

б.я52
Б437

п.с. 3/03

ISSN 0321-0367

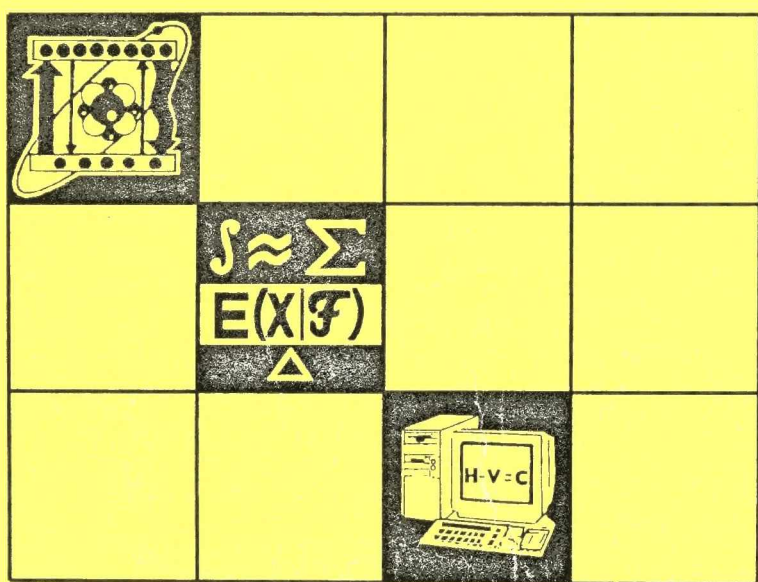
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

1/2003



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Умрейко Д.С., Сытько В.В., Покаташкин В.И.</i> Температурная зависимость параметров бесфононных линий в спектрах фторидных соединений уранила	3
<i>Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Луговский А.А.</i> Спектральные проявления образования ионных пар индотрикарбоцианиновых красителей.....	9
<i>Якутович Н.Г., Анищук В.М.</i> Численное решение обратной задачи Шредингера с использованием генетического алгоритма.....	15
<i>Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А.</i> К решению задачи дифракции резонаторных мод на поперечной щели проекционным методом	18
<i>Дроздов С.Н., Кухарчик П.Д., Рудницкий А.С.</i> Селективные свойства тетраэдрических резонаторов	22
<i>Тихомиров В.В., Юралевиц С.Э.</i> Нейтринная вспышка белого карлика, поглощаемого первичной черной дырой	27
<i>Баимаков И.А., Доросинец В.А., Лукашевич М.Г., Тихонова Т.Ф.</i> Суперпарамагнетизм нанокластеров кобальта в углеродной матрице.....	33
<i>Пилипенко В.А., Пономарь В.Н., Петлицкая Т.В.</i> Влияние механических напряжений на зарядовые свойства двухслойного конденсаторного диэлектрика $\text{SiO}_2 - \text{Ta}_2\text{O}_5$	37
<i>Соловьев В.С., Гусаков Г.А., Крעותель О.В.</i> Использование TiN в качестве барьерного слоя в системе металлизации Ti/TiN/Au при формировании низкоомных контактов к алмазу	42
<i>Требшиков А.Г., Дик Т.А., Костюк Н.Н.</i> ИК- и масс-спектроскопическое исследование ацетилацетонатов самария.....	45

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Старовойтов А.П.</i> Примеры непрерывных функций с заданным порядком наилучших рациональных приближений	53
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Задачи Коши для факторизованных дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения.....	57
<i>Мартон М.В.</i> Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига.....	61
<i>Рулинский Ю.Г.</i> Парные интегральные уравнения.....	66
<i>Рингель Д.Е.</i> Мисмочисла и мнемовекторы. I.....	71
<i>Кравченко Ж.М.</i> Метод коррсекции приближенного решения в одной задаче гарантированной оптимизации систем управления	76
<i>Савенков В.А.</i> Растяжение анизотропной пластинки с круговым изотропным ядром с разрезом на линии контакта	80
<i>Ахраменка В.К.</i> Необходимая умова центра для адной A_3 -систэмы ў выпадку складанага асаблівлага пункта	84
<i>Леваков А.А.</i> Ограниченные решения линейных стохастических систем.....	88

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Шепелевич В.Г., Демидчик А.В.</i> Структура и микротвердость фольги сплавов Bi-(8–12) ат. % Sb, полученных сверхбыстрой закалкой из расплава	93
<i>Коваленок Н.Н.</i> Оптимизация динамических систем в классе релейных управлений..	96
<i>Калитин С.Б., Калитин Б.С.</i> Оптимальное управление помехой в задаче преследования на плоскости.....	98
<i>Близнец И.В.</i> О критических p -композиционных формациях	101

ХРОНИКА

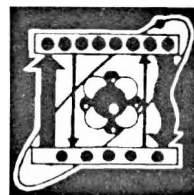
<i>Манак И.С.</i> Студенческой научно-исследовательской лаборатории полупроводниковых лазеров – 10 лет.....	103
---	-----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Алексей Адамович Гусак	105
------------------------------	-----

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Антон Никифорович Севченко (к 100-летию со дня рождения).....	107
Владимир Иванович Крылов (1902–1994)	109
Ученый, педагог, организатор науки (к 75-летию со дня рождения Л.В. Володько)....	110
Рефераты	112



УДК 546.185 + 546.791

Д.С. УМРЕЙКО, В.В. СЫТЬКО, В.И. ПОКАТАШКИН

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРОВ БЕСФОНОННЫХ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ ФТОРИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ УРАНИЛА

Temperature dependence of zero-phonon lines parameters (ZPLP) in electronic-vibration spectra of crystals of a type $\text{Me}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ has been investigated in a range of 4,2÷40 K. Stokes shift of combining electronic states has been determined as a factor leading to the asymmetrical distorting of ZPLP which can be approximated by lognormal distribution with parameters depending on Huang-Rhys factor and effective temperature. Temperature broadening of ZPLP is mainly due to the change of initial states populations. In turn, ZPLP maximums shift is stipulated by the forbidden nature of the first electronic transitions of complex uranyl compounds and is determined mainly by non-linear character of zero-phonon coupling. The temperature dependence of the total integral intensity of given zero-phonon lines can be described in configuration coordinates model of impurity center with one local oscillation.

Изучение температурной зависимости электронных спектров комплексных соединений уранила (КСУ), с одной стороны, дает ценную информацию о природе активных центров, характере их межцентрового взаимодействия и взаимодействий с матрицей. С другой стороны, исследование спектров селективно возбуждаемой люминесценции (СВЛ) КСУ может дать новые сведения о характере перераспределения энергии электронного возбуждения, особенностях взаимодействия возбужденного центра с окружающей средой и уточнить механизм формирования полос электронных переходов. Такая задача в свое время была поставлена Антоном Никифоровичем Севченко, 100-летие со дня рождения которого отмечается научной общественностью Беларуси. В плане ее решения нами исследовано температурное уширение и сдвиг бесфононных линий (БФЛ) кристаллов пентафторуранилатов $\text{M}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ (M – K, Rb) в диапазоне 4,2÷40 K, в том числе и при селективном лазерном возбуждении.

Электронные спектры кристаллов $\text{K}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ и $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ подобны и подвержены однотипной температурной трансформации. При 4,2÷40 K полоса поглощения, отвечающая первому электронному переходу, с высокой степенью точности может быть представлена логарифмически нормальным контуром и слабо подвержена температурной эволюции в отличие от спектров люминесценции, которые изменяются с температурой более сильно (зависимость БФЛ спектров люминесценции от температуры показана на рис. 1 для области первого колебательного повторения линии чисто электронного перехода ν_0 с частотой $\nu_1(\text{UO}_2^{2+})$ на примере $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$). При росте

температуры наблюдается гипсохромный сдвиг спектра и изменение параметров формы, однако значения колебательных частот практически остаются прежними.

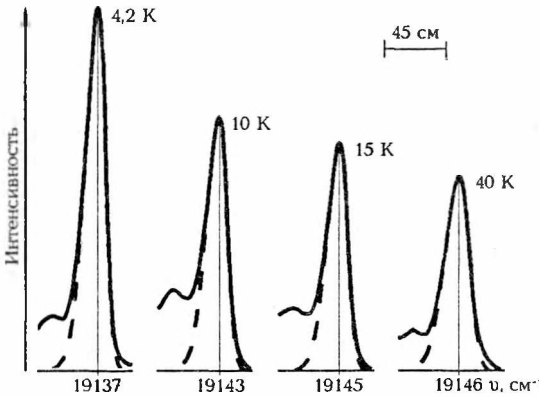


Рис. 1. Фрагменты спектров люминесценции кристалла $Rb_3UO_2F_5$ в области $\nu_0 - \nu_5$. Штриховая линия – логарифмически нормальная составляющая БФЛ

Термоуширение и сдвиг БФЛ в спектрах КСУ в диапазоне $77 \div 300$ К рассматривали в ряде работ [1, 2]. Форма БФЛ КСУ с островной структурой при $120 \div 300$ К аппроксимировалась лоренцевым контуром, а в диапазоне $77 \div 120$ К – сверткой гауссова и лоренцева контуров. Форма БФЛ КСУ полимерного типа при $T > 120$ К представлялась контуром Лоренца, а в области $77 \div 120$ К – искаженными гауссовым либо лоренцевым контурами. Рассматривая БФЛ кристаллов

КСУ как оптический аналог γ -линии Мессбауэра, авторы работ [3, 4] отмечали, что термозависимость ее полуширины $\Gamma(T)$ может быть описана в рамках теории Кривоглаза – Маккамбера выражением вида

$$\Gamma(T) = \alpha_1 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{7 \Theta/T} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2} dx, \quad (1)$$

где α_1 – постоянная, определяемая свойствами кристалла, $\Theta = h\nu_F/k$ – дебаевская температура, ν_F – фононная частота, k – постоянная Больцмана. В то же время температурный сдвиг БФЛ $\Delta\nu(T)$ не подчиняется удовлетворяющей теории [3, 4] зависимости

$$\Delta\nu(T) = \alpha_2 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^4 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (2)$$

а, скорее, может быть описан степенной функцией

$$\Delta\nu(T) = \alpha_3 T^n, \quad (3)$$

где α_2 и α_3 – постоянные, а показатель степени $n \approx 4$.

Наши исследования показали, что в диапазоне $4,2 \div 40$ К контур БФЛ кристаллов пентафторуранилатов, скорее, может рассматриваться как логарифмически нормальный (асимметричный гауссов), температурная зависимость полуширины БФЛ (рис. 2) не удовлетворяет выражению (1), а изменение с температурой ее спектрального положения не может быть описано формулами (2) либо (3). Очевидно, если учесть, что спектроскопические свойства КСУ удовлетворительно описываются в рамках модели примесного центра, наблюдаемые закономерности целесообразно рассматривать в модели конфигурационных координат [5, 6]. В данной модели контур БФЛ определяется конфигурационными кривыми комбинирующих состояний, фононным спектром кристалла и является функцией температуры:

$$I(\nu_{ij}) = |V_{ij}|^2 \int \rho_i(T) \delta(|E_i(Q) - E_j(Q) - h\nu|) dQ,$$

где Q – конфигурационная координата, i и j – индексы начального и конечного состояний, $|V_{ij}|$ – матричный элемент диполь-дипольного взаимодействия

ствия, $\rho_i(T)$ – температурное распределение заселенности состояния осцилляторов:

$$\rho_i(T) = \exp\left(-\frac{E_i(Q)}{kT^*}\right) \left[\int \exp\left(-\frac{E_i(Q)}{kT^*}\right) dQ \right]^{-1},$$

$$T^* = \frac{h\nu_{F,i}}{2k} \coth\left(-\frac{h\nu_{F,i}}{2kT}\right).$$

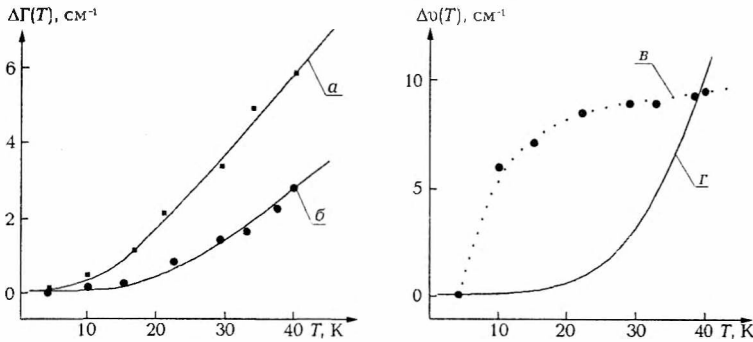


Рис. 2. Термоуширение и сдвиг БФЛ спектров люминесценции $K_3UO_2F_5$ (а) и $Rb_3UO_2F_5$ (б-з): точки – эксперимент; сплошные линии (а, б) – расчет по формуле (4), (з) – по формуле (5); $\alpha_4 = 271 \text{ см}^{-2}$, $\Theta = 37,5 \text{ К}$, $\alpha_5 = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1} \text{ К}^{-4}$ для $Rb_3UO_2F_5$

Если силовые постоянные основного (ω) и возбужденного (ω') состояний равны (случай линейного электрон-фононного взаимодействия), то контур БФЛ описывается гауссовым распределением вида

$$I(\nu_{ij}) = \frac{|V_{ij}|^2}{\sqrt{2\pi\omega^2 q^2 kT^*}} \exp\left[-\frac{(h\nu - E_{ij})^2}{2\omega^2 q^2 kT^*}\right].$$

Если условие $\omega = \omega'$ нарушается, контур БФЛ претерпевает несимметричное искажение. Согласно [5] он может быть аппроксимирован функцией логарифмически нормального распределения

$$I(\nu) = I_0 \exp\left\{-\frac{\ln 2}{\beta^2} \left[\ln\left(1 + 2\beta \frac{\nu - \nu_0}{\sigma}\right)\right]^2\right\},$$

где β и σ – параметры, определяемые свойствами кристалла, причем $2\beta(\nu - \nu_0)/\sigma > 1$. Отношение силовых постоянных конфигурационного взаимодействия ω'/ω в возбужденном и основном состояниях активного центра определяет отношение полуширин БФЛ спектров поглощения и люминесценции как $\Gamma_{\text{погл}}/\Gamma_{\text{люм}} = (\omega'/\omega)^3$ [6]. Однако в обоих случаях термозависимость полуширины БФЛ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma(T) = \sqrt{4\omega^2 q^2 h\nu_{F,i} \ln 2 \coth\left(\frac{h\nu_{F,i}}{2kT}\right)} = \sqrt{\alpha_4 \coth\left(\frac{\Theta}{T}\right)}. \quad (4)$$

Для всех кристаллов $M_3UO_2F_5$ характерно уменьшение значений частот колебаний $\nu_s(UO_2^{2+})$ в первом возбужденном состоянии по сравнению с основным на 14÷17%. Это свидетельствует об увеличении межатомного расстояния U–O в группе уранила и указывает на уменьшение силовой постоянной взаимодействия U–O в ураниловом комплексе. По нашим оценкам, в

диапазоне 4,2÷40 К отношения $\overline{\omega'}/\overline{\omega}$ для кристаллов $K_3UO_2F_5$ и $Rb_3UO_2F_5$ остаются практически постоянными, составляя ~1,11 для $K_3UO_2F_5$ и около 1,14 – для $Rb_3UO_2F_5$, т. е. температурное уширение БФЛ преимущественно связано с изменением заселенности начальных состояний осцилляторов. В то же время сдвиг максимумов БФЛ в спектрах поглощения практически не наблюдается, а в спектрах люминесценции (см. рис. 2) не подчиняется степенной зависимости

$$\Delta\nu(T) \cong \alpha_5 T^4, \quad (5)$$

предсказываемой в модели конфигурационного взаимодействия. Это обусловлено запрещенным характером первых электронных переходов в КСУ [7], когда спектральное положение БФЛ определяется вкладами только членов нелинейного электрон-фононного взаимодействия. С этим связан и тот факт, что температурный сдвиг БФЛ в спектрах поглощения практически отсутствует.

Дополнительная информация о механизме формирования контура БФЛ может быть получена из анализа распределения ее интегральных интенсивностей и колебательных повторений, а также из кинетических измерений. Интегральные интенсивности логарифмически нормальных компонент БФЛ в спектрах люминесценции кристаллов $Me_3UO_2F_5$ изменяются неодинаково с изменением температуры, причем по мере увеличения числа колебательных повторений характер этой зависимости меняется. Температурное поведение интегральной интенсивности асимметричной гауссовой составляющей в спектре поглощения соответствует таковому в спектре люминесценции.

Люминесценция кристаллов $Me_3UO_2F_5$ характеризуется тем, что наблюдаемое время ее жизни τ в исследованном диапазоне температур остается постоянным. Скорость люминесценции $w=1/\tau$ связана со скоростью дезактивации возбужденного состояния $w_0=1/\tau_0$ соотношением

$$w = w_0 + d = \frac{w_0}{\eta}, \quad \eta(T) = I_{\text{люм}}(T)/I_{\text{погл}}(T),$$

где τ_0 – естественное время жизни возбужденного состояния, d – скорость безызлучательных переходов, η – квантовый выход люминесценции. Совпадающее изменение интенсивности БФЛ в спектрах поглощения и люминесценции и постоянство времени жизни люминесценции в области 4,2÷40 К свидетельствуют о независимости квантового выхода люминесценции от температуры. Таким образом, наблюдаемая термозависимость интенсивности БФЛ в спектрах должна быть связана с зависимостью от температуры ее сил осцилляторов.

Закономерности изменения интенсивности БФЛ также весьма удовлетворительно описываются в модели конфигурационных координат центра с одним локальным колебанием $\nu_L = \nu_s(UO_2^{2+})$. Условием, позволяющим такое описание, является то, что для исследуемого диапазона температур значения частот $\nu_s(UO_2^{2+})$ достаточно велики ($h\nu_s/k \approx 1145 \text{ К} > T$).

В отсутствие локальных колебаний сила осциллятора БФЛ центра определяется величиной перекрытия волновых функций комбинирующих электрон-фононных состояний и температурным распределением заселенности состояний. При термодинамическом равновесии электрон-фононной системы в момент начала перехода ($t=0$) сила осциллятора БФЛ

$$f_0(T) = C|V|^2 \exp\left(-\mathfrak{R}_0 \coth\left[\frac{h\nu_F}{2kT}\right]\right), \quad (6)$$

где C – постоянная, $|V|$ – электронный матричный элемент взаимодействия, ν_F – "эффективная" фононная частота, а фактор Хуанга – Риса (стоксовы потери) \mathfrak{R}_0 в простейшем случае может быть представлен в виде

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\nu_{\text{погл}} - \nu_{\text{люм}}}{2\nu_F} = \frac{P_S}{h\nu_F}.$$

При наличии локального колебания ν_L структура спектра меняется [8, 9]. В электронно-колебательных спектрах БФЛ соответствующая чисто электронному переходу ν_0 повторяется с частотой $\pm\nu_L$ ("+" – поглощение, "-" – люминесценция), причем в силу принципа подобия форме БФЛ ν_0 соответствуют формы линий ее колебательных повторений с n квантами ν_L . Силы осцилляторов f_n БФЛ определяются произведением функции (6) на весовой коэффициент $S_n(\nu_L, T)$ n -го повторения ν_0 с частотой ν_L :

$$f_n(T) = S_n(\nu_L, T) f_0(T), \quad (7)$$

где $S_n(\nu_L, T)$ в свою очередь является функцией температуры, модулированной в такт функции Бесселя первого рода n -го порядка. Распределение сил осцилляторов (интегральных интенсивностей I) соответствующих переходов, пропорциональных квадратам интегралов Франка – Кондона для локального осциллятора при заданной температуре, определяется как

$$\frac{f_n}{f_0} = \frac{I_n}{I_0} = \frac{(p_L)^n}{n!},$$

где $p_L = P_L/(h\nu_L)$ называют параметром Стокса для локального колебания ν_L , P_L – энергия стоксовых потерь при наличии локального колебания в системе.

Для кристаллов $\text{Me}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ с ростом температуры величина стоксовых потерь и соответственно параметры Стокса $p_L = p_\nu$ возрастают (рис. 3).

При этом с увеличением числа n колебательных квантов $\nu_s(\text{UO}_2^{2+})$ растет и относительная интенсивность соответствующей БФЛ на частоте $\nu_0 - n\nu_s(\text{UO}_2^{2+})$, однако суммарная интегральная интенсивность

$$I_\Sigma = I(\nu_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_\nu^n}{n!} = I(\nu_0) \exp(p_\nu)$$

с ростом температуры падает.

С учетом экспериментальных данных для $p_\nu(T)$ зависимость $I_\Sigma(T)$ может быть представлена выражением типа (7) с "эффективным" весовым коэффициентом $S_\Sigma(\nu_s, T)$. При этом, когда энергия локального колебания $h\nu_s/k$ существенно больше энергии системы в равновесном состоянии kT , коэффициент $S_\Sigma(\nu_s, T)$ может быть с достаточной степенью точности аппроксимирован экспоненциальной функцией от параметра Стокса p_ν . Тогда

$$I_\Sigma(T) \approx I_\Sigma(0) \exp(-\alpha p_\nu(T)) \exp\left(-\mathfrak{R}_0 \coth\left[\frac{h\nu_F}{2kT}\right]\right), \quad (8)$$

где параметр α определяется эффективным вкладом рассматриваемого локального колебания ν , из совокупности возможных для данного центра. Соответствующие зависимости $I_\Sigma(T)$, определенные из эксперимента и полученные по формуле (8), показаны на рис. 3. Значения эффективной фонон-

ной частоты $\nu_f \approx 108 \text{ см}^{-1}$ и фактора Хуанга – Риса $\mathcal{R}_0 \approx 0,114$ определены в экспериментах по исследованию температурной зависимости полуширины БФЛ. Удовлетворительное согласование экспериментальных и расчетных данных достигается при значении $\alpha = 0,52$.

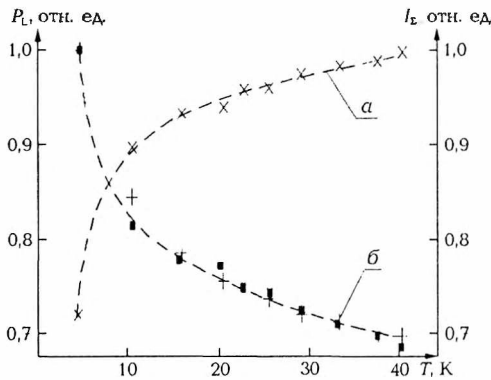


Рис. 3. Температурная зависимость параметров Стокса (а) и суммарной интегральной интенсивности БФЛ $\nu_0 - n \nu_s(\text{UO}_2^{2+})$ (б) в спектре люминесценции $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$: \times и $+$ – эксперимент, \blacksquare – расчет по формуле (8)

Нами было показано [7], что электронные переходы в КСУ в области до $30\,000 \text{ см}^{-1}$ носят характер переходов с переносом электрона преимущественно с орбиталей экваториальных лигандов уранилового комплекса на атомные U5f-орбитали, а фотофизические процессы развиваются главным образом в группе уранила. Электронное возбуждение ведет к ослаблению связей иона UO_2^{2+} с лигандами, индуцируя усиление его взаимодействия с решеточными модами кристалла. Это соответствует проявлению основных признаков модели примесного

центра. В данном случае форма БФЛ определяется величиной сдвига q равновесных расстояний основного и возбужденного состояний активного центра, а уширение – преимущественно температурным распределением заселенности состояний осцилляторов. Очевидно, что свою роль играет и запрещенный характер рассматриваемых электронных переходов.

1. Щелоков Р.Н., Красилов Ю.И., Карасев В.Е. // ФТТ. 1972. Т. 14. С. 2175.
2. Щелоков Р.Н., Эллерт Г.В., Карасев В.Е. и др. // Оптика и спектроскопия. 1973. Т. 35. С. 982.
3. Кривоглаз М.А. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 765.
4. McCumber D.E. // J. Math. Phys. 1964. Т. 5. С. 222.
5. Jacobs P.V.M., Thorsley S.A. // Cryst. Latt. Defects. 1974. Т. 5. С. 51.
6. Tyner C.E., Drotning W.D., Drickamer H.G. // J. Appl. Phys. 1976. Т. 47. С. 1044.
7. Сытько В.В., Умрейко Д.С. // ЖПС. 1998. Т. 65. С. 818.
8. Ребане К.К. Элементарная теория колебательной структуры примесных центров кристаллов. М., 1968.
9. Стоунхэм А.М. Теория дефектов в твердых телах. М., 1978. Т. 1.

Поступила в редакцию 28.10.2002.

Дмитрий Степанович Умрейко – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИИФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Владимир Владимирович Сытько – доктор физико-математических наук, профессор кафедры оптики ГГУ им. Ф. Скорины.

Виктор Иннокентьевич Покаташкин – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Национального научно-исследовательского центра мониторинга озоносферы БГУ.

Е.С. ВОРОПАЙ, М.П. САМЦОВ, К.Н. КАПЛЕВСКИЙ, А.А. ЛУГОВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ИОННЫХ ПАР ИНДОТРИКАРБОЦИАНИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ

The changes in absorption and emission spectra due to the formation of ion pairs in indotricarbocyanine dye TICS with Br^- anion and its cationic analog with BF_4^- anion in ethanol, methylene chloride, dichlorobenzene have been studied. It has been found that on going to low-polarity solvents the formation of ionic pairs is exhibited not only by electronic absorption and emission spectra, but also by excitation spectra and fluorescence anisotropy. It has been first found that excitation and polarization spectra of fluorescence reveal considerable changes in the spectral region associated with short wavelength absorption bands: upon heating a decrease of the fluorescence quantum efficiency is less pronounced and is associated with higher wavelength emission centers.

Полиметиновые (цианиновые) красители (ПК) в настоящее время широко используются в лазерной технике [1] и фотографической промышленности [2], в активных слоях оптических дисков [3], существует также потенциальная возможность применения цианинов в качестве фотосенсибилизаторов для фототерапии рака [4].

В данной работе приведены результаты исследования спектрально-люминесцентных свойств ПК [5–7]. Актуальность проведения исследований и анализа спектральных характеристик этих красителей в малополярных органических растворителях обусловлена низкой диэлектрической проницаемостью их окружения в опухолевых клетках, где молекулы катионных полиметиновых красителей связаны с биологическими макромолекулами [5].

Материал и методика

В качестве объекта исследования был выбран катионный индотрикарбоцианиновый краситель ТИКС [5, 6] с анионом Br^- , а также его катионный аналог с анионом BF_4^- . Эти оригинальные соединения синтезированы в лаборатории спектроскопии Института прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко БГУ. Спектрально-люминесцентные свойства красителей исследовались в предварительно очищенных по стандартным методикам [8] органических растворителях различной полярности.

Исправленные спектры флуоресценции, возбуждения флуоресценции, а также поляризационные спектры регистрировались с помощью спектрофлуориметра Fluorolog фирмы Spex, спектры поглощения – спектрофотометром PV 1251A. Длительность флуоресценции красителя определялась на разработанном в лаборатории спектроскопии импульсном спектрофлуориметре [9], в котором реализован времякоррелированный счет фотонов. Характеристики люминесценции полиметиновых красителей в значительной степени зависят от температуры раствора, в связи с чем все образцы термостатировались с помощью термостата UTU-2.

Результаты и их обсуждение

В работе проанализированы электронные спектры поглощения и испускания, возбуждения флуоресценции, а также определены основные спектрально-люминесцентные характеристики фотосенсибилизатора ТИКС и его катионного аналога в этаноле, хлористом метиле, дихлорбензоле (таблица).

Электронные спектры поглощения обоих красителей в этиловом спирте в диапазоне концентраций 10^{-7} – 10^{-4} М сохраняют форму и положение, выполняется закон Бера. При этом спектры, квантовый выход и длительность флуоресценции для этих растворов совпадают и также остаются без изме-

нений. Их спектры флуоресценции не зависят от длины волны возбуждающего света, спектры возбуждения флуоресценции – от длины волны регистрации и по форме совпадают со спектрами поглощения. Эти результаты свидетельствуют о достаточно высокой степени чистоты обоих красителей, а также о том, что в этаноле они находятся в виде полностью диссоциированных свободных ионов.

Спектрально-люминесцентные свойства красителя ТИКС (анион $B\Gamma^-$) и его катионного аналога (анион BF_4^-) в различных средах ($C_{кр} = 10^{-6} M$)

Спектрально-люминесцентные характеристики	Среда					
	Этанол		Дихлорбензол		Хлористый метилен	
	$B\Gamma^-$	BF_4^-	$B\Gamma^-$	BF_4^-	$B\Gamma^-$	BF_4^-
λ_{max}^{abs} , нм	724	724	742	740	734	735
λ_{max}^f , нм	750	750	764	765	760	761
$\Delta\lambda^{ab}$, нм	50	50	64	55	66	55
$\epsilon_{max} 10^3 M^{-1} cm^{-1}$	2,8	2,6	1,5	1,7	2,5	2,6
$\phi_f(20^\circ C)$	0,22	0,22	0,45	0,40	0,21	0,19
$P, \%$ ($15^\circ C$)	24,9	24,9	16,0	17,5	14,2	14,5
τ , нс ($20^\circ C$)	1,4	1,4	1,9	1,6	–	–

Примечание. Здесь λ_{max}^f – длина волны максимума флуоресценции; λ_{max}^{abs} – длина волны максимума поглощения; ϕ_f – квантовый выход флуоресценции, определенный при $\lambda_{возб} = 690$ нм; P – степень поляризации флуоресценции, зарегистрированный при $\lambda_{возб} = \lambda_{max}^{abs}$ и $\lambda_{рег} = \lambda_{max}^f$; τ – время жизни молекул в первом возбужденном синглетном состоянии, зарегистрированное при $\lambda_{рег} = \lambda_{max}^f$.

При переходе к таким растворителям, как хлористый метилен и дихлорбензол, наблюдается смещение максимума полосы поглощения исследованных соединений в длинноволновую область по сравнению с этанолом, увеличивается его полуширина (см. таблицу). Учитывая то, что изменения спектральных характеристик красителей в хлористом метиле и дихлорбензоле аналогичны, далее более подробно обсуждаются данные для дихлорбензола. Краситель ТИКС в этом растворителе имеет необычную для ПК форму полосы поглощения, которая проявляется в возникновении плеча на длинноволновом краю спектра в области $\lambda=790$ нм. Оптическая плотность D раствора красителя ТИКС в обоих малополярных растворителях не подчиняется закону Ламберта – Бера. Вклад новой полосы в суммарный спектр поглощения возрастает при уменьшении концентрации раствора красителя от $C=10^{-5} M$ до $C=10^{-7} M$. При этом в спектрах на длине волны $\lambda=785$ нм присутствует изобестическая точка, отношение оптической плотности на длине волны $\lambda=742$ нм к плотности на $\lambda=790$ нм уменьшается с 1,86 до 1,82. Все это указывает на наличие в растворе двух поглощающих центров. Введение в раствор соли – триметилбензиламмония хлорида – приводит к возрастанию поглощения в максимуме полосы с $\lambda=742$ нм, а при $C=10^{-3} M$ длинноволновое плечо на $\lambda=790$ нм вообще не проявляется.

При возбуждении на $\lambda=790$ нм в спектре флуоресценции ТИКС появляется новая полоса с максимумом на $\lambda=813$ нм. Спектры возбуждения флуоресценции ТИКС в дихлорбензоле в значительной степени зависят от длины волны регистрации. При регистрации в области длинноволнового края спектра флуоресценции в спектре возбуждения проявляется интенсивная полоса, совпадающая по положению с дополнительным максимумом в

спектре поглощения. При этом отношение интенсивности данной полосы спектра возбуждения ($\lambda \sim 787$) к интенсивности полосы с максимумом ($\lambda \sim 742$) заметно выше, чем соответствующее отношение в спектре поглощения. При нагревании вклад этой полосы в суммарный спектр возбуждения усиливается, при температуре 75°C отношение интенсивностей в максимумах приближается к единице (отношение I_{787}/I_{742} увеличивается с 0,8 до 1,0). Повышение температуры дихлорбензольного раствора от 20°C до 75°C приводит к некоторым изменениям формы спектра поглощения ТИКС, уширяется полоса на $\lambda = 742$ нм (рис. 1), но отношение интенсивностей поглощения в максимумах практически не меняется. При охлаждении растворов до начальной температуры форма спектров поглощения и возбуждения флуоресценции восстанавливается. Наблюдаемая деформация спектра возбуждения при менее значительном изменении формы спектра поглощения свидетельствует о том, что квантовый выход флуоресценции длинноволновых центров уменьшается при нагревании медленнее. Для красителя с анионом BF_4^- в дихлорбензоле в спектрах флуоресценции и возбуждения флуоресценции в пределах длинноволновой полосы поглощения какие-либо изменения от длины волны возбуждения, регистрации не зафиксированы.

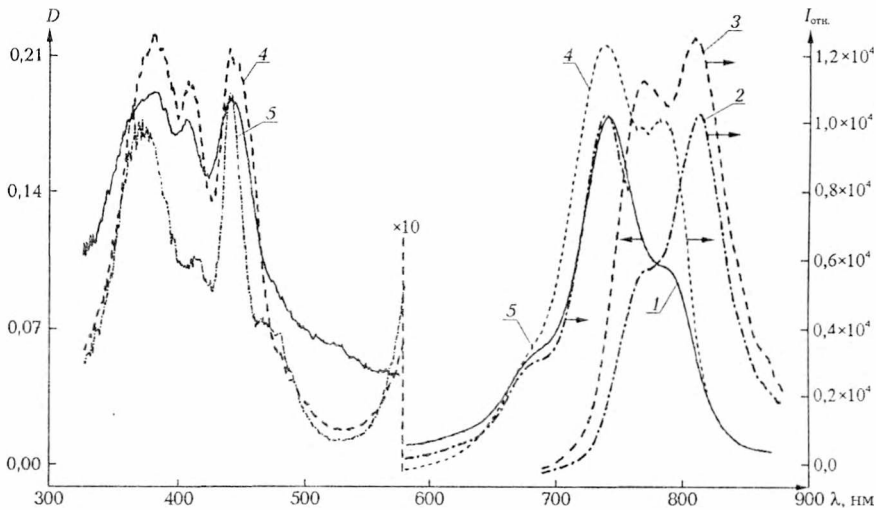


Рис. 1. Спектр поглощения (1); спектры флуоресценции при возбуждении на $\lambda = 412$ нм (2) и на $\lambda = 441$ нм (3); спектры возбуждения флуоресценции при регистрации на $\lambda = 825$ нм (4) и на $\lambda = 764$ нм (5) красителя ТИКС в дихлорбензоле

В спектральной области, соответствующей коротковолновым полосам поглощения, для ТИКС также наблюдаются значительные изменения в спектрах возбуждения флуоресценции. При этом в случае регистрации на $\lambda = 813$ нм и на $\lambda = 764$ нм они имеют значительные отличия от спектра поглощения. Для последней длины волны изменения наиболее значительные – полосы в спектре возбуждения более узкие, иное по сравнению с поглощением соотношение между интенсивностями в максимумах спектра. Так, полоса на $\lambda = 414$ нм почти не проявляется, а на $\lambda = 475$ нм, наоборот, выделяется в спектре, полоса на $\lambda = 441$ нм более узкая и, в отличие от поглощения, самая интенсивная в этой части спектра. Сравнение спектров возбуждения при 20°C и 75°C показало, что повышение температуры рас-

твора приводит к их деформации по направлению к усилению полос, характерных для регистрации на длинноволновом краю спектра флуоресценции. Следовательно, характер температурных изменений спектров возбуждения такой же, как для полос, соответствующих S_0-S_1 -переходу. Следует отметить, что для красителя с анионом BF_4^- в дихлорбензоле спектры возбуждения флуоресценции в коротковолновой области, в отличие от длинноволновой, также изменяются с длиной волны регистрации. Эти изменения менее значительные, но вместе с тем их характер аналогичен наблюдаемым для красителя ТИКС. При возбуждении в коротковолновых полосах поглощения в спектре флуоресценции красителя ТИКС наблюдаются одновременно две полосы с максимумами на $\lambda=764$ нм и на $\lambda=813$ нм. При этом наиболее интенсивным является длинноволновый максимум. Для красителя с анионом BF_4^- при возбуждении на $\lambda=410$ нм в спектре флуоресценции появляется плечо в районе $\lambda=815$ нм, т. е. при возбуждении в коротковолновой области спектральные проявления ионных пар по флуоресценции более значительные.

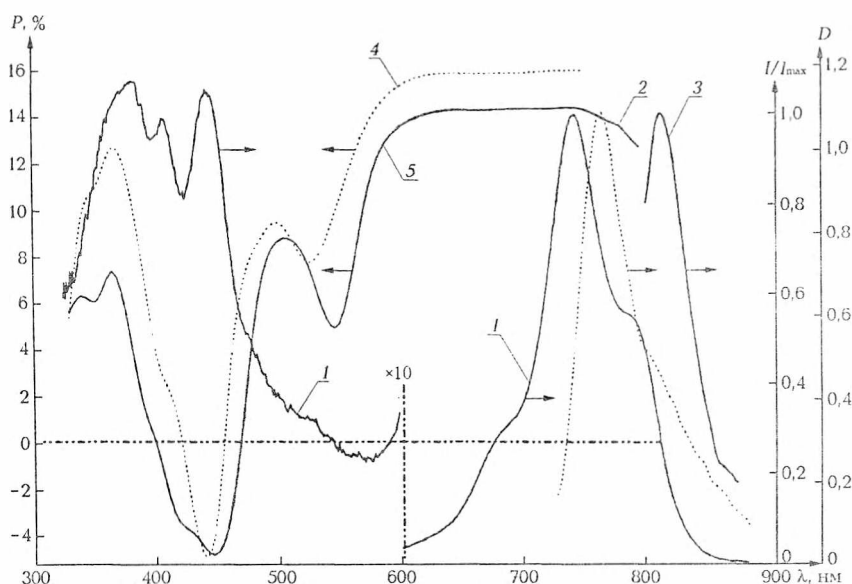


Рис. 2. Спектр поглощения (1); спектры флуоресценции при возбуждении на $\lambda=720$ нм (2) и на $\lambda=790$ нм (3); поляризационные спектры при регистрации на $\lambda=764$ нм (4) и на $\lambda=812$ нм (5) красителя ТИКС в дихлорбензоле

Исследование анизотропии флуоресценции красителей позволяет получать наиболее полную информацию о природе флуоресцирующих центров [10]. Относительно короткое время жизни в возбужденном состоянии и низкая симметрия молекул обеспечили возможность регистрации при комнатной температуре поляризационных спектров красителей в дихлорбензоле. Оба спектра при регистрации на $\lambda=764$ нм и $\lambda=825$ нм имеют аналогичную структуру и изменения в них степени поляризации флуоресценции коррелируют со спектрами поглощения (рис. 2). Такое соответствие позволяет определить в коротковолновой области спектра поглощения полосы, соответствующие переходам по крайней мере в четыре верхние возбужденные электронные состояния. Весьма близкая форма поляризационных спектров при наличии сдвигов в положении экстремумов свидетельствует о

близости положения уровней энергии, а также симметрии испускающих центров. Несколько меньшее значение степени поляризации флуоресценции для длинноволновых центров, скорее всего, обусловлено несколько большим временем жизни молекул в возбужденном состоянии, что согласуется с заключением о более медленном изменении при нагревании квантового выхода флуоресценции длинноволновых центров, полученном в результате анализа влияния температуры на спектры возбуждения флуоресценции красителей. Следует отметить, что нам не удалось заметить различия в кинетике затухания флуоресценции для коротковолновых и длинноволновых центров. Это может быть связано с тем, что в качестве источника возбуждения была использована азотная наносекундная газоразрядная лампа [9], излучение которой выделялось в области от 300 до 400 нм. Поэтому спектральное выделение излучающих центров в таких условиях проблематично. Следует указать, что оценки по формуле Левшина – Перрена в предположении одинакового сольватного объема молекул излучающих центров дают различие во времени их жизни в возбужденном состоянии на уровне погрешности определения константы затухания – 0,1 нс.

Исследованные полиметиновые красители являются солеобразными соединениями, поэтому они могут находиться в растворах в виде равновесной смеси различных ионных форм (свободных ионов, контактных и сольватно разделенных ионных пар) [11] и не полностью ионизированных молекул [12]. Равновесие между этими формами может смещаться в сторону одной из них при изменении температуры, природы растворителя, замене одного из ионов, при введении в раствор ионных и сольватирующих добавок [13, 14]. Поэтому более значительные при переходе к малополярным растворителям спектральные эффекты вследствие проявления двух компонент для красителя с анионом $B\Gamma^-$ по сравнению с анионным соединением BF_4^- можно объяснить более высокой электроотрицательностью атомов бора. Переход от первого соединения ко второму сопровождается усилением катион-анионных взаимодействий и образованием более тесных ионных пар [15]. Эта точка зрения подтверждается приведенными в настоящей работе результатами – совпадением у обоих соединений характеристик в этаноле, где красители практически полностью диссоциированы на ионы [13]. В дихлорбензоле и хлористом метиле у второго соединения меньше квантовый выход и длительность флуоресценции, так как для более тесных ионных пар существует высокая вероятность изомеризации [16–19] и крутильных колебаний вокруг связей полиметиновой цепи [20], которые приводят к усилению диссипации энергии электронного возбуждения вследствие ускорения процесса внутренней конверсии. Аналогичные, но менее значительные спектральные эффекты для красителя с анионом BF_4^- в малополярной среде обусловлены тем, что это соединение находится в растворе преимущественно в виде контактных ионных пар и небольшой доли сольватно разделенных ионных пар или свободных ионов. Для менее электроотрицательного аниона $B\Gamma^-$ равновесие смещается в сторону увеличения доли сольватно разделенных ионных пар или свободных ионов за счет уменьшения доли контактных ионных пар. Поэтому для данного соединения наблюдаются более значительные изменения в спектрах при переходе к малополярным растворителям. Длинноволновые центры и соответствующие им полосы в спектрах поглощения, возбуждения и флуоресценции обусловлены, скорее, присутствием в растворе свободных ионов. Это связано с тем, что изменение концентрации красителя в растворе не должно влиять на со-

стояние равновесия между сольватно разделенными и контактными ионными парами, а также не полностью ионизированными молекулами и контактными ионами [13]. Для красителя ТИКС наблюдается изменение спектра поглощения с концентрацией красителя.

Поскольку прочность ионных пар зависит от природы аниона и растворителя [11], нами изучены спектры поглощения и флуоресценции исследованных красителей в смесях малополярных растворителей с более полярным этанолом. Небольшая добавка (5 %) этилового спирта в дихлорбензольный раствор красителя ТИКС приводит к полному исчезновению длинноволнового плеча и росту коэффициента поглощения в максимуме полосы. Количество этанола в смеси влияет на сдвиг максимума поглощения в коротковолновую область и сужение полосы: уже при 15 % этанола максимум полосы поглощения смещается к $\lambda=724$ нм, т. е. совпадает с положением максимума в чистом этаноле. Изменение полярности растворителя в результате введения этилового спирта ослабляет электростатические взаимодействия между ионами в парах, что приводит к переходу контактных ионов в сольватно разделенные и далее – к диссоциации молекулы на свободные ионы. При этом наблюдается гипсохромный сдвиг полосы поглощения, который обусловлен повышением полярности среды, и сужение полосы вследствие исчезновения ионных пар.

Таким образом, индотрикарбоцианиновые красители в органических растворителях могут находиться в виде различных ионных форм, которые проявляются в электронных спектрах поглощения и испускания, возбуждения испускания, поляризационных спектрах, влиянии на квантовый выход и длительность флуоресценции.

Работа поддержана грантами БРФФИ – РФФИ № Ф02Р–061, РФФИ № 02–04–81018_Бел.

1. Лазеры на красителях / Под ред. Ф.П. Шефера. М., 1976.
2. Джеймс Т. Теория фотографического процесса. Л., 1980.
3. Герасимова Т.Н., Шелковников В.В. // Успехи химии. 1992. Т. 61. № 1. С. 102.
4. Diwu Z., Lown J. W. // *Pharmac. Ther.* 1994. Vol. 63. P. 1.
5. Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н. и др. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 2. С. 28.
6. Воропай Е.С., Самцов М.П., Чалов В.Н., Жаврид Э.А. // ЖПС. 2001. Т. 68. № 3. С. 359.
7. Voropay E.S., Samtsov M.P., Lugovskiy A.P. // *Proceedings SPIE.* 2002. Vol. 4749. P. 221.
8. Вайсберг А., Проскауэр Э., Риддик Дж., Тупс Э. Органические растворители / Под ред. Я.М. Варшавского. М., 1958.
9. Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н. и др. // Международная конференция по люминесценции. М., 2001. С. 86.
10. Саржевский А.М., Севченко А.Н. Анизотропия поглощения и испускания света молекулами. Мн., 1971.
11. Ионы и ионные пары в органических реакциях / Под ред. И.П. Белецкой. М., 1975.
12. Райхардт К. Растворители и эффекты среды в органической химии. М., 1991.
13. Авдеева В.И., Альперович М.А // Успехи научной фотографии. 1984. Т. 22. С. 84.
14. Теплякова Н.В., Лебедев О.Л. // Журн. физ. химии. 1975. Т. 49. С. 1154.
15. Ищенко А.А. Строение и спектрально-люминесцентные свойства полиметиновых красителей. Киев, 1994.
16. Шведова Л.А., Татиколов А.С., Ищенко А.А., Кузьмин В.А. // Изв. РАН. Сер. хим. 1992. № 1. С. 107.
17. Шведова Л.А., Татиколов А.С., Ищенко А.А. и др. // Там же. 1993. № 3. С. 507.

18. Татиколов А.С., Джулибеков Х.С., Красная Ж.А. // Там же. 1993. № 4. С. 718.

19. Tatikolov A.S., Shvedova L.A., Derevyanko N.A. et al. // Chem. Phys. Lett. 1992. Vol. 190, № 3-4. P. 291.

20. Кузьмин В.А. // Успехи науч. фотографии. 1984. Т. 22. С. 90.

Поступила в редакцию 28.10.2002.

Евгений Семенович Воропай – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии.

Михаил Петрович Самцов – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории спектроскопии НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Кирилл Николаевич Каплевский – ассистент кафедры лазерной физики и спектроскопии.

Александр Анатольевич Луговский – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии. Научный руководитель – Е.С. Воропай.

УДК 517.392

Н.Г. ЯКУТОВИЧ, В.М. АНИЩИК

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШРЕДИНГЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

There method of the numerical solution of the one dimensional reverse Shrodinger task with the use of genetic algorithm was proposed.

В микроэлектронике при переходе к наноразмерным структурам (т. е. когда размеры проводников составляют несколько десятков атомов) энергетический спектр вдоль некоторых направлений становится дискретным. Для получения заданной совокупности энергетических уровней необходимо решить обратную задачу Шредингера. Нами приводится метод численного нахождения некоторого потенциала для заданного набора всех связанных состояний с использованием так называемого генетического алгоритма (ГА). Известно, что обратная задача Шредингера решается неоднозначно в связи с произвольностью выбора модельного потенциала $V(x)$. Поскольку форма совершенно не влияет на принципиальную разрешимость обратной задачи, был выбран потенциал в виде ряда:

$$V(x) = \sum_{k=0}^N a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right),$$

где N ограничено 30, L – период потенциала, a_k – коэффициенты разложения потенциала.

Процедура решения заключалась в итеративном сопоставлении пробных решений E_i^j прямой задачи Шредингера с некоторым заданным спектром значений энергий E_i^0 , который соответствует искомому потенциалу. Это позволяет получить оценку качества каждого решения, которую можно записать как:

$$\Delta e_j = \frac{\sum_{i=1}^M (E_i^j - E_i^0)^2}{M},$$

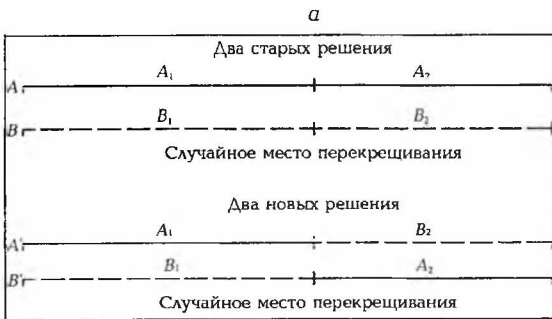
где M – число всех связанных уровней энергии в спектре для искомого потенциала. Пробный потенциал для решения прямой задачи Шредингера, соответствующий спектру E_i^j , записывается следующим образом:

$$V^j(x) = \sum_{k=0}^N a_k^j \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \quad (1)$$

Качество пробного решения тем выше, чем ближе $\Delta\epsilon$ будет к нулю. Это достигается варьированием коэффициентов a_k^j в (1). Задавая ту или иную величину $\Delta\epsilon$, можно тем самым определить точность численного решения обратной задачи. В этом случае подразумевается, что существует взаимно однозначное соответствие между a_i^j и E_i^j . Основная идея использования ГА в данном итеративном процессе заключается в возможности получить новый набор коэффициентов a_k на новой итерации с меньшей величиной $\Delta\epsilon$. Оказывается, что среди новых решений на следующей итерации может получиться решение, лучшее по качеству, а значит, и более точное по сравнению с решениями предыдущей итерации.

1. Метод генерации нового решения с помощью генетического алгоритма на базе старого

Допустим, мы имеем определенный набор коэффициентов a_i^j разложения потенциала $V(x)$ на j -й итерации. Ограничиваясь некоторой точностью задания этих коэффициентов, представим их в виде длинного двоичного числа. Если один коэффициент будет представлен в виде двоичного числа длиной 64 бита с точностью 2^{-64} , то 30 коэффициентов будут занимать 1920 бит при той же точности. Назовем такое двоичное представление одного набора коэффициентов **хромосомой**. С генетической точки зрения это не совсем верное название, однако это лишь условное обозначение, необходимое для удобства описания основных идей генетического алгоритма.



а

Два старых решения

А₁ А₂

В₁ В₂

Случайное место перекрещивания

Два новых решения

А₁ В₂

В₁ А₂

Случайное место перекрещивания

б

А 10111100010101.....10100010.....1000111010010101001011

Место мутации

А' 10111100010101.....10110010.....1000111010010101001011

Рис. 1. Генерация двух новых двоичных чисел A' и B' :
 а – перекрещивание двоичных чисел A и B в случайном разряде,
 б – мутация новых дочерних чисел

Опишем последовательность формирования нового решения, происходящую на одной итерации. Для того чтобы его получить, необходимо иметь ряд таких хромосом, которые мы назовем родительскими. Механизм ГА генерации нового решения состоит из двух стадий. Первая заключается в выборе двух произвольных родительских хромосом и в их перекрещивании в произвольной точке (рис. 1 а). Перекрещивание – это формирование двух новых двоичных чисел, одно из которых образовано старшими разрядами первого числа вплоть до некоторого случайного разряда и младшими разрядами второго числа. Другая хромосома формируется из оставшихся старших разрядов второго числа и младших разрядов первого. Две полученные хромосомы принято называть дочерними. Вторая стадия генерации решения заключается в мутации некоторых бит дочерних решений (см. рис. 1 б). Процедура мутации состоит из выбора случайного разряда дочерней хромосомы и последующего изменения данного бита на противоположный. Это необходимо

для формирования локальных отклонений в параметрах потенциала с целью увеличения скорости сходимости итеративного процесса. Обычно вероятность мутаций выбирается малой с тем, чтобы не разрушать потенциально хорошие решения. В наших расчетах вероятность мутаций любого бита составляла 0,03 %. Этот параметр влияет только на скорость сходимости численного решения и не влияет на его точность. После проведения данных стадий генерации новых решений можно получить для K родителей $K(K-1)$ детей. Вообще говоря, количество детей может быть и большим, но в своих расчетах мы ограничивались двумя дочерними хромосомами на две родительские.

После получения нового набора хромосом для каждой из них была проделана оценка качества по описанному критерию и выделена лучшая. Так как мы знаем качество K родительских и качество $K(K-1)$ дочерних хромосом на данной итерации, то для следующей итерации выбраны K новых родительских хромосом из числа предыдущих родителей и детей. В новый набор родительских хромосом, естественно, выбирается лучшее решение на текущей итерации. Далее, часть решений берется с качеством, близким к лучшему, и остальные – случайным образом. Соотношение хороших и случайных решений зависит от конкретной реализации ГА, в нашем случае оно было близко к $K/2$. После того как сформирован массив новых родительских хромосом, итерация завершена, и если качество лучшего решения устраивает, то на этом процесс заканчивается, в противном же случае необходимо повторять процедуру генерации новых решений, пока Δe_i на данной итерации не станет меньше заданной точности.

2. Некоторые примеры решения обратной задачи Шредингера

Процедура решения прямой задачи Шредингера, которая используется для оценки качества хромосомы, была осуществлена нами с помощью программы Гогтаса и др. [1]. Теория метода подробно описана в [2, 3].

Для проверки метода решения обратной задачи Шредингера с помощью ГА был использован некий затравочный потенциал, который, как видно из

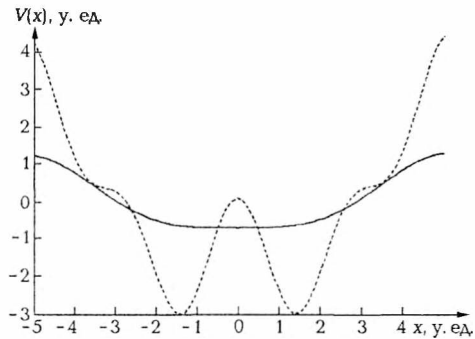


Рис. 2. Затравочный потенциал, использованный для решения обратной задачи Шредингера, и ее точное решение для заданного набора энергий.

Пунктирной линией обозначен затравочный потенциал

Таблица 1

Первые пять коэффициентов a_k разложения пробных потенциалов и точного решения

Номер	Затравочный потенциал	Точное решение	Потенциал решения (ГА)
a_0	0,0000000	0,0000000	0,0000255
a_1	-2,5000000	-1,0000000	-1,0000008
a_2	1,2500000	0,2500000	0,2500174
a_3	0,3000000	0,0000000	-0,0000590
a_4	1,0000000	0,0000000	-0,0000076

Таблица 2

Собственные значения энергии, соответствующие точному решению, и значения энергии, соответствующие численному решению обратной задачи Шредингера с помощью ГА

Номер	Решение	
	точное	численное
E_1	-0,59678894	-0,59678894
E_2	-0,21826978	-0,21826978
E_3	0,23778330	0,23778330
E_4	0,71780601	0,71780602
E_5	1,05466172	1,05466173

рис. 2, существенно отличается от потенциала, являющегося решением для заданного набора энергетических уровней. Параметры разложения обоих потенциалов приведены в табл. 1, здесь же даны их коэффициенты, полученные при решении обратной задачи Шредингера с помощью генетического алгоритма.

Как видно из табл. 2, точность решения составляет более 10^{-7} у. ед. Для расчета использовались пять пробных уровней энергии, число родительских хромосом составляло 17, количество итераций – 569. Как оказалось, количество итераций может зависеть не только от близости стартового пробного потенциала к точному решению, а также от качества генератора случайных чисел. Однако исследование данного вопроса выходит за рамки статьи.

Результаты расчетов для различных пробных потенциалов показали устойчивую сходимость к одному и тому же конечному потенциалу для заданного набора уровней энергии. На основании этого можно сделать вывод о применимости метода генетического алгоритма не только для решения обратной задачи Шредингера, но и для нелинейной минимизации некоторых функционалов.

1. Gogtas F., Balint-Kurti G.G., Marston C.C. // QCPE Program. 1993. № 647.

2. Marston C.C., Balint-Kurti G.G. // J. Chem. Phys. 1989. № 91. P. 3571.

3. Balint-Kurti G.G., Dixon R.N., Marston C.C. // Internat. Rev. Phys. Chem. 1992. № 11. P. 317.

Поступила в редакцию 12.09.2002.

Николай Геннадьевич Якутович – ассистент кафедры физики твердого тела.

Виктор Михайлович Анищик – доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета.

УДК 537.86; 621.372.823

П.Д. КУХАРЧИК, В.М. СЕРДЮК, И.А. ТИТОВИЦКИЙ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ РЕЗОНАТОРНЫХ МОД НА ПОПЕРЕЧНОЙ ЩЕЛИ ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

The problem of an electromagnetic field diffraction of a volume coaxial resonator azimuthally dependent mode on an internal transverse ring slot and cylindrical dielectric is considered. For its solution the method of fields decomposition by simple modes of the resonator without a slot is used. The discretization of integral Fredholm equations for field functions on a slot is carried out with the help of the projecting Galerkin method. The application of the system of sine basis functions for this purpose is substantiated which does not yield field singularities on borders of a slot.

Основной трудностью при решении задач дифракции электромагнитного излучения на щели является определение поля на ее поверхности. Для этого приходится привлекать дополнительные физические соображения, определяющие поведение поля непосредственно вблизи краев щели. Считается [1], что здесь оно должно вести себя подобно полю дифракции плоской волны на проводящей полуплоскости (решение Зоммерфельда [2, 3]) и иметь соответствующие сингулярности на краях. Однако возможен другой подход к определению функций поля на щели, не дающий сингулярностей как в промежуточных, так и в окончательных результатах. В данной работе он обосновывается применительно к объемному коаксиальному резонатору с поперечной кольцевой щелью, которая связывает область возбуждения по-

ля с цилиндрическим диэлектриком внутри резонатора. Такие резонаторы используются в качестве измерителей влажности зерновых материалов [4].

Применительно к резонансной системе (рис. 1) дифракционная задача состоит в определении электромагнитного поля, возникающего при возбуждении свободных колебаний в области $r < \rho < R$, $-L < z < L$, которая связана через щель с областью локализации диэлектрика $0 \leq \rho < r$. Предполагается, что поле монохроматическое и его зависимость от времени дается экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$, а от азимутальной координаты φ – синусоидальными множителями $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$, которые далее будут опускаться.

Пространственные компоненты электромагнитных полей рассматриваемой цилиндрической системы могут быть выражены через две комплексные скалярные функции $u(\rho, z)$ и $\bar{u}(\rho, z)$ (продольные составляющие магнитного и электрического векторов Герца) [3, 5]:

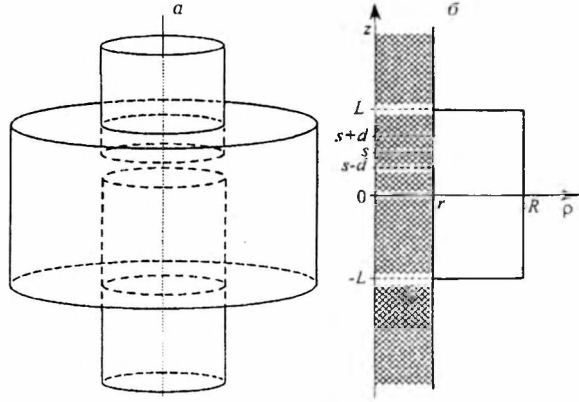


Рис. 1. Схематическое изображение коаксиального резонатора с цилиндрическим диэлектриком: а – общий вид, б – разрез по осям цилиндрической системы координат ρ и z ; r и R – радиусы стенок резонатора, $2L$ – его высота, $2d$ – ширина поперечной щели, s – ее смещение от середины резонатора

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{ikm}{\rho}u + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho \partial z};$$

$$H_\rho(\rho, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial z} - \frac{ikm}{\rho}\varepsilon(\rho)\bar{u}; \quad (1a)$$

$$E_\varphi(\rho, z) = -ik \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z};$$

$$H_\varphi(\rho, z) = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + ik\varepsilon(\rho) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho}; \quad (1б)$$

$$E_z(\rho, z) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(\rho) \bar{u}; \quad H_z(\rho, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(\rho) u, \quad (1в)$$

где $k = \omega/c$ – комплексное волновое число, $\varepsilon(\rho)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию, которая в диэлектрике ($0 \leq \rho < r$) равна величине диэлектрической проницаемости диэлектрика ε , а вне его ($r < \rho < R$) – единице. Указанная пара функций определяет H - и E -поляризации электромагнитного поля, и каждая из них должна удовлетворять уравнению Гельмгольца [3, 5].

На поверхности проводника тангенциальные (касательные) компоненты электрического поля должны обращаться в нуль [3, 5], поэтому на плоских стенках резонатора

$$E_{\rho, \varphi}(\rho, \pm L) = 0 \quad (r \leq \rho \leq R) \quad (2)$$

и на металлических цилиндрических поверхностях

$$E_{\varphi, z}(R, z) = 0 \quad (-L \leq z \leq L); \quad E_{\varphi, z}(r, z) = 0 \quad (|z - s| > d). \quad (3)$$

На щели ($\rho=r$; $|z-s| < d$), где металл отсутствует, должна иметь место непрерывность тангенциальных компонент электрического поля (1б), (1в) по обе стороны цилиндрической поверхности $\rho=r$, поэтому с учетом (3) можно ввести новые функции, определяющие распределение полей H - и E -поляризации на этой поверхности:

$$w(z) = irk^{-1}E_{\varphi}(r, z); \quad \bar{w}(z) = -ir^2m^{-1}E_z(r, z). \quad (4)$$

Если использовать представление функций $u(\rho, z)$ и $\bar{u}(\rho, z)$ в виде суперпозиции простых синусоидальных (по z) решений (мод) уравнения Гельмгольца в соответствующих областях без щели [5], то их амплитуды могут быть выражены через функции (4). Тем самым дифракционная задача сведется к нахождению последних. Они могут быть определены из условий непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля $H_{\varphi, z}$ (1б), (1в) на щели. Подставив туда разложения $u(\rho, z)$ и $\bar{u}(\rho, z)$ по простым модам областей по обе стороны щели, получим систему однородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которым должны удовлетворять неизвестные полевые функции $w(z)$ и $\bar{w}(z)$.

Численное решение такой системы требует предварительного проведения ее дискретизации, для чего можно использовать проекционный метод Бубнова – Галеркина [6, 7]. Выбор базисных функций поля на щели является здесь одним из ключевых моментов. К сожалению, до сих пор не установлены однозначные критерии такого выбора. Проще всего представить неизвестные функции $w(z)$ и $\bar{w}(z)$ на щели $s-d \leq z \leq s+d$ в виде разложения по системе синусоидальных функций (мод щели):

$$w(z) = \sum_{n=1}^N w_n \sin \tau_n (s + d - z); \quad \bar{w}(z) = \sum_{n=1}^N \bar{w}_n \cos \tau_n (s + d - z), \quad (5)$$

где $\tau_n = \pi n / 2d$, N – конечное число учитываемых мод щели, w_n и \bar{w}_n – неизвестные коэффициенты разложения. Подобная система функций, как известно [6], обладает необходимым свойством полноты в исходном бесконечномерном функциональном пространстве, а также в его конечномерном подпространстве. При этом мы не накладываем дополнительных условий асимптотического приближения искомых решений к решениям Зоммерфельда [2, 3] вблизи краев щели, т. е. не требуем, чтобы $w(z)$ и $\bar{w}(z)$ вели себя как $(z - s \pm d)^{1/2}$ и $(z - s \pm d)^{-1/2}$ при $z \rightarrow s \mp d$. В таком случае пришлось бы вместо синусоидальных базисных функций использовать другие, более сложные функции, что неизбежно ставит нетривиальный вопрос о полноте новой системы.

Вместо этого накладываются более простые условия: на краях щели функции H -поляризации и производные по координате z от функций E -поляризации должны обращаться в нуль. Такое поведение данных функций существенно отличается от поведения решений Зоммерфельда тем, что не дает сингулярностей поля на краях проводящих поверхностей. В обоснование подобного расхождения можно привести следующие соображения.

Решение Зоммерфельда [2, 3] строилось для идеально проводящей полуплоскости бесконечно малой толщины. Однако реальные проводники всегда обладают конечной толщиной, хотя и малой по сравнению с длиной волны дифрагирующего электромагнитного излучения. Для нашего случая

щель с проводниками конечной толщины можно рассматривать в качестве кольцевого фрагмента радиального волновода, на стенках которого $z=s\pm d$ должны выполняться граничные условия, аналогичные условиям (2). Именно последним условиям и удовлетворяют функции (5) и соответствующие моды щели.

В результате система интегральных уравнений сведется к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений, которую можно решить с помощью известного метода регуляризации Тихонова [8]. Условием разрешимости этой системы будет условие равенства нулю или, точнее, минимизации величины ее определителя. Именно это условие используется для вычисления комплексной величины волнового числа k . После нахождения последнего решения системы относительно неизвестных w_i и \bar{w}_i может проводиться стандартными методами [9], полагая одно из них заданным (скажем, считая $w_1=1$) и выражая через него остальные неизвестные.

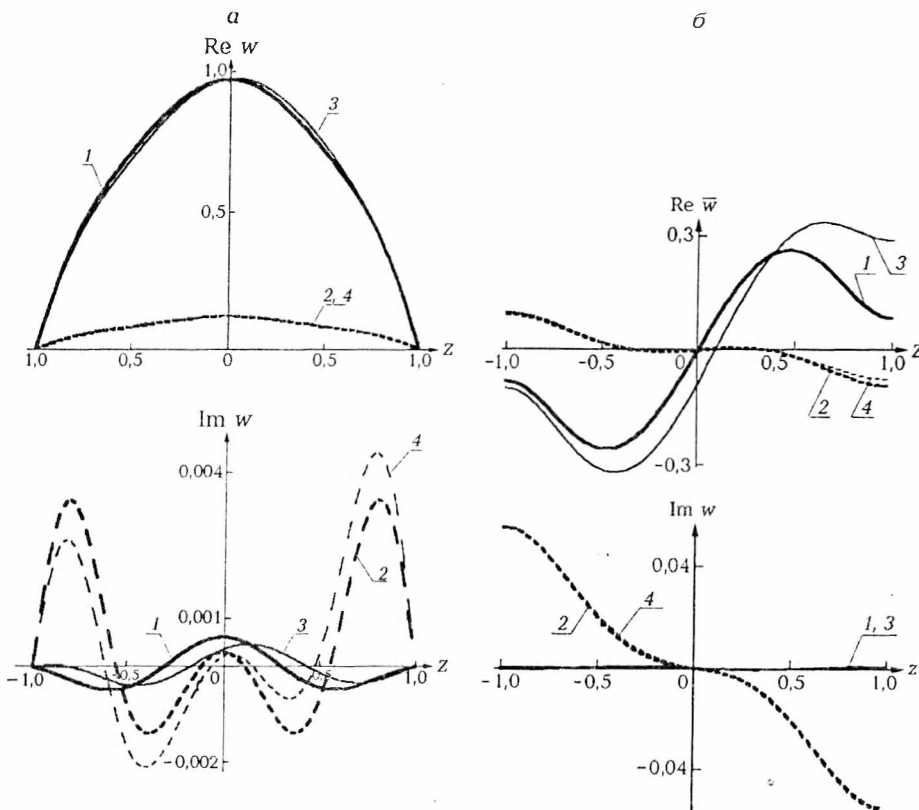


Рис. 2. Распределение вещественной и мнимой части функции H -поля (а) и E -поля (б) щели в пустом резонаторе (1, 3) и в резонаторе с диэлектриком (2, 4), когда смещение щели от середины резонатора составляет: $s=0$ (1, 2); $s=d$ (3, 4). Ширина щели $2d=2$ см

Описанная методика решения дифракционной задачи применялась к расчету электродинамических параметров коаксиального резонатора с радиусами $r=3$ см, $R=6,4$ см, высотой $2L=7,2$ см и шириной щели $2d=2$ см. Предполагалось, что возбуждение резонатора происходит на частоте, близкой частоте резонансных колебаний моды H_{301} резонатора без щели (3,6 ГГц). На рис. 2 приведены результаты решения уравнений для функций

поля на щели с диэлектриком ($\epsilon = 1 + i$) и без диэлектрика ($\epsilon = 1$) в случаях симметричного положения щели и ее смещения от середины резонатора. Здесь учтено общее уменьшение амплитуды поля за счет внесения диэлектрика в резонатор, которое по оценке [10] должно определяться множителем $(\text{Im } k_0 / \text{Im } k)^{1/2}$, где k_0 – волновое число колебаний поля в резонаторе без диэлектрика. Из рис. 2 видно, что поведение полученных решений вблизи краев щели $z = \pm 1$ отличается от того, которое предсказывает решение Зоммерфельда [2, 3]. Особенно заметно это для функции \bar{w} E -поляризации.

Таким образом, наличие зоммерфельдовской асимптотики вблизи краев щели не является обязательным условием. Более того, с физической точки зрения здесь предпочтительной оказывается система синусоидальных базисных функций. Еще одним аргументом в пользу последних может служить то обстоятельство, что при наличии сингулярностей зоммерфельдовского типа у исходных функций $w(z)$ и $\bar{w}(z)$ (5) последующее вычисление полей по формулам (1) дает заметное отклонение от требуемых граничных условий (3) на проводящей поверхности $\rho = r$, особенно в случае смещения щели от середины резонатора.

1. Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. М., 1984.

2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., 1964.

3. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.

4. Белячиц А.Ч., Гарбузенко В.В., Курило Н.И. и др. // Международная научно-техническая конференция «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». Мн., 1998. С. 8.

5. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М., 1988.

6. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.

7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, 1986.

8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.

9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.

10. Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 522.

Поступила в редакцию 21.11.2002.

Петр Дмитриевич Кухарчик – ректор Академии управления при Президенте Республики Беларусь, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики БГУ.

Владимир Михайлович Сердюк – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории радиологической диагностики НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Носиф Антонович Титовицкий – кандидат технических наук, заведующий лабораторией радиологической диагностики НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

УДК 621.372.413

С.Н. ДРОЗДОВ, П.Д. КУХАРЧИК, А.С. РУДНИЦКИЙ

СЕЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

The normalized number of resonance oscillation are calculated with a partial plane waves method and selective properties of the tetrahedral dielectric resonator are investigated.

В радиоэлектронике сверхвысокочастотного диапазона в качестве колебательных систем применяются объемные и открытые резонаторы. Локализации энергии в открытых резонаторах сопутствуют частичное излучение в

свободное пространство и связанная с ним селекция типов колебаний. Это позволяет использовать их в коротковолновых диапазонах волн, в которых закрытые резонаторы малоприменимы.

Довольно распространенной разновидностью открытых резонаторов стали диэлектрические, которые не уступают полым металлическим в температурной стабильности резонансной частоты, имеют высокие значения собственной добротности, выгодно отличаются массогабаритными характеристиками. На их основе решаются задачи миниатюризации радиоэлектронных систем. Использование диэлектрических резонаторов позволяет реализовать методы измерения параметров материалов в СВЧ-диапазоне, создавать высокоэффективные источники СВЧ-сигналов.

В настоящее время наиболее изучены и широко применяются диэлектрические резонаторы простой геометрии (сферические, цилиндрические, прямоугольные). В ряде случаев представляют интерес резонаторы сложной формы, в том числе крестообразные и калейдоскопические. В крестообразных резонаторах возможно независимое возбуждение нескольких типов колебаний. Их применение позволяет по-новому строить многорезонаторные СВЧ-структуры [1]. В циркуляторах с треугольными калейдоскопическими резонаторами потери на излучение уменьшаются за счет лучшего его согласования с полосковыми волноводами [2].

При выборе типа диэлектрического резонатора важно иметь возможность сопоставить их по различным показателям качества. Однако эта задача не решается однозначно. Так, при работе на высших модах удается увеличить добротность, но при этом ухудшается такой показатель качества, как их плотность (густота). Для его улучшения используется селекция типов колебаний, с помощью которых удается разрядить спектр и увеличить расстройку между расположенными рядом частотами. Изучение и формирование селективных свойств является одной из актуальных задач в теории и практике диэлектрических резонаторов. Их направленное изменение осуществляется путем введения в резонатор дополнительных внешних и внутренних конструктивных элементов, с помощью которых можно избирательно влиять на интенсивность различных типов колебаний [1]. Селективные свойства существенно зависят от формы резонатора и диэлектрической проницаемости его материала. В работах [3, 4] методом парциальных плоских волн исследованы селективные свойства диэлектрических волноводов и резонаторов с калейдоскопическими поперечными сечениями.

Целью данной работы является исследование тем же методом селективных свойств диэлектрических резонаторов тетраэдрической формы. Рассмотрим простейшую модель резонатора в виде диэлектрического образца, окруженного однородной средой. При относительной диэлектрической проницаемости образца $\epsilon > 1$ в резонаторе могут возбуждаться высокодобротные (резонансные) типы колебаний. При оценке селективных свойств обычно определяют число таких колебаний в заданном спектральном интервале или их спектральную плотность [5]. Введем более удобный безразмерный параметр ρ , равный отношению числа резонансных колебаний открытого резонатора к числу таких колебаний соответствующего идеального резонатора или, что одно и то же, отношению фазового объема высокодобротных колебаний к фазовому объему всех колебаний. В дальнейшем будем называть эту величину нормированной плотностью резонансных колебаний. В идеальных резонаторах все колебания являются резонансными и по-

этому их нормированная плотность всегда равна единице, т. е. принимает максимальное значение.

При выборе метода исследований необходимо учитывать свойства симметрии калейдоскопов и порождаемых ими пространств. Согласно этим свойствам в каждом калейдоскопе с помощью зеркальных изображений можно построить системы эквивалентных точек и направлений. В методе парциальных плоских волн каждому направлению соответствует плоская волна, а калейдоскопической области – решение уравнений Максвелла в виде суперпозиции плоских волн [6]. Такие решения применяются при исследовании дифракционных явлений в калейдоскопических структурах, полей мод и селективных свойств волноводов и резонаторов [3, 4, 7]. Максимальное число парциальных волн в тетраэдрических калейдоскопах равно 48. Представим их в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{\pm x, \pm y, \pm z} \exp[-i(\pm h_x x \pm h_y y \pm h_z z)], \quad (1)$$

где h_x, h_y, h_z – компоненты волнового вектора в среде с показателем преломления n . В выражении (1) учитываются все возможные перестановки знаков и индексов. Волны попарно взаимосвязаны зеркальным отражением на гранях тетраэдров. Поэтому при их переотражении не появляются новые типы волн, и в этом смысле суперпозиция (1) является замкнутой. Имеющихся в ней свободных параметров достаточно для того, чтобы удовлетворять идеальному, а в некоторых случаях и импедансным граничным условиям на поверхности калейдоскопических областей [8, 9].

Рассмотрим показанный на рис. 1 резонатор $|x| - a \leq z \leq a - |y|$ с внешними нормальными к граням

$$\mathbf{n}_{1(2)} = \left\{ 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \quad \mathbf{n}_{3(4)} = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (2)$$

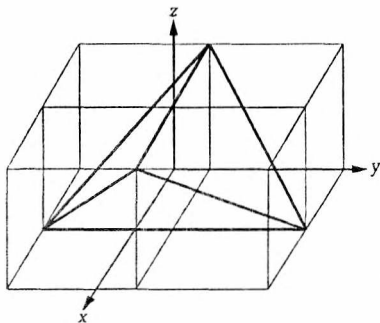


Рис. 1. Тетраэдрический резонатор $|x| - a \leq z \leq a - |y|$

Волны попарно взаимосвязаны через коэффициенты отражения на границе. Для них выполняются соотношения Снелла

$$h_i^2 - (\mathbf{h}_i \mathbf{n}_j)^2 = h_{ij}^2 - (\mathbf{h}_{ij} \mathbf{n}_j)^2, \quad (3)$$

где \mathbf{h}_{ij} – волновой вектор преломленной i -й волны на границе с внешней нормалью \mathbf{n}_j . При полном внутреннем отражении волн $(\mathbf{h}_{ij} \mathbf{n}_j) \leq 0$ и согласно (3)

$$-\sqrt{h_i^2 - h_{ij}^2} \leq (\mathbf{h}_i \mathbf{n}_j) \leq \sqrt{h_i^2 - h_{ij}^2}. \quad (4)$$

Подставляя (1), (2) в (4) и учитывая, что $|\mathbf{h}_i| = h$, $h_i^2 / h_{ij}^2 = \varepsilon$, получаем систему неравенств

$$(\pm h_x \pm h_z) \leq h \sqrt{2(1 - \varepsilon^{-1})}, \quad (\pm h_y \pm h_z) \leq h \sqrt{2(1 - \varepsilon^{-1})}, \quad (\pm h_x \pm h_y) \leq h \sqrt{2(1 - \varepsilon^{-1})}. \quad (5)$$

Два других резонатора ($2a \geq y \geq z \geq |x|$ и $2a \geq y \geq z \geq x \geq 0$) образуются разрезанием первого в плоскостях симметрии соответственно пополам и на четыре равные части. Условия полного отражения волн в них рассчитываются аналогично и формально получаются добавлением к (5) соотношений

$$\pm h_x, \pm h_y, \pm h_z \leq h \sqrt{1 - \varepsilon^{-1}}. \quad (6)$$

Знакам равенства в (5), (6) соответствуют уравнения прямых круговых конусов с вершинами в начале координат пространства волновых векторов. Угол раскрыва γ выводится из соотношения

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \epsilon^{-1}}. \quad (7)$$

Неравенства определяют фазовое пространство высокочастотных колебаний, расположенное вне этих конусов. Оно всегда меньше области резонансных колебаний идеального резонатора и приближается к ней при больших значениях диэлектрической проницаемости ϵ . С ее уменьшением фазовый объем высокочастотных колебаний сокращается и становится равным нулю при предельном значении ϵ_k . Конкретный вид зависимости $\rho(\epsilon)$ находится интегрированием в пространстве компонент волнового вектора по области существования резонансных колебаний с учетом свойств симметрии аналогично (3). При этом следует заметить, что в тетраэдрических резонаторах, в отличие от рассмотренных в работе [3] волноводных, нет выделенного направления. Условия полного отражения и соответствующие им фазовые диаграммы инвариантны относительно перестановок компонент волнового вектора. Оси конусов расположены с угловым периодом $\pi/2$ в каждой из плоскостей $h_x=0$, $h_y=0$, $h_z=0$ в случае тетраэдра $|x|-a \leq z \leq a-|y|$. В двух других резонаторах симметрия сохраняется. Однако число конусов согласно (6) увеличивается, а период уменьшается до $\pi/4$. Этому соответствует меньший фазовый объем и более редкий спектр резонансных колебаний. Такой вывод подтверждается результатами расчетов. Согласно (5) для нормированной плотности резонансных колебаний тетраэдрического резонатора получается выражение

$$\rho(\epsilon) = 6\sqrt{1 - \epsilon^{-1}} - 5 + \begin{cases} 0, & \epsilon \geq 4, \\ 4F_3, & 3 \leq \epsilon \leq 4, \\ D_1, & 2 \leq \epsilon \leq 3. \end{cases} \quad (8)$$

Для двух других резонаторов согласно (5), (6) находим

$$\rho(\epsilon) = 9\sqrt{1 - \epsilon^{-1}} - 8 + \begin{cases} 0, & \epsilon \geq \operatorname{cosec}^2(\pi/8), \\ 3F_4, & 4 \leq \epsilon \leq \operatorname{cosec}^2(\pi/8), \\ 3F_4 + 2F_2, & \epsilon' \leq \epsilon \leq 4, \\ -9\sqrt{1 - \epsilon^{-1}} + 8 - D_2, & 4 \leq \epsilon \leq \epsilon', \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{2}}, & D_{1(2)} &= \frac{12}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{6} - \arcsin \left(\frac{\cos(\varphi_{1(2)})}{2} \right) + \arcsin \left(\frac{\cos(\pi/4 + \varphi_{1(2)})}{\sin(\gamma)} \right) - \right. \\ & & & \left. - \cos(\gamma) \arccos \frac{\sqrt{\sin^2(\pi/4 + \varphi_{1(2)}) - \cos^2(\gamma)}}{\sin(\pi/4 + \varphi_{1(2)}) \sin(\gamma)} \right\}, \\ \varphi_{1(2)} &= \operatorname{arccotg} \frac{1 \pm \sqrt{2 \cos^2(\gamma) [3 - 4 \cos^2(\gamma)]}}{2 \cos^2(\gamma) - 1}, \end{aligned}$$

$$F_p = \frac{1}{\beta} \left[\arccos(\sqrt{\epsilon\beta}) - \sqrt{1-\epsilon^{-1}} \arcsin \frac{\sqrt{1-\epsilon \sin^2(\beta)}}{\cos(\beta)} \right], \quad \beta = \frac{\pi}{2p}, \quad p=2-4.$$

По формулам (8), (9) построены графики зависимости $\rho(\epsilon)$ (рис. 2). Кривая 5 относится к резонатору $|x|-a \leq z \leq a-|y|$, кривая 6 – к двум другим резонаторам. Для сравнения построены графики $\rho(\epsilon)$ для волноводных диэлектрических резонаторов с прямоугольным поперечным сечением (кривая 1) и поперечными сечениями в виде равнокатетного (кривая 2), правильного (кривая 3) и полуправильного (кривая 4) треугольников по приведенным в [3] формулам. Во всех резонаторах плотность колебаний увеличивается с ростом диэлектрической проницаемости материала. Однако в тетраэдрических резонаторах, в отличие от волноводных, пороговые значения ($\epsilon_k=2$, $\epsilon_k=3$) выше, а спектр резонансных частот реже.

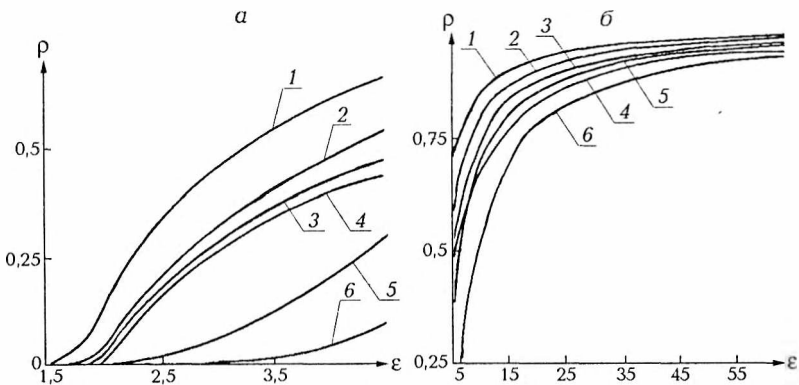


Рис. 2. Зависимость нормированной плотности резонансных колебаний от диэлектрической проницаемости материала и формы резонатора при малых (а) и больших (б) значениях диэлектрической проницаемости

Полученные результаты позволяют прогнозировать зависимость резонансных свойств от формы резонатора и диэлектрической проницаемости материала. Метод парциальных плоских волн допускает при этом обобщение и применение в исследованиях селективных свойств резонаторов с комбинированными внешними средами, с металлодиэлектрическими покрытиями и другими конструктивными элементами.

1. Диэлектрические резонаторы / Под ред. М.Е. Ильченко. М., 1989.
2. Helsing J., James D., Nisbet W. // IEEE Transactions. 1979. Vol. MTT-27. № 2. P. 138.
3. Кухарчик П.Д., Рудницкий А.С. // Радиофизика и электроника: Сб. ст. Мн., 1997. С. 111.
4. Рудницкий А.С. // Радиотехника и электроника 1995. Т. 40. № 11. С. 1636.
5. Ораевский А.Н., Щеглов В.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 1. С. 81.
6. Рудницкий А.С. // Радиофизика и электроника: Сб. ст. Мн., 1997. С. 75.
7. Корнейчик В.В., Процко С.В., Хапалюк А.П. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 8. С. 1498.
8. Рудницкий А.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1982. № 1. С. 29.
9. Рудницкий А.С., Хапалюк А.П. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 10. С. 2207.

Поступила в редакцию 13.12.2002.

Сергей Николаевич Дроздов – аспирант кафедры радиофизики. Научный руководитель – П.Д. Кухарчик.

Петр Дмитриевич Кухарчик – ректор Академии управления при Президенте Республики Беларусь, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, ведущий кафедрой радиофизики БГУ.

Антон Сергеевич Рудницкий – доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики.

УДК 524.882+530.145+531.51

В.В. ТИХОМИРОВ, С.Э. ЮРАЛЕВИЧ

НЕЙТРИННАЯ ВСПЫШКА БЕЛОГО КАРЛИКА, ПОГЛОЩАЕМОГО ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРОЙ

Primordial black holes (PBHs) of masses $M \geq 5 \cdot 10^{14}$ g are able to absorb white dwarfs (WD), giving rise to formation of black holes of WD masses. The WD absorption is accompanied by up to 10^{52} erg neutrino bursts which can be readily detected by modern neutrino detectors. We calculate time characteristics of such a burst in this paper.

Первичные черные дыры (ПЧД) могут нести разнообразную информацию о ранних стадиях эволюции Вселенной, в том числе о первичных неоднородностях, определяющих формирование ее структуры [1, 2]. Многолетний поиск ПЧД [3–5] основан на попытках зарегистрировать их хокинговское излучение [6], которое на последней стадии испарения ПЧД имеет характер нейтринных и электромагнитных вспышек и дает вклад в нейтринный и гамма-фон космического излучения [8, 9]. Однако хокинговское излучение позволяет искать ПЧД лишь массой $M \leq M_* \approx 5 \cdot 10^{14}$ г [7], которые выделяют энергии на 20 порядков меньше, чем сверхновая.

Нами предложен метод поиска ПЧД, свободный от этого недостатка. В [10] было предсказано, что ПЧД может вызвать поглощение белого карлика (БК), завершающееся образованием черной дыры с массой БК M_{WD} и нейтринной вспышкой, энергия которой сравнима с энергией сверхновой. В данной статье представлены важнейшие характеристики процесса поглощения БК, описываемые теорией стационарной аккреции [11, 12], и предложена простейшая модель не описываемой этой теорией завершающей стадии поглощения БК, на которой испускается основная часть нейтрино.

Предсказания стационарной теории аккреции

На ранних, протекающих до образования галактик стадиях формирования протозвездных облаков захваченные ими ПЧД обладали локальными скоростями не более нескольких десятков километров в секунду. При таких скоростях времени формирования и существования звезд достаточно для замедления ПЧД в их веществе вплоть до остановки в центре. Вследствие низкой плотности вещества активных звезд его аккреция на ПЧД оказывается незначительной. Однако после прохождения всех стадий эволюции большинство звезд превращаются в БК, обладающих гораздо большей плотностью, которая способствует и более интенсивной аккреции. Поэтому поиск возможных проявлений существования ПЧД следует начинать именно с рассмотрения аккреции вещества БК на ПЧД, находящуюся в его центре.

Возможность использования общерелятивистской теории сферически симметричной аккреции паскалевой жидкости [11, 12] для описания поглощения БК ПЧД обоснована в [15] и базируется на использовании модели

Ферми-газа [13] для вещества БК. Нами было доказано сохранение высокой степени вырожденности вещества БК при аккреционном сжатии его вещества и нейтронизации, а также нагреве хокинговским излучением [14].

Плотность энергии $E(n)$ и давление $P(n)$ вырожденного вещества БК определяются концентрацией электронов n и задаются выражениями [13], в которых необходимо учитывать кулоновскую поправку [15]. Радиальные зависимости концентрации электронов и радиальной компоненты 4-скорости вещества БК u (выраженной в единицах скорости света) по направлению к точке $r=0$ подчиняются [11, 12] уравнению сохранения числа электронов

$$\dot{M} = 4\pi\mu n(r)cu(r)r^2 = \text{const}, \quad (1)$$

которое определяет темп аккреции массы, и релятивистскому уравнению Бернулли

$$\left(\frac{E(n) + P(n)}{\mu c^2 n} \right)^2 \left(1 + u^2 - \frac{r_g}{r} \right) = \text{const}, \quad (2)$$

содержащему гравитационный радиус $r_g = 2GM/c^2$ ($r_g = 1,5 \cdot 10^{-15}$ м при $M = 10^{15}$ г), где G – ньютонская постоянная, μ – масса вещества БК, приходящаяся на один электрон. Const в (1) и (2) отражает независимость от r . Стационарная аккреция предполагает, что $u \rightarrow 0$ и $n \rightarrow n_0 = \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$. Значение n_0 используется для расчета константы в правой части (2).

Основным положением теории [11, 12] является существование особой (звуковой) точки (точнее, сферы) $r=r_s$, в которой выполняются соотношения

$$u_s^2 = u^2(r_s) = \frac{a_s^2}{1 + 3a_s^2} = \frac{r_g}{4r_s}, \quad (3)$$

где $a_s = a(r_s)$ – скорость звука $a = (dP/dE)^{1/2}$, выраженная в единицах c (скорости света) и взятая при $r=r_s$. Согласно этой теории поток массы, поглощаемой ПЧД, полностью определяется потоком вещества через звуковую сферу, что существенно упрощает картину поглощения БК ПЧД. Во-первых, наличие звуковой точки в аккреционном течении стабилизирует его скорость, обеспечивая выполнение условия стационарности, при котором в каждый момент времени на определенном расстоянии от ПЧД сохраняется характерный для него профиль распределения плотности и скорости аккрецирующего вещества. Условие стационарности нарушается лишь на последней минуте процесса поглощения БК, когда масса ПЧД достигает $0,01 M_{WD}$, что происходит на заключительной стадии поглощения БК ПЧД. Во-вторых, поскольку движение вещества внутри звуковой сферы полностью определяется параметрами аккреционного течения на ее поверхности и поскольку в случае плотного вещества БК звуковой радиус примерно на 3 порядка превосходит гравитационный, отпадает необходимость описания поведения вещества вблизи гравитационного радиуса и возможных квантовых эффектов вблизи него, например поляризации вакуума полем тяготения.

Используя решение Эмдена [10] $n_{Em}(r)$ для распределения электронов в БК, можно убедиться, что если ПЧД массой M находится в центре БК, то его плотность можно считать однородной в существенной для аккреции области $r \sim r_s$ при $M \leq 10^{-2} M_{WD}$. Концентрацию электронов при расчете правой части (2) в этом случае можно считать равной концентрации $n_{Em}(0) = n_0$ в центре БК. Подстановка (3) в (2) позволяет рассчитать плотность вещества БК в звуковой точке $\rho(r_s) = \mu n(r_s)$ и затем из (1) получить временную зависимость поглощенной массы, под которой мы будем понимать массу, пере-

секцию звуковой радиус, а также зависимость времени полного поглощения БК T_{abs} от его плотности в центре $\rho_0 = \mu n_0$ [16].

Поскольку наиболее мощные нейтринные вспышки сопровождают поглощение плотных БК, а также в связи с существенным упрощением формул ограничимся случаем релятивистских БК с центральной плотностью $\rho_0 > 2 \cdot 10^6$ г/см³. Для таких БК, в частности, $\rho_s = \rho(r_s) \approx 8\rho_0$ и [16]

$$T_{abs} \approx \frac{1,2 \cdot 10^9}{M_{015}(\rho_{06}/2)^{1/2}} \text{ лет}, \quad (4)$$

где M_{015} – начальная масса ПЧД, выраженная как $M_0/10^{15}$ г и $\rho_{06} = \rho_0/10^6$ г/см³. На основании оценки (4) и был сделан вывод [10] о возможности полного поглощения БК за время их существования.

Уравнение (2) позволяет также найти максимальную плотность аккрецирующего вещества релятивистского БК

$$\rho_6(r_g) = 3,35 \cdot 10^6 \sqrt{\rho_{06}/2} \text{ г/см}^3,$$

достигающуюся при $r = r_g$, где $\rho_6 = \rho/10^6$ г/см³. Существенное превышение последней над пороговой плотностью нейтронизации любого вещества позволило нам предсказать [10] существование нейтринного излучения, сопровождающего аккрецию вещества БК.

В наиболее распространенном случае углеродных БК будут протекать реакции нейтронизации $^{12}\text{C} + e^- \rightarrow ^{12}\text{B} + \nu$, $^{12}\text{B} + e^- \rightarrow ^{12}\text{Be} + \nu$, характеризующиеся пороговыми энергиями Δ_Z ($\Delta_C = 13,88$ МэВ, $\Delta_B = 12,17$ МэВ). Эти реакции будут идти ниже “радиуса нейтронизации” r_n , где энергия Ферми $\epsilon_F(r)$ превышает $\Delta_C = 13,88$ МэВ, а плотность превышает пороговую величину $\rho_n = E(n(r_n))/c^2 = 3,90 \cdot 10^{10}$ г/см³. Вместе с периодами T_{Z-1} полураспада дочерних ядер ($T_B = 20,20$ мс, $T_{Be} = 21,31$ мс) и концентрацией электронов пороговые энергии также определяют вероятности нейтронизации

$$\Gamma_Z(n) = \frac{2j_{Z-1} + 1}{2j_Z + 1} \frac{\ln 2}{T_{Z-1}} \frac{f(\Delta_Z, \epsilon_F(n))}{f(m_e c^2, \Delta_Z)}, \quad (5)$$

где

$$f(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} F(\epsilon) d\epsilon, \quad F(\epsilon) = \epsilon(\epsilon^2 - m_e^2 c^4)^{1/2} (\epsilon - \Delta_Z)^2. \quad (6)$$

Интенсивность нейтринного излучения $I_Z(n)$, приходящаяся на одно ядро, находим из выражений (5), (6) заменой последнего квадрата скобки (6) на куб.

Из уравнений (1) и (3) следует неограниченный рост темпа аккреции $\dot{M} \sim r_s^2 \sim M^2$, связанный с условием постоянства плотности аккрецирующего вещества на бесконечности. Поэтому стационарная теория аккреции не может описать завершающую стадию поглощения БК, плотность которого на поверхности падает до нуля. Между тем полному поглощению БК должна предшествовать стадия насыщения темпа аккреции, на которой интенсивность нейтринного излучения также достигает максимума.

Модель нейтринной вспышки

Приводящее к насыщению падение темпа аккреции происходит благодаря продвижению звукового радиуса r_s в область падения плотности БК при $M > 0,01 M_{WD}$. Последовательное описание аккреции в этой ситуации осложняется изменением типа уравнения (с эллиптического на гиперболический) при прохождении вещества через движущуюся звуковую точку. В отсутст-

вие достаточно разработанных методов решения подобных задач мы хотим предложить простейшую модель нестационарной стадии аккреции вещества БК на ПЧД.

Эта модель основана на использовании уравнений (1) – (3) и соотношения теории стационарной аккреции $\rho_s = \rho_s(\rho_0)$ между плотностью в звуковой точке и на бесконечности. Но теперь мы будем использовать его в качестве соотношения между плотностью вещества, проходящего через звуковую точку в данный момент времени, и плотностью этого же элемента вещества в момент до начала аккреции, когда распределение плотности БК определяется решением Эмдена. Связь координаты r данного элемента с поглощенной

массой дается очевидным выражением $M = 4\pi \int_0^r \rho_0(r) r^2 dr$, дифферен-

цирование которого вместе с уравнением (1) приводит к первому уравнению системы

$$\begin{cases} ir^2 = ca_s r_s^2 \frac{\rho_s}{\rho_0}, \\ \frac{\dot{r}_s}{r_s^2} = \frac{2\pi\rho_s}{ca_s} \left(G - 2c^2 r_s \frac{da_s^2}{d\rho_s} \frac{d\rho_s}{d\rho_0} \frac{d\rho_0}{dM} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Второе получается дифференцированием выражения (3) по r_s . Система (7) позволяет описать рост звукового радиуса $r_s(t)$ и убывание плотностей $\rho_s = \rho(r_s(t))$ и $\rho_0 = \rho_0(r(t))$. В соответствии с (1) увеличение $r_s(t)$ ведет к быстрому росту темпа аккреции. Однако падение плотности ρ_s по мере продвижения r к поверхности БК позволяет описать насыщение и падение темпа аккреции на завершающем этапе поглощения БК.

Насыщение темпа аккреции должно сопровождаться максимальной интенсивностью нейтринного излучения. Нестационарность процесса нейтронизации будем описывать с учетом изменения массы ПЧД, плотности (и скорости звука) в звуковой точке при расчете правой части (2), позволяющей найти радиус нейтронизации r_n , положив в левой $n = \rho_n/\mu$ и выразив 4-скорость из уравнения (1). Эволюцию концентрации электронов и ядер ниже точки нейтронизации будем находить из четырех уравнений их сохранения при гидродинамическом течении, дополненных вероятностями β -превращений ядер в процессе нейтронизации:

$$\begin{cases} n' = -n \left(\frac{2}{r} + \frac{u'}{u} \right) + \frac{1}{uc} [n_c \Gamma_c(n) + n_b \Gamma_b(n) + n_{Be} \Gamma_{Be}(n)], \\ n'_c = -n_c \left(\frac{2}{r} + \frac{u'}{u} \right) + \frac{1}{uc} n_c \Gamma_c(n), \\ n'_b = -n_b \left(\frac{2}{r} + \frac{u'}{u} \right) - \frac{1}{uc} [n_c \Gamma_c(n) - n_b \Gamma_b(n)], \\ n'_{Be} = -n_{Be} \left(\frac{2}{r} + \frac{u'}{u} \right) - \frac{1}{uc} [n_b \Gamma_b(n) - n_{Be} \Gamma_{Be}(n)], \\ uu' = -\frac{P'(n)}{E(n) + P(n)} \left(1 + u^2 - \frac{r_g}{r} \right) - \frac{r_g}{2r^2}. \end{cases}$$

К ним добавлено уравнение сохранения импульса, определяющее скорость аккреционного потока. Штрих обозначает производную по r ; n_C , n_B и n_{Be} – концентрации ядер углерода, бора и бериллия соответственно.

При выполнении естественного условия $\rho_s \ll \rho_n$ нахождение временных характеристик процесса нейтринного излучения существенно облегчается малым временем нейтронизации $t_{ng} = \int_{r_s}^{r_n} dr / cu(r)$ по сравнению со временем $t_{sn} = \int_{r_n}^{r_s} dr / cu(r)$ движения от r_s до r_n . Благодаря этому, например, усредненная по $t_{ng} \ll t_{sn}$ интенсивность нейтринного излучения в момент времени $t = t_s + t_{sn} + t_{ng}/2$

$$I_\nu(t) = 4\pi r_s^2 c u_s \frac{n_s}{Z} \frac{1}{t_{ng}} \int_{r_s(t_s)}^{r_n(t_s)} \frac{n_C(r)I_C(n(r)) + n_B(r)I_B(n(r))}{n_C(r) + n_B(r) + n_{Be}(r)} \frac{dr}{cu(r)}$$

получается умножением потока ядер углерода через звуковую сферу в момент t_s (n_s/Z – концентрация ядер) на усредненную по $t_{ng} \ll t_{sn}$ суммарную интенсивность нейтринного излучения ядра углерода и дочернего ядра бора. Мы пренебрегаем релятивистскими и общерелятивистскими эффектами, малыми в наиболее существенной для нейтронизации области $r - r_n \gg r_g$.

Совершенно аналогично, исходя из вероятности (5), рассчитывается число нейтрино $N_\nu(t)$, излучаемых в единицу времени, что позволяет получить их среднюю энергию $\epsilon_\nu(t) = I_\nu(t)/N_\nu(t)$, определяющую, в частности, сечение νe рассеяния, используемого для детектирования нейтрино в водных черенковских детекторах типа СуперКамиоканде.

На рис. 1 и 2 представлены графики временных зависимостей $I_\nu(t)$ и $\epsilon_\nu(t)$, рассчитанные для случая БК с центральной плотностью $\rho_0 = 10^9 \ll \rho_n$. Нулевая точка отсчета времени выбрана ориентировочно совпадающей с моментом окончания поглощения плотной части БК. Из рис. 2 нетрудно видеть, что энергия вспышки составляет около 10^{52} эрг, а длительность – менее 0,5 с, что сопоставимо с характерным временем R_{WD}/a_s и на порядок меньше времени вспышки, регистрируемой при взрыве сверхновой. Энергия нейтрино в максимуме вспышки равна 20–25 МэВ, что позволяет уверенно их детектировать СуперКамиоканде. При массе последнего в 20 кт будет зарегистрировано более 30 нейтрино от вспышки на типичном расстоянии в 10 кпс (центр Галактики).

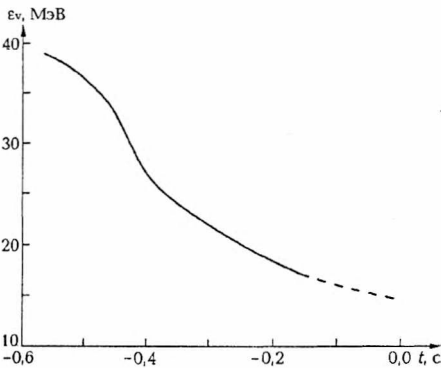


Рис. 1. Эволюция средней энергии нейтрино

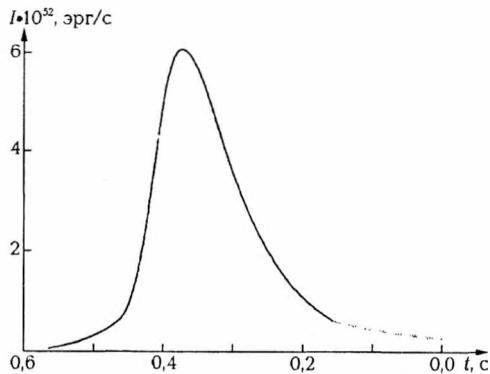


Рис. 2. Эволюция интенсивности нейтринной вспышки

Хотя поглощение нейтрино при движении от места их образования к поверхности БК будет незначительно, выделяемой при этом энергии достаточно для кратковременного нагрева поверхности БК до температуры порядка 10^7 К. В наиболее плотных БК не исключен также поджиг ядерного горения [17]. Помимо незначительного поглощения, нейтрино могут испытывать осцилляции [18], картину которых можно достаточно уверенно обрисовать. Так, при рождении в областях с плотностью $\rho \gg \rho_n = 3,90 \cdot 10^{10}$ г/см³ угол смешивания нейтрино в веществе будет весьма близок к $\pi/2$. Вследствие же быстрого спада плотности у поверхности БК вероятность перехода между суперпозиционными состояниями в области нарушения адиабатичности будет близка к единице. В результате вероятность превращения электронного нейтрино в мюонное в простейшей двухфлейворной схеме будет близка к $\sin^2\theta$, где θ – вакуумный угол смешивания. Таким образом, рассмотренная нейтринная вспышка может быть источником нейтрино различных ароматов.

Естественен вопрос о влиянии вращения на поглощение БК. Наш анализ, качественно согласующийся с выводами [19], показывает, что влияние этого трудноописываемого фактора не должно изменить наших наиболее принципиальных предсказаний. Так, восстановление сферической симметрии аккреции на ПЧД, уже поглотившую массу $M \sim 0,1 M_{WD}$, будет способствовать сохранению рассчитанных ранее характеристик нейтринной вспышки. Эффективный же вынос углового момента вязкостью электронного Ферми-газа из наиболее существенной для аккреции области $r \sim r_s$ при минимальных рассматриваемых массах ПЧД $M \sim M_*$ обеспечит сохранение сферической симметрии потока электронов и справедливость предсказаний, касающихся времени поглощения БК.

Отклонения от сферической симметрии аккреционного потока ядер вследствие флуктуаций также будут подавлены быстрым накоплением отрицательного заряда, доставляемого на ПЧД симметричным потоком электронов.

Таким образом, мы убедились, что нейтринная вспышка, сопровождающая заключительную стадию поглощения БК ПЧД, обладает энергией, всего на порядок меньшей энергии сверхновой, и может быть реально обнаружена существующими нейтринными детекторами на типичных внутригалактических расстояниях.

Возможная частота подобных вспышек зависит от таких неопределенных факторов, как распространенность, спектр масс ПЧД и вероятность их захвата БК. Однако, учитывая, что БК являются одними из самых распространенных объектов в Галактике, и предполагая однородное распределение моментов завершения их поглощения по времени, можно оптимистично предположить, что предсказываемые вспышки могут наблюдаться с частотой, даже несколько превышающей частоту взрывов сверхновых.

Согласно [9] ПЧД с массами $M_0 \ll M_*$ дают наибольший вклад в диффузный нейтринный фон, изучение которого позволяет наложить определенные ограничения на спектр флуктуаций первичных неоднородностей. Возможность интенсивного нейтринного излучения БК, поглощаемых ПЧД, может радикально изменить эту картину. Во-первых, поскольку полная энергия вспышки на 11–16 порядков превосходит энергию покоя ПЧД $M_* c^2$, даже малое число ПЧД, поглотивших БК, может уточнить ограничения на

распространенность ПЧД во много раз. Во-вторых, так как более тяжелые ПЧД поглощают БК значительно быстрее, диффузный нейтринный фон позволит наложить существенно более строгие ограничения на распространенность ПЧД массой $M_0 \gg M_*$.

Немаловажно также, что после поглощения БК возникает ЧД массой, равной массе поглощенного БК. Напомним, что столь легкие ЧД не могут образовываться в процессе гравитационного коллапса.

Авторы благодарны профессору В.Г. Барышевскому за поддержку в работе.

1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. // АЖ. 1966. Т. 43. С. 758.
2. Hawking S. W. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1972. Vol. 152. P. 75.
3. Carr B. J. // Astron. J. 1976. Vol. 206. P. 8.
4. Khlopov M. Ya. // Cosmoparticle Physics. Singapore, 1999.
5. Новиков И.Д., Фролов В.П. // Физика черных дыр. М., 1986.
6. Hawking. S. W. // Nature. 1974. Vol. 240. P. 30; Page D. N. // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 13. P. 1.
7. Carr B. J., MacGibbon I. H. // Phys. Repts. 1988. Vol. 307. P. 141.
8. Halzen F., Keszthelyi B. // hep-ph/9502268.
9. Bugaev E. V., Konishchev K. V. // Phys. Rev. D. Vol. 2002. 65. № 12. 123005; astro-ph/0103265.
10. Juralevich S. E., Tikhomirov V. V. // Contributions to V International Conference on Gravitation and Astrophysics of Asian-Pacific Countries. PFUR. Moscow, 2001. P. 6418; astro-ph/0202445.
11. Шапиро С., Тюколски С. // Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. М., 1983.
12. Michel F. // Astrophys. Space Sci. 1972. Vol. 15. P. 153.
13. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. // Статистическая физика. М., 1980.
14. Juralevich S. E., Tikhomirov V. V. // Proceedings of International School-Seminar "Actual Problems of Particle Physics". Gomel, 2001.
15. Тихомиров В.В., Юралевич С.Э. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. № 4. С. 73.
16. Тихомиров В.В., Юралевич С.Э. // Фундаментальные и прикладные физические исследования. 1986–2001 гг.: Сб. тр. / Под ред. В.Г. Барышевского. Мн., 2001. С. 81.
17. Герштейн С.С., Фоломешкин В.Н., Хлопов М.Ю. и др. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 5.
18. Bento L. // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 15013.
19. Marcovič D. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1995. Vol. 277. P. 25.

Поступила в редакцию 17.09.2002.

Виктор Васильевич Тихомиров – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией ядерной оптики НИИЯП БГУ.

Светлана Эдвардовна Юралевич – аспирант кафедры ядерной физики. Научный руководитель – В.В. Тихомиров.

УДК 538.248

И.А. БАШМАКОВ, В.А. ДОРОСИНЕЦ, М.Г. ЛУКАШЕВИЧ, Т.Ф. ТИХОНОВА

СУПЕРПАРАМАГНЕТИЗМ НАНОКЛАСТЕРОВ КОБАЛЬТА В УГЛЕРОДНОЙ МАТРИЦЕ

Cobalt nanoclusters with an average size of 10 nm embedded in a carbon matrix were prepared by thermal treatment of carboxylated cellulose doped with cobalt cations. The cobalt nanoclusters exhibit a transition from ferromagnetic to superparamagnetic state with increasing temperature. The blocking temperature T_B and the magnetic anisotropy constant K_{eff} of the nanoclusters were estimated from the magnetic hysteresis curves as well as the temperature dependence of magnetization, being about 70 K and $5,0 \cdot 10^4$ J/m³, respectively. The values of these parameters agree well with these of cobalt nanoclusters obtained by commonly used methods.

Кластеры кобальта рассматриваются в качестве базовых элементов в устройствах магнитной памяти нового поколения со сверхвысокой плотностью записи. Магнитные свойства наночастиц в немагнитной матрице существенно отличаются от свойств объемных образцов и зависят от их размера, геометрической формы, кристаллической структуры и степени структурного совершенства. Углерод является идеальным изолирующим материалом для размещения кластеров кобальта, поскольку не образует стабильных карбидов кобальта. Этим обусловлено большое число исследований, направленных на получение и изучение кластеров кобальта в углеродной матрице, появившихся в последние годы [1–8].

Традиционными методами формирования кластеров кобальта в углеродной матрице являются одновременное магнетронное или ионно-лучевое напыление углерода и кобальта на подложку в условиях высокого вакуума [2–6], а также осаждение в дуговом разряде [7, 8]. Нами был использован собственный метод формирования кластеров кобальта в углеродной матрице путем термической трансформации металл-целлюлозного предшественника, предложенный в [9], который заключается в замене протонов COOH -групп в волокнах карбоксилированной целлюлозы на катионы кобальта путем ионной сорбции с последующей термообработкой волокон. В процессе отжига при температуре 700–900 °С происходит карбонизация целлюлозы, а катионы кобальта формируют кластеры, причем с ростом температуры средний размер кластеров увеличивается от 10 до 100 нм. Этот метод обладает определенными преимуществами по сравнению с традиционными, поскольку равномерное на атомарном уровне распределение катионов металла в предшественнике способствует равномерному распределению кластеров кобальта в углеродной матрице. Кроме того, отжиг образцов проводится в условиях слабого вакуума, а подбор режима термообработки позволяет плавно изменять размер кластеров кобальта, структуру и проводимость углеродной матрицы.

Ранее нами [9] установлено ферромагнитное поведение кластеров кобальта со средним размером 100 нм при комнатной температуре. В то же время образцы $\text{C}(\text{Co})$ с размером кластеров 10 нм при этих же условиях не обладали магнитным гистерезисом, что свидетельствовало об их нахождении при комнатной температуре в суперпарамагнитном состоянии, так как сами кластеры наблюдались на электронно-микроскопических изображениях [10].

В данной работе приводятся результаты исследования суперпарамагнитных свойств нанокластеров кобальта со средним размером около 10 нм в углеродной матрице в области низких температур. Образцы $\text{C}(\text{Co})$ были получены путем термообработки металл-целлюлозных предшественников при температуре 700 °С. Петли гистерезиса намагничивания регистрировались в температурном интервале $T=5\text{--}70$ К с помощью сверхпроводящего квантового интерференционного магнитометра.

На рис. 1 приведены кривые намагничивания образцов для ряда температур. Видно, что при $T=70$ К, так же как и при $T=300$ К [9, 10], на кривых намагничивания отсутствует гистерезис, который отчетливо проявляется при более низких температурах. Этот факт свидетельствует, что кластеры кобальта, полученные по нашей методике, обладают суперпарамагнитными свойствами в области высоких температур и ферромагнитными – в области температур ниже 70 К.

На рис. 2 представлена температурная зависимость коэрцитивной силы H_C образцов, установленная на основании петель гистерезиса намагниченности. Согласно расчету [11] для невзаимодействующих магнитных кластеров температурная зависимость коэрцитивной силы дается соотношением

$$\mu_0 H_C = \frac{2K_{eff}}{M_S} \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{0,77} \right], \quad (1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, K_{eff} – константа магнитной анизотропии, M_S – намагниченность насыщения, T – температура, T_B – температура блокировки.

Наилучшая аппроксимация экспериментальной кривой достигается формулой (1) для значений $T_B = 70,9$ К и $2K_{eff}/M_S = 0,76$. Полученное таким образом значение температуры блокировки хорошо коррелирует с температурой 70 К, при которой отсутствует гистерезис на кривой намагничивания.

Характерной особенностью суперпарамагнитного поведения нанокластеров, охлажденных в отсутствие внешнего магнитного поля, является уменьшение их намагниченности с повышением температуры при проведении измерения в слабом поле. Намагниченность данных нанокластеров в ферромагнитном состоянии при тех же условиях растет с повышением температуры. Таким образом, при переходе нанокластеров из ферромагнитного в суперпарамагнитное состояние на кривой температурной зависимости намагниченности должен наблюдаться максимум. Температура блокировки, определенная по этому

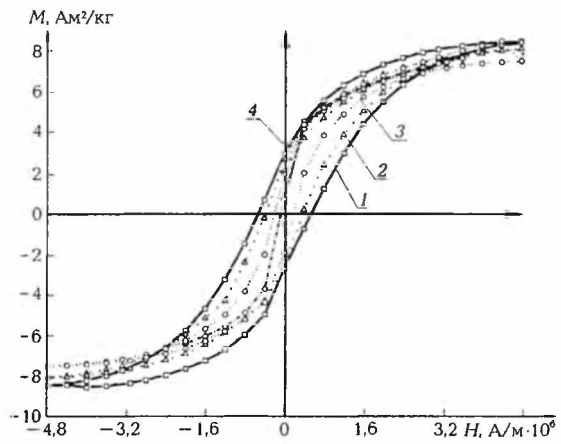


Рис. 1. Кривые намагничивания для нанокластеров кобальта в углеродной матрице. Температура измерения: 1 – 5 К, 2 – 20 К, 3 – 40 К, 4 – 70 К

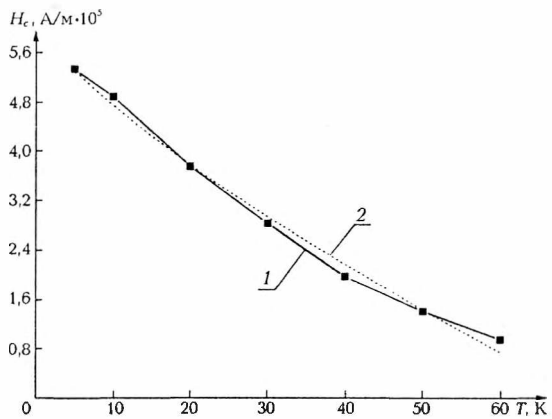


Рис. 2. Температурная зависимость коэрцитивной силы нанокластеров кобальта (1) и ее аппроксимация уравнением 1 (2)

методу для полученных нами кластеров, составляет около 73 К (рис. 3), что незначительно превышает ее величину, определенную из аппроксимации кривой намагничивания по формуле (1). Отметим, что диаметр кластеров кобальта из работы [1], температура блокировки которых имеет приблизительно такое же значение, составляет порядка 7 нм. Разброс значений температуры блокировки, определенных разными методами, может быть, в частности, обусловлен разбросом диаметров отдельных кластеров и, возможно, в некоторой степени магнитным взаимодействием между кластерами

кобальта. Этими же причинами может быть обусловлено и отклонение экспериментальной зависимости коэрцитивной силы от теоретической зависимости (1).

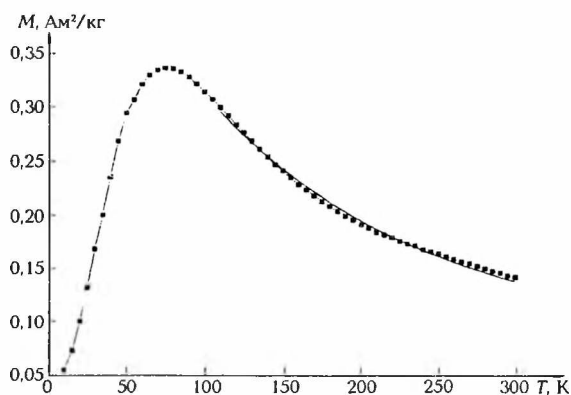


Рис. 3. Температурная зависимость намагниченности нанокластеров кобальта для напряженности магнитного поля $H=8 \cdot 10^3$ А/м и аппроксимация ее суперпарамагнитного участка уравнением Ланжевена

Возможность перехода кластеров из ферромагнитного в суперпарамагнитное состояние с повышением температуры определяется соотношением энергии теплового движения и энергии магнитной анизотропии магнитной частицы. Так, для температуры блокировки выполняется соотношение [1]

$$K_{eff} V = 25 k_B T_B, \quad (2)$$

где V – объем магнитной частицы, k_B – постоянная Больцмана. Из формулы (2) можно определить постоянную магнитной анизотропии

нанокластеров кобальта. Для кластеров кобальта размером около 10 нм, исследованных в данной работе, вычисление по формуле (2) приводит к значению константы магнитной анизотропии $K_{eff} = 5,0 \cdot 10^4$ Дж/м³, что существенно меньше значения для объемных образцов г. п. у. кобальта, составляющего в области криогенных температур $6,8 \cdot 10^5$ Дж/м³, но больше ее величины для объемных образцов г. ц. к. кобальта, составляющей $2,3 \cdot 10^4$ Дж/м³. Известно, что константа магнитной анизотропии должна увеличиваться с уменьшением размера кластеров, поскольку для кластеров наибольший эффект оказывает поверхностная анизотропия. Исходя из этого, можно сделать вывод, что полученные нами нанокластеры кобальта в углеродной матрице имеют кристаллическую структуру г. ц. к., которая стабильна для объемных образцов кобальта только при температуре выше 400 °С. Существование этой кристаллической структуры кобальта, проявляющейся в исследованных нами кластерах при низких температурах, наблюдалось также в работе [1]. Отметим, что рассчитанная нами и полученная в [1] величины K_{eff} достаточно хорошо согласуются.

Температурная зависимость намагниченности M в случае температур, превышающих температуру блокировки, для ферромагнитных частиц может быть описана уравнением Ланжевена:

$$M = M_s (\coth \alpha - 1/\alpha), \quad (3)$$

где

$$\alpha = \mu_p H / k_B T. \quad (4)$$

Здесь μ_p – средний магнитный момент частицы, а H – напряженность внешнего магнитного поля. На рис. 3 представлена аппроксимация формулой (3) участка экспериментальной кривой температурной зависимости намагниченности образца С(Сo), соответствующего суперпарамагнитному поведению кластеров кобальта, в предположении, что μ_p не зависит от температуры. Видно, что экспериментальная кривая характеризуется более быстрым спадом в области низких температур, что свидетельствует о более быстром, чем по (4), уменьшении параметра α с температурой. Можно предполо-

жить, что магнитный момент нанокластера не является постоянным, а уменьшается с ростом температуры вследствие возрастания степени спинового беспорядка в магнитной частице с ростом температуры. Однако расхождение экспериментальной и теоретической кривых для исследованных в данной работе нанокластеров кобальта существенно меньше, чем для кластеров размером 3,8–8,8 нм, исследованных в работе [1].

Таким образом, кластеры кобальта в углеродной матрице, полученные методом термообработки металл-целлюлозного предшественника при температуре 700 °С, обладают суперпарамагнитными свойствами в температурной области выше 70 К. Температурная зависимость намагниченности кластеров кобальта хорошо описывается уравнением Ланжевена. Рассчитанные нами значения температуры блокировки и константы магнитной анизотропии нанокластеров кобальта согласуются с аналогичными величинами для нанокластеров кобальта, полученными с использованием других методик.

Авторы выражают благодарность профессору Г. Миклицу (Кёльнский университет, ФРГ) за предоставление возможности проведения низкотемпературных магнитных измерений.

1. Lin X.M., Sorensen C.M., Klabunde K.J. et al. // J. Mater. Res. 1999. Vol. 14. P. 1542.
2. Hayashi T., Hirano S., Tomita M. et al. // Nature. 1996. Vol. 381. P. 772.
3. Delaunay J.-J., Hayashi T., Tomita M. et al. // Appl. Phys. Lett. 1997. Vol. 71. P. 3427.
4. Delaunay J.-J., Hayashi T., Tomita M. et al. // J. Appl. Phys. 1997. Vol. 82. P. 2200.
5. Yu M., Liu Y., Sellmyer D.J. et al. // J. Appl. Phys. 1999. Vol. 85. P. 4319.
6. Yu M., Liu Y., Moser A. et al. // Appl. Phys. Lett. 1999. Vol. 75. P. 3992.
7. Wang H., Wong S.P., Cheung W.Y. et al. // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. P. 2063.
8. Ibid. P. 4919.
9. Башмаков И.А., Доросинец В.А., Лукашевич М.Г. и др. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. С. 48.
10. Bashmakov I., Dorosinets V., Lukashevich M. et al. // J. Mater. Res. 2001. Vol. 16. P. 2832.
11. Pfeiffer H. // Phys. Stat. Sol. (A). 1990. Vol. 118. P. 295.

Поступила в редакцию 21.10.2002.

Игорь Аркадьевич Башмаков – кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник НИИФХП БГУ.

Владимир Адамович Доросинец – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры физики полупроводников и наноэлектроники.

Михаил Григорьевич Лукашевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников и наноэлектроники.

Татьяна Федоровна Тихонова – научный сотрудник НИИФХП БГУ.

УДК 539.2116.2

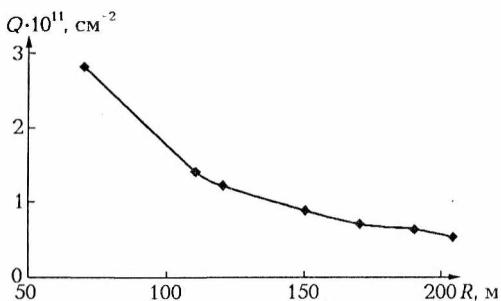
В.А. ПИЛИПЕНКО, В.Н. ПОНОМАРЬ, Т.В. ПЕТЛИЦКАЯ

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЗАРЯДОВЫЕ СВОЙСТВА ДВУХСЛОЙНОГО КОНДЕНСАТОРНОГО ДИЭЛЕКТРИКА $\text{SiO}_2 - \text{Ta}_2\text{O}_5$

The analysis of charge state change in triple system $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{SiO}_2 - \text{Si}$ depending on mechanical stresses is given in the article. Model of integrated charge formation at the occurrence of mechanical stresses.

Дальнейший рост степени интеграции СБИС требует от разработчиков уменьшения размеров элементов микросхем, что в свою очередь влечет за собой поиск новых конструктивных материалов. Так, для уменьшения площади конденсатора ячейки памяти с сохранением его емкостных характеристик необходимо уменьшить толщину конденсаторного диэлектрика. Однако такое снижение возможно до определенного предела, так как при предельно малой толщине пленок существенно возрастает их дефектность, а также изменяются диэлектрические характеристики используемого материала. Другим способом повышения емкости накопительного конденсатора является использование диэлектриков с высокой диэлектрической проницаемостью. В то же время такие материалы имеют тенденцию к уменьшению ширины запрещенной зоны в диэлектриках, и при их использовании необходимо принимать дополнительные меры для ограничения токов утечки. С целью преодоления существующих недостатков были разработаны новые варианты конденсаторных диэлектриков – составные, или комбинированные, которые сочетают в себе достоинства и компенсируют недостатки отдельных диэлектриков.

Одним из наиболее перспективных материалов для комбинированных конденсаторных диэлектрических систем является оксид тантала Ta_2O_5 , имеющий диэлектрическую проницаемость 21–27, достаточно большую ширину запрещенной зоны $\Delta E_p = 4,2$ эВ, электрическую прочность $6 \cdot 10^6$ В/см. У Ta_2O_5 установлена также хорошая воспроизводимость процессов формирования и сочетаемость с SiO_2 . Вместе с тем успешное применение комбинированного диэлектрика Ta_2O_5/SiO_2 требует дополнительного изучения ряда вопросов, в числе которых особого внимания заслуживают остаточные механические напряжения в многослойных тонкопленочных системах и их влияние на электрофизические свойства комбинированного диэлектрика. Поскольку напряжения в системах $Si-SiO_2$ и $Si-Ta_2O_5$ носят противоположный характер, то в тройной системе $Si-SiO_2-Ta_2O_5$ для устранения явления прогиба можно использовать метод компенсации упругих напряжений. Это означает, что, подбирая определенные по толщине пленки SiO_2 и Ta_2O_5 , можно свести к минимуму изгиб тройной системы и добиться в конечном итоге наилучших электрофизических свойств материала.



Зависимость плотности эффективного встроенного заряда на границе $Ta_2O_5-SiO_2$ от радиуса кривизны пластины

Анализ зависимости изменения электрофизических параметров от величины механических напряжений в тройной системе показал, что с ростом величины механических напряжений (уменьшения радиуса кривизны пластины R) эффективный встроенный заряд на границе $SiO_2-Ta_2O_5$ увеличивается (рисунок). Это позволяет предположить влияние деформации данной системы на ее зарядовые свойства. Для объяснения

факта увеличения встроенного эффективного заряда на границе $SiO_2-Ta_2O_5$ в зависимости от роста механических напряжений следует рассмотреть несколько наиболее существенных предположений: в связи с присутствием механических напряжений изменяются ширина запрещенной зоны, концен-

трация носителей, растворимость примеси, а также происходит ионизация примеси и избыточных атомов кремния в аморфных пленках двуокиси кремния при охлаждении образцов до комнатной температуры. Остановимся более подробно на перечисленных явлениях и оценим вклад каждого из указанных факторов в изменение величины заряда изучаемой трехслойной структуры.

Для оценки влияния упругих напряжений на ширину запрещенной зоны кремния в первом приближении предположим, что механические напряжения в приповерхностном слое кремния аналогичны гидростатическому давлению. Тогда ширина запрещенной зоны будет уменьшаться согласно [1]:

$$\delta\Delta E_g = \lambda P, \quad (1)$$

где $\delta\Delta E_g$ – изменение ширины запрещенной зоны в кремнии, λ – $2 \cdot 10^{-11}$ ЭВ/Па, P – механическое напряжение в кремнии, Па.

Типичные напряжения в трехслойной структуре Si – SiO₂ – Ta₂O₅ составляют приблизительно 10⁷ Па. Для таких значений изменение ширины запрещенной зоны составляет:

$$\delta\Delta E_g = 2 \cdot 10^{-11} \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ЭВ.}$$

Таким образом, изменение ширины запрещенной зоны является незначительным.

При аналогичных предположениях оценим изменение концентрации основных носителей при тех же механических напряжениях. Крутизна изменения энергии ионизации примесей с мелкими уровнями имеет порядок $\lambda_n \approx 10^{-13}$ эВ/Па; изменение концентрации носителей –

$$\Delta n/n_0 \approx \lambda_n P/kT. \quad (2)$$

Подставляя типичные значения в выражение (2), а именно $kT=0,026$ эВ при $T=300$ °С, $P=10^7$ Па, получаем $\Delta n/n_0 \approx 10^{-13} \cdot 10^7/0,026=4 \cdot 10^{-5}=0,004$ %.

Очевидно, что изменение концентрации носителей, а в нашем случае это концентрация ионизированной примеси, на 0,004 % существенного влияния на зарядовые свойства системы SiO₂ – Ta₂O₅ не окажет.

Следующим возможным фактором, влияющим на величину встроенного заряда, является растворимость ионизированной примеси в напряженных участках. Растворенные атомы могут быть атомами замещения в узле решетки или атомами внедрения, располагаясь в межузлиях матрицы. В каждом случае примесь является центром расширения или сокращения. В первом приближении будем описывать растворенный атом сферой, помещенной в сферическое отверстие определенного размера, и считать, что изменения объема пропорциональны атомному радиусу примеси [2]. Тогда изменение внешнего объема, вызываемое растворенным атомом, составляет:

$$\delta V \approx v_s - v_a, \quad (3)$$

где v_s и v_a – соответственно атомные объемы примеси и матрицы.

Если растворенный атом помещается в поле давления P , должна быть совершена обратимая работа $P\delta v$. Однако в случае, включающем энергию, связанную с увеличением давления P на вставленный атом примеси, найдем, что полная обратимая работа, совершаемая при этом, равна $P\delta V$. Энергия взаимодействия становится равной $P(v_s - v_a)$. В присутствии внутреннего поля напряжения концентрация примесей имеет вид:

$$c = c_0 \exp(-P(v_s - v_a)/kT), \quad (4)$$

где c_0 – концентрация примесей в тех областях, где внутреннее давление равно нулю; $v_a = 4/3 \pi r_{Si}^3$; $v_s = 4/3 \pi r_{прим}^3$; r_{Si} , $r_{прим}$ – радиусы атомов Si и примеси (например, Na). Поскольку $P(v_s - v_a)/kT \ll 1$, то

$$C = C_0 (1 - P(v_s - v_a)/kT), \quad (5)$$

$$C - C_0 = \Delta C/C_0 = P(v_s - v_a)/kT. \quad (6)$$

Подставляя $P=10^7$ Па и принимая во внимание, что $(v_s - v_a)=0,1 v_a$, а структура формировалась при температуре $T = 900$ °С, получаем величину $\Delta C/C_0=4 \cdot 10^{-4}$, или 0,04 %. Данное изменение концентрации также незначительно и не может привести к значительным изменениям в зарядовых свойствах границы раздела полупроводник – диэлектрик.

Теперь перейдем к рассмотрению последнего, связанного с центрами кристаллизации механизма возникновения эффективного встроенного заряда. При термическом окислении кремниевых пластин в пленках SiO_2 возникает встроенный эффективный положительный заряд, природа которого объясняется моделью заряженных кислородных вакансий, наличием в окисле катионных примесей или избыточных атомов кремния [3]. В пограничном слое окисла вблизи подложки, где обычно локализован встроенный положительный заряд, присутствуют нестехиометрические области, несвязанные атомы кремния и примесные атомы [4]. В теории встроенного положительного заряда главными являются вопросы о механизмах появления избыточных атомов кремния в пограничном слое пленок SiO_2 и их ионизации. Анализ процесса термического окисления кремния на основе двухзонной модели показывает [5], что источником избыточных атомов кремния является первая зона окисления, в которой они возникают в результате замещения узельных атомов подложки атомами кислорода, а затем диффундируют навстречу потоку окислителя. В силу чрезвычайно низкого коэффициента диффузии в SiO_2 избыточные атомы кремния накапливаются преимущественно в порах пограничного слоя растущей пленки. Экспериментально установлено, что концентрация избыточных атомов кремния в слое окисла вблизи подложки обычно на три-четыре порядка превышает плотность встроенного заряда, следовательно, их присутствие в окисле является обязательным, но недостаточным условием возникновения положительного заряда. Должны быть созданы условия для ионизации избыточных атомов кремния и других катионных примесей в окисных пленках. В результате всестороннего рассмотрения надежно установленных свойств положительного заряда и условий его образования авторами [4] была выдвинута гипотеза об ионизации катионных примесей в аморфной структуре кремнезема упругими силами кристаллической решетки зародышей, возникающих благодаря стимулирующему действию данных примесей.

При охлаждении образцов до комнатной температуры возможны два случая.

1. Если процесс охлаждения не сопровождается кристаллизацией аморфного окисла, нейтральное состояние примесных частиц сохраняется в связи с тем, что эффективный размер микропустот, в которых находятся примеси, после охлаждения остается неизменным. Кристаллизация же приводит к тому, что эффективный размер микропустот с примесями становится меньше атомного диаметра последних. В этих условиях происходит сжатие атома примеси и перераспределение его электронной плотности.

2. Если степень сжатия такова, что дальнейшее перераспределение плотности невозможно из-за перекрытия электронного облака атома примеси электронным облаком атомов матрицы, размер примесного атома должен уменьшаться. Это обусловлено принципом Паули, согласно которому в системе тождественных частиц с полуцелым спином не может быть двух

частиц в одном и том же квантовом состоянии. Атом уменьшает свой размер в результате потери электрона либо путем его перевода на свой незаполненный уровень с большой энергией, что характерно для примесей переходных либо редкоземельных металлов. В первом случае атом ионизируется, во втором – остается нейтральным. Следовательно, основным механизмом ионизации неизоморфных примесей-модификаторов, а также избыточных атомов кремния в аморфных пленках двуокиси кремния при охлаждении образцов от температуры окисления до комнатной является сжатие их окружающими атомами матрицы в результате кристаллизации окисла в микрообъемах, стимулируемой присутствием примесей.

Предложенный механизм ионизации примесей реализуется только при следующих условиях: примеси являются центрами образования кристаллических зародышей; энергия деформации каждой из связей ближайших к примеси атомов решетки меньше энергии их разрыва; суммарная энергия деформации связей кристаллического зародыша превышает энергию ионизации примесного атома. Из сказанного следует, что появление положительного заряда при термическом выращивании пленок диоксида кремния связано не со всеми катионными примесями, а лишь с теми, которые удовлетворяют изложенным условиям, причем ионизация примесей происходит, очевидно, не в момент образования кристаллитов при температуре роста пленки, а на стадии охлаждения под воздействием сил упругой деформации решетки. Последнее из выдвинутых предположений с большой вероятностью объясняет изменение зарядовых свойств трехслойной системы под воздействием механических напряжений: при охлаждении образцов от температуры окисления до комнатной температуры происходит сжатие атомами матрицы при кристаллизации окисла в микрообъемах неизоморфных примесей-модификаторов и избыточных атомов кремния в аморфных пленках диэлектрика, в результате чего они ионизируются и становятся источниками эффективного встроенного заряда.

Таким образом, проанализированы основные факторы, которые могут привести к увеличению эффективного встроенного заряда при росте механических напряжений в трехслойной системе $\text{Si} - \text{SiO}_2 - \text{Ta}_2\text{O}_5$. Анализ позволяет сделать вывод о том, что ионизация избыточных атомов кремния и других катионных примесей является наиболее вероятной причиной увеличения заряда в условиях упругой деформации.

1. Ридли Б. // Квантовые процессы в полупроводниках. М., 1986.
2. Хирт Дж., Лоте И. // Теория дислокаций. М., 1972.
3. Румак Н. В. // Система кремний – двуокись кремния в МОП-структурах. Мн., 1986.
4. Румак Н. В., Хатько В. В. // Диэлектрические пленки в твердотельной микроэлектронике. Мн., 1990.
5. Румак Н. В. // Докл. АН БССР. 1982. Т. XXVI. № 8.

Поступила в редакцию 24.06.2002.

Владимир Александрович Пилипенко – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, заместитель директора ГЦ «Белмикроанализ» НПО «Интеграл».

Владимир Николаевич Пономарь – кандидат физико-математических наук, директор УП «Белмикросистемы» НПО «Интеграл».

Татьяна Владимировна Петлицкая – ведущий инженер ГЦ «Белмикроанализ» НПО «Интеграл».

В.С. СОЛОВЬЕВ, Г.А. ГУСАКОВ, О.В. КРЕКОТЕНЬ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ TiN В КАЧЕСТВЕ БАРЬЕРНОГО СЛОЯ В СИСТЕМЕ МЕТАЛЛИЗАЦИИ Ti/TiN/Au ПРИ ФОРМИРОВАНИИ НИЗКООМНЫХ КОНТАКТОВ К АЛМАЗУ*

The composition of titanium and titanium nitride films deposited on the synthetic diamond using the method magnetron sputtering has been studied. It is shown that annealing at high temperature (700–800 °C) leads to the formation of a titanium carbide layer at the diamond/Ti interface. Nitrogen does not diffuse into carbide layer and adjacent region of diamond. Titanium nitride layer also is a good diffusion barrier for titanium and gold deposited on the nitride surface.

Сочетание уникальных физико-химических свойств делает алмаз перспективным материалом для создания высокоэффективных электронных, оптических и оптоэлектронных приборов, в том числе пригодных для работы в экстремальных условиях [1]. Важной проблемой при формировании приборных структур на алмазе является создание механически прочных и стабильных низкоомных или выпрямляющих электрических контактов. Подобная задача в современной полупроводниковой электронике решается созданием многослойных систем металлизации. Этот подход применим также к алмазу, однако при этом принципиальное затруднение получения омических контактов с низким сопротивлением связано с большой шириной запрещенной зоны алмаза (5,5 эВ). Контакт металла с гладкой поверхностью полупроводникового алмаза обладает высоким электрическим сопротивлением из-за большого потенциального барьера (~4 эВ). Методика создания омических контактов к алмазу до сих пор остается несовершенной, что приводит к погрешностям при изучении его электрофизических характеристик, а также является основным технологическим тормозом при разработке на базе алмаза электронных приборов со стабильными электрическими характеристиками. Многие аспекты проблемы удастся решить с помощью трехслойных систем металлизации, состоящих из контактирующего с алмазом карбидообразующего металла (титан, хром, молибден), внешнего слоя из инертного металла, устойчивого к внешним воздействиям и обладающего хорошей электро- и теплопроводностью (золото, платина, серебро), и барьерного слоя. Диффузионный барьерный слой на основе металлов (платина, молибден, вольфрам, тантал и хром) или их соединений, например нитридов, вводится для придания стабильности и предотвращения взаимодействия контактирующего и внешнего слоев. Получены и исследованы следующие трехслойные системы металлизации к алмазу и алмазным пленкам: Ti/Pt/Au, Ti/Mo/Au, Ti/Mo/Cr, Ti/WN/Au [2–4].

В настоящей работе изучена возможность применения в качестве барьерного слоя нитрида титана, представляющего интерес в связи с тем, что титан является самым активным карбидообразующим металлом из всего ряда тугоплавких металлов, причем последующий слой нитрида титана можно наносить в едином технологическом процессе, вводя газообразный азот при магнетронном распылении. Кроме того, нитрид титана, карбид титана и монооксид титана являются изоморфными соединениями, способными образовывать между собой непрерывный ряд твердых растворов [5],

* Авторы статьи – сотрудники лаборатории функциональных материалов НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

что не приводит к образованию напряжений между пленками, улучшает адгезию металлизированной системы к алмазу и не должно приводить к загрязнению нитрида титана примесями углерода и кислорода и давать однородный стехиометрический состав пленки нитрида титана.

Экспериментальная часть

В качестве подложек использовались монокристаллические пластины синтетического алмаза, вырезанные по плоскости (111) и подвергнутые механической полировке. Подложки крепились механически в держателе из алюминия. Непосредственно перед нанесением металлизации проводилась обработка подложек в хромпике в течение 20 мин при 100 °С с последующим двойным кипячением (по 15 мин) в деионизованной воде.

Слои Ti и TiN наносились при комнатной температуре с помощью магнетронного распыления на постоянном токе в одном цикле с последующим (при необходимости) нанесением Au методом термического испарения. В качестве плазмообразующего газа использовались либо Ar (при нанесении Ti), либо смесь Ar/N₂ (TiN). Толщина слоев Ti и TiN составляла около 50 и 100 нм соответственно. Термообработка образцов для карбидизации области границы раздела алмаз/Ti проводилась в вакууме не хуже 6·10⁻⁴ Па при температуре 700–800 °С продолжительностью от 15 мин до 1 ч. Оже-спектры регистрировались на сканирующем Оже-микроскопе Perkin Elmer PHJ-660. Профили распределения элементов по толщине получались при распылении мишени пучком ионов Ag⁺ с энергией 3 кэВ.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлен типичный профиль распределения элементов по толщине в свеженанесенной металлизационной системе. Видно, что на границе раздела алмаз/Ti наблюдается пик кислорода, хемосорбированного, скорее всего, уже на исходной поверхности алмаза. Использование сильных окислителей при химической обработке алмаза обуславливает наиболее вероятное образование на их поверхности устойчивых гидроксильных и эфирных групп, содержащих кислород [6]. В самой же пленке Ti концентрация кислорода не превышает 3 ат. %, что для используемого метода нанесения является вполне удовлетворительным результатом.

Однако содержание кислорода заметно выше в слое нитрида, причем имеет место его монотонный рост по мере приближения к поверхности, что может быть обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, в качестве реактивного вещества использовался газообразный азот без дополнительной очистки, содержащий до 1 % кислорода [7], по отношению к которому Ti очень активен. Во-вторых, известно [7], что слои TiN, полученные магнетронным распылением, имеют пониженную (до 80 %) плотность по сравнению с массивным мате-

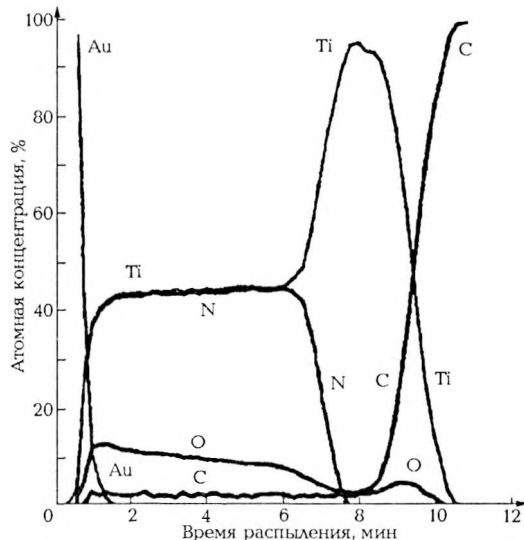


Рис. 1. Профили распределения элементов после осаждения слоев

риалом. Поэтому можно предположить, что при контакте с атмосферой (перед нанесением Au) происходит сорбция кислорода из атмосферы микропорами в TiN.

В отличие от кислорода концентрация углерода практически не изменяется по толщине слоев Ti и TiN и остается на уровне 2–2,5 ат. %. Присутствие углерода связано с захватом углеводородов из вакуумного объема, откачка которого производилась паромасляными насосами. Можно отметить в этой связи, что титан и нитрид титана в данном случае характеризуются одинаковой эффективностью геттерирования по отношению к углероду.

Профили распределения азота и титана в нитридном слое практически совпадают и довольно однородны по концентрации (в среднем около 44 ат. %). Тем самым подтверждается предположение о том, что повышенное содержание кислорода частично обусловлено его захватом микропорами слоя TiN при контакте с атмосферой. Изоморфность же нитрида, карбида и монооксида титана, их способность образовывать непрерывный ряд твердых растворов позволяют утверждать, что в данном случае мы имеем дело с оксикарбонитридом Ti с преимущественным содержанием азота.

Следует заметить, что осажденные слои визуально характеризуются золотистым оттенком, типичным для качественного нитрида титана. Эффективное удельное электрическое сопротивление двухслойной системы TiN/Ti, измеренное 4-зондовым методом, составляет около $7,5 \cdot 10^{-5}$ Ом·см, что типично для свежесоажденных слоев и приемлемо для целей контактной металлизации алмаза.

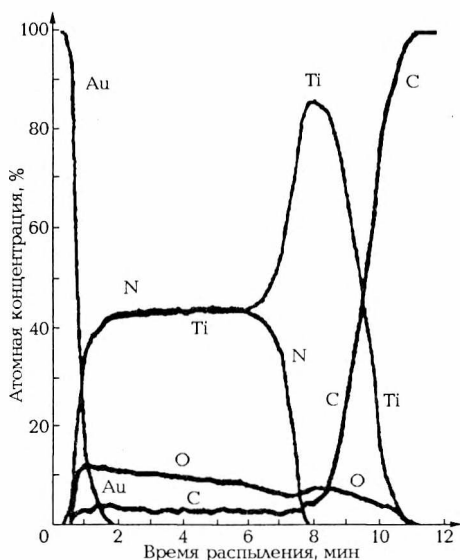


Рис. 2. Профили распределения элементов после осаждения и термообработки (700 °С, 30 мин)

В результате термообработки идет реакция карбидообразования в области границы раздела алмаз/Ti (рис. 2) и возрастает, хотя и незначительно, концентрация углерода во всем слое нитрида. Происходит также перераспределение и выравнивание концентрации кислорода, причем более интенсивно — в области карбидообразования на границе раздела алмаз/Ti [8]. Однако наиболее примечательным является то обстоятельство, что профиль распределения азота остается неизменным. Можно с уверенностью утверждать, что азот при данных условиях (в том числе и при 800 °С) не диффундирует в слой карбида (точнее, оксикарида) Ti, образующегося в области границы раздела алмаз/Ti. Следовательно, отпадает опасность легирования приграничной области алмаза азотом, ответственным за основные примесные дефекты. Диффузия титана и золота сквозь слой нитрида титана нами не обнаружена, т. е. нитрид титана выполняет роль диффузионного барьера.

Двухслойная система Ti/TiN, осажденная методом магнетронного распыления, перспективна для контактной металлизации алмаза. Незначитель-

ный захват кислорода и углерода при осаждении существенно не влияет на свойства слоев ввиду полной изоморфности нитрида, карбида и монооксида титана.

При термообработке азот из нитридного слоя не диффундирует в слой карбида, образующийся в области границы раздела алмаз/Ti, что устраняет легирование им приконтактного слоя алмаза. В условиях вакуумной термообработки нитрид титана является достаточно эффективным диффузионным барьером для золота и титана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф00-182).

1. Алмаз в электронной технике: Сб. ст. / Под ред. В.Б. Кваскова. М., 1990.
2. Hoff H. A., Waytena G. L., Vold C. L. et al. // *Diamond and Related Materials*. 1996. Vol. 5. P. 1450.
3. Di Benedetto R., Marinelli M., Messina G. et al. // *Diamond and Related Materials*. 2001. Vol. 10. P. 698.
4. Brandes G. R., Bectz C. P., Feger C. F. et al. // *Diamond and Related Materials*. 1999. Vol. 8. P. 1936.
5. Лучинский Г. П. Химия титана. М., 1971.
6. Богатырева Г. П. // *Сверхтвердые материалы*. 1980. № 2. С. 23.
7. Kattelus H. P., Tandon J. I., Sala C., Nicolet M. - A. // *J. Vac. Sci. Technol.* 1986. Vol. 4. P. 1850.
8. Алешин В. Г., Смехнов А. А., Богатырева Г. П., Крук В. Б. Химия поверхности алмаза. Киев, 1990.

Поступила в редакцию 13.09.2002.

Валерий Сергеевич Соловьев – кандидат физико-математических наук.

Григорий Анатольевич Гусаков – кандидат физико-математических наук, и. о. заведующего лабораторией.

Олег Владимирович Крекотень – научный сотрудник.

УДК 535.343+543.422.4:51+546.659

А. Г. ТРЕБНИКОВ, Т. А. ДИК, Н. Н. КОСТЮК

ИК- И МАСС-СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЦЕТИЛАЦЕТОНАТОВ САМАРИЯ

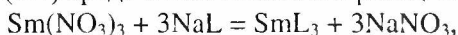
In recent years, much attention has been devoted to investigation of the polymerisation process of rare earth chelate complexes. The work presents IR- and mass-spectra of the following samarium acetylacetonates $\text{Sm}_4\text{L}_8 \cdot 3\text{HL}$ and SmL_3 . It is shown on base of IR- and mass-spektrography that $\text{Sm}_4\text{L}_8 \cdot 3\text{HL}$ has the oligomer structure in accordance with its chemical formula.

β -Дикетонаты редкоземельных элементов (РЗЭ) являются перспективными веществами при выделении редкоземельных металлов (РЗМ) из их смесей в процессах фракционной сублимации [1]. Для получения отдельных РЗЭ необходимы соединения, химически устойчивые и обладающие высокой упругостью паров при относительно низкой температуре (300–350 °С) [2]. В целом β -дикетонаты РЗМ соответствуют данным требованиям, однако далеко не всегда удается добиться эффективного перевода их в газовую фазу. В большинстве случаев это сопряжено с тем, что РЗЭ, находясь в состоянии окисления +3 и связываясь с тремя молекулами β -дикетонатов, остаются координационно ненасыщенными соединениями. Координационное число РЗЭ колеблется в пределах 7–12 [2], в то время как три молекулы β -дикетонатов в ацидоформе способны насытить координационную сферу лишь до шести. Координационная ненасыщенность лантаноидов

приводит в свою очередь к полимеризации хелатокомплексов, что в значительной мере снижает их летучесть. В связи с этим возникает необходимость исследования и прогнозирования полимеризационных процессов хелатокомплексов РЗЭ. В этом плане весьма эффективными и экспрессными являются спектральные методы – ИК-спектроскопия в сочетании с масс-спектрометрическими данными.

Спектры ИК-поглощения в интервале частот $4000\text{--}400\text{ см}^{-1}$ записывались на спектрофотометре Specord IR-75 с использованием методики таблетирования с KBr и суспендирования в вазелиновом масле. Масс-спектры регистрировались на масс-спектрометре MX-1320.

Синтез SmL_3 (1) проводили с помощью метода обмена лигандов в этанольно-ацетоновой (1:1) среде в соответствии с реакцией:



где HL – ацетилацетон (2,4-пентандион, $\text{CH}_3\text{C}(\text{O})\text{CH}_2\text{C}(\text{O})\text{CH}_3$); L – ацетил-ацетон в ацидоформе.

NaNO_3 отделяли многократным упариванием и фильтрованием (не менее четырех раз). Элементный анализ полученного соединения на самарий, углерод и водород позволил подтвердить его состав. Было

найдено, %: Sm – 33,4; C – 39,9; H – 5,0;

вычислено для SmL_3 , %: Sm – 33,6; C – 39,0; H – 4,0.

Получение и физико-химическое исследование хелатокомплекса $\text{Sm}_4\text{L}_8 \cdot 3\text{HL}$ (2) описаны в работе [3].

В табл. 1 представлены частоты спектров ИК-поглощения хелатокомплексов самария с ацетилацетоном: SmL_3 (1), $\text{Sm}_4\text{L}_8 \cdot 3\text{HL}$ (2). Необходимо отметить, что в первом случае самарий находится в состоянии окисления +3, а во втором – в состоянии окисления +2. Для обоих соединений Sm будет находиться в состоянии дефицита заполнения его внутренней координационной сферы, так как для трехвалентного самария заполнено только шесть координационных мест при его стремлении, как уже отмечалось, к 7–12. В случае двухвалентного Sm, если его считать аналогом кальция, координационное число должно равняться шести. Вместе с тем в соединении (1) происходит его насыщение лишь до 5,5, что свидетельствует о склонности к полимеризации обоих хелатокомплексов.

Из анализа колебательных спектров исследуемых хелатокомплексов в области $1650\text{--}1500\text{ см}^{-1}$ следует, что для обоих соединений наблюдается интенсивное поглощение (см. табл. 1). В ИК-спектре *трис*-ацетилацетоната самария присутствуют две абсорбционные полосы с максимумами при 1588 и 1510 см^{-1} , что достаточно хорошо согласуется с данными по ИК-спектроскопии ацетилацетонатов переходных металлов [4, 5]. Для соединения двухвалентного самария наблюдается более сложная спектральная картина: три интенсивные абсорбционные полосы при 1596, 1537 и 1502 см^{-1} и три полосы слабой интенсивности – 1645, 1573 и 1552 см^{-1} . Наблюдаемая картина подтверждает наличие в составе хелатокомплекса (2) ацетилацетона в нейтральной форме, об этом свидетельствует полоса поглощения при 1645 см^{-1} . В целом для соединений батохромный сдвиг полос поглощения двойной связи CO за счет понижения ее кратности до полутора составляет $140\text{--}120\text{ см}^{-1}$ (валентные колебания C=O-связи чистого ацетилацетона проявляются при 1715 (*s*) и 1735 (*as*) [6]). Такое смещение свидетельствует о переходе ацетилацетона из нейтральной в ацидоформу. Образование квазиароматического металлоцикла, где ацетилацетон находится в ацидоформе, подтверждается также присутствием полос поглощения валент-

ных колебаний СО- и СС-полуторных связей, а также $\delta_x = 910 \text{ см}^{-1}$ для комплекса (2) и $912, 874 \text{ см}^{-1}$ для соединения (1).

Таблица 1

Значения колебательных частот $\text{Sm}_3\text{L}_8\text{ЗНЛ}$ и SmL_3 и их отнесение

Частоты колебаний $\text{Sm}_3(\text{AA})_8\bullet 3\text{HAA}$, см^{-1}	Частоты колебаний $\text{Sm}(\text{AA})_3$, см^{-1}	Отнесение
3400–3300 _{ср.}	—	$\nu(\text{OH})$
3150–3090 _{сл.}	—	
3050–2800 _{сл.}	3100–2850 _{сл.}	$\nu(\text{CH})$
1645 _{сл.}	—	$\nu(\text{C}=\text{O})$
1596 _{о.с.}	—	$\nu(\text{C}=\text{O}), \nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{C}})$
1573 _{о.сл.}	1588 _{о.с.}	$\nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{O}}), \nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{C}}), \delta(\text{CH}_3)$
1552 _{сл.}		
1537 _{о.сл.}	1540 _{пл.}	
1502 _{о.с.}	1510 _{о.с.}	
*1485 _{пл.}	1462 _{с.}	$\delta(\text{CH}_3)$
*1430 _{о.с.}	1374 _{о.с.}	
*1360 _{о.с.}	—	
—	1304 _{ср.}	$\nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{C}}), \nu(\text{CC}), \delta_x, \delta(\text{CH}_\gamma)$
1254 _{ср.}	1254 _{ср.}	
1177 _{о.сл.}	1190 _{пл.}	$\nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{O}}), \delta(\text{CCH}_\gamma)$
1105 _{о.сл.}	1118 _{пл.}	$\delta(\text{CCH})_{\text{CH}_3}$
1080 _{о.сл.}	1058 _{о.сл.}	
1006 _{ср.}	1012 _{ср.}	$\delta(\text{CH}_3)$
910 _{ср.}	912 _{ср.}	$\nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{O}}), \nu(\text{C} \text{---} \overset{\text{***}}{\text{C}}), \delta_x$
—	874 _{о.сл.}	
765 _{сл.}	762 _{сл.}	$\delta(\text{CH}_\gamma)_{\text{вн.}}$
745 _{сл.}	730 _{пл.}	$\delta_{x, \text{вн.}}$
649 _{сл.}	656 _{сл.}	$\delta_{x, \text{вн.}}, \delta(\text{C}-\text{CH}_3)_{\text{вн.}}$
530 _{сл.}	530 _{ср.}	$\delta(\text{CCO})$
—	472 _{о.ср.}	$\nu(\text{SmO}), \nu(\text{CC}), \delta_x$
425 _{сл.}	420 _{пл.}	$\nu(\text{SmO}), \nu(\text{CC}), \delta_x, \delta(\text{CCH}_3)$
—	394 _{ср.}	

Примечание. Колебания: ν – валентные, δ – деформационные; вн. – внеплоскостные; интенсивность: о.с. – очень сильная, с. – сильная, ср. – средняя, сл. – слабая, о.сл. – очень слабая; пл. – плечо, х. – хелат.

• – возможное наложение полос вазелинового масла.

В табл. 2 представлены данные масс-спектра *трис*-ацетилацетоната самария. Очевидно, что максимальная относительная интенсивность принадлежит осколку фрагментации ацетилацетона $[\text{COCH}_3]^+$ с $m/e=43$. Интересной особенностью масс-спектра является наличие сигнала ацетилацетона в нейтральной форме с $m/e=100$, хотя в состав хелатокомплекса (1) ацетилацетон входит исключительно в ацидоформе (см. данные табл. 1). Кроме того, наблюдается довольно слабый сигнал протонированного ацетилацетона с $m/e=101$. Сигналы масс-спектра со значением $m/e=102\text{--}162$ свидетельствуют о том, что при электронном ударе в условиях записи масс-спектров происходят не только процессы деструкции органического лиганда, но также наблюдаются рекомбинационные процессы. Так, хорошо идентифицируются сигналы с $m/e = 154, 155$, относящиеся к образованным в условиях электронного удара органическим соединениям ацетилацетона с

ацетоном и с элиминированием двух и одного протонов. Образование ацетона в ходе деструкции и рекомбинации осколков ацетилацетона подтверждается довольно интенсивным сигналом (15,8 %) с $m/e=58$, соответствующим по массе ацетону (см. табл. 2). Наличие рекомбинационных процессов, наблюдаемых при регистрации масс-спектров, не позволяет однозначно идентифицировать сигналы 29 и 30, которые принадлежат $[\text{HCO}]^+$ и(или) $[\text{CH}_2\text{CH}_3]^+$, а также $[\text{H}_2\text{CO}]^+$ и(или) $[\text{CH}_3\text{CH}_3]^+$.

Таблица 2

Масс-спектр SmL_3

m/e	$I, \%$	Отнесение (рассчитанные значения m/e)
15	3,7	$[\text{CH}_3]^+$ (15)
17	1,2	$[\text{OH}]^+$ (17)
18	6,6	$[\text{H}_2\text{O}]^+$ (18)
27	5	$[\text{CCH}_3]^+$ (27)
28	9,1	$[\text{CO}]^+$ (28)
29	5,4	$[\text{HCO}]^+$ и/или $[\text{C}_2\text{H}_5]^+$ (29)
30	2	$[\text{H}_2\text{CO}]^+$ и/или $[\text{C}_2\text{H}_6]^+$ (30)
31	11,2	$[\text{OCH}_3]^+$ (31)
39	5,4	$[\text{C}_2\text{CH}_3]^+$ (39)
40	2	$[\text{COC}]^+$ (40)
41	4,2	$[\text{COCH}]^+$ (41)
42	5,8	$[\text{COH}_2]^+$ (42)
43	100	$[\text{COCH}_3]^+$ (43)
44	5	$[\text{HCOCH}_3]^+$ (44)
54	1,7	$[\text{CH}_2\text{COC}]^+$ (54)
55	0,8	$[\text{CH}_3\text{COC}]^+$ (55)
58	15,8	$[\text{CH}_3\text{COCH}_3]^+$ (58)
59	7,1	$[\text{CH}_3\text{C}(\text{O})\text{O}]^+$ (59)
72	2,5	$[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COCH}_3]^+$ (72)
74	2,5	$[\text{CH}_3\text{C}(\text{O})\text{OCH}_3]^+$ (74)
85	30,8	$[\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CO}]^+$ (85)
100	16,6	$[\text{CH}_3\text{C}(\text{O})\text{CH}_2\text{C}(\text{O})\text{CH}_3]^+$ (100)
101	0,8	$[\text{CH}_3\text{C}(\text{OH})\text{CH}_2\text{C}(\text{O})\text{CH}_3]^+$ (101)
122	4,2	$[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_3]^+$ (122)
154	1,7	$[\text{HAA}+\text{Ac}-2\text{H}]^+$ (154)
155	1,7	$[\text{HAA}+\text{Ac}-\text{H}]^+$ (155)
163–170	1,7–3,7	$[\text{SmO}]^+$ (160–170)
205–210	0,8–1,7	$[\text{SmL}-\text{CHCO}]^+$ (202–212)
223–229	1,2–2,5	$[\text{SmOHAc}]^+$ (219–229)
226–233	0,8–2,5	$[\text{SmL}-\text{CH}_3-2\text{H}]^+$ (226–236)
241–251	6–15,8	$[\text{SmL}-2\text{H}]^+$ (241–251)
258–268	1–8	$[\text{SmLCH}_3]^+$ (258–268)
339–349	13–76,3	$[\text{SmL}_2-3\text{H}]^+$ (339–349)
438–448	2,6–26,3	$[\text{SmL}_3-3\text{H}]^+$ (438–448)

Примечание. Здесь и в табл. 3 I – относительная интенсивность сигнала.

Не представляет труда идентифицировать в масс-спектре сигналы, принадлежащие самарийсодержащим осколкам. Это связано с тем, что природный самарий состоит из семи изотопов: ^{144}Sm – 3,1 %, ^{147}Sm – 15,0 %, ^{148}Sm – 11,3 %, ^{149}Sm – 13,8 %, ^{150}Sm – 7,4 %, ^{152}Sm – 26,7 %, ^{154}Sm – 22,7 % [7], которые дают в масс-спектре летучих хелатокомплексов легко интерпретируемую, характерную устойчивую сумму сигналов: подряд три сигнала сильной интенсивности, предваряемые сигналом самой слабой интенсивности и оканчивающиеся двумя сигналами максимальной интенсивности, отделенными от триплета сигналом слабой интенсивности. Иногда в

случае слабого и очень слабого проявления сигналов самарийсодержащих осколков слабые сигналы не регистрируются прибором и картина проявления слабых и очень слабых сигналов состоит из пяти пиков, где первые три имеют меньшую интенсивность, чем последующие два. Для последних двух сигналов, имеющих максимальную интенсивность, сохраняется соответствие их природному изотопному составу: предпоследний сигнал всегда более интенсивен, чем последний. Так, в масс-спектре *трис*-ацетилацетоната самария не наблюдали первого слабого сигнала, относящегося к $[^{144}\text{SmO}]$, в то время как оставшиеся сигналы проявлялись при $m/e=163-167$. Наличие сигналов $[\text{SmO}]^+$ является типичным для ацетилацетонатов РЗЭ [8]. Отличительной особенностью такого сигнала от известных в литературе является образование $[\text{SmO}]^+$, а не $[\text{SmOH}]^+$, которое характерно для РЗМ, способных находиться в двухвалентном состоянии. Однако надо отметить, что в работе [8] были исследованы масс-спектры *трис*-ацетилацетонатов самария с нейтральными лигандами: α , α' -дипиридиллом, 1,10-фенантролином. Наличие столь сильных нейтральных лигандов гарантирует насыщение внутренней координационной сферы металла-комплексобразователя и соответственно подавляет полимеризационные процессы. В нашем случае для чистого *трис*-ацетилацетоната самария его фрагментация требует больших усилий. Это, очевидно, и приводит к элиминированию протона из состава $[\text{SmOH}]^+$.

Из всех самарийсодержащих осколков хелатокомплекса (1) максимальной интенсивностью обладают сигналы с $m/e=339-349$, принадлежащие *бис*-ацетилацетонатам самария с элиминированными тремя протонами. Наблюдаемая картина также соответствует выдвинутому предположению о необходимости большего усилия при фрагментации *трис*-ацетилацетонатов самария без нейтральных лигандов. Причем наблюдаемая в нашем масс-спектре фрагментация хелатокомплекса (1) отличается от фрагментации *трис*-ацетилацетонатов самария с нейтральными лигандами, для которых максимальными интенсивностями обладают сигналы *трис*-ацетилацетонатов самария. При этом для хелатокомплексов, описанных в литературе, не характерно элиминирование протонов для *моно*-, *бис*- и *трис*-ацетилацетонатных самариевых осколков [8]. В нашем случае *бис*- и *трис*-осколки комплекса подвержены элиминированию трех протонов в результате воздействия электронного удара, а для *моно*-осколка хелатокомплекса характерно элиминирование двух протонов (см. табл. 2). Кроме сигналов *моно*-, *бис*- и *трис*-ацетилацетонатов самария, в масс-спектре наблюдаются сигналы с $m/e=258-268$, принадлежащие $[\text{SmLCH}_3]^+$ и превосходящие по интенсивности сигналы *моно*-ацетилацетоната самария. Фрагментация *трис*-ацетилацетоната самария после образования в результате электронного удара *трис*-, *бис*- и *моно*-осколков ацетилацетоната самария с соответствующим элиминированием протонов приводит к появлению *моно*-ацетилацетонатов самария с элиминированными частями органической молекулы: отрыв от ацетилацетоната CH_3 -группы и двух протонов (осколок с $m/e=226-223$), а также отрыв от ацетилацетона фрагмента CHCO (осколок с $m/e=205-210$).

Весьма интересным является появление сигналов с $m/e=223-229$, принадлежащих SmOH с ацетоном и свидетельствующих о том, что упомянутые перегруппировочные процессы органической части хелатокомплекса (2) приводят не только к появлению новых органических соединений, но и

к образованию самариевых комплексов с ними, в частности с ацетоном. Дальнейшая фрагментация гидроксосамариевого соединения с ацетоном приводит к образованию сигнала $[SmO]^+$.

В табл. 3 представлены данные масс-спектрометрического исследования комплекса $Sm_4L_8 \cdot 3HL$. Максимальную интенсивность имеет сигнал с $m/e=43$. Фрагментация органической части хелатокомплекса здесь не приводится, так как в большинстве случаев она совпадает с фрагментацией для SmL_3 . В отличие от *трис*-ацетилацетоната самария в масс-спектре соединения (2) проявляются сигналы $[SmH]^+$ и $[SmOH]^+$. Наличие последних согласуется с данными литературы [8] и может быть объяснено наличием в составе соединения (2) $Sm(II)$. О более сложном характере фрагментации хелатокомплекса (2) свидетельствует наличие осколков не только $[SmH]^+$, но и $[SmC]^+$ и $[SmCH_3]^+$. Таким образом, конечной стадией фрагментации хелатокомплекса (2) в случае самарийсодержащих осколков являются четыре вещества: гидрид самария, карбид самария, гидроксосамарий и самарий с CH_3 -группой.

Таблица 3

Масс-спектр $Sm_4L_8 \cdot 3HL$

<i>m/e</i>	<i>I</i> , %	Отношение (расчитанные значения <i>m/e</i>)
145–155	До 2,2	$[SmH]^+$ (145–155)
155–162	Следы	$[SmC]^+$ (156–166)
163–171	1,5–2,2	$[SmOH]^+$ (161–171) и
159–168	–	$[SmCH_3]^+$ (159–169)
205–211	0,5–1,4	$[SmL-CHCO]^+$ (202–212) и/или $[SmAc]^+$ (202–212)
228–235	0,2–0,4	$[SmL-CH_3]^+$ (228–238)
243–253	0,4–2,5	$[SmL]^+$ (243–252)
259–270	0,3–2,3	$[SmLCH_3]^+$ (258–268)
305–314	0,15	$[SmL_2-CHCO]^+$ (301–311) и/или $[SmLAc]^+$ (301–311)
329–339	0,4	$[SmL_2-CH]^+$ (329–339) и/или $[SmL(2CO)CH_3]^+$ (331–341) и/или $[SmH_2L_2-CH_3]^+$ (329–339)
349–360	1,1–15,3	$[SmL_2]^+$ (342–352) и/или $[Sm_2Ac]^+$ (346–366) и/или $[Sm_2(OH)COCH_3]^+$ (348–368)
440–449	Следы	$[SmL_3]^+$ (441–451)
456–465	1–6	$[SmL_3CH_3]^+$ (456–466)
541–551	Следы	$[Sm_2L_2(C_3H_5O)]^+$ (541–551)
590–615	Следы	$[Sm_2L_3]^+$ (585–605)
615–635	0,2	$[Sm_2L_3(CO)]^+$ (613–633)
660–680	0,7	$[Sm_2L_4-C_2H_3]^+$ (657–677)
683–703	4	$[Sm_2L_4]^+$ (684–704)
709–725	6	$[Sm_2L_4(CO)]^+$ (711–731)
839–858	Следы	$[Sm_3L_4C]^+$ (840–870)
860–895	0,2	$[Sm_3L_42CH_3]^+$ (858–888) и/или $[Sm_3H_2L_3-CH_3]^+$ (860–900)
958–992	0,3	$[Sm_3L_52CH_3]^+$ (957–987)
999–1038	1,5	$[Sm_3L_6-C_2H_3]^+$ (1000–1020)
1053–1079	3,7	$[Sm_3L_6C_2H_3]^+$ (1053–1083)
1355–1406	Следы	$[Sm_4L_8]^+$ (1369–1409)
1406–1440	0,8	$[Sm_4L_8(C_2O)]^+$ (1409–1449)
1440–1488	3,5	$[Sm_3L_8HL-C_2H_3]^+$ (1442–1482)
1497–1540	4,3	$[Sm_4L_8HLC_2H_3]^+$ (1496–1536) и/или $[Sm_4H_3L_8HLC_2H_3]^+$ (1500–1540)
1770–1800	Следы	$[Sm_5L_{10}Ac]^+$ (1770–1820) и/или $[Sm_5L_{10}]^+$ (1710–1760) $[Sm_{10}L_{20}HL]^+{}^{2+}$ (1760–1810) и/или $[Sm_{10}L_{21}]^+{}^{2+} \equiv [Sm_{10}L_{20}HL]^+{}^{2+}$ (1760–1810)
2110–2130	Следы	$[Sm_6L_{12}]^+$ (2053–2113) и/или $[Sm_6L_{12}Ac]^+$ (2112–2171)
2155–2180	Следы	$[Sm_6L_{13}]^+ \equiv [Sm_6L_{12}HL]^+$ (2141–2202) и/или $[Sm_6L_{11}Ac]^+$ (2155–2235)

Максимальной интенсивностью среди самарийсодержащих осколков хелатокомплекса (2) обладают сигналы, относящиеся к $[\text{SmL}_2]^+$. Фрагментация олигомерного хелатокомплекса (2) протекает за счет образования фрагментов с четным содержанием лигандов и самария. Одновременно наблюдаются сигналы, принадлежащие $[\text{SmL}_3]^+$, – 440–449, а также 456–465, относящиеся к $[\text{SmL}_3\text{CH}_3]^+$. Зафиксированы и сигналы осколков, имеющих три атома самария: $[\text{Sm}_3\text{L}_4\text{C}]^+$ – 839–858, $[\text{Sm}_3\text{L}_4\text{2CH}_3]^+$ – 860–895, $[\text{Sm}_3\text{L}_5\text{2CH}_3]^+$ – 958–992, $[\text{Sm}_3\text{L}_6-\text{C}_2\text{H}_3]^+$ – 999–1038 и $[\text{Sm}_3\text{L}_6\text{C}_2\text{H}_3]^+$ – 1053–1079.

По данным табл. 3, осколки хелатокомплекса (2), содержащие нечетное число молекул лигандов или атомов самария, имеют меньшую интенсивность, чем осколки с четным числом. Такое соотношение интенсивностей свидетельствует о том, что фрагментирование олигомера под действием электронного удара протекает главным образом с образованием осколков с четным количеством атомов самария и молекул лиганда. Этот факт указывает на то, что исходный олигомер состоит из четного числа атомов самария и молекул лигандов в ацидоформе. Поскольку сигналы заметной интенсивности в масс-спектре хелатокомплекса (2) появляются в интервале значений $m/e=1500\text{--}1400$ и относятся к осколкам, содержащим основной фрагмент $[\text{Sm}_4\text{L}_8]^+$ (см. табл. 3), то можно предположить, что формула олигомера $\text{Sm}_4\text{L}_8\cdot 3\text{HL}$, предложенная на основании данных химического анализа, в своей основе соответствует данным масс-спектрометрии.

В интервале значений $m/e=1770\text{--}2180$ наблюдаются сигналы, которые можно отнести к олигомерам с содержанием атомов самария больше четырех (см. табл. 3). Однако резкое падение интенсивностей данных сигналов позволяет говорить, что они принадлежат, очевидно, к осколкам надполимерных структур.

Таким образом, на основании данных ИК-спектроскопии показано, что для соединений самария (1) и (2) наблюдается образование квазиароматического металлоцикла, что свидетельствует о вхождении в состав исследуемых хелатокомплексов в первом случае трех молекул ацетилацетона, а во втором случае – восьми молекул ацетилацетона в ацидоформе. Наличие молекул ацетилацетона в нейтральной форме в составе хелатокомплекса (2) подтверждается наличием полосы поглощения в его ИК-спектре с максимумом 1645 см^{-1} . Анализ масс-спектрометрических данных показывает, что выводы о составе исследуемых хелатокомплексов, сделанные на основании ИК-спектроскопических данных, правильны. Первый комплекс представляет собой *трис*-ацетилацетонат самария, а второй – олигомер, в состав которого входят четыре атома самария и восемь молекул ацетилацетона в ацидоформе. О более сложном характере фрагментации комплекса (2) по сравнению с (1) говорит наличие четырех конечных самарийсодержащих осколков для соединения (2) по сравнению с одним в комплексе (1). Наличие осколка $[\text{SmOH}]^+$ свидетельствует, согласно данным литературы, о двухвалентном состоянии самария [8]. Фрагментация хелатокомплекса (2) протекает главным образом через осколки с четным содержанием атомов самария и молекул лиганда.

1. Кузьмина Н.П., Фэнхуа Лю, Мартыненко Л.И. // Координационная химия. 1998. Т. 24. № 5. С. 363.

2. Суглобов Д.Н., Сидоренко Г.В., Легин Е.К. Летучие органические и комплексные соединения *f*-элементов. М., 1987.

3. Требников А.Г. // Сборник материалов международной межвузовской научно-технической конференции студентов, аспирантов и магистрантов, Гомель, 15–17 мая 2001 г. Гомель, 2001. С. 79.
4. Краденов К.В., Колесов Б.А. // Деп. в ВИНТИ, № 8695-В86. Новосибирск, 1986.
5. Nakamoto K. Infrared and Raman Spectra of Inorganic and Coordination Compounds. New York, 1978. P. 249.
6. Нейланд О.Я., Страдынь Я. П., Силиньш Э.А. и др. Строение и таутомерные превращения β -дикарбонильных соединений. Рига, 1977.
7. Физическая энциклопедия: В 5 т. М., 1992. Т. 3. С. 366.
8. Гавришук Е.М., Дзюбенко Н.Г., Мартыненко Л.И. // Теоретическая и прикладная химия β -дикетонатов металлов. М., 1985. С. 86.

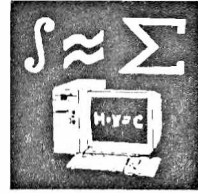
Поступила в редакцию 28.10.2002.

Александр Григорьевич Требников – научный сотрудник лаборатории люминесценции НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Татьяна Алексеевна Дик – кандидат физико-математических наук, заместитель начальника Главного управления науки БГУ.

Николай Николаевич Костюк – кандидат химических наук, заведующий лабораторией люминесценции НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.

Математика и информатика



УДК 517.51: 517.53

А.П. СТАРОВОЙТОВ

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАНЫМ ПОРЯДКОМ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

For a fixed sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers strictly decreasing to zero a continuous on $[-1, 1]$ function g is constructed such that $a_n/\sqrt{2} \leq R_{2n}(g) \leq 2a_n$, $n=0, 1, \dots$, where the $R_n(g)$ are the best approximations of g in the uniform norm by rational algebraic functions of degree at most n .

Пусть $C_{[-1, 1]}$ – банахово пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ вещественных функций с равномерной нормой. Через P_n и R_n обозначим соответственно множество всех алгебраических полиномов и рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n . Для $f \in C_{[-1, 1]}$ и $n=0, 1, 2, \dots$ рассмотрим

$$E_n(f) = \inf \{ \|f - p\| : p \in P_n \}, \quad R_n(f) = \inf \{ \|f - r\| : r \in R_n \}$$

– наилучшие приближения f в $C_{[-1, 1]}$ множествами P_n и R_n . Ниже соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$, а запись $\alpha_n \downarrow 0$ предполагает, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает и сходится к нулю. Хорошо известно, например, что $E_n(f) \downarrow 0$ и $R_n(f) \downarrow 0$.

До сих пор не решенной остается следующая проблема, поставленная Е.П. Долженко: “Какой должна быть последовательность $\alpha_n \downarrow 0$, чтобы существовала функция $f \in C_{[-1, 1]}$ такая, что $R_n(f) \asymp \alpha_n$?” [1, с. 317]. При этом будем говорить об эффективном решении проблемы в том случае, когда по заданной последовательности искомая функция построена конструктивно.

Для полиномиальных приближений в силу известной теоремы С.Н. Бернштейна (см. [2, 3]) любая последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ является последовательностью наилучших приближений некоторой функции $f \in C_{[-1, 1]}$, т. е. $E_n(f) = \alpha_n$, $n=0, 1, \dots$. Однако решение, предложенное С.Н. Бернштейном, неэффективно. Вот что пишет по этому поводу он сам: “Здесь применяется известный диагональный процесс... Поэтому доказательство существования $f(x)$ является неэффективным. Лишь при некоторых ограничениях, наложенных на закон убывания α_n , мне удалось дать конструктивный метод построения искомой функции $f(x)$ ” [4, с. 249]. К сожалению, полученные С.Н. Бернштей-

ном результаты остались неопубликованными. В дополнение к сказанному можно лишь заметить, что если $\alpha_n \downarrow 0$ строго убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии: $a_{n+1}/a_n > q > 0$, то из установленных С.Н. Бернштейном аппроксимационных свойств аналогов функции Вейерштрасса без производной следует (см. [5, § 8, следствие II]), что функцией $f \in C_{[-1, 1]}$, для которой $E_n(f) \asymp a_n$, является, например,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{3^{k-1}} - a_{3^k}) T_{3^k}(x), \quad (1)$$

где $T_k(x) = \cos k \arccos x$ – многочлены Чебышева.

В случае рациональных приближений первые значительные результаты, относящиеся к сформулированной проблеме, получены А.А. Гончаром: в [6] для произвольной последовательности $\alpha_n \downarrow 0$ найдена непрерывная функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)}, \quad \varepsilon_k > 0, \quad x_k = 1 + \varepsilon_k,$$

для которой $R_n(f) \leq a_n$, $n=0, 1, \dots$, а в [7] дается эффективный алгоритм для построения $f \in C_{[-1, 1]}$ такой, что $R_n(f) \geq a_n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Далее, Е.П. Долженко в [1], рассматривая ряды вида (1), привел пример функции $f \in C_{[-1, 1]}$, для которой $R_n(f) \asymp a_n$ при условии, что $\alpha_n \downarrow 0$ убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии. При приближении тригонометрическими рациональными дробями с действительными коэффициентами функций из $C_{2\pi}$ эффективное решение проблемы Е.П. Долженко получено нами [8, 9] (см. также работу А.А. Пекарского [10], где рассматриваются рациональные приближения комплекснозначных функций).

Основным содержанием данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для любой последовательности $\alpha_n \downarrow 0$, строго убывающей к нулю, существует такая нечетная функция $g \in C_{[-1, 1]}$, что $R_{2n}(g) \asymp a_n$.*

В основу конструкции искомой функции, как и в [8, 9], положены алгебраические дроби Чебышева – Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Без ограничения общности при построении функции g будем считать, что $a_0=1$. В противном случае следует рассматривать последовательность $1, a_1/a_0, a_2/a_0, \dots$. Определим три бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}, \quad (2)$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_1}{5} \cdot \frac{\varepsilon_2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{\varepsilon_n}{5}, \quad n=1, 2, \dots$$

В [10] установлена следующая

Лемма 1. *Последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:*

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \quad j=1, 2, \dots,$$

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} \beta_j / \beta_l < \frac{1}{4} \varepsilon_{l+1}, \quad \sum_{j=1}^{l-1} \beta_l / \beta_j < \frac{1}{4} \varepsilon_l.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k=1, 2, \dots, n$ и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [11, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{y P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^n (y^2 + \beta^2)}, \quad (3)$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n-2$, а

$$\Phi_{2n}(y) = 2 \sum_{k=1}^n \arg(z_k - y).$$

Лемма 2. Пусть $\lambda_{2k, l} = N_{2k}(\beta_l)$. Тогда

$$|\lambda_{k, l}| < \frac{1}{2} \varepsilon_l \text{ при } l > k,$$

$$|\lambda_{k, l} - (-1)^l| < \frac{1}{2} \varepsilon_l \text{ при } l \leq k.$$

Доказательство леммы 2 имеется в [8].

Теперь нужную синус-дробь Чебышева – Маркова получим как частный случай дробей Бернштейна, положив в (3) $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Тогда (см. [11, гл. 2, § 1, равенство (9)]) будем иметь

$$v_n(x) = \sin \varphi_{2n}(x) = \sin \Phi_{2n}(y) = \sqrt{1-x^2} \frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^n (1-c_j x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами, а $c_k = (1-\beta_k^2)/(1+\beta_k^2)$, $k=1, 2, \dots, n$. С учетом замены и последних равенств следует, что

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < 1 \text{ и } v_k(c_l) = \lambda_{k, l}, \quad k=1, 2, \dots; \quad l=1, 2, \dots$$

В банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ с нормой $\|t\|_{c_0} = \sup\{|t_n|: n=0, 1, 2, \dots\}$ определим множество

$$K = \{t: 0 \leq t_k \leq \varepsilon_{k+1}; \quad k=0, 1, 2, \dots\}.$$

Если $t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in K$, то, полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию из $C_{[-1, 1]}$

$$h_t(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) v_k(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \sqrt{1-u^2} \frac{P_{k-1}(u)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j u)}.$$

Лемма 3. При всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$(-1)^l h_t(c_l) \geq a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l, \quad l=1, 2, \dots$$

Доказательство. При $l=1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} h_t(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) v_k(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (\Delta a_k + \Delta t_k) \lambda_{k, l} + \sum_{k=l}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) (\lambda_{k, l} - (-1)^l). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in K$, то $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$\left| h_t(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l (a_0 + t_0) < \varepsilon_l.$$

Лемма доказана.

Для каждого $t \in K$ и $x \in [-1, 1]$ определим функцию

$$f_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \frac{x P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j(1-x^2))}. \quad (4)$$

Ряд в (4) для всех $x \in [-1, 1]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k)$, а его члены – непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$.

Поэтому при любом $t \in K$ f_t является четной функцией из $C_{[-1, 1]}$. При этом для $x \in [0, 1]$

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} h_t(1-x^2).$$

Покажем, что для всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$\frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}} \leq R_{2n}(f_t) \leq a_n + t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Действительно, так как $|v_k(x)| = |\sin \varphi_{2k}(x)| \leq 1$ и $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$, то для всех $x \in [-1, 1]$

$$\left| f_t(x) - \sum_{k=1}^n (\Delta a_k + \Delta t_k) \frac{x P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j(1-x^2))} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) |v_k(1-x^2)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) = a_n + t_n.$$

Таким образом, оценка сверху в (5) доказана.

Для доказательства оценки снизу воспользуемся частным случаем теоремы Валле Пуссена [12, гл. 2, § 31]. В точках $u_l = \sqrt{1-c_l}$, $l=1, 2, \dots, n+1$ согласно лемме 3

$$(-1)^l f_t(u_l) = \frac{1}{\sqrt{2-u_l^2}} (-1)^l h_t(c_l) \geq \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому с учетом нечетности функции f_t на отрезке $[-1, 1]$ имеются $2n+2$ точки

$$u_1 = -\sqrt{1-c_1}, u_2 = -\sqrt{1-c_2}, \dots, u_{n+1} = -\sqrt{1-c_{n+1}}, \\ u_{n+2} = \sqrt{1-c_{n+1}}, u_{n+3} = \sqrt{1-c_n}, \dots, u_{2n+2} = \sqrt{1-c_1},$$

в которых f_t принимает значения с чередующимися знаками. Следовательно,

$$R_{2n}(f_t) \geq \min \left\{ \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}} : l = 1, 2, \dots, n+1 \right\} = \frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}},$$

и нижняя оценка в (5) доказана.

Теперь, полагая $g = f_{t^*}$, где $t^* = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \in K$, и учитывая (5) и (2), окончательно получим

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} \leq R_{2n}(g) \leq 2a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

На самом деле при доказательстве теоремы построено несчетное множество функций, удовлетворяющих ее условию. Более того, при дополнительных условиях в силу эффективности построения искомой функции на последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ можно гарантировать и некоторые другие ее свойства. Например, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то g является абсолютно непрерывной на $[-1, 1]$.

1. Долженко Е. П. // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313.
2. Бернштейн С. Н. // С. R. Acad. Sc. 1938. Vol. 206. P. 1520.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: В 4 т. М., 1954. Т. 2.
5. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.; Л., 1937.

6. Гончар А. А. // ДАН СССР. 1955. Т. 100. № 2. С. 13.
7. Гончар А. А. // Мат. сб. 1967. Т. 72(114). № 3. С. 489.
8. Старовойтов А. П. // Мат. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 6. С. 919.
9. Старовойтов А. П. // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145.
10. Пекарский А. А. // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1994. № 1. С. 23.
11. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
12. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

Поступила в редакцию 14.01.2002.

Александр Павлович Старовойтов – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 517.955

Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The correct strong solvability of the Cauchy problems for factorized differential equations with variable domains of operator coefficients is proved. The formula of their strong solutions

$u = \overline{M_1}^{-1} \dots \overline{M_m}^{-1} \mathfrak{S}$ is obtained.

Функциональным методом из [1] докажем корректную сильную разрешимость задач Коши для факторизованных дифференциальных уравнений с переменными областями определения операторных коэффициентов и выведем формулу их сильных решений (14).

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (\bullet, \bullet) и нормой $|\bullet|$ рассматриваются задачи Коши (ЗК):

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (d/dt + A_m(t)) \cdots (d/dt + A_1(t))u = f, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

$$\ell_j u \equiv d^j u / dt^j \Big|_{t=0} = \varphi_j \in H, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где u, f – функции t со значениями в H , $A_k(t)$ – линейные положительные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

I. Операторы $A_k(t)$, $t \in [0, T[$, являются сужениями на $D(A_k(t))$ линейных операторов $\tilde{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\tilde{A}_k)$.

II. Области определения $D(A_k^m(t))$ степеней $A_k^m(t)$ плотны в H , $1 \leq k \leq m$; эквивалентны нормы: $|A_s(t)u| \sim |A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u|$ для $\forall u \in D(A_k(t))$, $\forall t \in [0, T[$, $1 \leq s \neq k \leq m$; и существуют постоянные $c_{s,k} \geq 0$, что

$$\begin{aligned} |A_s(t)A_k(t)v - A_k(t)A_s(t)v|_{\alpha(t)} &\leq c_{s,k} |v|_{(\alpha+2)(t)} \quad \forall v \in W^{\alpha+4}(t), \quad t \in [0, T[, \\ \alpha &\leq 2m - 4, \quad s \neq k, \end{aligned} \quad (3)$$

где гильбертовы пространства $W^\alpha(t)$ – области определения $D(A_1^{\alpha/2}(t))$ степеней $A_1^{\alpha/2}(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha(t)} = |A_1^{\alpha/2}(t)v|$, $\alpha \leq 2m$.

III. Существуют линейные положительные самосопряженные операторы $B(t)$, $t \in [0, T[$, в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых обратные $B^{-1}(t)$, $A_k(t)B^{-1}(t)$ и их сильная производная $dB^{-1}(t)/dt$ из $L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, и равномерно по t существуют пределы:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((dB_\varepsilon^{-1}(t)/dt)u, u \right) = 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(A_k(t)B_\varepsilon^{-1}(t)u, u \right) = \left| A_k^{1/2}(t)u \right|^2 \quad \forall u \in W^1(t), \quad (4)$$

где $B_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon B(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, и $A_k^{1/2}(t)$ – квадратные корни операторов $A_k(t)$.

IV. Существуют не зависящие от t банаховы пространства V^{2i} , $0 \leq i \leq m$, такие, что

$$V^0 = H; V^2 = D(\tilde{A}_k); V^{2j} \subset V^{2i}, \quad j > i; W^{2i}(t) \subset V^{2i} \quad \forall t \in [0, T[, \quad 0 \leq i \leq m;$$

и существуют сильные производные $d_t \tilde{A}_k(t)/dt^i \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(V^{2j+2}, V^{2j}))$, $0 \leq j \leq m-1-i, 0 \leq i \leq m-1$.

2. Однозначность и устойчивость. Обозначим через \mathcal{H}^α гильбертовы пространства $L_2([0, T[, W^\alpha(t))$ с эрмитовыми нормами $\|\bullet\|_\alpha$, $\alpha \leq 2m$. Пусть банаховы пространства E^m – пополнения множеств

$$D(L_m) = \{u \in D(\tilde{L}_m) : d^s u / dt^s \in \mathcal{H}^{2m-2s}, \quad 0 \leq s \leq m-1\},$$

где

$$D(\tilde{L}_m) = \{u \in \mathcal{H}^0 : d^s u / dt^s \in L_2([0, T[, V^{2m-2s}), \quad 0 \leq s \leq m; \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}},$$

$$\frac{d^{\alpha_1} \tilde{A}_{k_1}(t)}{dt^{\alpha_1}} \dots \frac{d^{\alpha_p} \tilde{A}_{k_p}(t)}{dt^{\alpha_p}} \frac{d^{m-1-p-|\alpha(p)|}u}{dt^{m-1-p-|\alpha(p)|}} \in \mathcal{H}^2, \quad 0 \leq |\alpha(p)| \leq m-1-p,$$

$1 \leq p \leq m-1, 1 \leq k_1, \dots, k_p \leq m, k_i \neq k_j, \alpha(p) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ и $|\alpha(p)| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$, по нормам

$$\|u\|_m = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sup_{0 < t < T} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-2-2i)(t)}^2 + \left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{2m-1-2i}^2 \right) \right\}^{1/2}.$$

Пусть гильбертовы пространства $F^m = \mathcal{H}^{-1} \times W^{2m-2}(0) \times \dots \times W^2(0) \times H$ с эрмитовыми нормами

$$\langle \|\mathfrak{S}\| \rangle_m = \left(\left\| A_1^{-1/2}(t) f \right\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \varphi_j \right\|_{(2m-2-2j)(0)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{для } \mathfrak{S} = \{f, \varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \in F^m,$$

где $A_1^{-1/2}(t)$ – обратные операторов $A_1^{1/2}(t)$. ЗК (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m = \{\mathcal{L}_m(t), \ell_0, \dots, \ell_{m-1}\} : E^m \supset D(L_m) \rightarrow F^m$. Стандартным образом доказывается, что если выполняются условия I–IV, то они допускают замыкания $\overline{L}_m : E^m \supset D(\overline{L}_m) \rightarrow F^m$. Решения операторных уравнений $\overline{L}_m u = \mathfrak{S}, \mathfrak{S} \in F^m, m = 1, 2, \dots$, называются сильными решениями ЗК (1), (2). Выведем априорные оценки этих решений.

Теорема 1. Если выполняются условия I, II и IV, сильная производная $dA_1^{-m}(t)/dt \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$ при $m > 2$ и L_m замыкаемы, то

$$\|u\|_m^2 \leq c_0(m) \langle \|\overline{L}_m u\| \rangle_m^2 \quad \forall u \in D(\overline{L}_m), \quad c_0(m) > 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{M}_k(t) = d/dt + \tilde{A}_k(t), \mathcal{L}_k^{(s, n)}(t) = \mathcal{M}_n(t) \dots \mathcal{M}_{k+1}(t) \mathcal{M}_{k-1}(t) \dots \mathcal{M}_s(t), 1 \leq s \leq k \leq n \leq m$, и запишем $\mathcal{L}_m(t) = \mathcal{M}_k(t) \mathcal{L}_k^{(1, m)}(t) + \mathcal{P}_{k, m}(t)$, где в силу неравенств (3)

$$|\mathcal{P}_{k, m}(t) u|^2 \leq \tilde{c}_k \sum_{i=0}^{m-2} \left| d^i u / dt^i \right|_{(2m-2-2i)(t)}^2 \quad \forall u \in D(L_m), \quad \tilde{c}_k \geq 0. \quad (6)$$

Интегрируя один раз по частям, получаем для $\forall u \in D(\tilde{L}_m)$ равенства

$$|\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u|^2 \Big|_{t=\tau} + 2 \int_0^\tau |A_k^{1/2}(t) \mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u|^2 dt = 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\mathcal{L}_m(t)u, \mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u) dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\mathcal{P}_{k,m}(t)u, \mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u) dt + |\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u|^2 \Big|_{t=0}, \quad m=1, 2, \dots \quad (7)$$

Из условий I, II и IV вытекают неравенства [1]

$$|A_s(t)u - A_k(t)u|_{\alpha(t)} \geq \tilde{c}_{s,k} |u|_{(\alpha+2)(t)} \quad \forall u \in W^{\alpha+2}(t),$$

$$t \in [0, T[, \quad \alpha \leq 2m-2, \quad 1 \leq s < k \leq m,$$

где $\tilde{c}_{s,k} > 0$, и по аналогии с (10) из [1] для $\forall u \in D(L_m), \forall t \in [0, T[$, – неравенства

$$\sum_{k=1}^m |\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u|^2 \geq c_1 \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-2-2i)(t)}^2 - c_2 \sum_{i=0}^{m-3} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-4-2i)(t)}^2, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^m |\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u|_{1(t)}^2 \geq c_3 \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-1-2i)(t)}^2 - c_4 \sum_{i=0}^{m-3} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-3-2i)(t)}^2, \quad (9)$$

где $c_1, c_3 > 0$ и $c_2, c_4 \geq 0$. Можно доказать интерполяционные неравенства [1]

$$\left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-4-2i)(t)} \Big|_{t=\tau} \leq c_5 \int_0^\tau \left| \frac{d^{i+1} u}{dt^{i+1}} \right|_{(2m-4-2i)(t)} dt + c_5 (1 + 2 \mathcal{M}_{(m-2-i)/m}) \times \int_0^\tau \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-2-2i)(t)} dt + \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-4-2i)(t)} \Big|_{t=0} \quad \forall u \in D(L_m), \quad 0 \leq i \leq m-2, \quad (10)$$

где $c_5 = \sup_{0 < t < T} \|A_1^{-1}(t)\|$ и $\mathcal{M}_\gamma = \frac{1}{3} \sup_{0 < t < T} \|A_1^{m-1}(t) dA_1^{-m}(t) / dt\| \int_0^\infty \frac{\sigma^\gamma}{(1+\sigma)^2} d\sigma$.

Просуммируем (7) по $k, 1 \leq k \leq m$, применим оценки (6) и (8) – (10) и найдем

$$c_1 \sum_{i=0}^{m-1} \left(\left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-2-2i)(t)}^2 \Big|_{t=\tau} + \int_0^\tau \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-1-2i)(t)}^2 dt \right) \leq c_6 \int_0^\tau \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{(2m-2-2i)(t)}^2 dt + c_7 \int_0^\tau |A_1^{-1/2}(t) \mathcal{L}_m(t)u|^2 dt + (c_8 + c_2 c_5^2) \sum_{j=0}^{m-1} |l_j u|_{(2m-2-2j)(0)}^2 \quad \forall u \in D(L_m),$$

где $c_6, c_7, c_8 > 0$. Наконец, здесь воспользуемся леммой Гронуолла, возьмем верхнюю грань по τ и получим неравенства (5) для $\forall u \in D(L_m)$. Затем полученные неравенства (5) распространяются предельным переходом на $\forall u \in D(\overline{L}_m)$.

3. Разрешимость. Из теоремы 1 вытекают однозначность и устойчивость сильных решений ЗК (1), (2). Их сильную разрешимость даст

Теорема 2. Если выполняются условия I–IV и $dA_1^{-m}(t)dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$ при $m > 2$, то для $\forall f \in \mathcal{H}^{-1}$ и $\forall \varphi_j \in W^{2m-2-2j}(0), 0 \leq j \leq m-1$, существует сильное решение $u \in E^m$ ЗК (1), (2).

Доказательство осуществим индукцией по m . При $m=1$ уравнение $\overline{L}_1 u = \mathfrak{F}$ в силу свойств (4) разрешимо при $\forall \mathfrak{F} \in F^1$ [2]. Сделаем индуктивное

предположение о разрешимости уравнений $\overline{L_{m-1}u} = \mathfrak{Z}$ при $\forall \mathfrak{Z} \in F^{m-1}$ и любом составе и порядке различных множителей $\mathcal{M}_k(t)$ в $\mathcal{L}_{m-1}(t)$ и докажем разрешимость уравнений $\overline{L_m u} = \mathfrak{Z}$ в E^m при $\forall \mathfrak{Z} \in F^m, m=2, \dots$.

Возьмем линейные операторы $L_k^{(1,m)} \equiv \{ \mathcal{L}_k^{(1,m)}(t), \ell_0, \dots, \ell_{m-2} \} : E^{m-1} \supset D(L_{m-1}) \rightarrow F^{m-1}$ в других пространствах $L_k^{(1,m)} : E^m \supset D(L_m) \rightarrow E^{0,m} = \mathcal{J} \ell^0 \times \times W^{2m-2}(0) \times \dots \times W^4(0) \times W^2(0)$. Их замыканиями являются сужения замыканий $\overline{L_k^{(1,m)}}$ на E^m . Рассмотрим линейные операторы $M_k \equiv \{ \mathcal{M}_k(t), I, \dots, I, \ell_0 \} : E^{0,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times \dots \times W^4(0) \times W^2(0) \rightarrow F^m$, замыкания которых $\overline{M_k}$ согласно [2] имеют ограниченные обратные $\overline{M_k}^{-1} : F^m \rightarrow E^{0,m}$. В силу (6) решения уравнений $\overline{L_m u} = \mathfrak{Z}$ при $\mathfrak{Z} \in F^m$ одновременно являются решениями уравнений $\overline{M_k L_k^{(1,m)} u} = \mathfrak{Z}_k$ при каких-то $\mathfrak{Z}_k \in F^m, 1 \leq k \leq m$. Применяя лемму 5 из [3] к операторам $S_1 = L_k^{(1,m)}$ и $T_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m, F_1 = E^{0,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} \subset \overline{M_k L_k^{(1,m)}}$. Отсюда заключаем, что уравнения $\overline{M_k L_k^{(1,m)} u} = \mathfrak{Z}_k$ для $\forall u \in D(\overline{L_m})$ можно записать в виде $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} u = \mathfrak{Z}_k$. Благодаря [2] вторые уравнения для $\forall \mathfrak{Z} \in F^m$ имеют решения $\overline{L_k^{(1,m)} u} = \overline{M_k}^{-1} \mathfrak{Z}_k \in E^{0,m}$, а по индуктивному предположению последние уравнения имеют решения $u = \overline{L_k^{(1,m)}}^{-1} \overline{M_k}^{-1} \mathfrak{Z}_k \in E^{m-1}$, где $\overline{L_k^{(1,m)}}^{-1}$ – обратные операторов $\overline{L_k^{(1,m)}}$. Докажем, что $u \in E^m$.

В силу (6) решения $u \in E^{m-1}$ уравнений $\overline{L_k^{(1,m)} u} = \Phi_k \in F^{m-1}$ являются решениями уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k u} = \tilde{\Phi}_k$ при каких-то $L_{m-2}^{(k)}$ и $\tilde{\Phi}_k \in F^{m-1}, 1 \leq k \leq m$.

Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}^{\ell_1,1}$ – пополнение $D(L_1)$ по эрмитовой норме $\|u\|_{1,1} = \left(\|du/dt\|_0^2 + \|u\|_1^2 \right)^{1/2}$. Если $v \in E^{m-1}$ – решение уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k v} = \tilde{\Phi}_k$ при $\tilde{\Phi}_k \in F^{1,m} = \mathcal{H}^{\ell_1,1} \times W^{2m-2}(0) \times \dots \times W^4(0) \times W^2(0)$, то $M_k \overline{L_{m-2}^{(k)} M_k v} = M_k \tilde{\Phi}_k \in F^m$, где операторы $M_k \equiv \{ \mathcal{M}_k(t), I, \dots, I, \ell_0 \} : F^{1,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times \dots \times W^2(0) \rightarrow F^m$ непрерывны. Применяя аналог леммы 6 из [3] к операторам $T_1 = L_{m-2}^{(k)} M_k$ и $S_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m, F_1 = F^{1,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения

$$\overline{M_k L_{m-2}^{(k)} M_k} \subset \overline{M_k \left(L_{m-2}^{(k)} M_k \right)}. \tag{11}$$

Применение леммы 5 из [3] к операторам $S_1 = M_k \equiv \{ \mathcal{M}_k(t), \ell_0 \} : E^m \supset D(L_m) \rightarrow E^{m-1} \times \times W^{2m-2}(0)$ и $T_1 = M_k L_{m-2}^{(k)} \equiv \{ \mathcal{L}_{m-1}^{(k)}(t), I, \ell_0, \dots, \ell_{m-2} \} : E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \supset D(L_{m-1}) \times \times W^{2m-2}(0) \rightarrow F^m$ приводит к вложениям

$$\overline{\left(M_k L_{m-2}^{(k)} \right) M_k} \subset \overline{M_k L_{m-2}^{(k)} M_k}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) имеем уравнения $\overline{M_k L_{m-2}^{(k)} M_k v} = M_k \tilde{\Phi}_k$, которые по предположению индукции имеют решения $\overline{M_k}^{-1} \tilde{\Phi}_k \in E^{m-1}, 1 \leq k \leq m$. С помощью анало-

гов неравенств (8) и (9) для $\mathcal{M}_k(t)$ в нормах пространств $W^{2m-4-2i}(t)$ и $W^{2m-3-2i}(t)$, интерполяционных неравенств (10) и леммы Гронуолла выводятся неравенства

$$c_9 \|v\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^m \| \bar{\mathcal{M}}_k(t)v \|_{m-1}^2 + \sum_{j=0}^{m-2} | \ell_j v |_{(2m-4-2i)(0)}^2, \quad c_9 > 0,$$

которые означают, что $v \in E^m$, так как уже $v \in E^{m-1}$. Используя этот факт, неравенства (8) – (10) и лемму Гронуолла, аналогично можно вывести неравенства

$$c_{10} \|u\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^m \| L_k^{(1,m)} u \|_{0,m}^2 \quad \forall u \in E^m, \quad c_{10} > 0, \quad (13)$$

где $\| \cdot \|_{0,m}$ – эрмитовы нормы гильбертовых пространств $E^{0,m}$. Из неравенств (13) следует, что вышенайденное решение $u \in E^m$. Попутно отсюда индукцией по m находим, что

$$u = \bar{L}_m^{-1} \mathfrak{Z} = \bar{M}_1^{-1} \dots \bar{M}_m^{-1} \mathfrak{Z} \in E^m \quad \forall \mathfrak{Z} \in F^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} = f, \quad t \in]0, T[, \quad m = 1, 2, \dots,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-1-2k}(t), H))$, $0 \leq k \leq m-1$.

1. Ломовцев Ф. Е. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 78.
2. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132.
3. Там же. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.

Поступила в редакцию 02.05.2001.

Федор Егорович Ломовцев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

УДК 517.984

М.В. МАРТОН

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ФРЕДГОЛЬМА, ВЕЙЛЯ И БРАУДЕРА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

In this paper the essential spectra of weighted shift operators are investigated in Banach algebra $B(I_1)$. For this operator four cases are considered and, depending on cases, submissions for essential spectra are received.

В работе исследуется проблема нахождения существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера оператора взвешенного сдвига в банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $B(I_1)$.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор взвешенного сдвига T , задаваемый следующей формулой:

$$T(x_1, x_2, \dots) := (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \quad x = (x_k) \in I_1, \quad (1)$$

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k \in \mathbb{C}$, $\sup\{|a_k|: k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Исследования спектра, существенных спектров оператора, действующего на пространстве I_1 , отличаются от случая операторов, определенных на I_p , $1 < p < \infty$, так как банахово пространство I_1 нерефлексивно.

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости \mathbb{C} , определяемые полуфредгольмовыми и фредгольмовыми характеристиками оператора $T-\lambda I$: $\Phi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T-\lambda I) = R(T-\lambda I), \text{nul}(T-\lambda I) < \infty, \text{def}(T-\lambda I) < \infty\}$, $\Phi_0(T) := \{\lambda \in \Phi(T) : \text{ind}(T-\lambda I) = 0\}$, $B(T) := \{\lambda \in \Phi_0(T) : \text{проколота́я окрестность точки } \lambda \text{ лежит в резольвентном множестве } \rho(T)\}$, где $\text{nul}(T) := \dim \text{Ker}(T)$, $\text{def}(T) := \dim I_1/R(T)$, $\text{ind}(T) := \text{nul}(T) - \text{def}(T)$.

Существенные спектры можно определять разными способами, один из которых в определенном смысле упорядочивает изучаемые существенные спектры и связан с описанием различных фредгольмовых свойств оператора. *Существенным спектром Фредгольма* оператора T , обозначенного через $\sigma_{ef}(T)$, *существенным спектром Вейля* $\sigma_{ew}(T)$ и *существенным спектром Браудера* $\sigma_{eb}(T)$ называются подмножества, которые определяются следующим образом: $\sigma_{ef}(T) := \mathbb{C} \setminus \Phi(T)$, $\sigma_{ew}(T) := \mathbb{C} \setminus \Phi_0(T)$, $\sigma_{eb}(T) := \mathbb{C} \setminus B(T)$. Очевидно, что рассматриваемые существенные спектры удовлетворяют следующим включениям: $\sigma_{ef}(T) \subset \sigma_{ew}(T) \subset \sigma_{eb}(T) \subset \sigma(T)$. (Подробнее об этих обозначениях и различных свойствах описанных множеств и спектров смотри, например, в работе [1].)

Будем говорить, что оператор T имеет левый обратный, который обозначим через T^{-1} , если из $Tx=0$ следует $x=0$, т. е. если T – взаимно однозначное отображение I_1 на область значений $R(T)$. Будем различать следующие возможности для $R(T)$ и T^{-1} : I. $R(T)=I_1$; II. $R(T) \neq I_1$, но $\overline{R(T)} = I_1$; III. $\overline{R(T)} \neq I_1$; и соответственно 1. $\exists T^{-1}$ и ограничен; 2. $\exists T^{-1}$ и неограничен; 3. T^{-1} не существует. Таким образом, каждый оператор попадает в один из девяти непересекающихся классов, определяемых тремя возможностями для его области значений и его левого обратного. *Состоянием оператора* называются описанные классы, которые обозначаются с помощью римских и арабских цифр рассмотренной классификации. Например, если оператор $T \in I$, т. е. $R(T)=I_1$, и $T \in 3$, т. е. T^{-1} не существует, тогда $T \in I_3$ и т. д. В таблице состояний Тейлора – Халберга (см. подробнее работу [1]) фактически собраны теоремы, показывающие в общем случае, какие состояния для оператора и его сопряженного возможны при некоторых ограничениях на пространство, а какие – нет. Для описания тонкой структуры спектра ограниченного линейного оператора из $B(I_1)$ воспользуемся свойствами “состояния оператора $T-\lambda I$ ”. Для этого введем связанные с состояниями оператора спектральные подмножества. Например, спектральное подмножество $\Pi_3(T)$ по определению означает $\Pi_3(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \in \Pi_3\}$ и т. д. В общем случае спектр оператора, действующего в банаховом пространстве, содержит объединение следующих шести спектральных подмножеств: $\sigma(T) = I_3(T) \cup \Pi_3(T) \cup \Pi_3(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T)$. Для исследования спектра оператора взвешенного сдвига T целесообразно в зависимости от последовательности весов a_k рассмотреть следующую классификацию:

- а) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| > 0$;
- б) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| = 0$;
- в) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно;
- г) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Отметим, что в работе [2] описана тонкая структура спектра оператора взвешенного сдвига в банаховом пространстве I_1 , когда множество $\{\inf |a_k|\}$ отделено от нуля, – это случай а), а в статье [3] вычислен аппроксимативно точечный спектр оператора взвешенного сдвига в гильбертовом простран-

в l_2 . В работе [4] доказана теорема о связи существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера с тонкой структурой спектра оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ при различных условиях на веса a_k . Для дальнейшего изучения существенных спектров нам понадобится следующая

Теорема 1 [4]. Пусть T – ограниченный оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Тогда для существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера оператора T справедливы следующие равенства в терминах спектральных подмножеств:

1. Если веса удовлетворяют условию г), то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, если веса удовлетворяют вариантам а), б) и в) при $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, если веса удовлетворяют варианту в) при $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, где a_k – последний нулевой вес.

2. Если веса удовлетворяют условию г), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, если условно б), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_2(T)$, если условно а), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T)$, если условно в), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$.

Известно [2], что спектр оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ есть замкнутый круг, т. е. $\sigma(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где спектральный радиус r_σ , вычисляемый так же, как в случае гильбертова пространства l_2 (см. пример № 77 в [5]), равен:

$$r_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|T^k\|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq 1} |a_m \dots a_{m+k-1}|)^{1/k}.$$

Лемма 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям б) и г), то $\sigma_{ef}(T) = \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\}$.

Доказательство. Эти равенства следуют из теоремы 1 и из представления для спектра оператора взвешенного сдвига $\sigma(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$. В случае когда веса удовлетворяют условию г), для доказательства используется лемма 3 работы [4], в которой показано, что спектральные подмножества $\Pi_1(T)$ и $\Pi_2(T)$ пустые. Если веса удовлетворяют условию б), то используются леммы 1 и 2 статьи [4], в которой показано, что спектральные подмножества $\Pi_1(T)$ и $\Pi_3(T)$ пустые.

Лемма 2. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Пусть веса a_k удовлетворяют условию в), тогда:

1. Для существенного спектра Фредгольма справедливы следующие равенства: если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\}$.

2. Для существенных спектров Вейля и Браудера справедливо равенство $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где

$$r_2 = \sup_{n \geq 1} (\inf_{m \geq j+2} |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}, \tag{2}$$

а $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$.

Доказательство. Из теоремы 1 и представления для спектра оператора T , а также из леммы 2 работы [4] получаем, что если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \{\Pi_1(T) \cup \{0\}\}$, а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \Pi_1(T)$ и, кроме того, $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T)$. Опишем спектральное подмножество $\Pi_1(T)$. Из диаграммы состояний Тейлора – Халберга для спектра ограниченного оператора на комплексном банаховом пространстве (см., например, рис. 1.2 в [1]) следует, что $\lambda \in \Pi_1(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in I_3(T')$, где $T': l_1 \rightarrow l_1 -$

оператор, сопряженный к оператору T и задаваемый следующей формулой:
 $T'(x_1, x_2, \dots) := (a_1x_2, a_2x_3, \dots)$.

Рассмотрим множество состояний $\text{III}(T)$. Условие $\lambda \in \text{III}(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in \text{Z}(T')$. Нетрудно видеть, что $0 \in \sigma_p(T')$, т. е. $0 \in \text{Z}(T')$. Рассмотрим равенство $(T' - \lambda I)x = 0$ для $\lambda \neq 0$, которое можно записать в виде: $a_1x_2 - \lambda x_1 = 0$, $a_2x_3 - \lambda x_2 = 0, \dots$. Из этих равенств следует, что если $a_j = 0$, где $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$, то $x_k = 0$ для $1 \leq k \leq j$. Пусть $x_{j+1} = \xi \in C$, тогда $x_{j+2} = (\lambda/a_{j+1})\xi$, $x_{j+3} = (\lambda^2/(a_{j+1}a_{j+2}))\xi, \dots$, $x_k = (\lambda^{k-j-1}/(a_{j+1} \dots a_{k-1}))\xi$, $k \geq j+2$. Таким образом, для вектора x , являющегося формальным решением уравнения $(T' - \lambda I)x = 0$, получено представление следующего вида: $x = (0, \dots, 0, \xi, (\lambda/a_{j+1})\xi, \dots, (\lambda^{k-j-1}/(a_{j+1} \dots a_{k-1}))\xi, \dots)$. Для того чтобы вектор $x \in \text{Ker}(T' - \lambda I)$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in l_\infty$, т. е. $\sup(|\lambda|^{k-j-1}/|a_{j+1} \dots a_{k-1}|) < \infty$, а это неравенство равносильно тому, что

$$|\lambda| < \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{k \geq j+2} |a_{j+1} \dots a_{k-1}|^{1/k}.$$

Рассмотрим теперь подмножество состояний $\text{III}_1(T)$. Пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \text{III}(T)$. Условие $\lambda \in \text{I}(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in I(T')$, или, другими словами, $R(T' - \lambda I) = l_\infty$. Для вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ обозначим $Pr_j(x) = (x_1, \dots, x_j, 0, 0, \dots)$ – проектор на подпространство с первыми ненулевыми координатами. Так как $l_\infty = Pr_j(l_\infty) \oplus (I - Pr_j)(l_\infty)$, то условие $R(T' - \lambda I) = l_\infty$ равносильно следующим двум равенствам:

$$Pr_j(l_\infty) = Pr_j(R(T' - \lambda I)), \tag{3}$$

$$(I - Pr_j)(l_\infty) = (I - Pr_j)(R(T' - \lambda I)). \tag{4}$$

Рассмотрим равенство (3), которое представляет собой систему: $a_1x_2 - \lambda x_1 = y_1$, $a_2x_3 - \lambda x_2 = y_2, \dots, a_{j-1}x_j - \lambda x_{j-1} = y_{j-1}, -\lambda x_j = y_j$, так как вес $a_j = 0$. Эта система характеризуется матрицей с ненулевым определителем и, таким образом, равенство (3) справедливо. Что касается изучения соотношения (4), то для удобства сделаем переиндексацию, заменим $(1+j)$ на 1. Тогда равенство (4) запишется в виде: $R(T' - \lambda I) = l_\infty$ и будет равносильно системе вида: $a_1x_2 - \lambda x_1 = y_1$, $a_2x_3 - \lambda x_2 = y_2, \dots, a_{k-1}x_k - \lambda x_{k-1} = y_{k-1}, \dots$. Пусть $x_1 = \xi \in C$, тогда $x_2 = (\lambda/a_1)\xi + y_1/a_1$, $x_3 = (\lambda^2/(a_1a_2))\xi + ((\lambda/(a_1a_2))y_1 + (1/a_2)y_2), \dots$ и координата x_k имеет следующее представление: $x_k = (\lambda^k/(a_1 \dots a_{k-1}))\xi + \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1}$. Перепишем эти равен-

ства в векторном виде $x = x^0 + z(y)$, где $x_k^0 = (\lambda^k/(a_1 \dots a_{k-1}))\xi$, а $z_k(y) = \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1}$. Так как $\lambda \in \text{III}(T)$, то $x^0 \in l_\infty$ и условие $R(T' - \lambda I) = l_\infty \Leftrightarrow$

$z(y) \in l_\infty \Leftrightarrow \sup_{k \geq 2} \left| \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} \right| < \infty$. Возвращая старые индексы, получаем окон-

чательное условие, когда вектор $z(y) \in l_\infty$: $\sup_{k \geq 2+j} \left| \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} \right| < \infty$. Нетрудно

видеть, что $\{0\} \in \text{III}_3(T)$. Можно показать, что если $\lambda_1 \in \text{III}_1(T)$, то λ такое, что $|\lambda| < |\lambda_1|$ тоже лежит в спектральном подмножестве $\text{III}_1(T)$. Так как $\text{III}_1(T)$ – открытое множество (см. [1] или [2]), то спектральное подмножество $\text{III}_1(T)$ имеет вид:

$$\text{III}_1(T) = \{\lambda \in C: 0 < |\lambda| < r_2\}, \tag{5}$$

где $r_2 = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \text{III}_1(T)\}$.

Отметим, что в статье [2] для вычисления множества $\Pi_1(T)$ используется минимальный модуль $\mu(T)$, и в случае, когда среди весов нет нулей, это – условия а) и б), справедливо равенство $r_2 = \sup\{(\mu(T^n))^{1/n} : n \geq 1\}$. Обобщая это равенство на случай, когда среди весов есть конечное число нулевых, это – условие в), получаем формулу (2) для r_2 . Из формул (5) и (2) следует необходимое представление для множества $\Pi_1(T)$ и, таким образом, для существенного спектра $\sigma_{ef}(T)$.

Лемма 3. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(I_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию а), то тогда существенный спектр Фредгольма равен $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2' \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а существенные спектры Вейля и Браудера совпадают и равны $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где

$$r_2' = \sup_{n \geq 1} (\inf_{m \geq 2} |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}. \quad (6)$$

Доказательство. Эти утверждения следуют из теоремы 1, представления для спектра оператора T , а также из леммы 2 работы [2], в которой показано, что спектральное подмножество $\Pi_3(T)$ пустое. Таким образом, $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \Pi_1(T)$, а $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T)$. Спектральное подмножество $\Pi_1(T)$ находится так же, как в лемме 2, с заменой r_2 на r_2' , определенной по формуле (6). Из найденных формул для спектрального подмножества $\Pi_1(T)$ получаем искомое равенство для $\sigma_{ef}(T)$.

С учетом теоремы 1 и лемм 1–3 можно сформулировать основную теорему о существенных спектрах Фредгольма, Вейля и Браудера для оператора взвешенного сдвига T из $B(I_1)$.

Теорема 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(I_1)$, задаваемый формулой (1). Тогда для существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера справедливы следующие представления:

1. Если веса удовлетворяют условиям б) и г), то $\sigma_{ef}(T) = \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_σ – спектральный радиус оператора T .

2. Если веса удовлетворяют условию а), то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2' \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_2' определяется по формуле (6).

3. Если веса удовлетворяют условию в) при $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} > 0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n| : n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\}$ и $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_2 определяется по формуле (2).

В заключение отметим, что в работе [6] для оператора взвешенного сдвига со специальными весами, отделенными по модулю от нуля, найдена тонкая структура спектра оператора в банаховом пространстве l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в статье [7] подсчитан числовой радиус оператора левого взвешенного сдвига в гильбертовом пространстве l_2 . В работах [8], [9] получены формулы для нахождения существенных спектров различных классов ограниченных линейных операторов Чезаро, определенных на банаховом пространстве последовательностей l_p , $1 \leq p \leq \infty$.

1. Еровенко В. А., Северенчук Н. Б. Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. Мн., 2000.

2. Gindler H. A., Taylor A. E. // Stud. Math. 1962. Vol. 22. № 1. P. 35.

3. Ridge W. C. // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 147. № 1-2. P. 349.

4. Мартон М. В. // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. 2002. № 2-3. P. 69.

5. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.

6. Halberg C. Y., Samuelsson A. // Math. Scand. 1971. Vol. 29. № 1. P. 37.

7. Stout Q. F. // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88. № 3. P. 495.

8. Еровенко В. А. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 9. С. 784.

9. Еровенко В. А., Иванов Ю. Г. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 4. С. 9.

Поступила в редакцию 20.02.2002.

Марина Владимировна Мартон – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа В.А. Еровенко.

УДК 517.965+517.96

Ю.Г. РУЛИНСКИЙ

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

The article deals with some type of pair integral equations given on the finite segments. Using the Wiener – Paley theorem, the equations are reduced to functional relations in the classes of entire functions of exponential type.

Пусть $z=x+iy$. Через E_a обозначим класс всех целых функций $F(z)$ таких, что

$$|F(z)| \leq C e^{a|z|}, F(x) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

По теореме Винера – Пэли [1] класс E_a совпадает с классом всех целых функций вида:

$$F(z) = \int_{-a}^a f(t) e^{izt} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[-a, a].$$

По аналогии с E_a введем два класса целых функций экспоненциального типа:

E_a^+ , состоящий из всех целых функций $\Phi^+(z)$, таких, что

$$\Phi^+(x) \in L_2(-\infty, +\infty), |\Phi^+(x+iy)| \leq M, y > 0; |\Phi^+(x+iy)| \leq M e^{-ay}, y \leq 0.$$

E_a^- , состоящий из всех целых функций $\Phi^-(z)$, таких, что

$$\Phi^-(x) \in L_2(-\infty, +\infty), |\Phi^-(x+iy)| \leq N, y < 0; |\Phi^-(x+iy)| \leq N e^{ay}, y \geq 0.$$

Лемма 1. *Не существует целой функции, отличной от нуля, которая одновременно принадлежит обоим классам E_a^+ и E_a^- .*

Доказательство леммы 1 основывается на теореме Лиувилля.

С помощью теоремы Винера – Пэли и леммы 1 можно показать, что верны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Класс E_a^+ совпадает с классом всех целых функций вида:*

$$\Phi^+(z) = \int_0^a f(t) e^{izt} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[0, a].$$

Теорема 2. *Класс E_a^- совпадает с классом всех целых функций вида:*

$$\Phi^-(z) = \int_{-a}^0 f(t) e^{izt} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[-a, 0].$$

Рассмотрим парные однородные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a e^{-\beta|x-t|} p(t) dt = 0, \quad -a \leq x \leq 0, \quad (2)$$

где $p(t)$ ищем в $L_2[-a, a]$, $\alpha, \beta - \text{const}$, причем $\alpha, \beta > 0$.

Замечание. Интеграл $\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt$, где $p(t) \in L_2[-a, a]$, $x \in [-a, a]$, может

быть продолжен естественным образом по переменной x до функции, непрерывной на всей действительной оси.

Продолжим интегралы, стоящие в левой части (1) и (2), по переменной x на всю действительную ось. Имеем

$$\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt = g(x), \tag{3}$$

$$\int_{-a}^a e^{-\beta|x-t|} p(t) dt = f(x), \tag{4}$$

$$\text{где } g(x) = \begin{cases} k_1^+(x), & x > a \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \phi^-(x), & -a \leq x < 0 \\ k_1^-(x), & x < -a \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} k_2^+(x), & x > a \\ \phi^+(x), & 0 < x \leq a \\ 0, & -a \leq x \leq 0 \\ k_2^-(x), & x < -a \end{cases}.$$

Здесь $\phi^-(x)$ – неизвестная функция из $L_2[-a, 0)$, $\phi^+(x)$ – неизвестная функция из $L_2(0, a]$. $k_1^+(x)$ определяется при $x > 0$ левой частью (3) следующим образом:

$$k_1^+(x) = \int_{-a}^a e^{-\alpha(x-t)} p(t) dt = e^{-\alpha x} \int_{-a}^a e^{\alpha t} p(t) dt = A e^{-\alpha x};$$

$k_1^-(x)$ определяется при $x < -a$ левой частью (3) следующим образом:

$$k_1^-(x) = \int_{-a}^a e^{\alpha(x-t)} p(t) dt = e^{\alpha x} \int_{-a}^a e^{-\alpha t} p(t) dt = B e^{\alpha x},$$

$k_2^+(x)$ определяется при $x > a$ левой частью (4) следующим образом:

$$k_2^+(x) = \int_{-a}^a e^{-\beta(x-t)} p(t) dt = e^{-\beta x} \int_{-a}^a e^{\beta t} p(t) dt = C e^{-\beta x};$$

$k_2^-(x)$ определяется при $x < -a$ левой частью (4) следующим образом:

$$k_2^-(x) = \int_{-a}^a e^{\beta(x-t)} p(t) dt = e^{\beta x} \int_{-a}^a e^{-\beta t} p(t) dt = D e^{\beta x},$$

где A, B, C, D – неизвестные константы.

Так как функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны на всей действительной оси, то

$$\lim_{x \rightarrow a+0} k_1^+(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -a-0} k_2^-(x) = 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} A e^{-\alpha a} = 0 \\ D e^{-\beta a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1^+(x) = 0, \quad k_2^-(x) = 0.$$

Введем функцию $\varphi_1(t) = \begin{cases} p(t), & t \in [-a, a] \\ 0, & t \notin [-a, a] \end{cases}$. Тогда (3) и (4) эквивалентны со-

ответственно следующим интегральным уравнениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-t|} \varphi_1(t) dt = g(x), \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|x-t|} \varphi_1(t) dt = f(x). \quad (6)$$

Преобразовав по Фурье левую и правую части (5) и (6), получим соответственно следующие два функциональных уравнения

$$\frac{2\alpha}{z^2 + \alpha^2} P(z) = \Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha}, \quad (7)$$

$$\frac{2\beta}{z^2 + \beta^2} P(z) = \Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta}, \quad (8)$$

где

$$P(z) = \int_{-a}^a p(t)e^{izt} dt, \quad \Phi^-(z) = \int_{-a}^a \varphi^-(x)e^{izx} dx, \quad \Phi^+(z) = \int_0^a \varphi^+(x)e^{izx} dx.$$

Исключив $P(z)$ из уравнений (7) и (8), имеем

$$\frac{2\beta}{z^2 + \beta^2} \left[\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha} \right] = \frac{2\alpha}{z^2 + \alpha^2} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right]. \quad (9)$$

Из равенства (9) следует выполнение условия

$$\Phi^-(i\beta) + \frac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\alpha - \beta} = 0 \Rightarrow \Phi^-(i\beta) = \frac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\beta - \alpha}. \quad (10)$$

Преобразуем (9) к виду

$$\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a} - B}{iz + \alpha} = \frac{\alpha(z^2 + \beta^2)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right] - \frac{B}{iz + \alpha}. \quad (11)$$

Левая часть (11) есть целая функция из класса E_a^- , а правая часть (11) – целая функция из класса E_a^+ . По лемме 1 имеем

$$\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a} - B}{iz + \alpha} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\alpha(z^2 + \beta^2)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right] - \frac{B}{iz + \alpha} = 0. \quad (13)$$

Из (12) следует $\Phi^-(z) = \frac{B - Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha}$, и с учетом условия (10) получим

$$\frac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\beta - \alpha} = \frac{B - Be^{(\beta-\alpha)a}}{\alpha - \beta}, \text{ откуда вытекает, что } B=0 \text{ и } \Phi^-(z)=0. \text{ Тогда (13) при-}$$

мет вид $\frac{\alpha(z^2 + \beta^2)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right] = 0$, откуда $\Phi^+(z) = \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta}$, но в дан-

ной формуле равенство может выполняться только при условии, что $C=0$ и $\Phi^+(z)=0$. Из сказанного ранее вытекает, что $P(z)=0$, и в силу взаимно однозначного соответствия между образами и прообразами Фурье парные уравнения (1) и (2) имеют только нулевое решение.

Рассмотрим неоднородные парные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt = g_0(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (14)$$

$$\int_{-a}^a e^{-\beta|x-t|} p(t) dt = f_0(x), \quad -a \leq x \leq 0, \quad (15)$$

где $g_0(x) \in L_2[0, a]$, $f_0(x) \in L_2[-a, 0]$, $p(t)$ ищем в $L_2[-a, a]$, $\alpha, \beta - \text{const}$, причем $\alpha, \beta > 0$.

Продолжим интегралы, стоящие в левой части (14) и (15), по переменной x на всю действительную ось. Имеем

$$\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt = g(x), \quad (16)$$

$$\int_{-a}^a e^{-\beta|x-t|} p(t) dt = f(x), \quad (17)$$

$$\text{где } g(x) = \begin{cases} k_1^+(x), & x > a \\ g_0(x), & 0 \leq x \leq a \\ \phi^-(x), & -a \leq x < 0 \\ k_1^-(x), & x < -a \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} k_2^+(x), & x > a \\ \phi^+(x), & 0 < x \leq a \\ f_0(x), & -a \leq x \leq 0 \\ k_2^-(x), & x < -a \end{cases}$$

где $\phi^-(x)$ – неизвестная функция из $L_2[-a, 0]$, $\phi^+(x)$ – неизвестная функция из $L_2(0, a]$,

$$k_1^+(x) = \int_{-a}^a e^{-\alpha(x-t)} p(t) dt = e^{-\alpha x} \int_{-a}^a e^{\alpha t} p(t) dt = A e^{-\alpha x};$$

$$k_1^-(x) = \int_{-a}^a e^{\alpha(x-t)} p(t) dt = e^{\alpha x} \int_{-a}^a e^{-\alpha t} p(t) dt = B e^{\alpha x};$$

$$k_2^+(x) = \int_{-a}^a e^{-\beta(x-t)} p(t) dt = e^{-\beta x} \int_{-a}^a e^{\beta t} p(t) dt = C e^{-\beta x};$$

$$k_2^-(x) = \int_{-a}^a e^{\beta(x-t)} p(t) dt = e^{\beta x} \int_{-a}^a e^{-\beta t} p(t) dt = D e^{\beta x},$$

где A, B, C, D – неизвестные константы.

Так как функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны на всей действительной оси, то

$$\lim_{x \rightarrow a+0} k_1^+(x) = g_0(a); \quad \lim_{x \rightarrow -a-0} k_2^-(x) = f_0(-a), \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} A e^{-\alpha a} = g_0(a) \\ D e^{-\beta a} = f_0(-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = g_0(a) e^{\alpha a} \\ D = f_0(-a) e^{\beta a} \end{cases}$$

Введем функцию $\varphi_1(t) = \begin{cases} p(t), & t \in [-a, a] \\ 0, & t \notin [-a, a] \end{cases}$. Тогда (16) и (17) эквивалентны

соответственно следующим интегральным уравнениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-t|} \varphi_1(t) dt = g(x), \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|x-t|} \varphi_1(t) dt = f(x). \quad (19)$$

Преобразовав по Фурье левую и правую части (18) и (19), получим соответственно следующие два функциональных уравнения:

$$\frac{2\alpha}{z^2 + \alpha^2} P(z) = G^+(z) + \Phi^-(z) - \frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz - \alpha} + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha}, \quad (20)$$

$$\frac{2\beta}{z^2 + \beta^2} P(z) = \Phi^+(z) + F^-(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} + \frac{De^{-(iz+\beta)a}}{iz + \beta}, \quad (21)$$

где

$$P(z) = \int_{-a}^a p(t)e^{izt} dt, \quad \Phi^-(z) = \int_{-a}^0 \varphi^-(x)e^{izx} dx, \quad \Phi^+(z) = \int_0^a \varphi^+(x)e^{izx} dx,$$

$$G^+(z) = \int_0^a g_0(x)e^{izx} dx, \quad F^-(z) = \int_{-a}^0 f_0(x)e^{izx} dx. \text{ Исключив } P(z) \text{ из уравнений}$$

(20) и (21), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta}{z^2 + \beta^2} \left[G^+(z) + \Phi^-(z) - \frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz - \alpha} + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha} \right] = \\ & = \frac{2\alpha}{z^2 + \alpha^2} \left[\Phi^+(z) + F^-(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} + \frac{De^{-(iz+\beta)a}}{iz + \beta} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Преобразуем (22) к виду

$$\begin{aligned} \Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha} - \frac{\alpha(z^2 + \beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} + \frac{\alpha D(iz - \beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2 + \alpha^2)} = \\ = \frac{\alpha(z^2 + \beta^2)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right] - G^+(z) + \frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz - \alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Левая часть (23) есть мероморфная функция с полюсами в точках $z_1=i\alpha$ и $z_2=-i\alpha$, которая исчезает на бесконечности в нижней замкнутой полуплоскости и принадлежит пространству L_2 на вещественной оси. В свою очередь правая часть (23) есть мероморфная функция с полюсами в тех же точках, которая исчезает на бесконечности в верхней замкнутой полуплоскости и также принадлежит пространству L_2 на вещественной оси. Следовательно, уравнение (23) можно свести к следующим двум уравнениям:

$$\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha} - \frac{\alpha(z^2 + \beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} + \frac{\alpha D(iz - \beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2 + \alpha^2)} = \frac{B_1 z + C_1}{z^2 + \alpha^2}, \quad (24)$$

$$\frac{\alpha(z^2 + \beta^2)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} \left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta} \right] - G^+(z) + \frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz - \alpha} = \frac{B_1 z + C_1}{z^2 + \alpha^2}, \quad (25)$$

где B_1, C_1 – неизвестные константы. Из (24) и (25) выражаем $\Phi^-(z)$ и $\Phi^+(z)$:

$$\Phi^-(z) = -\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz + \alpha} + \frac{\alpha(z^2 + \beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2 + \alpha^2)} - \frac{\alpha D(iz - \beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2 + \alpha^2)} + \frac{B_1 z + C_1}{z^2 + \alpha^2}, \quad (26)$$

$$\Phi^+(z) = \frac{\beta(z^2 + \alpha^2)}{\alpha(z^2 + \beta^2)} \left[G^+(z) - \frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz - \alpha} + \frac{B_1 z + C_1}{z^2 + \alpha^2} \right] + \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz - \beta}. \quad (27)$$

Левая часть (26) есть целая функция, следовательно, правая часть (26) не должна иметь особенности в точках $z_1=i\alpha$, $z_2=-i\alpha$, из тех же соображений правая часть (27) не должна иметь особенности в точках $z_3=i\beta$, $z_4=-i\beta$, т. е. относительно неизвестных констант B, C, B_1, C_1 должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} -2\alpha\beta B + a(\beta^2 - \alpha^2)F^-(i\alpha) + \alpha D(\alpha + \beta)e^{(\alpha-\beta)a} + i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ a(\beta^2 - \alpha^2)F^-(-i\alpha) - \alpha D(\alpha - \beta)e^{-(\alpha+\beta)a} - i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2 - \beta^2)G^+(i\beta) + \beta(\alpha - \beta)Ae^{-(\beta+\alpha)a} + i\beta^2 B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2 - \beta^2)G^+(-i\beta) + \beta(\alpha + \beta)Ae^{(\beta-\alpha)a} - i\beta^2 B_1 + \beta C_1 - 2\alpha\beta C = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляем $\Phi^-(z)$ в (20) либо $\Phi^+(z)$ в (21). Имеем

$$P(z) = \frac{z^2 + \alpha^2}{2\alpha} G^+(z) + \frac{z^2 + \beta^2}{2\beta} F^-(z) + \frac{A(iz + \alpha)}{2\alpha} e^{(iz-\alpha)a} - \frac{D(iz - \beta)}{2\beta} e^{-(iz+\beta)a} + \frac{B_1 z + C_1}{2\alpha}. \quad (29)$$

В силу того что однородная задача (1) и (2) имеет нулевое решение, возможны два случая:

1. Из условий (28), а также из условия принадлежности правой части (29) классу E_a значения констант B, C, B_1, C_1 определяются однозначно. Тогда исходная задача (14) и (15) разрешима и имеет единственное решение, которое находится по функции $P(z)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

2. Не существует таких значений констант B, C, B_1, C_1 , при которых выполняются условия (28) и условие принадлежности правой части (29) классу E_a . Тогда исходная задача (14) и (15) не имеет решения.

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964. С. 25.

Поступила в редакцию 27.02.2002.

Юрий Григорьевич Рулинский – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций И.Л. Васильев.

УДК 517.9

Д.Е. РИНГЕЛЬ

МНЕМОЧИСЛА И МНЕМОВЕКТОРЫ. I

To study the rings of mnemonumbers we introduce the mnemofication functor from the category of normed spaces over non-trivially normed field into the category of ultra-metric Banach modules over ring of mnemonumbers. We found a complete non-trivially normed subfield in the ring of mnemonumbers isomorphic to the field of formal power series with coefficient in the basic field, so the ring of mnemonumbers is Banach algebra over it and corresponding modules are Banach spaces.

Нелинейные обобщенные функции впервые возникли в работах Ж.Ф. Колombo [1] в связи с проблемой умножения распределений. Затем Ю.В. Егоров [2] ввел свое пространство “новых обобщенных функций”. А.Б. Антонец и Я.В. Радыно [3–4] был предложен общий метод (с помощью регуляризаций) построения алгебр, содержащих заданные векторные пространства, и были введены термины “мнемофункции” и “мнемочисла” (константные мнемофункции). Дальнейшая история вопроса изложена в работе [5]. Мы изучаем мнемочисла, обобщающие алгебру мнемочисел Радыно.

Ультранормированное кольцо мнемочисел, ультранормированный модуль мнемовекторов

Пусть $X = s(\mathbb{K})$ – алгебра последовательностей элементов из нетривиально нормированного поля $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ с покомпонентными операциями, $X_0 = l_\infty(\mathbb{K})$ – подалгебра ограниченных последовательностей. Зафиксируем “бесконечно

большой” относительно подалгебры X_0 элемент $x_\infty=(x_\infty^{(1)}, x_\infty^{(2)}, \dots) \in X \setminus X_0$, обратимый по умножению, причем такой, что $x_\infty^{-1} \in X_0$ и, более того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_\infty^{(k)})^{-1} = 0. \tag{1}$$

Поскольку поле \mathbf{K} нетривиально нормировано, то легко показать, что такой элемент x_∞ всегда существует. Элемент x_∞ будем называть порождающим.

Рассмотрим двустороннюю последовательность векторных подпространств над \mathbf{K} в X : $X_n \equiv X_n(x_\infty) = x_\infty^{-n} X_0, n \in \mathbf{Z}$. Легко видеть, что

$$\dots \subset X_{-n} \subset \dots \subset X_0 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots,$$

причем все включения строгие, так как $x_\infty^{-1} \in X_0$ и $x_\infty^n \in X_n \setminus X_{n-1}$.

Рассмотрим минимальную подалгебру, порожденную X_0 и x_∞ , – объединение $X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K}) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} X_n$. Рассмотрим также пересечение $X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} X_n$ – векторное подпространство над \mathbf{K} .

Пусть $(Y, |\cdot|)$ – нормированное пространство над \mathbf{K} . Рассматривая вместо $s(\mathbf{K})$ и $l_\infty(\mathbf{K})$ соответственно $X=s(Y)$ и $X_0=l_\infty(Y)$ при прежнем x_∞ , получим $X_{+\infty}(x_\infty, Y)$ и $X_{-\infty}(x_\infty, Y)$ вместо $X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$ и $X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$.

Определение 1. Порядком роста элемента $x \in X$ относительно x_∞ назовем число

$$\text{ord}(x) = \begin{cases} \inf \{n \in \mathbf{Z} : x \in X_n\}, & x \in X_{+\infty}, \\ +\infty, & x \in X \setminus X_{+\infty}. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что $\text{ord}(x) < +\infty$ на $X_{+\infty}$ и $\text{ord}(x) = -\infty$ на $X_{-\infty}$.

Замечание. Непосредственно из определения порядка следует равносильность следующих условий для $x \in s(Y)$ и $n \in \mathbf{Z}$: 1) $x \in X_n(x_\infty)$; 2) $\text{ord}(x) \leq n$; 3) $x = x_\infty^{-n} x_0$, где $x_0 \in l_\infty(Y)$; 4) $x_\infty^{-n} x \in l_\infty(Y)$; 5) $\exists C > 0 \forall k \in \mathbf{N} : |x^{(k)}| \leq C |x_\infty^{(k)}|^n$.

Теорема 1. *Порядок является логарифмической ультраполунормой на $s(\mathbf{K})$ и $s(Y)$, инвариантной относительно умножения на элементы $\mathbf{K} \setminus \{0\}$, т. е. выполняются следующие свойства:*

- 1) $\text{ord}(x \pm y) \leq \max \{ \text{ord}(x), \text{ord}(y) \}, \forall x, y \in s(Y)$;
- 2) $\text{ord}(0) = -\infty, \text{ord}(1_{s(\mathbf{K})}) = 0$;
- 3) $\text{ord}(\alpha x) = \text{ord}(x), \forall x \in s(Y), \forall \alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$;
- 4) *если $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_3$ – обобщенное произведение над \mathbf{K} , т. е. \mathbf{K} – билинейный ограниченный оператор, то для индуцируемого им обобщенного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle : s(Y_1) \times s(Y_2) \rightarrow s(Y_3)$ имеем: $\text{ord}(x, y) \leq \text{ord}(x) + \text{ord}(y), \forall x \in S(Y_1), \forall y \in S(Y_2)$ таких, что $\text{ord}(x) < +\infty$ и $\text{ord}(y) < +\infty$.*

◀ 1) $\{n \in \mathbf{Z} \mid x \pm y \in X_n\} \supseteq \{n \in \mathbf{Z} \mid x \in X_n, y \in X_n\} = \{n \in \mathbf{Z} \mid x \in X_n\} \cap \{n \in \mathbf{Z} \mid y \in X_n\}$, так как X_n замкнуто относительно сложения и вычитания, а последнее пересечение равно тому из двух множеств, \inf которого больше, поэтому $\text{ord}(x \pm y) = \inf \{n \in \mathbf{Z} \mid x \pm y \in X_n\} \leq \inf (\{n \in \mathbf{Z} \mid x \in X_n\} \cap \{n \in \mathbf{Z} \mid y \in X_n\}) = \max(\inf \{n \in \mathbf{Z} \mid x \in X_n\}, \inf \{n \in \mathbf{Z} \mid y \in X_n\}) = \max \{ \text{ord}(x), \text{ord}(y) \}$.

2) $1_{s(\mathbf{K})} = (x_\infty)^0 \in X_0 \setminus X_{-1}, 0 \in X_{-\infty}$, так как $X_{-\infty}$ – векторное подпространство в X .

3) Пусть $\alpha \neq 0$, тогда $\text{ord}(\alpha x) = \inf \{m \in \mathbf{Z} \mid \alpha x \in X_m = x_\infty^m l_\infty(Y)\} = \inf \{m \in \mathbf{Z} \mid x \in x_\infty^{-m} l_\infty(Y)\} = \text{ord}(x)$, и из $\text{ord}(x) < +\infty$ следует $\text{ord}(\alpha x) < +\infty$, а так как $x = \alpha^{-1}(\alpha x)$, то из $\text{ord}(\alpha x) < +\infty$ следует $\text{ord}(x) < +\infty$.

4) Если $\text{ord}(x) \leq n < +\infty$ и $\text{ord}(y) \leq m < +\infty$, то $x = x_\infty^{-n} x_0, y = x_\infty^{-m} y_0$, где $x_0 \in l_\infty(Y_1), y_0 \in l_\infty(Y_2)$. $|x_0^{(k)}, y_0^{(k)}| \leq C |x_0^{(k)}| \cdot |y_0^{(k)}| \Rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle \in l_\infty(Y_3) \Rightarrow \langle x, y \rangle = x_\infty^{-n} x_\infty^{-m} \langle x_0, y_0 \rangle \in$

$\in x_\infty^{n+m} I_\infty(Y_3) \Leftrightarrow \text{ord}\langle x, y \rangle \leq n+m$. Поэтому $\text{ord}\langle x, y \rangle \leq \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid \text{ord}(x) \leq n\} + \inf\{m \in \mathbf{Z} \mid \text{ord}(y) \leq m\} = \text{ord}(x) + \text{ord}(y)$. ►

Следствия. 1) Если $\text{ord}(x) \neq \text{ord}(y)$, где $x, y \in s(Y)$, то имеет место равенство: $\text{ord}(x \pm y) = \max\{\text{ord}(x), \text{ord}(y)\}$.

2) $\forall x \in s(Y), \forall y \in X_\infty(x_\infty, Y): \text{ord}(x+y) = \text{ord}(x)$.

Определение 2. Факторпространство $\mathbf{MK} = \mathbf{MK}(x_\infty) = X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K}) / X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$ назовем *мнемочислами*, а факторпространство $\mathbf{MY} = \mathbf{MY}(x_\infty) = X_{+\infty}(x_\infty, Y) / X_{-\infty}(x_\infty, Y)$ – *мнемовекторами над \mathbf{K} по порождающему элементу x_∞* .

Теорема 2. а) Пространство \mathbf{MK} с нормой, задаваемой формулой $\| [x] \| = 2^{\text{ord}(x)}$, является коммутативной ультранормированной алгеброй (т. е. такой, что $\| [x] + [y] \| \leq \max\{\| [x] \|, \| [y] \| \}$) над полем \mathbf{K} с тривиальной нормой;

б) \mathbf{MY} с аналогичной нормой является ультранормированным модулем над кольцом \mathbf{MK} с нормой, введенной выше;

в) если Y является алгеброй, то \mathbf{MY} является ультранормированным кольцом и алгеброй над \mathbf{MK} ;

г) обобщенное произведение над \mathbf{K} $\langle \cdot, \cdot \rangle: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_3$ порождает корректное обобщенное произведение над \mathbf{MK} : $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{MK}}: \mathbf{MY}_1 \times \mathbf{MY}_2 \rightarrow \mathbf{MY}_3$, удовлетворяющее неравенству $\| \langle [x], [y] \rangle_{\mathbf{MK}} \| \leq \| [x] \| \| [y] \|$.

◀ Доказательство легко следует из теоремы 1 и следствия 2. ►

Следствие. Если $\| [x] \| \neq \| [y] \|$, то $\| [x \pm y] \| = \max\{\| [x] \|, \| [y] \| \}$.

Легко понять, что соответствие $Y \rightarrow \mathbf{MY}$ функториально.

Полнота кольца мнемочисел

Теорема 3. Пусть \mathbf{K} – нетривиально нормированное поле, Y – нормированное пространство над \mathbf{K} , \mathbf{K}^* – пополнение \mathbf{K} , Y^* – пополнение Y , x_∞ – порождающий элемент \mathbf{MK} . Тогда имеют место естественные изоморфизмы

$$\theta_{\mathbf{K}}: \mathbf{MK}(x_\infty) \cong \mathbf{MK}^*(x_\infty) \text{ и } \theta_Y: \mathbf{MY}(x_\infty) \cong \mathbf{MY}^*(x_\infty).$$

◀ Доказательство приведено в [5]. ►

Таким образом, мы всегда можем свести мнемочисла над пополнением нормированного поля к мнемочислам над самим полем, например, мнемочисла над \mathbf{R} или \mathbf{Q}_p сводятся к мнемочислам над \mathbf{Q} в соответствующей норме.

Докажем теперь полноту пространств мнемочисел и мнемовекторов. Будем далее обозначать через x_∞ также элемент $[x_\infty]$. Легко доказываются

Лемма 1. $\forall y \in \mathbf{MY}(x_\infty), \forall n \in \mathbf{Z}$:

а) $\text{ord}(x_\infty^n y) = \text{ord}(y) + n$; б) $\| x_\infty^n y \| = \| x_\infty \|^n \| y \| = 2^n \| y \|$.

Лемма 2. а) Если $x = (x^{(k)})_{k \geq 1}$ и $\text{ord}(x) < 0$, то $x^{(k)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

б) Порядок финитной последовательности равен $-\infty$.

Теорема 4 (о полноте пространств мнемочисел и мнемовекторов).

а) Кольца мнемочисел и модули мнемовекторов всегда полны.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, где $y_n \in \mathbf{MY}$, сходится $\Leftrightarrow y_n \rightarrow 0$.

◀ а) В силу теоремы 3 мы можем без ограничения общности считать пространство Y полным.

Пусть (x_k) – последовательность Коши в $\mathbf{MY}(x_\infty)$, т. е. такая, что $\| x_k - x_m \| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$. Очевидно, последовательность (x_n) сходится, если имеет сходящуюся подпоследовательность. Выберем подпоследовательность номеров $(k_n)_{n \geq 0}, k_n \rightarrow \infty$ так, что $\| x_{k_n} - x_{k_{n+1}} \| \leq 1/2^{n+1}$. Обозначим $a_n = x_\infty^n (x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$. Тогда

согласно лемме 1: $\|a_n\|=2^n \|x_{k_n} - x_{k_{n+1}}\| \leq 1/2$, что равносильно $\text{ord}(a_n) \leq -1$. Кроме

того, $x_{k_{n+1}} = x_{k_0} + \sum_{n=0}^m a_n x_{\infty}^{-n}$, поэтому достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_{\infty}^{-n}, \tag{3}$$

где $\text{ord}(a_n) \leq -1$, чтобы получить пункт а) теоремы 4.

Сходимость ряда (3) на языке представителей означает: если $a_i = [b_i]$, $b_i = (b_i^{(k)})_{k \geq 1} \in X_{-1}(x_{\infty}, Y)$, $i \geq 0$, то $\exists \sigma = (\sigma^{(k)})_{k \geq 1} \in s(Y) \mid$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\text{ord}\left(\sum_{i=0}^n b_i x_{\infty}^{-i} - \sigma\right) \rightarrow -\infty, \tag{4}$$

причем $\text{ord}\left(\sum_{i=0}^n b_i x_{\infty}^{-i} - \sigma\right)$ конечен, откуда следует, что $\sigma = \sum_{i=0}^n b_i x_{\infty}^{-i} - \left(\sum_{i=0}^n b_i x_{\infty}^{-i} - \sigma\right) \in X_{+\infty}(x_{\infty}, Y)$. В этом случае $[\sigma]$ является суммой ряда (3).

Докажем, что $\forall \beta_i > 0, i \geq 0 \exists b_i = (b_i^{(k)})_{k \geq 1} \in X_{+\infty}(x_{\infty}, Y) \mid \forall i \geq 0$ имеем: $[b_i] = a_i$ и

$$\sup_{k \geq 1} |b_i^{(k)}| \leq \beta_i. \tag{5}$$

Действительно, пусть $b'_i = (b'_i{}^{(k)})_{k \geq 1} \mid [b'_i] = a_i$ – какие-то представители классов a_i . Так как $\text{ord}(b'_i) = \text{ord}(a_i) < 0$ по построению, то по лемме 2 имеем: $b'_i{}^{(k)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, поэтому $|b'_i{}^{(k)}| \leq \beta_i$ при $k \geq k_{0i}$. Пусть $b_i^{(k)} = b'_i{}^{(k)}$ при $k \geq k_{0i}$ и $b_i^{(k)} = 0$ при $k < k_{0i}$.

Тогда $\sup_{k \geq 1} |b_i^{(k)}| = \sup_{k \geq k_{0i}} |b'_i{}^{(k)}| \leq \beta_i$ и $b_i - b'_i$ – финитная последовательность по построению, поэтому по лемме 2: $\text{ord}(b_i - b'_i) = -\infty \Rightarrow b_i \in X_{+\infty}(x_{\infty}, Y)$ и $[b_i] = [b'_i] = a_i$.

Обозначим $\chi_k = |x_{\infty}^{(k)}|^{-1}$. $0 < \chi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, поэтому $0 < \chi = \sup_{k \geq 1} \chi_k < +\infty$. Выберем

$\beta_i = 1/i!$, тогда для вещественного ряда Тейлора $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^i$, представляющего экспоненту, радиус сходимости $R_{\beta} = 1/(\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\beta_i}) = +\infty > \chi$. Далее по этим $\beta_i = 1/i!$ выбираем b_i так, чтобы выполнялось (5).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(k)} (x_{\infty}^{(k)})^{-i}, \tag{6}$$

представляющий ряд (3). В силу (5) и определения χ он имеет мажоранту

$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i^{(k)} (x_{\infty}^{(k)})^{-i}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i^{(k)}| \chi_k^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \chi^i.$$

Эта мажоранта сходится в силу того, что радиус сходимости $R_{\beta} > \chi$, следовательно, $\forall k \geq 1$ ряд (6) с членами из Y сходится абсолютно, а в силу полноты Y – сходится в Y .

Обозначим его сумму $\sigma^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(k)} (x_{\infty}^{(k)})^{-i}$. Утверждается, что выполняется

требуемое условие (4). Действительно, $\forall k \geq 1 \forall n \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^n b_i^{(k)} (x_{\infty}^{(k)})^{-i} - \sigma^{(k)} \right| &= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i^{(k)} (x_{\infty}^{(k)})^{-i} \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_i^{(k)}| \cdot |x_{\infty}^{(k)}|^{-i} = |x_{\infty}^{(k)}|^{-(n+1)} \times \\ &\times \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_i^{(k)}| \chi_k^{i-(n+1)} = [i=j+n+1] = |x_{\infty}^{(k)}|^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{j+n+1}^{(k)}| \chi_k^j \leq \end{aligned}$$

$$\leq |x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1} \chi^j.$$

Этот знакоположительный ряд $\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+n+1} \chi^j$ сходится, так как радиус сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1} z^j$ совпадает с $R_{\beta} = +\infty$, ибо $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\beta_{j+n+1}} =$

$$= \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (\beta_{j+n+1}^{1/j+n+1})^{j+n+1/j} = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} j \sqrt[j]{\beta_j} = 0.$$

Обозначая $C_n = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1} \chi^j > 0$, имеем: $|(\sum_{i=0}^n b_i^{(k)} (x_\infty^{(k)})^{-i}) - \sigma^{(k)}| \leq C_n |x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)}$,

$\forall k \geq 1$, т. е. $\text{ord}(\sum_{i=0}^n b_i x_\infty^{-i} - \sigma) \leq -(n+1)$, откуда немедленно получаем (4), сходимость ряда (3) и утверждение а) теоремы 4.

б) Вытекает из того, что $\text{MY}(x_\infty)$ – полное ультраметрическое пространство. ►

Теорема 5. а) В нормированном кольце $\text{MK}(x_\infty)$ всякий ряд Лорана

$$\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k x_\infty^{-k}, \alpha_k \in \mathbf{K} \text{ сходится.}$$

б) Множество сумм рядов Лорана $\mathbf{K}(x_\infty)$ образует полное нормированное подполе в $\text{MK}(x_\infty)$, изоморфное нормированному полю формальных степенных рядов над \mathbf{K} .

в) $\text{MY}(x_\infty)$ является банаховым пространством, а $\text{MK}(x_\infty)$ – банаховой алгеброй над $\mathbf{K}(x_\infty)$.

◀ $\forall i \in \mathbf{Z}, \forall \alpha_i \in \mathbf{K}: \|\alpha_i x_\infty^{-i}\| \leq \|x_\infty^{-i}\| = 2^{-i} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$, причем $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \|\alpha_i x_\infty^{-i}\| = 2^{-i}$, поэтому ряд $\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k x_\infty^{-k}$ сходится. $\forall n \geq N \in \mathbf{Z}: \|\sum_{i=N}^n \alpha_i x_\infty^{-i}\| \leq \max_{i=N \dots n} 2^{-i} = 2^{-N}$. Тогда по

$$\text{непрерывности нормы } \|\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{i=N}^n \alpha_i x_\infty^{-i}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{i=N}^n \alpha_i x_\infty^{-i}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-N} = 2^{-N}.$$

Если же $\alpha_N \neq 0$, то $\|\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}\| = \|\alpha_N x_\infty^{-N} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}\| = \|\alpha_N x_\infty^{-N}\| = 2^{-N}$.

По порождающему элементу x_∞ построим отображение $\varphi: \mathbf{K}(x) \rightarrow \text{MK}(x_\infty)$:

$$\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x^i \rightarrow \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}.$$

Это отображение корректно, \mathbf{K} -линейно и сохраняет норму, следовательно, является изометрическим вложением. Оно также

$$\text{мультипликативно, так как } \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i} \sum_{j=M}^{\infty} \beta_j x_\infty^{-j} = \sum_{n=M+N}^{\infty} x_\infty^{-n} \left(\sum_{i+j=n}^{i \geq N, j \geq M} \alpha_i \beta_j \right).$$

Обозначая $\mathbf{K}(x_\infty) = \text{Im} \varphi$, получаем пункт б) теоремы. Наконец, пусть $x \in \mathbf{K}(x_\infty)$, $y \in \text{MK}(x_\infty)$ или $y \in \text{MY}(x_\infty)$. Если $x=0$, то $\|xy\|=0=\|x\| \cdot \|y\|$, иначе $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|y\| = \|x^{-1}xy\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|xy\|$, но $\mathbf{K}(x_\infty)$ – нормированное поле, значит, $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$, поэтому $\|x\| \cdot \|y\| \leq \|xy\|$ и $\|x\| \cdot \|y\| = \|xy\|$. ►

1. Colombeau J.-F. // New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam, 1985.

2. Егоров Ю. В. // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. № 5 (275). С. 3.

3. Антонец А. Б., Радыно Я. В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267.

4. Антонец А. Б., Радыно Я. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 46.

Поступила в редакцию 08.06.2002.

Дмитрий Евгеньевич Рингель – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа Я. В. Радыно.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

МЕТОД КОРРЕКЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Method to correcting an approximate solution is offered. Optimal positional solution is considered.

В [1] описан метод построения приближенного решения задачи гарантированной оптимизации, точность которого повышается с увеличением точности построения внешних аппроксимаций множеств замыкания. Однако в этом случае растут требования к объему оперативной памяти. В данной работе предлагается метод, в котором требуемая точность достигается использованием небольшого числа вспомогательных векторов.

1. В классе дискретных управлений $u=u(t)$, $t \in T=[t_*, t^*]$, рассмотрим задачу

$$c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + d(t)w; \quad x(t_*) = x_0; \quad x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathbb{R}^n: Hx \leq g\}; \quad (1)$$

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}: |w| \leq w^*\}; \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, \quad t \in T,$$

где $x=x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u=u(t) \in \mathbb{R}$, $w=w(t) \in \mathbb{R}$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t)$, $d(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции; $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$.

Как и в [1], предположим, что 1) в процессе управления могут реализовываться любые кусочно-непрерывные функции $w(t) \in W$, $t \in T$; 2) в каждый момент замыкания t^i из

$$T^p = \{t^i \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}, i = \overline{0, p}\}, \quad t_* = t^0 < t^1 < \dots < t^p < t^*, \quad (2)$$

сообщается возмущение $w_i^*(\cdot) = (w^*(t) \in W, t \in T^{(i)} = [t^i, t^{i+1}])$.

Будем строить управления, которые с гарантией переводят систему (1) на терминальное множество и обеспечивают максимум гарантированному значению критерия качества.

2. Для упрощения изложения предлагаемого метода коррекции приближенного решения [1] ограничимся случаем одного момента замыкания. Следуя [1], по небольшому набору $Q_i = \{q_j \in \mathbb{R}^n: \|q_j\|=1, j = \overline{1, l}\}$, найдем $h_i(q)$, $\bar{y}^{i, \alpha^i}(q)$, $i = \overline{0, 1}$; $\bar{\alpha}^0$ – значение критерия качества; активный вектор q_{j^*} ; порождаемую им цепочку активных векторов q_{k^*} , $k = \overline{1, n}$; экстремальные точки x_0 , x_1^* ; активные точки по активным векторам $\bar{x}_{j^*}^0$; $\bar{x}_{k^*}^1$, $k = \overline{1, n}$; априорно-экстремальное управление $\bar{u}^0(\cdot) = (\bar{u}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$ и априорно-наихудшее возмущение $\bar{w}^0(\cdot) = (\bar{w}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$. Точность приближенного решения

$\bar{u}^0(\cdot)$ тем выше, чем меньше расстояние между экстремальными и активными точками.

Идея метода коррекции состоит в том, чтобы скорректировать значения активных векторов таким образом, чтобы экстремальные точки x_0, x_1^* совпали с заданной точностью с активными $\bar{x}_{j_0}^0; \bar{x}_{j_k}^1, k = \overline{1, n}$.

Таким образом, до тех пор, пока $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| > \varepsilon^0$ или $|\bar{x}_{j_k}^1 - x_1^*| > \varepsilon^{1,k}, k = \overline{1, n}$ ($\varepsilon^0, \varepsilon^{1,k}$ – заданная точность), выполняем следующие действия. Обозначим $\Delta x = (x_0 - \bar{x}_{j_0}^0)' F(t^0) F^{-1}(t^1), \Delta x_k = (x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1)' F(t^1) F^{-1}(t^2), k = \overline{1, n}$; изменим активные векторы:

$$q'_{j_0} = \frac{(q'_{j_0} + \omega \Delta x)}{|q'_{j_0} + \omega \Delta x|}; \quad q'_{j_k} = \frac{(q'_{j_k} + \omega_k \Delta x_k)}{|q'_{j_k} + \omega_k \Delta x_k|},$$

где $\omega, \omega_k, k = \overline{1, n}$, – шаги коррекции, которые можно менять на каждой итерации. Следуя В.Г. Болтянскому [2], можно показать, что для скорректированных значений активных векторов величины $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0|, |x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1|, k = \overline{1, n}$, становятся меньше. По измененному множеству Q_i пересчитываем значения $h_i(q), \bar{y}^{i,\alpha}(q), i = \overline{0, 1}$, до тех пор, пока не найдется $\bar{\alpha}^0 \geq \alpha: h_0'(q_{j_0})x_0 = \bar{y}^{0,\alpha^0}(q_{j_0})$, затем вычислим x_1^* ; активные точки $\bar{x}_{j_0}^0; \bar{x}_{j_k}^1, k = \overline{1, n}; \bar{u}^0(\cdot) = (\bar{u}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1}); \bar{w}^0(\cdot) = (\bar{w}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$. Если активные векторы изменили свой порядковый номер, необходимо уменьшить шаг $\omega, \omega_k, k = \overline{1, n}$. Управление $\bar{u}^0(\cdot)$, соответствующее условию $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| \leq \varepsilon^0$ и $|x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1| \leq \varepsilon^{1,k}, k = \overline{1, n}$, является приближенным решением задачи (1).

3. Проиллюстрируем метод коррекции на примере из [1].

Математическая модель задачи имеет вид:

$$|x_2(2.2\pi)| \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w,$$

$$x_1(0) = -4, \quad x_2(0) = 2.5, \quad x_1(2.2\pi) = 0,$$

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}: |w| \leq 0.5\}; \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, 2.2\pi].$$

Для нахождения априорно-экстремального управления и априорно-наихудшего возмущения в классе дискретных функций были выбраны период квантования $h=2.2\pi/120$ и точка замыкания $t^1=1.1\pi$.

Векторы из Q строились по формулам:

$$q_1 = (0, 1), \quad q_j = (q_{1j-1} \cos(2\pi/l) + q_{2j-1} \sin(2\pi/l), -q_{1j-1} \sin(2\pi/l) + q_{2j-1} \cos(2\pi/l)), \\ j = \overline{2, l}.$$

На рис. 1 показаны множества замыкания и траектория движения на различных этапах коррекции при $l=8, p=1$, отрезком AB – терминальное множество, внутренний восьмигранник – множество \bar{X}^1 , внешний – \bar{X}^0 . На множествах замыкания отмечены активные и экстремальные точки.

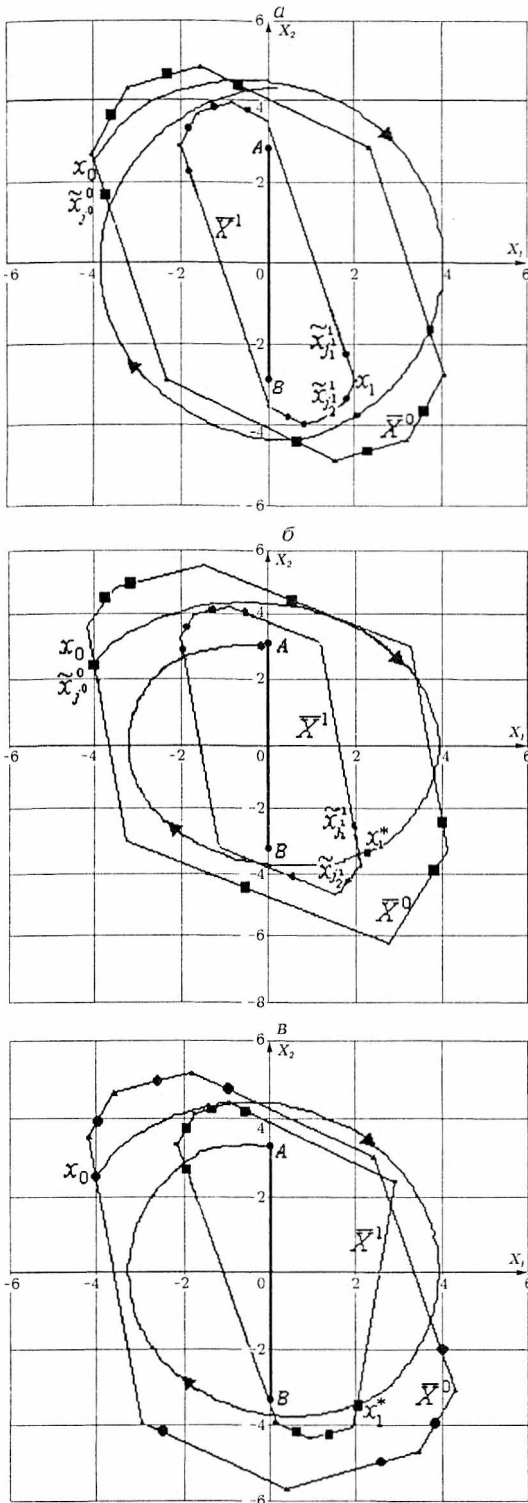


Рис. 1. Множества замыкания и траектория движения:
 а – исходное положение, б – промежуточное, в – окончательное

На рис. 1 а изображена ситуация до начала коррекции: $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.85$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.472$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.625$. q_3 – активный вектор на множестве \bar{X}^0 ; q_7, q_8 – на \bar{X}^1 .

Коррекция вектора q_3 с шагом $\omega = 0.64$, вектора q_7 – с $\omega_1 = 0.53$ и вектора q_8 – с $\omega_2 = -0.47$ даст $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.03$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.253$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.224$. Новая ситуация показана на рис. 1 б.

После нескольких дополнительных коррекций получаем ситуацию, изображенную на рис. 1 в, где $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.017$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.0203$, $|x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.0142$, $\bar{\alpha}^0 = 3.302364$.

4. Опишем процесс управления системой в реальном времени. Опять ограничимся одним моментом замыкания. До начала процесса управления вычисляются $\bar{\alpha}^0$, $h_i(q)$, $\bar{y}^{i, \bar{\alpha}^0}(q)$, $i = 0, 1$; $\bar{u}^0(\cdot)$. В начальный момент $t = t_*$, согласно принятому соглашению, становится известным возмущение $w_0^*(\cdot) = (w(t) \in W, t \in T^{(0)})$.

Теперь вместо множества $\bar{X}^{0, \bar{\alpha}^0}$ рассматриваем множество

$$\bar{X}_{w_0^*(\cdot)}^{0, \alpha} = \{ h'_i(q) z \leq \bar{y}^{i, \alpha}(q, w_0^*(\cdot)), q \in Q_i \},$$

где

$$h'_i(q) = q' F(t^1) F^{-1}(t^0), \quad \bar{y}^{i, \alpha}(q, w_0^*(\cdot)) = \max_{y \in \bar{X}^{i, \alpha}} q' y + \int_{t^0}^{t^1} |q' F(t^1) F^{-1}(\tau) b(\tau)| d\tau - \int_{t^0}^{t^1} q' F(t^1) F^{-1}(\tau) d(\tau) w_0^*(\tau) d\tau, \quad q \in Q_i.$$

По данным $h_i(q)$, $i = \overline{0, 1}$, $\bar{\gamma}^{1,\alpha}(q)$, $\bar{\gamma}^{0,\alpha}(q, w_0^*(\cdot))$ найдем $\bar{\alpha}^0(t^0) \geq \bar{\alpha}^0$: $h'_0(q_{j^0})x_0 = \bar{\gamma}^{0,\bar{\alpha}^0(t^0)}(q_{j^0}, w_0^*(\cdot))$; где $q_{j^0} \in Q_l$ – активный вектор; одновременно вычислим $u^0(t | w_0^*(\cdot))$; $\bar{u}_1^0(\cdot)$; $\bar{w}_1^0(\cdot)$; x_1^* ; $x_{2,k}^*$, $k = \overline{1, n}$; \bar{x}_1^1 , $k = \overline{1, n}$; и $\bar{x}_{j^0}^0(w_0^*(\cdot)) = F(t^0)F^{-1}(t^1) x_1^* - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)b(\tau)u^0(\tau | w_0^*(\tau))d\tau - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)d(\tau)w_0^*(\tau)d\tau$.

Если $|x_0 - \bar{x}_{j^0}^0(w_0^*(\cdot))| \leq \varepsilon$ и $|x_1^* - \bar{x}_1^1| \leq \varepsilon^{2,k}$, $k = \overline{1, n}$, то управление $u_0^*(\cdot) = (u^0(t | w_0^*(\cdot)), t \in T^{(0)})$ оптимально на промежутке $T^{(0)}$. Иначе для исходных данных проведем коррекцию.

В момент t^1 , когда система оказывается в точке x_1^* , становится известным возмущение $w_1^*(\cdot)$. По данным

$$h_i(q), \bar{\gamma}^{1,\bar{\alpha}^0(t^1)}(q, w_1^*(\cdot)) = \max_{y \in \bar{X}^{*\bar{\alpha}^0(t^1)}} q'y + \int_{t^1}^{t^2} |q' F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)|d\tau - \int_{t^1}^{t^2} q' F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)w_1^*(\tau)d\tau, q \in Q_l,$$

вычислим $\bar{\alpha}^0(t^1) \geq \bar{\alpha}^0(t^0)$: $h'_1(q_{j^1})x_1^* = \bar{\gamma}^{1,\bar{\alpha}^0(t^1)}(q_{j^1}, w_1^*(\cdot))$; $u^0(t | w_1^*(\cdot))$, x_2^* , $\bar{x}_{j^1}^1(w_1^*(\cdot))$.

Если $|x_1^* - \bar{x}_{j^1}^1(w_1^*(\cdot))| \leq \varepsilon^1$, то управление $u_1^*(\cdot) = (u^0(t | w_1^*(\cdot)), t \in T^{(1)})$ оптимально на промежутке $T^{(1)}$, иначе корректируем вектор q_{j^1} .

Число $\bar{\alpha}^0(t^1)$ равно оптимальному значению критерия качества задачи (1) в рассматриваемом процессе управления.

5. Проиллюстрируем процесс управления в реальном времени на примере из п. 3. На рис. 2 приведены траектории системы управления, реализовавшиеся при разных возмущениях.

Пусть на систему действует неизвестное регулятору возмущение $w^*(t) = -0.5$, $t \in T = [0, 2.2\pi]$. В начальный момент $t = t_*$ становится известным возмущение $w_0^*(\cdot) = -0.5$. Используя вспомогательные множества $\bar{X}^{0,\bar{\alpha}}(w_0^*(\cdot))$, $\bar{X}^{1,\bar{\alpha}}$, $X^{*\bar{\alpha}}$, построенные с помощью множества Q_{128} , регулятор вычислил $\bar{\alpha}^0(t^0) = 0.68298$, $x_1^* = (0.859523, -1.5854)$, $u^0(t | w_0^*(\cdot))$, $t \in T^{(0)} = [0, 1.1\pi]$. В момент $t^1 = 1.1\pi$ поступает информация $w_1^*(\cdot) = -0.5$, по которой регулятор вычислил $\bar{\alpha}^0(t^1) = 0.14126$, $u^0(t | w_1^*(\cdot))$, $t \in T^{(1)} = [1.1\pi, 2.2\pi]$, $x(t^*) = (-0.00135, 0.14388)$. Реализующаяся траектория движения помечена на рис. 2 буквой *a*.

Траектория *b* соответствует случаю, когда на систему действовало неизвестное регулятору возмущение $w_0^*(t) = 0.2$, $t \in T^{(0)}$, $w_1^*(t) = -0.2$, $t \in T^{(1)}$. В мо-

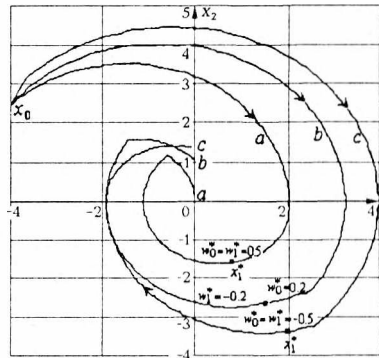


Рис. 2. Траектория движения при разных возмущениях

мент $t=t_*$ становится известной первая часть этого возмущения, в момент t^1 – вторая часть. Критерий качества $\bar{\alpha}^0(t^1)$ оказался равным 1.101589.

В случае c на систему действовало возмущение $w^*(t)=0.5, t \in T$. В начальный момент $t=t_*$ поступает информация $w_0^*(t)$, в момент $t^1 - w_1^*(t)$. Критерий качества $\bar{\alpha}^0(t^1)$ оказался равным 1.389117.

1. Кравченко Ж. М. Гарантированная оптимизация систем управления с использованием краткосрочных прогнозов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Минценко. М., 1976.

Поступила в редакцию 26.02.2001.

Жанна Михайловна Кравченко – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

РАСТЯЖЕНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ИЗОТРОПНЫМ ЯДРОМ С РАЗРЕЗОМ НА ЛИНИИ КОНТАКТА

This paper considers the stress fields around a circular isotropic inclusion in anisotropic infinite plate with crack at the interface. The problem is reduced into a pair of integral equations for the unknown interfacial tractions and some results are presented in graphical form.

Рассмотрим кусочно-однородную упругую среду, занимающую плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, состоящую из бесконечной анизотропной пластинки единичной толщины с круговым отверстием радиуса $r=1$ и круглого изотропного диска, которые на участке $S_1: [-\alpha, \alpha] (\alpha < \pi)$ спаяны между собой. Пластинка находится под действием приложенных на бесконечности растягивающих усилий интенсивностью P и Q . Берега разреза $S_2: (\alpha, 2\pi - \alpha)$ свободны от внешней нагрузки. Требуется определить контактные напряжения на линии раздела материалов.

Математическая постановка задачи заключается в решении двух взаимосвязанных краевых задач: одной – о напряженно-деформированном состоянии изотропного круглого диска и другой – о напряженном состоянии анизотропной пластинки с круговым отверстием.

Рассмотрим первую основную задачу для круга. Введем полярные координаты r, θ соотношением $z=x+iy=re^{i\theta}$ и обозначим через $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ компоненты напряжений в этих координатах. Пусть на границе круга заданы нормальные $N(t)$ и касательные $T(t)$ напряжения, т. е.

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = N(t) + iT(t), \quad t = e^{i\theta}.$$

Напряженное состояние круга определяется с помощью аналитической функции $\Phi(z)$ [1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} [N(t) + iT(t)] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) dt.$$

Для определения перемещений на границе круга воспользуемся формулой [1]:

$$2G \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = \kappa \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \quad (1)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Вычислив предельные значения $\Phi(z)$ при стремлении z к точке τ контура S_1 по формулам Сохоцкого, подставив их в (1) и разделив действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu)N(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} T(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta-\tau}{2} d\tau \right], \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu)T(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} N(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta-\tau}{2} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для вывода интегральных уравнений исходной задачи рассмотрим равновесие бесконечной анизотропной пластинки с круговым отверстием, на контуре S_1 которого приложены неизвестные нормальные N и касательные T усилия, а на бесконечности действуют растягивающие усилия интенсивности P и Q .

Вместе с заданной плоскостью $z=x+iy$ будем рассматривать плоскости z_1 и z_2 , получаемые из z аффинным преобразованием [2]:

$$z_j = x + \mu_j y, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где μ_j – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0,$$

a_{ij} – коэффициенты закона Гука.

При преобразовании (3) окружность S в плоскости z переходит в эллипсы $S^{(j)}$ в плоскостях z_j .

Граничные условия первой основной задачи в результате использования потенциалов Лехницкого принимают вид [2]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \varphi_j(t_j) = - \int_0^{\theta} Y_n d\theta, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \mu_j \varphi_j(t_j) = \int_0^{\theta} X_n d\theta. \quad (4)$$

Здесь

$$X_n + iY_n = -[N(t) + iT(t)]t = f(t)t, \quad (5)$$

t_j – аффиксы точек контуров $S^{(j)}$ в областях изменения переменных z_j .

Компоненты перемещений на контуре отверстия вычисляются по формулам [2]:

$$u_1(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 p_j \varphi_j(t_j), \quad w_1(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 q_j \varphi_j(t_j), \quad (6)$$

где $p_j = a_{11}\mu_j^2 - a_{16}\mu_j + a_{12}$, $q_j = a_{12}\mu_j^2 + a_{22} - a_{26}$.

Конформно отображим внешность единичной окружности γ_0 на внешность контура S и эллипсов $S^{(j)}$ при помощи функций

$$z = \omega(\xi) = \xi, \quad z_j = \omega_j(\xi_j) = \frac{1 - i\mu_j}{2} \xi_j + \frac{1 + i\mu_j}{2\xi_j}. \quad (7)$$

Применяя обозначения

$$\varphi_j(t_j) = \varphi_j[\omega_j(t)] = \Phi_j(t), \quad j = 1, 2,$$

и дифференцируя по θ уравнения (4) с учетом (5), граничные условия преобразуем к виду

$$\sum_{j=1}^2 \left[(1 + i\mu_j) \Phi'_j + (1 + i\bar{\mu}_j) \frac{d}{dt} \overline{\Phi_j(t)} \right] = f(t),$$

$$\sum_{j=1}^2 \left[(1 - i\mu_j) \Phi'_j + (1 - i\bar{\mu}_j) \frac{d}{dt} \overline{\Phi_j(t)} \right] = \frac{-f(t)}{t^2}. \quad (8)$$

Следуя [3], умножим (8) на $[2\pi i(t-\xi)]^{-1} dt$ и проинтегрируем вдоль γ_0 . Тогда для определения функций $\Phi'_j(\xi_j)$ получим уравнения:

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ (1 + i\mu_j) [A_j - \Phi'_j(\xi_j)] + (1 + i\bar{\mu}_j) \bar{A}_j \xi_j^{-2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{f(t) dt}{t - \xi},$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ (1 - i\mu_j) [A_j - \Phi'_j(\xi_j)] + (1 - i\bar{\mu}_j) \bar{A}_j \xi_j^{-2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{\overline{f(t)} dt}{t^2 (t - \xi)},$$
(9)

где A_j – постоянные, определяемые известным образом [3] из условий на бесконечности, s_1 – часть окружности γ_0 , соответствующая контуру S_1 .

С учетом (6) и (7) компоненты перемещений на границе отверстия запишем в виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + i \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^2 \left[(p_j + iq_j) \Phi'_j(t) - (\bar{p}_j + i\bar{q}_j) \overline{\Phi'_j t^{-2}} \right]. \quad (10)$$

Определив из (9) функции $\Phi'_j(\xi_j)$, подставив их в (10) и разделив действительную и мнимую части, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} = U_1 + BN(\theta) + \frac{C}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[T(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} - N(\tau) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{D}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[N(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} + T(\tau) \right] d\tau, \quad (11)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = V_1 + BT(\theta) + \frac{A}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[N(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} + T(\tau) \right] d\tau -$$

$$- \frac{D}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[T(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} - N(\tau) \right] d\tau, \quad (12)$$

где A, B, C, D, U_1, V_1 – определенные величины.

Приняв во внимание очевидное условие контакта

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha) \quad (13)$$

при помощи (2), (11) и (12), придем к системе сингулярных интегральных уравнений.

Систему запишем для ортотропной пластинки, считая, что главные направления упругости совпадают с направлениями осей координат, а линия действия усилия Q параллельна оси Oy . В этом случае

$$\mu_j = i\gamma_j, \quad a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}.$$

$$\begin{aligned}
 bN(\theta) + \left(\frac{E_x}{E\pi} - \frac{a}{2\pi} \right) \int_{-\alpha}^{\alpha} T(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau + \frac{a}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} N(\tau) d\tau - \\
 - \frac{c}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} N(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau = q \cos^2 \theta - p \sin^2 \theta, \\
 bT(\theta) + \left(\frac{d}{2\pi} - \frac{E_x}{E\pi} \right) \int_{-\alpha}^{\alpha} N(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau - \frac{a}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} N(\tau) d\tau + \\
 + \frac{c}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} T(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau = -(p + q) \sin \theta \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

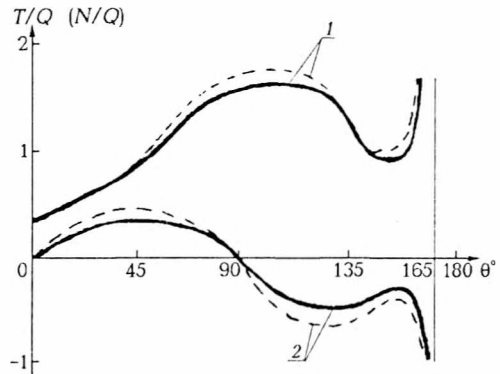
$$\begin{aligned}
 b = \gamma_1 \gamma_2 - \nu_{xy} - \frac{E_x(1-\nu)}{E}, \quad a = (\gamma_1 + \gamma_2) \left[(1 - \gamma_1 \gamma_2) \cos^2 \theta - 1 \right], \\
 c = (\gamma_1 + \gamma_2)(1 - \gamma_1 \gamma_2) \sin 2\theta, \quad d = (\gamma_1 + \gamma_2) \left[(1 - \gamma_1 \gamma_2) \sin^2 \theta - 1 \right], \\
 p = P(1 + \gamma_1 + \gamma_2) - Q\gamma_1 \gamma_2, \quad q = \gamma_1 \gamma_2 \left[P - Q(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2) \right].
 \end{aligned}$$

Систему (14) необходимо решать совместно с условием равновесия диска:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (N \cos \theta - T \sin \theta) / \theta = 0.$$

Система интегральных уравнений (14) решалась методом Мультипола – Каландия [4], при этом решение представлялось в виде многочлена Лагранжа, а базовыми точками, в которых разыскивалось решение, являлись чебышевские узлы. Для построения системы алгебраических уравнений применялся метод коллокаций.

На рисунке показано изменение N/Q и T/Q в зависимости от угла θ при растяжении пластинки вдоль оси Oy усилиями Q . Разрез S_2 с центральным углом $\frac{\pi}{6}$ расположен



Распределение контактных напряжений:
 1 - N/Q ; 2 - T/Q ; сплошные кривые - $E_x=0,1E$;
 штриховые - $E_x=0,5E$

симметрично относительно оси $Ox \left(-\frac{11\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{11\pi}{12} \right)$. Расчеты выполнены для $E_x/E_y=1,3$; $\nu_{xy}=0,1$; $\gamma_1=2,12$; $\gamma_2=0,53$; $E_x=0,1E$; $E_x=0,5E$.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1996.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, 1968.
4. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.

Поступила в редакцию 03.04.2002.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

**НЕАБХОДНАЯ УМОВА ЦЭНТРА ДЛЯ АДНОЙ А₃-СІСТЭМЫ ў
ВЫПАДКУ СКЛАДАНАГА АСАБЛІВАГА ПУНКТА**

A system of two differential equations for which the origin of coordinates is a special monodromy point is considered. Necessary condition for the centre is obtained.

Будзем разглядаць сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2y + bxy^3 + (2a+1)y^5 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k xy^{k+3} + a_i y^{i+5}), \\ \frac{dy}{dt} &= -(a+1)x^3 - axy^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k yx^{k+2}, \end{aligned} \tag{1}$$

для якой пры $a > 0$ пачатак каардынатаў ёсць манадромны асаблівы пункт. Сістэма (1) – гэта нармальная форма (24) з [1] для А₃-сістэмы. Неабходную ўмову цэнтра атрымаем, выкарыстоўваючы метад А. Садоўскага [2].

Пераходзім у (1) да палярных каардынатаў $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, а пасля замены $r = r_1 \cos \varphi$ прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\varphi) r_1^k, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \frac{2a+1}{a+1} \operatorname{tg} \varphi, \quad f_2(\varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{(a+1)^2 \cos \varphi} (c_1 \cos^3 \varphi - b(a+1) \cos^2 \varphi \sin \varphi - ab \sin^3 \varphi), \\ f_3(\varphi) &= (a+1)^{-3} \cos^{-1} \varphi \sin^2 \varphi (-a(a+1)(2a+1) \sin^5 \varphi - b_1 a(a+1) \cos \varphi \sin^4 \varphi - \\ &\quad -(a+1)^2 (2a+1) \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi - (a+1)^2 b_1 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + (a+1) c_2 \cos^5 \varphi + \\ &\quad + ab^2 \sin^7 \varphi + (a+1) b^2 \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi + (a-1) b c_1 \cos^3 \varphi \sin^4 \varphi + \\ &\quad + (a+1) b c_1 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi - c_1^2 \cos^6 \varphi \sin \varphi + (a+1) c_2 \cos^7 \varphi). \end{aligned}$$

Будзем разглядаць развязак раўнання (2) пры ўмове $r_1(0) = c$, дзе c – адвольны дастаткова малы дадатны лік, прычым $r(0) = c$. Гэты развязак знаходзім, зыходзячы з інтэграла Дзюлака [3, с. 48]

$$\cos^\gamma \varphi \left[r_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi) r_1^{k+1} \right] = c, \quad g_k(0) = 0, \tag{3}$$

дзе $\gamma = (2a+1)/(a+1)$, $1 < \gamma < 2$. Для атрымання першай умовы цэнтра дастаткова абмежавацца дзвюма функцыямі $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$, якія знаходзяцца з сістэмы

$$g_1(\varphi) = -\cos^\gamma \varphi \int_0^\varphi f_2(\tau) \cos^{-\gamma} \tau d\tau, \quad g_2(\varphi) = g_1^2(\varphi) - \cos^{2\gamma} \varphi \int_0^\varphi f_3(\tau) \cos^{-2\gamma} \tau d\tau. \tag{4}$$

Пасля вылічэння інтэгралаў з (4) і замены $\cos \varphi = c^{1/2\gamma}$ атрымаем

$$\begin{aligned} g_1(\arccos c^{1/2\gamma}) &= \frac{ab}{(a+1)(2a+1)} - \frac{2b(a+1)(2a-1)}{(2a+1)(2a+3)} c^{1/2} + \frac{b(a-1)}{a+1} c^{1/\gamma} + \dots, \\ g_2(\arccos c^{1/2\gamma}) &= \frac{a(a+1)(2a+1)^2 - ab^2}{2(a+1)^2(2a+1)^2} - \frac{4ab^2(2a-1)}{(2a+1)^2(2a+3)} c^{1/2} + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

З (3) на падставе тэарэмы пра няўзруную функцыю і з улікам замены $r = r_1 \cos \varphi$ маем

$$r = c^{(\gamma+1)/2\gamma} \left[1 - \frac{ab}{(a+1)(2a+1)} c^{1/2} + \left(\frac{2b(a+1)(2a-1)}{(2a+1)(2a+3)} + \frac{(4a^2+a)b^2 - (a^2+a)(2a+1)^2}{2(a+1)^2(2a+1)^2} \right) c + \dots \right] \quad (6)$$

Пры даследаванні акругі $r=0$, $\varphi=\pi/2$ пасля пераходу да палярных каардынатаў у сістэме (1) зробім замену

$$\cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad r = \rho \sin \theta, \quad \theta \in (0; \pi/2], \quad (7)$$

адкуль прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\theta) \rho^k, \quad \rho(\pi/2) = s, \quad (8)$$

дзе s – адвольны дадатны лік, прычым $r(\pi/2)=s$,

$$h_1(\theta) = -\frac{(a+1)\cos\theta + b\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)}, \quad h_2(\theta) = -\frac{\sin\theta\cos\theta(ab_1\cos\theta + aa_1\sin\theta)}{(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^2},$$

$$h_3(\theta) = (2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^{-3} [b(a-1)(2a+1)\cos^8\theta + (8a^3+4a^2-2b^2-ab^2+2a-1)\cos^7\theta\sin\theta + b(4a^2-b^2-(2a+1)(3+ab+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}ab_2)-1)\cos^6\theta\sin^2\theta + (ab_1^2+(2a+1)(4a^2-2b^2-aa_2-4a-3)-b^2(ab+\frac{1}{2}ab_2+a+\frac{1}{2}b-2))\cos^5\theta\sin^3\theta + (2aa_1b_1-(5ab+4b+ab^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}abb_2+ab_2)(2a+1)-b(2+4a+aa_2+b^2))\cos^4\theta\sin^4\theta + (a(a_1^2+b_1^2)-(2a+1)(3+4a^2+b^2+2aa_2+8a)-b(4ab+2b+ab_2))\cos^3\theta\sin^5\theta + (2aa_1b_1-(ab_2+4ab+2b)(2a+1)-b(aa_2+(2a+1)^2))\cos^2\theta\sin^6\theta + (aa_1^2-(2a+1)(aa_2+(2a+1)^2))\cos\theta\sin^7\theta].$$

Заменаю

$$\rho = \rho_1 \sin^{-1/\gamma} \theta \exp \left[\int_{\pi/2}^{\theta} h(\tau) d\tau \right], \quad h(\tau) = -\frac{ab \cos^2 \tau}{(2a+1)(2a+1+b \cos \tau \sin \tau)}$$

атрымаем развязак раўнання (8)

$$\rho = \sin^{-1/\gamma} \theta \exp \left[\int_{\pi/2}^{\theta} h(\tau) d\tau \right] \left[s + v_2(\theta)s^2 + v_3(\theta)s^3 + \dots \right], \quad (9)$$

$$v_k(\pi/2) = 0, \quad \theta \in [\theta_0, \pi/2], \quad 0 < \theta_0 < \pi/2, \quad \rho(\pi/2) = s,$$

$$v_2(\theta) = \int_{\pi/2}^{\theta} \sin^{-1/\gamma} \tau h_2(\tau) \exp \left[\int_{\pi/2}^{\tau} h(t) dt \right] d\tau,$$

$$v_3(\theta) = v_2^2(\theta) + \int_{\pi/2}^{\theta} \sin^{-2/\gamma} \tau h_3(\tau) \exp \left[2 \int_{\pi/2}^{\tau} h(t) dt \right] d\tau.$$

Калі $\theta \in (0, \theta_0]$, $0 < \theta_0 < \pi/2$, то ў (8) робім замену

$$\rho = w \exp \left[\int_{\theta_0}^{\theta} h(\tau) d\tau \right], \quad v = \sin \theta, \quad (10)$$

якая прыводзіць да раўнання

$$v \frac{dw}{dv} = -\frac{1}{\gamma} w - H_2(v)w^2 - H_3(v)w^3 - \dots, \quad (11)$$

$$H_2(v) = -\frac{vh_2(\arcsin v)}{\sqrt{1-v^2}} \exp\left[\int_{\theta_0}^{\arcsin v} h(\tau)d\tau\right], H_3(v) = -\frac{vh_3(\arcsin v)}{\sqrt{1-v^2}} \exp\left[2\int_{\theta_0}^{\arcsin v} h(\tau)d\tau\right].$$

Разв'язок раўнання (11) пры ўмове $w(\sin\theta_0)=s_1$, дзе $s_1=\rho(\theta_0)$ з (9), знойдем з інтэграла Дзюлака

$$wv^{1/\gamma}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(v)w^k\right] = \exp\left[\int_{\pi/2}^{0_0} h(\tau)d\tau\right]\left[s + v_2(\theta_0)s^2 + v_3(\theta_0)s^3 + \dots\right], \quad (12)$$

$$\eta_1(v) = v^{1/\gamma} \int_{\sin\theta_0}^v \tau^{-(1+1/\gamma)} H_2(\tau)d\tau, \eta_2(v) = \eta_1^2(v) + v^{2/\gamma} \int_{\sin\theta_0}^v \tau^{-(1+2/\gamma)} H_3(\tau)d\tau.$$

Улічваючы, што пасля пераходу да палярных каардынатаў раўнанні (3), дзе $r=r_1\cos\varphi$, і (12) вызначаюць кавалкі адной і той самай траекторыі сістэмы (1), знойдем сувязь паміж c і s . Са стасункаў (7), (10) пры $\cos\varphi=c^{1/2\gamma}$ маем

$$\rho = (c^{1/\gamma} + r^2)^{1/2}, v = \sin\theta = r/\rho, w = \rho \exp\left[\int_{\theta_0}^0 -h(\tau)d\tau\right]. \quad (13)$$

З (6) і (13) вынікае

$$\rho = c^{1/2\gamma}\left(1 + \frac{1}{2}c - \frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{3/2} + \dots\right), v = c^{1/2}\left(1 - \frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{1/2} + \dots\right) + \frac{4a^3(2b^2 + 11b - 24) + 2a^2(7b^2 + 2b - 34) + a(3b^2 - 12b - 23)}{2(1+a)^2(1+2a)^2(3+2a)}c + \dots,$$

$$w = \exp\left[\int_0^{\theta_0} h(\tau)d\tau\right]c^{1/2\gamma}\left[1 + \frac{ab}{(2a+1)^2}c^{1/2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ab^2(5a^2 + 4a + 1)}{(a+1)(2a+1)^4}\right)c + \dots\right].$$

Знаходзячы расклады $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$, карыстаемся формулаю Тэйлара. Маем

$$\eta_1(v) = v^{1/\gamma}[G_2(v) - G_2(\sin\theta_0)],$$

$$G_2(v) = \frac{a(2a+1)b_1}{(2a+1)^2(3a+1)} \exp\left[\int_{\theta_0}^0 h(\tau)d\tau\right]v^{(2-1/\gamma)} + \int_0^v \tau^{-(1+1/\gamma)} R_2(H_2(\tau))d\tau.$$

Пасля падстаўлення раскладаў v , w , $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ у (12) з атрыманай роўнасці на падставе тэарэмы пра няўяўную функцыю метадам нявызначаных каэфіцыентаў прыходзім да стасунку

$$s = \mu_1 c^{1/\gamma} + \mu_2 c^{2/\gamma} + \mu_3 c^{(\gamma+1)/\gamma} + \dots, \quad (14)$$

$$\mu_1 = \exp\left[\int_0^{\pi/2} h(\tau)d\tau\right], \mu_2 = G_2(1) \exp\left[\int_0^{\pi/2} h(\tau)d\tau + \int_0^{\theta_0} h(\tau)d\tau\right], \mu_3 = G \exp\left[\int_0^{\pi/2} h(\tau)d\tau\right],$$

$$G = \frac{3 + 6a^4 + 16a^5 - 4b(3a - a^2 - 11a^3)}{2(1+a)(1+2a)^3(3+2a)}.$$

Вывучэнне траекторыі $r(\varphi)$ у другім квадранце пры ўмовах $r(\pi/2)=s$, $r(\pi)=\bar{c}$ зводзім да першага квадранта заменаю $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$, што раўназначна замене каэфіцыентаў $b \rightarrow -b$, $b_k \rightarrow -b_k$, $c_k \rightarrow (-1)^{k+1}c_k$ у сістэме (1). Выкарыстоўваючы вынікі з першага квадранта, з (14) атрымаем

$$s = \bar{\mu}_1 \bar{c}^{1/\gamma} + \bar{\mu}_2 \bar{c}^{2/\gamma} + \bar{\mu}_3 \bar{c}^{(\gamma+1)/\gamma} + \dots, \quad (15)$$

дзе $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, $\bar{\mu}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1 , μ_2 , μ_3 . Прыраўноўваючы правыя часткі з (14) і (15), атрымаем раўнанне, з якога знаходзім

$$\bar{c} = \bar{\lambda}_1 c + \bar{\lambda}_2 c^{(1+1/\gamma)} + \bar{\lambda}_3 c^2 + \dots, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \exp\left[\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right], \quad \bar{\lambda}_2 = \gamma \exp\left[\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] \left[\bar{G}_2(1) \exp\left[\int_0^{\theta_0} \bar{h}(\tau) d\tau + \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] - \right. \\ &\quad \left. - G_2(1) \exp\left[\int_0^{\theta_0} h(\tau) d\tau\right]\right], \quad \bar{\lambda}_3 = \gamma \exp\left[\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] \left[G - \bar{G} \exp\left[\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right]\right]. \end{aligned}$$

Разглядаючы $r(\varphi)$ у трэцім квадранце пры $r(3\pi/2) = \bar{s}$, $r(\pi) = \bar{c}$, зробім замену $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, што адпавядае замене ў (1) каэфіцыентаў $a_k \rightarrow (-1)^k a_k$, $b_k \rightarrow (1)^{k+1} b_k$, $b \rightarrow -b$, $c_k \rightarrow (-1)^k c_k$. У такім разе маем

$$\bar{s} = \bar{\mu}_1 \bar{c}^{1/\gamma} + \bar{\mu}_2 \bar{c}^{2/\gamma} + \bar{\mu}_3 \bar{c}^{(\gamma+1)/\gamma} + \dots, \quad (17)$$

дзе $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1, μ_2, μ_3 .

Разглядаючы $r(\varphi)$ у чацвёртым квадранце пры $r(2\pi) = \bar{c}$, зробім замену $\varphi \rightarrow 2\pi - \varphi$, што раўназначна замене ў (1) $a_k \rightarrow (-1)^k a_k$, $b_k \rightarrow (1)^k b_k$, $c_k \rightarrow -c_k$. У гэтым выпадку

$$\bar{s} = \bar{\bar{\mu}}_1 \bar{c}^{1/\gamma} + \bar{\bar{\mu}}_2 \bar{c}^{2/\gamma} + \bar{\bar{\mu}}_3 \bar{c}^{(\gamma+1)/\gamma} + \dots, \quad (18)$$

дзе $\bar{\bar{\mu}}_1, \bar{\bar{\mu}}_2, \bar{\bar{\mu}}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1, μ_2, μ_3 . Прыраўноўваючы правыя часткі з (17) і (18), атрымаем

$$\bar{c} = \bar{\lambda}_1 \bar{c} + \bar{\lambda}_2 \bar{c}^{(1+1/\gamma)} + \bar{\lambda}_3 \bar{c}^2 + \dots, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \exp\left[-\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right], \quad \bar{\lambda}_2 = \gamma \exp\left[-\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] \left[\bar{\bar{G}}_2(1) \exp\left[\int_0^{\theta_0} \bar{h}(\tau) d\tau\right] - \right. \\ &\quad \left. - \bar{\bar{G}}_2(1) \exp\left[\int_0^{\theta_0} \bar{h}(\tau) d\tau\right]\right], \quad \bar{\lambda}_3 = \gamma \exp\left[-\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] \left[\bar{G} - G \exp\left[-\gamma \int_0^\pi h(\tau) d\tau\right]\right]. \end{aligned}$$

Падстаўляючы \bar{c} з (16) у (19), выразім \bar{c} праз c .

$$\bar{c} = c - c^{\frac{3a+2}{2a+1}} \exp\left[\int_0^\pi h(\tau) d\tau\right] \frac{2(2a+1)}{a+1}$$

$$\left[\int_0^\pi \frac{a(a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta) \cos \theta}{(2a+1 + b \cos \theta \sin \theta)^2} \sin^{\frac{a}{2a+1}} \theta \exp\left[-\frac{ab}{2a+1} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos^2 \tau d\tau}{2a+1 + b \cos \tau \sin \tau}\right] d\theta \right] + \dots$$

З апошняй роўнасці вынікае

Тэарэма. Калі для сістэмы (1) пачатак каардынатаў ёсць цэнтр, то

$$\int_0^\pi \frac{a(a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta) \cos \theta}{(2a+1 + b \cos \theta \sin \theta)^2} \sin^{\frac{a}{2a+1}} \theta \exp\left[-\frac{ab}{2a+1} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos^2 \tau d\tau}{2a+1 + b \cos \tau \sin \tau}\right] d\theta = 0.$$

1. Садовскі А. П. // Дыферэнц. ураўнення. 1990. Т. 26. № 10. С. 1743.

2. Там жс. 1989. Т. 25. № 5. С. 790.

3. Дюлак Г. О предельных циклах. М., 1980.

**ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

The necessary and sufficient conditions are given for the boundness on mean-square of nonautonomous and autonomous linear stochastic differential systems.

В работе [1] В. Коппель установил необходимые и достаточные условия существования по крайней мере одного ограниченного решения у обыкновенной дифференциальной системы $\dot{x}=A(t)x+b(t)$ с каждой непрерывной ограниченной на $[0, +\infty[$ функцией $b(t)$, а также с каждой функцией $b \in L_1([0, +\infty[, R^n)$. Р. Конти [2] обобщил эти результаты на системы с функциями $b \in L_p([0, +\infty[, R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, и рассмотрел случаи, когда все решения ограничены или когда только одно решение ограничено. В дальнейшем эти результаты неоднократно обобщались [3–6] Н.А. Изобовым, Р.А. Прохоровой, Р. Конти, которые также детально исследовали свойство дихотомичности линейных систем, обеспечивающее наличие ограниченных решений [3, 7–9]. Обзор этих результатов дан в [10]. В предлагаемой статье получен критерий ограниченности в среднеквадратическом всех решений линейных стохастических систем.

Будем использовать следующие обозначения: R^n – n -мерное евклидово пространство; $R_+ = [0, +\infty[$; (Ω, \mathcal{F}, P) – полное вероятностное пространство; \mathcal{F}_t – непрерывное справа возрастающее семейство под- σ -алгебр из \mathcal{F} , $t \geq 0$; B_p – банахово пространство $(n \times r)$ -матриц F , компоненты которых $F_{ij}: R_+ \times \Omega \rightarrow R$ – измеримые \mathcal{F}_t -согласованные процессы, удовлетворяющие условию $(\int_0^{+\infty} E(|F_{ij}(t, \omega)|^p) dt)^{1/p} < \infty$, если $1 \leq p < \infty$; или $(\text{ess sup}_{t \geq 0} E(|F_{ij}(t, \omega)|^2))^{1/2} < \infty$,

если $p = \infty$, с нормой $\|F\|_{B_p} = \left(\int_0^{+\infty} E(\|F(t, \omega)\|^p) dt \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;

$\|F\|_{B_\infty} = (\text{ess sup}_{t \geq 0} E(\|F(t, \omega)\|^2))^{1/2} < \infty$, $p = \infty$, где E – знак математического ожидания, $\|\cdot\|$ – евклидова норма матрицы. В случае когда $r=1$, пространство B_∞ обозначаем B .

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x(t)dt + f(t)dW(t), \tag{1}$$

где A – $(n \times n)$ -матрица с непрерывными на R_+ компонентами, $f \in B_p$, $2 \leq p \leq \infty$, $W(t)$ – r -мерное \mathcal{F}_t -броуновское движение с $W(0)=0$ почти наверное (п. н.).

Пусть x_0 – n -мерная \mathcal{F}_0 -измеримая случайная величина. Под решением системы (1) с начальным условием x_0 понимаем n -мерный непрерывный процесс $x(t)$, который \mathcal{F}_t -согласован и с вероятностью, равной 1, $x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) dW(\tau)$ для каждого $t \geq 0$ (интеграл по $dW(\tau)$ является интегралом Ито) [11]. В дальнейшем рассматриваем лишь решения $x(t)$ с начальными условиями x_0 , удовлетворяющими условию $E(\|x_0\|^2) < \infty$. Согласно [12, с. 166–169] для любого процесса $f \in B_{2p}$, $1 \leq p \leq \infty$, и любого начального условия x_0 существует единственное решение системы (1), представимое в виде

$$x(t) = Y(t)x_0 + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau) dW(\tau), \quad (2)$$

где $Y(t)$ – базисная матрица системы $dx(t)=A(t)x(t)dt$, нормированная при $t=0$, т. е. $Y(0)=I$ – единичная матрица.

Решение $x(t)$ системы (1) называют ограниченным в среднеквадратическом, если $E(\|x(t)\|^2) \leq M - \text{const}, \forall t \geq 0$.

Лемма 1. Если система (1) с каждой функцией $f \in B_{2p}, 1 \leq p \leq \infty$, имеет хотя бы одно ограниченное в среднеквадратическом решение, то существует постоянная K такая, что

$$\int_0^t \|Y(t)Y^{-1}(\tau)\|^{2q} d\tau \leq K, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{когда } 1 \leq q < \infty, \quad (3)$$

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|Y(t)Y^{-1}(\tau)\| \leq K, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{когда } q = \infty, \quad (4)$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Доказательство. Из представления решений $x(t)$ системы (1) в виде (2) следует, что

$$E(\|x(t)\|^2) = E(\|Y(t)x_0\|^2) + E\left(\int_0^t \|Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)\|^2 d\tau\right). \quad (5)$$

Поэтому, если система (1) с каждой функцией $f \in B_{2p}$ имеет ограниченное в среднеквадратическом решение, то решение каждой из этих систем с начальным условием $x(0)=0$ п. н. также ограничено в среднеквадратическом. Определим отображение $G: B_{2p} \rightarrow B$, $G(f)=z(t)$, где $z(t)$ – решение системы (1) с начальным условием $z(0)=0$ п. н. Отображение G является линейным и имеет замкнутый график, т. е. из условий $\|f_n - f\|_{B_{2p}} \rightarrow 0, \|G(f_n) - y\|_B \rightarrow 0$ следует, что $G(f)=y(t)$. Действительно, пусть

$$y_n(t) = G(f_n) = \int_0^t A(\tau)y_n(\tau) d\tau + \int_0^t f_n(\tau) dW(\tau). \quad (6)$$

Из условия $\|y_n - y\|_B \rightarrow 0$ имеем $y_n(t) \xrightarrow{P} y(t)$ для каждого $t \geq 0$, где символ \xrightarrow{P} обозначает предел по вероятности. Далее,

$$E\left(\left\|\int_0^t A(\tau)(y_n(\tau) - y(\tau))d\tau\right\|^2\right) \leq \left(\int_0^t \|A(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_0^t E\|y_n(\tau) - y(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

отсюда с помощью неравенства Чебышева получаем $\int_0^t A(\tau)y_n(\tau) d\tau \xrightarrow{P} \int_0^t A(\tau)y(\tau) d\tau$. Для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$, для всех достаточно больших n [12, с. 114]

$$P\left\{\left\|\int_0^t (f_n(\tau) - f(\tau))d\tau\right\| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left\{\left\|\int_0^t (f_n(\tau) - f(\tau))d\tau\right\| > \delta\right\} \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \delta,$$

поэтому $\int_0^t f_n(\tau) dW(\tau) \xrightarrow{P} \int_0^t f(\tau) dW(\tau)$. Существуют подпоследовательности y_{n_k}, f_{n_k} соответственно последовательностям y_n, f_n , для которых последние три предела имеют место с вероятностью 1. Заменяя y_n, f_n на y_{n_k}, f_{n_k} в равенстве (6) и переходя к пределу в (6) при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $y(t)$ – реше-

ние системы (1) с $y(0)=0$ п. н. и $G(f)=y(t)$. Из теоремы Банаха о замкнутом графике [13, с. 227–228] следует существование постоянной $K \geq 0$ такой, что

$$\|z\|_B \leq K \|f\|_{B_2}, \quad (7)$$

Зафиксируем $T > 0$, t_1 , $0 < t_1 \leq T$, и обозначим через $\lambda_{t_1}(\tau)$ максимальное характеристическое число матрицы $L^*(t_1, \tau)L(t_1, \tau)$, где

$$L(t, \tau) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(\tau), & 0 \leq \tau < t, \\ 0, & 0 \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

а через $V_{t_1}(\tau)$ – множество собственных векторов с евклидовой нормой, равной 1, соответствующих $\lambda_{t_1}(\tau)$, * – знак транспонирования. Функция $\lambda_{t_1}(\cdot)$ – кусочно-непрерывна на $[0, T]$ и, следовательно, принадлежит $L_q([0, T], R)$ для каждого q , $1 \leq q \leq \infty$, кроме того, $\lambda_{t_1}(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [0, T]$. Многозначное отображение $V_{t_1}(\cdot): [0, T] \rightarrow \text{comp}(R^n)$ полунепрерывно сверху, поэтому по теореме 3.10 [14, с. 27] имеет измеримый селектор $b_{t_1}(\cdot)$, т. е. такое измеримое отображение $b_{t_1}(\cdot)$, что $b_{t_1}(\tau) \in V_{t_1}(\tau)$ для всех $\tau \in [0, T]$.

Пусть $1 < q < \infty$ (в случаях $q=1$, $q=\infty$ дальнейшее доказательство аналогично $1 < q < \infty$ с очевидными изменениями). Возьмем функцию $g_{t_1}(\tau) = (\lambda_{t_1}(\tau))^{q-1}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, которая принадлежит $L_p([0, T], R)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \lambda_{t_1}(\tau) g_{t_1}(\tau) d\tau = \left(\int_0^T (\lambda_{t_1}(\tau))^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (8)$$

Рассмотрим процесс

$$z(t) = \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau) f_{t_1}(\tau) dW(\tau) = \int_0^t L(t, \tau) f_{t_1}(\tau) dW(\tau), \quad (9)$$

где $f_{t_1}(\tau, \omega)$ – $(n \times r)$ -матрица, первый столбец которой

$$f_{t_1}^{(1)}(\tau, \omega) = \begin{cases} \sqrt{g_{t_1}(\tau)} b_{t_1}(\tau), & 0 \leq \tau \leq T, \quad \forall \omega \in \Omega, \\ 0, & \tau > T, \quad \forall \omega \in \Omega, \end{cases}$$

а остальные столбцы нулевые. Процесс $z(t)$, определенный по формуле (9), является решением системы (1) с $z(0)=0$ п. н. и с $f(t)=f_{t_1}(t)$. Согласно неравенству (7)

$$E(\|z(t_1)\|^2)^{1/2} \leq \left(\sup_{t \geq 0} E(\|z(t)\|^2) \right)^{1/2} \leq K \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau \right)^{1/(2p)}. \quad (10)$$

Из (8), (9) имеем

$$\begin{aligned} E(\|z(t_1)\|^2) &= E \left(\int_0^T \|L(t_1, \tau) f_{t_1}(\tau)\|^2 d\tau \right) = \int_0^T \lambda_{t_1}(\tau) g_{t_1}(\tau) d\tau = \\ &= \left(\int_0^T (\lambda_{t_1}(\tau))^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая (10), (11), видим, что

$$\left(\int_0^T (\lambda_{t_1}(\tau))^q d\tau \right)^{1/(2q)} = \left(\int_0^T \|L(t, \tau)\|_e^{2q} d\tau \right)^{1/(2q)} \leq K, \quad (12)$$

где K не зависит ни от T , ни от t_1 , $\|\cdot\|_e$ – норма матрицы, подчиненная евклидовой векторной норме. Из (12) вытекает требуемое неравенство (3).

Лемма 2. Если существуют K и q , $K > 0$, $1 \leq q < \infty$, такие, что выполняется неравенство (3) в случае, когда $1 \leq q < \infty$, или неравенство (4), когда $q = \infty$, то для любой функции $f \in B_{2p}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, все решения системы (1) ограничены в среднеквадратическом.

Доказательство леммы 2 вытекает из равенства (5) и леммы 1 [1, p. 68], а следующая теорема 1 сразу следует из лемм 1 и 2 настоящей статьи.

Теорема 1. Для того чтобы все решения системы (1) с каждой функцией $f \in B_{2p}$, $1 \leq p \leq \infty$, были ограничены в среднеквадратическом, необходимо и достаточно, чтобы система $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяла условию (3), когда $1 \leq q < \infty$, или условию (4), когда $q = \infty$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Рассмотрим теперь систему

$$dx(t) = Ax(t)dt + DdW(t), \quad (13)$$

где A , D – постоянные $(n \times n)$ -, $(n \times r)$ -матрицы, $D \neq 0$. Обозначим через $h(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров n -порядка матрицы $(A - \lambda E, D)$, которая получается приписыванием к $A - \lambda E$ матрицы D , и пусть $\delta(\lambda) = h^{-1}(\lambda) \det(A - \lambda E)$.

Теорема 2. Для того чтобы система (13) имела хотя бы одно ограниченное в среднеквадратическом решение, необходимо и достаточно, чтобы все корни многочлена $\delta(\lambda)$ имели отрицательные вещественные части.

Доказательство. Система (13) имеет хотя бы одно решение, ограниченное в среднеквадратическом, тогда и только тогда, когда $\int_0^t \|e^{A(t-\tau)} D\|^2 d\tau \leq K - \text{const}$, $\forall t \geq 0$, что равносильно условию $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{Ay} D = 0$, т. е.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$ для каждого $i = 1, \dots, r$, где $x_i(t)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(0) = d_i$, d_i – i -й столбец матрицы D . Последнее утверждение, согласно результатам работы [15], имеет место, если и только если все корни многочлена $\delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Следствие 1. Все решения системы (13) ограничены в среднеквадратическом тогда и только тогда, когда система $\dot{x} = Ax$ устойчива и все корни многочлена $\delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Приведем пример системы вида (13) с периодической матрицей $A(t)$, имеющей постоянные отрицательные собственные числа, все решения которой не являются ограниченными в среднеквадратическом:

$$dx(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos 4t & -2 + 2 \sin 4t \\ 2 + 2 \sin 4t & -1 + 2 \cos 4t \end{pmatrix} x(t) dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW(t). \quad (14)$$

Легко видеть, что система $\dot{x} = A(t)x$ с матрицей $A(t)$ из системы (14) не является устойчивой [16]. Следующий пример показывает, что и асимптотическая устойчивость системы $\dot{x} = A(t)x$, вообще говоря, не является достаточным условием для существования по крайней мере одного ограниченного в среднеквадратическом решения системы вида (13) с переменной матрицей $A(t)$:

$$dx(t) = -\frac{x(t)}{t+1} dt + dW(t), \quad t \geq 0.$$

1. Coppel W. A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath. Math. Monographs. Boston, 1965.
2. Conti R. Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9. № 1. P. 23.
3. Coppel W. A. Dichotomies in stability theory: Lect. Notes Math. 629. Springer, 1978.
4. Прохорова Р. А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2090.
5. Там же. 1999. Т. 35. № 6. С. 856.
6. Прохорова Р. А., Шевцов И. Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2. С. 52.
7. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775.
8. Там же. 1990. Т. 26. № 8. С. 1323.
9. Конти Р., Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1689.
10. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. № 5. С. 54.
11. Ватанбэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
12. Липцер Р. И., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М., 1974.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
14. Kisielewicz M. Differential Inclusions and Optimal Control. Warszawa, 1991.
15. Булатов В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1977. № 1. С. 81.
16. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

Поступила в редакцию 18.04.2002.

Анатолий Афанасьевич Леваков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.



УДК (620.18+620.17+539.26):669.76

В.Г. ШЕПЕЛЕВИЧ, А.В. ДЕМИДЧИК

СТРУКТУРА И МИКРОТВЕРДОСТЬ ФОЛЬГИ СПЛАВОВ Bi-(8–12) ат. % Sb, ПОЛУЧЕННЫХ СВЕРХБЫСТРОЙ ЗАКАЛКОЙ ИЗ РАСПЛАВА

Results of investigation of grain structure and microhardness of rapidly solidified binary Bi-(8–12) at. % Sb and triple Bi-Sb-Te and Bi-Sb-Sn alloys are presented.

Традиционные методы получения полупроводниковых твердых растворов на основе висмута и сурьмы приводят к неоднородному распределению компонентов в сплаве, вследствие чего ухудшаются его свойства и технические параметры. Поэтому актуальным становится использование новых методов получения материалов, при которых удается достигнуть однородности распределения компонентов. Один из таких методов – скоростная закалка из расплава, при которой скорость охлаждения жидкой фазы $\sim 10^6$ К/с [1]. В данной работе представлены результаты исследования зеренной структуры и микротвердости быстрозатвердевшей фольги сплавов Bi-(8–12) ат. % Sb, а также тройных сплавов на основе Bi-12 ат. % Sb с содержанием олова и теллура от 0,25 до 4 ат. %.

Исследуемую фольгу получали двумя способами. В первом случае капля расплава кристаллизовалась на внутренней отполированной поверхности вращающегося медного цилиндра, во втором – капля расплава инжектировалась между двумя отполированными вращающимися и приведенными в соприкосновение медными цилиндрами разного диаметра. Металлографический анализ проводился с использованием оптической системы ПМТ-3. Травление шлифов осуществлялось раствором азотной кислоты в этиловом спирте. Измерение микротвердости H_n проводилось на микротвердомере ПМТ-3 с использованием нагрузки 10 г (погрешность H_n составляла не более 4 %). Рентгеноструктурный анализ был выполнен на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении.

Металлографические исследования выявили образование микрокристаллической структуры. Средний размер зерна d с ростом концентрации сурьмы в висмуте уменьшается. У фольги, полученной методом двухстороннего охлаждения, этот показатель по мере увеличения концентрации сурьмы в сплаве уменьшался с 10 до 7 мкм, у фольги, полученной методом одностороннего охлаждения, – с 12 до 8 мкм. При использовании метода двухстороннего охлаждения мелкозернистая структура фольги объясняется более высокими скоростями охлаждения жидкой фазы. Добавление третьего ком-

понента в сплав уменьшает средний размер зерна (рис. 1), что связано с увеличением скорости зарождения центров кристаллизации.

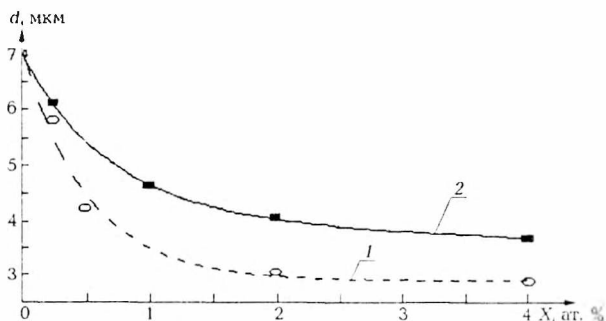


Рис. 1. Зависимость среднего размера зерна d от концентрации легирующих компонентов для фольги сплавов Bi-12 ат. % Sb-X ат. % Te (1) и Bi-12 ат. % Sb-X ат. % Sn (2), полученных двухсторонним охлаждением

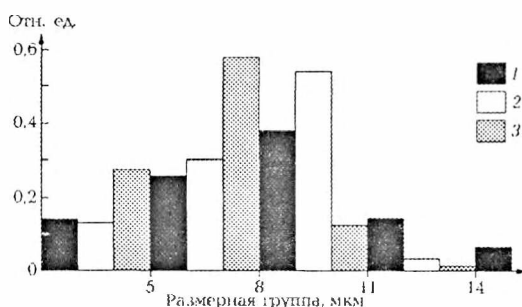


Рис. 2. Распределение максимальных хорд сечений зерен по длине для фольги, полученной методом двухстороннего охлаждения: Bi-8 ат. % Sb (1); Bi-10 ат. % Sb (2); Bi-12 ат. % Sb (3)

Аналогичное распределение максимальных хорд сечений зерен наблюдалось и для фольги, полученной односторонним охлаждением.

Таблица 1

Полюсные плотности дифракционных линий фольг сплавов системы висмут-сурьма, полученных двухсторонним охлаждением

Сплав	Дифракционные линии										
	10 $\bar{1}$ 2	10 $\bar{1}$ 4	11 $\bar{2}$ 0	10 $\bar{1}$ 5	20 $\bar{2}$ 0	20 $\bar{2}$ 2	10 $\bar{1}$ 7	20 $\bar{2}$ 5	21 $\bar{3}$ 0	21 $\bar{3}$ 2	0009
Bi-8 ат. % Sb	4,3	0,1	0,0	0,3	5,3	0,8	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0
Bi-10 ат. % Sb	5,8	0,1	0,0	0,2	4,1	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb	5,9	0,1	0,0	0,2	3,7	0,6	0,0	0,1	0,1	0,3	0,0
Bi-12 ат. % Sb-0,25 ат. % Sn	4,0	0,1	0,0	0,2	5,6	0,9	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb-0,5 ат. % Sn	5,0	0,0	0,0	0,0	5,2	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb-2 ат. % Sn	7,6	0,1	0,1	0,3	2,3	0,5	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb-0,25 ат. % Te	7,8	0,1	0,0	0,2	2,2	0,5	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb-0,5 ат. % Te	8,3	0,1	0,0	0,5	1,6	0,2	0,0	0,2	0,1	0,0	0,0
Bi-12 ат. % Sb-2 ат. % Te	9,9	0,0	0,0	0,0	1,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Фольга, полученная методом двухстороннего охлаждения, имеет четко выраженную текстуру (10 $\bar{1}$ 2)+(10 $\bar{1}$ 0). С увеличением концентрации сурьмы в висмуте текстура (10 $\bar{1}$ 2) усиливается, а текстура (10 $\bar{1}$ 0) ослабевает (табл. 1). Аналогичная картина наблюдается в случае легирования теллуром. Более сложным является влияние олова на текстуру фольги: легирова-

ние небольшим количеством олова (до 0,5 ат. %) ослабляет текстуру (10 $\bar{1}2$) и усиливает текстуру (10 $\bar{1}0$); при концентрациях олова свыше 1 ат. % текстура (10 $\bar{1}2$) вновь усиливается, а (10 $\bar{1}0$) – ослабевает. Формирование текстуры обусловлено ориентацией ковалентных сил связей относительно плоскостей {10 $\bar{1}2$ } и {10 $\bar{1}0$ } [2].

Фольга, полученная односторонним охлаждением, имеет четко выраженную текстуру (10 $\bar{1}2$) (табл. 2). Повышение концентрации сурьмы в сплаве влечет за собой ее усиление, а легирование третьим компонентом, как было показано в [3, 4], еще более усиливает данную текстуру.

Таблица 2

Полосные плотности дифракционных линий фольг сплавов системы висмут-сурьма, полученных односторонним охлаждением

Сплав	Дифракционные линии										
	10 $\bar{1}2$	10 $\bar{1}4$	11 $\bar{2}0$	10 $\bar{1}5$	20 $\bar{2}0$	20 $\bar{2}2$	10 $\bar{1}7$	20 $\bar{2}5$	21 $\bar{3}0$	21 $\bar{3}2$	0009
Bi-8 ат. % Sb	6,8	0,2	0,6	0,4	0,3	0,4	0,4	0,1	0,5	0,5	0,8
Bi-10 ат. % Sb	7,0	0,1	0,1	0,8	1,2	0,1	0,4	0,3	0,7	0,2	0,1
Bi-12 ат. % Sb	7,8	0,4	0,4	1,0	0,2	0,3	0,3	0,3	0,1	0,2	0,0

Исследования микротвердости H_{μ} бинарных сплавов показали, что с ростом концентрации сурьмы в висмуте микротвердость фольги монотонно возрастает. Это обусловлено тем, что при легировании висмута сурьмой происходит усиление ковалентных сил связи между атомами [2] и измельчение зеренной структуры. Установлено также, что фольга, полученная методом двухстороннего охлаждения, имеет более высокую H_{μ} , чем фольга, полученная методом одностороннего охлаждения. При легировании третьим компонентом микротвердость увеличивается (рис. 3). Теллур более эффективно, чем олово, увеличивает микротвердость. Как донор он способствует возрастанию концентрации электронного газа и усилению вклада металлической связи. Кроме того, при добавлении теллура в сплав, как уже отмечалось, получается фольга с более мелким зерном, чем при легировании оловом, что также способствует значительному увеличению H_{μ} при легировании теллуrom.

Таким образом, увеличение концентрации сурьмы в сплаве висмут-сурьма, а также добавление в сплав третьего компонента приводят к уменьшению среднего размера зерна фольги, полученной как односторонним, так и двухсторонним охлаждением. В первом случае фольга

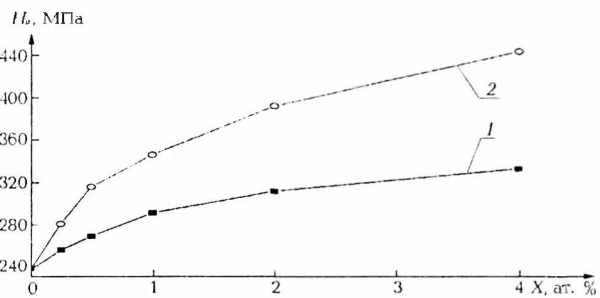


Рис. 3. Зависимость микротвердости H_{μ} фольги сплава Bi-12 ат. % Sb, полученного методом одностороннего охлаждения, от концентрации олова (1) и теллура (2)

имеет текстуру (10 $\bar{1}2$), во втором – четко выраженную текстуру (10 $\bar{1}2$)+(10 $\bar{1}0$). Добавление третьего компонента ведет к изменению текстуры. Независимо от способа получения микротвердость фольги монотонно возрастает с увеличением концентрации сурьмы, третий компонент также способствует ее увеличению.

1. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
2. Гицу Д. В., Голбан И. М., Канцер В. Г. и др. Явления переноса в висмуте и его сплавах. Кишинев, 1983.
3. Шепелевич В. Г. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1991. № 1. С. 22.
4. Там же. 1996. № 3. С. 37.

Поступила в редакцию 03.09.2002.

Василий Григорьевич Шепелевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела.

Александр Владимирович Демидчик – аспирант кафедры физики твердого тела. Научный руководитель – В. Г. Шепелевич.

УДК 517.977

И. И. КОВАЛЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

An optimal control problem with bang-bang controller is under consideration. We obtain the optimality condition and optimization algorithm based on taking into account specific features of the controller.

В приложениях управляющие воздействия создаются специальными техническими устройствами (регуляторами), обладающими теми или иными особенностями. В общей теории оптимального управления учесть все специфические свойства регуляторов не всегда удается, поэтому нужны специальные методы, адаптированные к их особенностям. Простейшими, но широко распространенными на практике являются релейные регуляторы. Их управляющие воздействия могут принимать только конечное множество значений (как правило, два). Формально теория оптимального управления в классе релейных регуляторов включается в общую теорию оптимального управления, опирающуюся на принцип максимума Понтрягина [1]. В данной работе релейные регуляторы выбраны в качестве первого примера, на котором демонстрируется новый метод, учитывающий их специфику. В дальнейшем предлагаемый метод будет обобщен на другие типы регуляторов, которые уже не укладываются в рамки общих теорий.

Принцип работы регулятора состоит в следующем: на его вход подается сигнал $f(t)$, $t \geq 0$, – функция переключения, на выходе получается управляющее воздействие $u(t)$, $t \geq 0$, вида $u(t) = L \operatorname{sign} f(t)$, $t \geq 0$. Далее считаем $L = 1$.

Понятно, что релейное управление $u(t)$, $t \geq 0$, однозначно задается значением $u(0) = \lim_{t \downarrow 0} u(t)$, и моментами переключения $t_1, t_2, \dots (u(t_i) = 0)$. Если значение $u(0)$ зафиксировать, то управление будет определяться вектором управляющих параметров $\tau = (t_1, t_2, \dots)$. Далее будем рассматривать конечный промежуток управления $T = [0, t^*]$, разбитый на части точками t_1, t_2, \dots, t_p и управление с конечномерным вектором $\tau = (t_1, \dots, t_p) \in \Omega_p$, где $\Omega_p = \{ \tau: 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_{p+1} = t^* \}$. Множество релейных управлений, соответствующих векторам $\tau \in \Omega_p$, обозначим через U_p . Управление $u(\cdot) = (u(t), t \in T) \in U_p$ и порождающий его вектор $\tau \in \Omega_p$ назовем доступными.

1. В классе U_p релейных управлений рассмотрим терминальную задачу оптимального управления:

$$c^T x(t^*) \rightarrow \max_{u, p}, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, Gx(t^*) = g, u(\cdot) \in U_p, p \in N. \quad (1)$$

Используя формулу Коши [2] и релейность управления, запишем задачу (1) в параметрической форме:

$$f_0(\tau, u_0) = u_0 \sum_{k=0}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-1)^k c(t) dt, \rightarrow \max_{u_0, \Omega_p, p}, \quad u_0 \in \{-1, 1\}, \tau \in \Omega_p, p \in N, \quad (2)$$

$$f(\tau, u_0) = u_0 \sum_{k=0}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-1)^k z(t) dt = g - GF(t^*)x_0,$$

где $c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b$, $z(t) = GF(t^*)F^{-1}(t)b$, $F: \dot{F} = AF, F(0) = E$.

2. Пусть $u(\cdot)$ – доступное управление с вектором τ . На одном из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, p}$, выберем произвольный момент $\zeta_i \in]t_i, t_{i+1}[$ и построим доступное управление $\bar{u}(\cdot)$ с вектором

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\zeta_i) = (t_0 + \Delta t_0, \dots, t_i + \Delta t_i, \zeta_i - \Delta \zeta_i, \zeta_i + \Delta \zeta_i, t_{i+1} + \Delta t_{i+1}, \dots, t_{p+1} + \Delta t_{p+1}),$$

где $\Delta t_0 \geq 0$; $\Delta \zeta_i \geq 0$, Δt_k , $k = \overline{1, p}$; $\Delta t_{p+1} \leq 0$ – произвольные достаточно малые по модулю величины. Подсчитаем значения критерия качества и функции основных ограничений задачи (2) на векторе $\bar{\tau}$ и оставим только члены, линейные относительно приращений. Введем обозначения: w – невязка,

$$\Delta \tau = \Delta \tau(\zeta_i) = (\Delta t_0; \Delta t_k, k = \overline{1, p}; \Delta t_{p+1}; \Delta \zeta_i),$$

$$l = (-c(t_0); 2(-1)^{k+1}c(t_k), k = \overline{1, p}; (-1)^p c(t_{p+1}); 4(-1)^{i+1}c(\zeta_i))u_0,$$

$$D = (-z(t_0); 2(-1)^{k+1}z(t_k), k = \overline{1, p}; (-1)^p z(t_{p+1}); 4(-1)^{i+1}z(\zeta_i))u_0.$$

В результате получим линеаризацию задачи (2):

$$l' \Delta \tau \rightarrow \max_{\Delta \tau}, D \Delta \tau = w, 0 \leq \Delta t_0 \leq t_1 - t_0, t_p - t_{p+1} \leq \Delta t_{p+1} \leq 0, \quad (3)$$

$$0 \leq \Delta \zeta_i \leq \zeta_i^*, t_{k-1} - t_k \leq \Delta t_k \leq t_{k+1} - t_k, k = \overline{1, p}; u_0 \in \{-1, 1\}, \bar{\tau} \in \Omega_{p+2}.$$

3. **Лемма.** Если $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление задачи (1), то при любом $\zeta_i \in T$ вектор $\Delta \tau^0 = 0$ – оптимальный план задачи (3).

Введем функцию $\psi'(t) = (c' - v'G)F(t^*)F^{-1}(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'\psi$, $\psi(t^*) = c - G'v$, где $F(t)$ – матрица решений системы $\dot{F} = AF, F(0) = E$; v – оптимальный вектор потенциалов задачи (2). Назовем функцию $\Delta(t) = \psi'(t)b$, $t \in T$, коуправлением. Используя лемму и критерий оптимальности [3], можем доказать

Принцип максимума. Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, задачи (1) оптимально тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$u(t) = \text{sign} \Delta(t), t \in T.$$

4. **Алгоритм.** А). Выберем натуральное $N \geq m$ и решим методом [3]

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max_u, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, Gx(t^*) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T, \quad (4)$$

в классе дискретных управлений [4]. Если решение (4) идентифицировало структуру оптимального управления (1), т. е. количество нулей функций

$$\Delta^0(t), t \in T, \text{ и } \Delta_h^0(kh) = \int_{kh}^{(k+1)h} \Delta^*(t) dt / h, k = \overline{1, N-1}; \Delta^*(t) = \psi'(t)b \text{ одинаково,}$$

и $\text{sign} \Delta_h^0(t_0) = \text{sign} \Delta^0(t_0)$ (исключим случай, когда $\Delta_h^0(t_0) \approx 0$, $\Delta^0(t_0) \approx 0$), то переходим к процедуре доводки (B). В противном случае, увеличив N , решим задачу (4).

Определение. Точку $t_k^h = kh$ назовем нулем коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h = \{0, h, \dots, (N-1)h\}$, если $\Delta_h^0(t_k^h - h)\Delta_h^0(t_k^h) \leq 0$, $\Delta_h^0(t_k^h) \neq 0$.

Б). По оптимальному дискретному управлению $u_h^0(t)$, $t \in T_h$, построим релейное управление $u^1(t)$, $t \in T$. Для этого каждый нуль t_k^h коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h$, с $|u_h^0(t - h)| \neq 1$ заменим на точку $t_k = t_k^h + (u_h^0(t_k^h - h) - 1)h/2$. Новые точки вместе с оставшимися нулями коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h$, возьмем в качестве начального приближения τ^1 – вектора управляющих параметров для процедуры доводки [3]. Другой способ построения начального приближения – составить вектор τ^1 из нулей $\Delta^*(t)$, $t \in T$.

Процедура доводки состоит в решении методом Ньютона системы $\Delta(t_k) = 0$, $k = \overline{1, p}$; $f(\tau, u_0) = \bar{g}$ относительно v , $t_k, k = \overline{1, p}$. При $\Delta(t_k) \neq 0$, $k = \overline{1, p}$, матрица Якоби системы неособая. Начиная с приближения τ^1 , построим 3–5 итераций. Если при этом не обнаруживается сходимость метода или происходит слипание* точек $t_k, k = \overline{1, p}$, то перейдем или к А), увеличив N , или к В). В противном случае построим решение τ^0 задачи (1) с требуемой точностью.

В). Решим задачу (3) на доступном управлении $u^1(\cdot)$ с вектором τ^1 и невязкой w^1 . По полученному решению $\Delta\tau^1$ построим новое приближение $\tau^2 = \tau^1 + \theta\Delta\tau^1$, $\theta > 0$. Если на нем и векторе v^1 выполнено неравенство $f_0(\tau^2, u_0) - (v^1)' \times f(\tau^2, u_0) < f_0(\tau^1, u_0) - (v^1)'f(\tau^1, u_0)$ [5], то решим (3) с вектором τ^2 и невязкой w^2 . Построив 3–5 приближений, перейдем к процедуре доводки Б) с начальным приближением τ^{3-5} . В противном случае возвращаемся к А), увеличив N .

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. М., 1975.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации: В 2 ч. Мн., 1984. Ч. 2.
4. Parametric Optimization and Related Topics / Ed. by J. Gubbot u. a. Berlin, 1987.
5. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Поступила в редакцию 10.06.2002.

Наталья Николаевна Коваленок – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 517.977

С.Б. КАЛИТИН, Б.С. КАЛИТИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОМЕХОЙ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

The problem is considered in the class of bounded inertial controls. The example is the problem with fifth-order dynamic system.

Рассмотрим на плоскости задачу самонаведения объекта O на цель Π (O и Π – материальные точки) методом пропорционального наведения, при котором угловая скорость вращения вектора линейной скорости объекта пропорциональна угловой скорости вращения вектора дальности $O - \Pi$. Сделаем следующие допущения: Π движется прямолинейно и равномерно и

* Две точки t_i, t_{i+1} считаются слипшимися, если целая часть $[t_i/\varepsilon]$ равна целой части $[t_{i+1}/\varepsilon]$.

воздействует на О помехой, приводящей к ошибке измерения углового положения Ц; сформированное ложное положение Ц воспринимается на О как истинное, поэтому функция ошибки рассматривается как управляющее воздействие u в системе О – Ц. Задача О – совместить свои координаты с целью. Задача Ц – воздействием “помехового” управления на О минимизировать функционал $J(u)$, характеризующий точность самонаведения. На амплитуду и на производную управления наложено ограничение. В первом случае оно вызвано конечным значением ошибки, доставляемой помехой, во втором – необходимостью максимально скрыть помеховое воздействие от преследующей стороны. Таким образом, поставленная задача – поиск оптимального управления как функции ошибки определения углового положения цели.

Отнесем рассматриваемую систему к классу реальных, практический анализ фазовых координат и уравнений которых позволяет привести задачу к следующей линейной форме:

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \min, \dot{x} = Ax + bu, U_* \leq u \leq U^*, |\dot{u}| \leq U_m, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, u(0) = 0, t \in T[0, t^*], (c, x \in R^5, A \in R^{5 \times 5}, b \in R^{5 \times 1}).$$

Задача (1) принадлежит к классу линейных с ограниченным инерциальным управлением. Сведем исходную задачу к задаче оптимального управления в классе кусочно-постоянных управлений путем увеличения размерности вектора фазовых координат. Введем дополнительную координату $y=u$ и новое управление $v = \dot{u}$. В результате получим задачу терминального управления с ограничением на фазовые координаты:

$$J(u) = c'x \rightarrow \min, \dot{x} = Ax + by, U_* \leq y \leq U^*, |v| \leq U_m, \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = 0, t \in T[0, t^*].$$

Теперь запишем задачу (2) в функциональной форме. Пусть $F(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$, $F(t) \in R^{5 \times 5}$, $t \in T$ – блочная компонента фундаментальной матрицы $\Phi(t)$, $t \in T$, решений расширенной системы $\dot{x} = Ax + by$, $\dot{y} = 0$: $\Phi = \begin{pmatrix} F & F^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь $F^1(t) \in R^{5 \times 1}$, $t \in T$, а $0 \in R^{1 \times 5}$ – нулевая матрица.

Согласно формуле Коши $x(t^*) = \Phi(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} \Phi(t^*)\Phi^{-1}(s)bv(s)ds$.

Тогда наша задача примет вид:

$$\begin{cases} c'\Phi(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c'\Phi(t^*)\Phi^{-1}(s)b v(s) ds \rightarrow \max, \\ U_* \leq y(t) = \int_0^t v(s) ds \leq U^*, |v(t)| \leq U_m, t \in T. \end{cases} \quad (3)$$

Решение будем искать в виде кусочно-линейных функций, тогда задача (3) сведется к следующей задаче линейного программирования [1]:

$$\begin{cases} c_i(t) = \int_{ih}^{(i+1)h} c'\Phi(t^*)\Phi^{-1}(s)ds = c_i, \\ v_i = v(t), t \in [ih, (i+1)h], \\ h = t^*/N \end{cases} \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-1} c_i v_i \rightarrow \max, \\ U_* \leq \sum_{i=0}^n v_i h \leq U^*, n = \overline{0, N-1}, \\ |v_i| \leq U_m, i = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь h – интервал дискретизации, v_i – “новое” управление на i -м интервале времени.

В качестве примера рассмотрим самонаведение объекта O на цель Π в следующей линейной задаче оптимального управления:

$$1,292x_2(t^*) - 0,939x_3(t^*) \rightarrow \max; \dot{x}_1 = -0,047x_2 + 5,96x_3 - 149,34x_5;$$

$$\dot{x}_2 = 0,01x_1 + 6,46x_2 - 4,99x_3 - 4,62x_5; \dot{x}_3 = 6(x_2 - x_4 + u), \dot{x}_4 = 50\dot{x}_3;$$

$$\dot{x}_5 = 0, \dot{u} = v, x_1(0) = 20; x_2(0) = 3,3; x_3(0) = 3,4; x_4(0) = 3,3;$$

$$x_5(0) = 0; u(0) = 0; -0,02 \leq u(t) \leq 0,02; |v(t)| \leq 0,04, t \in T = [0, t^*], t^* = 15,$$

где x_1 – текущая дальность $O - \Pi$, x_2 – истинный угол визирования цели объектом, x_3 – угол визирования цели, измеренный объектом, x_4, x_5 – соответственно углы поворота векторов скорости объекта и цели. Критерий качества в этом случае характеризует отклонение вектора скорости объекта от заданного направления на цель.

В данном примере задача линейного программирования имеет вид

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(v_i \int_{ih}^{(i+1)h} 1,29F_2^1(t^* - s) - 0,94F_3^1(t^* - s) ds \right) \rightarrow \max, -0,02 \leq \sum_{i=0}^n v_i h \leq 0,02, \quad (5)$$

$$n = 0, N-1, |v_i| \leq 0,04, i = 0, N-1, v_i = v(t), t \in [ih, (i+1)\Delta t], h = t^* / N.$$

Элементы $F_2^1(t), F_3^1(t)$ блочной компоненты $F^1(t)$ фундаментальной матрицы $\Phi(t), t \in T$, решений расширенной системы $\dot{x} = Ax + bu, \dot{y} = 0$ имеют вид:

$$F_2^1(t) = -1 - 0,03 \cdot e^{1,46 \cdot 10^{-6}t} + e^{-2,97t} [1,03 \cos(2,39t) + 0,286 \sin(2,39t)],$$

$$F_3^1(t) = -0,5 - 0,3 \cdot e^{1,46 \cdot 10^{-6}t} + e^{-2,97t} [0,8 \cos(2,39t) + 0,36 \sin(2,39t)].$$

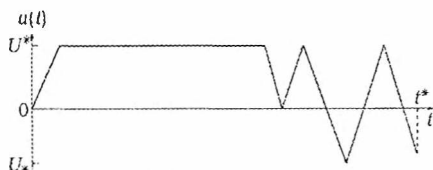


Рис. 1. Функция управления

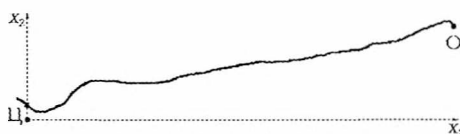


Рис. 2. Разовая траектория

При решении задачи (5) было принято $N=30, h=t^*/N=0,5$. Вид полученной функции управления и траектория объекта в относительной системе координат $O - \Pi$ представлены на рис. 1, 2.

1. Габасов Р., Ружижская Е.А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 46.

Поступила в редакцию 03.04.2002.

Сергей Борисович Калигин – преподаватель кафедры авиационной техники и вооружения Военной академии Республики Беларусь.

Борис Сергеевич Калигин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

И.В. БЛИЗНЕЦ

О КРИТИЧЕСКИХ p -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ

The minimal p -composition non- \mathfrak{F} -formations are described where \mathfrak{F} is a formation of classical types.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Символом $C^p(G)$ обозначается [1] пересечение всех централизаторов всех главных p -факторов H/K группы G ($C^p(G)=G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Символ $\mathcal{K}(G)$ обозначает множество всех тех простых групп, которые изоморфны композиционным факторам группы G . Будем использовать также следующую терминологию из [2].

Пусть p – произвольное простое число. Всякая функция вида $f: \{p, p'\} \mapsto \{\text{формации групп}\}$ называется p -композиционным спутником. Для произвольного p -композиционного спутника f символом $CF_p(G)$ обозначается класс групп

$$\{G|G/O_p(G) \in f(p') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p), \text{ если } Z_p \in \mathcal{K}(G)\}.$$

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = CF_p(f)$, то говорят, что она p -композиционна, а f – p -композиционный спутник этой формации.

В теории формаций конечных групп важную роль играют экстремальные объекты различных типов и, в частности, минимальные не \mathfrak{F} -формации. Напомним [2], что p -композиционная формация \mathfrak{F} называется минимальной p -композиционной не \mathfrak{F} -формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}$, но в классе групп \mathfrak{F} содержатся все собственные p -композиционные формации из \mathfrak{F} .

Общая проблема изучения формаций такого рода поставлена А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [2]. В данной работе дается решение такой задачи в случае, когда \mathfrak{F} – произвольная локальная формация классического типа.

Структуру доказательства основного результата отражают следующие доказанные нами леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}$, где \mathfrak{M} – непустая формация. Пусть H – канонический p -композиционный спутник формации \mathfrak{F} . Тогда

$$H(a) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}, & \text{если } a = Z_p, \\ \mathfrak{F}, & \text{если } a = (Z_p)'. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть \mathfrak{M} – локальная формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}$. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{F} является минимальной p -композиционной не \mathfrak{F} -формацией, когда $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с нефраттишевым монолитом $P = G^\mathfrak{F}$, что $p \in \pi(P)$ и либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, а H – такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{M}}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ либо $Z_p \notin \mathcal{K}(P)$.

Лемма 3. Пусть \mathfrak{M} – непустая абелева формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}$. Тогда \mathfrak{M} в том и только в том случае является минимальной p -композиционной не \mathfrak{F} -формацией, когда $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с нефраттишевым монолитом $P = G^\mathfrak{F}$, что $p \in \pi(P)$, и либо $Z_p \notin \mathcal{K}(P)$, либо $G = [P]H$, где $C_G(P) = P$ – абелева p -группа, а H – группа одного из следующих типов: а) H – монолитическая группа с нефраттишевым монолитом

$Q = H^{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}}$; б) H – минимальная не \mathfrak{M} -группа, причем H либо группа кватернионова порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , либо циклическая q -группа.

Лемма 4. Пусть G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $R \not\subseteq O_p(G)$. И пусть \mathfrak{F} – такая p -композиционная формация, что $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $c_p \text{form}(G)$ – минимальная p -композиционная не \mathfrak{F} -формация.

Лемма 5. Пусть $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная p -подгруппа группы G , H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q . Тогда формация $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$ – c_p -неприводима и ее максимальная p -композиционная подформация \mathfrak{M} имеет такой внутренний p -композиционный спутник t , что

$$t(a) = \begin{cases} \text{form}(H/Q), & \text{если } a = Z_p, \\ \text{form}(G/O_p(G)), & \text{если } a = (Z_p)'. \end{cases}$$

На основе лемм 1–5 и теоремы работы [3] получена

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация классического типа, и H – ее канонический p -композиционный спутник. Тогда \mathfrak{F} в том и только в том случае является минимальной p -композиционной не \mathfrak{F} -формацией, когда $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{F}}$, что либо $Z_p \notin \mathcal{K}(P)$, либо $Z_p \in \mathcal{K}(P)$ и выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – группа порядка $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ – абелева p -группа и а) H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $Q = H^{Z_p}$; б) H – минимальная не $(H(Z_p))$ -группа, причем H либо группа кватернионова порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , либо циклическая q -группа.

Данная теорема имеет много следствий. Здесь мы приведем лишь два из них.

Следствие 1. Пусть \mathfrak{S} – формация разрешимых групп. Тогда \mathfrak{F} в том и только в том случае является минимальной p -композиционной не \mathfrak{S} -формацией, когда $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$, где G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{S}}$, и справедливо следующее утверждение: $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $Q = H^{\mathfrak{S}}$.

Следствие 2. Пусть \mathfrak{N} – формация нильпотентных групп. Тогда \mathfrak{F} в том и только в том случае является минимальной p -композиционной не \mathfrak{N} -формацией, когда $\mathfrak{F} = c_p \text{form}(G)$, где G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, и справедливо следующее утверждение: $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}}$.

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
2. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. // Укр. мат. журн. 52. № 6. 2000. С. 783.
3. Близиц И.В., Скиба А.Н. // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. № 1(1). Вопр. алгебры. 1999. № 15. С. 147.

Поступила в редакцию 08.07.2002.

Игорь Васильевич Близиц – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины А.Н. Скиба.



СТУДЕНЧЕСКОЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ – 10 ЛЕТ

27 октября 1992 г. ученый совет факультета радиофизики и электроники БГУ принял решение об открытии при кафедре квантовой радиофизики и оптоэлектроники студенческой научно-исследовательской лаборатории (СНИЛ) «Полупроводниковые лазеры».

При выборе тематики лаборатории приоритет изначально был отдан фундаментальным исследованиям в области полупроводниковых инжекционных лазеров, включая квантоворазмерные лазеры на основе многослойных асимметричных гетероструктур и полупроводниковых легированных сверхрешеток, а также их практическим приложениям: диодной спектроскопии и оптико-медицинскому приборостроению. Ежегодно в СНИЛ выполняется ряд проектов, среди которых проекты Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ), в том числе и в рамках сотрудничества с Российской Федерацией, республиканских и межвузовских программ фундаментальных исследований, БГУ, гранты молодых ученых БРФФИ и БГУ. В этих работах самое активное участие принимают студенты 3–5-х курсов, магистранты, аспиранты, привлекаются к исследованиям также студенты младших курсов (единовременно в СНИЛ работают от 15 до 20 человек). Лаборатория в настоящее время является полигоном, где на практике апробируются подходы к формированию новой, более эффективной системы образования, разрабатываются современные методики развития способностей одаренной молодежи в области науки, техники и передовых технологий. В частности, в СНИЛ формируются учебно-научно-исследовательские группы, включающие преподавателей и научных работников кафедры, аспирантов, магистрантов и студентов, каждая из которых решает конкретную научную задачу.

Основное направление в работе СНИЛ – разработка теории квантоворазмерных лазеров и лазерных сверхрешеток, а также новых элементов функциональной оптоэлектроники на ее основе. В результате выполненных исследований осуществлен режим неоднородного возбуждения квантовых ям в асимметричных квантоворазмерных гетероструктурах, изучены особенности динамических процессов с учетом туннелирования носителей и баллистического заброса их через барьеры, теоретически определены области существования различных режимов генерирования лазера с двумя квантовыми ямами при изменении инжекционной эффективности и плотности тока накачки; изучено влияние спектрального уширения на спектры усиления и частоту инверсии квантоворазмерных структур; с учетом эффекта смещения зон в приближении четырехзонного k - p -метода рассчитаны дисперсионные кривые, плотность состояний, матричные элементы межзонных оптических переходов и спектры усиления ТЕ- и ТМ-мод квантоворазмерных структур; предложены методики расчета профиля потенциальной энергии, позволяющие установить закономерности изменения формы и глубины рельефа легированной сверхрешетки, проведен анализ распределения энергетических состояний и рассчитана двумерная концентрация носителей тока в легированной сверхрешетке с учетом хвостов плотности состояний; рассмотрены особенности экранирования электростатического потенциала и определено изменение длин экранирования и характеристических параметров хвостов плотности состояний в n - и p -областях с уровнем возбуждения n - i - p - i -кристалла; предсказан аномальный характер изменения отношения коэффициента диффузии к подвижности носителей тока; развита методика расчета спектров излучения в легированных сверхрешетках с учетом хвостов плотности состояний и сужения ширины запрещенной зоны; изучен модовый состав излучения квантоворазмерной лазерной структуры с вертикальным резонатором; изучено влияние эффекта нагрева активной области на модовый состав излучения. Предложены двухчастотный лазер, бистабильный лазерный излучатель, перестраиваемый в широкой полосе лазер с по-

стоянкой выходной мощностью, двухчастотный лазерно-волоконный оптический модуль, термостабильный лазер на основе асимметричной квантоворазмерной гетероструктуры с неоднородным возбуждением квантовых ям, многофункциональная двухсекционная лазерная структура на основе δ -легированной сверхрешетки, позволяющая перестраивать длину волны генерируемого излучения в режимах стационарной генерации, переходного процесса и регулярных пульсаций.

Разработаны принципы компьютерного проектирования газоанализаторов и методики определения внутренних параметров полупроводниковых лазеров, работающих в режиме четырехволнового смещения, а также астигматизма, формы и степени поляризации излучения лазерных диодов.

Основные направления научных исследований, проводимых в СНИЛ в настоящее время, акцентированы на следующих проблемах: влияние эффектов запаздывания оптического сигнала на режимы генерации, воздействие шумовых и когерентных характеристик излучения на процессы внутрирезонаторного фотодетектирования; особенности ондуляционных явлений и режимы генерации на динамических модах в квантоворазмерных лазерах; многоэлектронные эффекты и уширение спектральных линий; внутризонные оптические переходы, уширение спектров испускания с учетом корреляционных эффектов; перенос носителей между ямами и коллективные явления в квантовых ямах; нелинейная оптика квантоворазмерных лазеров; квантово-каскадные лазеры на асимметричных гетероструктурах, униполярные квантоворазмерные лазеры на напряженных гетероструктурах Si-SiGe.

За 10 лет работы СНИЛ студентами опубликованы 150 статей, 220 тезисов докладов, получены шесть патентов на изобретения, они являются соавторами семи учебно-методических пособий и 20 отчетов по НИР. 20 членов СНИЛ стали лауреатами Республиканского конкурса студенческих научных работ (первая категория), три работы были отнесены ко второй категории и две – к третьей. За два последних года 10 студентов получили свидетельства Совета специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов за лучшую научную работу по физике.

В СНИЛ выполнено девять магистерских диссертаций, восемь бывших ее членов стали кандидатами наук, причем пять диссертаций подготовлено в СНИЛ, три защищены в срок и одна – досрочно.

31 января 2001 г. своим распоряжением Президент Республики Беларусь утвердил решение Совета специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов от 18 декабря 2000 г. об оказании финансовой помощи творческим объединениям образовательных учреждений, среди которых и СНИЛ «Полупроводниковые лазеры» БГУ.

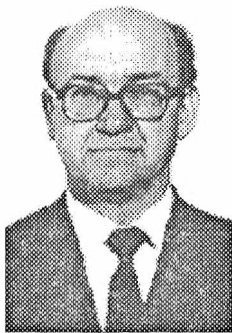
Вступив во второе десятилетие работы, СНИЛ находится в расцвете своих творческих возможностей.

И.С. Манак,
научный руководитель СНИЛ полупроводниковых лазеров,
кандидат физико-математических наук, доцент

Наши юбиляры



АЛЕКСЕЙ АДАМОВИЧ ГУСАК



Исполнилось 75 лет известному белорусскому математику, профессору кафедры общей математики и информатики, кандидату физико-математических наук, профессору Алексею Адамовичу Гусаку.

А.А. Гусак родился 1 ноября 1927 г. в д. Иванковщина Мозырского района Гомельской области в крестьянской семье. После учебы в Мозырском педучилище поступил на физико-математический факультет БГУ (отделение математики), который закончил с отличием в 1952 г. Учеба в аспирантуре МГУ им. М.В. Ломоносова завершилась в 1956 г. успешной защитой кандидатской диссертации.

С ноября 1955 г. А.А. Гусак работает в БГУ, где прошел путь от ассистента кафедры геометрии до профессора кафедры общей математики и информатики. В 1960 г. ему было присвоено ученое звание доцента, а в 1976 г. – профессора. В 1963–1974 гг. являлся деканом

математического факультета.

На этой должности Алексей Адамович достойно продолжил традиции первого руководителя математического факультета академика Д.А. Супруненко и внес большой вклад в дело становления факультета, подготовки молодых математических кадров и развития математики в нашей стране. В 1968–1975 гг. он заведовал кафедрой общей математики.

А.А. Гусак – специалист в области истории математики. Им исследованы предистория и начало развития теории приближения функций. В известной работе П.Л. Чебышева "Теория механизмов, известных под названием параллелограммов", заложившей основы теории приближения функций, были сформулированы гипотезы о наилучшем устройстве параллелограмма Уатта. А.А. Гусаком были доказаны эти гипотезы. В его трудах получил дальнейшее развитие метод поправок, предложенный П.Л. Чебышевым для приближения функций посредством алгебраических многочленов.

Ряд работ А.А. Гусака посвящен вопросам развития математики и математического образования в Беларуси. В 1984–1988 гг. он участвовал в исследованиях по научной программе "Развитие науки и культуры Белоруссии", утвержденной Президиумом АН БССР; и вместе с академиком Н.А. Изобовым был руководителем раздела "Математика и механика" программы; входил в состав редколлегии "Очерков истории науки и культуры Беларуси" (Мн.: Наука і тэхніка, 1996). В 2000–2002 гг. руководил научным проектом "Социодинамика математической культуры Беларуси XX века (исторический и философский аспекты)", предложенным БГУ Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований.

А.А. Гусак – автор свыше 200 публикаций, посвященных истории математики, теории приближения функций, теории механизмов, численным методам, методике преподавания математики. Он – автор двух учебных пособий с грифом Минвуза СССР, трех учебных пособий с грифом Минвуза БССР, экспонировавшихся на ВДНХ СССР. Учебные пособия по дифференциальной геометрии, опубликованные в соавторстве, переизданы на венгерском, испанском и французском языках. В 2000 г. издан учебник А.А. Гусака "Высшая математика" (в двух томах) с грифом Министерства образования Республики Беларусь. Среди 27 его книг две монографии – "Теория приближения функций. Исторический очерк" (Мн.: БГУ, 1972); "Гісторыя матэматыкі" (Мн.: БДУ, 2000).

Известны изданные им в соавторстве научно-популярные книги для юных математиков: "Алгебраические уравнения", "В мире чисел", "Линии и поверхности".

А.А. Гусак награжден юбилейной медалью "За доблестный труд", нагрудным знаком Минвуза СССР "За отличные успехи в работе", нагрудным знаком Министерства образования Беларуси "Выдатнік адукацыі Рэспублікі Беларусь". За заслуги в развитии науки и подготовке специалистов он награжден Почетной грамотой Верховного Совета БССР и грамотой Верховного Совета БССР.

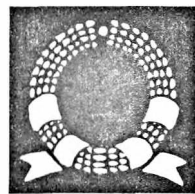
Алексей Адамович активно участвует в общественной жизни. Он был членом оргкомитетов семи конференций математиков Беларуси (1964, 1967, 1971, 1980, 1992, 1996, 2000 гг.). В течение ряда лет являлся ученым секретарем секции математики и механики научно-технического совета Минвуза БССР, членом бюро методического объединения преподавателей математики вузов республики, Совета Белорусского отделения Советского национально-общественного объединения историков естествознания и техники, членом научно-методического совета БГУ.

В настоящее время является членом комиссии по истории науки НАН Беларуси, научным консультантом редакции физико-математических и технических наук "Беларускай энцыклапедыі".

Сердечно поздравляем Алексея Адамовича Гусака с 75-летием и желаем ему крепкого здоровья, благополучия и счастья, новых творческих достижений в научной и педагогической работе.

*А.В. Козулин, И.В. Гайшун, Н.И. Юрчук, В.И. Корзюк, А.С. Феденко,
М.С. Гаращук, Л.П. Примачук, А.А. Килбас, Н.А. Лукашевич, М.Д. Мартыненко,
П.И. Моастырны, Я.В. Радыно, Р.И. Тышкевич, В.С. Федосенко*

Выдающиеся ученые Беларуси



АНТОН НИКИФОРОВИЧ СЕВЧЕНКО

(к 100-летию со дня рождения)



Выдающемуся белорусскому ученому и педагогу, ректору Белорусского государственного университета, академику АН БССР, доктору физико-математических наук, профессору Антону Никифоровичу Севченко 22 февраля 2003 г. исполнилось бы 100 лет.

А.Н. Севченко родился в с. Денисковичи Гомельской области в многодетной крестьянской семье. После окончания начальной школы некоторое время работал, с 1922 по 1926 г. учился в Рогачевском педагогическом техникуме. Затем три года заведовал сначала Жеребиовской начальной школой, потом был директором Жиличской неполной средней школы Бобруйского района Могилевской области. В 1929 г. поступил на физико-техническое отделение педагогического факультета БГУ.

В 1931 г. А.Н. Севченко был зачислен в аспирантуру ГОИ. С этого времени началась его научная работа под руководством академика С.И. Вавилова. Всю свою жизнь с исключительной теплотой, признательностью и благодарностью, с искренней любовью и уважением вспоминал Антон Никифорович своего учителя.

А.Н. Севченко в 1937 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию, посвященную изучению поляризованной люминесценции растворов органических красителей. Наряду с научными исследованиями Антон Никифорович проводил большую воспитательную и педагогическую работу: читал курсы баллистики и общей физики в Военно-политической академии им. В.И. Ленина (г. Ленинград) и курс высшей математики в ГОИ. В течение многих лет он являлся научным редактором всесоюзного журнала "Оптико-механическая промышленность".

Во время Великой Отечественной войны А.Н. Севченко активно занимался оборонной тематикой. Им была выполнена большая работа по обоснованию единой светомаскировки военных и гражданских объектов, а также по совершенствованию способов люминесцентного освещения шкал военных оптических приборов.

В 1946 г. Антон Никифорович поступает в докторантуру Академии наук СССР при Физическом институте им. П.Н. Лебедева (г. Москва). Итогом исследований люминесценции ураниловых соединений явилась докторская диссертация, которая была успешно защищена в 1952 г.

После избрания в 1953 г. академиком АН БССР А.Н. Севченко переезжает в Минск. Этот год стал переломным в развитии физических, физико-технических и математических исследований в Белоруссии. За короткое время А.Н. Севченко организовал Физико-математический институт АН БССР и на протяжении двух лет был первым директором. По его инициативе была создана лаборатория люминесценции Института физики АН БССР, которой Антон Никифорович руководил долгое время. В настоящее время она входит в состав Института молекулярной и атомной физики НАН Беларуси и остается одним из ведущих его подразделений. Ею успешно руководит один из первых учеников А.Н. Севченко член-корреспондент НАН Беларуси К.Н. Соловьев. Одновременно А.Н. Севченко исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-технических наук АН БССР (1954–1957) и до 1972 г. возглавлял кафедру физической оптики БГУ.

В 1957 г. А.Н. Севченко был назначен ректором Белорусского государственного университета им. В.И. Ленина. При А.Н. Севченко ведущий вуз республики стал одним из крупнейших университетов страны, правофланговым белорусской высшей школы и национальной культуры. Как признание личных заслуг А.Н. Севченко, всего профессорско-преподавательского состава и студентов университета следует считать награждение БГУ в 1967 г. орденом Трудового Красного Знамени.

А.Н. Севченко со свойственной ему энергией и настойчивостью организовал работу по многим перспективным научным направлениям, руководил исследованиями по люминесценции ураниловых и редкоземельных соединений, спектроскопии, люминесценции и генерации сложных органических молекул, оптике и спектроскопии полупроводников, ИК-спектроскопии перекисных и других соединений.

В последние годы жизни А.Н. Севченко много сил отдал организации при БГУ НИИ прикладных физических проблем – первого научно-исследовательского института в высшей школе республики (1972). Антон Никифорович создал крупные научные школы по оптике, спектроскопии, люминесценции и лазерной физике, по физике твердого тела и полупроводников, радиофизике, информатике и научному приборостроению, которые широко известны как в нашей стране, так и за рубежом. Под его руководством защищены 10 докторских и свыше 40 кандидатских диссертаций. Среди его учеников – академики и члены-корреспонденты АН БССР, лауреаты государственных премий и премий Совета Министров БССР, заслуженные деятели науки и техники республики.

А.Н. Севченко – автор около 230 научных и научно-популярных работ, получивших признание ученых всего мира. Результаты его исследований неоднократно докладывались на многих республиканских, всесоюзных и международных конференциях, съездах, симпозиумах.

Научную, научно-организационную и педагогическую работу академик А.Н. Севченко совмещал с огромной общественной деятельностью. Он неоднократно избирался в высшие партийные органы республики, был депутатом Верховного Совета БССР IV–VIII созывов. В качестве делегата БССР принимал участие в работе ряда международных организаций ООН. В 1955 г. был членом делегации БССР на 1-й конференции ООН по использованию атомной энергии в мирных целях (г. Женева, Швейцария). В 1956 г. возглавлял Белорусскую правительственную комиссию по выработке и подписанию Устава по мирному использованию атомной энергии (г. Нью-Йорк, США). В 1957, 1958 и 1959 гг. возглавлял делегацию БССР на международных конференциях по использованию атомной энергии в мирных целях (г. Вена, Австрия).

Многолетняя и плодотворная работа А.Н. Севченко по достоинству была оценена Советским государством: в 1971 г. за большие заслуги в развитии физической науки он был удостоен высокого звания Героя Социалистического Труда. Антон Никифорович награжден двумя орденами Ленина, орденом "Знак Почета", несколькими медалями, Почетной грамотой Верховного Совета БССР. А.Н. Севченко – заслуженный деятель науки БССР.

До конца своей жизни (26 сентября 1978 г.) А.Н. Севченко находился на трудовом посту.

Постановлением Совета Министров БССР от 2 августа 1979 г. НИИ прикладных физических проблем БГУ им. В.И. Ленина было присвоено имя Антона Никифоровича Севченко.

Научные исследования, начатые под руководством А.Н. Севченко, были продолжены его учениками и последователями, которые получили важные теоретические и практические результаты во многих областях науки и техники.

В области оптики, спектроскопии, люминесценции и лазерной физики (профессора Д.С. Умрейко, Е.С. Воропай, В.А. Гайсенюк, А.П. Клищенко, А.А. Минько, А.И. Комяк, А.П. Хапалюк, И.М. Гулис, А.П. Зажогин, В.В. Могильный, В.А. Саечников, М.П. Цверко, доктор физико-математических наук М.А. Ксенофонтов, Б.Б. Виленчик, М.П. Самцов, С.Е. Яковенко, доктор химических наук В.С. Безбородов, доценты И.П. Зятков, И.И. Жолнеревич, А.И. Слободянюк, Л.И. Буров, В.И. Попечиц, Д.И. Сагайдак, А.Л. Толстик, А.И. Серафимович, А.В. Чалей и др.) разработаны методы и средства спектрально-структурного анализа различных веществ, материалов и плазмы, на основе которых осуществлен целенаправленный синтез новых неорганических и органических соединений (активные и пассивные лазерные среды, фотосенсибилизаторы для фототерапии онкологических заболеваний, жидкокристаллические материалы для устройств отображения информации и управления, оптические среды для записи информации, негативные и позитивные фоторезисты, материалы цветокодирования и цветопередачи информации, лекарственные препараты радиопротекторного действия, индикаторы для анализа биологических жидкостей человека и др.). Разработаны методы, созданы и запущены в серийное производство приборы мирового класса, которые соответствуют международным правилам и ГОСТам, обладают высокой метрологической надежностью.

В области физики твердого тела и полупроводников (член-корреспондент НАН Беларуси, профессор Ф.Ф. Комаров, профессора В.М. Анищик, В.Б. Оджаев, В.М. Ломако, А.П. Новиков, В.Г. Шепелевич, Н.А. Поклонский, доктора физико-математических наук П.В. Кучинский, Г.Г. Федорук, кандидат физико-математических наук Г.А. Гусаков и др.) разработана теория и созданы методы ионно-лучевого легирования полупроводников, металлов и других материалов. Создана система сквозного компьютерного моделирования технологий микро- и наноэлектроники. Исследованы процессы дефектообразования в кристаллах кремния, арсенида галлия и фосфида индия. Разработаны принципы управления антикоррозионными и каталитическими свойствами материалов, новые методы получения сверхтвердых и износостойких материалов, новые технологии создания изделий электронной техники с помощью ионных пучков. Впервые в мире предложены и реализованы способы управления пучками рентгеновских и гамма-квантов, созданы элементы и системы оптики жестких квантов. Разработаны технологические процессы выращивания крупных синтетических алмазов инструментального и приборного назначения. Изготовлены новые изделия на основе природных и синтетических алмазов для использования в машиностроении и электронной технике.

В области радиофизики и информатики (академик НАН Беларуси А.Ф. Чернявский, члены-корреспонденты НАН Беларуси М.И. Демчук, П.Д. Кухарчик, профессора И.А. Малевич, А.С. Рудницкий, доктора физико-математических наук Б.И. Беляев, В.К. Гончаров, А.А. Коляда, доктор технических наук В.В. Ревинский, кандидаты технических наук Д.А. Ашкинадзе, А.Г. Будай, А.Ф. Романов, В.А. Сосенко, И.А. Титовицкий, И.А. Чернобай, кандидат физико-математических наук Г.В. Шаронов и др.) на основе изучения взаимодействия СВЧ-излучения с диэлектрическими материалами разработаны новые методы анализа физических свойств и параметров исследуемых объектов, что позволило создать радиологические технические средства для бесконтактного измерения влажности, массы, плотности, толщины и других характеристик диэлектрических материалов. Созданы и внедрены в народное хозяйство и учебный процесс новые приборы и комплексы современного оборудования разнообразного назначения для различных отраслей народного хозяйства. Многие из них освоены промышленностью и производятся серийно.

Традиции и научные направления, заложенные А.Н. Севченко, сохраняются и успешно развиваются его учениками и последователями.

ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ КРЫЛОВ (1902 – 1994)



14 декабря 2002 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Владимира Ивановича Крылова, академика АН БССР, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Государственной премии БССР, заслуженного деятеля науки БССР.

Владимир Иванович родился в с. Красный Яр Самарской губернии. Высшее образование получил в Самарском и Ленинградском университетах. Первый период его научной и педагогической деятельности был связан с ЛГУ, который он окончил в 1928 г. и где работал затем более четверти века. Математические интересы В.И. Крылова сформировались на традициях знаменитой петербургской научной школы, характерной чертой которой было обязательное сочетание фундаментальности и прикладной направленности исследований. Второй (почти сорокалетний) период плодотворной деятельности ученого связан с Беларусью. В 1956 г. он был избран академиком АН БССР, постоянно работал в Институте математики (в частности, с 1959 по 1974 г. – заместителем директора по научной работе) и одновременно (около двадцати лет) – в БГУ на созданной им в 1957 г. кафедре вычислительной математики.

Владимир Иванович по праву считается основоположником вычислительного направления в белорусской математике. Он бессменно руководил республиканским научным семинаром по численным методам, многие слушатели которого стали впоследствии кандидатами и докторами наук. Велика его роль в организации вычислительных центров Академии наук БССР и университета. По инициативе В.И. Крылова и при его непосредственном участии в БГУ была организована подготовка специалистов по приложениям математики и вычисли-

тельной техники, которые сегодня во многом определяют научно-технический прогресс в республике.

В.И. Крылов является автором более 100 научных работ, в том числе 25 книг. Его научные интересы были связаны в основном с задачами приближенного анализа. Еще в 1930-е гг. им были разработаны методы конформного отображения односвязных и многосвязных областей, нашедшие широкое применение при решении прикладных задач аэродинамики. Большой цикл работ ученого посвящен проблемам приближенного вычисления интегралов и аппроксимации функций. Интересные результаты были получены в области численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также в теории интерполяционных методов улучшения сходимости рядов и последовательностей. Фундаментальные монографии В.И. Крылова "Приближенные методы высшего анализа" (совместно с Л.В. Канторовичем) и "Приближенное вычисление интегралов" уже давно признаны классическими. Они были переизданы в ряде стран. В 1982–1986 гг. В.И. Крылов осуществил свой давний замысел по интегрированию и систематизации основ вычислительной математики: под его руководством коллективом авторов была издана серия из пяти книг под общим названием "Начала теории вычислительных методов".

Владимир Иванович был выдающимся педагогом. Его лекции отличались богатством и глубиной содержания, яркой и эмоциональной формой, высоким профессионализмом и совершенством. Написанное им (совместно с учениками) на основе этих лекций двухтомное учебное пособие "Вычислительные методы" неизменно входило в списки основной литературы учебных программ по дисциплинам вычислительного цикла, рекомендованных для всех университетов Советского Союза.

Жизнь и творчество Владимира Ивановича Крылова являются ярким примером бескорыстного, самоотверженного служения науке, он по праву занимает почетное место в ряду выдающихся белорусских математиков.

В.В. Бобков, П.А. Мандрик, П.И. Монастырский, Н.И. Юрчук

УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ОРГАНИЗАТОР НАУКИ

(к 75-летию со дня рождения Л.В. Володько)



2 января 2003 г. исполнилось 75 лет со дня рождения выдающегося ученого Беларуси, проректора Белорусского государственного университета, лауреата Государственной премии БССР, заслуженного деятеля науки республики, академика АН БССР, доктора физико-математических наук, профессора Леонида Викентьевича Володько.

Рано начав свою трудовую жизнь в тяжелое послевоенное время, после окончания школы рабочей молодежи г. Дзержинска Минской области Л.В. Володько в 1948 г. поступил на физико-математический факультет БГУ, который успешно окончил в 1953 г. Как лучший выпускник университета он был принят в аспирантуру к профессору А.Н. Севченко. Первые научные работы Л.В. Володько были посвящены люминесценции важного для того времени класса веществ – ураниловых соединений. Известно, что уран в 1950-е гг. изучался многими учеными мира в связи с развитием атомной энергетики. Исследования спектров соединений шестивалентного урана составили основу докторской диссертации Л.В. Володько, в которой он провел связь между спектральными свойствами ураниловых соединений и их структурой, предложив физико-химическое описание процесса комплексообразования в растворах органических соединений.

В результате анализа спектров ураниловых соединений была расшифрована структура электронно-колебательных переходов, оценены межмолекулярные и внутримолекулярные взаимодействия в кристаллах указанного класса соединений, установлены причины температурного тушения люминесценции и предложена классификация электронных состояний. Результаты этих исследований получили высокую оценку специалистов-оптиков и вошли в монографию "Ураниловые соединения (строение и спектры)" (1981).

Научные интересы Л.В. Володько не ограничивались люминесценцией и молекулярной спектроскопией. Его интересовали многие смежные вопросы химии, медицины, радиофизики, физики твердого тела, оптического приборостроения и др.

Л.В. Володько явился основоположником применения статистического метода исследования кинетики люминесценции многоатомных молекул, который основывался на многоканальном анализе временных интервалов между зарегистрированными квантами исследуемого излучения и квантами возбуждения люминесценции. Для этого сотрудниками отдела электронных систем института был создан комплекс радиоэлектронной аппаратуры для измерения малых интервалов времени (менее миллионных долей секунды). В частности, с помощью этой аппаратуры удалось измерить расстояние от Земли до Луны с точностью до десятка сантиметров, а также изучать процессы высвечивания молекул в наносекундном диапазоне. Применение этих методов стимулировало развитие исследований в квантовой оптике, лазерной физике, люминесценции, ядерной физике и значительно расширило информационные возможности экспериментов со сверхслабыми световыми потоками, начало которым в Советском Союзе было положено академиком С.И. Вавиловым.

Большое практическое значение имели работы Л.В. Володько по исследованию бензохинонов в качестве лечебных препаратов в медицинской практике. Обратив внимание на низкое значение окислительно-восстановительного потенциала у многих производных бензохинона, он подробно изучил их спектроскопические и физико-химические характеристики и предложил использовать некоторые бензохиноны в качестве химико-фармакологических средств защиты тканей организма человека от острой кислородной недостаточности, что широко практикуется сейчас в медико-биологических исследованиях.

Выполненный им цикл работ по изучению поликонденсации фенолформальдегидных смесей позволил установить механизм образования полимера в результате сшивки пространственных структур формальдегидных молекул и возникновения у них хороших тепло- и полупроводниковых свойств, что нашло широкое применение в технике.

Большое внимание Л.В. Володько уделял изучению жидкокристаллических веществ, которое было начато на кафедре спектрального анализа в 1960-е гг., а затем успешно продолжено его учениками под руководством профессора А.А. Минько в лаборатории оптики конденсированных сред НИИПФП им. А.Н. Севченко. На основании выполненных исследований установлены закономерности влияния строения жидкокристаллических соединений на их мезоморфные, молекулярные и оптико-физические свойства, разработаны новые жидкокристаллические материалы для электрооптических устройств и созданы высокоэффективные системы отображения информации.

За значительные научные заслуги Л.В. Володько в 1977 г. избирается академиком АН БССР. За время его работы проректором по научной работе БГУ и заведующим кафедрой спектрального анализа в университете значительно расширились и углубились исследования по фундаментальным и прикладным проблемам, упрочились связи с научно-исследовательскими институтами АН БССР, отраслевыми министерствами и ведомствами, промышленными предприятиями и организациями нашей республики.

Л.В. Володько принимал активное участие в работе специализированного Совета по присвоению ученых степеней и званий, научного совета по спектроскопии и квантовой электронике АН БССР, редколлегии "Журнала прикладной спектроскопии", успешно руководил оптическим отделом в Институте прикладных физических проблем.

Л.В. Володько много сил и внимания уделял научно-педагогической работе, пройдя путь от ассистента до профессора. Более двух десятков его учеников стали докторами и кандидатами наук и успешно претворяют в жизнь научные идеи своего учителя. Он тщательно и всесторонне готовил научную молодежь, вникал во все детали исследований своих учеников и успешно передавал им свой богатый опыт физика-экспериментатора. Обладая самобытным талантом и глубокой научной интуицией, он внес весомый вклад в самые различные разделы оптики, радиоэлектроники, химии и медицины. Среди его бывших учеников – заведующие кафедрами, лабораториями, профессора и преподаватели. За заслуги в развитии науки и подготовке кадров высшей квалификации Л.В. Володько был награжден орденом Трудового Красного Знамени, орденом Дружбы народов и медалями, ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки БССР», а за разработку новых антенно-фидерных устройств в 1974 г. присуждена Государственная премия БССР в области науки и техники.

Академик Л.В. Володько ушел из жизни в расцвете творческих сил и не успел воплотить многие свои замыслы и идеи. Многочисленные коллеги и ученики достойно продолжают его дело и всегда будут хранить в своих сердцах память о Л.В. Володько.

УДК 546.185 + 546.791

Умрейко Д.С., Сытько В.В., Покаташкин В.И. **Температурная зависимость параметров бесфононных линий в спектрах фторидных соединений уранила** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

В диапазоне 4,2÷40 К исследована температурная зависимость параметров бесфононных линий (БФЛ) в вибронных спектрах кристаллов пентафторуранилатов. Установлено, что стоксов сдвиг комбинирующих электронных состояний приводит к несимметричному искажению формы БФЛ, которая может быть аппроксимирована логарифмически нормальным распределением с параметрами, зависящими от фактора Хуанга – Риса и эффективной температуры. Температурное уширение БФЛ преимущественно связано с изменением заселенности начальных состояний, а сдвиг максимумов БФЛ обусловлен запрещенным характером первых электронных переходов в КСУ и определяется преимущественно нелинейными составляющими электрон-фононного взаимодействия. Температурная зависимость суммарной интегральной интенсивности данных бесфононных линий может быть описана в модели конфигурационных координат примесного центра с одним локальным колебанием.

Библиогр. 9 назв., ил. 3.

УДК 535.37

Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Луговский А.А. **Спектральные проявления образования ионных пар индотрикарбощианиновых красителей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Исследовано проявление ионных пар в поглощении и испускании индотрикарбощианинового красителя ТИКС с анионом Vg^- и его катионного аналога с анионом VF_4^- в этаноле, хлористом метилсене, дихлорбензоле. Установлено, что при переходе к малополярным растворителям наряду с изменениями в электронных спектрах поглощения и испускания образование ионных пар проявляется в спектрах возбуждения и анизотропии флуоресценции. Впервые установлено, что в спектральной области, соответствующей коротковолновым полосам поглощения, также наблюдаются значительные изменения в спектрах возбуждения и поляризационных спектрах флуоресценции, при нагревании происходит менее значительное падение квантового выхода флуоресценции более длинноволновых излучающих центров.

Библиогр. 20 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 517.392

Якутович Н.Г., Анищик В.М. **Численное решение обратной задачи Шредингера с использованием генетического алгоритма** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Предложен метод численного решения одномерной обратной задачи Шредингера с использованием генетического алгоритма.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 537.86; 621.372.823

Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. **К решению задачи дифракции резонаторных мод на поперечной щели проекционным методом** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматривается задача дифракции электромагнитного поля азимутально зависимой моды объемного коаксиального резонатора на внутренней поперечной кольцевой щели и цилиндрическом диэлектрике. Для ее решения используется метод разложения полей по простым модам резонатора без щели. Интегральные уравнения Фредгольма для полевых функций на щели дискретизируются с помощью проекционного метода Бубнова – Галеркина. Обосновано применение системы синусоидальных базисных функций для этой щели, которая не дает сингулярностей поля на краях щели.

Библиогр. 10 назв., ил. 2.

УДК 621.372.413

Дроздов С.Н., Кухарчик П.Д., Рудницкий А.С. **Селективные свойства тетраэдрических резонаторов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Методом парциальных плоских волн рассчитаны нормированные плотности резонансных колебаний и исследованы селективные свойства диэлектрических резонаторов тетраэдрической формы.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 524.882+530.145+531.51

Тихомиров В.В., Юралевиц С.Э. **Нейтринная вспышка белого карлика, поглощаемого первичной черной дырой** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

В результате поглощения первичной черной дырой (ПЧД) массой $M \geq 5 \cdot 10^{14}$ г белого карлика (БК) образуется черная дыра звездной массы. Поглощение БК сопровождается нейтринной вспышкой с энергией, достигающей 10^{52} эрг, являющейся эффективным методом для наложения новых ограничений на распространенность ПЧД массой $M \leq 10^{15}$ г. Рассчитаны временные характеристики такой нейтринной вспышки.

Библиогр. 19 назв., ил. 2.

УДК 538.248

Башмаков И.А., Доросинец В.А., Лукашевич М.Г., Тихонова Т.Ф. **Суперпарамагнетизм нанокластеров кобальта в углеродной матрице** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Путем термообработки при температуре 700 °С карбоксилированной целлюлозы, содержащей катионы кобальта в углеродной матрице, получены нанокластеры кобальта со средним размером 10 нм. Обнаружен переход нанокластеров из ферромагнитного состояния в суперпарамагнитное при повышении температуры. Из кривых магнитного гистерезиса и температурной зависимости намагниченности нанокластеров рассчитаны температура блокировки $T_B = 70$ К и константа магнитной анизотропии $K_{eff} = 5,0 \cdot 10^4$ Дж/м³. Значения этих параметров хорошо согласуются со значениями для нанокластеров кобальта, полученных с использованием стандартных методик.

Библиогр. 11 назв., ил. 3.

УДК 539.2116.2

Пилипенко В.А., Пономарь В.Н., Петлицкая Т.В. **Влияние механических напряжений на зарядовые свойства двухслойного конденсаторного диэлектрика $\text{SiO}_2 - \text{Ta}_2\text{O}_5$** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Дан анализ изменения зарядовых состояний в тройной системе $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{SiO}_2 - \text{Si}$ в зависимости от ее механических напряжений. Установлен факт увеличения эффективного встроенного заряда на границе $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{SiO}_2$ в зависимости от роста кривизны пластины. Для объяснения этого явления рассмотрен ряд предположений: влияние механических напряжений на изменение ширины запрещенной зоны в полупроводнике, изменение растворимости примеси в напряженных областях, а также ионизация примеси и избыточных атомов кремния в аморфных пленках двуокиси кремния при охлаждении образцов от температуры окисления до комнатной. Дана оценка вклада каждого явления в изменение величины заряда изучаемой трехслойной структуры.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 548.736.15:621.385

Соловьев В.С., Гусаков Г.А., Крехотень О.В. **Использование TiN в качестве барьерного слоя в системе металлизации Ti/TiN/Au при формировании низкоомных контактов к алмазу** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Исследован состав тонкопленочной системы контактной металлизации Ti/TiN, осажденной на синтетический алмаз методом магнетронного напыления. Показано, что термообработка в вакууме при 700–800 °С приводит к формированию слоя карбида титана в области границы раздела алмаз/титан. Азот из нитридного слоя не диффундирует в слой карбида и прилегающую область алмаза. Слой TiN является также диффузионным барьером для титана и золота, нанесенного на поверхность нитрида.

Библиогр. 8 назв., ил. 2.

УДК 535.343+543.422.4:51+546.659

Требников А.Г., Дик Т.А., Костюк Н.Н. **ИК- и масс-спектроскопическое исследование ацетилацетонатов самария** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Представлены ИК- и масс-спектры следующих ацетилацетонатов самария: $\text{Sm}_3\text{L}_8\cdot 3\text{HL}$ и SmL_3 . На основании ИК- и масс-спектрометрических данных показано, что хелатокомплекс $\text{Sm}_4\text{L}_8\cdot 3\text{HL}$ имеет олигомерную структуру в соответствии с его химической формулой.

Библиогр. 8 назв., табл. 3.

УДК 517.51: 517.53

Старовойтов А.П. **Примеры непрерывных функций с заданным порядком наилучших рациональных приближений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ действительных чисел, которая строго убывает и сходится к нулю, построена непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция g такая, что $R_{2n}(g)$ и a_n имеют одинаковый порядок убывания при $n \rightarrow \infty$. Здесь $R_n(g)$ – наилучшие приближения на отрезке $[-1, 1]$ в равномерной норме функции g алгебраическими рациональными функциями степени не выше n .

Библиогр. 12 назв.

УДК 517.955

Ломовцев Ф.Е. **Задачи Коши для факторизованных дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Функциональным методом доказана корректная сильная разрешимость задач Коши для факторизованных дифференциальных уравнений с переменными областями определения

операторных коэффициентов. Получена формула их сильных решений $u = \overline{M_1^{-1}} \cdots \overline{M_m^{-1}} \mathfrak{F}$.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.984

Мартон М.В. **Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Вычислены существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера оператора взвешенного сдвига $T(x_1, x_2, \dots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, \dots)$ из банаховой алгебры ограниченных операторов $B(l_1)$ с использованием тонкой структуры спектра этого оператора, определяемой с помощью состояний операторов по Тейлору – Халбергу при различных условиях на веса a_k этого оператора. А именно рассматриваются следующие четыре случая: а) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| > 0$; б) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| = 0$; в) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно; г) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Библиогр. 9 назв.

УДК 517.965+517.96

Рулинский Ю.Г. **Парные интегральные уравнения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматриваются некоторые парные интегральные уравнения типа свертки на конечных отрезках. Метод исследования заключается в том, что на основе теоремы Винера – Пэли интегральные уравнения сводятся к задачам нахождения целых функций экспоненциального типа по некоторым функциональным соотношениям.

Библиогр. 1 назв.

УДК 517.9

Рингель Д.Е. **Мнемочисла и мнемовекторы. I** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Для изучения колец мнемочисел вводится функтор мнемификации из категории нормированных пространств над нетривиально нормированным полем в категорию ультраметрических банаховых модулей над ультраметрическим коммутативным кольцом мнемочисел, которое является мнемификацией основного поля. Найдено полное нетривиально нормированное подполе в кольце мнемочисел, изоморфное полю формальных степенных рядов над

основным полем, так что кольцо мнемочисел – банахова алгебра над ним, а соответствующие модули – банаховы пространства.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977

Кравченко Ж. М. **Метод коррекции приближенного решения в одной задаче гарантированной оптимизации систем управления** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматривается задача гарантированной оптимизации с краткосрочными прогнозами возмущений. Приводится метод построения приближенного и оптимально-позиционного решения с использованием небольшого количества вспомогательных векторов.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 539.3

Савенков В. А. **Растяжение анизотропной пластинки с круговым изотропным ядром с разрезом на линии контакта** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматривается задача о распределении напряжений вблизи изотропного круглого ядра в анизотропной пластинке при наличии разреза на линии контакта. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений относительно контактных напряжений, которая решается численно.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 517.925.42

Ахраменко В. К. **Необходимое условие центра для одной A_3 -системы в случае сложной особой точки** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений, для которой начало координат есть особая монодромная точка. Получены необходимые условия центра.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.911.5

Леваков А. А. **Ограниченные решения линейных стохастических систем** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Получен критерий ограниченности в среднеквадратическом всех решений линейных нестационарных и стационарных стохастических дифференциальных систем.

Библиогр. 16 назв.

УДК (620.18+620.17+539.26):669.76

Шепелевич В. Г., Демидчик А. В. **Структура и микротвердость фольги сплавов $Bi-(8-12)$ ат. % Sb , полученных сверхбыстрой закалкой из расплава** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Представлены результаты исследования зеренной структуры и микротвердости фольги бинарных сплавов $Bi-(8-12)$ ат. % Sb , полученных сверхбыстрой закалкой из расплава, а также легированных оловом и теллуrom сплавов на основе $Bi-12$ ат. % Sb . Установлено, что свойства фольги зависят от способа их получения, а также от концентрации компонентов в сплаве.

Библиогр. 4 назв., ил. 3.

УДК 517.977

Коваленок Н. Н. **Оптимизация динамических систем в классе релейных управлений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Рассматривается задача оптимального управления в классе релейных уравнений. Доказаны условия оптимальности и описан алгоритм решения задач, учитывающий специфику релейного регулятора.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977

Калитин С.Б., Калитин Б.С. **Оптимальное управление помехой в задаче преследования на плоскости** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Решается задача оптимизации динамической системы в классе ограниченных управлений с ограниченными производными. Реализация осуществляется сведением исходной задачи к задаче линейного программирования более высокого порядка и поиску решения в классе кусочно-непрерывных управлений. Результаты иллюстрируются на примере оптимизации системы пятого порядка.

Библиогр. 1 назв., ил. 2.

УДК 512.542

Близнац И.В. **О критических p -композиционных формациях** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1.

Дается описание минимальных p -композиционных не \mathfrak{H} -формаций, т. е. формаций \mathfrak{F} таких, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но в классе групп \mathfrak{H} содержатся все собственные p -композиционные формации из \mathfrak{F} , где \mathfrak{H} – формация классического типа.

Библиогр. 3 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Umreiko D.S., Sytko V.V., Pakatashkin V.I.</i> Temperature dependence of zero-photon lines parameters in fluoride uranyl compounds	3
<i>Voropay E.S., Samtsov M.P., Kaplevski K.N., Lugovski A.A.</i> Spectral changes due to the formation of Ion pairs in Indotricarbocyanine dyes.....	9
<i>Yakutovich N.G., Anishchik V.M.</i> Numerical solution of the reverse Shrodinger task with the use of genetic algorithm	15
<i>Kuharchik P.D., Serdyuk V.M., Titovitsky I.A.</i> On the solution of a problem of resonator modes diffraction on a transverse slot by a projecting method.....	18
<i>Drosdov S.N., Kukharchik P.D., Rudnitsky A.S.</i> The selective properties of the tetrahedral resonator.....	22
<i>Tikhomirov V. V., Yuralevich S. E.</i> Neutrino burst of white dwarf being absorbed by a primordial black hole	27
<i>Bashmakov I.A., Dorosinets V.A., Lukashevich M.G., Tichonova T.F.</i> Superparamagnetism of cobalt nanoclusters embedded in carbon matrix	33
<i>Pilipenko V.A., Ponomar V.N., Petliskaja T.V.</i> Influence of mechanical tensions on charge properties of two layer capacitor dielectric $\text{SiO}_2 - \text{Ta}_2\text{O}_5$	37
<i>Solov'yev V.S., Guskov G.A., Krekoten' O.V.</i> Use of TiN as the barrier layer in a Ti/TiN/Au metallization system under formation of the low resistant ohmic contacts to diamond	42
<i>Trebnikov A.G., Dick T.A., Kostyuk N.N.</i> The investigation of the samarium acetylacetonates by the IR- and Mass-spektroskopy	45

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Starovoitov A.P.</i> Examples of continuous functions with the given order of the best rational approximations.....	53
<i>Lomovisev F.E.</i> Cauchy problems for factorized differential-operator equations with variable domains.....	57
<i>Marton M.V.</i> Fredholm, Weyl and Browder essential spectrum of a weighted shift operator	61
<i>Rulinskii Yu.G.</i> Pair integral equations.....	66
<i>Ringel D.E.</i> Mnemonumbers and mnemovectors. I.....	71
<i>Kravchenko J.M.</i> Correction of approximate decision in problem of guaranteed optimization of control system.....	76
<i>Savenkov V.A.</i> Tension of anisotropic plate with circular isotropic inclusion with crack at the interface	80
<i>Akhramenka V. K.</i> Necessary condition of a center for one A_3 -system in a case of a composite singular point	84
<i>Levakov A.A.</i> Bounded solutions of linear stochastic systems.....	88

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Shepelevich V.G., Demidchik A.V.</i> The structure and microhardness of rapidly solidified Bi-(8-12) at. % Sb alloys	93
<i>Kovalionok N.N.</i> Optimization of dynamic system with bang-bang control	96
<i>Kalitin S.B., Kalitin B.S.</i> Optimal control with the hindrance in the task of the pursuit on a plane.....	98
<i>Bliznets I.V.</i> On critical p -composition formations	101

CHRONICLE

<i>Manak I.S.</i> Student research laboratory of semiconductor lasers was organized 10 years ago.	103
---	-----

OUR JUBILEE

Aleksei Adamovich Gusak.....	105
------------------------------	-----

OUTSTANDING SCIENTISTS OF BELARUS

Anton Nikiforovich Sevchenko (to the 100-th anniversary of birth).....	107
Vladimir Ivanovich Krylov	109
L.V. Volod'ko – scientist, teacher, science manager (to the 75-th anniversary of birth).....	110
Summary.....	112