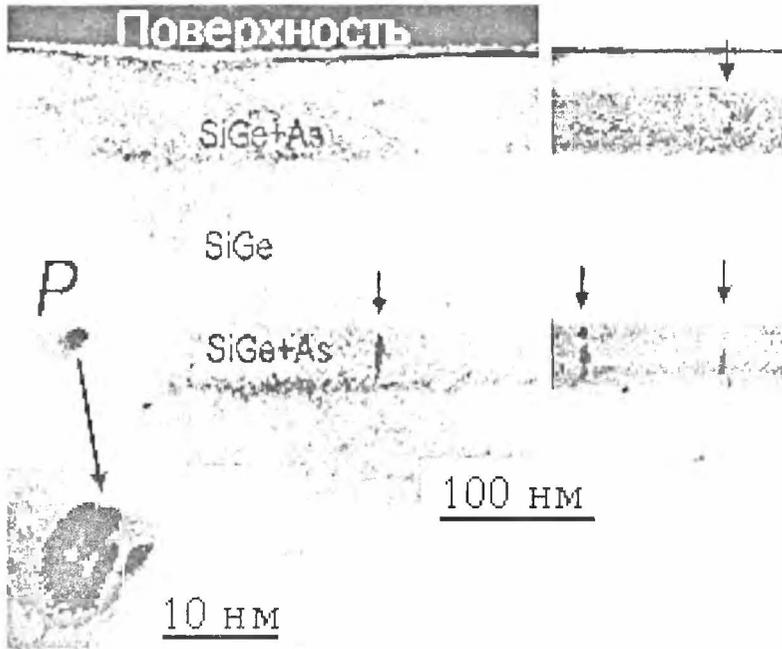


Рис. 2. Светлопольные X-ПЭМ-изображения структуры SiGe-сплава с высоколегированными слоями SiGe+As после облучения ионами U^+ с энергией 1,3 ГэВ.

P и увеличенная вставка – пример трековой преципитации – формирование выделения GeAs из пересыщенного сплава SiGe+As

Таким образом, суммируя результаты ПЭМ-исследований, можно сделать вывод о формировании прерывистых треков в слоях $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ -сплавов при их облучении ионами U^+ высоких энергий. На первый взгляд, этот результат противоречит неоднократным сообщениям об отсутствии признаков трекообразования в кристаллах Si и Ge даже в условиях более высоких потерь энергии ионов [5]. Так, один из ключевых параметров модели термических пиков – температура плавления – монотонно возрастает от 938 (Ge) до 1412 °C (Si). Поэтому, если треки образуются в сплаве $Si_{0,5}Ge_{0,5}$ ($T_{пл}=1180$ °C), то, как минимум, они должны формироваться в Ge и $Si_{1-x}Ge_x$ -сплавах с $0,5 < x < 1$. В то же время термическое сопротивление сплавов $Si_{1-x}Ge_x$ изменяется немонотонно с ростом x , достигая максимума в композиционном интервале $x=0,2-0,4$ [9]. Однако ПЭМ-исследования выявили резкое уменьшение плотности трековых дефектов в таких сплавах по сравнению с $Si_{0,5}Ge_{0,5}$.

Наконец, важным аргументом в пользу модели термических пиков является (111)-ограничение ядра трека (см. рис. 2 б), которое, очевидно, обусловлено сильной зависимостью скорости жидкофазного роста от кристаллографической ориентации. В частности, из исследований сверхбыстрой жид-

кофазной кристаллизации (скорость роста v выше 10 м/с) установлено, что отношение скоростей v_{100}/v_{111} составляет величину, равную 1,65 [10, 11]. Разница между v_{100} и v_{111} связана с различной морфологией границ раздела жидкость – кристалл, которая является атомно-гладкой для поверхности (111). В результате продвижение фронта кристаллизации в направлении [111] лимитируется наиболее медленной стадией формирования двумерных зародышей и их поперечным распространением [10]. Таким образом, затвердевание жидкости внутри расплавленного трека начинается с почти круговой границы раздела, которая постепенно трансформируется в (111)-ограниченную. На начальной стадии роста граница раздела шероховатая с высокой плотностью атомных ступенек, что приводит к экстремально высокой скорости кристаллизации и захвату большого количества точечных дефектов и кластеров в периферийной области трека. Трансформация шероховатой круговой границы раздела в гладкую и ограниченную характеризуется резким замедлением кристаллического роста и меньшей концентрацией захваченных дефектов.

Поэтому можно определить два основных критерия трекообразования: сверхпороговость (достаточную для плавления) электронных потерь энергии ионов U^+ и несовершенство кристаллизации расплава в трековой области [2, 3]. В условиях монокристаллической Si- или Ge-матрицы расплав трековой области окружен совершенным кристаллом. Неискаженные ковалентные связи, фиксированные в тетраэдрических направлениях, обуславливают правильное присоединение атомов расплава к кристаллической матрице и тем самым обеспечивают хорошее качество эпитаксиальной рекристаллизации треков. В случае же, когда исходная матрица содержит большое количество дефектов, рекристаллизация несовершенна и расплав может переходить в аморфную фазу, как это имеет место в случае InP [2, 3]. Структурно-совершенные кристаллы, состоящие из атомов, различающихся по массе, размеру, типу и длине связи, могут также считаться высокодефектными, поскольку имеют большие искажения решетки на атомном уровне. Типичным примером служат кристаллы $Si_{1-x}Ge_x$ -сплавов, в которых наличие атомов различного сорта приводит к сильным *локальным* искажениям как длины, так и направлений (углов) атомных связей [12]. Поэтому можно утверждать, что при переходе атомов из жидкой фазы в кристаллически связанное состояние происходит скачкообразное изменение параметров атомных связей, что увеличивает вероятность формирования дефектов. Это утверждение хорошо согласуется с экспериментальными результатами исследований твердофазного эпитаксиального роста сплавов $Si_{1-x}Ge_x$. В частности, немонотонная зависимость энергии активации кристаллического роста [13, 14] объяснялась микродеформациями, вызванными изменением параметров атомных связей. Эффекты сегрегации и преципитации существенно затрудняют кристаллизацию трекового расплава. Было показано [15], что сплавы $Si_{1-x}Ge_x$, кристаллизованные в неравновесных условиях, содержат упорядоченные области, где димеры Ge-Ge и Si-Si расположены в разных плоскостях. Аналогичным образом при эпитаксиальном росте происходит поверхностная сегрегация As. Так, его присутствие существенно замедляет процесс кристаллизации [16] и способствует преципитации [7].

Эффект трековой преципитации в пересыщенных слоях может быть использован как *новый метод синтеза упорядоченных массивов квантовых*

точек, расположенных *эквидистантно* и имеющих одинаковый размер. В его основе лежат два ключевых процесса.

1. Многослойные эпитаксиальные структуры, состоящие из тонких (~1–10 нм) пересыщенных слоев, пространственно разделенных более толстыми слоями равновесного материала, можно приготовить методами прецизионного роста (МВЕ, CVD).

2. При облучении указанных структур тяжелыми ионами высоких энергий происходит образование зародышей (нанокристаллов) новой фазы в пересыщенных слоях. При этом обеспечивается эквидистантность расположения квантовых точек, их пространственное упорядочение и гомогенность по размерам. Получаемые структуры будут представлять собой пространственные решетки, в узлах которых располагаются квантовые точки (преципитаты).

Таким образом, прерывистые треки сформированы в монокристаллических слоях сплава $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ при прохождении ионов U^+ с энергией 1,3 ГэВ в режиме электронного торможения. Исследованы морфология и атомная структура треков в зависимости от состава сплава и легирования мышьяком.

Работа выполнялась при финансовом содействии БРФФИ (проект Ф99-147), а также в рамках NATO LG № 976564. Авторы выражают благодарность Дж. Хансену за помощь в приготовлении образцов.

1. Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res., Sect. B. 1998. Vol. 146.
2. Herre O., Wesch W., Wendler E. et al. // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 58. P. 4832.
3. Gaiduk P.I., Komarov F.F., Wesch W. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res., Sect. B. 2000. Vol. 164-165. P. 377.
4. Szenes G., Horvath Z.E., Pecz B. et al. // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 65. P. 045206.
5. Marie P., Levalois M., Paumier E. et al. // J. Appl. Phys. 1996. Vol. 79. P. 7555.
6. Gaiduk P.I., Larsen A.N., Hansen J.L. // Thin Solid Films. 2000. Vol. 367. P. 120.
7. Gaiduk P.I., Larsen A.N. // J. Appl. Phys. 1998. Vol. 84. P. 4185.
8. Meftah A., Brisard F., Constantini J.M. et al. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. P. 920.
9. Dismukes J.P., Ekstrom R., Steigmeier E.F. et al. // J. Appl. Phys. 1964. Vol. 35. P. 2899.
10. Yater J.A., Thompson M.O. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63. P. 2088.
11. Ivlev G.D., Gatskevich E.I. // Appl. Surf. Sci. 1999. Vol. 143. P. 265.
12. Aubry J.C., Tylliszczak T., Hitchcock A.P. et al. // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 59. P. 12872.
13. Shiryayev S.Yu., Fyhn M., Larsen A.N. // Appl. Phys. Lett. 1993. Vol. 63. P. 3476.
14. Kringhøj P., Elliman R.G. // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. P. 858.
15. Ikarashi N., Oshiyama A., Sakai A., Tatsumi T. // Phys. Rev. 1995. Vol. B51. P. 14786.
16. Ahmed W., Meakin D.B. // J. Cryst. Growth. 1986. Vol. 79. P. 394.

Поступила в редакцию 13.03.2003.

Петр Иванович Гайдук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники.

Кристина Траутман – доктор, Центр исследований тяжелых ионов (Дармштадт, ФРГ).

Мархель Толемонд – доктор, Национальный центр исследований тяжелых ионов (Козн, Франция).

Арне Н. Ларсен – доктор, Институт физики и астрономии Орхусского университета (Дания).

В.П. ДОБРЕГО

МЕЖПРИМЕСНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ В ПРЫЖКОВОЙ ФОТОПРОВОДИМОСТИ. 2. РЕЛАКСАЦИИ РОСТА И СПАДА

The research of particularities of interimpurity recombination on the kinetics of the hopping photoconductivity, caused by light of own band of absorption [1], is continued. The angular factors of a function of photoconductivity instant lifetime from the time passed after light switching off are calculated. Results of the calculation agree with experimental dependencies, obtained on *n*-germanium, compensated by copper. The nonmonotonic growth of the hopping photoconductivity with excitation level decrease (observed in experiments) is explained.

В первой части работы [1] в приближении малой компенсации и низкого уровня возбуждения было получено универсальное уравнение кинетики прыжковой фотопроводимости (ПФП). Здесь на основании этого уравнения установлены и сопоставлены с экспериментальными кривые спада фотопроводимости, а также кривая роста в случае резкого изменения уровня возбуждения.

Мгновенное время жизни фотопроводимости

Зависимость мгновенного времени жизни от времени $\tau_{\text{мгн}}(t)$, определяемая путем анализа кривых спада фотопроводимости, служит важной характеристикой рекомбинационного процесса [2]. Поведение функции

$$\tau_{\text{мгн}}(t) = -\frac{\Delta\sigma}{d(\Delta\sigma)/dt}, \quad (1)$$

где $\Delta\sigma$ – неравновесная компонента проводимости (фотопроводимость), характерно для различных видов рекомбинации.

На основании уравнения (12) из [1], устанавливающего связь относительной фотопроводимости $\Delta\sigma/\sigma_0 = H(J, j, \alpha, T, \theta)$ с безразмерными параметрами, по спаду фотопроводимости определим выражение для мгновенного значения времени жизни ПФП:

$$\tau_{\text{мгн}}(\theta) = U(J, j, \alpha, T, \theta) = \frac{H(J, j, \alpha, T, \theta)}{\left[\frac{d}{d\theta} H(J, j, \alpha, T, \theta) \right]}. \quad (2)$$

При расчете задавались параметры, отвечающие обычным условиям наблюдения ПФП. Интенсивность возбуждения J соответствовала стационарной фотопроводимости $\Delta\sigma = 0,1\sigma_0$, где σ_0 – проводимость в темноте. Продолжительность интервала возбуждения T выбиралась такой, чтобы спад начинался от величины фотопроводимости, равной 99 % ее стационарного значения. Ход релаксации определялся при полном снятии возбуждения $j=0$. График функции $\tau_{\text{мгн}}(\theta)$, где θ – безразмерное время при всех реальных значениях параметра α ($\alpha = 2\rho/a$, ρ – среднее расстояние между примесями, a – радиус состояния мелкой примеси (см. формулу (6) в [1])), представляет собой возрастающую кривую, наклон которой уменьшался со временем.

Для определения углового коэффициента $A(\theta)$ использовалась либо разностная формула

$$A(\theta) = \frac{U(1,005 \cdot \theta) - U(0,995 \cdot \theta)}{0,01 \cdot \theta}, \quad (3)$$

либо непосредственное дифференцирование функции $U(\theta)$.

Расчетные значения углового коэффициента кривой $\tau_{\text{мгн}}(\theta)$ на разных уровнях релаксации $(\Delta\sigma(\theta)/\Delta\sigma_{\text{ст}})$ приведены в таблице.

Изменение углового коэффициента от уровня релаксации

α	Уровень релаксации								
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
20	–	4,85	3,86	3,70	3,13	2,94	2,61	–	–
14	5,91	3,78	2,98	2,51	2,26	2,07	1,92	1,78	1,6
7	4,37	2,70	2,05	1,67	1,40	1,22	1,07	0,92	0,80

Зависимость углового коэффициента от времени, прошедшего после снятия возбуждения, при $\alpha=14$ отражена на рис. 1.

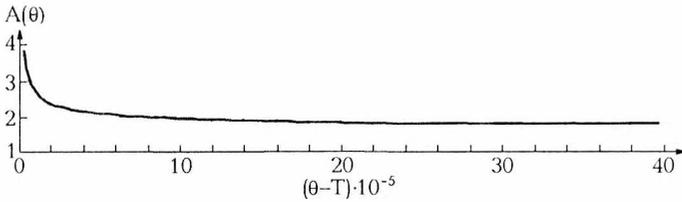


Рис. 1. Зависимость углового коэффициента от времени после выключения света

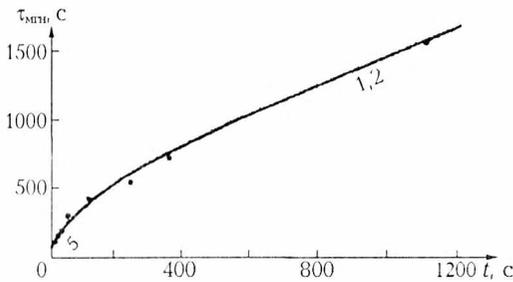


Рис. 2. Экспериментальная зависимость мгновенного времени жизни ПФП ($N_{\text{Св}}=4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$; компенсация $K=0,15$; числа у кривой – угловые коэффициенты)

На рис. 2 дана экспериментальная зависимость мгновенного времени жизни фотопроводимости, полученная на образце германия, легированного сурьмой и компенсированного медью. Медь – глубокая примесь в германии, поэтому применение простой экспоненциальной зависимости для $\tau(r)$ (формула (7) в [1]) обосновано. Общий ход зависимости $\tau_{\text{мгн}}(t)$ соответствует полученному в

расчете, величины угловых коэффициентов также близки к расчетным.

Кинетика нарастания прыжковой фотопроводимости

При простых рекомбинационных схемах в отсутствие различного рода ловушечных центров кинетика фотопроводимости имеет монотонный характер. Экспериментальное исследование кинетики нарастания прыжковой фотопроводимости при ступенчато меняющемся во времени возбуждении показало, что фотопроводимость изменяется немонотонно (рис. 3). При включении света с интенсивностью I_1 в момент времени t_1 начинается рост фотопроводимости в соответствии с кривой I до стационарной величины фотопроводимости P_1 . Если в момент t_2 , когда фотопроводимость достигла величины P_0 , снизить возбуждение до уровня I_2 , соответствующего стационарной фотопроводимости P_2 , рост до этого уровня происходит немонотонно.

В случае, например, линейной рекомбинации кривая роста концентрации носителей (и фотопроводимости) при ненулевых начальных условиях описывается уравнением

$$\Delta n = \Delta n_{\text{ст}} - (\Delta n_{\text{ст}} - \Delta n_1) \exp(-t/\tau), \tag{4}$$

где $\Delta n_{ст}$ – стационарная концентрация неравновесных носителей, Δn_1 – концентрация неравновесных носителей в начальный момент времени.

Из уравнения (4) следует, что, если временной интервал начался при ненулевой концентрации неравновесных носителей (момент t_2 на рис. 3), то изменение концентрации от Δn_1 до $\Delta n_{ст}$ происходит монотонно по экспоненциальному закону. Монотонной кривой отражается релаксация и при квадратичной рекомбинации.

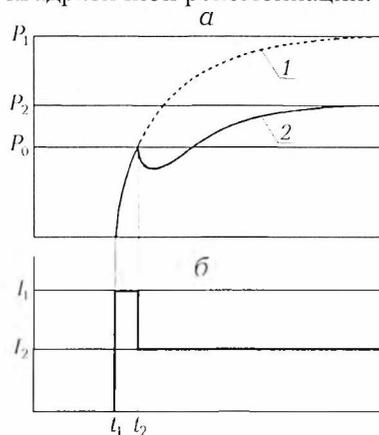


Рис. 3. Схематическое изображение экспериментальной зависимости фотопроводимости от времени при ступенчатом изменении возбуждения (а – фотопроводимость; б – интенсивность возбуждающего света)

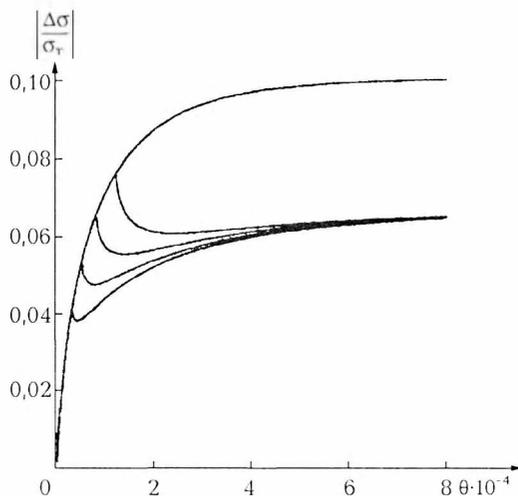


Рис. 4. Расчетная кинетика относительной фотопроводимости при резком уменьшении возбуждения

Кинетика ПФП при ненулевых начальных условиях может быть изучена с помощью функции $H(J, j, \alpha, T, \theta)$ (уравнение (12) [1]), которая описывает изменения концентрации неравновесных носителей (и проводимости) на втором этапе возбуждения образца при различной продолжительности и интенсивности возбуждения на первом этапе.

На рис. 4 приведен расчетный график изменения фотопроводимости в случае, когда в некоторый момент ее роста уровень возбуждения резко уменьшается. В примере $j/J=0,5$, $\alpha=7$, остальные параметры аналогичны иллюстрирующим уравнение (2). На всех приведенных кривых релаксации наблюдается минимум проводимости.

Как показывает анализ, во всех случаях резкого уменьшения проводимости на кривых существует минимум, хотя скачок возбуждения в начале или в конце кривой роста приводит к менее выраженному минимуму.

Такое поведение релаксационной кривой является следствием многоканального характера межпримесной рекомбинации (МПР). Согласно модели МПР, разделяющей акцепторы на группы в зависимости от расстояния между акцептором и ближайшим к нему донором, акцепторы захватывают генерируемые светом дырки независимо от заполнения ими акцепторов других групп. Рекомбинационный поток созданных светом неравновесных дырок в цепи переходов v -зона – акцептор – ближайший донор – c -зона на этапе межпримесной рекомбинации распределяется по множеству параллельных, независимых друг от друга каналов, обладающих различными характеристиками. При резком снижении темпа генерации на стадии роста фотопро-

водимости быстрые каналы, уже пришедшие в генерационно-рекомбинационное равновесие, окажутся в нестационарном состоянии. Рекомбинация через быстрые каналы начнет преобладать над генерацией, и общее число неравновесных носителей уменьшится. Позже общий рост концентрации неравновесных носителей будет преобладать за счет их накопления у медленных каналов, темп рекомбинации через которые останется меньше равновесной величины и при снизившейся генерации.

1. Доброго В. П. Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 2. С. 25.
2. Рывкин С. М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. М., 1963.

Поступила в редакцию 23.12.2002.

Виктор Петрович Доброго – кандидат физико-математических наук, доцент.

УДК 621.315.592

В.В. ЖАВНЕРЧИК, В.М. БОРЗДОВ, В.О. ГАЛЕНЧИК

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ПОДЛОЖКИ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ ИНВЕРСНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В Si-МОП-СТРУКТУРЕ

The self-consistent solution of the Scrodinger and Poisson equations was carried out, which allowed to investigate the behavior of the function of electron concentration versus the coordinate in the direction of quantization in Si-inversion layers with substrate's orientations (100) and (111).

В связи с широким использованием в микро- и нанoeлектронике кремниевых МОП-структур важное научное и практическое значение приобретает исследование эффектов локализации электронов у границы раздела окисел – полупроводник, в частности в инверсионном слое. Известно, что толщина этого слоя в кремниевой подложке p -типа сравнима с длиной волны де Бройля для «среднего» электрона, и, следовательно, электронный газ в инверсионном слое является квазидвумерной системой [1]. В этой связи особый интерес представляет изучение изменения концентрации квазидвумерных электронов в направлении, перпендикулярном границе раздела окисел – полупроводник, и влияния на нее ориентации подложки [2].

В настоящей работе представлены результаты самосогласованного расчета концентрации инверсных электронов $N(z)$ в направлении оси Z , в котором происходит квантование их энергии, и сравнительного анализа зависимости $N(z)$ от ориентации подложки в плоскостях (100) и (111).

Значения энергетических уровней различаются в зависимости от ориентации подложки, что связано с анизотропией эффективной массы электронов. Для подложки с ориентацией (100) электроны будут иметь эффективные массы m_z в направлении оси Z , равные $0,916 m_0$ и $0,190 m_0$, а при ориентации (111) – $m_z=0,258 m_0$ в интервале температур $100 \div 400$ К, где m_0 – масса покоя электрона [1, 3]. В первом случае в потенциальной яме инверсионного слоя существуют две системы энергетических уровней, которые принято обозначать E_0, E_1, E_2, \dots и E_0', E_1', E_2', \dots .

Поверхностная концентрация электронов на i -м энергетическом уровне может быть рассчитана по формуле [1]

$$N_i = g_i \frac{m_{di} kT}{\pi \hbar^2} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{E_f - E_i}{kT} \right) \right],$$

где g_i – кратность вырождения i -го уровня; m_{di} – масса плотности состояний для i -го уровня; \hbar – постоянная Планка, деленная на 2π ; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; E_f – энергия Ферми; E_i – значение энергии i -го уровня. Тогда концентрация инверсных электронов будет иметь следующий вид [1]:

$$N(z) = \sum_i N_i |\Psi_i|^2, \quad (1)$$

где Ψ_i – волновая функция электрона на i -м уровне. Поскольку в настоящее время не существует аналитических методов решения поставленной задачи, то точные значения волновых функций и заселенностей уровней могут быть найдены только путем численного самосогласованного решения системы уравнений Шредингера и Пуассона [1]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\Psi_i}{dz^2} + e\varphi(z)\Psi_i(z) = E_i\Psi_i(z), \quad (2)$$

$$\epsilon\epsilon_0 \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \rho_{\text{depl}} + e \sum_i N_i |\Psi_i|^2 \quad (3)$$

при граничных условиях [1, 4]:

$$\Psi_i(0) = \Psi_i(z_{\text{depl}}) = 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0) = \varphi'(z_{\text{depl}}) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(z)$ – электростатический потенциал; e – заряд электрона; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость кремния; ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; ρ_{depl} – плотность заряда в обедненной области; z_{depl} – ширина области обеднения, приближенное значение которой может быть оценено по формуле [5]:

$$z_{\text{depl}} \approx \sqrt{\frac{4\epsilon\epsilon_0 kT \ln(N_A/n_i)}{e^2 N_A}},$$

где N_A – концентрация акцепторов; n_i – собственная концентрация электронов в полупроводнике.

Поверхностная концентрация электронов в инверсионном слое N_s равна сумме поверхностных концентраций электронов N_i на всех уровнях

$$N_s = \sum_i N_i. \quad (6)$$

Нами была исследована зависимость $N(z)$ при ориентации подложки в плоскостях (100) и (111) для поверхностной концентрации электронов $N_s = 6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-2}$ и $T = 100, 200$ и 400 К (рис. 1). Как видно, для подложки с ориентацией (100) характерно размывание концентрации электронов в глубь ее в направлении Z с ростом температуры, при ориентации (111) наблюдается слабая зависимость $N(z)$ от температуры. Для объяснения такого поведения кривых необходимо проанализировать температурную зависимость относительных заселенностей уровней; результаты расчетов представлены на рис. 2.

Известно, чем выше энергетический уровень, тем дальше соответствующая волновая функция «проникает в глубь полупроводника» [1]. Как видно из рис. 2 а, при ориентации (100) повышение температуры вызывает заселение более высоких уровней, что приводит к «размыванию» концентрации в глубь подложки. Однако для ориентации (111), как следует из рис. 2 б, во всем рассматриваемом диапазоне температур заселенность самого нижнего

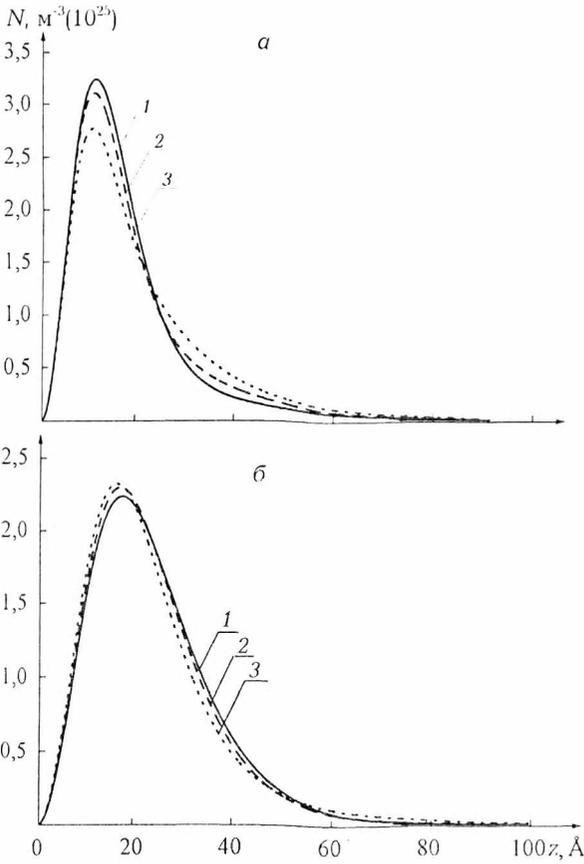


Рис. 1. Зависимость концентрации инверсных электронов от координаты z в случае $N_s = 6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-2}$ при различных значениях температуры: 1 – 100, 2 – 200, 3 – 400 К: а – ориентация подложки (100), б – (111)

уровня на несколько порядков выше заселенностей остальных уровней. С учетом этого и согласно формулам (1) и (6) можно записать следующее приближенное равенство:

$$N(z) \approx N_s |\Psi_{0(111)}(z)|^2, \quad (7)$$

где $\Psi_{0(111)}$ – волновая функция электрона, находящегося на самом нижнем уровне при ориентации подложки (111).

Нами была исследована также зависимость $N(z)$ от поверхностной концентрации инверсных электронов N_s при температуре 300 К. Для ее описания были введены такие величины, как максимум концентрации электронов N_{max} [м^{-3}], координата этого максимума z_{max} [Å] и «ширина на полумаксимум» Δz [Å], равная разности координат точек, в которых значения концентраций $0,5 N_{\text{max}}$.

Для сравнения зависимостей $N(z)$ при различных ориентациях подложки и значениях N_s использовались относительные величины: $N_{\text{max}(111)}/N_{\text{max}(100)}$, $z_{\text{max}(100)}/z_{\text{max}(111)}$, $\Delta z_{(100)}/\Delta z_{(111)}$, где нижний индекс соответствует ориентации подложки.

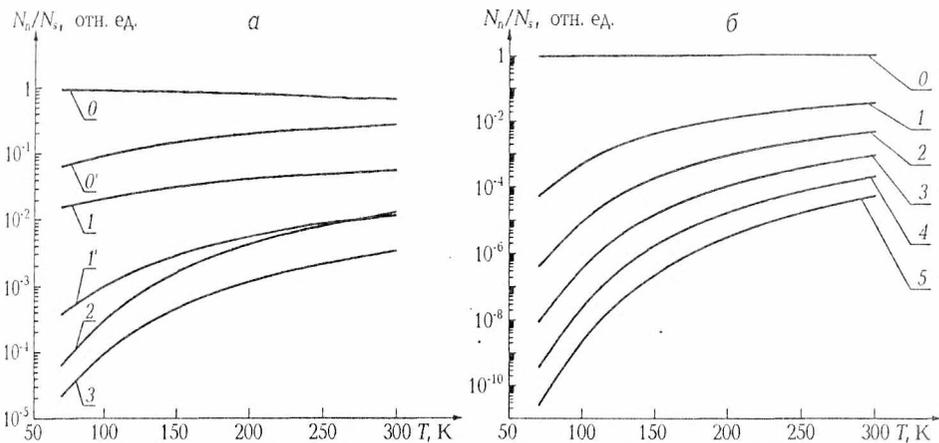


Рис. 2. Зависимость относительных заселенностей уровней от температуры при $N_s = 6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-2}$ для шести самых нижних уровней: а – ориентация подложки (100), б – (111)

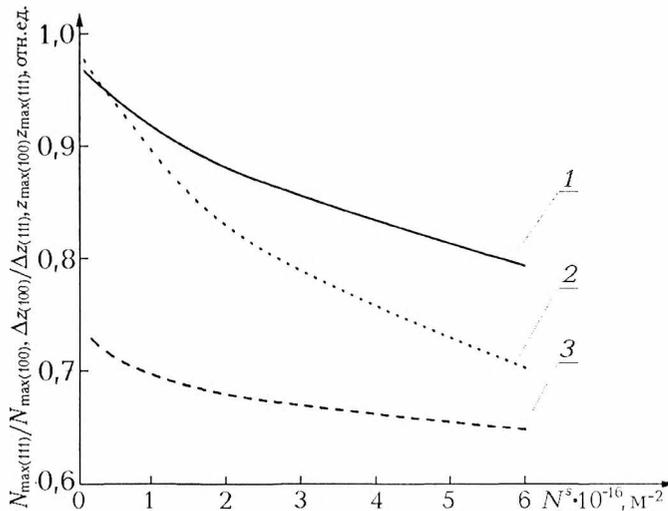


Рис. 3. Результаты расчета относительных величин в зависимости от N_s при $T=300$ К:

$$1 - N_{\max(111)}/N_{\max(100)}, 2 - \Delta z_{(100)}/\Delta z_{(111)}, 3 - z_{\max(100)}/z_{\max(111)}$$

На рис. 3 приведены результаты расчетов названных относительных величин в зависимости от поверхностной концентрации инверсных электронов N_s при $T=300$ К. Как следует из рисунка, при уменьшении N_s величины $N_{\max(111)}/N_{\max(100)}$ и $\Delta z_{(100)}/\Delta z_{(111)}$ будут стремиться к 1, в то же время величина $z_{\max(100)}/z_{\max(111)}$ слабо зависит от N_s , т. е. зависимости $N(z)$

будут приближаться друг к другу по максимуму концентрации и по «ширине на полумаксимуме», что не относится к координатам максимумов. При этом согласно (1) положение максимума будет определяться поведением квадратов модулей волновых функций состояний с наибольшей заселенностью. При ориентации подложки (100) (см. рис. 2 а) наиболее заселенными оказываются уровни E_0 и $E_{0'}$, которые будут соответствовать основным состояниям электрона с эффективными массами m_z , равными $0,916 m_0$ и $0,190 m_0$ соответственно, причем $E_0 < E_{0'}$ [2, 3]. При ориентации же (111) на основании формулы (7) координаты максимума $N(z)$ и квадрата модуля волновой функции основного состояния электрона $|\Psi_{0(111)}|^2$ с эффективной массой $m_z=0,258 m_0$ будут совпадать.

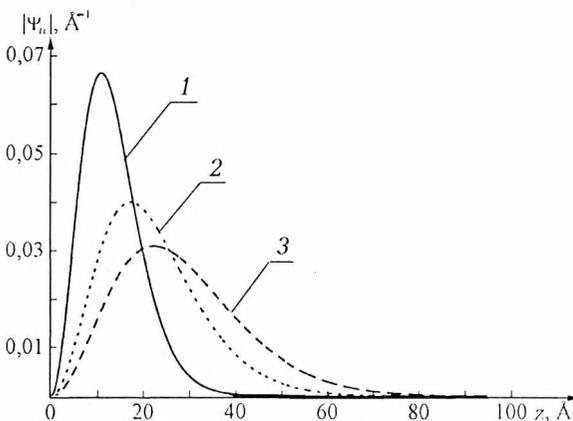


Рис. 4. Квадраты модулей волновых функций основных состояний в зависимости от различных ориентаций подложки при $N_s=6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-2}$ и $T=300$ К:

$$1 - |\Psi_{0(100)}|^2, 2 - |\Psi_{0(111)}|^2, 3 - |\Psi_{0'(100)}|^2$$

На рис. 4 приведены квадраты модулей волновых функций в основных состояниях при ориентациях подложки (100) и (111). Можно сделать вывод, что чем меньше эффективная масса электрона, тем больше будет «размыт» квадрат модуля волновой функции. При ориентации (100), как видно из рис. 4, квадрат модуля волновой функции $|\Psi_{0(100)}|^2$ менее размыт, чем квадрат модуля $|\Psi_{0'(100)}|^2$, причем $N_0 > N_{0'}$ (см. рис. 2 а), поэтому с учетом формулы (1) очевидно, что координата $N_{\max(100)}$ будет совпадать с координатой максимума $|\Psi_{0(100)}|^2$.

Следовательно, чем больше значение эффективной массы носителей заряда, тем ближе к границе раздела окисел – полупроводник будет расположен максимум функции $N(z)$ и соответственно тем уже будет область локализации электронов.

Таким образом, проведенное численное самосогласованное решение уравнений (2) – (5), описывающих поведение квазидвумерных электронов в кремниевой МОП-структуре, позволило исследовать влияние ориентации подложки, температуры и поверхностной концентрации инверсных электронов на зависимость $N(z)$. Было обнаружено, что для подложки с ориентацией (100) при повышении температуры происходит размывание концентрации инверсных электронов в глубь ее, связанное с интенсивным заселением более высоких энергетических уровней, чего не наблюдается в случае ориентации (111). Также установлено, что при уменьшении поверхностной концентрации инверсных электронов зависимости $N(z)$ при различных ориентациях подложки будут стремиться друг к другу по наибольшему значению концентрации и по «ширине на полумаксимуме». В этом случае несовпадение точек экстремумов концентрации связано с различием в значениях координат максимумов квадратов модулей волновых функций состояний с минимальным значением энергии.

1. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. Электронные свойства двумерных систем. М., 1985.

2. Борздов В.М., Комаров Ф.Ф. Моделирование электрофизических свойств твердотельных слонстых структур интегральной электроники. Мн., 1999.

3. Chu-Hao // Solid-State Electronics. 1985. Vol. 28. № 8. P. 733.

4. Borzdov V.M., Galenchik V.O., Komarov F.F. // Phys. Low-Dim. Struct. 1998, № 5-6. P. 73.

5. Зи С. Физика полупроводниковых приборов: В 2 кн. М., 1984. Кн. 1.

Поступила в редакцию 28.03.2003.

Виталий Валерьевич Жавнерчик – студент 5-го курса факультета радиофизики и электроники. Научный руководитель – В.М. Борздов.

Владимир Михайлович Борздов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники.

Вадим Освальдович Галенчик – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИЛ материалов и приборных структур микро- и наноэлектроники БГУ.

УДК 524.3-17

А.П. КЛИЩЕНКО, С.В. ХВАДЕЙ, В.И. ШУПЛЯК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ

The method of computer simulation of a gravitational field structure of the binary star revolving around the common mass center with constant angular speed, in rotating system of coordinates, is considered in this article. The given method allows building the equipotential surfaces corresponding to any value of effective potential. The created program illustrates position of all Lagrangian libration points and Roche cavities and can calculate parameters of a gravitational field in any point of space. Besides, this method allows to model equipotential surfaces for single stars, and also for any planetary and artificial systems which are situating in gravitational interaction. It can be applied as a methodical illustration in a university course of the general astronomy and astrophysics.

В связи с интенсивным изучением и освоением космического пространства значительно возрос интерес к классической задаче трех тел, движущихся под действием взаимного гравитационного притяжения. Так как эта

задача в общем виде не интегрируема, то большой интерес представляет изучение ее пяти точных частных решений, полученных Л. Эйлером (1767) и Ж. Лагранжем (1772) [1] (речь идет о так называемых *точках либрации*). Важнейшей разновидностью этой задачи является *ограниченная задача трех тел*, когда предполагается, что одно из них имеет бесконечно малую массу M_3 и, следовательно, не оказывает влияния на движение двух других с конечными массами M_1 и M_2 , которые в этом случае движутся по кеплеровским орбитам, определяемым задачей двух тел. Вращающуюся систему координат со многих точек зрения удобно связывать именно с этими массами и рассматривать в ней упомянутые пять точных решений, задающих равновесное положение системы [1, 2]. Кроме этого, задача о точках либрации имеет и самостоятельный общемеханический и математический интерес.

Ограниченная задача трех тел также имеет большое значение при изучении поведения и эволюции двойных звезд и звездных систем в астрофизике. Ее решения позволяют определить структуру эквипотенциальных поверхностей, создаваемых гравитационными полями динамической звездной системы [3–6]. Рассмотрению этих поверхностей уделяют особое внимание и при изучении взаимодействующих систем планет и астероидов. Принципиальное значение при описании эволюции двойной звезды имеет особая критическая эквипотенциальная поверхность, ограничивающая *внутренние полости (предел) Роша* – пространственную область, определяющую максимальные размеры стационарной вращающейся звезды (одиночной и в двойной системе). На границе полостей Роша эффективная сила притяжения обращается в нуль. Если внешние слои хотя бы одной из звезд (например, в процессе эволюции) выходят за пределы внутренней полости Роша, то может наблюдаться аккреция вещества с одной звезды на другую, что изменяет естественный ход их эволюции. Это явление может сопровождаться рядом других, например вспышкой новой звезды и т. п. Таким образом, точное моделирование подобных явлений имеет важное значение как в теоретическом, так и в практическом плане (в частности, для процесса преподавания курса общей астрономии в университетах). Все это обусловило интенсивное развитие данных методов в последнее время. Задаче компьютерного моделирования эквипотенциальных поверхностей и полостей Роша, а также определения связанных с ними точек либрации Лагранжа посвящен ряд работ [6]. Однако существующие алгоритмы расчета точек Лагранжа, основанные на решении задачи трех тел (законов Кеплера и всемирного тяготения), не дают возможности полного отображения эквипотенциальных поверхностей и предела Роша. Описываемая нами компьютерная модель лишена этого недостатка: она, используя метод перебора всех физически допустимых параметров системы, позволяет построить любые эквипотенциальные поверхности, содержащие все точки либрации Лагранжа и ограничивающие в том числе полости Роша.

Созданная программа строит сечение плоскостью XU эквипотенциальных поверхностей системы из двух звезд (двойной звезды), обращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам с постоянной угловой скоростью ω . В неинерциальной системе координат, вращающейся с той же угловой скоростью, *эффективный потенциал* Φ стационарен и определяется суммой гравитационных потенциалов обоих компонентов U и центробежного потенциала [4, 5]:

$$U(R, \theta, \varphi) = -\frac{GM_1}{R_1(R, \theta, \varphi)} - \frac{GM_2}{R_2(R, \theta, \varphi)}, \quad (1)$$

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = U(R, \theta, \varphi) - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \sin^2 \theta,$$

где R_1, R_2 и M_1, M_2 – расстояния от центров звезд и массы звезд соответственно, R, θ, φ – сферические координаты (центр системы координат – в центре масс (точка O), ось OZ , задаваемая $\theta=0$, параллельна ω (рис. 1)). Здесь предполагается синхронность вращения (угловая скорость вращения звезд тоже равна ω). Положение эквипотенциальной поверхности определяется некоторым постоянным значением эффективного потенциала ($\Phi=\text{const}$). R_1, R_2 выражаются обычным образом согласно теореме косинусов:

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 + R^2 + 2a_1R \cos \varphi}, \quad R_2 = \sqrt{a_2^2 + R^2 - 2a_2R \cos \varphi}, \quad (2)$$

где a_1, a_2 – расстояния от центров звезд до центра их масс, R – модуль радиуса-вектора от центра масс до точки эквипотенциальной поверхности при заданном угле φ (см. рис. 1).

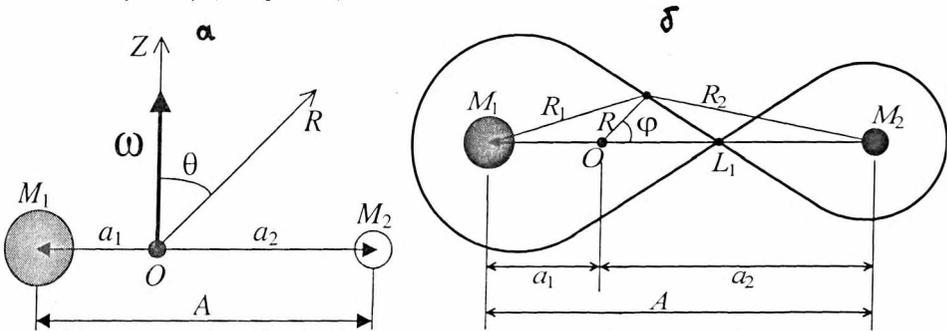


Рис. 1. Расположение системы двойной звезды: a – в плоскости $x=0$ (сечение плоскостью YZ). b – в плоскости $z=0$ (сечение плоскостью XY). L_1 – первая точка либрации Лагранжа

Если положить, что соотношение масс задается выражением $M_1=kM_2$, то очевидно, что $a_2=ka_1$.

Угловая скорость ω находится из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$M_2\omega^2 a_2 = G \frac{M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2}, \quad \omega = \sqrt{G \frac{M_1}{a_2(a_1 + a_2)^2}}. \quad (3)$$

Перед построением алгоритма необходимо произвести модельное упрощение формулы (1). Пусть гравитационная постоянная $G=1$, масса меньшей звезды $M_2=1$, тогда $M_1=k$. В неинерциальной системе координат, вращающейся с той же угловой скоростью ω вокруг оси OZ , с учетом симметрии системы будем рассматривать только картину эквипотенциальных поверхностей при $z=0$, и тогда $\theta=90^\circ$. В итоге формула (1) будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{k}{R_1(R, \varphi)} - \frac{1}{R_2(R, \varphi)} - \frac{1}{2}\omega^2 R^2. \quad (4)$$

Таким образом, требуется решить уравнение с двумя неизвестными R и φ . К его решению можно подойти, задавая параметр φ из некоторого (достаточно большого) фиксированного множества значений и определяя переменную R . Предлагаемый ниже алгоритм реализует именно такой вариант численного решения.

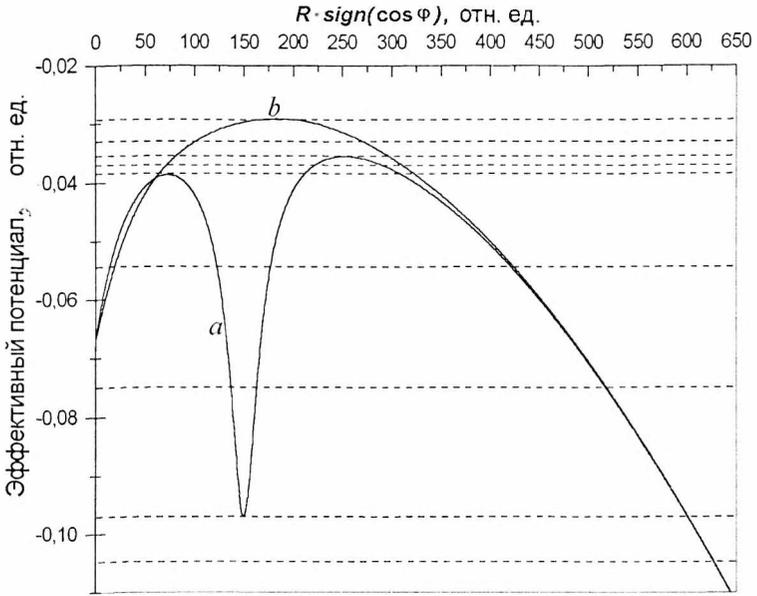


Рис. 2. Значения эффективного потенциала Φ двойной звезды в зависимости от радиуса-вектора R при определенных значениях угла φ : $a - \varphi=5^\circ$; $b - \varphi=50^\circ$. Корни уравнения (4) для выбранных значений Φ графически определяются пересечениями горизонтальной линии $\Phi=\text{const}$ (примеры таких линий показаны пунктиром) с графиком функции

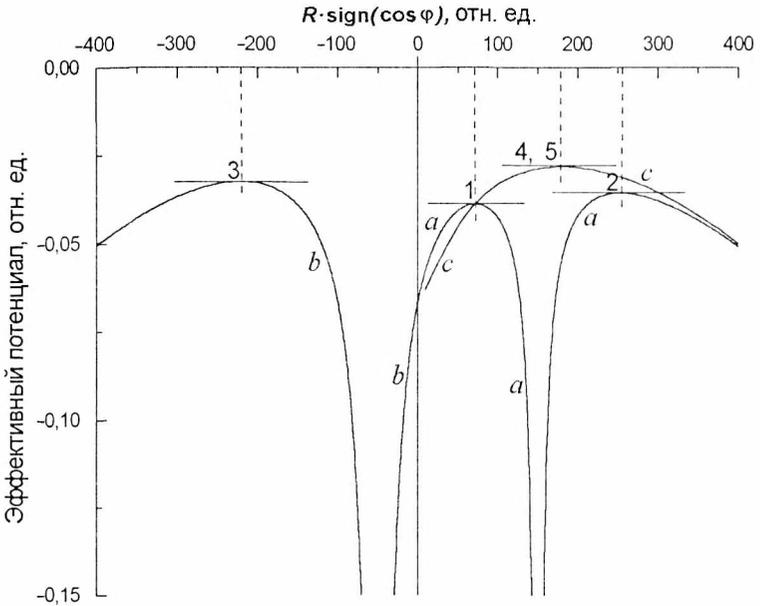


Рис. 3. Определение точек либрации Лагранжа. Номера точек отмечены цифрами (1–5); кривые эффективного потенциала соответствуют следующим углам φ : $a - \varphi=0^\circ$; $b - \varphi=180^\circ$; $c - \varphi=74^\circ$

Графический анализ формулы (4) показал, что данное уравнение может иметь от одного корня до четырех в зависимости от значения параметра φ (при $R \cos(\varphi) > 0$), который в общем случае непрерывно определен на интервале $[0, 2\pi]$ при заданном эффективном потенциале Φ (рис. 2). Аналогичным образом графически могут быть получены точки либрации Лагран-

жа (точки пересечения эквипотенциальных поверхностей) как экстремумы функции Φ (рис. 3). Знание графического положения этих точек позволяет рассчитать их значения аналитически.

Приведем алгоритм решения уравнения (4):

1. В принятом масштабе располагаем на схеме звезды и центр их масс.
2. Задаем эффективный потенциал $\Phi < 0$.
3. Задаем значения параметров k, a_1, a_2 .
4. Задаем значение точности eps .
5. Рассчитываем значение угловой скорости ω по формуле (3), учитывая, что $M_1 = k$.
6. Задаем $\varphi = 0$.
7. Задаем $R = 0$.
8. Вычисляем значения R_1, R_2 по формуле (2).
9. Вычисляем значение f выражения

$$f = \Phi + \frac{k}{R_1(R, \varphi)} + \frac{1}{R_2(R, \varphi)} + \frac{1}{2} \omega^2 R^2. \quad (5)$$

10. Если $|f| < eps$, то R является корнем уравнения (5) с заданной точностью eps , поэтому выводим эту точку на экран, пересчитав в декартовы координаты: $(x_1, y_1) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ и $(x_2, y_2) = (R \cos \varphi, -R \sin \varphi)$.

11. Далее увеличиваем R в зависимости от выбранного масштаба на величину dR . Если же $|f| > eps$ для данного значения R , то просто увеличиваем R на величину dR .

12. Если $R \leq R_{\max}$, где R_{\max} – предварительно заданное максимальное значение R , то возвращаемся к пункту 8.

13. Увеличиваем φ на величину $d\varphi$.

14. Если $\varphi \leq 180^\circ$, то возвращаемся к пункту 7.

15. Конец алгоритма.

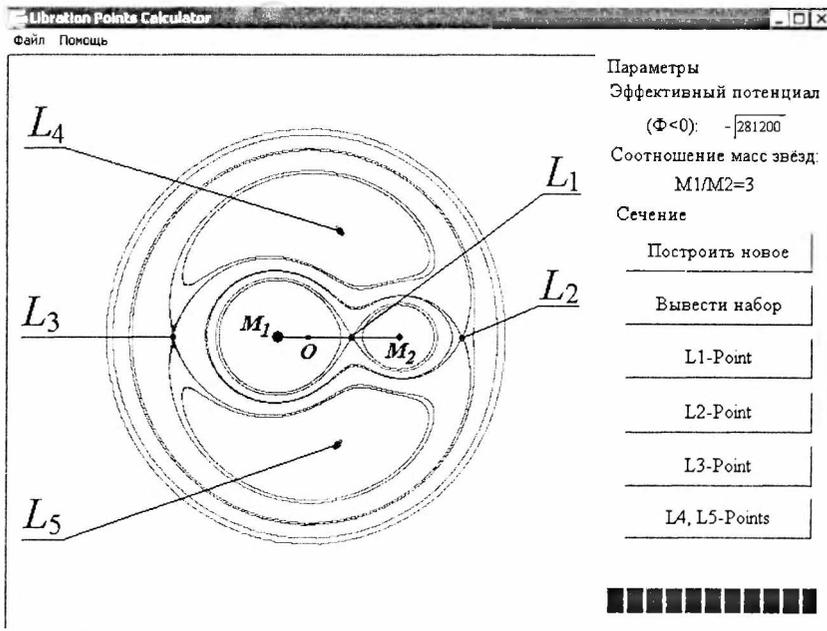


Рис. 4. Эквипотенциальные поверхности двойной звезды.

Обозначены: компоненты с массами M_1, M_2 ; O – центр масс; L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 – точки либрации Лагранжа; серым цветом – полости Роша, ограниченные поверхностями, соприкасающимися в точке L_1

Пример выполнения программой одной из задач построения эквипотенциальных поверхностей и определения всех пяти точек либрации Лагранжа представлен на рис. 4. Следует отметить, что, подбирая значения эффективного потенциала, можно построить любое количество эквипотенциальных поверхностей, в том числе и такие, которые содержат точки Лагранжа и ограничивают полости Роша.

Применение стандартных методов численного решения уравнений (Ньютона, бисекций, последовательных приближений и пр.) невозможно для решения данного уравнения по ряду причин. Основная – это необходимость начального приближения корня и отсутствие априорной информации о количестве корней. Наличие двух параметров Φ и φ делает задачу нахождения приближения корня сложнореализуемой и объемной. Для каждого заданного значения эффективного потенциала Φ и пробегаемого значения φ начальное приближение R должно быть найдено отдельно, причем приближений, как и корней, может быть несколько (от одного до четырех). Сложновыполнимым является также требование непрерывности и гладкости функции, описывающей уравнение, и ее производных. Предложенный нами алгоритм позволяет обойти данные трудности. Кроме того, этот метод дает возможность моделировать эквипотенциальные поверхности для одиночных звезд, а также для любых планетарных и искусственных систем, находящихся в гравитационном взаимодействии.

1. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978. С. 9.
2. Липунов В. М. В мире двойных звезд. М., 1986. С. 20.
3. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М., 2001. С. 421.
4. Мартынов Д. Я. Курс общей астрофизики. М., 1988. С. 183.
5. Физическая энциклопедия: В 5 т. М., 1994. Т. 4. С. 29.
6. <http://www.pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/sintro.htm>

Поступила в редакцию 15.05.2003.

Анатолий Петрович Клищенко – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой атомной физики и физической информатики.

Сергей Владимирович Хвалей – студент 5-го курса физического факультета.

Вячеслав Иванович Шупляк – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры атомной физики и физической информатики.

Математика и информатика



УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Т.И. ИЛЮКЕВИЧ

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

In this article stationary random process with non-regular observations are considered. The estimation of mathematical expectation for stationary random process with non-regular observations has been constructed, its statistical properties having been studied too.

При решении многих практических задач часто приходится иметь дело со стационарными случайными процессами с нерегулярными наблюдениями. Нерегулярности могут носить как систематический, так и случайный характер. В 1984 г. на симпозиуме [1] по проблемам анализа временных рядов с нерегулярными наблюдениями были рассмотрены подходы к исследованиям по данной тематике. Различным аспектам изучения временных рядов с нерегулярными наблюдениями посвящены работы [2], [3]. В данной статье анализируются стационарные процессы со случайными нерегулярностями.

Пусть $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$, – стационарные в широком смысле случайные процессы с математическими ожиданиями m^X , m^d , ковариационными функциями $R^X(\tau)$, $R^d(\tau)$, $\tau \in Z$, и спектральными плотностями $f^X(\lambda)$, $f^d(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, соответственно.

Рассмотрим случайный процесс

$$Y(t) = X(t)d(t), \quad (1)$$

$t \in Z$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если имеет место соотношение (1), а процессы $d(t)$ и $X(t)$, $t \in Z$, независимы, то $Y(t)$, $t \in Z$, будет стационарным в широком смысле случайным процессом с математическим ожиданием

$$m^Y = m^X m^d, \quad (2)$$

ковариационной функцией

$$R^Y(\tau) = R^X(\tau)R^d(\tau) + R^X(\tau)(m^d)^2 + R^d(\tau)(m^X)^2, \quad (3)$$

$t \in Z$, и спектральной плотностью

$$f^Y(\lambda) = \int_{\Pi} f^X(\lambda - \mu) f^d(\mu) d\mu + (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda), \quad (4)$$

$\lambda \in \Pi$.

Доказательство. С учетом независимости процессов $X(t)$ и $d(t)$ соотношение (2) очевидно. Используя определение ковариационной функции, соотношение (1), независимость процессов $X(t)$ и $d(t)$, получим

$$R^Y(t_1, t_2) = MX(t_1)X(t_2)Md(t_1)d(t_2) - MX(t_1)Md(t_1)MX(t_2)Md(t_2).$$

Из стационарности процессов $X(t)$ и $d(t)$ вытекает, что правая часть последнего равенства равна

$$(R^X(t_1-t_2) + (m^X)^2)(R^d(t_1-t_2) + (m^d)^2) - (m^X)^2(m^d)^2.$$

Таким образом, $Y(t)$, $t \in Z$, – стационарный в широком смысле случайный процесс, и выполняется соотношение (3).

Используя определение спектральной плотности и равенство (3), получим

$$f^Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R^X(\tau)R^d(\tau)e^{-i\lambda\tau} + (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda).$$

Учитывая соотношения, связывающие ковариационные функции и спектральные плотности, спектральное представление обобщенной функции [4] и меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} f^Y(\lambda) &= \int \int_{-\pi-\pi}^{\pi-\pi} f^X(\lambda_1)f^d(\lambda_2) \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{i\tau(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)} d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ &+ (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda) = \int_{\Pi} f^d(\lambda_2) \int_{-\infty}^{\infty} f^X(u+\lambda-\lambda_2)\delta(u) du d\lambda_2 + \\ &+ (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda), \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Лемма доказана.

Пусть в результате некоторого эксперимента получено T последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1) \tag{5}$$

за процессом $Y(t)$, $t \in Z$, который связан с процессами $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$, соотношением (1). Возникает задача: по наблюдениям (5) построить оценку неизвестного математического ожидания процесса $X(t)$, $t \in Z$, при условии, что характеристики процесса $d(t)$, $t \in Z$, известны и $m^d \neq 0$.

В качестве оценки математического ожидания m^X , построенной по наблюдениям (5), рассмотрим статистику

$$\hat{m}^X = \frac{1}{Tm^d} \sum_{t=0}^{T-1} Y(t). \tag{6}$$

Для построенной оценки справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Статистика (6) является несмещенной оценкой для m^X и

$$\begin{aligned} D\hat{m}^X &= \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{(m^d)^2} \iint_{\Pi^2} f^X(\mu)f^d(\lambda-\mu)\Phi_T(\lambda)d\mu d\lambda + \int_{\Pi} f^X(\lambda)\Phi_T(\lambda)d\lambda + \right. \\ &\left. + \left(\frac{m^X}{m^d} \right)^2 \int_{\Pi} f^d(\lambda)\Phi_T(\lambda)d\lambda \right], \end{aligned}$$

где

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} - \text{ядро Фейера, } \lambda \in \Pi.$$

Доказательство. Несмещенность оценки (6) непосредственным образом вытекает из свойств математического ожидания.

Используя определение дисперсии и соотношение (3), имеем

$$D\hat{m}^X = \frac{1}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} R^y(t_1 - t_2) = \frac{1}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^X(t_1 - t_2)R^d(t_1 - t_2)] + \\ + \frac{1}{T^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^X(t_1 - t_2)] + \frac{(m^X)^2}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^d(t_1 - t_2)].$$

Подставляя вместо ковариационной функции ее выражение через спектральную плотность, меняя порядок суммирования и интегрирования и используя элементарное равенство

$$\sum_{t=0}^{T-1} e^{itx} = \frac{\sin \frac{Tx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{\frac{i(T-1)x}{2}},$$

имеем

$$D\hat{m}^X = \frac{2\pi}{T(m^d)^2} \iint_{\Pi^2} f^X(\lambda_1) f^d(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ + \frac{2\pi}{T} \int_{\Pi} f^X(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda + \frac{2\pi}{T} \left(\frac{m^X}{m^d} \right)^2 \int_{\Pi} f^d(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda.$$

Сделав замену переменных интегрирования $\mu = \lambda_1, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ в первом слагаемом, получим требуемый результат. Теорема доказана.

Исследуем асимптотическое поведение дисперсии оценки.

Теорема 2. Пусть спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda=0$ и ограничена на Π , а спектральная плотность $f^d(\lambda)$ непрерывна и ограничена на Π , тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TD\hat{m}^X = 2\pi \left[\frac{1}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^X(\mu) f^d(\mu) d\mu + f^X(0) + \left(\frac{m^X}{m^d} \right)^2 f^d(0) \right].$$

Доказательство. Используя выражение для дисперсии, полученное в теореме 1, рассмотрим отдельно каждое слагаемое. С учетом непрерывности спектральной плотности $f^d(\lambda)$ на Π имеем

$$\frac{2\pi}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^X(\mu) \left[\int_{\Pi} f^d(\lambda - \mu) \Phi_T(\lambda) d\lambda \right] d\mu \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^X(\mu) f^d(\mu) d\mu.$$

Проведем доказательство для второго слагаемого. Рассмотрим модуль разности

$$\left| \int_{\Pi} f^X(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda - f^X(0) \right| \leq \int_{\Pi} |f^X(\lambda) - f^X(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda = \\ = \int_{|\lambda| \leq \delta} |f^X(\lambda) - f^X(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda + \int_{\Pi \setminus \{|\lambda| \leq \delta\}} |f^X(\lambda) - f^X(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda,$$

где $0 < \delta < \pi$.

Второй интеграл по свойству ядра Фейера и ограниченности $f^X(\lambda)$ на Π будет стремиться к нулю, а первый в силу непрерывности функции $f^X(\lambda)$ в точке $\lambda=0$ не будет превосходить некоторое, заданное наперед, сколь угодно малое число. Аналогично проводится доказательство для третьего слагаемого. Теорема доказана.

Теорема 3. Статистика \hat{m}^X является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для m^X .

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 2, так как $D\hat{m}^X \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$.

1. Time series analysis of irregularly observed data: proceedings of a symposium held at Texas A&M Uni / Ed. by E. Parzen. New York, 1983.
2. Hideaki Sakai, Takashi Soeda, Hidekatsu Tokumaru // The annals of statistics. 1979. Vol. 7. № 1. P. 99.
3. Jones R. H. // Ann. Math. Statist. 1962. Vol. 33. № 2.
4. Журбенко И. Г. Спектральный анализ временных рядов. М., 1982.
5. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 28.12.2002.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Татьяна Ивановна Илюкевич – методист факультета прикладной математики. Научный руководитель – Н.Н. Труш.

УДК 519.214.5

А.С. ШИМУРАТКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Given a strongly mixed sequence of random variables with mean zero and moments of order greater than three. We obtain the asymptotic expansion of length two for the distribution function of the normalized sum of random variables. The theorem requires that the characteristic function of the sum be small in the specified interval.

Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность случайных величин с $EX_j=0, j \geq 1$, и коэффициентом сильного перемешивания α . Обозначим

$$\sigma_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2, \quad S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{ES_n^3}{6} \varphi(x)(x^2 - 1), \quad \rho(F, G) = \sup_{x \in R} |F(x) - G(x)|,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n}, \quad g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{it^3}{6} ES_n^3\right),$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Тема нашей работы – асимптотические разложения в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин – уже исследовалась разными методами и при различных условиях [1, 2 и др.].

В этой работе мы получаем асимптотическое разложение длины два для $F_n(x)$, т. е. оцениваем величину $\rho(F_n, G_n)$, для последовательности сильно перемешанных случайных величин. При доказательстве мы опираемся на работу [3], которая восходит к [4] и оценивает $\rho(F_n, \Phi)$ также в случае сильного перемешивания.

1. Основной результат. Обозначим также $s_0 = \min\{3, s-1\}$,

$$\gamma = \beta \frac{s-1}{s}, \quad \beta_1 = \frac{2\tau+1}{\tau} \frac{s_0}{s_0-2s-1}, \quad \beta_2 = \frac{5}{2} \frac{2\tau+1}{\tau-1} \frac{s}{s-1},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \frac{s_0(\tau+1)+5}{s_0(\tau+1)-(3\tau+1)s-1} \frac{s}{s-1}, \quad \tau_1 = \frac{3\tau+1}{\tau+1}, \quad \tau_2 = \frac{10\tau}{3\tau+2},$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma(s_0-1)-s_0}{\gamma\tau+s_0(\tau+1)}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \frac{4\gamma-5}{2\gamma+5} \frac{1}{\tau+1}, \quad a(s, \beta, \tau) = \begin{cases} a_1, & (s, \beta, \tau) \in D_1; \\ a_2, & (s, \beta, \tau) \in D_2; \end{cases}$$

$$D_1 = \{(s, \beta, \tau) \mid s > 3, \tau > 1 \text{ и, кроме того, или а) } s_0 \leq \tau_1, \beta \geq \beta_1, \\ \text{или б) } \tau_1 < s_0 \leq \tau_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_3\},$$

$$D_2 = \{(s, \beta, \tau) \mid s > 3, \tau > 1 \text{ и, кроме того, или а) } \tau_1 < s_0 \leq \tau_2, \beta > \beta_3, \\ \text{или б) } s_0 > \tau_2 \text{ (}\tau < 6\text{), } \beta \geq \beta_2\}.$$

Заметим, что $D_1 \cup D_2 = \{(s, \beta, \tau) \mid s > 3, \tau > 1, \beta \geq \max(\beta_1, \beta_2)\}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, функция $a(s, \beta, \tau)$ непрерывна на $D_1 \cup D_2$.

Введем следующие условия:

$$\sup_k E |X_k|^r \leq C_1 < \infty, \tag{1}$$

$$\sigma_n^2 \geq C_2 n, \tag{2}$$

$$\alpha(n) \leq C_3 n^{-\beta}, \tag{3}$$

$$|f_n(t)| \leq C_4 |t|^{-\tau}. \tag{4}$$

В приведенных обозначениях справедлива

Теорема. Пусть для последовательности X_1, X_2, \dots существуют такие постоянные $C_i > 0 (i=1, 6)$, $s > 3$, $\tau > 1$, $\beta \geq \max(\beta_1, \beta_2)$, что для всех n выполняются условия (1) – (3) и условие (4) в области $|t| \in [C_5 n^a, C_6 n^{a\tau}]$. Тогда найдется такое $B > 0$, не зависящее от n , что для всех $n \geq 1$ имеет место соотношение

$$\rho(F_n, G_n) \leq B n^{-a\tau}. \tag{5}$$

Замечание. Выражение $a\tau$ в (5) монотонно возрастает по s, β, τ , и областью его значений является полуинтервал $[1/2, 1)$.

2. Основное представление. Символом B (с индексом и без него) мы будем обозначать положительные ограниченные величины, не зависящие от n, m, T, U , а символом $\theta(t)$ (также с индексом и без него) – такие функции, что $|\theta(t)| \leq 1$. При этом в различных соотношениях B и $\theta(t)$ могут обозначать разные величины.

Для всех $j=1, 2, \dots, n$, $v=1, 2, \dots, R$, $r=1, 2, \dots, R+1$ обозначим

$$S_j^{(0)} = S_n, \quad S_j^{(v)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{|k-j| > vm} X_k,$$

$$\xi_j^{(v)} = \exp \left\{ it \left(S_j^{(v-1)} - S_j^{(v)} \right) \right\} - 1, \quad \zeta_j^{(r)} = X_j \prod_{v=1}^{r-1} \xi_j^{(v)},$$

где m – целое, зависящее от n число. Всюду в суммах будем считать, что $X_k = 0$, когда $k < 1$ или $k > n$.

Исходным для нас является следующее представление:

$$f_n'(t) = \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j e^{it S_j^{(0)}} + \sum_{r=2}^R \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} e^{it S_j^{(r)}} + \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(R+1)} e^{it S_j^{(R)}}, \tag{6}$$

где $R \geq 3$. Для преобразования (6) нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Приведем только наиболее существенные отличия от работы [3].

3. Вспомогательные утверждения. Будем считать, что для некоторого $s > 3$ выполнено условие (1).

Пусть Y_m обозначает сумму вида $\sum_{k=1}^{bm+c} X_{i_k}$, где $b, c \in N$, – постоянные, $i_1, i_2, \dots, i_{bm+c}$ – любые допустимые индексы. Так, например, $\xi_j^{(v)}$ можно записать в виде $\xi_j^{(v)} = \exp \left\{ \frac{it}{\sigma_n} Y_m \right\} - 1$.

Утверждение 1. Для любого $p, 0 < p \leq s$,

$$E^p |Y_m|^p \leq Bm.$$

Доказательство следует из соотношения $\left| \sum_{i=1}^l b_i \right|^q \leq l^{q-1} \sum_{i=1}^l |b_i|^q$ (для всех $q \geq 1$ и $b_1, b_2, \dots, b_l \in R$) и условия (1).

Утверждение 2. Для любых $p > 0$ и $\omega, 0 < \omega \leq \min(1, s/p)$,

$$E^{\frac{1}{p}} \left| \exp \left\{ \frac{it}{\sigma_n} Y_m \right\} - 1 \right|^p \leq B \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^\omega.$$

Доказательство следует из соотношения $|e^{ix} - 1| \leq 2|x|^\omega$ (для любых $x \in R$ и $\omega \in (0, 1)$) и утверждения 1, где в качестве p нужно взять $p\omega$.

В дальнейшем мы используем известные оценки для ковариации двух случайных величин (см. [5] и теорему 17.2.1 [6]).

Лемма 1. Пусть $\frac{|t|m}{\sigma_n} \leq 1$. Тогда для всех $j=1, 2, \dots, n$ и $r=2, 3, \dots, R+1$

имеют место соотношения (для второго из них считается, что $r \geq 4$):

$$1) \quad E \left| \zeta_j^{(r)} \right| \leq d_1^{(r)}(t, n) = B \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^{\min\{r, s\}-1},$$

$$2) \quad E \left| \zeta_j^{(r)} \right| \leq d_2^{(r)}(t, n) = B \left\{ \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} + \alpha^{\frac{s-1}{r}}(m) \right\}.$$

(Здесь и далее $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.) Мы будем также писать $E \left| \zeta_j^{(r)} \right| \leq d^{(r)}(t, n)$, выбирая нужный индекс позже.

Доказательство. По неравенству Гельдера

$$E \left| \zeta_j^{(r)} \right| = E \left| X_j \prod_{v=1}^{r-1} \xi_j^{(v)} \right| \leq E^{\frac{1}{s}} |X_j|^s \prod_{v=1}^{r-1} E^{\frac{s-1}{s(r-1)}} \left| \xi_j^{(v)} \right|^{\frac{s(r-1)}{s-1}}.$$

Применяя утверждение 2 с $\omega = \min \left\{ 1, \frac{s-1}{r-1} \right\}$, получим первое соотношение леммы. Доказательство соотношения 2) аналогично [3, с. 45–46].

Лемма 2. Пусть $\frac{|t|m}{\sigma_n} \leq 1$ и для некоторых $C_3 > 0$ и $\beta > \frac{s}{s-2}$ выполняется условие (3). Тогда для всех $r=2, 3, \dots, R$

$$\left| \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} e^{i s_j^{(r)}} - f_n(t) \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} \right| \leq B \left(n \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + |f_n(t)| n d^{(r)} \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^2 + \sqrt{n m} d^{(r)} \frac{|t|m}{\sigma_n} \right).$$

Замечание. Неравенство $\beta > \frac{s}{s-2}$ выполняется в условиях теоремы.

Лемма 3. Имеет место соотношение

$$\left| \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j e^{i s_j^{(1)}} \right| \leq B \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m).$$

Доказательство лемм 2 и 3 аналогично [3, с. 46–49].

Введем коэффициенты:

$$Q_1 = B_1 \frac{n}{\sigma_n^2} \sum_{k=m+1}^n \alpha^{\frac{s-2}{s}}(k), \quad Q_2 = B_2 \frac{n}{\sigma_n^3} \sum_{k=m+1}^n k \alpha^{\frac{s-3}{s}}(k), \quad Q_3 = B_3 \frac{n}{\sigma_n} \left(\frac{m}{\sigma_n} \right)^{s_0},$$

$$Q_4 = B_4 \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m), \quad Q_5 = B_5 \left(\frac{\sqrt{n m}^{\frac{s}{2}}}{\sigma_n^3} + \frac{n}{\sigma_n} \left(\frac{T m}{\sigma_n} \right)^{\frac{|R-3|}{2}} \left(\frac{m}{\sigma_n} \right)^2 \right). \quad (7)$$

В этой работе выделение второго члена в асимптотическом разложении для $F_n(x)$ восходит к следующей лемме.

Лемма 4. В обозначениях (7) справедливо равенство

$$\frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n \sum_{r=2}^3 E \zeta_j^{(r)} = -t - \frac{i t^2}{2} E S_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t + \theta_2(t) Q_2 t^2 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0}.$$

Доказательство. Для любого $x \in R$ $\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq |x|^{s_0}$. Тогда, обозначив $\Delta_j^{(v)} = S_j^{(v-1)} - S_j^{(v)} = \frac{Y_m}{\sigma_n}$, мы можем записать

$$\frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n \sum_{r=2}^3 E \zeta_j^{(r)} = \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j \left\{ i t \Delta_j^{(1)} - \frac{t^2}{2} \left(\left(\Delta_j^{(1)} \right)^2 + 2 \Delta_j^{(1)} \Delta_j^{(2)} \right) + \theta(t) \left| \frac{t}{\sigma_n} Y_m \right|^{s_0} \right\}. \quad (8)$$

По неравенству Гельдера и утверждению 1 с $p = \frac{S_0 S}{s-1}$

$$E \left| X_j \right| \left| Y_m \right|^{s_0} \leq E^s \left| X_j \right|^s E^{\frac{s-1}{s}} \left| Y_m \right|^{\frac{s_0 s}{s-1}} \leq B m^{s_0}. \quad (9)$$

Далее, $\left(\Delta_j^{(1)} \right)^2 + 2 \Delta_j^{(1)} \Delta_j^{(2)} = S_n^2 - \left(S_j^{(1)} \right)^2 - 2 S_j^{(2)} \left(S_n - S_j^{(1)} \right)$, и справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^n E X_j S_n = \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_j^{(1)} = \theta_1 Q_1 \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_n^2 = \sigma_n E S_n^3,$$

$$\sum_{j=1}^n E X_j \left(S_j^{(1)} \right)^2 = \theta_2 Q_2 \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_j^{(2)} \left(S_n - S_j^{(1)} \right) = \theta_3 Q_2 \sigma_n. \quad (10)$$

Теперь из (8) – (10) следует утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы. Выберем T таким, что $0 < T \leq T_1 = \frac{\sigma_n}{m}$. Тогда, используя леммы 1–3, перепишем (6) в виде: для всех n в области $|t| \leq T$

$$f'_n(t) = B_1 \theta_1(t) \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + \sum_{r=2}^R \frac{i}{\sigma_n} \left\{ f_n(t) \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} + B_2 \theta_2(t) n \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + B_3 \theta_3(t) |f_n(t)| n d^{(r)} \left(\frac{tm}{\sigma_n} \right)^2 + B_4 \theta_4(t) \sqrt{n} d^{(r)} \frac{|t| m^{3/2}}{\sigma_n} \right\} + \theta_5(t) \frac{n}{\sigma_n} d^{(R+1)}. \tag{11}$$

Второе слагаемое в (11) при $r=2, 3$ заменим согласно лемме 4; при $r \geq 4$ заменим $E \zeta_j^{(r)}$ на $B \theta(t) d_1^{(4)}$ (лемма 1). В двух последних слагаемых в фигурных скобках заменим $d^{(r)}$ на $B \theta(t) d_1^{(2)}$, а в последнем слагаемом в (11) — $d^{(R+1)}$ на $d_2^{(R+1)}$. В итоге соотношение (11) перепишется в виде: для всех n в области $|t| \leq T$

$$f'_n(t) = f_n(t) \left(-t - \frac{it^2}{2} ES_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t + \theta_2(t) Q_2 t^2 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0} \right) + \theta_4(t) (Q_4 + Q_5 t^2). \tag{12}$$

Положим

$$T_2 = \begin{cases} (16Q_2)^{-1}, & \text{когда } Q_2 \neq 0, \\ +\infty, & \text{когда } Q_2 = 0, \end{cases} \quad T_3 = (16Q_3)^{-\frac{1}{s_0-1}}.$$

Пусть $Q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Интегрируя (12) в области $|t| \leq T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\}$, получим для всех достаточно больших n в указанной области представление

$$f_n(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6} ES_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t^2 + \theta_2(t) Q_2 t^3 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0+1} \right\} + \theta_4(t) (Q_4 + Q_5 t). \tag{13}$$

Отнимем в (13) от обеих частей $g_n(t)$. Используя неравенство

$$|e^{x+iy+z} - e^x(1+iy)| \leq |z| e^{x+|z|} + y^2 e^x$$

(для любых $x, y \in R$ и $z \in C$), а затем неравенство Эссена [7], получим, что для любой функции $U=U(n) > 0$ для всех достаточно больших n и всех $T, 0 < T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\}$, справедлива оценка

$$\rho(F_n, G_n) \leq B \left\{ Q_1 + Q_2 + Q_3 + |ES_n^3|^2 + (Q_4 + Q_5)T + \int_{T < |t| \leq U} \left| \frac{f_n(t) - g_n(t)}{t} \right| dt + \frac{1 + |ES_n^3|}{U} \right\}. \tag{14}$$

Используя соотношения (2) и (3), неравенства $\beta > 2 \frac{s}{s-3}$ (это следует из условий теоремы) и $|ES_n^3| \leq B n^{-1/2}$, из (14) получим

$$\rho(F_n, G_n) \leq B \left[m^{1-\beta \frac{s-2}{s}} + \frac{m^{2-\beta \frac{s-3}{s}}}{\sqrt{n}} + \frac{m^{s_0}}{(\sqrt{n})^{s_0-1}} + \left(\sqrt{nm}^{-\gamma} + \frac{m^{s/2}}{n} \right) T + \right]$$

$$+ \left(\frac{Tm}{\sqrt{n}} \right)^{\lfloor \frac{R-1}{2} \rfloor} m + \int_{\tau < |t| \leq U} \left| \frac{f_n(t) - g_n(t)}{t} \right| dt + \frac{1}{U} \quad (15)$$

для достаточно больших n , где $0 < T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\} = B_0 \sqrt{nm}^{-\frac{s_0}{s_0-1}}$.

Положим $T = C_5 n^a$, $U = C_6 n^{\alpha\tau}$, $m = \lfloor n^\mu \rfloor$, где $\mu = \frac{1}{2} \frac{s_0(\tau+1) - 1}{s_0(\tau+1) + \gamma\tau}$, когда

$(s, \beta, \tau) \in D_1$, и $\mu = 3(2\gamma+5)^{-1}$, когда $(s, \beta, \tau) \in D_2$. Теперь, взяв достаточно большое $R = R(s, \beta, \tau) \geq 3$, из (15) нетрудно получить (5) и доказательство теоремы.

1. Heinrich L. // Math. Nachr. 1990. Bd. 145. S. 309, 345.
2. Rhee Wan Soo // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1985. Vol. 8. № 3.
3. Зуев Н.М. Предельные теоремы для слабо зависимых случайных величин. Мн., 2000. С. 43.
4. Тихомиров А.Н. // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25. Вып. 4.
5. Давыдов Ю.А. // Там же. 1968. Т. 13. Вып. 4. С. 731, 732.
6. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. С. 388.
7. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М., 1972. С. 137.

Поступила в редакцию 20.12.2002.

Александр Сергеевич Шмуратко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.М. Зуев.

УДК 517.9

А.Н. КОВАЛЬЧУК

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИТОВСКИХ КОНЕЧНЫХ СУММ С ОСРЕДНЕНИЕМ. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

The necessary and sufficient conditions of convergence of the Ito's finite sums with averaging to the stochastic θ -integral in multi-dimensional case are obtained. The estimates of the speed of approximations are found.

Для исследования решений дифференциальных уравнений с обобщенными случайными процессами разработана специальная теория, которая базируется на понятиях стохастических интегралов [1]. Наиболее общий среди них в непрерывном случае стохастический θ -интеграл [2].

Отметим, что изучение теории стохастических дифференциальных уравнений непосредственно связано с проблемой умножения обобщенных функций. В работах [3, 4] предложена конструкция алгебры обобщенных случайных процессов и на ее основе разработан единый подход к исследованию различных классов стохастических дифференциальных уравнений. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах в алгебре сводится к описанию предельного поведения итовских конечных сумм с осреднением. В статьях [5, 6] показано, что предельное поведение таких сумм для одномерного стандартного процесса броуновского движения полностью описывается стохастическими θ -интегралами. Настоящая работа – продолжение исследований в этом направлении для многомерного случая.

Пусть $\bar{B}(t, \omega) = (B^1(t, \omega), B^2(t, \omega), \dots, B^r(t, \omega))$ – r -мерный стандартный процесс броуновского движения [1, с. 48].

$$(\theta) \int_0^t f(\bar{B}(s, \omega)) dB^i(s, \omega), t \in T = [0, a] \subset \mathbf{R}, \omega \in \Omega, i = \overline{1, r},$$

– стохастический θ -интеграл [2, с. 192].

Для произвольной фиксированной точки t из отрезка T имеет место представление

$$t = \tau_i + m_i h_n, \tag{1}$$

где $h_n > 0, n \geq 1, \tau_i \in [0, h_n), m_i \in \mathbf{N}$.

$$\text{Обозначим } K_i(n, h_n) = \iint_{\substack{0 \leq s, \tau \leq 1/n \\ |s - \tau| \leq h_n}} (1 - |s - \tau| h_n^{-1}) \rho_n^i(s) \rho_n^i(\tau) ds d\tau,$$

где $\rho_n^i(t) \in C^\infty(\mathbf{R}), \rho_n^i(t) \geq 0, \text{supp } \rho_n^i(t) \subset [0, 1/n], \int_0^{1/n} \rho_n^i(s) ds = 1, i = \overline{1, r}; C_B^p(\mathbf{R}^d)$

– множество функций, p раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных на \mathbf{R}^d вместе со своими производными до порядка p включительно.

Лемма. Пусть $f \in C_B^1(\mathbf{R}^d)$. Конечные суммы

$$\sum_{k=1}^{m_i} \sum_{i=1}^r f_n(\bar{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_i + kh_n) - B_n^i(\tau_i + (k-1)h_n)]^2$$

сходятся в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности $K_i(n, h_n), i = \overline{1, r}$, сходятся при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ и имеет место оценка

$$\sup_{t \in T} E \left(\sum_{k=1}^{m_i} \sum_{i=1}^r f_n(\bar{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_i + kh_n) - B_n^i(\tau_i + (k-1)h_n)]^2 - \sum_{i=1}^r K_i(n, h_n) \int_0^t f(\bar{B}(s)) ds \right)^2 \leq C/n + Ch_n.$$

Доказательство леммы проводится методами, аналогичными доказательству леммы 4 из статьи [6].

Обозначим

$$S_n f(\bar{B}(t)) = \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{i=1}^r f_n(\bar{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_i + kh_n) - B_n^i(\tau_i + (k-1)h_n)],$$

где $B_n^i(t) = \int_0^{1/n} B^i(t+s) \rho_n^i(s) ds, \bar{B}_n(\tau_i + kh_n) = (B_n^1(\tau_i + kh_n), \dots, B_n^r(\tau_i + kh_n)),$

$$f_n(t_1, \dots, t_r) = \int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} f(t_1 + s_1, \dots, t_r + s_r) \bar{\rho}_n(t_1, \dots, t_r) ds_1 \dots ds_r,$$

$\bar{\rho}_n(t_1, \dots, t_r)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0, 1/n]^r$, и

$$\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \bar{\rho}_n(s_1, \dots, s_r) ds_1 \dots ds_r = 1.$$

Теорема 1. Пусть $f \in C_B^2(\mathbf{R}^d)$. Конечная сумма $S_n f(\bar{B}(t))$ сходится в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности $K_i(n, h_n), i = \overline{1, r}$, сходятся при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ так, что $n^2 h_n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $h_n > 0, n \in \mathbf{N}$. Выберем $N = N(h_n): (0; 1) \rightarrow \mathbf{N}$ такое, что $h_n N(h_n) = \delta \rightarrow 0, 1/n = o(\delta)$ при $h_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тогда представление (1) можно записать в виде

$$t = \tau'_i + MNh_n = \tau'_i + M\delta, \tag{2}$$

где $\tau'_i = \tau_i + k'_i h_n \in [0; \delta)$, $N, M, k'_i \in \mathbf{N}$.

Для простоты исследуем случай $r=2$. Достаточно рассмотреть первое слагаемое.

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m_i} f_n(B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n), B_n^2(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^1(\tau_i + kh_n) - B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n)] - \\ & - (I) \int_0^t f(B^1(s), B^2(s)) dB^1(s) - ((1 - K_1(n, h_n)) / 2) \int_0^t f'_{x_1}(B^1(s), B^2(s)) ds = \\ & = \left\{ \sum_{l=1}^M f_n(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^1(\tau'_i + l\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)] - \right. \\ & - (I) \int_0^t f(B^1(s), B^2(s)) dB^1(s) \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^M f'_{nx_1}(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) \times \right. \\ & \quad \times [B_n^1(\tau'_i + l\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 - \int_0^t f'_{x_1}(B^1(s), B^2(s)) ds \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{m_i} f'_{nx_1}(B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n), B_n^2(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^1(\tau_i + kh_n) - \right. \\ & \quad - B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n)]^2 - K_1(n, h_n) \int_0^t f'_{x_1}(B^1(s), B^2(s)) ds \left. \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f_n(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)) - \right. \\ & \quad - f_n(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - \\ & \quad - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^M f'_{nx_1}(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) \times \right. \\ & \quad \times [B_n^1(\tau'_i + l\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 - \sum_{k=k'_i}^{m_i} f'_{nx_1}(B_n^1(\tau'_i + (k-1)h_n), B_n^2(\tau'_i + (k-1)h_n)) \times \\ & \quad \times [B_n^1(\tau'_i + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (k-1)h_n)]^2 \left. \right) \left. \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{k'_i} f_n(B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n), \right. \\ & \quad B_n^2(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^1(\tau_i + kh_n) - B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k'_i} f'_{nx_1}(B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n), \\ & \quad B_n^2(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^1(\tau_i + kh_n) - B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n)]^2 \left. \right\} = \\ & = I_1(t) + 1/2 I_2(t) - 1/2 I_3(t) + I_4(t) + I_5(t), \quad f'_{x_1} = \partial f / \partial x_1, \quad f'_{nx_1} = \partial f_n / \partial x_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим $I_1(t)$. Согласно теореме 1 из статьи [4] выполняется

$$E(I_1(t))^2 \leq C / (n\delta) + C\delta.$$

Для оценки $I_3(t)$ воспользуемся леммой. В результате получим оценку

$$E(I_3(t))^2 \leq Ch_n + C/n.$$

Так как $1/n = o(\delta)$, то легко убедиться, что $K_1(n, \delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тогда согласно лемме выполняется

$$E(I_2(t))^2 \leq C\delta + C/n.$$

Рассмотрим $I_5(t)$. Используя вид k'_i из соотношения (2), ограниченность f и ее частных производных, получим

$$E(I_5(t))^2 \leq C k'_i \sum_{k=1}^{k'_i} E(B_n(\tau'_i + kh_n) - B_n(\tau'_i + (k-1)h_n))^2 + \\ + C k'_i \sum_{k=1}^{k'_i} E(B_n(\tau'_i + kh_n) - B_n(\tau'_i + (k-1)h_n))^4 \leq C k'^2 h_n + C k'^2 h_n^2 \leq C \delta^2 (1 + 1/h_n).$$

Исследуем $I_4(t)$. Для этого воспользуемся формулой Тейлора для функции f_n

$$I_4(t) = \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f'_{nx_1} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - \right. \\ \left. - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^M f'_{nx_1} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^1(\tau'_i + l\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=k'_i}^{m_i} f'_{nx_1} (B_n^1(\tau'_i + (k-1)h_n), B_n^2(\tau'_i + (k-1)h_n)) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [B_n^1(\tau'_i + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (k-1)h_n)]^2 h_n \right)^2 \right\} + \\ + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f'_{nx_2} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - \right. \\ \left. - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f''_{nx_1x_1} (\alpha) [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 \times \right. \\ \left. \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f''_{nx_2x_2} (\alpha) [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 \times \right. \\ \left. \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f''_{nx_1x_2} (\alpha) \times \right. \\ \left. \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^2((l-1)\delta + (k-1)h_n) - \right. \\ \left. - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^1((l-1)\delta + \tau'_i + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} = \\ = I_{41}(t) + I_{42}(t) + 1/2 I_{43}(t) + 1/2 I_{44}(t) + I_{45}(t), \quad f''_{nx_j} = \partial^2 f_n / \partial x_i \partial x_j.$$

Легко установить справедливость следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^N [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - \\ - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] = \frac{1}{2} [B_n^1(\tau'_i + l\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2.$$

Используя это тождество, ограниченность f''_{nx,x_j} , формулу Лагранжа и неравенство Гельдера, получим

$$E(I_{41}(t))^2 = E \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f'_{nx_i} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) - f'_{nx_i} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)) \times \right. \\ \left. \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2 \right\} \leq \\ \leq MN E \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N ([B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2 + \\ + [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2) \times \\ \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^4 \leq C\delta.$$

Используя ограниченность f''_{nx,x_j} и неравенство Гельдера, получим

$$E(I_{43}(t))^2 \leq CMN E \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^4 [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2 \right\} \leq \\ \leq CM^2 N^2 \delta^2 h_n \leq C\delta^2/h_n.$$

Аналогично находим оценки для $I_{44}(t)$ и $I_{45}(t)$

$$E(I_{44}(t))^2 \leq C\delta^2/h_n, \quad E(I_{45}(t))^2 \leq C\delta^2/h_n.$$

Рассмотрим $I_{42}(t)$. Выполним следующие преобразования:

$$I_{42}(t) = \left\{ I_{42}(t) - \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f'_{nx_2} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta - 1/n), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) \times \right. \\ \left. \times [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)] [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} + \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N f'_{nx_2} (B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta - 1/n), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)] \times \right. \\ \left. \times [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \right\} = I_{421}(t) + I_{422}(t).$$

Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, ограниченность f''_{nx,x_j} и неравенство Гельдера, получим

$$E(I_{421}(t))^2 \leq CMN E \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta - 1/n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 \times \\ \times [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)]^2 [B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2 \leq CM^2 N^2 \delta h_n/n \leq C \delta/(h_n n).$$

Для оценки $I_{422}(t)$ воспользуемся независимостью

$$[B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] \text{ и } f'_{nx_2}(B_n^1(\tau'_i + (l-1)\delta - 1/n), B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)) [B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (l-1)\delta)] f'_{nx_2}(B_n^1(\tau'_i + (j-1)\delta - 1/n), B_n^2(\tau'_i + (j-1)\delta)) [B_n^2(\tau'_i + (j-1)\delta + (i-1)h_n) - B_n^2(\tau'_i + (j-1)\delta)] \times \\ \times [B_n^1(\tau'_i + (j-1)\delta + ih_n) - B_n^1(\tau'_i + (j-1)\delta + (i-1)h_n)], \\ \text{если } (l-1)\delta + (k-1)h_n \geq (j-1)\delta + ih_n + 1/n.$$

В результате $E(I_{421}(t))^2 \leq CMN \delta h_n(1+1/(h_n n)) \leq C \delta(1+1/(h_n n))$.

В итоге получена оценка

$$\sup_{t \in T} E \left\{ \sum_{k=1}^{m_i} f_n(B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n), B_n^2(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^1(\tau_i + kh_n) - B_n^1(\tau_i + (k-1)h_n)] - \right. \\ \left. - (I) \int_0^t f(B^1(s), B^2(s)) dB^1(s) - \frac{1 - K_1(n, h_n)}{2} \int_0^t f'_x(B^1(s), B^2(s)) ds \right\}^2 \leq \\ \leq Ch_n + \frac{C}{n} + \frac{C}{n\delta} + \frac{C\delta}{nh_n} + \frac{C\delta^2}{h_n}.$$

Если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, то, положив $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$, а если $1/n^{1/2} \leq h_n$, тогда $1/(nh_n) \leq h_n$, и взяв $\delta = h_n$, получим требуемый результат.

Используя связь между интегралом Ито и θ -интегралом, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $K_i(n, h_n) \rightarrow (1 - 2\theta_i)$, $\theta_i \in [0; 1/2]$, $i = \overline{1, r}$, при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n^2 = o(h_n)$, то

$$\sup_{t \in T} E \left\{ \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{i=1}^r f_n(\overline{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_i + kh_n) - B_n^i(\tau_i + (k-1)h_n)] - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^r (\theta_i) \int_0^t f(\overline{B}(s)) dB^i(s) \right\}^2 \rightarrow 0.$$

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.

2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

3. Лазакович Н.В. // Докл. НАН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23.

4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П. // Теория вероятностей и ее приложения. 1996. Т. 41. Вып. 4. С. 783.

5. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. // Лит. мат. сб. 1999. Т. 39. № 2. С. 248.

6. Яблонский О.Л. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 22.

Поступила в редакцию 26.12.2002.

Андрей Николаевич Ковальчук – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н.В. Лазакович.

УДК 517.9

В.Г. НОВОХРОСТ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Differential equations with composition of discontinuous functions and distributions in the right-hand part are considered. It is shown that the approach based on approximation with delay differential equations is the partial case of the average-out finite-difference approach.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами связано с проблемой определения умножения обобщенных функций. Существует несколько подходов к определению решений таких дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2]), которые, вообще го-

воря, приводят к различным результатам. Отметим, что выбор той или иной интерпретации зависит от конкретной практической задачи, которую такое уравнение описывает.

В последнее время интенсивно развивается единый подход в исследовании решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, в том числе стохастических, основанный на аппроксимации решений таких уравнений решениями соответствующих конечно-разностных уравнений с осреднением [3, 4]. В настоящей работе будет показано, что метод, предложенный в работе [5], является частным случаем единого подхода.

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где f – произвольная функция, а $L(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке T . Без существенного ограничения общности будем считать, что функция $L(t)$ непрерывна справа, $L(0)=0$ и $L(a-0)=L(a)$.

В работе [5] задаче (1) ставилась в соответствие следующая задача Коши с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{Y}_n(t) = f(Y_n(t-\lambda_n))\dot{L}_n(t), \\ Y_n(t)|_{[-\lambda_n, 0]} = Y_0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2)$$

и были показаны существование и единственность решения (2) при условиях $\lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $\lambda_n > 1/n$.

Здесь $L_n(t)=(L*\rho_n)(t)=\int_0^{t/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n(t)=n\rho(nt)$, $\rho(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$\rho(t) \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset [0, 1]$, $\int_0^1 \rho(s)ds = 1$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))[L_n(t+h_n) - L_n(t)], \\ X_n(t)|_{[0, h_n]} = X_{n0}(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (3)$$

где $f_n(t)=(f*\rho_n)(t)$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t=\tau_i+m_i h_n$, где $\tau_i \in [0, h_n)$, $m_i \in \mathbb{N}$.

Несложно видеть, что решение системы (3) можно записать в виде

$$X_n(t) = X_{n0}(\tau_i) + \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n(X_n(\tau_i + kh_n))[L_n(\tau_i + (k+1)h_n) - L_n(\tau_i + kh_n)]. \quad (4)$$

Связь между решениями задач (2) и (3) устанавливает следующая

Теорема. Пусть $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, $L(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке T . Тогда при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, $\lambda_n \rightarrow 0$ так, что $\lambda_n > 1/n$ для всех $t \in T$ $|X_n(t) - Y_n(t)| \rightarrow 0$, где $X_n(t)$, $Y_n(t)$ – решения задач (3) и (2) соответственно, если для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_i) - Y_0| \rightarrow 0$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. Пусть для любого n справедливо неравенство

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k Z_k, \quad (5)$$

где A, A_k, B_k – некоторые положительные константы и $Z_k > 0, k = \overline{1, n}$. Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) e^{\sum_{k=1}^n B_k}.$$

Доказательство. Последовательно применяя неравенство (5), получаем

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &\leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k + B_n Z_n \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k = A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right) + (B_n + 1) \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \leq \dots \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \\ &+ B_n \left(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right) + B_{n-1} (B_n + 1) \left(A + \sum_{k=1}^{n-2} A_k \right) + \dots + \\ &+ B_1 (1 + B_2 (1 + \dots (1 + B_{n-1} (1 + B_n)))) A \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n). \end{aligned}$$

Прологарифмируем левую и правую части этой цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \ln Z_{n+1} &\leq \ln \left(\left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n) \right) = \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n \ln (1 + B_n) \leq \\ &\leq \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n B_n. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $Z_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) e^{\sum_{k=1}^n B_k}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Задача Коши (2) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$Y_n(t) = Y_0 + \int_0^t f(Y_n(s - \lambda_n)) dL_n(s). \quad (6)$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda_n = h_n$.

Обозначим $t_k = \tau_i + kh_n$. Тогда, используя представление (4), получим

$$\begin{aligned} |X_n(t) - Y_n(t)| &= \left| X_{n0}(\tau_i) + \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n(X_n(t_k)) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] - Y_0 - \right. \\ &\left. - \int_0^{\tau_i} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) - \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) \right| \leq |X_{n0}(\tau_i) - Y_0| + \\ &+ \left| \int_0^{\tau_i} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) \right| + \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} (f_n(X_n(t_k)) - f(Y_n(t_k))) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(X_n(t_k)) - f(Y_n(t_k))] dL_n(s) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(Y_n(t_k)) - f(Y_n(s - h_n))] dL_n(s) \right| = \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t). \end{aligned}$$

Так как $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ и функция $L(t)$ имеет ограниченную вариацию, то

$$I_2(t) \leq M \operatorname{var}_{t \in [0, h_n]} L^c(t),$$

где $M = \max_{x \in R} |f(x)|$.

Воспользуемся представлением f_n и ограниченностью вариации L_n и получим оценку для $I_3(t)$

$$I_3(t) \leq (M_1/n) \sum_{k=0}^{m_n-1} |L_n(t_k) - L_n(t_{k+1})| \leq M_1 \operatorname{var}_{t \in T} L(t)/n.$$

Здесь $M_1 = \max_{x \in R} |f'(x)|$.

В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях и того, что $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, верна следующая оценка:

$$I_4(t) \leq M_1 \sum_{k=0}^{m_n-1} |X_n(t_k) - Y_n(t_k)| |L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)|.$$

Рассмотрим $I_5(t)$. Применяя представление (6) для $Y_n(t)$ и представление $L(t)$ в виде $L(t) = L^c(t) + L^d(t)$, где $L^c(\cdot)$ и $L^d(\cdot)$ – непрерывная и разрывная части $L(\cdot)$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} I_5(t) &\leq M_1 \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |Y_n(t_k) - Y_n(s - h_n)| |dL_n(s)| = \\ &= M_1 \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_{s-h_n}^{t_k} f(Y_n(u)) dL_n(u) \right| |dL_n(s)| \leq MM_1 \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n(u)| |dL_n(s)| \leq \\ &\leq MM_1 \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^c(u)| |dL_n^c(s)| + \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^c(u)| |dL_n^d(s)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^d(u)| |dL_n^c(s)| + \sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^d(u)| |dL_n^d(s)| \right) = \\ &= I_6(t) + I_7(t) + I_8(t) + I_9(t). \end{aligned}$$

В $I_6(t)$ ограничиваем внутренний интеграл максимумом разности значений функции $L_n^c(t)$ на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, тогда

$$I_6(t) \leq MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \operatorname{var} |L^c(t)|.$$

Аналогичные оценки верны и для $I_7(t)$ и $I_8(t)$.

Так как функция $L(\cdot)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < +\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{i=n_0}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < \varepsilon$.

Представим $L^d(\cdot)$ в виде

$$L^d(t) = L^{d, \geq n_0}(t) + L^{d, < n_0}(t), \tag{7}$$

где $L^{d, \geq n_0}(\cdot)$ и $L^{d, < n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_i с номерами i , большими либо равными n_0 и меньшими n_0 соответственно. Тогда

$$I_9(t) \leq MM_1 \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, \geq n_0}(u)| |dL_n^{d, \geq n_0}(s)| + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, < n_0}(u)| |dL_n^{d, \geq n_0}(s)| + \\
 & + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, \geq n_0}(u)| |dL_n^{d, < n_0}(s)| + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, < n_0}(u)| |dL_n^{d, < n_0}(s)| = \\
 & = I_{10}(t) + I_{11}(t) + I_{12}(t) + I_{13}(t).
 \end{aligned}$$

Действуя так же, как в случае $I_6(t)$, и с учетом представления (7) получим

$$I_{10}(t) \leq MM_1 \max_{t_1, t_2 \in T} |L_n^{d, \geq n_0}(t_1) - L_n^{d, \geq n_0}(t_2)| \text{var } L^{d, \geq n_0}(t) \leq MM_1 \text{var } L(t) \varepsilon.$$

Аналогичные оценки выполняются для $I_{11}(t)$ и $I_{12}(t)$.

Так как у функции $L^{d, < n_0}(t)$ ровно n_0-1 точек разрыва на отрезке T , то существует конечное число номеров k_i таких, что $\mu_i \in [t_{k_i}, t_{k_i+1})$, причем если $2h_n < \min_{1 \leq i \leq n_0-1} |\mu_i - \mu_{i+1}|$, то $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$. Тогда при $1/n = o(h_n)$ верно

$$I_{13}(t) \leq \sum_{k=0}^{m_i-1} |L_n^{d, < n_0}(t_k) - L_n^{d, < n_0}(t_{k+1})| \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^{d, < n_0}(t_k) - L_n^{d, < n_0}(s - h_n)| = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 |X_n(t) - Y_n(t)| & \leq |X_{n_0}(\tau_t) - Y_0| + M \text{var}_{t \in [0, h_n]} L^c(t) + M_1 \text{var}_{t \in T} L(t)/n + \\
 & + M_i \sum_{k=0}^{m_i-1} |X_n(t_k) - Y_n(t_k)| |L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)| + \\
 & + 3MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \text{var} |L^c(t)| + 3MM_1 \text{var}_{t \in T} L(t) \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Применяем лемму 1 к последнему неравенству, тогда

$$\begin{aligned}
 |X_n(t) - Y_n(t)| & \leq \left(|X_{n_0}(\tau_t) - Y_0| + M \text{var}_{t \in [0, h_n]} L^c(t) + M_1 \text{var}_{t \in T} L(t)/n + \right. \\
 & + 3MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \text{var} |L^c(t)| + 3MM_1 \text{var}_{t \in T} L(t) \varepsilon \left. \right) \times \\
 & \times \exp \left(M_1 \text{var}_{t \in T} L(t) \right).
 \end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, используя равномерную непрерывность $L^c(t)$ и то, что для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n_0}(\tau_t) - Y_0| \rightarrow 0$, для любого $t \in T$ получим $|X_n(t) - Y_n(t)| \rightarrow 0$ при $\lambda_n = h_n$.

В силу единственности решения задачи Коши (2) теорема выполняется для любого $\lambda_n \rightarrow 0$ так, что $\lambda_n > 1/n$, что и требовалось доказать.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

2. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы модели и приложения. М., 1991.

3. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Стемковская Т.В. // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43. № 2. С. 272.

4. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 87.

5. Kurzweil J. // Czech. Math. J. 1958. Vol. 8. № 3. P. 360.

Поступила в редакцию 24.12.2002.

Вероника Геннадьевна Новохрост – студентка 5-го курса механико-математического факультета.

Б.С. КАЛИТИН

**УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
МОНОПОЛЬНОГО РЫНКА**

The full research of stability of a dynamic model of the monopoly market is conducted.

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости равновесия рынка типа «чистая монополия». Такая модель следует из уравнений модели [1] при $n=1$. Она представляется системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{v(p-p^0)}{p-p^*} - \frac{d(p-p^0)}{p^{**}-p} + r(pq-p^0q^0), \\ \frac{dq}{dt} = -g(p-p^0) - m(q-q^0) \end{cases} \quad (1)$$

при $v>0, d>0, r>0, g\geq 0, m\geq 0, p^* < p < p^{**}, p^* < p^0 < p^{**}$, где p и p^0 – текущая и равновесная цены, q, q^0 – текущий и равновесный объемы продаж, p^* и p^{**} – нижнее и верхнее пороговые значения цен соответственно. Экономический смысл остальных параметров системы подробно изложен в [1]. Добавим только, что из экономических соображений, вообще говоря, следуют ограничения и на величину объема продаж в виде неравенства $q^* < q < q^{**}$. Здесь значение q^* можно трактовать как минимально возможное количество товара; q^{**} – либо как максимальную величину спроса на предлагаемый товар, либо как максимально возможный потенциал производственных мощностей монополиста. Однако формально мы эти ограничения здесь учитывать не будем.

Для исходной модели замена $x = p - p^0, y = q - q^0$ дает систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{vx}{x+p'} - \frac{dx}{p''-x} + rq^0x + rp^0y + rxy, \\ \frac{dy}{dt} = -gx - my \end{cases} \quad (2)$$

при $m\geq 0, g\geq 0, v>0, d>0, r>0, q^0>0, p^0>0, -p' < x < p''$,

где величины $p' = p^0 - p^*$ и $p'' = p^{**} - p^0$ можно трактовать как цену выигрыша для продавца и покупателя соответственно. Исследуемое на устойчивость равновесие экономической модели отвечает началу координат $x=0, y=0$. Разложим правую часть (2) в ряд Тейлора в окрестности этой точки. Тогда система примет вид

$$\frac{dx}{dt} = -Sx + rp_0y + rxy + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j, \quad \frac{dy}{dt} = -gx - my, \quad (3)$$

где $S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq_0$ есть запас прочности рынка [2], а коэффициенты раз-

ложения представляются равенствами $H_j = (-1)^j \frac{v}{(p')^j} - \frac{d}{(p'')^j}, j=2, 3, 4, \dots$

Выпишем характеристическое уравнение системы линейного приближения для (3):

$$\lambda^2 + \lambda(S+m) + Sm + grp^0 = 0. \quad (4)$$

Поскольку условия устойчивости экономического равновесия зависят от соотношений между параметрами системы, рассмотрим несколько случаев. С этой целью предварительно отметим все возможные состояния равновесия (2).

Точки покоя (2) находятся из системы уравнений

$$-\frac{vx}{x+p'} - \frac{dx}{p''-x} + rq^0x + rp^0y + rxy = 0, \quad -gx - my = 0,$$

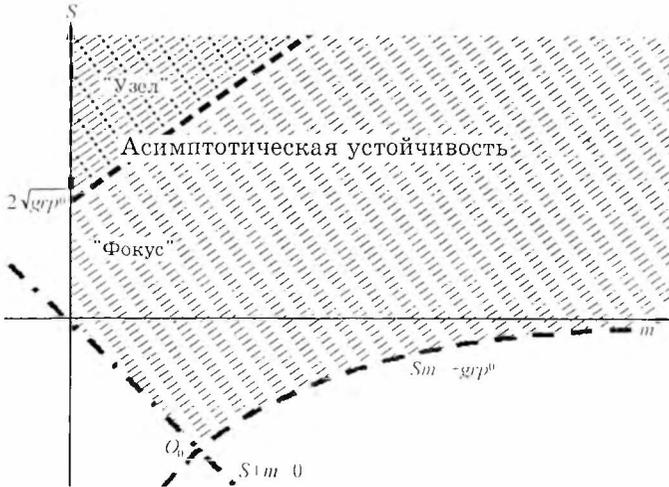
анализ которых показывает следующее. Если $Sm + grp^0 > 0, m \neq 0$, то система (2) может иметь одну, две или три точки покоя вида $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$, где $-p' < x^* < 0$. Если $m=0, g \neq 0$, то единственной точкой покоя будет начало координат.

При $Sm + grp^0 = 0, m \neq 0, g \neq 0$, точки покоя $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$ находятся как решение $x=x^*$ квадратного уравнения $x^2 + x(p'' - p' + \frac{m}{gr}(S + rq^0)) + p''p'(H_2 - \frac{gr}{m}) = 0$.

1. Основной случай. Если действительные части корней (4) отличны от нуля, то теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению дает следующий результат.

Теорема 1. Если выполнены условия $S+m > 0, Sm + grp^0 > 0$, то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчивы.

Если же $Sm + grp^0 < 0$ или $S+m < 0, Sm + grp^0 > 0$, то это равновесие неустойчиво.



Область асимптотической устойчивости на плоскости параметров (m, S)

Область асимптотической устойчивости системы (2) удобно представить на плоскости двух переменных: запаса прочности S и коэффициента эффекта насыщения m (рисунок). Здесь заштрихованная область соответствует асимптотической устойчивости равновесия, причем штрихпунктир соответствует особой точке типа «узел» (на оси OS граница этой области начинается в точке $2\sqrt{grp^0}$), а пунктир – в особой точке типа «фокус». Нетрудно видеть, что границы этой области ($S+m=0, Sm + grp^0=0$) будут соответствовать критическим случаям [3].

2. Критический случай одного нулевого корня. Пусть характеристическое уравнение (4) удовлетворяет условиям

$$S+m>0, \quad Sm+grp^0=0,$$

т. е. один его корень равен нулю, а второй отрицателен.

Проведение необходимых исследований в соответствии с теорией критического случая с одним нулевым корнем [3] приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. Если $S+m>0, Sm+rgp^0=0, H_2 = \frac{v}{(p^*)^2} - \frac{d}{(p^0)^2} = \frac{gr}{m}$, то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчивы.

Если же $H_2 \neq \frac{gr}{m}$, то равновесие неустойчиво.

Замечание 1. Отметим, что при выполнении всех требований теоремы 2 система (2) наряду с началом координат будет иметь второе равновесие

$(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$, если выполняются условия

$$g(2p^0-p^{**}) < q^0m < g(2p^0-p^*). \quad (5)$$

3. Критический случай двух нулевых корней. Условия существования двух нулевых корней уравнения (4) задаются равенствами $Sm+grp^0=0, S+m=0$. Теория данного критического случая изложена в [4]. Она дает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия $S+m=0, Sm+grp^0=0$. Тогда равновесие $p=p^0, q=q^0$ системы (1) будет устойчивым при

$$H_2 = \frac{v}{(p^*)^2} - \frac{d}{(p^0)^2} = \frac{gr}{m}$$

и неустойчивым при $H_2 \neq \frac{gr}{m}$.

Здесь также система (1) будет иметь второе равновесие $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$ в области своего определения, если выполняются условия (5).

4. Критический случай пары чисто мнимых корней. Пусть теперь для (4) выполняются условия

$$S+m = 0, \quad grp_0+Sm > 0.$$

Тогда собственные значения являются чисто мнимыми: $\pm (grp_0 + Sm)^{1/2} i$. Используя первый из предложенных в [3] способов исследования устойчивости данного критического случая и ограничиваясь лишь слагаемыми третьей степени, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Если выполнены условия $S+m=0, Sm+grp^0>0$, то равновесие $p=p^0, q=q^0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым при

$$3(grp_0 - m^2)gp_0H_3 + (2mp_0H_2^2 - (2m^2 + grp_0)H_2 + mgr) < 0 \quad (6)$$

и неустойчивым при

$$3(grp_0 - m^2)gp_0H_3 + (2mp_0H_2^2 - (2m^2 + grp_0)H_2 + mgr) > 0. \quad (7)$$

Добавим, что неравенство (6) обеспечивает особую точку типа устойчивый «фокус», а неравенство (7) – неустойчивый «фокус». Если же левая часть (6) равна нулю, то для исследования устойчивости необходимо рассмотрение слагаемых степени выше третьей в разложении правой части (3).

5. Отсутствие эффекта насыщения ($m=0$). Здесь условие устойчивости по первому приближению выражается неравенством $S>0$, а при $S=0$ имеет место критический случай пары чисто мнимых корней, т. е. возникает проблема «центра» и «фокуса» [3]. Система записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = rp_0 y + rxy + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j, \quad \frac{dy}{dt} = -gx.$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда величина $H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0$. Тогда имеем систему

$$\frac{dx}{dt} = ry(p^0 + x) + H_3 x^3 + o(x^3), \quad \frac{dy}{dt} = -gx.$$

Для исследования устойчивости в данном случае возьмем функцию Ляпунова вида

$$v(x, y) = \frac{1}{2}ry^2 + g \int_0^x \frac{s}{p^0 + s} ds. \tag{8}$$

Если $g \neq 0$, то функция $v(x, y)$ определенно положительна в окрестности начала координат (точнее, в области G , где $x > -p^0$). Ее производная по времени в силу исследуемой системы равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{H_3 g x^4}{p^0 + x} (1 + o(1)).$$

Ясно, что $dv/dt \leq 0$ при $x > -p^0$ и $dv/dt = 0$, только если $x=0$ в окрестности G начала координат при $g \neq 0$.

Проверим условия теоремы Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости [3]. На множестве, где $dv/dt=0$, система дает равенства $0=rp^0 y$, $dy/dt=0$. Откуда следует, что $y=0$. Поэтому справедлива

Теорема 5. Если выполняются условия

$$S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq^0 = 0, \quad H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0, \quad g \neq 0, \quad m = 0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчивы.

Исследуем теперь случай $g=0, m=0$. Здесь система имеет континуум точек покоя в окрестности начала координат, расположенных на оси Oy . Снова возьмем функцию Ляпунова (8): $v(x, y) = \frac{1}{2}ry^2$. Для нее производная $dv/dt \equiv 0$. На множестве $M_0 = \{(x, y) \in R^2 : v(x, y) = 0\}$ имеем $y=0$. Система на M_0 редуцируется в одно дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = H_3 x^3 + o(x^3)$. По-

скольку $H_3 = -\frac{v}{(p')^3} - \frac{d}{(p'')^3} < 0$, то такое уравнение обладает асимптотически устойчивым равновесием $x=0$. Поэтому по теореме 1 [5] нулевое решение исходной системы устойчиво. Следовательно, справедлива

Теорема 6. Если выполнены условия

$$S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq^0 = 0, \quad H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0, \quad m = 0, \quad g = 0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ асимптотически устойчива, а равновесный объем продаж $q=q^0$ устойчив не асимптотически.

Отметим, что слабая устойчивость объема продаж объясняется отсутствием стабилизирующих факторов: $g=0$ (сила изменения цены равна нулю) и $m=0$ (нулевой эффект насыщения).

б) Пусть теперь величина $H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} \neq 0$. Тогда, взяв функцию

Ляпунова (8), можно, опираясь на теорему Н.Г. Четаева [3], показать, что равновесие $x=0, y=0$ неустойчиво. А именно справедлива

Теорема 7. Если выполнены условия

$$S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq^0 = 0, H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} \neq 0, m = 0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ неустойчивы.

6. Независимость величины объема продаж от изменения цены ($g=0$). Рассмотрим частный случай, когда $g=0, m>0$. Здесь система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = -Sx + rp_0 y + rxy + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j, \quad \frac{dy}{dt} = -my. \tag{9}$$

Возьмем функцию Ляпунова $v(x,y)=y^2/2$. Ее производная по времени в силу системы (9) равна $dv/dt=-my^2$. По теореме 1 [5] нулевое решение системы (9) будет асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда решение $x=0$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -Sx + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j \tag{10}$$

асимптотически устойчиво. С учетом того, что $H_3<0$, условия асимптотической устойчивости решения $x=0$ системы (10), а следовательно, и решения $x=0, y=0$ системы (9) состоят в следующем: 1) $S>0$ либо 2) $S=0,$

$H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0$. Во всех остальных случаях решение $x=0$ системы (10)

неустойчиво, а значит, и решение $x=0, y=0$ системы (9) также неустойчиво. Таким образом, справедлива

Теорема 7. Если изменение цены не влияет на величину объема продаж, т. е. $g=0, m>0$, то равновесие $p=p^0, q=q^0$ будет асимптотически устойчивым в каждом из следующих случаев:

$$1) S>0; 2) S=0, H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0.$$

При $S<0$ равновесная цена $p=p^0$ неустойчива, а равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчив при $m>0$ и устойчив не асимптотически при $m=0$.

В заключение отметим, что на рисунке отрезок прямой OO_0 границы области асимптотической устойчивости соответствует критическому случаю пары чисто мнимых корней; точка O_0 – критическому случаю двух нулевых корней; отрезок пунктирной границы, начиная от точки O_0 вправо, – критическому случаю одного нулевого корня.

1. Калитин Б. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 28.
 2. Калитин Б. С. // Там же. 1997. № 2. С. 68.
 3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.

4. Камеников Г. В. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М., 1972.

5. Калинин Б. С. Динамические процессы и их устойчивость. Якутск, 1987. С. 78.

Поступила в редакцию 18.09.2001.

Борис Сергеевич Калинин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

УДК 517.44

Е. В. ГРОМАК

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУВЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Generalized integral transform involving Struve function in the kernel is studied in the weighed spaces of r -summable functions. Mapping properties such as the boundedness, the representation and the range of the considered transform are given, and the inversion formulae are established.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$(\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda} f)(x) = x^\sigma \int_0^\infty \mathbb{H}_\eta(\lambda x^a t^b) t^\omega f(t) dt \quad (x > 0) \quad (1)$$

с комплексными σ, ω и действительными $a > 0, b > 0, \lambda > 0$, содержащее функцию Струве $\mathbb{H}_\eta(z)$ в ядре [1, с. 46]. Это преобразование определено для непрерывных функций $f \in C_0$ на $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$. При $\sigma = \omega = 1/2$ и $a = b = \lambda = 1$ преобразование (1) принимает вид классического преобразования Струве

$$(\mathcal{H}_\eta f)(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt} \mathbb{H}_\eta(xt) f(t) dt \quad (x > 0). \quad (2)$$

Это преобразование, возникающее в осесимметрической теории потенциала [2], впервые было рассмотрено Титчмаршем [3] в качестве одного из взаимно обратных преобразований в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}_+)$. В связи с этим см. [4, с. 277, 280] и [5, гл. 9, 10]. Действие в пространстве $\mathcal{L}_r \mathbf{R}_+$ ($1 < r < \infty$) преобразования (1), в котором η заменено на $\eta - 1/2$, $\sigma = \rho + 1/2 - \eta$, $\omega = 1/2 - \eta$ и $a = b = \lambda = 1$, было изучено в [6], а преобразования (1) с $\sigma = 1$, $\omega = -1$, $a = 1/2$, $b = -1/2$ и $\lambda = 2$ – в специальных пространствах $\mathfrak{M}_{\nu, \gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(\nu, \gamma)}$ в [7, 8] и [9, теорема 36.13]. Формулы обратного преобразования для некоторых модифицированных преобразований Струве были получены авторами [10] и [11] в пространстве $\mathcal{L}_{\nu, 1}$ функций f таких, что $t^\nu f(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R}_+)$.

В работах [2, 12–16] преобразование (2) было исследовано в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu, r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{\nu, r} < \infty$, где

$$\|f\|_{\nu, r} = \left(\int_0^\infty |t^\nu f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \quad (1 < r < \infty, \nu \in \mathbf{R}).$$

В [2, 12–16] были даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора \mathcal{H}_η , различные формы интегральных представлений и описание образа, а также установлены формулы обращения. Исследования в [2, 12–15] опирались на технику мультипликаторов Меллина для инте-

гральных преобразований вида (2). Другой подход к изучению указанных свойств \mathcal{H}_η -преобразования в $\mathcal{L}_{v,r}$, основанный на свойствах более общего H -преобразования, был предложен в [16].

В данной работе применяются результаты из [16] для исследования интегрального преобразования (1) в $\mathcal{L}_{v,r}$. Даются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1), различные формы интегральных представлений и описание образов этих операторов в $\mathcal{L}_{v,r}$; устанавливаются формулы обращений.

Покажем, что обобщенное преобразование (1) может быть представлено как композиция преобразования Струве (2) и элементарных операторов M_ζ , W_δ и N_a , определяемых как:

$$(M_\zeta f)(x) = x^\zeta f(x) \quad (\zeta \in C),$$

$$(W_\delta f)(x) = f\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (\delta \in R_+),$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \quad (a \in R, a \neq 0).$$

Заменяя в (1) x на $x^{1/a}$ и делая замену переменных $\lambda t^b = \tau$, имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x^{1/a}) &= x^{\sigma/a} \int_0^\infty \mathbb{H}_\eta(\lambda x t^b) t^\omega f(t) dt = \\ &= \frac{1}{b} \lambda^{-(\omega+1)/b} x^{\sigma/a-1/2} \int_0^\infty (x\tau)^{1/2} \mathbb{H}_\eta(x\tau) \tau^{(\omega+1)/b-3/2} f\left(\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{1/b}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{b} \lambda^{-(\omega+1)/b} (M_{\sigma/a-1/2} \mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2} W_\lambda N_{1/b} f)(x). \end{aligned}$$

Применяя к последнему равенству оператор N_a , получаем следующее представление обобщенного преобразования Струве (1):

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = \frac{1}{b} \lambda^{-(\omega+1)/b} (N_a M_{\sigma/a-1/2} \mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2} W_\lambda N_{1/b} f)(x) \quad (3)$$

или

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = \frac{1}{b} \lambda^{-(\omega+1)/b} (M_{\sigma-a/2} N_a \mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2} W_\lambda N_{1/b} f)(x), \quad (4)$$

если учесть операторное соотношение

$$N_a M_\zeta = M_{a\zeta} N_a.$$

Известно, что для преобразования (2) справедливо представление [16]

$$(\mathcal{H}_\eta f)(x) = 2^{-\eta-1} \sqrt{\pi} \int_0^\infty H_{2,3}^{1,1} \left[xt \left[\begin{matrix} \frac{3+\eta}{4} & \frac{\eta}{2} & 1 \\ \frac{5+\eta}{4} & \frac{\eta}{2} & 2 \end{matrix} \right] \right] f(t) dt, \quad (5)$$

где под интегралом стоит H -функция [17, § 8.3]. Тогда $\mathcal{L}_{v,r}$ -теория обобщенного преобразования (1) будет следовать из соответствующих утверждений для преобразования (5) [16, теоремы 3, 7] и представлений (3), (4) для оператора $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$.

Приведем некоторые предварительные сведения. Для функции $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ при $1 \leq \nu \leq 2$ и $v \in \mathbf{R}$ определено преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$, которое при $f \in \mathcal{L}_{v,r} \cap \mathcal{L}_{v,1}$ и $\text{Re } s = v$ совпадает с классическим преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(x) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t) dt.$$

Для двух банаховых пространств X и Y будем обозначать через $[X, Y]$ множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y .

Нам потребуется также преобразование Ханкеля, определяемое следующим равенством:

$$(\mathbf{H}_{\zeta} f)(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xt} \mathbf{J}_{\zeta}(xt) f(t) dt \quad (\zeta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \zeta > -1, x > 0).$$

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{b}(v - \operatorname{Re} \omega - 1) - \frac{3}{2}, \\ k &= \frac{a}{b}(\operatorname{Re} \omega - v + 1) - \operatorname{Re} \sigma, \\ k^* &= \frac{b}{a}(v - \operatorname{Re} \sigma - 1) + \operatorname{Re} \omega + 1 \end{aligned}$$

и для $1 < r < \infty$ $\gamma(r)$ определяется равенством

$$\gamma(r) = \max \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r'} \right] \quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \right). \quad (6)$$

Из соотношения (3) и результатов работы [16] для преобразования Струве (2) вытекают следующие утверждения, характеризующие $\mathcal{L}_{v,2}$ - и $\mathcal{L}_{v,r}$ -теории обобщенного преобразования Струве (1).

Теорема 1. Пусть $1/2 + \operatorname{Re} \eta \leq \theta < 5/2 + \operatorname{Re} \eta$, где $\operatorname{Re} \eta \geq 0$. Тогда верны следующие утверждения.

а) Преобразование $\mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda}$ является изоморфизмом $\mathcal{L}_{v,2}$ на $\mathcal{L}_{k,2}$, и при $\operatorname{Re} s = k$ его преобразование Меллина задается формулой

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} \mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(s) &= \frac{2^{-\eta-1} \sqrt{\pi}}{a} \lambda^{-(s+\sigma)/a} \times \\ &\times \mathcal{H}_{2,3}^{1,1} \left[\begin{matrix} \left(\frac{1+\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1+\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right) \\ (1+\eta, 1) \left(-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right) \end{matrix} \middle| \frac{s+\sigma}{a} \right] (\mathfrak{M}f) \left(\omega + 1 - \frac{b}{a}(s+\sigma) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Если $\theta = 1/2$ и $\theta \leq 1/2 + \operatorname{Re} \eta$ или $\theta \geq 3/2 + \operatorname{Re} \eta$ для $\operatorname{Re} s = k$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda}$ биективно отображает $\mathcal{L}_{v,2}$ на $\mathcal{L}_{k,2}$.

б) Если $f \in \mathcal{L}_{v,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{k,2}$, то справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} f(x) (\mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda} g)(x) dx = \int_0^{\infty} g(x) (\mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(x) dx. \quad (8)$$

в) Пусть $f \in \mathcal{L}_{v,2}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $h > 0$. Если $\operatorname{Re} \alpha > (1-\theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\eta; \sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(x) &= \frac{2^{-\eta-1} \sqrt{\pi}}{a} h \lambda^{-1/2} x^{\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times \\ &\times \frac{d}{dx} x^{a(\alpha+1)/h} \int_0^{\infty} H_{3,4}^{1,2} \left[\lambda x^a t^b \middle| \begin{matrix} (-\alpha, h) \left(\frac{3+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{5+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \\ \left(\frac{3+\eta}{2}, \eta, 1 \right) \left(\frac{1-\eta}{4}, \frac{\eta}{2}, 2 \right) \left(\frac{1+\eta}{4}, \frac{\eta}{2}, 2 \right) \end{matrix} \middle| (-\alpha-1, h) \right] \times \end{aligned}$$

$$\times t^{\omega-b/2} f(t) dt. \tag{9}$$

Если $\text{Re } \alpha < (1-\theta)h-1$, то

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda} f)(x) = & -\frac{2^{-\eta-1} \sqrt{\pi}}{a} h \lambda^{-1/2} x^{\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times \\ & \times \frac{d}{dx} x^{a(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{2,1} \left[\lambda x^a t^b \begin{matrix} \left(\frac{3+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{5+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) (-\alpha, h) \\ (-\alpha-1, h), \left(\frac{3+\eta}{2}, \eta, 1 \right) \left(\frac{1+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \end{matrix} \right] \times \\ & \times t^{\omega-b/2} f(t) dt. \end{aligned} \tag{10}$$

г) Если $\theta > 1/2$, то $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda} f$ задается равенством (1) для $f \in \mathcal{L}_{v,2}$.

Теорема 2. Пусть $1 < r < \infty$ и $1/2 + \text{Re } \eta \leq \theta < 5/2 + \text{Re } \eta$, где $\gamma(r)$ задается равенством (6). Тогда:

а) для всех $s \geq r$ таких, что $s' \geq \theta^{-1}$ и $1/s + 1/s' = 1$, преобразование $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda}$, определенное в $\mathcal{L}_{v,2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{v,r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v,r}, \mathcal{L}_{k,s}]$;

б) если $1 < r \leq 2$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda}$ является изоморфизмом на $\mathcal{L}_{v,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (7) для $\text{Re } s = k$ и $f \in \mathcal{L}_{v,r}$;

в) для функций $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k,s}$, где $1 < r, s < \infty$, $1/r + 1/s \geq 1$ и $\max\{\gamma(s), \gamma(r)\} \leq \theta < 5/2 + \text{Re } \eta$, справедливо равенство (8);

г) если $\theta \leq 1/2 + \text{Re } \eta$ или $\theta \geq 3/2 + \text{Re } \eta$ для $\text{Re } s = k$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda}$ является изоморфизмом на $\mathcal{L}_{v,r}$. Если мы положим $\xi = \text{Re } \eta + 1$, то

$$\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda}(\mathcal{L}_{v,r}) = (N_a M_{\sigma/a-1/2} \mathbf{H}_\xi)(\mathcal{L}_{v,r}). \tag{11}$$

Если предположение г) не выполняется, то $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda}(\mathcal{L}_{v,r})$ является подмножеством правой части (11);

д) если $f \in \mathcal{L}_{v,r}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\gamma(r) \leq \theta < 5/2 + \text{Re } \eta$ интегральное представление $\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda} f$ задается равенством (9) и (10) для $\text{Re } \alpha > (1-\theta)h-1$ и $\text{Re } \alpha < (1-\theta)h-1$ соответственно. Если $\theta > 1/2$, то справедлива формула (1).

Из представления (3) и формулы обращения для преобразования Струве [16] вытекают следующие утверждения об обратимости оператора (1) в $\mathcal{L}_{v,r}$.

Теорема 3. Пусть $1 < r < \infty$, $\gamma(r) \leq \theta$ и $1/2 + \text{Re } \eta < \theta < 5/2 + \text{Re } \eta$, $-1/2 + |\text{Re } \eta| < 0 < \min[7/2 + \text{Re } \eta, 1]$. Если $f \in \mathcal{L}_{v,r}$, то при $\text{Re } \alpha > \theta h - 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(x) = & 2^{-\eta-1} \sqrt{\pi} h a \lambda^{-5/2-(\alpha+1)/h} x^{3b/2-\omega-b(\alpha+1)/h\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times \\ & \times \frac{d}{dx} x^{b(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{2,2} \left[\lambda x^a t^b \begin{matrix} (-\alpha, h) \left(-\frac{3-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \\ \left(\frac{1+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(-\frac{3-\eta}{2}, \eta, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right] \times \\ & \times t^{3a/2-\sigma-1} (\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega, a, b, \lambda} f)(t) dt. \end{aligned}$$

Если $\text{Re } \alpha > \theta h - 1$, то

$$\begin{aligned} f(x) = & -2^{-\eta-1} \sqrt{\pi} h a \lambda^{-5/2-(\alpha+1)/h} x^{3b/2-\omega-b(\alpha+1)/h\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times \\ & \times \frac{d}{dx} x^{b(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{3,1} \left[\lambda x^a t^b \begin{matrix} (-\alpha, h) \left(-\frac{3-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \\ \left(\frac{1+\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{1-\eta}{4}, \frac{\eta}{2} \right) \left(-\frac{3-\eta}{2}, \eta, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right] \times \end{aligned}$$

$$\times t^{3\alpha/2-\sigma-1} (\mathcal{H}_{\eta, \sigma, \omega; a, b, \lambda, f})(t) dt.$$

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
2. Rooney P.G. // Canad. J. Math. 1980. Vol. 35. P. 1024.
3. Titshmarsh E.C. // Proc. London Math. Soc. 1923 Vol. 22. P. XXXIV.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 2 т. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М., 1970.
6. Hardy G.H. // Proc. London Math. Soc. 1924. Vol. 23. P. LXI.
7. Okikioulu G.O. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62 P. 477; 1970. Vol. 67. P. 583.
8. Marichev O.I., Vu Kim Tuan // Analysis and Applications '85 (Varna, 1985). Sofia, 1986. P. 418.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
10. McKellar B.H.J., Vox M.A., Love E.R. // J. Austral. Math. Soc., Ser. B. 1983. Vol. 25. P. 161.
11. Love E.R. // Res. Notes in Math. 1985. Vol. 138. P. 75.
12. Rooney P.G. // Canad. Math. Bul. 1994. Vol. 37. P. 545.
13. Rooney P.G. // Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A. 1995. Vol. 125. P. 449.
14. Heywood P., Rooney P.G. // Canad. J. Math. 1988. Vol. 40. P. 989.
15. Heywood P., Rooney P.G. // SIAM J. Math. Anal. 1994. Vol. 25. P. 450.
16. Kilbas A.A., Gromak E.V. // Integral Transforms Spec. Funct. 2002. Vol. 13. P. 259.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: В 3 т. Т. 3. Дополнительные главы. М., 1986.

Поступила в редакцию 03.12.2002.

Елена Валерьевна Громак – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.А. Килбас.

УДК 517.925

А.В. ЧИЧУРИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯМИ АБЕЛЯ

The existence map between the nonlinear differential equation of the second order and Abel equations is prove.

В работе [1] для уравнения Абеля первого рода

$$y' = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 \quad (1)$$

($a_i (i = 0, 3)$ – произвольные аналитические функции по x) была приведена процедура, сводящая это уравнение к уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} (3a_0\gamma + a_1)\gamma'' = & 5a_0\gamma'^2 + (20a_0^2\gamma^3 + 20a_0a_1\gamma^2 + (3a_0' + 6a_1^2 + 2a_0a_2))\gamma + \\ & + a_1' - 7a_0a_3 + 3a_1a_2)\gamma' - 16a_0^3\gamma^6 - 32a_0^2a_1\gamma^5 - 20a_0(a_0a_2 + a_1^2)\gamma^4 - \\ & - (2(11a_0a_1a_2 + 7a_0^2a_3 + 2a_1^3) - 2(a_0a_1' - a_0'a_1))\gamma^3 - \\ & - (2(7a_0a_1a_3 + 2a_0a_2^2 + 3a_1^2a_2) - 3(a_0a_2' - a_0'a_2))\gamma^2 - \\ & - (2(a_1a_2^2 + a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3) - 3(a_0a_3' - a_0'a_3) - \\ & - (a_1a_2' - a_1'a_2))\gamma - 2a_3(a_1a_2 - a_0a_3) + a_1a_3' - a_1'a_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Там же была отмечена актуальность исследования уравнения (2) для исследования уравнений (1). В данной работе уравнение (2) рассматривается с

точки зрения существования однопараметрических семейств решений, определяемых как общие решения для уравнений Абеля (1).

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\gamma' = c_0 \gamma^3 + c_1 \gamma^2 + c_2 \gamma + c_3, \quad (3)$$

где c_i ($i = \overline{0,3}$) – некоторые аналитические функции x . Продифференцировав (3), найдем γ'' , после чего подставим γ и γ'' в (2). Полученное после преобразований уравнение рассмотрим как полиномиальное уравнение шестой степени относительно γ и приравняем к нулю его коэффициенты. В результате получим следующую систему из семи уравнений:

$$\gamma^6: c_0^2 - 5a_0 c_0 + 4a_0^2 = 0, \quad (4)$$

$$\gamma^5: -32a_0^2 a_1 + 20a_0 a_1 c_0 - 3a_1 c_0^2 + 20a_0^2 c_1 - 5a_0 c_0 c_1 = 0, \quad (5)$$

$$\gamma^4: -20a_0 a_1^2 - 20a_0^2 a_2 + 6a_1^2 c_0 + 2a_0 a_1 c_0 + 20a_0 a_1 c_1 - 5a_1 c_0 c_1 + 5a_0 c_1^2 + 20a_0^2 c_2 + 10a_0 c_0 c_2 + 3c_0 a_1' - 3a_0(2c_1^2 + 4c_0 c_2 + c_0') = 0, \quad (6)$$

$$\gamma^3: -4a_1^3 - 22a_0 a_1 a_2 - 14a_0^2 a_3 + 3a_1 a_2 c_0 - 7a_0 a_3 c_0 + 6a_1^2 c_1 + 2a_0 a_2 c_1 + 20a_0 a_1 c_2 + 10a_0 c_1 c_2 + 20a_0^2 c_3 + 10a_0 c_0 c_3 - 2a_1 a_0' + 3c_1 a_0' + 2a_0 a_1' + c_0 a_1' - a_1(2c_1^2 + 4c_0 c_2 + c_0') - 3a_0(3c_1 c_2 + 3c_0 c_3 + c_1') = 0, \quad (7)$$

$$\gamma^2: -6a_1^2 a_2 - 4a_0 a_2^2 - 14a_0 a_1 a_3 + 3a_1 a_2 c_1 - 7a_0 a_3 c_1 + 6a_1^2 c_2 + 2a_0 a_2 c_2 + 5a_0 c_2^2 + 20a_0 a_1 c_3 + 10a_0 c_1 c_3 - 3a_1' a_2 + 3a_1' c_2 + a_1' c_1 + 3a_0 a_2' - a_1(3c_1 c_2 + 3c_0 c_3 + c_1') - 3a_0(c_2^2 + 2c_1 c_3 + c_2') = 0, \quad (8)$$

$$\gamma: -2a_1 a_2^2 - 4a_1^2 a_3 - 2a_0 a_2 a_3 + 3a_1 a_2 c_2 - 7a_0 a_3 c_2 + 6a_1^2 c_3 + 2a_0 a_2 c_3 + 7a_0 c_2 c_3 - 3a_1' a_3 + 3a_1' c_3 - a_1' a_2 + a_1' c_2 + a_1 a_2' + 3a_0 a_3' - a_1(c_2^2 + 2c_1 c_3 + c_2') - 3a_0 c_3' = 0, \quad (9)$$

$$\gamma^0: -2a_1 a_2 a_3 + 2a_0 a_3^2 + 3a_1 a_2 c_3 - 7a_0 a_3 c_3 - a_1 c_2 c_3 + 5a_0 c_3^2 - a_1' a_3 + a_1' c_3 + a_1 a_3' - a_1 c_3' = 0. \quad (10)$$

Будем решать систему (4) – (10). Из уравнения (4) находим:

- а) либо $c_0 = a_0$,
- б) либо $c_0 = 4a_0$.

Тогда из уравнения (5) имеем:

- а) либо $c_1 = a_1$, если $c_0 = a_0$,
- б) либо c_1 – произвольная функция, если $c_0 = 4a_0$.

Уравнение (6) дает:

- а) либо $c_2 = a_2$, если $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1$,
- б) либо $12a_0 c_2 = c_1^2 - 4a_1^2 + 12a_0 a_2$, (11)

если c_1 – произвольная функция и $c_0 = 4a_0$.

Уравнение (7) примет вид

$$24a_0^2 c_3 = -\frac{1}{12} c_1^3 + \frac{5}{3} a_1 c_1^2 - \frac{17}{3} a_1^2 c_1 - 3a_0 a_2 c_1 + 3(a_0 c_1' - a_0' c_1) + \frac{16}{3} a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 + 42a_0^2 a_3 + 6(a_0' a_1 - a_0 a_1'), \quad (12)$$

если c_1 – произвольная функция и обращается в тождество, если $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$. Нетрудно проверить, что система (4) – (10) имеет решение $c_i = a_i$ ($i = \overline{0,3}$). При выполнении условий $c_0 = 4a_0$, (11) и (12) уравнение (8) обращается в тождество при любом значении c_1 .

Подставим в уравнения (9), (10) величины $c_0=4a_0$, c_2 из уравнения (11) и c_3 из уравнения (12). После этого с помощью результата исключим из двух получившихся уравнений величину c_1''

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0^2} ((224a_1^3 + 1944a_0^2a_3 - 180a_1^2c_1 + 12a_1(6a_0a_2 + 5c_1^2 + 6a_0') - \\ & - 5(c_1^3 + 36a_0'c_1) - 36a_0(5a_2c_1 + 2a_1' - 5c_1')) \times \\ & \times (32a_1^3 + 216a_0^2a_3 - 36a_1^2c_1 + 12a_1(6a_0a_2 + c_1^2 + 6a_0') - \\ & - c_1(c_1^2 + 36a_0') - 36a_0(a_2c_1 + 2a_1' - c_1')) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Затем с помощью результата исключим из уравнений (12), (13) величину c_1' . В итоге получим следующее уравнение, которое связывает функции c_1 и c_3 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0^4} (a_1(c_1 - 2a_1)^2 + 36a_0^2(a_3 - c_3))(12a_1^3 - 20a_1^2c_1 + \\ & + a_1(36a_0a_2 + 5c_1^2 + 36a_0') + 36a_0(a_0(2a_3 - 5c_3) - a_1')) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Левая часть уравнения (14) представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых определяет свое значение функции c_1 . Для первого множителя находим

$$c_3 = a_3 + \frac{a_1}{36a_0^2} (c_1 - 2a_1)^2. \quad (15)$$

Подставив значение c_3 из (15) в уравнение (12), найдем условие на функцию c_1

$$\begin{aligned} c_1' = \frac{1}{36a_0} (c_1^3 - 12a_1c_1^2 + 36(a_1^2 + a_0' + a_0a_2)c_1 - 32a_1^3 - \\ - 72(a_0a_1a_2 + 3a_0^2a_3 - a_0a_1' + a_0'a_1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив значение c_1' из (16) в соотношение (12), получим соотношение (15). Подставляя (15) и (16) в (9), (10), убеждаемся, что эти соотношения обращаются в истинные тождества.

Теперь из уравнения (14) найдем второе значение функции c_3

$$c_3 = \frac{1}{180a_0^2} (12a_1^3 - 20a_1^2c_1 + a_1(36a_0a_2 + 5c_1^2 + 36a_0') + 36a_0(2a_0a_3 - a_1')). \quad (17)$$

Подставив значение c_3 из (17) в (12), найдем уравнение, которому удовлетворяет функция c_1

$$\begin{aligned} c_1' = \frac{1}{36a_0} (c_1^3 - 20a_1c_1^2 + 4(17a_1^2 + 9a_0' + 9a_0a_2)c_1 - 64a_1^3 - \\ - 72a_0^2(7a_3 - 4c_3) - 72(a_0a_1a_2 + a_0'a_1 - a_0a_1')). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив значение c_1' из (18) в (12), получим соотношение (17). Подставив (17) и (18) в (9), (10), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & (14a_1^3 + 63(3a_0^2a_3 - a_0a_1a_2 - a_0'a_1 + a_0a_1')) c_1^2 + \\ & + (504(a_0a_1^2a_2 - 3a_0^2a_1a_3 + a_0'a_1^2 - a_0a_1a_1') - 112a_1^4) c_1 + \\ & + 152a_1^5 - 468a_0a_1^3a_2 - 972a_0^2a_1a_2^2 + 2052a_0^2a_1^2a_3 - 468a_1^3a_0' - \\ & - 1620a_0a_1a_2a_0' + 972a_0^2a_0'a_3 - 972a_0^2a_1^2 + 468a_0a_1^2a_1' + 1296a_0^2a_2a_1' + \end{aligned}$$

$$+972a_0a_0'a_1' + 324(a_0^2a_1a_2' + 3a_0^3(3a_2a_3 - a_3') + a_0a_1a_0'' - a_0^2a_1'') = 0, \quad (19)$$

которое является квадратным уравнением относительно функции c_1 . Из сказанного следует

Теорема 1. Уравнение (2) имеет решение вида (3) тогда и только тогда, когда $c_0 = 4a_0$, $c_2 = a_2 + \frac{c_1^2 - 4a_1^2}{12a_0}$ и имеют место соотношения (15),

(16) или (17) – (19).

Интересным представляется случай уравнения (1), для которого инвариант Лиувилля I равен нулю. Тогда справедлива

Теорема 2. Уравнение (1) имеет решение в квадратурах, если для соответствующего уравнения (3) выполняются коэффициентные соотношения

$$c_0 = 4a_0, \quad c_2 = a_2 + \frac{c_1^2 - 4a_1^2}{12a_0}, \quad (12) \text{ и имеет место равенство}$$

$$a_0c_1' - \frac{1}{36}c_1^3 + \frac{1}{3}a_1c_1^2 - (a_1^2 + a_0a_2 + a_0')c_1 + \frac{16}{15}a_1^3 + \frac{6}{5}(a_0a_1a_2 + a_0'a_1 - a_0a_1') + \frac{42}{5}a_0^2a_3 = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Уравнение (1) будет интегрироваться в квадратурах, если инвариант Лиувилля I обращается в нуль (например, [2, с. 98]). Учитывая это и то, что

$$I = c_3c_0^2 + \frac{1}{3}(c_0c_1' - c_0'c_1 - c_0c_1c_2) + \frac{2}{27}c_1^3,$$

подставим значения $c_0=4a_0$, c_2 из (11), c_3 из (12) и получим равенство (20). При известной функции γ из соотношения [1]

$$(3a_0\gamma + a_1)z^2 + a_0\gamma^3 + a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3 - \gamma' = 0$$

найдем функцию z как корень квадратного уравнения. После этого, сложив z и γ , получим общее решение (1).

Замечание. Условие (2) шире условия интегрируемости $I=0$.

В качестве примера рассмотрим уравнение Абеля (1) вида

$$y' = -\frac{\exp(-2\sigma x)}{36\alpha}y^3 - \frac{\beta}{4}y^2 + \left(\frac{9}{4}\alpha\beta^2\exp(2\sigma x) + \sigma\right)y + \frac{3}{4}\alpha\beta\exp(2\sigma x)(11\alpha\beta^2\exp(2\sigma x) - 4\sigma), \quad (21)$$

где α, β, σ – постоянные, не равные нулю. С учетом значений коэффициентов уравнения (21) запишем уравнение (20) в виде

$$c_1' = -\alpha\exp(2\sigma x)c_1^3 - 3\alpha\beta\exp(2\sigma x)c_1^2 - \sigma c_1 + 2\alpha\beta^3\exp(2\sigma x) - \beta\sigma.$$

Последнее уравнение есть уравнение вида 1.4.1.25 [2]. Проинтегрировав его, найдем значение функции c_1

$$c_1 = \varepsilon \frac{i\sqrt{\sigma} \exp\left(\frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x)}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\exp(2\sigma x)(C - \alpha I_1)}} - \beta (\varepsilon^2 = 1, i^2 = -1, I_1 \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt, t \equiv \frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma u)}{\sigma}), \quad (22)$$

где C – произвольная постоянная. С учетом соотношения $c_0=4a_0$, (11), (12) найдем коэффициенты c_0, c_2, c_3 , например, при $\varepsilon=-1$ для соответствующего уравнения (3).

$$c_0 = -\frac{\exp(-2\sigma x)}{9\alpha}, \quad c_2 = \frac{1}{C - \alpha I_1} \left[3\alpha\sigma \exp\left(\frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x)}{\sigma}\right) + C\gamma - \alpha\sigma I_1 - \right. \\ \left. - 6\alpha\beta\sqrt{\sigma} i \exp\left(\frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x)}{2\sigma} + \sigma x\right)\sqrt{C - \alpha I_1} \right], \\ c_3 = \frac{3\alpha\beta \exp(2\sigma x)}{(C - \alpha I_1)^{3/2}} \left[3\alpha\beta\sqrt{\sigma} i \exp\left(\frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x)}{2\sigma} + \sigma x\right)(\alpha I_1 - C) + \sqrt{C - \alpha I_1} \times \right. \\ \left. \times (3\alpha\sigma \exp\left(\frac{3\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x)}{\sigma}\right) + (\sigma - 2\alpha\beta^2 \exp(2\sigma x))(\alpha I_1 - C)) \right]. \quad (23)$$

Согласно теореме 2 уравнения (3), (22), (23) интегрируются в квадратурах.

1. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. М., 1999.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

Поступила в редакцию 17.10.2002.

Александр Вячеславович Чичурин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина.

УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

О НОВЫХ ТИПАХ МАКСИМАЛЬНО НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

$\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right) + n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 9$ new types non-equivalent maximal non-integer vertices of the polytope of three-axial assignment problem, i. e. the vertices with the number of fractional components being equal $3n-2$, is researched.

Известно [1], что трехиндексная аксиальная задача о назначениях, имеющая многочисленные приложения [2, 3], является NP-полной.

Целочисленные вершины многогранника

$$M(3, n) = \left\{ x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} \geq 0 \forall (i, j, t) \in N_n^3, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1 \forall t \in N_n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall j \in N_n, \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall i \in N_n \right\},$$

где $n \geq 2, N_n = \{1, 2, \dots, n\}, N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$, порожденного условиями этой задачи, просто устроены и их общее количество равно $(n!)^2$ [4]. Сложное строение нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, естественно, создает принципиальные трудности на пути его исследования.

Изучению комбинаторных свойств многогранника $M(3, n)$ посвящено большое количество работ (см., например, [1, 4–8]). Так, в работах [1, 5] изучается граневая структура и описываются фасы (грани максимальной

размерности), а в [6–8] исследуются его нецелочисленные вершины. В частности, показано [6], что для любого числа $s \in \{4, 6, 7, \dots, 3n-2\}$ и только для него у многогранника $M(3, n)$ существуют s -нецелочисленные вершины, т. е. вершины, число дробных компонент у которых равно s .

Так как всякая вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент (см. [4]), то $(3n-2)$ -нецелочисленные вершины этого многогранника будем называть максимально нецелочисленными.

В [9] указаны три типа неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq 4$. Идентификация типов вершин проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой вершины. Две вершины многогранника $M(3, n)$ называются неэквивалентными, если одна из них не может быть переведена в другую путем перестановки ее двумерных сечений.

В настоящей работе приведено $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right) + n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 9$ новых типов неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq 7$, и исследованы их комбинаторные свойства.

Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ij}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например t , будем называть двумерным сечением ориентации (i, j) матрицы x . Двумерное сечение представляет собой обычную двухиндексную матрицу. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентаций (i, j) , (i, t) и (j, t) . Произвольную ориентацию двумерного сечения матрицы x будем обозначать (g, h) , а фиксированное двумерное сечение этой ориентации – s . Двумерное сечение ориентации (g, h) матрицы x с фиксированным индексом s будем обозначать x_{gh}^s , а число дробных компонент матрицы $x_{gh}^s - z(x_{gh}^s)$.

Согласно лемме 4 [7] имеет место утверждение: для того чтобы матрица x была максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы для ее двумерных сечений ориентации (g, h) выполнялись два условия:

$$\sum_{s=1}^n z(x_{gh}^s) = 3n - 2; \quad z(x_{gh}^s) \geq 2 \quad \forall s \in N_n, \quad (1)$$

причем среди этих неравенств имеются хотя бы два равенства. Пусть $y_{gh}^s = z(x_{gh}^s) - 1 \quad \forall s \in N_n$. Тогда система (1) принимает вид

$$\sum_{s=1}^n y_{gh}^s = 2n - 2, \quad (2)$$

и количество решений $(y_{gh}^1, y_{gh}^2, \dots, y_{gh}^n)$ уравнения (2) в положительных целых числах y_{gh}^s совпадает с числом решений системы (1). Как показано в

[10], количество таких решений равно $\binom{2n-3}{n-1}$. Однако до сих пор пока

неизвестно, существует ли матрица x для каждого такого решения, являющаяся максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$. Решение системы (1) будем записывать в виде вектора $(z_1, z_2, \dots, z_n)_{gh}$, каждая компонента которого обозначает количество дробных компонент соответствующего двумерного сечения ориентации (g, h) .

Наряду с многогранником $M(3, n)$ рассмотрим ε -возмущенный ($\varepsilon > 0$) многогранник $M_\varepsilon(3, n)$, заданный условиями

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijr}(\varepsilon) = 1 \quad \forall i \in N_{n-1}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijn}(\varepsilon) = 1 + n^2 \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + n\varepsilon \quad \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \quad \forall i \in N_{n-1}, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{njt}(\varepsilon) = 1 + (n^2 - n + 1)\varepsilon,$$

$$x_{ijr}(\varepsilon) \geq 0 \quad \forall (i, j, t) \in N_n^3.$$

Лемма [11]. Существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ многогранник $M_\varepsilon(3, n)$ является невырожденным. При этом всякая вершина $x(\varepsilon) = \|x_{ijr}(\varepsilon)\|_n$ многогранника $M_\varepsilon(3, n)$ может быть представлена в виде $\|x_{ijr}(\varepsilon)\|_n = \|x_{ijr}\|_n + \varepsilon \|\alpha_{ijr}\|_n$, где $x = \|x_{ijr}\|_n$ – вершина (возможно, вырожденная) многогранника $M(3, n)$, а ненулевые компоненты (не обязательно положительные) матрицы $\|\alpha_{ijr}\|_n$ соответствуют ненулевым компонентам вершины $x(\varepsilon)$, т. е. справедливо включение

$$R(x) = \{(i, j, t) \in N_n^3 : x_{ijr} > 0\} \subseteq R(x(\varepsilon)) = \{(i, j, t) \in N_n^3 : x_{ijr}(\varepsilon) > 0\}.$$

Множества $R(x)$ и $R(x(\varepsilon))$ совпадают, если вершина x многогранника $M(3, n)$ является невырожденной.

Теорема 1. Для любого числа $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 3$, матрица $x^r = \|x'_{ijr}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} x'_{kk1} &= \frac{1}{n-r}, \quad k = 1, \dots, n-r, \\ x'_{122} &= \frac{n-r-1}{n-r}, \quad x'_{n1n} = \frac{n-r-1}{n-r}, \quad x'_{k,k+1,k+1} = \frac{n-r-2}{n-r}, \quad k = 2, \dots, r+1 (r \geq 1), \\ x'_{n+k-r-1, n+k-r-1, k+1} &= \frac{1}{n-r}, \quad k = 2, \dots, r+1 (r \geq 1), \quad x'_{k,k+1,k} = \frac{1}{n-r}, \quad k = 2, \dots, r+2, \\ x'_{k-1,k,k} &= \frac{n-k+1}{n-r}, \quad k = r+3, \dots, n, \\ x'_{k,k+1,k} &= \frac{k-r-1}{n-r}, \quad k = r+3, \dots, n-1 (r \leq n-4), \end{aligned}$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Ранее это утверждение было известно лишь для $r=0, n-3$ [9].

Схема доказательства теоремы 1. Зафиксируем некоторое число $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 3$. Легко проверить, что $x^r \in M(3, n)$. Нетрудно убедиться, что матрица $x^r(\varepsilon) = \|x'_{ijr}(\varepsilon)\|_n$ с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} x'_{kk1}(\varepsilon) &= \frac{1}{n-r} - \frac{(n-1)(n-r+1-2k)}{2} \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n-r, \\ x'_{122}(\varepsilon) &= \frac{n-r-1}{n-r} + \left[\frac{(n-1)(n-r-1)}{2} + 1 \right] \varepsilon, \\ x'_{n1n}(\varepsilon) &= \frac{n-r-1}{n-r} + \frac{(n^2 - nr + r + 1)}{2} \varepsilon, \\ x'_{k,k+1,k+1}(\varepsilon) &= \frac{n-r-2}{n-r} + [(k-1)(n-1)(n-r-2) + k] \varepsilon, \quad k = 2, \dots, r+1 (r \geq 1), \\ x'_{n+k-r-1, n+k-r-1, k+1}(\varepsilon) &= \frac{1}{n-r} + \frac{(n-1)(n-r+2k-3)}{2} \varepsilon, \quad k = 2, \dots, r+1 (r \geq 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{k,k+1,k}^r(\varepsilon) &= \frac{1}{n-r} - \left[\frac{(2k-3)(n-1)(n-r-1)}{2} + k - 1 \right] \varepsilon, \quad k = 2, \dots, r+2, \\
 x_{k-1,k,k}^r(\varepsilon) &= \frac{n-k+1}{n-r} + \\
 &+ \left\{ \frac{(n-1)}{2} \left[(k+r-1)n - 2r^2 - (k-r-1)(2r+k-1) \right] + k - 1 \right\} \varepsilon, \\
 &\quad k = r+3, \dots, n, \\
 x_{k,k+1,k}^r(\varepsilon) &= \frac{k-r-1}{n-r} - \\
 &- \left\{ \frac{(n-1)}{2} \left[(k+r-1)n - 2r^2 - (k-r-1)(2r+k-1) \right] + k - 1 \right\} \varepsilon, \\
 &\quad k = r+3, \dots, n-1 (r \leq n-4),
 \end{aligned}$$

принадлежит многограннику $M_\varepsilon(3, n)$. Так как число ненулевых элементов матрицы $x'(\varepsilon)$ равно $3n-2$, а многогранник $M_\varepsilon(3, n)$ невырожден (см. лемму), то матрица $x'(\varepsilon)$ является его вершиной. Отсюда, учитывая равенство $R(x')=R(x'(\varepsilon))$, заключаем, что матрица x' является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Для вершины $x = \|x_{ijl}\|_n$ многогранника $M(3, n)$ введем множество

$$S(x) = \{k \in (0, 1) : \exists (i, j, l) \in N_n^3 x_{ijl} = k\}.$$

Следствие 1. Для любого числа $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 3$, максимально нецелочисленная вершина x' многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 1, обладает свойствами:

1) $S(x') = \left\{ \frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \dots, \frac{n-r-1}{n-r} \right\};$

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\left(n-r, 2, \underbrace{3, \dots, 3}_r \text{ раз}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-r-2} \text{ раз} \right)_{ij}, \left(2, 2, \underbrace{3, \dots, 3}_{n-2} \text{ раз} \right)_{il}, \left(2, \underbrace{3, \dots, 3}_{n-2} \text{ раз}, 2 \right)_{jl}.$$

Справедливы следующие три теоремы, доказательство которых проводится по той же схеме, что и теоремы 1.

Теорема 2. Для любого числа $r \in \left\{ 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\}$, $n \geq 4$, матрица $x^r = \|x_{ijl}^r\|_n$

с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned}
 x_{kk1}^r &= \frac{1}{n-r}, \quad k = 1, \dots, n-r, \quad x_{122}^r = \frac{n-r-1}{n-r}, \quad x_{nln}^r = \frac{n-r-1}{n-r}, \\
 x_{k,k+1,k}^r &= \frac{k-1}{n-r}, \quad x_{k,k+1,k+1}^r = \frac{n-r-k}{n-r}, \\
 x_{n+k-r-1, n+k-r-1, r+2}^r &= \frac{1}{n-r}, \quad k = 2, \dots, r+1,
 \end{aligned}$$

$$x_{l,l+1,l}^r = \frac{k-r-1}{n-r}, \quad k = r+2, \dots, n-1, \quad x_{k-1,k,k}^r = \frac{n-k+1}{n-r}, \quad k = r+3, \dots, n,$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Теорема 3. Для любых чисел $l \in \left\{4, \dots, n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ и $r \in \{l-1, \dots, n-l\}$, где $n \geq 2l-1$, матрица $x^{r,l} = \|x_{ij}^{r,l}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} x_{kk}^{r,l} &= \frac{1}{n-r}, \quad k=1, \dots, n-r, & x_{k-1,k,k}^{r,l} &= \frac{n-r-k+1}{n-r}, \quad k=2, \dots, l, \\ x_{k,k,k+1,k}^{r,l} &= \frac{k-1}{n-r}, \quad k=2, \dots, l-1, & x_{n-r+k,n-r+k,l}^{r,l} &= \frac{1}{n-r}, \quad k=1, \dots, l-2, \\ x_{k,k+1,k}^{r,l} &= \frac{1}{n-r}, \quad k=l, \dots, r+2, & x_{k,k+1,k+1}^{r,l} &= \frac{n-r-2}{n-r}, \quad k=l, \dots, r+1 (r+1 \geq l), \\ x_{n-r+k-1,n-r+k-1,k+1}^{r,l} &= \frac{1}{n-r}, \quad k=l, \dots, r+1 (r+1 \geq l), & x_{k-1,k,k}^{r,l} &= \frac{n-k+1}{n-r}, \quad k=r+3, \dots, n, \\ x_{k-1,k,k-1}^{r,l} &= \frac{k-r-2}{n-r}, \quad k=r+4, \dots, n, & x_{nln}^r &= \frac{n-r-1}{n-r} \end{aligned}$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Теорема 4. Для любого числа $r \in \left\{4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$, $n \geq 8$, матрица $x^r = \|x_{ij}^r\|_n$ с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} x_{kk}^r &= \frac{1}{n-r}, \quad k=1, \dots, n-r, & x_{k-1,k,k}^r &= \frac{n-k+1}{n-r}, \quad k=r+3, \dots, n, \\ x_{122}^r &= \frac{n-r-1}{n-r}, & x_{232}^r &= \frac{1}{n-r}, & x_{233}^r &= \frac{n-r-2}{n-r}, & x_{343}^r &= \frac{2}{n-r}, \\ x_{344}^r &= \frac{n-r-3}{n-r}, & x_{n-r+1,n-r+1,4}^r &= \frac{1}{n-r}, & x_{n-r+2,n-r+2,4}^r &= \frac{1}{n-r}, & x_{nln}^r &= \frac{n-r-1}{n-r}, \\ x_{k,k+1,k+1}^r &= \frac{n-r-k+2}{n-r}, \quad k=4, \dots, r+1, & x_{k,k+1,k}^r &= \frac{k-3}{n-r}, \quad k=4, \dots, r+1, \\ x_{n+k-r,n+k-r,r+2}^r &= \frac{1}{n-r}, \quad k=3, \dots, r, & x_{k,k+1,k}^r &= \frac{k-r-1}{n-r}, \quad k=r+2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Замечание. При $r=1$ вершины многогранника $M(3, n)$, указанные в теоремах 1 и 2, совпадают.

Из теорем 2–4 вытекают следующие три утверждения.

Следствие 2. Для любого числа $r \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\}$, $n \geq 4$, максимально нецелочисленная вершина x^r многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 2, обладает свойствами:

- 1) $S(x^r) = \left\{ \frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \dots, \frac{n-r-1}{n-r} \right\}$;
- 2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\left(n-r, \underbrace{2, \dots, 2}_r, r+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-r-2} \right)_{ij}, \quad \left(2, 2, \underbrace{3, \dots, 3}_{n-2} \right)_{ii}, \quad \left(2, \underbrace{3, \dots, 3}_{n-2}, 2 \right)_{jj}.$$

Следствие 3. Для любых чисел $l \in \left\{4, \dots, n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ и $r \in \{l-1, \dots, n-l\}$,

где $n \geq 2l-1$, максимально нецелочисленная вершина $x^{r,l}$ многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 3, обладает следующими свойствами:

$$1) S(x^{r,l}) = \left\{ \frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \dots, \frac{n-r-1}{n-r} \right\};$$

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\left(\underbrace{n-r, 2, \dots, 2}_{l-2 \text{ раз}}, \underbrace{l, 3, \dots, 3}_{r-l+2 \text{ раз}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-r-2 \text{ раз}} \right)_{ij}, \left(\underbrace{2, 2, 3, \dots, 3}_{n-2 \text{ раз}} \right)_{ii}, \left(\underbrace{2, 3, \dots, 3, 2}_{n-2 \text{ раз}} \right)_{ji}.$$

Следствие 4. Для любого числа $r \in \left\{4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$, $n \geq 8$, максимально нецелочисленная вершина x^r многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 4, обладает свойствами:

$$1) S(x^r) = \left\{ \frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \dots, \frac{n-r-1}{n-r} \right\};$$

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\left(n-r, 2, 2, 4, \underbrace{2, \dots, 2}_{r-3 \text{ раз}}, \underbrace{r, 2, \dots, 2}_{n-r-2 \text{ раз}} \right)_{ij}, \left(\underbrace{2, 2, 3, \dots, 3}_{n-2 \text{ раз}} \right)_{ii}, \left(\underbrace{2, 3, \dots, 3, 2}_{n-2 \text{ раз}} \right)_{ji}.$$

Из теорем 1–4 с учетом замечания получаем

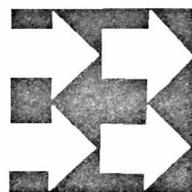
Следствие 5. Количество типов неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, указанных в теоремах 1–4, выражается формулой

$$\sigma(n) = \begin{cases} n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 4, & \text{если } n = 4, 5, 6, \\ \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3 \right) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 \right) + n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 7, & \text{если } n \geq 7. \end{cases}$$

1. Balas E., Saltzman M. J. // Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 23. № 3. P. 201.
2. Poore A. B. // Computation Optimization and Applications. 1994. Vol. 3. P. 27.
3. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglio S. // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 22. P. 1.
4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Gwan G., Qi L. // Australasian J. Combinatorics. 1992. Vol. 6. P. 67.
6. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59.
7. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Дискрет. математика. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
8. Кравцов В.М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 87.
9. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 84.
10. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.
11. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М., 1982.

Поступила в редакцию 21.11.2002.

Виктор Михайлович Кравцов – ведущий специалист Проматомнадзора МЧС Республики Беларусь.



УДК 517.977

Н.Н. КОВАЛЕНКО

СИНТЕЗ ПОЗИЦИОННОГО РЕШЕНИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ РЕЛЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

In this article an optimal control problem with bang-bang controller is discussed. Taking into account the specific structure of the bang-bang control we provide the algorithm for feedback control synthesis.

Теория оптимального управления возникла из инженерных исследований по созданию оптимальных автоматических систем [1]. Различают два принципа управления: по разомкнутому контуру (программное управление) и по замкнутому (в частности, управление типа обратной связи). В системах автоматического управления наибольшее распространение получили обратные связи. Построение эффективных управлений типа обратной связи сопряжено с большими трудностями. По этой причине до сих пор не решена классическая проблема синтеза оптимальных систем. В данной работе описан метод построения позиционных решений с помощью конструктивной теории [2].

1. В классе релейных управлений [3] рассмотрим задачу

$$c'x(t^*) \rightarrow \max_{u,p}, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, Gx(t^*) = g, u(\cdot) \in U_p, p \in N. \quad (1)$$

Поскольку для выработки сколь-нибудь эффективного управления динамической системой высокого порядка используются вычислительные устройства, то будем считать, что процесс управления осуществляется следующим образом. Вычислительное устройство, получив в моменты $s \in T(0) = \{0, \theta, \dots, t^* - \theta\}$, $\theta = t^*/N$, информацию о текущем состоянии $x^*(s)$ динамической системы, вычисляет для позиции $(s, x^*(s))$ за время $h_s = h_s(s, x^*(s))$ программное управление $u(t|s, x^*(s))$, $t \geq s$, и, начиная с момента $s + h_s$, подает его на вход динамической системы. Если $h_s < 0$, то управление происходит в режиме реального времени.

С целью определения позиционного решения задачи (1) погрузим ее в семейство задач

$$c'x(t^*) \rightarrow \max_{u,p}, \dot{x} = Ax + bu, x(s) = \zeta, Gx(t^*) = g, u(\cdot) \in U_p, p \in N, \quad (2)$$

зависящее от скаляра $s \in T(0)$ и n -вектора ζ . Пусть $u^0(t|s, \zeta)$, $t \in T_s = [s, t^*]$, – оптимальное программное управление задачи (2) для позиции (s, ζ) , которое

однозначно строится [3] по оптимальному начальному значению управления $u_0^0(s|s, \zeta)$ и вектору управляющих параметров $\tau^0(s, \zeta)$; $X(s)$ – множество состояний ζ , для которых задача (2) имеет решение. Функция

$$u^0(s, \zeta) = u_0^0(s|s, \zeta), \quad \zeta \in X(s), \quad s \in T(\theta), \quad (3)$$

называется оптимальным управлением типа обратной связи задачи (1). Будем считать, что поведение физического прототипа математической модели (1) описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu + w, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где w – совокупность членов, отражающих неточности математического моделирования и неизвестные возмущения. Замкнем систему (4) обратной связью (3):

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x) + w, \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

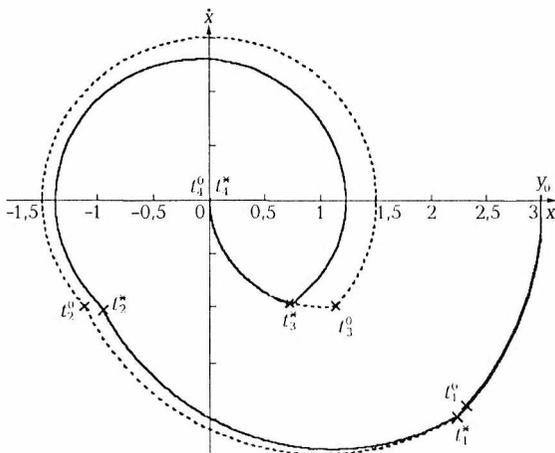
Под траекторией системы (5) будем понимать решение уравнения $\dot{x} = Ax + bu(t) + w$, $x(0) = x_0$, с управлением $u(t) = u^0(k\theta, x(k\theta))$, $t \in [k\theta, (k+1)\theta]$, $k = 0, N-1$.

Рассмотрим некоторый конкретный процесс управления, по ходу которого реализуется возмущение $w^*(t)$, $t \in T$. Оно породит в (5) траекторию $x^*(t)$, $t \in T$, удовлетворяющую тождеству $\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + bu^0(t, x^*(t)) + w^*(t)$, $t \in T$. Очевидно, в процессе управления обратная связь (3) используется лишь частично, нужны значения ее реализации $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T$, вдоль непрерывной кривой $x^*(t)$, $t \in T$. При этом достаточно в каждой текущей позиции $(k\theta, x^*(k\theta))$ уметь вычислять $u^*(t) = u^0(t|k\theta, x^*(k\theta))$, $t \geq k\theta$, в режиме реального времени. Устройство, способное выполнять эту работу, назовем оптимальным регулятором. Таким образом, проблема синтеза оптимальной обратной связи свелась к построению алгоритма работы оптимального регулятора.

2. Оптимальный регулятор начинает работу в момент $t=0$, подавая на вход динамической системы сигнал $u^{**}(t) = u^0(t|0, x_0)$, $t \geq 0$, где $u^0(t|0, x_0)$, $t \in T$, – оптимальное программное управление для позиции $(0, x_0)$, подсчитанное до начала процесса управления [3]. В момент времени $t=0$ оптимальный регулятор получает информацию о $x^*(0)$. Он строит оптимальное программное управление $u^0(t|0, x^*(0))$, $t \in T_0$, и с момента $\theta + h$, $(\theta, x^*(0))$ подает на вход динамической системы управление $u^{**}(t) = u^0(t|\theta, x^*(0))$, $t \geq \theta + h$, $(\theta, x^*(0))$, где $h_s(\theta, x^*(0))$ – время вычисления управления $u^0(t|\theta, x^*(0))$, $t \in T_0$. Эта операция повторяется в моменты $t=2\theta, 3\theta \dots t^* - \theta$. Быстрое вычисление управления $u^0(t|\theta, x^*(0))$, $t \in T_0$, осуществляется методом [3]. Состояние $x^*(k\theta)$ в силу малости θ и ограниченности $w^*(t)$, $t \in T$, мало отличается от состояния $x^0(k\theta)$, в которое перешла бы система из $x^*((k-1)\theta)$ при отсутствии возмущений. Поэтому для вычисления $u^0(t|k\theta, x^*(k\theta))$, $t \in T_{k\theta}$, достаточно применить процедуру доводки [3], используя в качестве начального приближения результаты для предыдущего момента $t=(k-1)\theta$. Управление $u^{**}(t)$, $t \in T$, вырабатываемое оптимальным регулятором, может отличаться от идеальной реализации $u^*(t)$, $t \in T$, лишь в окрестности точек переключения, потому порождаемые ими траектории динамической системы будут почти неразличимы.

3. Алгоритм проиллюстрируем на примере [3], считая, что поведение физического прототипа модели [3] описывается уравнением

$$\ddot{y} = -y + u + w, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{y}(12) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(12) = 0, \quad w(t) = 0,1 \sin t, \\ t \in [0, t_* = 7,4], \quad w(t) = 0, \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (6)$$



Фазовые траектории замкнутой системы (6)

Минимизируется значение

$$\int_0^T u(t) dt.$$

На рисунке штриховая линия соответствует случаю $w(t)=0, t \in T$, сплошная – случаю с возмущением. Точками $t_1^0=0,723, t_2^0=2,419, t_3^0=7,007, t_4^0=8,702, t_1^*=0,737, t_2^*=2,375, t_3^*=7,269, t_4^*=8,544$ отмечены моменты переключения соответствующих управлений, $u^0(0)=u^{**}(0)=0$.

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1963.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Покатаев А.В. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. Мн., 1998. Ч. 5.
3. Коваленок Н.Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1. С. 96.

Поступила в редакцию 11.04.2002.

Наталья Николаевна Коваленок – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 517.926.4

Т.Г. КРАСОВСКАЯ

О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ БОЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The sharp estimate of the number of different lower and higher Bohl exponents of linear diagonal differential systems is obtained.

Рассмотрим линейную диагональную систему

$$\dot{x} = A(t)x = \text{diag} [a_1(t), \dots, a_n(t)]x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. Нижняя функция Боля ненулевого решения $x(\cdot, \alpha), x(0, \alpha) = \alpha$, системы (1) определяется равенством $\underline{\beta}_A(\alpha) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (t-\tau)^{-1} \ln \|\|x(t, \alpha)\|/\|x(\tau, \alpha)\|\|$ (для нижней функции Боля $\underline{\beta}_A$ верхний предел заменяется нижним). В работе [1] получена точная оценка для числа различных элементов множества значений функций $\underline{\beta}_A(\alpha)$ и $\overline{\beta}_A(\alpha)$ диагональной системы (1) с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. В данной статье показано, что эта оценка достигается уже на системах с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами.

Теорема. Для любых натуральных n и $m \leq 2^n - 1$ существует n -мерная линейная диагональная дифференциальная система (1) с бесконечно дифференцируемой ограниченной матрицей коэффициентов, все производные ко-

торой ограничены (своим для каждой из них числом), функция $\beta_{\underline{A}}(\alpha)$ которой принимает ровно m различных значений.

Доказательство. I. Пусть $m=2^n-1$. Обозначим через \mathfrak{N}_n совокупность всех непустых подмножеств множества $N_n=\{1, \dots, n\}$; $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i \in N_n$, двоичную запись числа $l \in N_{2^n-1}$, дополненную спереди нулями до n знаков; $\alpha_l=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in R^n \setminus \{0\}$; $B=\{b_i: b_i \in R, i=1, 2^n-1\}$, – множество, для элементов которого выполняются неравенства $b_{i+1} > b_i, \forall i \in N_{2^n-2}$. Зададим

биекцию $\varphi: N_{2^n-1} \rightarrow \mathfrak{N}_n, \varphi(l)=\{i \in N_n: \varepsilon_i=1\}$. На оси времени t выберем точки $\delta_k, k \in Z_0: \delta_0=0, \delta_{k+1}-\delta_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty, 2\delta_{2k-1}-\delta_{2k-2}=\delta_{2k}, \forall k \in N$, и определим функцию $\mu(i, k, n), k \in N, i=1, n$, равную 1 при $i \in \varphi(l)$ и равную 0 при $i \notin \varphi(l), l \in N_{2^n-2}, k \equiv l \pmod{2^n-2}$, функцию $e(t, a, b)$, равную 0 при $t \in [0, a]$, равную $\exp[-(t-a)^2 \exp[-(t-b)^2]]$ при $t \in (a, b)$ и равную 1 при $t \in (b; +\infty)$ из класса $C_{[0;+\infty)}^\infty$ и имеющую ограниченные производные любого порядка, а также

функции $\Phi_{1,i,k,n}(t)=b_i \mu(i, k, n) - b_{2^n-1}(\mu(i, k, n)-1), \Phi_{3,i,k,n}(t)=\Phi_{1,i,k+1,n}(t), \Phi_{2,i,k,n}(t)=(b_{2^n-1}-b_i)\mu(i, k, n)+b_{2^n-1}, t \in [0; +\infty)$, из того же класса.

Коэффициенты искомой диагональной системы (1) имеют вид

$$a_i(t) = \Phi_{1,i,1,n}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [\Phi_{j+1,i,k,n}(t) - \Phi_{j,i,k,n}(t)] e(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2}), \quad (2)$$

$(0, \delta_1/2) \ni \Delta - \text{fix}$. Так как при $\forall t \in (0; +\infty)$ в состав бесконечной суммы входит не более двух ненулевых слагаемых, то функции $a_i(t) \in C_{[0;+\infty)}^\infty$. Из определения (2) этих функций следует также их ограниченность: $|a_i(t)| \leq 2b_{2^n-1} - b_1$. Учи-

тывая, что $\Phi_{j,i,k,n}(t) = \text{const}, j = \overline{1, 2}$, производные n -го порядка функций $a_i(t)$ имеют

$$\text{вид } a_i^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [\Phi_{j+1,i,k,n}(t) - \Phi_{j,i,k,n}(t)] e^{(n)}(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2}),$$

$t \in (0; +\infty)$. В силу ограниченности производной $e^{(n)}(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2})$ получаем ограниченность на $[0; +\infty)$ производных любого порядка коэффициентов построенной системы.

Покажем, что для функции $\beta_{\underline{A}}$ построенной системы (1) верно равенство $\beta_{\underline{A}}(\alpha_l) = b_l, \forall l \in N_{2^n-1}$. Для $l < 2^n - 1$ вычислим величину $\chi_l(t, \tau, \alpha_l) = (t - \tau)^{-1} \ln \left[\frac{\|x(t, \alpha_l)\|_\infty}{\|x(\tau, \alpha_l)\|_\infty} \right]$ при $t, \tau \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1})$, где $\|x\|_\infty = \max_{i \in N_n} |x_i|$ –

кубическая норма вектора. Для решения $x(t, \alpha_l)$ построенной системы (1) в силу задания функций $a_i(t)$ справедливо равенство [1]: $x_i(\delta_{2k-2}) = \varepsilon_i \exp\{b_{2^n-1} \delta_{2k-2}\}, \forall i = \overline{1, n}, k \in N$. Из него и с учетом того, что в силу определения биекции φ числа $\varepsilon_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i \in \varphi(l)$, а также из задания функций $a_i(t)$, которые на промежутках $[\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1} - \Delta), [\delta_{2k-1} - \Delta, \delta_{2k-1}), k \equiv l \pmod{2^n-2}$, при $i \in \varphi(l)$ имеют вид $a_i(t) = b_i$ и $a_i(t) = b_l + 2(b_{2^n-1} - b_l)e(t, \delta_{2k-1} - \Delta,$

$\delta_{2k-1})$ соответственно, получаем следующие выражения для нормы решения: $\|x(t, \alpha_l)\|_\infty = \exp\{b_{2^n-1} \delta_{2k-2} + b_l(t - \delta_{2k-2})\}$ при $t \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1} - \Delta), \|x(t, \alpha_l)\|_\infty =$

$$= \exp[b_{2^{n-1}} \delta_{2k-2} + [b_l + 2(b_{2^{n-1}} - b_l)e(t, \delta_{2k-1} - \Delta, \delta_{2k-1})](t - \delta_{2k-2})], \quad t \in [\delta_{2k-1} - \Delta, \delta_{2k-1}].$$

Следовательно, если $k \equiv l \pmod{2^n - 2}$, получаем

$$\chi(t, \tau, \alpha_l) \geq b_l, \quad t \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1}]. \quad (3)$$

В силу определения (2) коэффициентов системы (1), так же как и в [1], получаем на рассматриваемых промежутках и оценку

$$\chi_\lambda(t, \tau, \alpha_l) > b_l, \quad k \equiv q \pmod{2^n - 2}, \quad q \in N_{2^{n-1}}, \quad q \neq l. \quad (4)$$

Для $t, \tau \in [\delta_{2k-1}, \delta_{2k}]$, $k \in N$, аналогично получаем неравенство

$$\chi_\lambda(t, \tau, \alpha_l) > b_l. \quad (5)$$

В [1] доказано, что $\beta_A(\alpha) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \rightarrow +\infty \\ t, \tau \in [\delta_k, \delta_{k+1}]}} \chi(t, \tau, \alpha)$. Тогда, учитывая оценки

(3) – (5), получаем требуемое равенство $\beta_A(\alpha_l) = b_l$. Равенство $\beta_A(\alpha_{2^{n-1}}) = b_{2^{n-1}}$ доказывается так же, как в [1]. Вследствие доказанной в [1] оценки для мощности множества значений функции β_A она принимает ровно $2^n - 1$ различных значений.

II. Случай $m < 2^n - 1$ рассматривается, как и в [1].

Замечание. Аналогичная теорема верна и для функции $\bar{\beta}_A$.

1. Колюх А. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1992. № 1. С. 44.

Поступила в редакцию 26.11.2002.

Татьяна Геннадьевна Красовская – аспирант кафедры высшей математики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент С.А. Мазаник.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, И.А. КУЧМИЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

The method for the numerical solution of the initial value problem for the systems of ordinary differential equations is proposed. It is based on Fourier series expansion of a part of the equivalent integral equation, and has the additional parameter besides the discretization step for controlling its accuracy of approximation.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в векторном виде:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(t) = y, \quad t \leq x \leq t + \tau. \quad (1)$$

В качестве основы для построения методов численного решения задачи (1) будем использовать интегральное соотношение

$$u(t + \tau\beta) = y + \tau \int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (2)$$

где $\varphi(\alpha) = f(t + \alpha\tau, u(t + \alpha\tau))$, $\beta = \frac{x-t}{\tau}$, $0 \leq \beta \leq 1$.

В работе [1] предлагается способ аппроксимации (2), основанный на разложении в ряд Фурье подынтегрального выражения в правой части (2). Здесь же мы рассмотрим подход, использующий разложение в ряд всего интеграла.

Выберем какую-либо полную ортонормированную в $L_2[0, 1]$ систему функций $e_j(\beta)$, $j=0, 1, \dots$. Предполагая принадлежность интеграла с переменным верхним пределом в (2) классу L_2 , можем записать следующее его представление, используя указанную систему:

$$\int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha = \sum_{j=0}^p c_j e_j(\beta) + r_p(\beta), \quad (3)$$

$$c_j = \int_0^1 \left(e_j(\beta) \int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha \right) d\beta. \quad (4)$$

Остаток $r_p(\beta)$ в (3) при увеличении p стремится к нулю по норме L_2 , поэтому, взяв в качестве приближения $\int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha$ лишь конечное число первых $p+1$ членов разложения (3), при достаточно больших p мы вправе рассчитывать на хорошее качество такого приближения.

Непосредственное использование формулы (4) для нахождения коэффициентов разложения c_j представляется затруднительным. Укажем способ приближенного их вычисления, использующий значения функции $\varphi(\alpha)$ на некотором конечном наборе точек.

Поменяв в (4) порядок интегрирования (в предположении выполнения условий, при которых это возможно), будем иметь

$$c_j = \int_0^1 \left(e_j(\beta) \int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha \right) d\beta = \int_0^1 \varphi(\alpha) E_j(\alpha) d\alpha, \quad (5)$$

$$E_j(\alpha) = \int_\alpha^1 e_j(\beta) d\beta. \quad (6)$$

Допустим, интегралы в (6) могут быть взяты точно. Тогда для приближенного вычисления определенных интегралов из (5) можно использовать некоторую квадратурную формулу с узлами α_k и весами A_k , $k = \overline{0, m}$. С учетом (2), (3) получим

$$u(t + \tau\beta) \approx y + \tau \sum_{j=0}^p \tilde{c}_j e_j(\beta), \quad (7)$$

$$\tilde{c}_j = \sum_{k=0}^m A_k E_j(\alpha_k) f(t + \alpha_k \tau, u(t + \alpha_k \tau)). \quad (8)$$

Положим в (7) последовательно $\beta = \alpha_0, \dots, \alpha_m$. Обозначим через $y_i \approx u(t + \alpha_i \tau)$ значения, для которых (7) выполняется точно. Тогда с учетом (8) имеем следующую систему $m+1$ уравнений для нахождения y_i :

$$y_i = y + \tau \sum_{j=0}^p \left(\sum_{k=0}^m A_k E_j(\alpha_k) f(t + \alpha_k \tau, y_i) \right) e_j(\alpha_i), \quad i = \overline{0, m}. \quad (9)$$

Как и в [1], запишем систему (9) в матричной форме. Для этого введем обозначения:

$$\begin{aligned} Y &= [y_0, \dots, y_m], \quad Y_0 = [y, \dots, y], \\ F(Y) &= [f(t + \alpha_0 \tau, y_0), \dots, f(t + \alpha_m \tau, y_m)], \\ S &= [A_k E_j(\alpha_k)]_{k,j}, \quad G = [e_j(\alpha_i)]_{j,i}, \end{aligned} \quad (10)$$

$i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, p}$, $k = \overline{0, m}$. Здесь Y , Y_0 , $F(Y)$ – векторы-строки длины m в случае одномерной задачи (1) и матрицы размерности $n \times m$ в случае, если

задача (1) состоит из n уравнений; S и G – матрицы размерности $m \times p$ и $p \times m$ соответственно.

С использованием обозначений (10) система (9) переписывается в виде

$$Y = Y_0 + \tau F(Y)SG. \quad (11)$$

Для практического использования алгоритма (11) необходимо определить значения параметров $e_j(\alpha)$, α_k и A_k . В развитие [2] приведем конкретный пример их задания, а также укажем получающиеся при этом формулы для матриц S и G из (11).

В качестве $e_j(\alpha)$ будем использовать следующую полную ортонормированную в $L_2[-1, 1]$ тригонометрическую систему функций ([3, с. 170]):

$$1/\sqrt{2}, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots \quad (12)$$

Продолжим интеграл в (2) с отрезка $[0, 1]$ четным образом на отрезок $[-1, 0]$. Тогда в разложении его в ряд Фурье по системе (12) коэффициенты при синусах будут равны нулю, а коэффициенты при косинусах и $1/\sqrt{2}$ получатся путем удвоения соответствующих определенных интегралов по отрезку $[0, 1]$. Для их приближенного вычисления будем использовать составную квадратурную формулу трапеций (что позволит находить значения y_i в равноотстоящих узлах). Значения параметров алгоритма (11) определяются при этом следующим образом:

$$e_j(\alpha) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & j = 0 \\ \cos j\pi\alpha, & j > 0 \end{cases}, \quad A_k = \begin{cases} \frac{1}{m}, & k = 0 \vee k = m \\ \frac{2}{m}, & k = \overline{1, m-1} \end{cases}, \quad \alpha_k = \frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в формулы из (10) для матриц S и G , будем иметь

$$SG = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}, & k = 0 \vee k = m \\ \frac{2}{m}, & k = \overline{1, m-1} \end{bmatrix}_{k,j} \begin{bmatrix} \int_{x_k}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} d\alpha, & j = 0 \\ \int_{\alpha_i}^1 \cos j\pi\alpha d\alpha, & j > 0 \end{bmatrix}_{k,j} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, & j = 0 \\ \cos \frac{ij\pi}{m}, & j > 0 \end{bmatrix}_{j,i} = \\ = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1, & k = 0 \vee k = m \\ 2, & k = \overline{1, m-1} \end{bmatrix}_{k,j} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k}{m}, & j = 0 \\ -\frac{1}{j\pi} \sin \frac{jk\pi}{m}, & j > 0 \end{bmatrix}_{k,j} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & j = 0 \\ \cos \frac{ij\pi}{m}, & j > 0 \end{bmatrix}_{j,i}, \quad (14)$$

$$i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Решая систему (11) с параметрами (14), получаем набор приближений к точному решению задачи (1) в равноотстоящих узлах $t + \frac{k}{m}\tau$, $k = \overline{0, m}$.

Для численной реализации (11) необходимо выбрать какой-либо способ решения нелинейной системы, например метод Ньютона или метод простых итераций. Нами использовался последний, причем в качестве начального приближения бралась константа y . Отметим, что начальное приближение может быть и более сложным, например результат работы какого-либо пошагового метода на равномерной сетке с шагом τ/m .

Был проведен ряд вычислительных экспериментов, в которых описанный метод использовался для решения различных задач вида (1). Результа-

ты не уступали соответствующим результатам, полученным с помощью методов рядов и Рунге – Кутты 1–4-го порядков, а в некоторых случаях и превосходили их. В частности, при решении задач, осложненных проблемой «подвисания», использование классических пошаговых методов не позволяло добиться удовлетворительного качества приближения, поскольку уменьшение шага дискретизации вело к «подвисанию» медленной компоненты решения, а его увеличение ухудшало уровень приближения быстрой. В случае использования нашего метода основными рычагами для достижения желаемой точности служили параметры m и p . При их увеличении качество приближения быстрой компоненты, как и следовало ожидать, улучшалось; медленная же компонента при этом не «подвисала».

1. Бобков В. В., Кучмиенко И. А., Фалейчик Б. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 68.

2. Кучмиенко И. А. // Сборник статей VII Республиканской конференции студентов и аспирантов Беларуси «НИРС-2002». Витебск, 2002. С. 46.

3. Антонец А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 05.12.2002.

Владимир Васильевич Бобков – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики.

Игорь Александрович Кучмиенко – студент 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 517.977

Т. Г. ХОМИЦКАЯ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Realization of the numerical method for the problem of minimizing the convex quadratic function on terminal conditions of the linear system is described. Results are illustrated by the example.

В классе кусочно-непрерывных управляющих функций $u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$ (допустимые управления) рассмотрим задачу минимизации выпуклой квадратичной функции на терминальных состояниях линейной системы [1, 2]:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \varphi(x^0(t^*)) = \min \varphi(x(t^*)), \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(x) = c'x + x'Dx/2$, $c, x \in R^n$, $u \in R$, $D \in R^{n \times n}$, $D > 0$, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции.

Допустимые управления $u^0(t)$, $t \in T$, и траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, назовем оптимальными, если на них критерий качества задачи (1) достигает минимума: $\varphi(x^0(t^*)) = \min \varphi(x(t^*))$.

Введем выпуклое множество $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi(x) \leq \alpha\}$ и запишем задачу (1) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ x(t^*) &\in X^\alpha, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (2) проведем в два этапа. Сначала решим кусочно-линейную аппроксимацию задачи в классе дискретных управлений, затем,

применив процедуру доводки к полученному решению, построим решение исходной задачи.

Первый этап. Заменим множество X^α на его кусочно-линейную аппроксимацию $X_m^\alpha = \{x \in R^n : g_{*i}(\alpha) \leq h'_i x \leq g_i^*(\alpha), i \in I\}$. Здесь $\{h_i, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\}$, $m \geq n+1$, – семейство единичных n -векторов, выпуклая оболочка которых является телом в R^n ; $g_i^*(\alpha) = \max_{x \in X^\alpha} h'_i x$, $i \in I$; $g_{*i}(\alpha) = \min_{x \in X^\alpha} h'_i x$, $i \in I$.

Введем кусочно-линейную аппроксимацию задачи (2)

$$\alpha_m^0 = \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (3)$$

$$x(t_*) = x_0, \quad g_*(\alpha) \leq Hx(t^*) \leq g^*(\alpha), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T,$$

где $H' = (h_i, i \in I)$, $g_*(\alpha) = g_{*i}(\alpha)$, $i \in I$, $g^*(\alpha) = g_i^*(\alpha)$, $i \in I$.

Для решения нелинейной задачи оптимального управления (3) введем вспомогательную задачу:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \quad (4)$$

$$g_*(\alpha) \leq Hx(t^*) \leq g^*(\alpha), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T \quad (\beta \in R),$$

где $l = x^* - x_0$, x^* – такая точка, что $\varphi^* = \varphi(x^*) = \min \varphi(x)$, $x \in R^n$.

При фиксированном значении α задача (4) – линейная задача оптимального управления, для которой разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ.

Лемма 1. $\beta(\alpha)$, $\alpha \in R$, – непрерывная монотонно убывающая функция, для которой $\beta(\varphi^*) = \beta^*$, $\beta(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Оптимальное значение α_m^0 критерия качества задачи (3) равно минимальному корню уравнения $\beta(\alpha) = 0$.

Схема решения задачи (3). Решаем задачу (4) с $\alpha = \varphi^*$. Пусть $\beta^* = \beta(\varphi^*)$ – значение критерия качества задачи (4). Если $\beta^* < 0$, то x^* – внутренняя точка множества достижимости $Q(x_0)$ системы (1), задача (3) не экстремальная. Если $\beta^* = 0$, то $\alpha = \varphi^*$ – решение задачи (3): $\alpha_m^0 = \varphi^*$. При $\beta^* > 0$ методами [3] находим минимальный корень уравнения $\beta(\alpha) = 0$ и переходим к второму этапу.

Второй этап. Процедура доводки [2] заключается в решении системы алгебраических уравнений

$$(c + Dx(t^*))' F(t^*, t_j) b(t_j) = 0, \quad j = \overline{1, s^*}, \quad (5)$$

относительно неизвестных

$$t_j, \quad j = \overline{1, s^*}. \quad (6)$$

Здесь t_j , $j = \overline{1, s^*}$, – нули коуправления $\Delta(t) = \psi'(t)b(t)$, $t \in T$, $\dot{\psi} = -A'(t)\psi$, $\psi(t^*) = c + Dx(t^*)$; $x(t^*)$ – значение в точке t^* траектории $x(t)$, $t \in T$, соответствующей управлению $u(t) = (-1)^{j+1} \gamma$, $t \in [t_j, t_{j+1}[$, $j = \overline{0, s^*}$, $t_0 = t_*$, $t_{s^*+1} = t^*$, где $\gamma = \text{sign } \Delta(t_*+0)$.

При $\dot{\Delta}(t_j) \neq 0$, $j = \overline{1, s^*}$, матрица Якоби системы (5) неособая. Поэтому (5) можно решить методом Ньютона. Необходимое для сходимости метода Ньютона достаточно хорошее начальное приближение элементов (6) получаем после первого этапа, решив задачу (3) с малым периодом квантования h .

Проиллюстрируем метод на примере

$$\alpha^0 = \varphi(x^0(10)) = \min \varphi(x(10)); \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 10, \\ x_2(0) = -10, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 10], \quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2. \quad (7)$$

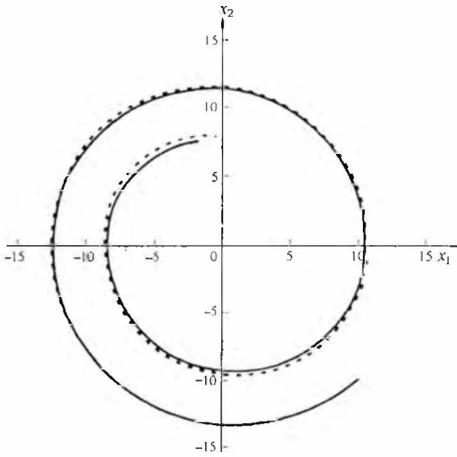


Рис. 1. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=3$

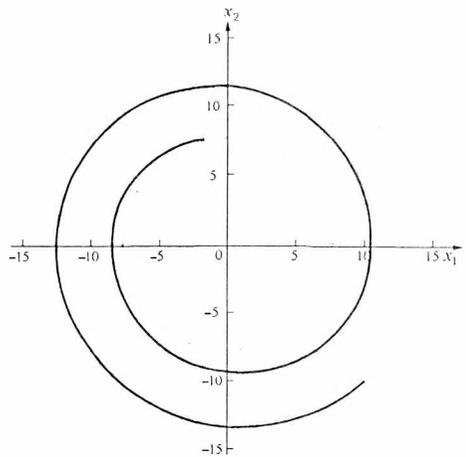


Рис. 2. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=12$

Решив кусочно-линейную аппроксимацию задачи (7) в классе дискретных управлений с $h=0,1$, получили $\alpha_{m=3}^0=7,913822$; $\alpha_{m=12}^0=7,648144$ и определили нули коуправления $\{2,617; 5,712; 8,9\}_{m=3}$; $\{2,358; 5,499; 8,641\}_{m=12}$. После процедуры доводки $\alpha^0=7,64635$, нули коуправления – $\{2,376; 5,518; 8,659\}$. Результаты показаны на рисунках: рис. 1 соответствует $m=3$ (пунктирной линией изображена фазовая траектория кусочно-линейной аппроксимации задачи (7), сплошной – оптимальная траектория задачи (7)); рис. 2 соответствует $m=12$ (траектории практически совпали).

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова А. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. Ч. 4. Выпуклые задачи. Мн., 1987.

3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию 06.12.2002.

Татьяна Георгиевна Хомицкая – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 519.24

С.Л. ЧЕХМЕНОК

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТРОГО СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

In this article an algorithm of calculating a density and a function of distribution for symmetric stable random values is constructed.

Пусть задано некоторое фиксированное значение $x \in R$, в котором нужно вычислить значение плотности и функции распределения вероятностей

строго симметричной устойчивой случайной величины ξ . Из [1] известно, что плотность симметричного устойчивого закона задается равенством

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-ct^\alpha} dt, \quad (1)$$

где α и c – параметры устойчивого распределения, $\alpha \in (0; 2]$, $c > 0$. Построим алгоритм вычисления плотности распределения в заданной точке x . Поскольку $p(-x) = p(x)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $x \geq 0$. Зафиксируем значение $x \in R$, $x \geq 0$, в котором требуется вычислить значение плотности распределения устойчивого закона. Представим первый сомножитель под интегралом (1) в виде $\cos(xt) = 1 + \cos(xt) - 1$, тогда $p(x) = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(xt)) e^{-t} f(t) dt, \\ S_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt, \quad (2)$$

а $f(t) = \frac{1}{\pi} e^{t - ct^\alpha}$. Для вычисления интегралов S_1 и S_2 воспользуемся квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ), которые, согласно [2], строятся в виде

$$S_j = \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(t_i), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – некоторое фиксированное число, определяющее алгебраическую степень точности, A_i – некоторые коэффициенты, t_i – узлы, в которых вычисляются значения функции $f(t)$.

Рассмотрим S_1 . Для данного интеграла коэффициенты A_i , $i = \overline{1, n+1}$, вычисляются по формуле

$$A_i = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(xt)) e^{-t} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (t - t_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (t_i - t_j)} dt, \quad (4)$$

где узлы t_i , $i = \overline{1, n+1}$, являются корнями многочлена

$$\omega(t) = t^{n+1} + a_1 t^n + a_2 t^{n-1} + \dots + a_n t + a_{n+1}, \quad (5)$$

в котором коэффициенты a_i , $i = \overline{1, n+1}$, являются решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{cases} a_1 I(n) + a_2 I(n-1) + \dots + a_{n+1} I(0) = -I(n+1), \\ a_1 I(n+1) + a_2 I(n) + \dots + a_{n+1} I(1) = -I(n+2), \\ \dots \\ a_1 I(2n) + a_2 I(2n-1) + \dots + a_{n+1} I(n) = -I(2n+1), \end{cases} \quad (6)$$

где значения $I(k)$ для $k = \overline{0, 2n+1}$ задаются интегралом

$$I(k) = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(x\tau)) e^{-\tau} \tau^k d\tau.$$

Построим явную формулу для вычисления интеграла $I(k)$:

$$I(k) = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(x\tau))e^{-\tau}\tau^k d\tau = k! + \int_0^{+\infty} \cos(x\tau)e^{-\tau}\tau^k d\tau.$$

Из [4] известно, что

$$\int_0^{+\infty} e^{i\tau}e^{-\tau}\tau^k d\tau = \frac{k!}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2}}} (\cos((k+1)\arctg(x)) + i \sin((k+1)\arctg(x))).$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \cos(x\tau)e^{-\tau}\tau^k d\tau = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i\tau}e^{-\tau}\tau^k d\tau = \frac{k! \cos((k+1)\arctg(x))}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла S_1 нужно вычислить коэффициенты $A_i, i = 1, n+1$, по формуле (4), в которой $a_i, i = 1, n+1$, являются решением СЛАУ вида (6) и $t_i, i = 1, n+1$, являются корнями многочлена (5).

Рассмотрим слагаемое S_2 . Для вычисления данного интеграла воспользуемся квадратурными формулами НАСТ, которые основаны на системе ортогональных многочленов Якоби с весовой функцией e^{-t} . Для данной системы многочленов коэффициенты A_i и значения t_i для формулы (3) табулированы [3]. Следовательно, $S_2 \approx \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(t_i)$, где коэффициенты A_i и значения t_i находятся из [3] для заданного значения n .

Рассмотрим вычисление функции распределения в заданной точке x . Функция распределения может быть записана в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y)dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_0^{+\infty} \cos(yt)e^{-ct^a} dt dy.$$

Поскольку распределение является симметричным, то $F(0)=0,5$. Следовательно,

$$F(x) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^x \cos(yt)e^{-ct^a} dy dt = 0,5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^a} dt.$$

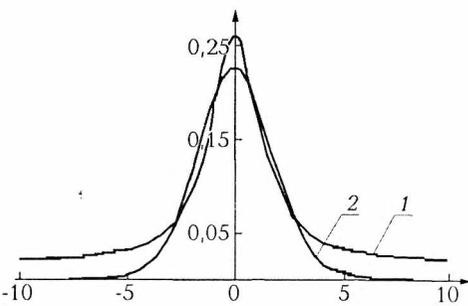


Рис. 1. Графики плотности распределения:
1 - при $\alpha=1,8; c=1,5$; 2 - при $\alpha=1,4, c=1,2$

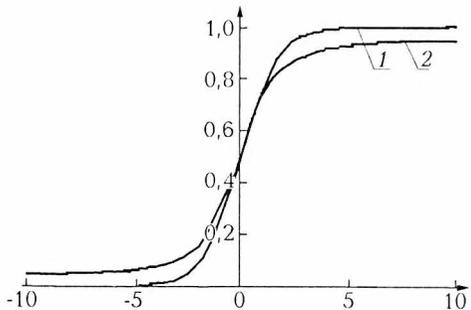


Рис. 2. Графики функции распределения:
1 - при $\alpha=1,8; c=1,0$; 2 - при $\alpha=1,1; c=1,1$

Вычислим интеграл $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^a} dt$. Представим первый сомножитель в виде $\frac{\sin(xt)}{t} = \frac{xt + \sin(xt)}{t} - x$. Тогда $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^a} dt = S_3 - xS_2$,

где $S_3 = \int_0^{\infty} \frac{xt + \sin xt}{t} e^{-t} f(t) dt$, а S_2 определяется формулой (2).

Для вычисления S_3 воспользуемся приведенным алгоритмом для S_1 , только вместо весовой функции $(1 + \cos(xt))e^{-t}$ возьмем функцию $\frac{xt + \sin xt}{t} e^{-t}$. Тогда $I(k)$ при $k \geq 1$ вычисляется по формуле

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{x\tau + \sin x\tau}{\tau} e^{-\tau} \tau^k d\tau = xk! + \frac{(k-1)! \sin((k) \arctg(x))}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}}}$$

При $k=0$ $I(0)=4\pi$. Графики плотности распределения при некоторых параметрах приведены на рис. 1, функции распределения – на рис. 2.

1. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.
2. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Приближенное вычисление интегралов. Мн., 1968.
3. Крылов В. И., Кругликова Л. Г. Справочная книга по численному интегрированию. Мн., 1967.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиноми. М., 1977.

Поступила в редакцию 10.12.2002.

Сергей Леопидович Чехменок – аспирант кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.Н. Демеш.

УДК 519.10

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Э. КОВАЛЕНКО

КРИТЕРИЙ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ЧАСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ ВИДА MINMIN MODUL

Necessary and sufficient conditions of quasi-stability of multi-objective (vector) problem of discrete optimization with Pareto principle of optimality and non-linear partial criteria are obtained. The problem is a discrete analogue of the lower semicontinuity by Hausdorff of the multi-valued mapping that establishes the choice function.

Изучению различных аспектов устойчивости скалярных и векторных задач дискретной оптимизации посвящен ряд публикаций (см., например, [1–5]). Настоящая работа продолжает начатые в [5–8] исследования условий квазиустойчивости векторных задач дискретной оптимизации в случае нелинейных частных критериев. Здесь для векторных траекторных задач с частными критериями вида MINMIN MODUL приводятся необходимые и достаточные условия того типа устойчивости, который можно интерпретировать как дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу точечно-множественного отображения, задающего принцип оптимальности Парето. Ранее подобные результаты были получены в [6–8] для векторных задач с частными критериями вида MINSUM, MINMAX и MINMAX MODUL.

Под n -критериальной траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных решений):

$$P^n(A) = \{t \in T: P^n(t, A) = \emptyset\},$$

где множество траекторий $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| > 1$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, $P^n(t, A) = \{t' \in T: f(t, A) \geq f(t', A), f(t, A) \neq f(t', A)\}$, $f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n))$, $n \geq 1$, A_i – i -я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{R}^{nm}$. Будем рассматривать случай, когда частные критерии имеют вид

$$f_i(t, A_i) = \min_{j \in N(t)} |a_{ij}| \rightarrow \min_{i \in T}, \quad i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_n: e_j \in t\}$.

Как обычно [5–8], задачу $Z^n(A)$ назовем квазиустойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon) \quad (P^n(A+B) \supseteq P^n(A)),$$

где $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm}: \|B\|_\infty < \varepsilon\}$, $\|B\|_\infty = \max\{|b_{ij}|: (i, j) \in N_n \times N_m\}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$. Для $t, t' \in T$ и $i \in N_n$, положим

$$q_i(t, t', A_i) = f_i(t, A_i) - f_i(t', A_i), \quad h_i(t, t', A_i) = -q_i(t, t' \setminus t, A_i)/2, \quad f_i(\emptyset, A_i) = \infty.$$

Лемма. Пусть траектории $t \neq t'$ таковы, что существует индекс $i \in N_n$, для которого $0 < \varphi \leq h_i(t, t', A_i)$. Тогда для всякой матрицы $B \in \mathfrak{R}(\varphi)$ выполняется неравенство $q_i(t, t', A_i + B_i) < 0$.

С траекторией $t \in P^n(A)$ сопоставим множество

$$Q^n(t, A) = \{t' \in T \setminus \{t\}: f(t, A) = f(t', A)\}.$$

Теорема. Векторная траекторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, квазиустойчива, если и только если выполняется условие

$$\forall t \in P^n(A) (Q^n(t, A) \neq \emptyset \Rightarrow \forall t' \in Q^n(t, A) \forall i \in N_n (h_i(t, t', A_i) > 0)). \quad (1)$$

Схема доказательства. Достаточность. Пусть $t \in P^n(A)$, $t' \in T \setminus \{t\}$. Возможны два случая.

Случай 1. $t' \in T \setminus Q^n(t, A)$. Тогда найдется такой индекс $s \in N_n$, что $q_s(t, t', A_s) < 0$. В силу непрерывности функции $f_s(t, A_s)$ на \mathbf{R}^m существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(t') > 0$, что $q_s(t, t', A_s + B_s) < 0 \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$. Поэтому $t' \notin P^n(t, A+B)$ при любой матрице $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon(t'): t' \in T \setminus Q^n(t, A)\}$.

Случай 2. $t' \in Q^n(t, A)$. Тогда по условию теоремы для любого индекса $i \in N_n$ верно неравенство $h_i(t, t', A_i) > 0$. Поэтому на основании леммы получаем

$$\forall i \in N_n \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon(t')) \quad (q_i(t, t', A_i + B_i) < 0),$$

где $\varepsilon(t') = \min\{h_i(t, t', A_i): i \in N_n\}$. Отсюда имеем $t' \notin P^n(t, A+B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon(t'): t' \in Q^n(t, A)\}$.

Резюмируя, заключаем: $t \in P^n(A+B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Следовательно, задача $Z^n(A)$ квазиустойчива.

Необходимость. Пусть, напротив, при $t \in P^n(A)$ выполняется условие

$$\exists t' \in Q^n(t, A) \quad \exists p \in N_n \quad (h_p(t, t', A_p) \leq 0).$$

Тогда $q_p(t, t' \setminus t, A_p) \geq 0$, $t' \setminus t \neq \emptyset$. Методом от противного нетрудно доказать, что при любом индексе $j \in N(t' \setminus t)$ число $a_{ij} \neq 0$, т. е. $f_p(t' \setminus t, A_p) > 0$.

Пусть $0 < \beta \leq f_p(t' \setminus t, A_p)$, $B^* = [b^*_{ij}]_{n \times m}$ – матрица с элементами

$$b^*_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } i = p, j \in N(t' \setminus t), a_{pj} < 0, \\ -\beta, & \text{если } i = p, j \in N(t' \setminus t), a_{pj} > 0, \\ 0 & \text{для остальных пар } (i, j) \in N_n \times N_m. \end{cases}$$

Тогда после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} q_p(t, t', A_p + B^*_p) &= f_p(t, A_p + B^*_p) - \min\{f_p(t' \setminus t, A_p + B^*_p), f_p(t' \cap t, A_p + B^*_p)\} = \\ &= f_p(t, A_p) - \min\{f_p(t' \setminus t, A_p) - \beta, f_p(t' \cap t, A_p)\} = f_p(t, A_p) - (f_p(t' \setminus t, A_p) - \beta) = \\ &= f_p(t, A_p) - (f_p(t', A_p) - \beta) = \beta, \\ q_i(t, t', A_i + B^*_i) &= 0 \quad \text{при } i \in N_n \setminus \{p\}. \end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B^* \in \mathcal{N}(\varepsilon) \quad (t \notin P^n(A+B^*)).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ не является квазиустойчивой. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (1). Теорема доказана.

Очевидна следующая эквивалентная формулировка теоремы: *векторная траекторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, квазиустойчива, если и только если выполняется одно из условий: $P^n(A) = S^n(A)$ или $\emptyset \neq P^n(A) \setminus S^n(A) = E^n(A)$. Здесь $S^n(A) = \{t \in P^n(A) : Q^n(t, A) = \emptyset\}$ – множество Смейла, т. е. множество строго эффективных траекторий [9], $E^n(A) = \{t \in P^n(A) \setminus S^n(A) : \forall t' \in Q^n(t, A) \forall i \in N_n (h_i(t, t', A_i) > 0)\}$.*

Следствие. Скалярная траекторная задача $Z^1(A)$ квазиустойчива, если и только если оптимальная траектория единственна.

Отметим, что для линейной (с критерием вида MINSUM) скалярной траекторной задачи последний критерий был установлен в [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке БГУ в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь “Математические структуры 29”.

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.

2. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. // Discrete Appl. Math. 1995. Vol. 58. P. 169.

3. Sotskov Yu.N., Tanaev V.S., Werner F. // Industrial Applications of Discrete Optimization. Kluwer, 1998. Vol. 16. P. 72.

4. Greenberg H.G. // Advances in Computational and Stochastic Optimization. Logic Programming and Heuristic Search. Kluwer, 1998. P. 97.

5. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D. P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.

6. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. // Мат. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 1. С. 21.

7. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 27.

8. Emelichev V.A., Leonovich A.M. // Buletinul. Acad. De st. A Republicii Moldova. Mathematica. 2001. № 2. P. 44.

9. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

10. Леонтьев В.К. // Проблемы кибернетики. М., 1979. Т. 35. С. 169.

Поступила в редакцию 09.01.2003.

Владимир Алексеевич Емеличев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики.

Кирилл Эдуардович Коваленко – студент 4-го курса механико-математического факультета.



КАФЕДРЕ КВАНТОВОЙ РАДИОФИЗИКИ И ОПТОЭЛЕКТРОНИКИ – 50 ЛЕТ

На основании приказа ректора БГУ от 7 сентября 1953 г. № 178 на физическом факультете была открыта кафедра электрофизики, переименованная в 1982 г. в кафедру квантовой радиофизики и оптоэлектроники. Первым ее руководителем был избран доцент М.К. Шидловский, затем с 30 апреля 1960 г. по 1 сентября 1962 г. исполняющим обязанности заведующего был старший преподаватель В.А. Путан. В 1960-е гг. на кафедре работали доцент В.И. Арабаджи, старшие преподаватели М.Я. Резников, В.А. Путан, ассистенты С.А. Кисляков и В.Ф. Силлок. Научные исследования кафедры были направлены на изучение фотоэлектрических и электрофизических свойств полупроводников, в том числе в сильных электрических полях. Выполнению этих работ содействовали сотрудники лаборатории полупроводников Ленинградского физико-технического института под руководством профессора Д.Н. Наследова. Некоторые из них – Д.Н. Наследов, Б.Т. Коломиец, Н.П. Горюнова – читали оригинальные спецкурсы по физике полупроводников, а преподаватели кафедры – спецкурсы по ультразвуку, вакуумной технике, электровакуумным приборам и др. Лекции по радиофизике, электронике, радионизмерениям проводили ведущие специалисты радиотехнических предприятий г. Минска (В.И. Пумпянский, А.А. Лобанов, Г.И. Лобач, Я.А. Слепян).

С 1962 по 1972 г. кафедру электрофизики возглавлял член-корреспондент АН БССР, доктор физико-математических наук, профессор В.Г. Вафиади. С его приходом началось плодотворное сотрудничество с ГОИ им. С.И. Вавилова и расширилась тематика научных работ: начали выполняться исследования в области модуляции и демодуляции излучения, пирометрии, фотоэлектрической автоматике, светодальнометрии, астрофизических исследований, в которых принимали участие как преподаватели, так и инженерно-технические работники И.А. Кобак, Г.Н. Цеханский, Ж.И. Клечковская, В.В. Долинин, И.Г. Леонов, В.И. Зубко, А.И. Соколик, Л.Ф. Корзун, Г.С. Сняжков, А.П. Почкаев, О.П. Кузнецик, А.А. Русак. Из сотрудников кафедры наиболее активно занимались научной работой ассистенты В.И. Лаврукович, И.С. Манак, Э.Н. Александрова, А.В. Федотенко, старшие преподаватели А.Ф. Шилов, Е.Г. Маргинков, доцент В.Г. Пикулик. К ранее читавшимся на кафедре добавились общие курсы «Физика космоса», «История физики», «Квантовая радиофизика», а также спецкурсы «Фотоэлектрическая автоматика», «Электронная оптика».

С 1972 по 1987 г. заведующим кафедрой являлся доцент А.В. Шилов (в 1974/75 учебном году исполняющим обязанности заведующего кафедрой был доцент В.Г. Пикулик). Основными научными направлениями в этот период являлись разработка методик и аппаратуры для исследования характеристик полупроводниковых лазеров и приборов на их основе, а также радиационная пирометрия. Именно в эти годы получил дальнейшее развитие гетеродинный способ приема и измерения параметров полупроводниковых лазеров, модулированных сверхвысокими частотами, теоретически описаны режимы гетеродинамирования в ФЭУ (А.Ф. Шилов, И.С. Манак, И.А. Кобак), разработаны методики и аппаратура для изучения динамических, пространственно-временных, спектральных, тепловых, поляризационных и электрофизических характеристик (И.С. Манак, А.Ф. Шилов, И.А. Кобак, Е.Д. Карих, В.Г. Пикулик, С.Д. Жарников, В.М. Колесников, А.М. Лисенкова), выполнен цикл работ по вторичным процессам в полупроводниковых излучателях (Е.Д. Карих), исследовались деградационные процессы в инжекционных лазерах и светодиодах и отжиг дефектов (И.С. Манак, А.В. Баркова). В этот период были созданы генераторы накачки инжекционных лазеров (И.А. Кобак, В.Г. Пикулик), фотоэлектронные устройства на лавинных фотодиодах (В.Г. Пикулик, А.Е. Пискунов, Г.Е. Писаков), разработаны пирометр спектральных отношений и тепловизор для медицинских целей (Б.Ю. Ханох, И.Д. Бондаренко, В.А. Фираго), система накачки для отпаянных трубок с полупроводниковой мишенью, возбуждаемой электронным пучком (К.И. Коростник, И.С. Манак, В.М. Стецки), устройства интегральной опти-

ки (И.С. Манак, И.Д. Бондаренко, Е.П. Колик, В.М. Колесников), система обнаружения источника лазерного излучения на местности (И.А. Кобак, К.Н. Коростик, Е.Д. Карих, Т.Н. Матвеевко, Д.Е. Мартинков), изучены спектрально-люминесцентные характеристики высококонцентрированных активных сред (К.Н. Коростик, С.Д. Жарников, И.С. Манак). Активизировалось участие студентов в НИР.

Кафедра начала подготовку студентов по двум специализациям: «Квантовая радиофизика и лазерные системы» и «Лазерно-оптические технологии». Последняя из них ориентирована на целевую подготовку специалистов для конструкторского бюро точного электронного машиностроения концерна «Планар».

Наряду с уже названными курсами лекций преподаватели кафедры стали обеспечивать чтение общего курса «Твердотельная электроника» (В.Г. Пикулик, Н.А. Ушакова) и ряда спецкурсов: «Фотоэлектрическая автоматика», «Автоматическое регулирование», «ИК информационно-измерительные системы», «Физические принципы модуляции и приема лазерного излучения» (А.Ф. Шилов), «Оптоэлектроника», «Приемники излучения» и «Методы регистрации слабых оптических потоков» (В.Г. Пикулик), «Методы обработки оптических сигналов» и «Основы теории и расчета оптико-электронных систем» (Б.Ю. Ханох), «Квантовые полупроводниковые приборы», «Специальные вопросы статистической радиофизики» и «Технология полупроводниковых лазеров» (И.С. Манак), спецкурсы «Радиоизмерения» и «Оптоэлектроника» (И.А. Кобак), «Приемники излучения», «Радиационная пирометрия» и «Тепловизионные системы» (Г.И. Цеханский).

С 1 января 1988 г. кафедру возглавил доктор физико-математических наук, профессор И.А. Малевич. С его приходом была организована НИЛ лазерных систем (заведующий С.И. Чубаров). Под руководством И.А. Малевича были разработаны теория и методы построения систем лазерной гидрооптики подводного и высотного базирования (С.И. Чубаров, И. Вельджанов, М.М. Кугейко, А.К. Ясаков, А.Н. Бородавка), а также обнаружения в океане следов естественного и искусственного происхождения (А.К. Ясаков, М.М. Кугейко, Н.К. Ксенофонтова), методы лазерной доплеровской анемометрии (С.И. Чубаров), системы оптической памяти адаптивного типа и оптических вычислителей регенеративного типа (К.Н. Коростик, С.И. Чубаров, А.В. Поляков, С.В. Процко); методы анализа сигналов обратного рассеяния (М.М. Кугейко, Д.М. Оношко) и стабилизации иммунной системы (С.И. Чубаров, С.Д. Жарников, А.М. Лисенкова, Н.М. Ксенофонтова). Совместно с учеными и сотрудниками ГОИ им. С.И. Вавилова продолжались работы по поисково-обзорным лазерным системам (А.Ф. Шилов, В.А. Фираго, Е.П. Колик, Е.Д. Карих, К.Н. Коростик, В.Л. Козлов, И.А. Кобак).

27 октября 1992 г. на кафедре создана СНИЛ полупроводниковых лазеров (научный руководитель – доцент И.С. Манак), основными направлениями научных исследований которой являлись: разработка теории инжекционных лазеров, включая квантоворазмерные лазеры на многослойных квантоворазмерных гетероструктурах и лазерных сверхрешетках; лазерная диодная и светодиодная спектроскопия, разработка аппаратуры на лазерных диодах, в том числе для медицинских применений. В рамках выполненных за этот период исследований были предложены способы оптимизации амплитуды и длительности генерируемого лазерным диодом импульса излучения в режимах свободной генерации и модуляции добротности резонатора (А.А. Афоненко, И.С. Манак), генератор последовательности импульсов на одной, двух и трех разнесенных частотах, а также бистабильный лазерный излучатель на многослойных асимметричных квантоворазмерных гетероструктурах (А.А. Афоненко, В.К. Кононенко, И.С. Манак).

Кафедра с этого времени осуществляет специализацию по четырем направлениям: «Квантовая радиофизика и лазерные системы», «Лазерно-оптические технологии» на отделении «Радиофизика» и «Квантовая электроника», «Медицинская электроника» на отделении «Физическая электроника».

В феврале 1996 г. исполняющим обязанности заведующего кафедрой был назначен доцент Е.Д. Карих, а с сентября 1997 г. кафедру возглавил доктор физико-математических наук М.М. Кугейко. Основные научные результаты, полученные с 1996 г.: развита концепция «безаприорности» и разработаны методы определения оптических характеристик рассеивающих сред (М.М. Кугейко, Д.М. Оношко); предложены способы определения компонентного состава газовых и аэрозольных сред (М.М. Кугейко, В.А. Фираго); разработаны способы компьютерного проектирования газоанализаторов (А.А. Афоненко, С.Н. Дрозд, И.С. Манак, В.А. Фираго), созданы измерители CO , CH_4 , H_2O (В.А. Фираго), коэффициентов ослабления, прозрачности водных сред и растворов (М.М. Кугейко, В.А. Фираго); предложены перестраиваемые в широкой полосе квантоворазмерные лазерные диоды (С.В. Наливко, И.С. Манак, В.К. Кононенко), лазеры со сниженной температурной зависимостью выходной мощности (А.А. Афоненко, И.С. Манак, С.В. Наливко), лазерные многофункциональные излучатели на основе двухсекционной лазерной сверхрешетки (Д.В. Ушаков, И.С. Манак, В.К. Кононенко), излучатели среднего и дальнего ИК-диапазона на основе внутррезонатор-

ного преобразования частоты; исследовано спектральное уширение с учетом многоэлектронных эффектов в квантовых ямах (А.А. Афоненко), развита теория четырехволнового смещения в лазерных гетероструктурах и предложены способы определения лазерных параметров (А.Б. Матюхин, А.А. Афоненко, И.С. Манак), исследованы влияния температуры и шумов на процессы регенерации в оптико-электронных системах (К.И. Коростик, А.В. Поляков), разработаны дефектоскоп для металлоконструкций и бесконтактный низкотемпературный пирометр для новорожденных (В.Л. Козлов, С.И. Чубаров), оптико-электронный прибор для ориентации слепых в пространстве (В.Г. Пичулик), создан совместно с КБТЭМ ОМО многоканальный лазерный интерферометр (В.Е. Матюшков, В.М. Колесников, В.М. Стечик), проводятся интенсивные исследования по лазерофорезу (А.М. Лисенкова, В.В. Сенчук).

В течение ряда лет преподаватели кафедры читают общие курсы «Квантовая радиофизика» (И.С. Манак, Е.Д. Карих), «Оптоэлектроника» (Е.Д. Карих, А.А. Афоненко), а также курсы по выбору студентов «Полупроводниковые лазеры» (И.С. Манак, А.А. Афоненко), «Оптика и техника лазеров» (С.И. Чубаров) и «Основы оптических технологий для микроэлектроники» (В.М. Колесников), а также 51 спецкурса по 4 специализациям.

Все эти годы на кафедре успешно функционировала СНИЛ полупроводниковых лазеров, ставшая базой апробации новых современных технологий в области образования. За 10 лет студентами опубликовано 148 статей, 216 тезисов докладов, получено 6 патентов на изобретения, некоторые из них являются соавторами 7 учебно-методических пособий и 24 отчетов о НИР. Лауреатами Республиканского смога студенческих научных работ по физике стали 24 члена СНИЛ, которые были награждены дипломами 1-й степени и денежными премиями, 14 получили свидетельства Совета специального фонда Президента Республики Беларусь за лучшую научную работу по физике. В СНИЛ выполнено 9 магистерских диссертаций, 8 бывших членов СНИЛ стали кандидатами наук, причем 5 диссертаций подготовлено в лаборатории, 3 защищены в срок и 1 досрочно. Дважды, в 2001 и 2003 гг., СНИЛ получала гранты финансовой поддержки спецфонда Президента Республики Беларусь.

Кафедра успешно решает задачу подготовки кадров высшей квалификации. За 50 лет подготовлено 2 доктора – В.Г. Вафиади и М.М. Кугейко и 20 кандидатов наук – А.А. Афоненко, Е.Д. Карих, И.А. Кобак, В.Л. Козлов, К.Н. Коростик, О.П. Кузнецик, Л.Н. Лук, И.С. Манак, Е.Г. Мартинков, С.В. Наливко, Д.М. Оношко, А.В. Поляков, Д.В. Ушаков, Н.А. Ушакова, В.А. Фираго, Джон Джастин Флетчер, Б.Ю. Ханох, Кхонг Динь Хонг, А.Ф. Шиллов, Г.Н. Цеханский.

Научная деятельность сотрудников кафедры получила реальное воплощение в ряде изданных трудов. Так, под редакцией В.Г. Вафиади и М.М. Мирошникова вышла коллективная монография «Радиационные измерения температур слабонагретых тел» (1969), монографии В.Г. Вафиади и Ю.В. Попова «Скорость света и ее значение в науке и технике» (1970), Б.Ю. Ханоха «Оптические отражатели тетраэдрического типа в активных системах» (1982), И.Д. Бондаренко «Принципы построения фотоэлектрических автоколлиматоров» (1984), А.М. Лисенковой, И.С. Манака «Тепловой режим работы инжекционных лазеров» (1990), И.А. Малевича, Д.А. Ефременко, Э.И. Табачника «Синтез образцовых многозначных мер времени» (1994), М.М. Кугейко «Лазерные системы (в условиях априорной неопределенности)» (1999) и М.М. Кугейко, Д.М. Оношко «Теория и методы оптико-физической диагностики неоднородных рассеивающих сред» (2003).

Всего за годы существования кафедры издано около 80 учебно-методических и 19 учебных пособий, среди которых курсы лекций Е.Д. Кариха, И.С. Манака «Полупроводниковые лазеры» (1999), М.М. Кугейко «Медицинская экология» (1998), учебное пособие с грифом Министерства образования Республики Беларусь Е.Д. Кариха «Оптоэлектроника» (2000), А.Л. Гурского, Е.В. Луценко, И.С. Манака «Физика полупроводниковых источников излучения. Практикум» (2002) и М.М. Кугейко «Лазерная диагностика и спектроскопия» (2002).

Таким образом, сочетание научно-исследовательской работы преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов в НИЛ и СНИЛ кафедры позволило получить важные научные результаты и способствовало повышению качества образования.

М.М. Кугейко, И.С. Манак

КАФЕДРЕ ЛАЗЕРНОЙ ФИЗИКИ И СПЕКТРОСКОПИИ – 50 ЛЕТ

Кафедра лазерной физики и спектроскопии физического факультета БГУ была образована в 1953 г. (тогда она называлась кафедрой спектрального анализа). Инициаторами ее создания были академики АН БССР А.Н. Севченко и Б.И. Степанов, работавшие до этого в ГОИ им. С.И. Вавилова. Основным научным направлением исследований кафедры стали проблемы оптики. Для специализации на кафедру были направлены 20 студентов в то время физико-математического факультета БГУ. Следует отметить, что в 1950-е гг. на отделении

физики обучалось всего 50 студентов. Почти половина выпускников кафедры впоследствии составили основу коллектива научных сотрудников Института физики АН БССР. Показательно, что и в последующие годы большинство выпускников кафедры распределялись на работу в этот академический институт. Многие из них стали крупными учеными, руководителями научных подразделений академических институтов, предприятий и организаций, известными государственными деятелями.

Первым заведующим кафедрой был академик АН БССР Б.И. Степанов. Под его руководством на кафедре развернулись исследования в области теоретической и прикладной оптики. Первые аспиранты А.П. Хапалюк, Л.П. Казаченко исследовали теоретические вопросы спектроскопии молекул, а прикладное направление (колебательная спектроскопия органических молекул) разрабатывалось Р.Г. Жбанковым. Научная работа кафедры развивалась в тесном контакте с организованной в том же году кафедрой физической оптики, которую возглавил академик АН БССР А.Н. Севченко. Тематика научных работ общих кафедр была очень близкой. Аспиранты А.Н. Севченко, Л.И. Володько, а несколько позже Д.С. Умрейко проводили исследования по спектроскопии ураниловых соединений. Это направление особенно интенсивно развивалось в 1950-е гг. в связи с открытием и освоением атомной энергии. Подобные исследования инициировались и поддерживались президентом АН СССР академиком С.И. Вавиловым, одним из основоположников современной науки о люминесценции. Таким образом, вопросы теоретической и прикладной оптики и спектроскопии были положены в основу научных разработок на кафедрах лазерной физики и спектроскопии и физической оптики.

В 1957 г. А.Н. Севченко назначается ректором БГУ, а директором Института физики АН БССР становится Б.И. Степанов, оставаясь при этом заведующим кафедрой, где читает ряд базовых спецкурсов, уделяя большое внимание подготовке специалистов в области оптики и спектроскопии. Лучшие выпускники кафедры направлялись для работы в лаборатории института или для обучения в аспирантуре. В начале 1960-х гг. в связи с бурным развитием лазерной физики на кафедре открывается специализация по оптическим квантовым генераторам. Это направление исследований становится главенствующим и в Институте физики АН БССР. В 1963 г. Б.И. Степанов оставляет должность заведующего кафедрой, и с этого времени кафедру возглавляет доцент Л.В. Володько, впоследствии ставший доктором физико-математических наук (1968), проректором по научной работе БГУ, академиком АН БССР, заслуженным деятелем науки и техники БССР. Под его руководством на кафедре были начаты исследования по спектроскопии неорганических и жидких кристаллов, полупроводников, органических полимеров, лазерной и биологической физике и др. Особое внимание Л.В. Володько уделял прикладным проблемам, в частности применению методов спектроскопии в медицинской практике и использованию некоторых органических препаратов для усиления или торможения отдельных биологических процессов. Так, большое практическое значение имели его работы по использованию производных бензохинона в качестве лечебных препаратов для защиты тканей от острой кислородной недостаточности, основанные на конкретном знании физических процессов, протекающих в живой ткани на уровне клетки.

Нужно отметить, что многие из зародившихся на кафедре оптических направлений были положены в дальнейшем в основу деятельности НИИПФП, который был организован в 1971 г. по инициативе академика АН БССР А.Н. Севченко, ставшего его первым директором. Открывшиеся здесь новые оптические лаборатории возглавили выпускники физического факультета БГУ профессора Д.С. Умрейко (лаборатория люминесценции), Л.В. Володько (лаборатория оптики конденсированных сред) и А.П. Хапалюк (лаборатория нелинейной оптики). Несколько позже по инициативе профессора А.М. Саржевского была организована лаборатория нелинейной спектроскопии (в настоящее время лаборатория спектроскопии). Организующее влияние на направление научных исследований лабораторий НИИПФП оказал Л.В. Володько. Он также являлся и научным руководителем отдела спектроскопии и люминесценции, в который входили перечисленные лаборатории оптического профиля. Следует отметить, что 1970–1980-е гг. были периодом наиболее интенсивного развития науки как на кафедре, так и в институте. Наряду с фундаментальными исследованиями на кафедре велись и прикладные разработки. Например, Л.В. Володько явился инициатором применения статистического метода исследования кинетики люминесценции, основанного на многоканальном анализе временных интервалов между зарегистрированными квантами излучения и импульсом возбуждения люминесценции. Использование этого метода стимулировало развитие исследований в лазерной и ядерной физике, люминесценции и значительно расширило информационные возможности экспериментов со сверхслабыми световыми потоками, начало которых в Советском Союзе было положено С.И. Вавиловым. Еще одним прикладным направлением, которому Л.И. Володько уделял большое внимание, было изучение жидкокристаллических веществ и создание на их основе индикаторов инфракрасного излучения. Были разработаны новые жидкокристаллические вещества для оптических индикаторов, рабо-

тающих на динамическом и твист-эффектах. Эти работы в последующем были эффективно продолжены в НИИПФП. За указанные разработки сотрудникам лаборатории оптики конденсированных сред в 1990 г. была присуждена премия Совета Министров БССР (руководитель работ – профессор А.А. Минько).

В 1978 г. кафедре возглавил доцент М.Р. Последович, работы которого по анизотропии поглощения и испускания кристаллов неорганических соединений внесли существенный вклад в интерпретацию спектров ураниловых соединений. Применение им спектрально-поляризационного метода позволило установить природу электронных переходов и направление их дипольных моментов в ураниловых комплексах. Результаты исследований электронных и колебательных спектров комплексных соединений уранила обобщены в монографии Л.И. Володько, А.И. Комяка, Д.С. Умрейко «Ураниловые соединения (строение и спектры)» (1981). В целом разработка тематики исследований ураниловых соединений присутствовала на кафедре постоянно. Руководителями данного направления были профессор А.И. Комяк и Д.С. Умрейко. По инициативе Д.С. Умрейко эти исследования получили развитие в НИИПФП и в ГГУ им. Ф. Скорины в работах выпускников кафедры В.В. Сытько и Н.И. Алешквича, а также их учеников. Нельзя не отметить большой вклад Д.С. Умрейко в подготовку специалистов кафедры. На протяжении длительного времени он читал ряд базовых спецкурсов по спектроскопии.

В 1979 г. кафедре возглавил профессор А.И. Комяк, под руководством которого были выполнены исследования влияния флуктуаций микроокружения в растворах органических молекул на динамику фотофизических процессов, происходящих в растворенных молекулах (профессор И.М. Гулис, доцент С.К. Горбацевич). Работы такого плана активно велись также в НИИПФП (профессор Е.С. Воропай) и на кафедре методики преподавания физики и информатики (профессор В.А. Гайсенко и др.), а также в Институте физики НАН Беларуси (академик А.Н. Рубинов, профессор В.И. Томин и Б.А. Бушук). За цикл работ по исследованию флуктуаций микроструктуры окружения и фотофизики процессов в растворах сложных органических молекул Государственная премия Республики Беларусь в области науки и техники была присуждена в 1994 г. коллективу авторов (Б.А. Бушук, Е.С. Воропай, В.А. Гайсенко, И.М. Гулис, А.Н. Рубинов, В.И. Томин).

С 1980-х гг. на кафедре под руководством доктора физико-математических наук, доцента А.Л. Толстика и доцента А.В. Чаля совместно с Институтом физики НАН Беларуси (академик А.С. Рубанов с сотрудниками) интенсивно ведутся исследования по нелинейной оптике, в области динамической голографии четырехволнового взаимодействия, оптической бистабильности; разработаны новые оптические и оптоэлектронные системы, предложены методы оптической обработки информации с использованием нелинейных оптических элементов с обратной связью.

Сотрудниками кафедры создан способ и экспериментально реализовано усиление динамических ОВФ-голограмм с некогерентной оптической подкачкой (доктор физико-математических наук А.Л. Толстик, кандидат физико-математических наук О.Г. Романов), а также обращение волнового фронта с одновременным удвоением частоты излучения в сложных органических соединениях. Разработан новый метод управления пропусканием жидкокристаллических (ЖК) элементов, основанный на изменении оптической глубины рельефа нематических жидких кристаллов с помощью электрического поля (доктор физико-математических наук А.Л. Толстик, доцент А.В. Чалей, кандидат физико-математических наук Е.А. Мельникова). Экспериментально реализованы режимы оптической бистабильности и генерации пульсаций интенсивности на выходе ЖК-элементов при постоянной входной интенсивности, исследованы пути перехода к режиму оптического хаоса, реализован ряд логических операций.

На основе легированных кристаллов теллурида кадмия разработаны и созданы новые фоторефрактивные элементы, работающие в ближней ИК-области спектра (1–1,5 мкм), включая окно прозрачности волоконной оптики.

На основании результатов исследований физических принципов создания объемных, в том числе голографических, изображений разработан цилиндрический растр для получения объемных и динамических эффектов (доцент И.В. Шташкевич).

Совместно с лабораторией спектроскопии НИИПФП (руководитель – профессор Е.С. Воропай) были выполнены работы по созданию новых материалов на основе полиметинового красителя для перестраиваемых жидкостных лазеров в ближнем ИК-диапазоне (0,6–1,2 мкм). Кроме того, в лаборатории спектроскопии (профессор Е.С. Воропай, А.М. Саржевский) совместно с сотрудниками и преподавателями кафедры общей физики (профессора В.А. Гайсенко и А.П. Клищенко, доценты Л.И. Буров и И.И. Жолнеревич) активно проводилось изучение характеристик двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции, рассчитаны ее поляризационные характеристики для различных моделей осцилляторов, установлена связь степени поляризации люминесценции с симметрией молекул. На основе полиметинового красителя разработаны перспективные композиционные составы для активных слоев оптических дисков.

В 1998 г. кафедре возглавил лауреат Государственной премии Республики Беларусь профессор Е.С. Воропай, который успешно продолжает начатые Л.И. Володько научные исследования по биологической тематике. Большой интерес представляют разработки, связанные с применением трикарбощианиновых красителей в качестве новых препаратов для фотодинамической лазерной терапии онкологических заболеваний. Проведенные эксперименты показали их перспективность в лечении онкологических заболеваний и диагностике областей локализации раковых опухолей благодаря способности избирательно накапливаться в опухолевых клетках в мономерной форме. Данные препараты обладают низкой токсичностью при введении в концентрациях, обеспечивающих фототерапевтический эффект, достаточно быстро выводятся из организма. Ведутся работы по созданию соответствующей аппаратуры.

Разработаны новые методы генерации перестраиваемых по частоте пикосекундных импульсов света, и на их основе созданы лабораторные макеты компактных лазеров на красителях, генерирующих одиночные пикосекундные импульсы при накачке импульсами наносекундного диапазона (профессор И.М. Гулис, кандидат физико-математических наук Е.А. Ермилов).

Экспериментально реализованы простые по конструкции лазеры с ВКР-преобразованием и сложением частот в нелинейных кристаллах, работающие в режиме синхронной накачки (профессор И.М. Гулис, кандидат физико-математических наук К.А. Сасчииков), позволяющие получать пикосекундные импульсы на широком наборе дискретных частот видимого и ближнего ИК-диапазона, а также излучение, непрерывно перестраиваемое в пределах до 5 нм в ряде спектральных областей.

На кафедре ведутся работы по созданию новых приборов для спектроскопических исследований и спектрального анализа. Полученные результаты в области прецизионных спектральных и фотометрических измерений импульсных световых потоков обобщены в монографии Е.С. Воропай и П.А. Торпачева «Техника фотометрии высокого амплитудного излучения» (1986).

Разработан многоканальный атомно-эмиссионный спектрометр ЭМАС-200Д (профессор А.П. Зажогин, доцент А.И. Серафимович, ведущий научный сотрудник М.Н. Коваленко), способный обеспечивать анализ элементного состава (более 50 элементов) для широкого круга веществ и материалов. Достоинствами этого прибора являются одновременное проведение анализа нескольких (до 10) элементов за одно измерение, полная автоматическая обработка и документирование результатов, а также обнаружение концентраций порядка 10^{-5} %.

Среди прикладных разработок последнего времени следует назвать также создание спектроскопического метода анализа характеристик нефтепродуктов и разработку образца малогабаритного универсального спектрометра с ПЗС-линейкой в качестве фотоприемника (МС-1В). Прибор в объемном и портативном вариантах может использоваться в качестве базового модуля для абсорбционного и флуоресцентного спектрометра. Разрабатываются методы детектирования малых концентраций флуоресцирующих веществ в присутствии интенсивного фонового сигнала, что чрезвычайно важно для контроля за состоянием водных сред и в плане медико-биологического использования.

При выборе направлений фундаментальных исследований приоритет отдается тем, которые могут служить основой для имеющих прикладное значение разработок. Они характеризуются различной «степенью готовности» к практическому использованию, начиная от поисковых (с целью отработки новых принципов реализации элементов, сред и устройств для потенциальных применений) и до создания приборов, выполненных на уровне опытных образцов и пригодных для запуска в производство. К числу последних можно отнести упомянутые ЭМАС-200Д, МС-1В; образцы лазеров, предназначенных для учебных целей, импульсный спектрофлуориметр, который планируется осваивать совместно с предприятием «Оптрон» в рамках программы по переснащению научных подразделений, а также новые фотосенсибилизаторы совместно с ОАО «Белмедпрепараты» и др.

Кафедра успешно готовит кадры высшей квалификации: ее выпускники востребованы в БГУ, других научных учреждениях и на производстве. За последние пять лет защищены две докторские (А.П. Зажогин, А.Л. Толстик) и восемь кандидатских диссертаций. На кафедре работают пять докторов наук, среди них два лауреата Государственной премии (Е.С. Воропай и И.М. Гулис) и заслуженный деятель науки и техники (А.И. Комяк). Наряду с опытными преподавателями (А.В. Чалей, А.И. Серафимович, А.П. Зажогин) успешно трудятся и молодые кандидаты наук (О.Г. Романов, Е.А. Мельникова), и недавние выпускники (ассистент К.Н. Каплевский). В целом кафедра лазерной физики и спектроскопии имеет достаточный потенциал и хорошие перспективы для дальнейшего развития.

Е.С. Воропай, А.И. Комяк

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.13

Галынский В.М., Фурс А.Н. **Поверхностные электромагнитные волны в поглощающих анизотропных структурах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследовано влияние поглощения в пограничных средах на характеристики бездисперсионных поверхностных электромагнитных волн, существование которых обусловлено анизотропией сред. Установлены условия существования таких волн на границе раздела поглощающих изотропной среды и одноосного кристалла.

Библиогр. 8 назв., ил. 3.

УДК 535.37

Умрейко Д. С., Сытько В.В., Барсуков И.В., Алешкевич Н.А., Показашкин В.И. **Люминесценция ионов UO_2^{2+} в соактивированных UO_2^{2+} и Ln^{3+} люминофорах при больших плотностях мощности возбуждения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассмотрено влияние наведенного поглощения и аккумуляции возбуждений на заселенность нижнего возбужденного состояния уранилового комплекса. Показано, что соактивации пассивной среды ионами UO_2^{2+} и Ln^{3+} , удовлетворяющими условиям переноса энергии электронного возбуждения от UO_2^{2+} к Ln^{3+} , соответствует резкое уменьшение эффективности наведенного поглощения и его влияния на заселенность нижнего возбужденного состояния уранила.

Библиогр. 16 назв., ил. 2.

УДК 547.572:535.217

Станкевич А.И., Могильный В.В. **Рельефообразование на поверхности полимерных слоев, содержащих фотовосстанавливающиеся ароматические кетоны** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследованы рельефообразующие свойства полимерных композиций на основе полиметилметакрилата и ароматических кетонов. Установлено, что для композиции КС-ПММА увеличение температуры отжига с 358 К до температуры стеклования полимера (~378 К) приводит к изменению характера рельефообразования: происходит инверсия амплитуды модуляции периодических фоторельефов. Одновременно улучшается воспроизводимость пространственных частот изображения на поверхности стеклообразных полимерных слоев.

Библиогр. 3 назв., ил. 3.

УДК 537.311.33

Бумай Ю.А., Лукашевич М. Г., Скрипка Д.А. **Магниторезистивный эффект слабо разупорядоченного гетероперехода GaAs – AlGaAs** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследовано влияние процессов слабой локализации и электрон-электронного взаимодействия на низкотемпературные транспортные характеристики двумерного электронного газа одиночного гетероперехода GaAs – AlGaAs с заполненными двумя подзонами размерного квантования. Транспортные характеристики интерпретированы в рамках двухслойной модели, учитывающей наличие двух параллельных каналов проводимости, соответствующих двумерному и трехмерному электронному газу. Установлено, что слабая локализация определяет транспорт $2D$ электронов в слабом, а электрон-электронное взаимодействие – в сильном магнитном поле.

Библиогр. 14 назв., ил. 3.

УДК 548.736.15:621.385

Соловьев В.С., Гусаков Г.А., Крехотень О. В. **Омические контакты к кристаллам алмаза типа Пв на основе трехслойной металлизации Ti/TiN/Au** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследована возможность использования трехслойной системы Ti/TiN/Au в качестве контактной металлизации алмаза. Определены оптимальные режимы термообработки, при которых вольт-амперные характеристики формируемых контактов имеют линейный характер и азот из нитридного слоя не диффундирует в слой карбида и прилегающую область алмаза. С применением контактов на основе данной системы измерены температурная зависимость удельного сопротивления, холловская подвижность и концентрация носителей заряда в полупроводниковом алмазе.

Библиогр. 22 назв., ил. 3.

УДК 621.315.592

Гайдук П.И., Траутман К. (ФРГ), Толемонд М. (Франция), Ларсен А.Н. (Дания). Трековая преципитация в пересыщенных слоях $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ -сплавов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматривается формирование прерывистых треков в монокристаллических слоях сплава $\text{Si}_{0,5}\text{Ge}_{0,5}$ при прохождении ионов U^+ с энергией 1,3 ГэВ в режиме электронного торможения. Методами просвечивающей электронной микроскопии исследованы морфология и атомная структура прерывистых треков в зависимости от состава сплава и уровня легирования мышьяком. Результаты исследований обсуждаются в рамках модели термических пиков, предполагающей трековое плавление и дефектную кристаллизацию.

Библиогр. 16 назв., ил. 2.

УДК 537.312.5

Доброго В.П. Межпримесная рекомбинация в прыжковой фотопроводимости. 2. Релаксации роста и спада // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Продолжено исследование кинетики прыжковой фотопроводимости, вызванной светом собственной полосы поглощения [1]. Вычислены угловые коэффициенты зависимости мгновенного времени жизни фотопроводимости от времени, прошедшего после выключения света. Результаты расчета согласуются с экспериментальными данными, полученными на *n*-германии, компенсированном медью. Обоснован немонотонный рост прыжковой фотопроводимости при снижении уровня возбуждения, наблюдавший ранее экспериментально.

Библиогр. 2 назв., табл. 1, ил. 4.

УДК 621.315.592

Жавнерчик В.В., Борздов В.М., Галенчик В.О. Влияние ориентации подложки на концентрацию инверсных электронов в Si-MOP-структуре // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Проведено самосогласованное решение уравнений Шредингера и Пуассона, что позволило исследовать поведение концентрации инверсных электронов в направлении квантования в Si-инверсионных слоях с ориентациями подложки (100) и (111).

Библиогр. 5 назв., ил. 4.

УДК 524.3-17

Клищенко А. П., Хвалей С. В., Шупляк В. И. Моделирование эквипотенциальных поверхностей двойной звезды // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматривается метод компьютерного моделирования структуры гравитационного поля двойной звезды, обращающейся вокруг общего центра масс с постоянной угловой скоростью, во вращающейся системе координат. Данный метод позволяет строить эквипотенциальные поверхности, соответствующие любому значению эффективного потенциала. Созданная программа иллюстрирует положение всех точек либрации Лагранжа и полостей Роша и дает возможность рассчитывать параметры гравитационного поля в любой точке пространства. Кроме того, этот метод позволяет моделировать эквипотенциальные поверхности для одиночных звезд, а также любых планетарных и искусственных систем, находящихся в гравитационном взаимодействии. Он может быть применен в качестве методической иллюстрации в курсе общей астрономии и астрофизики университетов.

Библиогр. 6 назв., ил. 4.

УДК 519.24

Труш Н.Н., Илюкевич Т.И. Оценка математического ожидания стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматривается стационарный случайный процесс с нерегулярными наблюдениями. Построена оценка математического ожидания для этого процесса и исследованы ее статистические свойства.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.214.5

Шмуратко А.С. Асимптотическое разложение распределений сумм слабо зависимых случайных величин // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Дана последовательность сильно перемешанных случайных величин с нулевыми средними и моментами порядка $s > 3$. В работе получено асимптотическое разложение длины два для функции распределения нормированной суммы случайных величин. Предполагается, что характеристическая функция указанной суммы достаточно мала в определенном интервале.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.9

Ковальчук А. Н. Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением. Многомерный случай // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследуется задача аппроксимации многомерных стохастических θ -интегралов итовскими конечными суммами с осреднением. Найдены оценки скорости сходимости.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.9

Новохрост В. Г. Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследуются решения дифференциальных уравнений, правые части которых содержат произведение разрывных функций на обобщенные. Показано, что подход, основанный на аппроксимации таких уравнений дифференциальными уравнениями с запаздыванием, является частным случаем конечно-разностного с осреднением подхода.

Библиогр. 5 назв.

УДК 33:517.925

Калитин Б. С. Устойчивость динамической модели монопольного рынка // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Проведено полное исследование устойчивости равновесия динамической модели рынка типа «чистая монополия». Представлены результаты об устойчивости как основного, так и критических случаев одного нулевого корня, двух нулевых корней и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения системы линейного приближения.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.44

Громак Е. В. Обобщенное преобразование Струве в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследуется обобщенное интегральное преобразование, содержащее функцию Струве в ядре, в весовых пространствах r -суммируемых функций. Устанавливаются условия ограниченности оператора рассматриваемого преобразования, даются его представления и описание образа, а также строятся формулы обращения.

Библиогр. 17 назв.

УДК 517.925

Чичурип А. В. О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля // Вестн. / Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Для специального нелинейного дифференциального уравнения второго порядка доказано существование однопараметрических семейств решений, представляющих собой общее решение уравнений Абеля первого рода.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.10

Кравцов В. М. О новых типах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Исследовано $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right) \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right) + n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 9$ новых типов неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин (т. е. вершин, число дробных компонент у которых равно $3n-2$) многогранника $M(3, n)$, $n \geq 7$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях порядка n . Идентификация типов вершин многогранника $M(3, n)$ проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины. Две вершины многогранника $M(3, n)$ будем называть неэквивалентными, если одна из них не может быть переведена в другую путем перестановки ее двумерных сечений.

Библиогр. 11 назв.

УДК 517.977

Коваленок Н. Н. Синтез позиционного решения терминальной задачи оптимального управления в классе релейных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматривается терминальная задача оптимального управления в классе релейных функций. Получен алгоритм построения оптимального релейного управления типа обратной связи.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.926.4

Красовская Т.Г. **О числе различных значений функций Боля бесконечно дифференцируемых линейных диагональных систем** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматриваются линейные диагональные дифференциальные системы $\dot{x} = A(t)x = \text{diag}[a_1(t), \dots, a_n(t)]x$, $x \in R^n$, $t \geq 0$, с бесконечно дифференцируемой ограниченной матрицей коэффициентов, имеющей ограниченные (каждая своим числом) производные любого порядка. Для ненулевого решения $x(\cdot, \alpha)$, $x(0, \alpha) = \alpha$ таких систем получена точная оценка для числа различных элементов множества значений верхней и нижней функций Боля, определяемых соответственно формулами

$$\bar{\beta}_\alpha(\alpha) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} (t - \tau)^{-1} \ln \left\| \frac{x(t, \alpha)}{x(\tau, \alpha)} \right\|, \quad \underline{\beta}_\alpha(\alpha) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} (t - \tau)^{-1} \ln \left\| \frac{x(t, \alpha)}{x(\tau, \alpha)} \right\|.$$

Библиогр. 1 назв.

УДК 519.62

Бобков В.В., Кучмиенко И.А. **Численное решение жестких систем с использованием методов гармонического анализа** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Предлагается способ численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на разложении в ряд Фурье части эквивалентного интегрального соотношения и имеющий дополнительный рычаг (помимо шага дискретизации) для увеличения точности получаемых приближений.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977

Хомицкая Т.Г. **Численный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Рассматривается численный метод решения задачи минимизации выпуклой квадратичной функции на терминальных состояниях линейной системы, состоящий из двух этапов: решения кусочно-линейной аппроксимации задачи в классе дискретных управлений; построения решения исходной задачи, используя процедуру доводки. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 519.24

Чехменок С.Л. **О вычислении плотности и функции распределения вероятностей строго симметричных устойчивых случайных величин** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Построен алгоритм вычисления плотности и функции распределения симметричных устойчивых случайных величин.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 519.10

Емеличев В. А., Коваленко К.Э. **Критерий квазиустойчивости векторной комбинаторной задачи с частными критериями вида MINMIN MODUL** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3.

Для многокритериальной траекторной задачи с паретовским принципом оптимальности и с нелинейными частными критериями получены необходимые и достаточные условия квазиустойчивости.

Библиогр. 10 назв.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 2003 г.

ФИЗИКА

<i>Анисович А.Г., Шахрай О.Н., Шепелевич В.Г.</i> Структура и микротвердость быстрозатвердевшей фольги сплавов системы Pb – Cd.....	2 35
<i>Башмаков И.А., Доросинец В.А., Лукашевич М.Г., Тихонова Т.Ф.</i> Суперпарамагнетизм нанокластеров кобальта в углеродной матрице.....	1 33
<i>Бумай Ю.А., Лукашевич М. Г., Скрипка Д.А.</i> Магниторезистивный эффект слабо разупорядоченного гетероперехода GaAs – AlGaAs.....	3 18
<i>Воронай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Луговский А.А.</i> Спектральные проявления образования ионных пар индотрикарбоданиновых красителей.....	1 9
<i>Гайдук П.И., Траутман К. (ФРГ), Толемонд М. (Франция), Ларсен А.Н. (Дания).</i> Трековая преципитация в пересыщенных слоях Si _{0,5} Ge _{0,5} -сплавов.....	3 31
<i>Гальнский В.М., Фурс А.Н.</i> Поверхностные электромагнитные волны в поглощающих анизотропных структурах.....	3 3
<i>Говор Г.А., Добрянский В.М.</i> Исследование динамических характеристик оптического магнитного перехода в арсениде марганца.....	2 30
<i>Доброго В.П.</i> Межпримесная рекомбинация в прыжковой фотопроводимости.	2 25
1. Уравнение кинетики.....	2 25
<i>Доброго В.П.</i> Межпримесная рекомбинация в прыжковой фотопроводимости.	3 36
2. Релаксации роста и спада.....	3 36
<i>Дроздов С.Н., Кухарчик П.Д., Рудницкий А.С.</i> Селективные свойства тетраэдрических резонаторов.....	1 22
<i>Жавнерчик В.В., Борздов В.М., Галенчик В.О.</i> Влияние ориентации подложки на концентрацию инверсных электронов в Si-МОП-структуре.....	3 39
<i>Клищенко А. П., Хвалей С. В., Шуляк В. И.</i> Моделирование эквипотенциальных поверхностей двойной звезды.....	3 43
<i>Кувшинов В.И., Мармыш В.В., Шапоров В.А.</i> О влиянии неустойчивости гамильтоновой системы на эволюцию квантового сжатия.....	2 9
<i>Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А.</i> К решению задачи дифракции резонаторных мод на поперечной щели проекционным методом.....	1 18
<i>Лукашевич М.Г., Мазаник А.А.</i> Размерный эффект в магнитосопротивлении тонких пленок пермаллоя.....	2 21
<i>Ормача Омар (Боливия), Толстик А.Л.</i> Сравнительный анализ многоволновых взаимодействий в растворах красителей.....	2 3
<i>Пилипенко В.А., Пономарь В.Н., Петлицкая Т.В.</i> Влияние механических напряжений на зарядовые свойства двухслойного конденсаторного диэлектрика SiO ₂ – Ta ₂ O ₅	1 37
<i>Пилипенко В.А., Пономарь В.Н., Пилипенко И.В.</i> Формирование пленки нитрида титана при быстрой термообработке.....	2 38
[Соловьев В.С.] , <i>Гусаков Г.А., Крекотень О.В.</i> Использование TiN в качестве барьерного слоя в системе металлизации Ti/TiN/Au при формировании низкоомных контактов к алмазу.....	1 42
[Соловьев В.С.] , <i>Гусаков Г.А., Крекотень О. В.</i> Омические контакты к кристаллам алмаза типа IIb на основе трехслойной металлизации Ti/TiN/Au.....	3 24
<i>Станкевич А.И., Мозильный В.В.</i> Рельефообразование на поверхности полимерных слоев, содержащих фотовосстанавливающиеся ароматические кетоны.....	3 13
<i>Тихомиров В.В., Юралевиц С.Э.</i> Нейтринная вспышка белого карлика, поглощаемого первичной черной дырой.....	1 27
<i>Требников А.Г., Дик Т.А., Костюк Н.Н.</i> ИК- и масс-спектроскопическое исследование ацетилацетонатов самария.....	1 45
<i>Умрейко Д.С., Сытько В.В., Барсуков И.В., Алешкевич Н.А., Покаташкин В.И.</i> Люминесценция ионов UO ₂ ²⁺ в соактивированных UO ₂ ²⁺ и Ln ³⁺ люминофорах при больших плотностях мощности возбуждения.....	3 8
<i>Умрейко Д.С., Сытько В.В., Покаташкин В.И.</i> Температурная зависимость параметров бесфононных линий в спектрах фторидных соединений уранила.....	1 3
<i>Юревич В.В.</i> Общее аналитическое решение для функции рассеяния точки идеальной оптической системы с произвольной угловой апертурой.....	2 16
<i>Якутович Н.Г., Анищик В.М.</i> Численное решение обратной задачи Шредингера с использованием генетического алгоритма.....	1 15

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Афоненко А.А.</i> Нелинейность функций, построенных по последовательностям де Брейна	2 53
<i>Ахраменка В.К.</i> Необходимая ўмова центра для адной A_3 -сістэмы ў выпадку складанага асаблівага пункта	1 84
<i>Близнец И.М.</i> Описание элементов высоты 2 решетки ω -локальных формаций	2 57
<i>Громак Е.В.</i> Обобщенное преобразование Струве в весовых пространствах суммируемых функций	3 72
<i>Демеш Н.Н., Соболева Т.В.</i> Построение состоятельной оценки спектральной плотности действительного устойчивого процесса	2 49
<i>Жук Е.Е., Серикова Е.В.</i> Статистическая классификация при прямом выборе информативных признаков и ее риск	2 43
<i>Зенченко А.С.</i> О дифференциальных системах, эквивалентных первому уравнению Пенлеве	2 85
<i>Калитин Б.С.</i> Устойчивость динамической модели монопольного рынка	3 67
<i>Ковальчук А.Н.</i> Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением. Многомерный случай	3 57
<i>Кожеро М.В., Спичекова Н.В.</i> Об интегрировании невырожденного уравнения Пфаффа с суммой линейного и билинейного операторов в R^1	2 95
<i>Кравцов В.М.</i> О новых типах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях	3 80
<i>Кравченко Ж.М.</i> Метод коррекции приближенного решения в одной задаче гарантированной оптимизации систем управления	1 76
<i>Леваков А.А.</i> Ограниченные решения линейных стохастических систем	1 88
<i>Ле Ван Линь (Вьетнам).</i> Центры кубической системы с однородными нелинейностями	2 90
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Задачи Коши для факторизованных дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения	1 57
<i>Мартон М.В.</i> Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига	1 61
<i>Новохрост В.Г.</i> Об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами	3 62
<i>Рулинский Ю.Г.</i> Парные интегральные уравнения	1 66
<i>Рингель Д.Е.</i> Мнемочисла и мнемовекторы. I	1 71
<i>Рингель Д.Е.</i> Мнемочисла и мнемовекторы. II	2 70
<i>Савенков В.А.</i> Растяжение анизотропной пластинки с круговым изотропным ядром с разрезом на линии контакта	1 80
<i>Старовойтов А.П.</i> Примеры непрерывных функций с заданным порядком наилучших рациональных приближений	1 53
<i>Труш Н.Н., Илюкевич Т.И.</i> Оценка математического ожидания стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями	3 49
<i>Чичурич А.В.</i> К проблеме существования отображений между классами уравнений Шази и уравнениями второго порядка	2 74
<i>Чичурич А.В.</i> О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля	3 76
<i>Шевцов И.Л.</i> Квадратичные системы с различными конфигурациями особых точек и максимальным числом предельных циклов вокруг негрубого фокуса	2 78
<i>Шевченко Д.Н.</i> О способе формализации СЖАТ при доказательстве безопасности их функционирования	2 60
<i>Шмуратко А.С.</i> Асимптотическое разложение распределений сумм слабо зависимых случайных величин	3 52
<i>Щетникович Е.К.</i> Модифицированное преобразование Ханкеля в весовых пространствах суммируемых функций	2 65

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Близнец И.В.</i> О критических p -композиционных формациях	1	101
<i>Бобков В.В., Кучмиенко И.А.</i> Численное решение жестких систем с использованием методов гармонического анализа	3	90
<i>Емеличев В. А., Коваленко К.Э.</i> Критерий квазиустойчивости векторной комбинаторной задачи с частными критериями вида MINMIN MODUL	3	98
<i>Калитин С.Б., Калитин Б.С.</i> Оптимальное управление помехой в задаче преследования на плоскости	1	98
<i>Коваленок Н.Н.</i> Оптимизация динамических систем в классе релейных управлений	1	96
<i>Коваленок Н.Н.</i> Синтез позиционного решения терминальной задачи оптимального управления в классе релейных функций	3	86
<i>Красовская Т.Г.</i> О числе различных значений функций Боля бесконечно дифференцируемых линейных диагональных систем	3	88
<i>Мататов В.И., Тишкевич О.Н.</i> К вопросу о подвижных особенностях неавтономной системы двух дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями ..	2	108
<i>Павленок Н.С.</i> Принцип ε -максимума в одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением	2	102
<i>Поляк Н.И.</i> Механические свойства сплавов системы Al – Cu – Zn, имплантированных ионами висмута с энергией 710 МэВ	2	100
<i>Федосенко А.Г.</i> О сходимости распределений сумм m -зависимых случайных векторов к нормальному закону	2	105
<i>Хомицкая Т.Г.</i> Численный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления	3	93
<i>Чехменок С.Л.</i> О вычислении плотности и функции распределения вероятностей строго симметричных устойчивых случайных величин	3	95
<i>Шепелевич В.Г., Демидчик А.В.</i> Структура и микротвердость фольги сплавов Bi-(8–12) ат. % Sb, полученных сверхбыстрой закалкой из расплава	1	93

ХРОНИКА

<i>Воропай Е.С., Комяк А.И.</i> Кафедре лазерной физики и спектроскопии – 50 лет	3	103
<i>Карих Е.Д., Манак И.С.</i> IV Международная научно-техническая конференция по квантовой электронике	2	110
<i>Кугейко М.М., Манак И.С.</i> Кафедре квантовой радиофизики и оптоэлектроники – 50 лет	3	101
<i>Манак И.С.</i> Студенческой научно-исследовательской лаборатории полупроводниковых лазеров – 10 лет	1	103

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Алексей Адамович Гусак	1	105
Антон Антонович Лабуда	2	112
Владимир Васильевич Амелькин	2	113

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Антон Никифорович Севченко (к 100-летию со дня рождения).....	1	107
Владимир Иванович Крылов (1902–1994)	1	109
Ученый, педагог, организатор науки (к 75-летию со дня рождения Л.В. Володько)	1	110

Рефераты	1	112
Рефераты	2	114
Рефераты	3	107

CONTENTS

PHYSICS

<i>Galynsky V.M., Furs A.N.</i> Surface electromagnetic waves in the absorbing anisotropic structures.....	3
<i>Umreiko D.S., Syt'ko V.V., Barsukov I.V., Aleshkevich N.A., Pokatashkin V.I.</i> Luminescence of UO_2^{2+} ions in coactivated UO_2^{2+} and Ln^{3+} luminophores at high excitation power densities	8
<i>Stankevich A.I., Mahilny V.V.</i> Relief formation on the surface of polymeric layers containing photoreducible aromatic ketones.....	13
<i>Bumai Y. A., Lukashevich M.G., Skripka D.A.</i> Magnetoresistance of weakly disordered GaAs-AlGaAs heterojunction.....	18
<i>Solov'yev V.S., Gusakov G.A., Krekoten' O.V.</i> Ohmic contacts to a IIb type diamond crystal based on a Ti/TiN/Au three-layer metallization	24
<i>Gaiduk P.I., Trautmann C. (Germany), Toulemonde M. (France), Larsen A.N. (Denmark).</i> Track-induced precipitation in supersaturated $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5}$ alloy layers	31
<i>Dobrego V.P.</i> Interimpurity recombination at hopping photoconductivity. 2. Relaxations of growing and decline.....	36
<i>Zhaunerchik V. V., Borzdov V. M., Galenchik V. O.</i> Influence of the substrate's orientation on the inversion electron concentration in Si-MOS structures.....	39
<i>Klishchenko A.P., Khvalei S.V., Shuplyak V.I.</i> Simulation of the binary star equipotential surfaces	43

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Troush N.N., Iliukevich T.I.</i> The estimation of mathematical expectation of stationary random processes with non-regular observations.....	49
<i>Shmuratko A.S.</i> Asymptotic expansion of the distributions of sums of weakly dependent random variables.....	52
<i>Kovalchuk A.N.</i> The limit behavior of Ito's finite sums with averaging. Multi-dimensional case.....	57
<i>Navakhrost V.G.</i> On approximation of solutions of differential equations with generalized coefficients.....	62
<i>Kalitin B.S.</i> Stability of a dynamic model of the monopoly market.....	67
<i>Gromak E.V.</i> Generalized Struve transform in the weighted spaces of summable functions	72
<i>Chichurin A.V.</i> The existence map between nonlinear differential equation of the second order and Abel equations.....	76
<i>Krautsou V.M.</i> About new types of maximal non-integer vertices of the polytope of three-axial assignment problem.....	80

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Kavalionak N.N.</i> Synthesis of positional solution of optimal control problem with bang-bang control.....	86
<i>Krasovskaya T.G.</i> On the number of the values of the Bohl functions of infinitely differentiable linear diagonal systems	88
<i>Bobkov V.V., Kuchmienko I.A.</i> The numerical solution of stiff systems with the use of methods of harmonic analysis.....	90
<i>Khomitskaya T.G.</i> The numerical method of deciding a linear-quadratic optimal control problem	93
<i>Chekhtmenok S.L.</i> About calculating a density and a function of distribution of probabilities for symmetric stable random values	95
<i>Emelichev V.A., Kovalenko K.E.</i> The quasi-stability criterion of vector combinatorial problem with partial criteria of kind MINMIN MODUL.....	98

CHRONICLE

<i>Kugeiko M.M., Manak I.S.</i> Radiophysics and optoelectronics department (to the 50-th anniversary)	101
<i>Voropay E.S., Komyak A.I.</i> Laser physics and spectroscopy department (to the 50-th anniversary)	103
Summary	107
Index of articles published in 2003.....	111