

ISSN 0321-0367

# ВЕСТНИК

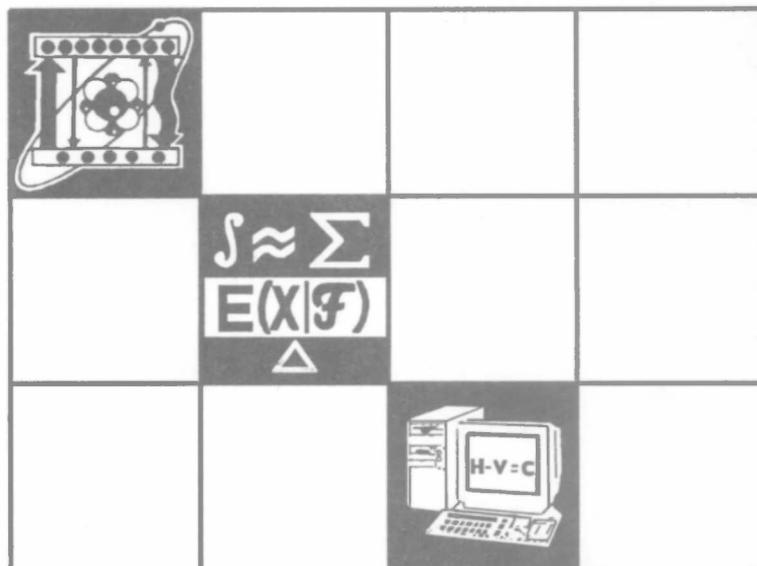
Белорусского государственного  
университета

---

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Информатика

3/2002



# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

<i>Зажокин А.А., Захаров А.П., Комяк А.И., Умрейко Д.С.</i> Низкотемпературные спектры люминесценции смешанных твердых растворов тринитратов уранила.....	3
<i>Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Радько А.Е., Шевченко К.А.</i> Импульсный спектрофлуориметр наносекундного диапазона.....	7
<i>Болотько Л.М., Покаташкин В.И., Денисенко В.Н., Красовский А.Н., Тавгин В.Л., Турьшиев Л.Н.</i> Спектрофотометрическая установка для создания и анализа озоносодержащих газовых смесей.....	13
<i>Бабичев С.Г., Буров Л.И., Клищенко А.П.</i> Проявление природы формирования виртуального состояния в спектрально-поляризационных зависимостях сечения двухфотонного поглощения.....	18
<i>Власукова Л.А., Комаров Ф.Ф., Дидык А.Ю.</i> Радиационные повреждения в кристаллах InP, облученных ионами ксенона с энергией 595 МэВ.....	24
<i>Булойчик Ж.И., Червяковский К.И., Юдина Н.А.</i> Анализ зубных паст методом атомно-эмиссионной спектроскопии.....	29
<i>Попечиц В.И.</i> Спектрально-люминесцентные характеристики гамма-облученных растворов трикарбонцианиновых красителей.....	33
<i>Углов В.В., Злоцкий С.В., Воропай Е.К.</i> Структура многослойных покрытий TiN/ZrN на стали, полученных методом вакуумно-дугового осаждения.....	37
<i>Поздняков Д.В.</i> Когерентность электронных волн в квантовой яме двухбарьерной резонансно-туннельной структуры.....	41
<i>Минько А.А., Безбородов В.С., Ковганко Н.Н., Лапаник В.И.</i> Получение, спектральные и жидкокристаллические свойства новых 3-амил-5-арил-2-изоксазолинов.....	44

## МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Журавков М.А., Павлов С.В.</i> К моделированию состояния породных массивов с произвольными системами трещин.....	51
<i>Булгаков Н.Г.</i> О критериях устойчивости автономных систем.....	58
<i>Калитин Б.С.</i> Равномерная интегральная непрерывность неавтономных дифференциальных уравнений.....	64
<i>Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В.</i> Дискретный аналог метода Пикара.....	68
<i>Кужельная А.И., Монастырский П.И.</i> О выборе управляющих параметров и оптимизации методов редукации и марш-алгоритма.....	72
<i>Ле Ван Линь, Садовский А.П.</i> Проблема центра и фокуса для одной кубической системы в случае нулевых собственных значений линейной части.....	75
<i>Корсантия О.Б.</i> Сильная изохронность центра системы Лъенара.....	80
<i>Бухтояров С.Е., Емеличев В.А.</i> Мера устойчивости векторной линейной траекторной задачи с совокупно-экстремальным принципом оптимальности.....	84
<i>Кравцов В.М.</i> Оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.....	87
<i>Романовский Ю.Я.</i> Пространства, порожденные собственной группой Пуанкаре.....	90
<i>Ляликов А.С.</i> Приближение гильбертовских функций рациональными операторами типа Валле Пуссена.....	95
<i>Лавринович Л.И.</i> Коррекция приближенных решений задачи гарантированной оптимизации систем управления.....	101
<i>Штин С.Л.</i> Об одной классификации вещественных последовательностей.....	103
Рефераты.....	107
Указатель статей, опубликованных в 2002 г. ....	111

---

# **ВЕСТНИК**

**Белорусского государственного  
университета**

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года  
один раз в четыре месяца

---

**СЕРИЯ 1**

**Физика  
Математика  
Информатика**

**3/2002**

Сентябрь

МИНСК  
БГУ

**Главный редактор В.Г. РУДЬ**

Редакционная коллегия серии:

**В.М. АНИЩИК** (*ответственный редактор*),  
**Л.М. БАРКОВСКИЙ** (*зам. ответственного редактора*), **В.Г. БА-**  
**РЫШЕВСКИЙ**, **В.В. БОБКОВ** (*зам. ответственного редактора*),  
**Е.С. ВОРОПАЙ**, **М.А. ЖУРАВКОВ**, **Э.И. ЗВЕРОВИЧ**, **А.И. КА-**  
**ЛИНИН**, **Ф.Ф. КОМАРОВ**, **А.И. КОМЯК**, **В.И. КОРЗЮК**, **П.Д. КУ-**  
**ХАРЧИК**, **П.А. МАНДРИК**, **В.И. МИРОНЕНКО**, **С.Г. МУЛЯРЧИК**,  
**И.В. СОВПЕЛЬ**, **А.К. ФЕДОТОВ**, **Ю.С. ХАРИН**, **С.М. ЧЕРЕН-**  
**КЕВИЧ**, **А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **Н.И. ЮРЧУК**

Учредитель:

Белорусский государственный университет

Регистрационный № 805

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2002. № 3

На русском и белорусском языках

Адрес редакции: 220050, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 209-54-00.  
E-mail [vestnikbsu@bsu.by](mailto:vestnikbsu@bsu.by)

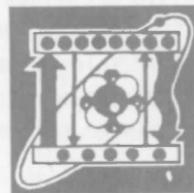
Редактор *И.А. Лешкевич*  
Корректор *Л.А. Меркуль*  
Технический редактор *Ю.И. Денисов*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Р.Е. Овсянниковым* и *Ю.И. Денисовым*

Подписано в печать 30.09.02. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 9,8. Усл. кр.-отт. 10,15. Уч.-изд. л. 10,25.  
Тираж 400 экз. Заказ 1154. Цена 2259 р.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в РУП «Издательский центр БГУ».  
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.  
ЛП № 461 от 14.04.01.

© Вестник БГУ, 2002



УДК 535.373:546.791.6

А.А. ЗАЖОГИН, А.П. ЗАЖОГИН, А.И. КОМЯК, Д.С. УМРЕЙКО

## НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СПЕКТРЫ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ СМЕШАННЫХ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ТРИНИТРАТОВ УРАНИЛА

The character of luminescence centers formed in mixed solid solutions of uranyl trinitrate compounds has been studied by spectral and luminescent methods. It has been demonstrated that positions of the first three excited electronic transitions correlate well with the concentration of isomorphous mixture.

Опосредованное влияние окружения на спектральные характеристики иона уранила особенно ярко прослеживается в люминесценции молекул, содержащих различную катионную подсистему. Она непосредственно не связана с  $\text{UO}_2^{2+}$ , тем не менее в значительной мере определяет характер тонкой структуры электронных спектров. Наглядным примером тому являются смешанные твердые растворы (СТР) нитратных солей уранила и, в частности,  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с примесью  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$  (или наоборот) в широком диапазоне изменений концентраций обеих компонент.

Начальные участки спектров люминесценции смешанных твердых растворов  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  приведены на рис. 1. Их анализ показал, что при изменении концентрации примеси происходит сначала плавное смещение максимумов полос в длинноволновую сторону и уменьшение интенсивности тех из них, которые принадлежат невозмущенным (идеальным молекулам)  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ . Одновременно с этим в длинноволновой области спектра появляются новые полосы, которые смещаются по мере увеличения концентрации примеси примерно до 35–40 %. При более высокой концентрации последней упомянутое смещение замедляется, что связано с появлением и усилением полос, принадлежащих уже примесным центрам свечения. Отнесение их к указанным центрам сделано на основании анализа спектров люминесценции СТР  $(\text{CsRb}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ , для которого наблюдается аналогичная зависимость изменения положения максимумов полос в спектре от концентрации примеси, но смещение происходит уже в коротковолновую сторону.

Сравнительные данные положения максимумов наиболее коротковолновых полос в спектрах люминесценции  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  и  $(\text{CsRb}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  приведены в табл. 1.

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость положения максимумов некоторых полос в спектрах люминесценции от концентрации примеси. Вид-

но, что экспериментальные точки хорошо укладываются на прямую в области малых концентраций примеси как для  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ , так и для  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$  (прямые 1 и 2 соответственно). В области больших концентраций примеси, при которых основное соединение уже играет роль примеси, прямые экстраполированы.

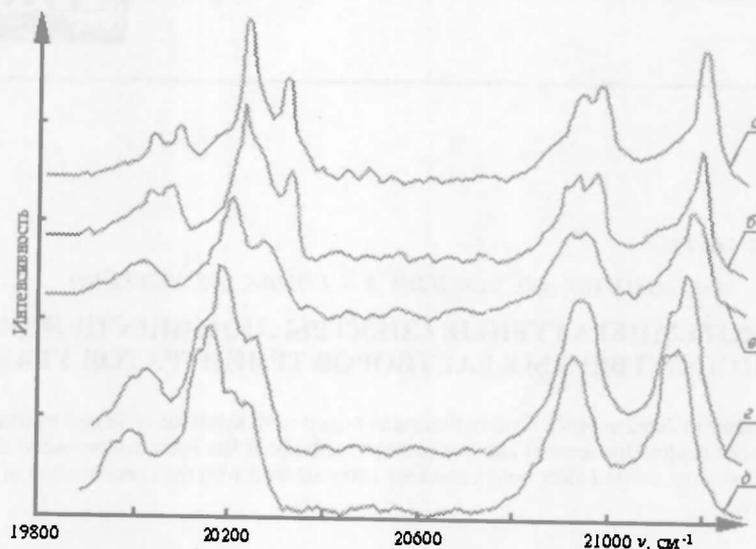


Рис. 1. Начальные участки спектров люминесценции ( $T=77\text{ K}$ ) кристаллов  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с примесью  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ : а – естественная; б–д – 2 %, 10, 20, 30 % соответственно

Таблица 1  
Положение максимумов наиболее коротковолновых полос в спектрах люминесценции  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  и  $(\text{CsRb}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  при  $T=77\text{ K}$

$\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$		$\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$	
Состав, %*	$\nu, \text{cm}^{-1}$	$\nu, \text{cm}^{-1}$	Состав, %*
100	21 194	–	Естественная
98	21 190	–	2
90	21 175	–	10
85	21 163	–	15
80	21 152	–	20
75	21 140	–	25
66	21 126	–	34
50	–	21 116	50
34	–	21 108	66
24	–	21 101	76
9	–	21 093	91
2	–	21 089	98
Естественная	–	21 088	100

Примечание. Приводится концентрация основного продукта; \* обозначена примесь.

В табл. 1 приведены данные с учетом закономерности изменения положения максимума коротковолновой полосы от концентрации примеси  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  (прямая 1, см. рис. 2). Если сопоставить величины частот электронных переходов при изменении концентрации примеси на 9 % с наблюдаемыми на опыте, то окажется, что они практически совпадают. Следовательно, можно считать, что центры свечения, наиболее сильно проявляющиеся в спектре люминесценции кристалла  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с естественной концентрацией примеси, обусловлены примесью  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ . Аналогичные результаты получены нами и для  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ .

Подобная закономерность наблюдается и в спектрах возбуждения. Анализ экспериментальных результатов, приведенных на рис. 3, подтверждает такое заключение. Спектры возбуждения  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  охватывают область трех первых возбужденных состояний  $\text{UO}_2^{4+}$  [1]. Из рис. 3 видно, что при увеличении концентрации примеси положение центра тяжести полос смещается в длинноволновую сторону. Положение максимумов полос, соответствующих первым трем

электронным переходам в спектрах возбуждения  $(\text{Rb}^*\text{Cs})\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  и  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  при различной концентрации примеси, приведены в табл. 2. Здесь же обозначены положения максимумов полос, соответствующих первым трем электронным переходам.

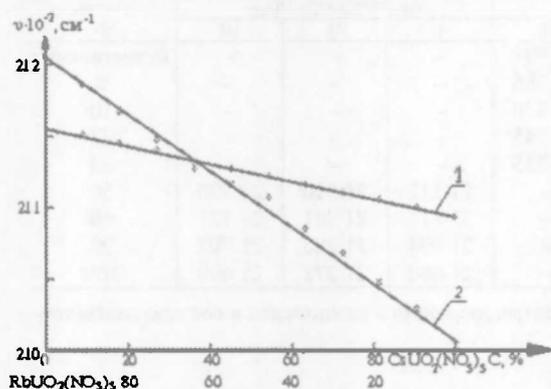


Рис. 2. Зависимость положения максимумов полос, соответствующих первому чисто электронному переходу, в спектрах люминесценции твердых растворов  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  (1) и  $(\text{CsRb}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  (2) от концентрации примеси при  $T=4,2$  К

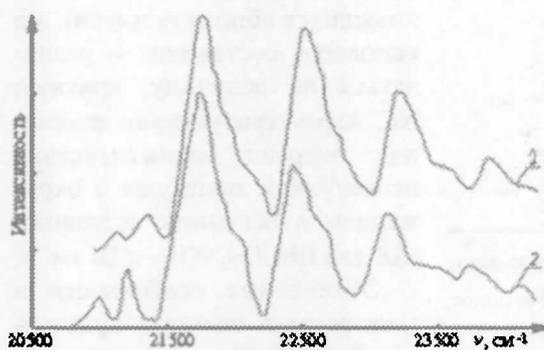


Рис. 3. Спектры возбуждения образцов  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с естественной концентрацией примеси (1) и примесью 30 %  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$  (2) ( $\nu_{\text{пер}}=20\,300$   $\text{см}^{-1}$ ,  $T=77$  К)

Зависимости положения максимумов полос для первых трех электронных переходов от концентрации примеси в спектрах возбуждения  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  представлены на рис. 4, из которого следует, что в области изменения концентрации примеси от естественной до 40 % экспериментальные результаты хорошо укладываются на прямые 1, 2, 3 для I, II и III электронных переходов соответственно. Нарушение линейности при больших концентрациях примеси связано с проявлением полос, принадлежащих примесным центрам. То же самое наблюдается и для  $(\text{Rb}^*\text{Cs})\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ .

Для нахождения частот, отвечающих чисто электронным переходам в различных центрах, рассмотрены спектры поглощения кристаллов  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  и  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с естественной концентрацией примеси, с использованием при этом ранее полученных результатов по спектрам возбуждения соответствующих твердых растворов.

Если воспользоваться методикой, примененной нами для спектров люминесценции, то окажется, что большое количество максимумов полос в спектрах возбуждения довольно хорошо совпадают по частоте с ординатами точек прямых 1, 2, 3 (см. рис. 4) при изменении концентрации примеси на 9 %. Аналогичные результаты получены и при анализе спектра поглощения кристалла  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с естественной концентрацией примеси.

Можно считать, что в основном состоянии взаимодействие молекулы со своим окружением является более сильным, чем в возбужденном. Если учесть, что смещение уровней при изменении концентрации примеси происходит примерно на одну и ту же величину, то наблюдаемый эффект смещения в спектрах скорее всего обусловлен преимущественным влиянием окружения на молекулы в основном состоянии.

Положения максимумов полос, соответствующих первым трем (I–III) чисто электронным переходам  $\nu_{00}$  в спектрах возбуждения  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  и  $(\text{Rb}^*\text{Cs})\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  при 77 К

Состав, %*	$\nu_{00}(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$			$\nu_{00}(\text{Rb}^*\text{Cs})\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$			Состав, %*
	I	II	III	I	II	III	
100	21 194	21 385	21 791	–	–	–	Естественная
98	21 190	21 380	21 786	–	–	–	2
90	21 174	21 363	21 770	–	–	–	10
77	21 148	21 340	21 745	–	–	–	23
67	21 125	21 328	21 735	–	–	–	33
50	–	–	–	21 117	21 310	21 726	50
40	–	–	–	21 111	21 301	21 721	60
10	–	–	–	21 094	21 285	21 702	90
Естественная	–	–	–	21 088	21 278	21 696	100

Примечание. Приводится концентрация данного компонента в составе соответствующего твердого раствора.

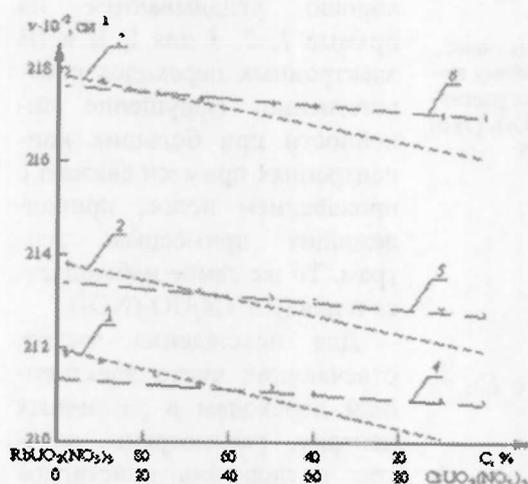


Рис. 4. Зависимость положения максимумов полос, соответствующих первым трем электронным переходам, в спектрах возбуждения твердых растворов  $(\text{RbCs}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  (1, 2, 3) и  $(\text{CsRb}^*)\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$  (4, 5, 6) от концентрации примеси при  $T=77$  К

Тогда уровни, соответствующие первым трем возбужденным состояниям, будут располагаться на одинаковом расстоянии от нулевого уровня для всех молекул (идеальных и находящихся вблизи примеси), а в основном состоянии — различаться на величину, кратную  $\Delta E$ , характеризующую изменение энергии взаимодействия исследуемой молекулы с окружением в основном состоянии ( $\Delta E$  для  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3 \approx 20 \text{ см}^{-1}$ ).

Отмеченные особенности в электронных спектрах кристалла  $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$  с примесью  $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ , а также и в других соединениях уранила с примесями можно объяснить,

предположив, что в них существуют группы различным образом расположенных примесных и возмущенных примесью молекул. При изменении концентрации примеси меняется соотношение между числом различных центров, и это соответственно будет отражаться в спектрах. Наличие в спектрах люминесценции и поглощения кристаллов с естественной концентрацией примеси явно выраженных центров свидетельствует, что даже при малых концентрациях примеси имеется определенная вероятность близкого расположения двух, трех и большего количества примесных молекул [2]. Группы по-разному расположенных и имеющих различное количество примесных и дефектных молекул представляют так называемые кластеры, если использовать понятие, применяемое в теории примесных молекулярных кристаллов.

1. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения: В 2 т. Т. 1. Спектры, строение. Мн., 1981.

2. Сугаков В.И. // Оптика и спектроскопия. 1966. Т. 1. № 1. С. 52.

Поступила в редакцию 25.03.2002.

*Александр Анатольевич Зажогин* – кандидат физико-математических наук.

*Анатолий Павлович Зажогин* – доктор физико-математических наук, доцент кафедры лазерной физики и спектроскопии.

*Анатолий Иванович Комяк* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии.

*Дмитрий Степанович Умрейко* – доктор физико-математических наук, профессор (НИИФП БГУ им. А.Н. Севченко).

УДК 535.37:537.86

*Е.С. ВОРОПАЙ, М.П. САМЦОВ, К.Н. КАПЛЕВСКИЙ, А.Е. РАДЬКО, К.А. ШЕВЧЕНКО*

### ИМПУЛЬСНЫЙ СПЕКТРОФЛУОРИМЕТР НАНОСЕКУНДНОГО ДИАПАЗОНА

A complete system of equipment for spectral and kinetic measurements in nanosecond time range has been developed and manufactured. This modular system is based on the statistical single-quantum method of time analysis for nonstationary luminescence fluxes formed on pulse excitation of the objects under study.

Использование методов кинетической спектроскопии в оптико-физических, биологических и других исследованиях позволяет получать существенно более обширную информацию об изучаемых системах по сравнению с чисто спектральными измерениями. Особенно актуально применение данных методов при изучении сложных молекулярных систем и комплексов с бесструктурными полосами поглощения и испускания. Информационные возможности исследований с временным разрешением спектрально-люминесцентных параметров таких систем позволяют выявлять при анализе более тонкие различия состояния излучающих центров [1, 2]. Для сложных органических молекул характерное время затухания флуоресценции обычно лежит в наносекундном диапазоне. Несмотря на актуальность исследований с высоким временным разрешением, необходимая аппаратура отечественными производителями серийно не выпускается. В данной работе описан разработанный и созданный спектрометрический комплекс для спектрально-кинетических измерений в наносекундном временном диапазоне [3]. В основу функционирования комплекса положен статистический одноквантовый метод временного анализа нестационарных потоков люминесценции [4, 5], возбуждаемой излучением импульсного источника. Этот метод дает возможность осуществлять регистрацию слабых и предельно слабых (на уровне единичных квантов) световых потоков.

Разработанный комплекс ориентирован на решение широкого круга задач спектрально-кинетического люминесцентного анализа. Не уступая по своим характеристикам аналогичным изделиям зарубежных фирм (Photochemical Research Associates Inc., Канада и Edinburg Instruments Ltd., Шотландия), он имеет значительно меньшую стоимость и при его разработке применены некоторые новейшие решения и современные комплектующие изделия. В основу построения прибора положен модульный принцип, что, с одной стороны, позволяет легко реализовать такую конфигурацию спектрофлуориметра, которая требуется для конкретных физико-технических приложений. С другой стороны, посредством совершенствования отдельных ключевых узлов можно улучшать параметры аппаратуры в целом, помимо этого, существуют возможности их замены на узлы со схожими

функциональными назначениями, но существенно иными параметрами. В частности, при ориентации на изучение нелинейных процессов, требующих чаще всего высоких интенсивностей возбуждающего излучения, достаточно просто произвести замену импульсной лампы на соответствующий лазерный источник.

Структурно спектрофлуориметр состоит из трех функционально законченных частей: оптико-электронной системы (ОЭС), электронного блока (ЭБ) и персональной электронно-вычислительной машины (ПЭВМ), состыкованной с электронным блоком через последовательный асинхронный интерфейс RS-232C.

Система ОЭС обеспечивает возбуждение исследуемого образца излучением заданного спектрального состава, выделение в требуемом спектральном интервале потока фотонов люминесценции и преобразование его в поток электрических импульсов с эквивалентной статистической структурой. ЭБ выполняет многоканальный анализ распределений временных интервалов между импульсами возбуждения и электрическими импульсами, вызванными регистрируемыми квантами света, а также поканальный счет этих импульсов. Кроме того, данный блок управляет всеми составными частями комплекса и обеспечивает их электроэнергией с заданными параметрами. ПЭВМ контролирует работу электронного и оптического оборудования, а также процессы накопления, обработки и вывода экспериментальных данных в требуемой форме.

Структурная схема ОЭС представлена на рис. 1. В нее входят источник излучения – лампа – (Л), монохроматор возбуждения (МВ), монохроматор регистрации (МР), камера образцов (КО) и одноквантовый фотоприемник (ОФП).

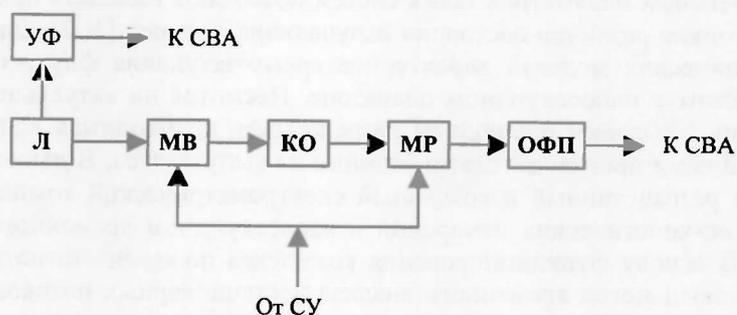


Рис. 1. Структурная схема оптико-электронной системы спектрофлуориметра: УФ – усилитель-формирователь; Л – лампа; МР, МВ – монохроматор возбуждения и монохроматор регистрации; КО – камера образцов; ОФП – одноквантовый фотоприемник

В качестве источника излучения в базовом варианте использована газоразрядная импульсная лампа, частота следования импульсов которой может плавно регулироваться. При необходимости через разрядный промежуток прокачивается воздух или азот. Длительность импульсов возбуждения по полувысоте в диапазоне от 200 до 500 нм составляет менее 1 нс, а в диапазоне от 500 до 800 нм – ~2 нс (параметры зависят от расстояния между электродами), число фотонов за вспышку –  $\sim 10^{11}$ – $10^{12}$ . В спектральном распределении излучения лампы выделяются две области: первая – 250–450 нм, обусловленная в основном свечением газа, и вторая – 450–870 нм.

Наиболее интенсивное свечение соответствует линиям азота, максимальную интенсивность имеет линия 336,9 нм. Во второй области обнаружен ряд спектральных линий с длиной волны 750, 779, 823, 845, 870 нм, малой интенсивности (1–3 % от интенсивности линии 336,9 нм). В этой области, а также на фоновой части первой области спектра лампы отмечается спорадическое появление длительного послесвечения, учащающегося при увеличении времени наработки лампы. Наиболее вероятной причиной возникновения послесвечения является образование на электродах окисной пленки вольфрама.

Выделение требуемого спектрального интервала возбуждения и регистрации обеспечивается монохроматорами типа МСД-1. Сканирование длин волн осуществляется системой управления (СУ). В зависимости от условий конкретного эксперимента в световой поток могут дополнительно вводиться светофильтры. Световые пучки возбуждения и исследуемого свечения формируются камерой образцов, а преобразование световых квантов в электрические импульсы выполняется одноквантовым фотоприемником.

Фотометрическая схема камеры образцов построена на основе зеркальной оптики [4, 6]. Она позволяет осуществлять регистрацию в направлении, перпендикулярном направлению возбуждающего светового потока, а также «на отражение» или с передней грани образца, что существенно для оптически плотных, а также рассеивающих образцов. Применение отражательной зеркальной оптики позволяет избежать влияния хроматической аберрации во всем рабочем спектральном диапазоне. Камера образцов рассчитана на их исследование в стандартных сантиметровых прямоугольных кюветах или меньших по размеру цилиндрических кюветах. Держатель образца термостатирован. Отделение образцов съемное, что позволяет проводить исследования и с нестандартными образцами различной конфигурации.

Электронный блок состоит из трех основных частей: системы временного анализа (СВА), модуля управления (МУ) и системы питания. СВА, в свою очередь, состоит из отдельных модулей, что служит для облегчения обслуживания. В СВА входят модули преобразователя время-амплитуда (ПВА) со встроенным селектором старт-импульсов, стон-селектор (СС) и модуль аналого-цифрового преобразователя (АЦП). В модуле АЦП также находится интерфейс для связи с модулем управления, через который происходит управление всей системой временного анализа. В состав (МУ) входят микроконтроллер, схема управления монохроматорами, интерфейс с СВА и схема интенсивметров. Микроконтроллер служит для формирования сигналов управления монохроматорами, СВА и интенсивметрами по командам с персонального компьютера (ПК).

По сравнению с аналогичным вариантом прибора, описанным в работе [4], было решено отказаться от использования конструктива КАМАК для уменьшения массогабаритных характеристик, удешевления электронной части комплекса, а также упрощения стыковки блоков между собой. Кроме того, в отличие от предыдущего варианта прибора, в котором применен интерфейс «общая шина», требующий установки в ПК специального контроллера, нами был использован последовательный асинхронный интерфейс, совместимый с RS-232C.

Выбор интерфейса RS-232C обусловлен наличием в стандартном ПК не менее одного контроллера последовательного интерфейса, а также малым числом сигнальных линий. Поддержка интерфейса RS-232C встроена в большинство операционных систем, что облегчает создание специализиро-

ванного программного обеспечения в соответствии с требованиями конкретного применения комплекса.

Данный интерфейс обладает относительно небольшой пропускной способностью – около 5кБ при скорости 57 600 бит/с. В нашем случае передаются 12-разрядные слова (номера каналов) по два байта, что соответствует 2500 словам в секунду, однако при частоте возбуждения до 30 кГц интенсивность не должна превышать 1000 имп./с для выполнения условий статистической достоверности [4, 5], что дает достаточный запас скорости передачи данных через интерфейс. В связи с нерегулярным поступлением стоп-импульсов в контроллере программно реализован буфер типа FIFO на 16 байт для согласования скоростей прихода этих импульсов (минимальный интервал 33 мкс при 30 кГц возбуждении) со скоростью передачи данных через интерфейс. Как показали испытания, такое решение обеспечивает передачу информации без потерь реализаций при интенсивности стоп-импульсов до 2000 в секунду, тогда как более высокая интенсивность может приводить к потерям информации о некоторых стоп-импульсах, но при условии случайной потери это не отражается на окончательном результате.

СУ служит для формирования временной диаграммы импульсов тока, подаваемых на обмотки шаговых двигателей монохроматоров типа МСД-1, и для определения состояния датчиков положения решеток монохроматоров.

Схема интенсиметра состоит из двух счетчиков на 20 разрядов. Она позволяет производить подсчет старт- и некоррелированных стоп-импульсов за заданный промежуток времени, что дает возможность контролировать функционирование прибора и облегчает настройку оптической части.

Система временного анализа обеспечивает преобразование временных интервалов между электрическими импульсами, поступающими по стартовому и стоповому каналам в двоичные коды, и накопление гистограмм чисел выпадения каждого из возможных кодов.

Структурная схема системы временного анализа приведена на рис. 2.

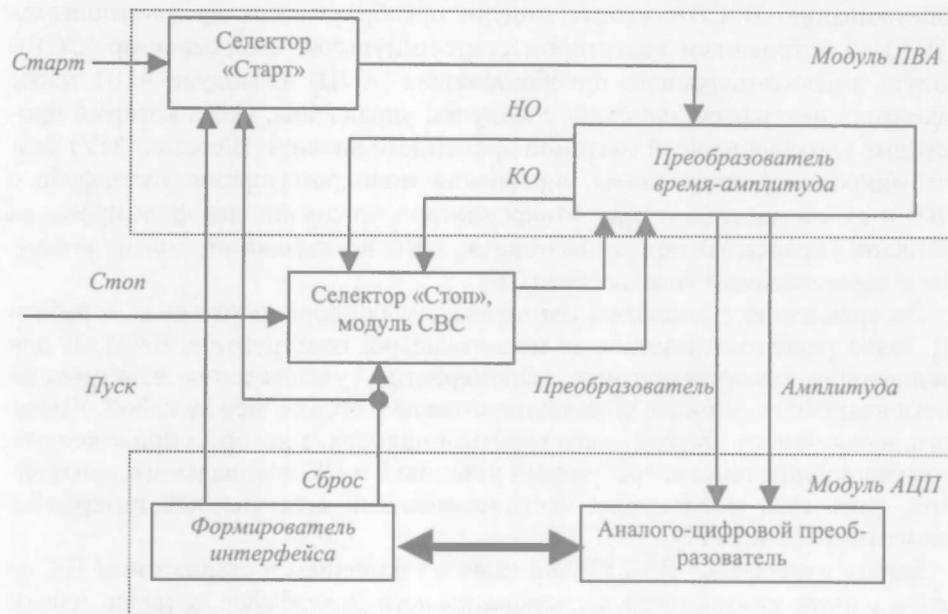


Рис. 2. Структурная схема системы временного анализа

Селектор «Старт» обеспечивает отбор из входной последовательности, связанной с оптическими импульсами возбуждения люминесценции, и стандартизированных сигналов, задающих начало каждой обрабатываемой реализации вторичного потока фотонов люминесценции. При помощи селектора «Стоп» осуществляется отбор в заданном временном интервале регистрации импульсов окончания анализируемых временных интервалов. На вход данного селектора подаются стандартизированные импульсы одно-квантового фотоприемника (ОФП). Разблокируется селектор «Стоп» сигналом «НО» от преобразователя время-амплитуда, который генерируется по выходному импульсу селектора «Старт», а блокируется сигналом «КО» при выходе за границы анализируемого временного интервала.

Преобразователь и двенадцатиразрядный аналого-цифровой преобразователь образуют одношкальный измерительный контур, предназначенный для получения цифровых эквивалентов измеряемых временных интервалов до 120 нс. Первый из этих модулей трансформирует данные интервалы в импульсы напряжения пропорциональной амплитуды, второй преобразует эти импульсы по сигналу «Преобразование» в двенадцатиразрядные двоичные коды.

Формирователь интерфейса обеспечивает связь СВА с модулем управления и расположен на модуле АЦП. Он создает команды управления и передает данные от АЦП в модуль управления.

По командам с ПЭВМ модуль управления обеспечивает формирование сигналов управления монохроматорами возбуждения и регистрации, передачу информации о состоянии монохроматоров в обратном порядке, выполнение по команде цикла регистрации заданного количества импульсов возбуждения и передачи в ПЭВМ информации о зарегистрированных импульсах флуоресценции, подсчет количества импульсов возбуждения и флуоресценции за заданный промежуток времени. Практически все функции выполняются однокристалльным микроконтроллером (AT89C51) и программируемой логической матрицей. Это позволяет значительно упростить устройство системы и обеспечить большую гибкость в реализации выполняемых функций. Блок силовых ключей в модуле управления согласует сигналы, поступающие с контроллера интерфейса, для управления обмотками шаговых двигателей монохроматоров по амплитуде и току.

Для управления узлами измерительного комплекса, накопления гистограмм анализируемых временных распределений и проведения необходимых расчетов используются вычислительные ресурсы ПЭВМ, входящей в состав спектрофлуориметра.

Спектрофлуориметр выполняет три основные функции по регистрации измерения:

- кинетики затухания люминесценции;
- спектров люминесценции в определенном временном окне (мгновенных спектров);
- стационарных спектров флуоресценции (для более эффективной работы в данном режиме целесообразна замена импульсного источника возбуждения на непрерывный).

Кроме того, предусмотрены следующие вспомогательные режимы работы: 1) в качестве системного справочника, 2) настройки и планирования эксперимента, 3) обработки данных измерений, 4) вывода данных измерений.

В первом случае пользователю предоставляется возможность вызова на экран дисплея ПЭВМ из дисковой памяти справочной информации об уст-

ройстве спектрофлуориметра и работе с ним. Во втором режиме выполняется восстановление зарегистрированных функций затухания люминесценции в экспоненциальном базисе с числом компонент разложения до трех, вычитание шума. Режим настройки и планирования эксперимента дает возможность выбора требуемого типа измерений, установки режимов регистрации, спектральных параметров, условий завершения измерений и др. В четвертом случае обеспечивается вывод данных измерений и параметров настройки на дисплей управляющей ПЭВМ или печатающее устройство в цифровой, символьной и графической формах, пользователю также предоставляется возможность просмотра содержимого экспериментальной информации, записанной им ранее на дисковом носителе.

Разработанный комплекс, как уже отмечалось, предназначен для измерения временных параметров люминесценции, что требует его аттестации по данным параметрам. Основные сложности здесь обусловлены отсутствием надежных эталонов. Это связано с наличием определенных жестких требований, предъявляемых к такого рода образцовым средствам. Прежде всего эталон должен иметь известное время высвечивания. При этом удобнее и значительно проще проводить аттестацию с помощью эталона с моноэкспоненциальным затуханием. Он должен быть либо легко воспроизводимым, либо обладать высокой стабильностью и сохраняемостью. Для исключения необходимости учета процессов перепоглощения эталон должен иметь небольшую (около десятых долей) оптическую плотность, слабое перекрытие поглощения и флуоресценции, а также полосы поглощения в области спектра излучения источника возбуждения аттестуемого прибора. Перечисленные требования являются общими. Помимо них возникают и дополнительные, обусловленные спецификой аппаратуры, режимами регистрации и т. п. Всем этим требованиям неплохо удовлетворяет эталон, предложенный в [7]. Он, однако, больше приемлем для времени разрешения порядка десятков наносекунд. В данной работе для оценки временного разрешения комплекса выполнены измерения времени жизни флуоресценции оксазина-17 (ОН-100) и кумарина-30 (КН-25) в этаноле (рис. 3). В качестве тушителя был использован иодистый калий. Линейная, согласующаяся с уравнением Штерна – Фольмера зависимость времени жизни флуоресценции от концентрации КИ свидетельствует

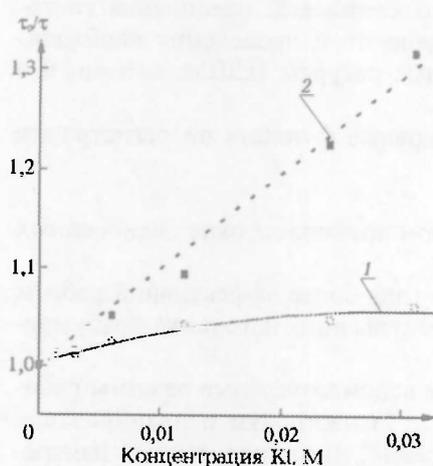


Рис. 3. Зависимость времени жизни флуоресценции оксазина-17 (1) (ОН-100) в этаноле и кумарина-30 (2) (КН-25) в этаноле от концентрации КИ

о динамическом характере тушения флуоресценции оксазина-17. В случае кумарина-30 наблюдается отклонение от линейного закона изменения времени жизни флуоресценции от концентрации КИ. Для одних и тех же образцов проводились измерения данного показателя и относительного квантового выхода их флуоресценции. Анализ полученных результатов показал, что кривые зависимости времени жизни и квантового выхода флуоресценции от концентрации тушителя симбатны друг другу. При этом кинетика затухания флуоресценции красителей была для всех образцов одноэкспоненциальной, что свидетельствует о возможности ис-

пользования таких зависимостей в целях метрологической аттестации аппаратуры. С использованием результатов выполненных измерений было определено, что минимальное время разрешения примерно соответствует 0,2 нс.

В целом разработанный комплекс характеризуется следующими основными параметрами: спектральный диапазон возбуждения – 220–800 нм, регистрации – 270–800 нм, временной диапазон – 0,5–120 нс, минимальное разрешающее время –  $2 \times 10^{-10}$  с.

1. Воропай Е.С., Дмитриев С.М., Ермалицкий Ф.А., Чернявский А.Ф. // Люминесцентный анализ в медико-биологических исследованиях. Рига, 1986. С. 35.

2. Лакович Дж. Основы флуоресцентной спектроскопии. М., 1986.

3. Воропай Е.С., Самцов М. П., Каплевский К.Н. и др. Международная конференция по люминесценции: Тез. докл. М., 2001. С. 86.

4. Воропай Е.С., Данилевич В.В., Чернявский А.Ф. // ЖПС. 1993. № 58. С. 13.

5. Володько Л.В., Демчук М.И., Зажогин А.П. и др. // ЖПС. 1972. Т. 166. № 6. С. 1001.

6. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Тезисы докладов международной конференции «Прикладная оптика-94». СПб., 1994. С. 83.

7. А. с. 1718058 СССР, МКИ G 01 Н 21/64 / Воропай Е.С., Нижников В.В., Торпачев П.А. и др. // Открытия. Изобретения. 1992. № 9.

Поступила в редакцию 23.05.2002.

*Евгений Семенович Воропай* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии.

*Михаил Петрович Самцов* – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИПФП БГУ им. А.Н. Севченко.

*Кирилл Николаевич Каплевский* – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии. Научный руководитель – Е.С. Воропай.

*Александр Евгеньевич Радько* – младший научный сотрудник НИИПФП БГУ им. А.Н. Севченко.

*Константин Анатольевич Шевченко* – научный сотрудник НИИПФП БГУ им. А.Н. Севченко.

УДК 543.422

*Л.М. БОЛОТЬКО, В.И. ПОКАТАШКИН, В.Н. ДЕНИСЕНКО, А.Н. КРАСОВСКИЙ,  
В.Л. ТАВГИН, Л.Н. ТУРЬШЕВ*

### **СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ СОЗДАНИЯ И АНАЛИЗА ОЗОНОСОДЕРЖАЩИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ\***

The universal laboratory setup permitting to create and to dose ozone-air and ozone-oxygen mixtures with the continuous check of concentration of ozone on the basis of special spectrophotometer is submitted. The kinetics of ozone degradation in the used gas optical cavity is determined. The possibilities of created setup for study of ozone interaction with various molecular systems are discussed.

В приземной атмосфере в естественных условиях абсолютная концентрация озона составляет  $\sim 5,4 \cdot 10^{11}$  см<sup>-3</sup>, относительная –  $\sim 20$  ppb (млрд<sup>-1</sup>). Озон является одним из важнейших компонентов химических и фотохимических процессов, происходящих в приземной атмосфере. Окисление – главный очищающий механизм нижней атмосферы, в котором озон занимает ключевое положение, инициируя эти процессы [1]. В то же время озон как сильнейший окислитель в количествах, превышающих естественный

\* Авторы статьи – научные работники ННИЦМО БГУ.

уровень, губителен для растительного и животного мира. По токсичности он относится к наиболее опасным веществам (первый класс опасности) [2].

Концентрация приземного озона может быть определена химическим, электрохимическим, хемилюминесцентным, колориметрическим или оптическим способом. Оптический способ, основанный на законе Бугера – Ламберта – Бера, характеризуется высокой селективностью и чувствительностью, но относительно дорогостоящ.

Оперативный контроль загрязненности приземной атмосферы может быть осуществлен при помощи газовых датчиков на основе полупроводниковых структур, меняющих свои электрические параметры под воздействием одного или нескольких газов-загрязнителей. Относительная дешевизна таких датчиков, компактность и возможность сопряжения с электронными системами накопления и обработки данных делают их перспективными для систем экологического мониторинга воздушной среды. Однако создание полупроводниковой структуры, избирательно чувствительной к определенным газам-загрязнителям приземной атмосферы (например, к озону), представляет собой сложную задачу. Ее решение предусматривает наличие или создание калиброванных газовых смесей (с возможностью контроля концентрации их компонент), что особенно важно для смесей с легко разрушающимся озоном.

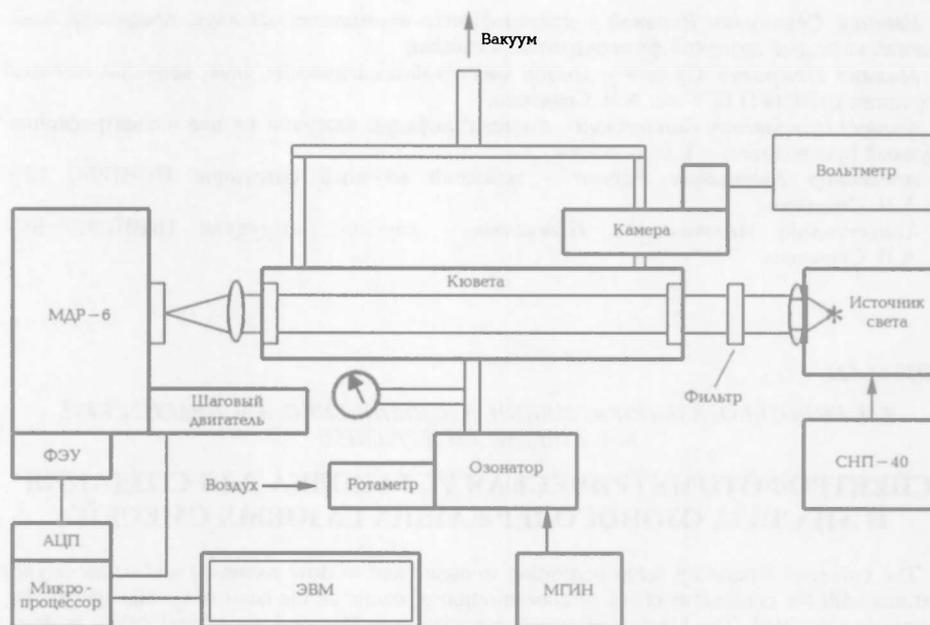


Рис. 1. Блок-схема лабораторной установки для получения озono-воздушной смеси и ее контроля

Представленная на рис. 1 универсальная спектрофотометрическая установка, разработанная сотрудниками Национального научно-исследовательского центра мониторинга озоносферы БГУ (ННИЦМО БГУ), позволяет получать озono-воздушные и озono-кислородные газовые смеси и контролировать содержание в них озона. Отличительной особенностью установки является возможность создания различных заданных концентраций озона в рабочей кювете в сочетании с другими газами посредством подачи в ее объем малых составляющих атмосферы, таких как  $\text{NO}_x$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}$  и др.

Основные функциональные узлы установки – генератор озона, оптическая газовая кювета с системой вакуумирования и наполнения газовыми смесями, однолучевой автоматизированный спектрофотометр.

В описываемой установке использован генератор озона, в основу работы которого положен барьерный разряд – такой разряд в газе, когда электроды отделены от газовой смеси диэлектриком [3, 4]. Этот эффективный способ отличается экономичностью и широко распространен на практике. Озонатор состоит из трех стеклянных трубок разного диаметра, вставленных друг в друга коаксиально и сваренных между собой. Центральная трубка, заполненная ртутью, является подвижным электродом. Второй электрод образован внешней и средней трубками и заполнен электролитом. Разрядный промежуток представляет собой зазор величиной 1,2 мм между внутренней и средней трубками, имеющий отводы для подачи и вывода газов. Поскольку электрическая цепь разорвана, питание озонатора осуществляется переменным током. На электроды подается импульсное напряжение величиной 4 кВ с изменяемой частотой следования импульсов при длительности импульса 0,12 мкс. Выход озонатора соединен непосредственно с оптической газовой кюветой. В разрядный промежуток подается осушенный атмосферный воздух или кислород, поток которого нормируется ротаметром в пределах 0+0,3 л/мин при перепаде внутреннего и внешнего давлений 0,9 атм.

Контроль концентрации озона в газовых смесях осуществляется с помощью однолучевого спектрофотометра. Самой интенсивной полосой поглощения озона является полоса Хартли (200–300 нм) (рис. 2) [5]. Ее форма практически повторяет контур Гаусса со слабой структурой в максимуме, расположенном в области 255,5 нм. Сечение поглощения озона  $\sigma$  в пределах полосы изменяется на несколько порядков и в максимуме составляет  $1,2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$  [5]. В качестве источника зондирующего излучения использована галогенная лампа накаливания типа КГМ. Коротковолновая граница излучения лампы достигает 230 нм. С помощью корректирующего интерференционного фильтра спектр зондирующего излучения лампы КГМ сформирован в виде полосы, перекрывающейся с полосой поглощения Хартли молекул озона (см. рис. 2). Система регистрации состоит из двойного дифракционного монохроматора МДР-6, фотоприемника (ФЭУ-106), предусилителя, 12-разрядного аналого-цифрового преобразователя (АЦП), микропроцессорного блока и персонального компьютера.

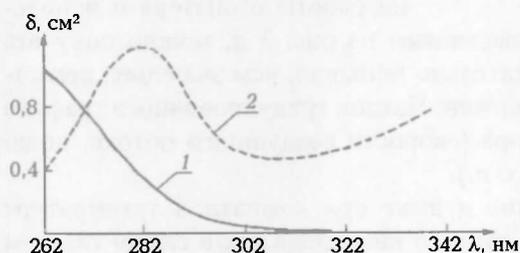


Рис. 2. Длинноволновое крыло полосы Хартли (сечение поглощения) – 1 и распределение интенсивности зондирующего излучения, сформированное интерференционным фильтром из излучения лампы типа КГМ (относительные единицы) – 2

Измерение поглощения озона проводится на пяти рабочих длинах волн – 275, 278, 281, 284 и 287 нм, расположенных в области сформированного максимума излучения лампы. Используя известное соотношение

$$n = \ln(I_0/I) / l\sigma,$$

где  $I_0$  – интенсивность падающего света,  $I$  – интенсивность прошедшего света,  $\sigma$  – сечение поглощения ( $\text{см}^2$ ),  $l$  – толщина поглощающего слоя (см), можно вычислить концентрацию озона в кювете  $n$ .

$I_0$  измеряется в условиях, когда кювета наполнена воздухом, прошедшим ячейку разрушения озона.

С помощью озонатора кювета наполняется озono-воздушной или озono-кислородной смесью, после чего определяется  $I$ . Длина используемой кварцевой оптической кюветы 96,8 см. Кювета вакуумируется с помощью форвакуумного насоса. Расчет концентрации озона для каждой из выбранных рабочих длин волн с последующим усреднением проводится по приведенной формуле в автоматическом режиме. При этом контроль стабильности интенсивности зондирующего излучения осуществляется на трех длинах волн – 322, 326, 330 нм, находящихся вне полосы поглощения озона, и программно учитывается при расчетах концентрации озона.

Совокупность погрешностей, вносимых в результаты измерений элементами спектрофотометра, позволяет уверенно регистрировать изменение интенсивности зондирующего излучения, связанное с поглощением озона, на уровне  $1 \cdot 10^{-3}$ . В результате спектрофотометрическая установка позволяет обнаруживать в газовой смеси предельно допустимые концентрации озона ( $\sim 2,0 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$  – уровень ПДК) и регистрировать более высокие.

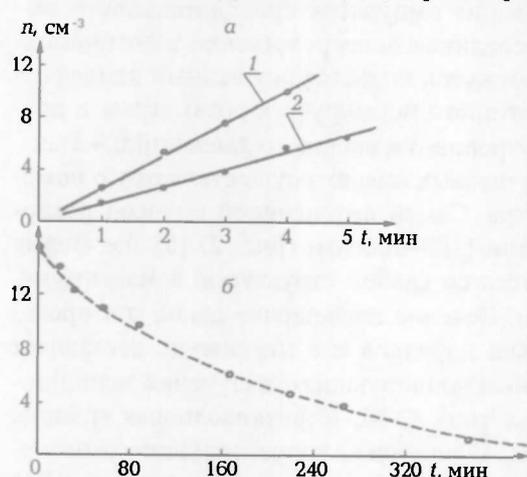


Рис. 3. Зависимость концентрации озона ( $\times 10^{13}$ ) в кювете от времени функционирования озонатора (частота следования импульсов питающего напряжения: 1 – 25 Гц; 2 – 75 Гц) – а; изменение концентрации озона в используемой кварцевой кювете (уменьшение в 10 раз за 6 ч 15 мин) – б

Установлено, что при постоянном потоке воздуха и заданной мощности питания озонатора концентрация молекул озона в кювете линейно зависит от времени работы озонатора (рис. 3 а). Это свидетельствует о незначительном разрушении озона в процессе транспортирования в кювету и проведения измерений его концентрации. Таким образом, приведенный на рисунке график представляет собой калибровочную зависимость используемой системы "озонатор – газовая кювета", которая устанавливает соответствие концентрации озона в кювете и времени работы озонатора. Основываясь на времени работы озонатора и используя

зависимости, аналогичные приведенным на рис. 3 а, можно получать заданные концентрации озона значительно меньшие, чем значения, регистрируемые спектрофотометром установки. Наклон градуировочного графика зависит от режима работы озонатора (скорости воздушного потока, подаваемой электрической мощности и т. п.).

Озон – неустойчивое соединение и даже при комнатной температуре разлагается с образованием молекулярного кислорода как в самом газовом объеме, так и на поверхности сосуда (гетерогенный распад). Сравнительно инертные к озону материалы имеют коэффициент разложения озона  $\gamma$ , характеризующий вероятность его распада на поверхности материала, много меньше единицы. Для кварца как наиболее инертного к озону материала при  $T=293 \text{ К}$  и давлении 0,1–1 Торр  $\gamma$  варьируется в пределах  $1,5 \cdot 10^{-11}$ – $7 \cdot 10^{-11}$  [6, 7]. Для сравнения: стекло пассивированное, также относящееся к слабоактивным озоноразрушающим материалам, имеет при тех же условиях ко-

эффицент разложения озона  $\gamma \approx 10^{-9}$  [8]. При комнатных температурах разложение (пиролиз) озона в объеме, как правило, не учитывается [8]. В таких условиях преобладает разложение озона на поверхности окружающих материалов. Использование кварцевой кюветы – необходимое условие получения достоверных результатов при измерении концентрации озона в озоносодержащих газовых смесях. Для других деталей и узлов установки, контактирующих с озоном, при невозможности применения кварца необходимо использовать фторопласты. Коэффициент разложения озона на них достаточно низок и составляет  $(7-9) \cdot 10^{-8}$  [8].

Рис. 3 б демонстрирует кинетику разрушения озона в используемой оптической газовой кювете. Представленная установка обеспечивает хорошие возможности для изучения механизмов распада озона в зависимости от параметров окружающей среды. На основании полученных данных оценено время сохранения озono-воздушных смесей в используемой кювете. Уменьшение концентрации озона в два раза для кюветы значительного диаметра (15 см) происходит в течение двух часов. Увеличение времени сохранения озono-воздушной смеси в используемой кварцевой системе возможно при оптимизации условий содержания озона, например за счет более тщательной пассивации системы.

Основная полость кюветы соединена с дополнительной кварцевой камерой. В нее могут помещаться исследуемые полупроводниковые газовые датчики, установленные на вакуумном электроразъеме. Исследование датчиков может проводиться как в стационарных условиях, так и в потоке газа. Возможно проведение экспериментов по определению пороговой чувствительности и построению градуировочных графиков различных озоночувствительных датчиков.

Все это придает представленной спектрофотометрической установке универсальность и дает возможность ее широкого использования для изучения взаимодействия озона с различными молекулярными системами в любых агрегатных состояниях.

1. Хргиан А.Х., Кузнецов Г.И. Проблема наблюдений и исследований атмосферного озона. М., 1981.
2. Атмосфера: Справ. Л., 1991.
3. Филиппов Ю.В., Вобликова В.А., Пантелеев В.И. Электросинтез озона. М., 1987.
4. Самойлович В.Г., Гибалов В.И., Козлов К.В. Физическая химия барьерного разряда. М., 1989.
5. Molina L.T., Molina M.J. // J. Geoph. Res. 1986. Vol. 91. № 13. P. 14501.
6. Ткалич В.С., Климовский А.О., Лисаченко А.А. // Кинетика и катализ. 1984. Т. 25. № 5. С. 1109.
7. Ткаченко С.Н. Фотолиз красным светом и термическое разложение озона и его смесей в газовой фазе: Автореф. дис. ... канд. хим. наук. М., 1984.
8. Лунин В.В., Попович М.П., Ткаченко С.Н. Физическая химия озона. М., 1998.

Поступила в редакцию 07.12.2001.

**Леонид Максимович Болотко** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник.

**Виктор Иннокентьевич Покаташкин** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник.

**Виктор Николаевич Денисенко** – заведующий лабораторией.

**Александр Николаевич Красовский** – кандидат физико-математических наук, директор.

**Виталий Леонидович Тавгин** – научный сотрудник.

**Леонид Николаевич Турышев** – заведующий лабораторией.

**ПРОЯВЛЕНИЕ ПРИРОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВИРТУАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В СПЕКТРАЛЬНО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ СЕЧЕНИЯ ДВУХФОТОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ**

The influence of vibronic structure of the final state on the virtual intermediate state forming for the two-photon absorption in complex molecules has been theoretically investigated. It has been shown that such influence is substantially displayed in polarization dependences of the two-photon cross-section.

Спектроскопия двухфотонного поглощения (ДФП) привлекает внимание исследователей, ибо позволяет изучать состояния, недоступные методам однофотонной спектроскопии [1]. Использование двух потоков возбуждающего излучения создает возможность для вариаций экспериментальных условий как по частотам, так и по поляризациям [2], другими словами, спектр ДФП является многомерным. Более того, вследствие нелинейности процесса ДФП он существенным образом зависит и от статистических свойств возбуждающего излучения [3, 4], а наличие двухфотонного поглотителя значительно изменяет статистические характеристики пропускаемого (или в случае лазерной системы – генерируемого) излучения [5]. Спектроскопия ДФП широко использовалась в исследовании атомных систем при снятии доплеровского уширения спектральных линий [6]. В последнее время вновь значительно возрастает интерес к процессам ДФП в сложных молекулярных соединениях в связи с возможностью их пространственной локализации в макроскопически малом объеме. Обеспечение высокого пространственного разрешения делает перспективным использование ДФП для разработки систем хранения и обработки информации [7], получения путем фотополимеризации микроструктур для оптоэлектронных систем [8], объемной флуоресцентной микроскопии биологических объектов [9], разработки методов фотодинамической терапии [10]. Одним из следствий этого является поиск путей повышения эффективности ДФП либо за счет создания новых сложных соединений с высоким значением сечения поглощения [11], либо за счет использования полимерных матриц с внедренными молекулами красителей [12]. Достижения в этом направлении столь существенны, что удалось реализовать получение генерации при двухфотонной накачке [12, 13].

Процесс ДФП обычно рассматривается как ступенчатый переход поглощающей системы из одного стационарного состояния в другое через промежуточное виртуальное состояние [14]. В общем случае в формирование такого состояния вносят вклад все состояния системы, однако точный учет их вкладов практически невозможен даже для очень простых поглощающих систем – атомов и простейших молекул [14]. Поэтому принимаются упрощенные модели, связанные с ограничением числа комбинирующих состояний, вносящих наибольший вклад [15]. Самой простой и удобной для расчетов является модель одного промежуточного состояния, которая достаточно точно описывает процесс ДФП в том случае [16], когда частота одного из потоков близка к частоте одного из реальных состояний исследуемой системы. Применительно к сложным молекулам построение подобных упрощенных моделей сталкивается с проблемой [2] относительного вклада колебательных состояний комбинирующих уровней по сравнению с вкладом близлежащих электронных состояний.

В наиболее явной форме эта проблема проявляется при двухфотонном переходе из основного состояния  $S_0$  на первое возбужденное  $S_1$ . По аналогии с атомными системами основная роль в формировании виртуального промежуточного состояния обычно отводится [2] соответствующим электронно-колебательным состояниям второй полосы поглощения  $S_2$ . Однако не существует никакого запрета на участие в формировании промежуточного состояния колебательных состояний определенной симметрии первого возбужденного (а в принципе, и основного) состояния. Безусловно, дипольный момент для чисто колебательных переходов существенно меньше, однако значительно меньшая величина частотной расстройки может привести к тому, что вклад этих состояний может быть того же порядка (или даже больше) вклада второго возбужденного состояния  $S_2$ . В настоящей работе проведена теоретическая оценка возможности выявления механизма формирования промежуточного состояния по исследованию поляризационных зависимостей в спектрах ДФП сложных молекул. Такая постановка проблемы связана, с одной стороны, с интерпретацией слабого различия спектров двух- и однофотонного возбуждения как для первой, так и для второй электронных полос практически для всех сложных молекул [2]. С другой стороны, ответ на вопрос о механизме формирования промежуточного состояния позволит сформулировать новые подходы к созданию (синтезу) сложных молекулярных соединений с высоким значением сечения ДФП.

Рассмотрим раствор сложных молекул, в котором распространяются два потока монохроматического излучения, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют условию ДФП между основным  $S_0$  и первым возбужденным  $S_1$  электронными состояниями молекул. Сечение ДФП определяется соотношением

$$\sigma = C \int |e_1 \hat{s}_{01} e_2|^2 d\Omega, \quad (1)$$

где  $\hat{s}_{01}$  – тензор ДФП, который имеет вид

$$\hat{s}_{12} = \sum_k \left( \frac{\mu_{0k} \cdot \mu_{k1}}{\omega_{0k} - \omega_1} + \frac{\mu_{k1} \cdot \mu_{0k}}{\omega_{0k} - \omega_2} \right). \quad (2)$$

Здесь  $C$  – нормировочный множитель, величина которого для исследований поляризационных зависимостей не имеет принципиального значения,  $e_1$  и  $e_2$  – векторы поляризации возбуждающих потоков,  $\mu_{mn}$  и  $\omega_{mn}$  – дипольный момент и частота перехода между состояниями  $m$  и  $n$ , точка между векторами в выражении (2) означает их диадное произведение, а интегрирование в выражении (1) имеет смысл ориентационного усреднения. В выражении (2) в знаменателях опущены спектральные ширины комбинирующих состояний в связи с предположением малости их величин относительно спектральных расстроек.

Результатом изотропного ориентационного усреднения является существенное упрощение структуры выражения (1), причем его можно привести к весьма простой форме, если считать, что возбуждающие потоки поляризованы линейно, а все векторы дипольных моментов лежат примерно в одной плоскости. Последнее допущение соответствует модели плоской поглощающей молекулы, что выполняется для большого числа сложных молекул, хотя может быть использовано и для более широкого круга объектов. В результате выражение (1) сводится к виду [17]

$$\sigma = 2C \left[ (1 + 2 \cos^2 \psi) (\text{Tr} \hat{s}_{01})^2 - (3 + \cos^2 \psi) \det \hat{s}_{01} \right],$$

где  $\psi$  – угол между векторами поляризации  $e_1$  и  $e_2$ , а  $\text{Tr} \hat{s}_{01}$  и  $\det \hat{s}_{01}$  – след и детерминант тензора ДФП  $\hat{s}_{01}$ .

Для дальнейшего расчета инвариантов тензора ДФП  $\hat{s}_{01}$  примем ряд дополнительных допущений, которые не вносят существенных изменений в характер полученных результатов, однако позволяют значительно упростить процедуру расчета и форму окончательных результатов последующего анализа. (В конце статьи будет отмечено, как отражается на конечных результатах и выводах отказ от сделанных далее допущений.)

Будем пренебрегать колебательной структурой основного  $S_0$  и второго возбужденного  $S_2$  состояний. Это допущение позволяет избежать суммирования как по наборам колебательных подуровней этих двух состояний при определении инвариантов тензора ДФП  $\hat{s}_{01}$ , так и по системе комбинирующих колебательных подуровней основного  $S_0$  и первого возбужденного  $S_1$  состояний, для которых выполняется условие двухфотонного резонанса. Для первого возбужденного состояния  $S_1$  рассматриваются только два набора колебательных состояний различной симметрии, обеспечивающих выполнение правил отбора для каждого из последовательных однофотонных переходов. Обозначим частоту перехода с первого электронного состояния на колебательный подуровень с номером  $k$  как  $\omega_k$ . Тогда, присваивая конечному колебательному состоянию индекс  $f$ , обозначим разность между колебательными частотами конечного состояния и текущего промежуточного состояния как  $\delta\omega_k = \omega_f - \omega_k$ . В этом случае дипольный момент перехода из основного состояния на  $k$ -й колебательный подуровень первого возбужденного можно представить в виде [18]

$$\mu_{0k} = (\mu_{01} + a_1 \omega_k) F(\omega_k),$$

где  $\mu_{01}$  – дипольный момент чисто электронного перехода,  $a_1$  – некоторый вектор, постоянный для данного типа колебаний и составляющий угол  $\phi_1$  с направлением  $\mu_{01}$ , но по величине существенно меньший ( $|a_1| \ll |\mu_{01}|$ ), а  $F(\omega_k)$  – функция, определяемая франк-кондоновским перекрытием колебательных волновых функций. Такое представление базируется на слабой зависимости поляризации флуоресценции по спектру поглощения. Для дипольного момента перехода  $\mu_{kf}$  мы используем представление такого же типа с тем отличием, что величина  $\omega_k$  заменяется на  $\delta\omega_k$ , вектор  $a_1$  – на  $a_2$ , а первое слагаемое полагается равным нулю. На функцию  $F(\omega_k)$  накладывается единственное условие, обеспечивающее выполнение соотношения

$$\omega_k, \delta\omega_k \ll \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2.$$

Такое свойство функции  $F(\omega_k)$  позволяет пренебречь колебательной структурой дипольного момента перехода между первым и вторым возбужденными состояниями, если выполняется условие  $\omega_{21} \geq \omega_0$ , что, как правило, и имеет место.

Перейдем теперь непосредственно к расчету сечения ДФП для двух моделей формирования промежуточного состояния.

1. Модель колебательных состояний (МКС). Виртуальный уровень формируется только электронно-колебательными подуровнями конечного электронного состояния  $S_1$  соответствующей симметрии, удовлетворяющей правилам отбора.

2. Модель электронного состояния (МЭС). Виртуальный уровень формируется более высоким электронным состоянием  $S_2$ .

В результате расчета для МКС получаем:

$$\sigma_v = \frac{2C\alpha^2}{\omega_0^2} \sum_{k,n \neq f} F_{kn} \{ [8(1+2\cos^2\psi)M_{kn} + (3+\cos^2\psi) \times \\ \times \mu_{01}^2 F(\omega_k) F(\omega_n) \sin^2\varphi] \times \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2 + \\ + [4(1+2\cos^2\psi)M_{kn} + (3+\cos^2\psi) \times \mu_{01}^2 F(\omega_k) F(\omega_n) \sin^2\varphi] \}, \quad (3)$$

где

$$M_{kn} = F(\omega_k) F(\omega_n) (\mu_{01}^2 \cos^2\varphi + 2\mu_{01}\alpha\omega_k \cos\varphi + \alpha^2\omega_k\omega_n), \\ F_{kn} = \delta\omega_k \delta\omega_n F(\delta\omega_k) F(\delta\omega_n),$$

$2\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , а вследствие различного типа симметрии колебаний величины  $\alpha_i$  и  $\cos\varphi_i$  можно заменить [19] на усредненные (с учетом весовых коэффициентов) по всем типам колебаний значения. Следует подчеркнуть, что окончательная форма выражения (3) приведена для случая  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

В случае МЭС получаем:

$$\sigma_c = 2C \left( \frac{N\mu_{02}\mu_{21}}{\omega_0 + \omega_{12}} \right)^2 \{ [8(1+2\cos^2\psi)\cos^2\theta + (3+\cos^2\psi)\sin^2\theta] \times \\ \times \left( \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_{12}} \right)^2 \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \right)^2 + [4(1+2\cos^2\psi)\cos^2\theta + (3+\cos^2\psi)\sin^2\theta] \},$$

где  $N$  – эффективное число колебательных подуровней второго электронного состояния с учетом франк-кондоновского перекрытия,  $\mu_{02}$  – матричный элемент дипольного момента перехода из основного  $S_0$  во второе электронное состояние  $S_2$ ,  $\mu_{21}$  – со второго – на конечный уровень состояния  $S_1$ ,  $\theta$  – угол между векторами указанных матричных элементов,  $\omega_{12}$  – усредненная частота перехода из любого колебательного подуровня второго электронного состояния в конечное. Здесь также полагалось  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Оценки показывают, что для обеих моделей значения сечений примерно одинаковы и не обладают характерными спектральными особенностями. Поэтому проведем анализ полученных выражений с точки зрения поляризационных зависимостей, тем более, что для спектроскопии ДФП поляризационные методы обеспечивают весьма высокую информативность [1, 2, 14, 15]. Для удобства сравнения полученных результатов введем функцию относительного сечения ДФП:

$$\rho(\psi, \Delta\omega) = \frac{\sigma(\psi, \Delta\omega)}{\sigma(\theta, \theta)}$$

Явный вид этой функции для каждой из моделей не приводится ввиду ее громоздкости. Для анализа достаточно отметить, что относительное сечение  $\rho(\psi, \Delta\omega)$  линейно зависит от величины  $(\Delta\omega/\omega_0)^2$  – квадрата относительной расстройки. Рассчитаем тангенс угла наклона графика относительного сечения к оси квадратов относительных расстроек в рамках обеих моделей. В случае МКС:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_v = \frac{1}{4} \frac{\sum_k \sum_n F_{kn} \{8(1 + 2 \cos^2 \psi) M_{kn} + (3 + \cos^2 \psi) \mu_{01}^2 F(\omega_k) F(\omega_n) \sin^2 \varphi\}}{\sum_k \sum_n F_{kn} (3M_{kn} + \mu_{01}^2 F(\omega_k) F(\omega_n) \sin^2 \varphi)}, \quad (4)$$

а в случае МЭС:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_e = \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_{12}} \right)^2 \frac{8(1 + 2 \cos^2 \psi) \cos^2 \theta + (3 + \cos^2 \psi) \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + 1}. \quad (5)$$

Как следует из выражений (4) и (5), для МКС должна наблюдаться ярко выраженная линейная зависимость  $\operatorname{tg} \varepsilon$  от  $\cos^2 \psi$ , тогда как в случае МЭС  $\operatorname{tg} \varepsilon$  практически не зависит от  $\cos^2 \psi$ . Для иллюстрации этого рассмотрим случай параллельности всех дипольных моментов переходов, т. е. положим  $\varphi = \theta = 0$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varepsilon_v = \frac{2}{3} (1 + 2 \cos^2 \psi), \quad \operatorname{tg} \varepsilon_e = \frac{2}{3} \left( \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_{12}} \right)^2 (1 + 2 \cos^2 \psi), \quad (6)$$

т. е. угол наклона для МЭС, как минимум, на порядок (с учетом сделанных допущений) меньше, чем для МКС. Это отнюдь не означает, что в случае МЭС не наблюдается поляризационная зависимость сечения ДФП, просто в этом случае она слабо зависит от расстройки частот комбинирующих волн.

Теперь сделаем несколько замечаний относительно возможности обобщения полученных результатов. При учете различных типов колебаний в первом возбужденном состоянии появляется дополнительное суммирование по этим типам, что приводит к существенно более громоздкому виду выражений для  $\operatorname{tg} \varepsilon$ , однако при условии параллельности всех дипольных моментов переходов получаются выражения, полностью совпадающие с видом (6). Аналогичная ситуация, но еще с большей громоздкостью выражений, наблюдается при учете колебательной структуры как основного, так и второго возбужденного состояний, только в последнем случае для МЭС также появляется суммирование и частотный множитель также приобретает сложный вид.

В общем случае, очевидно, могут присутствовать оба механизма формирования промежуточного состояния. Тогда оценить конкретный вклад обоих механизмов можно по поляризационным спектрам ДФП – существенный вклад МКС должен выражаться в заметной модификации спектров при переходе от случая одинаковых частот обоих потоков к различным при сохранении одной и той же суммарной частоты.

Сложность экспериментального определения структуры поглощающей системы и установления природы формирования виртуального уровня при ДФП связаны прежде всего с необходимостью варьирования частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  возбуждающих квантов (различное значение  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \text{const}$ ) при сохранении постоянства их суммы ( $\omega_1 + \omega_2 = \text{const}$ ). Поскольку в опыте такие условия осуществить трудно, можно упростить схему эксперимента, практически не ухудшая точности измерений. Двухфотонное возбуждение флуоресценции осуществляется двумя потоками излучения лазеров, работающих в режиме модулированной добротности, с длительностью моноимпульса порядка нескольких десятков наносекунд, что значительно превышает время жизни промежуточного и конечного состояний. Это позволяет считать возбуждение непрерывным. Далее, один из лазеров можно настроить на харак-

теристическую частоту перехода, а второй перестраивать в малых пределах относительно нее. В реальных условиях для ряда растворов сложных молекул можно использовать, например, излучение неодимового лазера ( $\omega_1=9430 \text{ см}^{-1}$ ) и параметрически перестраиваемый лазер с накачкой излучением этой же частоты.

Таким образом, отношение расстройки к характеристической частоте, которое определяет эффективность ДФП, изменяется практически линейно при небольшом увеличении  $\Delta\omega$ . Угол между векторами поляризации возбуждающих потоков изменяется поворотом плоскости поляризации излучения с фиксированной частотой  $\omega_1$  при помощи  $\lambda/2$ . Регистрация люминесценции ведется в направлении, перпендикулярном направлению возбуждения. Интенсивность флуоресценции раствора при постоянных мощностях возбуждающих световых потоков будет пропорциональна сечению ДФП. Сопоставление экспериментально полученных зависимостей  $\epsilon(\psi)$  с теоретически рассчитанными кривыми (5) и (6) при соответствующих параметрах исследуемых объектов позволит установить природу формирования промежуточного виртуального состояния для каждого поперечного случая.

1. Бэрдж Р. // Сверхчувствительная лазерная спектроскопия. М., 1986. С. 124.
2. Клищенко А.П. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1996.
3. Бонч-Бруевич А.М., Пржибельский С.Г., Чигирь Н.А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 2. С. 565.
4. Sinclair G.N., Bao X., Elliott D.S., Hamilton M.W. // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51. № 6. P. 4809.
5. Sanchez-Diaz A., Garsia-Fernandez P. // Quantum and semiclassical optics. 1995. Vol. 7. № 4. P. 553.
6. Хэнш Т. Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена. М., 1979. С. 41.
7. Акимов Д.А., Желтиков А.М., Коротеев Н.И. и др. // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. № 6. С. 563.
8. Luo L., Li Ch., Wang Sh. et al. // J. Opt. A: Pur Appl. Opt. 2001. Vol. 3. P. 489.
9. Denk W., Strickler W.J.H., Web W.W. // Science. 1990. Vol. 248. P. 73; So P.T.G., Kim H., Kochevar I.E. // Optics Express. 1998. Vol. 3. № 9. P. 339.
10. Мешалкин Ю.П., Алфимов Е.Е., Васильев Н.Е. и др. // Квантовая электроника. 1999. Т. 29. № 3. С. 227.
11. Zhou G., Wang D., Ren Y. et al. // Appl. Phys. B. 2001. Vol. 72. № 8. P. 937.
12. Drobizhev M., Karotki A., Rebane A., Spangler C.W. // Opt. Lett. 2001. Vol. 26. № 14. P. 1081.
13. Zhou G., Wang D., Ren Y. et al. // Appl. Phys. B. 2002. Vol. 74. № 2. P. 147.
14. Делоне Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. М., 1989.
15. Акулинин В.М., Карлов Н.В. Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике. М., 1987. С. 101.
16. Chen C., Rifani M., Cha J., Yian Y.-Y., Elliot D.S. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. № 1. P. 461.
17. Буров Л.И., Саржевский А.М., Севченко А.Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1974. № 4. С. 87.
18. Гайсенек В.А., Саржевский А.М. Анизотропия поглощения и люминесценции многоатомных молекул. Мн., 1986.
19. Браун П.А., Киселёв А.А. Введение в теорию молекулярных спектров. Л., 1983.

Поступила в редакцию 23.05.2002.

*Сергей Григорьевич Бабичев* – аспирант кафедры атомной физики и физической информатики. Научный руководитель – А.П. Клищенко.

*Леонид Иванович Буров* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики.

*Анатолий Петрович Клищенко* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой атомной физики и физической информатики.

**РАДИАЦИОННЫЕ ПОВРЕЖДЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ InP,  
ОБЛУЧЕННЫХ ИОНАМИ КСЕНОНА С ЭНЕРГИЕЙ 595 МэВ**

Damage in InP crystals irradiated with swift xenone ions had been investigated by selective etching. The threshold value of specific electronic energy losses for track formation in crystalline InP had been estimated as 19 keV/nm for continuous tracks and 16 keV/nm for discontinuous tracks. Thermal stability of tracks delineated in this material by selective etching had been estimated.

Установлено, что во многих твердых телах при прохождении быстрых ионов могут формироваться треки – вытянутые вдоль траектории ионов макродефектные области, в которых вещество матрицы претерпевает структурные и/или химические изменения. На примере щелочно-галогидных кристаллов и аморфных металлических сплавов [1, 2] показано, что формирование треков обусловлено высоким уровнем возбуждения электронной подсистемы твердого тела при прохождении быстрых ионов. Однако условия формирования треков и их внутренняя структура (фазы) различны для металлов, диэлектриков и полупроводников, кристаллических и аморфных веществ, пленок и объемных материалов. Ни одна из существующих моделей не может удовлетворительно объяснить зависимость трекообразования от типа и структурных особенностей материала, особенно это касается кристаллических полупроводников. Если в квазиаморфных (мелкодисперсных) Si и Ge зарегистрированы кристаллические треки [3, 4], то до настоящего времени облучение при комнатной температуре кристаллов Si, Ge, GaAs быстрыми ионами не приводило к специфическим эффектам, обусловленным высокой интенсивностью электронных возбуждений. Напротив, в ряде работ по облучению полупроводниковых кристаллов быстрыми тяжелыми ионами вместо формирования треков в области высоких потерь энергии в электронной подсистеме отмечается отжиг дефектов, предварительно введенных облучением легкими ионами. Так, в монокристаллическом кремнии наблюдался эффект интенсивного отжига введенных протонами дефектов под действием облучения ионами  $\text{Xe}^+$  с  $E=340$  МэВ при флюэнсе  $1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$  [5]. В монокристаллах Ge, GaAs, GaP *in-situ* регистрировался отжиг нарушений [6–9], хорошо коррелирующий с высокими значениями энергии, выделенной в электронную подсистему. В то же время результаты работы [10] показывают, что имплантация ионов  $\text{Si}^+$  с  $E=90$  МэВ в кремний в интервале флюэнсов  $1,25\text{--}5 \times 10^{14} \text{ см}^{-2}$  приводит к созданию значительного числа дефектов, и даже при самом высоком флюэнсе ионов не происходит отжиг созданных дефектов. Все эти противоречивые сведения свидетельствуют о том, что процессы трекообразования, формирования или отжига дефектов за счет электронных возбуждений зависят от материала и плотности энергии, выделенной на электронные возбуждения около траектории иона.

Что касается полупроводников  $A^3B^5$ , то процессы трекообразования детально изучены в кристаллах InP, облученных ионами  $\text{Xe}^+$  с энергиями 250 и 340 МэВ [11–15].

Для потенциальных применений процессов трекообразования в полупроводниковой нанoeлектронике и оптоэлектронике важна детальная информация по условиям формирования, морфологии и отжига треков. Изучение особенностей дефекто- и трекообразования в полупроводниках тре-

бует прямых наблюдений дефектов. Электронная микроскопия поперечных сечений высокого разрешения позволяет выявить микроструктуру трековых областей и охарактеризовать природу дефектов в треках. Однако данный метод чрезвычайно трудоемкий и требует уникального оборудования. Кроме методических сложностей в подготовке образцов для такой микроскопии, малый объем исследуемого материала не позволяет в одном эксперименте получить информацию о распределении повреждений на всем пути ионов в кристалле. Альтернативным и/или дополняющим электронную микроскопию поперечного сечения методом выявления треков в твердом теле является селективное травление. Этот экспрессный метод достаточно прост и в то же время чувствителен к микродефектам, трекам и изменениям концентрации примесных атомов в кристаллической матрице. Кроме того, селективное травление поперечного сечения образца позволяет в одном эксперименте получить информацию о распределении повреждений вдоль всех траекторий прохождения ионов.

В настоящей работе представлены результаты по исследованию методом селективного травления повреждений в InP, облученном быстрыми ионами  $\text{Xe}^+$ , и по оценке термостабильности выявленных в данном материале треков.

Ионы  $\text{Xe}^+$  с энергией 595 МэВ имплантировались при комнатной температуре дозой  $1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$  в вырезанные из подложки полуизолирующего (100) InP образцы на циклотроне У-300 в Объединенном институте ядерных исследований (г. Дубна). Интенсивность пучка ионов составляла  $2 \times 10^8 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ , чтобы избежать нагрева образцов. Для обеспечения надежного теплового контакта образцы укреплялись на массивном металлическом держателе с помощью теплопроводящего клея.

Термообработка части облученных образцов фосфида индия проводилась в резистивной печи при температурах 350 и 650 °С в течение 15 мин в атмосфере азота. Поверхность образцов защищалась пластиной монокристаллического InP, контроль с помощью оптического микроскопа Leica INM-100 показал отсутствие деградации поверхности образцов.

Для получения поперечных сечений кристаллы скалывались перпендикулярно поверхности по плоскостям (110). В качестве травителя использовался раствор состава  $\{\text{CrO}_3 (10 \text{ г}) + \text{H}_2\text{O} (20 \text{ мл}) + \text{HF} (10 \text{ мл}) + \text{AgNO}_3 (0,08 \text{ г})\}$  [16], применяемый в технологии материалов  $A^3B^5$  для выявления границ эпитаксиальных слоев и областей с различной концентрацией носителей заряда, примесей или дефектов [17–20]. Свежесколотые образцы обрабатывались в травителе при температуре 60–70 °С в течение 3 мин, а затем исследовались под микроскопом. Результаты измерений глубины залегания выявленных структурных нарушений сравнивались с проективным пробегом и распределением выделенной ионами энергии  $dE/dx$ , приведенными на рис. 1.

На рис. 2 представлены микрофотографии протравленных сколов кристалла InP, облученного ионами  $\text{Xe}^+$  с энергией 595 МэВ дозой  $1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$ .

Как видно из рис. 2 а, на сколе образца InP в результате облучения ксеоном формируются две области нарушений. Первая простирается от поверхности до глубины ~24 мкм и содержит выявленные селективным травлением следы треков ионов  $\text{Xe}^+$  (здесь и далее глубины выявленных нарушений даются с учетом слоя материала толщиной около 2 мкм, удаленного при обработке в травящем растворе). От поверхности до глубины ~14 мкм видны непрерывные следы треков, представляющие собой перпендикулярные поверхности фигуры травления в форме трубок до 10–14 мкм длиной.

Под ними находится полоса фигур травления шириной ~10 мкм в виде коротких разветвленных сегментов, которые мы приписываем прерывистым трекам.

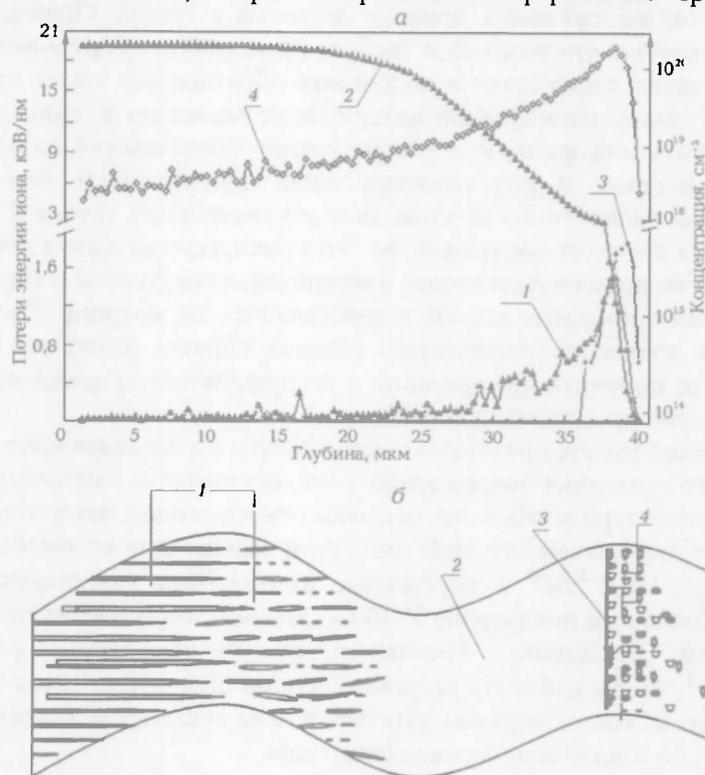


Рис. 1. Расчетные (TRIM'97 [21]) профили распределений по глубине кристалла упруго и неупруго выделенной энергии внедренных атомов и вакансий для образцов InP, облученных ионами  $\text{Xe}^+$  ( $E=595$  МэВ,  $\Phi=1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ) – а (1 – упругое торможение, 2 – неупругое торможение, 3 – концентрация примеси, 4 – концентрация вакансий), и схема выявленных селективным травлением повреждений структуры на всем пути пробега ионов – б (1 – треки, 2 – зона без нарушений, 3 – область локализации внедренных атомов, 4 – область крупных кластеров)

Вторая область нарушений расположена на глубине от 40 до ~47–49 мкм и представляет собой сильно нарушенный в результате упругих ядерных столкновений материал [11–13]. Сверху к этой области примыкает полоса светлого контраста, глубина локализации которой ~40 мкм хорошо совпадает с глубиной максимальной концентрации внедренных ионов (см. рис. 1). Эти две нарушенные области разделены зоной слабо поврежденного материала шириной ~16 мкм без фигур травления.

Следует отметить, что в проведенном эксперименте доза облучения была в пять раз меньше пороговой дозы трекообразования, определенной из данных электронной микроскопии в работе [12], для кристаллов InP, облученных ионами  $\text{Xe}^+$  с энергией 250 МэВ ( $5 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ). Это в первую очередь обусловлено более высоким энерговыделением в электронную подсистему кристалла для условий нашего эксперимента. Во-вторых, селективное травление выявляет структурные повреждения кристаллической решетки на более ранних стадиях их формирования, чем просвечивающая электронная микроскопия. Возможно, в треках, выявляемых селективным травлением, при исследовании методом электронной микроскопии высокого разрешения

еще не обнаружилось бы наличия аморфных областей или искажений решетки типа двойниковых ламелей. Однако сравнение чувствительности методов селективного травления и электронной микроскопии при обнаружении скрытых треков выходит за рамки данной работы и требует анализа большого объема экспериментальных данных по трекообразованию в полупроводниках, которые к настоящему времени еще не накоплены. И в-третьих, нужно учитывать различный уровень дефектности (различное состояние примесно-дефектной системы) исходных кристаллов: в нашем эксперименте и в работе [12] использовались кристаллы от разных производителей.

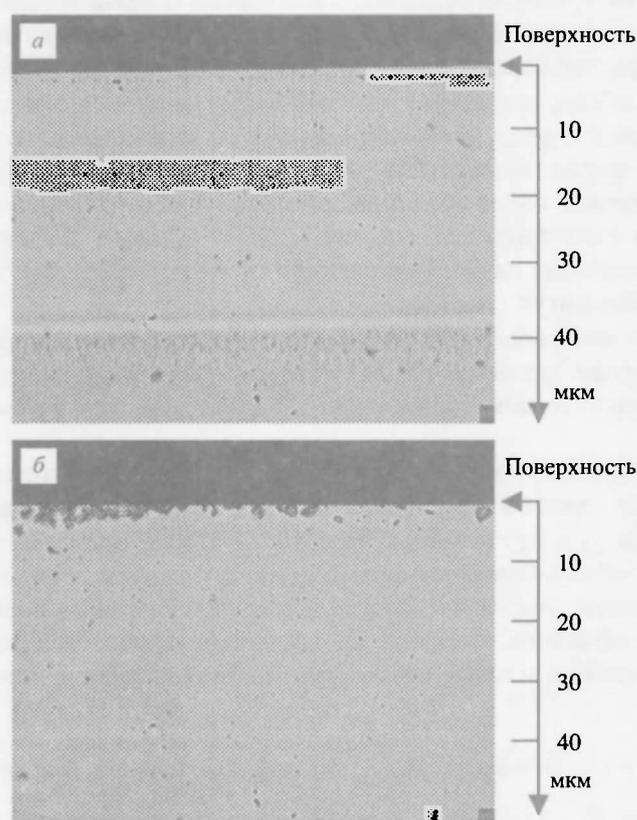


Рис. 2. Микрофотографии повреждений вдоль траекторий ионов  $\text{Xe}^+$  ( $E=595$  МэВ,  $\Phi=1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ), выявленных селективным травлением на плоскостях (110) кристалла InP сразу после облучения (а) и после отжига облученного образца при  $650^\circ\text{C}$  в течение 15 мин в атмосфере азота (б)

Для оценки термостабильности трековых областей был проведен стационарный печной отжиг части облученных образцов InP ( $350$  и  $650^\circ\text{C}$ , 15 мин в атмосфере азота). Исследование протравленных сколов отожженных образцов показало, что отжиг при  $350^\circ\text{C}$  приводит к “выцветанию” (снижению контрастности) всей картины выявленных повреждений. Тем не менее дефектные зоны еще различимы: приповерхностные области непрерывных и прерывистых треков, полоса светлого контраста на глубине  $\sim 40$  мкм, соответствующая максимальной концентрации внедренных ионов, и в конце пробега ионов на глубинах свыше  $40$  мкм область повреждений, вызванных упругими потерями энергии ионов. Отжиг при  $650^\circ\text{C}$  приводит

к исчезновению с картины травления всех деталей, кроме светлой полосы, выявляющей зону локализации внедренного ксенона (рис. 2 б, показана стрелкой).

Сравнение выявленных селективным травлением повреждений в кристалле InP, облученном быстрыми ионами  $\text{Xe}^+$ , с распределением потерь энергии ионов свидетельствует о следующем:

- формирование треков в приповерхностной области обусловлено высоким уровнем возбуждения электронной подсистемы кристалла, вызванным большой величиной сечения неупругого торможения (см. рис. 1);
- морфология треков определяется величиной и равномерностью выделения энергии иона в электронную подсистему кристалла: зона непрерывных треков, простирающаяся до глубины  $\sim 14$  мкм, соответствует области, где значение  $(dE/dx)_e$  составляет  $\sim 19$  кэВ/нм; с увеличением глубины проникновения ионов в кристалл величина  $(dE/dx)_e$  уменьшается, одновременно изменяется форма выявленных дефектов, которые в этой области кристалла представляют собой короткие сегменты, соответствующие прерывистым трекам и регистрируемые на глубинах 14–24 мкм; значения  $(dE/dx)_e$  для данного интервала глубин изменяются от 19 до 16 кэВ/нм; ниже находится область без фигур травления;
- пороговые по отношению к возможности формирования треков в монокристаллическом фосфиде индия удельные неупругие потери энергии для непрерывных треков составляют 19 кэВ/нм, а для прерывистых – 16 кэВ/нм.

При термообработке облученных образцов распад дефектных комплексов, образующих треки и зону повреждений в конце пробега ионов, становится заметным уже при температуре 350 °С. После прогрева при 650 °С эти дефектные образования полностью отжигаются. Для детальной оценки термостабильности трековых областей и зоны нарушений в конце пробега ионов и идентификации морфологии нарушенных областей необходимы дополнительные комплексные исследования с привлечением методов ПЭМ, DLTS и ФЛ.

1. Trautmann C., Schwartz K., Steckenreiter T. // Nucl. Instr. and Meth. 1999. Vol. B156. P. 162.
2. Trautmann C., Toulemonde M., Dufour C., Paumier E. // Nucl. Instr. and Meth. 1996. Vol. B108. P. 94.
3. Izui K. // J. Phys. Soc. Japan. 1965. Vol. 20. P. 915.
4. Furuno S., Otsu H., Hojou K., Izui K. // Nucl. Instr. and Meth. 1996. Vol. B107. P. 223.
5. Antonova I.A., Dvurechenskii A.V., Koronovich A.A. et al. // Phys. Stat. Sol. (a). 1995. Vol. 147. P. K1.
6. Mikou M., Carin R., Bogdanski P., Madelon R. // Nucl. Instr. and Meth. 1996. Vol. B107. P. 246.
7. Proc. of the 3 d Int. Symp. on Swift Heavy Ions in Matter, Caen, 1995 // Nucl. Instr. and Meth. 1996. Vol. B107.
8. Karamayan S. A. // Nucl. Instr. and Meth. 1990. Vol. B51. P. 354.
9. Wesch W., Wendler E., Bachmann T., Herre O. // Nucl. Instr. and Meth. 1995. Vol. B96. P. 290.
10. Chavan S.T., Brave P.S., Bhoraskar V.N., Kanjial D. // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 78. P. 2328.
11. Власукова Л.А., Комаров А.А., Комаров Ф.Ф. // Труды IX Международного совещания «Радиационная физика твердого тела»: В 2 т. М., 1999. Т. 1. С. 252.
12. Herre O., Wesch W., Wendler E. et al. // Phys. Rev. 1998. Vol. B58. P. 4832.
13. Wesch W., Herre O., Gaiduk P.I. et al. // Nucl. Instr. and Meth. 1998. Vol. B146. P. 341.

14. Gaiduk P.I., Komarov F.F., Wesch W. // Nucl. Instr. and Meth. 2000. Vol. B164–165. P. 377.
15. Gaiduk P.I., Komarov F.F., Tishkov V.S. et al. // Phys. Rev. 2000. Vol. B61. P. 15785.
16. Abrahams M.S., Buiocchi C.J. // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. № 9. P. 2855.
17. Olsen G.H., Eittenberg M. // J. Appl. Phys. 1974. Vol. 45. P. 5112.
18. Wright P.D., Rezek E.A., Holonyak N. // J. Cryst. Gr. 1977. Vol. 41. P. 254.
19. Sin Y. K., Hwang Y., Zhang T., Kolbas R. M. // J. Electron. Mater. 1991. Vol. 20. P. 465.
20. Власукова Л. А. // Неорган. материалы. 1993. Т. 29. С. 1597.
21. Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. The Stopping and Range of Ions in Solids. New York, 1985.

Поступила в редакцию 25.03.2002.

*Людмила Александровна Власукова* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры физической электроники.

*Фадей Фадеевич Комаров* – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, заведующий кафедрой физической электроники.

*Александр Юрьевич Дидык* – доктор физико-математических наук, профессор (Лаборатория ядерных реакций Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна)).

УДК 541.423

*Ж.И. БУЛОЙЧИК, К.И. ЧЕРВЯКОВСКИЙ, Н.А. ЮДИНА*

## АНАЛИЗ ЗУБНЫХ ПАСТ МЕТОДОМ АТОМНО-ЭМИССИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Sample preparation methods for an analysis of tooth pastes have been developed. Quantitative determination of the content of particular heavy metals in them has been performed by the atomic-emission method.

Состояние окружающей среды является важным фактором, влияющим на здоровье населения. Огромную опасность представляют загрязнения окружающей среды соединениями тяжелых элементов и радионуклидов. В последнее время определился новый источник поступления тяжелых элементов в организм человека – предметы санитарии и гигиены. Так, проведенный нами качественный анализ 25 образцов гигиенических и лечебно-профилактических зубных паст показал наличие в некоторых из них ряда тяжелых металлов. Поэтому в современных условиях приобретают особую актуальность вопросы нормирования и санитарного контроля содержания вредных и токсичных элементов в различных предметах сангигиены, разработки единых критериев оценки гигиенических средств и изучения соответствия качества таких средств этим критериям.

Особо следует отметить, что и в настоящее время применяются санитарные нормы, в которых определяется суммарное количество тяжелых элементов без указания на предельно допустимую величину содержания каждого в отдельности, в том числе и наиболее токсичных [1]. Разработка методик количественного экспресс-анализа тяжелых металлов в такого рода объектах является важной практической и научной проблемой.

Использование большинства современных универсальных методов исследования зубных паст на практике часто ограничено не только сложностью и даже уникальностью применяемой при этом аппаратуры, но и трудностями создания стандартных образцов. Не лишены недостатков и существующие в настоящее время визуально-колориметрический и электрофо-

тометрический методы, которые требуют длительной пробоподготовки и не отличаются высокой точностью [1].

Эмиссионный спектральный анализ, который мы использовали для проведения настоящих исследований, при простоте и доступности метода позволяет определять с достаточной чувствительностью и точностью элементный состав исследуемого вещества.

В методическом отношении важно было решить две самостоятельные аналитические задачи: вначале – качественный спектральный анализ изучаемых объектов, а затем – количественное определение отдельных химических элементов в исследуемых пробах. При решении обеих задач использовали одни и те же методы пробоподготовки и экспериментальные средства для возбуждения и регистрации спектров. Атомно-эмиссионный анализ проводили на установке, состоящей из источника возбуждения спектров UBI-1, монохроматора МДР-23, на выходе которого установлена фотодиодная линейка (1024 канала) для регистрации спектров (ширина области регистрации 34 нм), системы предварительной обработки и пересылки полученной спектральной информации и ПЭВМ для обработки результатов. Установка более подробно описана в работе [2].

Необходимой составной частью подготовки образцов зубных паст к анализу является процедура минерализации проб. Для отработки метода минерализации были испытаны методики как сухого, так и мокрого озоления [3–5]. В первом случае образцы в кварцевых или фарфоровых тиглях помещали в муфельную печь с регулируемой температурой. Температуру постепенно повышали до 500 °С для полного озоления пробы. Однако данная методика оказалась малоприменимой для большинства современных паст из-за вспенивания всей массы образца даже при достаточно медленном повышении температуры, хотя эта методика рекомендована ГОСТ 7983-99. Такое поведение образцов зубных паст обусловлено их многокомпонентным составом: они содержат значительные количества органических добавок и карбонатов (доля наполнителей, отбеливающих, связующих, ароматизирующих и тому подобных веществ составляет 30–70 %), которые вспенивают всю массу образца, даже если процесс предварительной подготовки продолжается несколько часов (табл. 1).

Более стабильные и воспроизводимые результаты получены при проведении процедуры мокрого озоления. Были апробированы варианты мокрого озоления проб с помощью различных кислот: а) азотной и хлорной, б) азотной, хлорной и серной. Наиболее оптимальной оказалась методика с использованием перекиси водорода. Образец пасты, примерно 500 мг, взвешивали на аналитических весах в фарфоровом или кварцевом тигле, добавляли 2,0 мл концентрированной азотной кислоты, 1,0 мл 30 %-й перекиси водорода и проводили минерализацию при температуре 160–180 °С в течение 50 мин. Затем к минеральному остатку добавляли точно отмеренное количество воды, смесь перемешивали. В результате приготовленная проба состоит из двух фракций: жидкой и твердой. В состав последней входят нерастворимые в воде оксиды кремния и алюминия.

Важно подчеркнуть, что количественный атомно-эмиссионный спектральный анализ является относительным методом, а поскольку проведенный на первой стадии качественный анализ образцов паст показал, что они очень разнородны по макроэлементам, особое внимание уделялось разработке и изготовлению стандартных образцов. Для корректного выполнения

второй стадии – количественного анализа – необходимо приготовление стандартных образцов, адекватных по составу исследуемым. В зависимости от агрегатного состояния анализируемого материала и соответственно методики анализа стандартные образцы изготавливали либо в виде порошков, либо в виде растворов.

Таблица 1

**Количественная оценка минерального остатка зубных паст после процедуры мокрого озоления**

Зубная паста	Масса навески, г	Масса остатка, г	Относительный выход, %
“Мечта”	0,5192	0,2745	52,9
“Мечта” (мята)	0,6286	0,3420	54,4
“Мечта” (персик)	0,3760	0,2183	58,1
“Витоша”	0,3418	0,0874	25,6
“Вита-F”	0,4750	0,2348	49,4
“Aquafresh”	0,5245	0,2693	51,3
“Amigo smokers”	0,4334	0,2168	50,0
“Amigo plus”	0,5146	0,4372	85,0
“Blend-a-med mild fresh”	0,5233	0,2910	55,6
“Blend-a-med complete”	0,5080	0,2680	52,8
“Colgate” (максимальная защита)	0,6379	0,4574	71,7
“Colgate” (сенсационное отбеливание)	0,4620	0,2448	53,0
“Hitdent”	0,4187	0,3330	79,5
“Ftorodent”	0,4648	0,3454	74,3
“Gold”	0,3769	0,2437	64,7
“Pepsodent”	0,6518	0,3801	58,3
“Macleans”	0,4558	0,3336	73,2
“Radomed”	0,3779	0,2583	68,3
“Silver”	0,3986	0,2705	67,9
“Tropicana”	0,5914	0,4334	73,3

После оценки приближенного состава образцов усредненные стандартные образцы для анализа жидкой фракции готовили смешиванием необходимых рассчитанных количеств растворимых в воде солей, стандартные порошки для анализа твердой фракции – растиранием смеси окислов анализируемых металлов. Во всех случаях добивались максимального соответствия стандартных образцов химическому составу исследуемых.

При выполнении анализа использовали угольные электроды диаметром 6 мм, причем при анализе жидкой фракции нижний электрод имел вогнутую сферическую поверхность в верхней своей части, а верхний электрод – конусообразную поверхность в нижней части. На верхнюю поверхность нижнего электрода с помощью микропипетки наносили 25 мкл раствора, подсушивали теплом настольной лампы мощностью 40–60 Вт до полного высыхания жидкости с поверхности электродов. Для анализа твердую фракцию растирали с угольным порошком в соотношении 1:1, а затем этой смесью набивали отверстие цилиндрической формы нижнего электрода. Аналогично готовили и порошкообразные стандартные образцы. Условия регистрации спектров: ширина щели – 70 мкм, число накоплений – 15, время накопления одного спектра – 1 с, общее время – 15 с. Для проведения экспериментов использовали дугу переменного тока (10 А), так как в этом случае наблюдается наиболее равномерное уменьшение интенсивности в зависимости от времени возбуждения.

Результаты анализа образцов паст – усредненные данные трех-четырех параллельных опытов – приведены в табл. 2. Средняя ошибка определения лежит в пределах 5–15 %, нижний предел обнаружения концентраций –  $10^{-3}$ – $10^{-5}$  мг/кг.

Таблица 2

## Содержание некоторых металлов в зубных пастах, мг/кг

Зубная паста	Pb	As	Hg	$\Sigma_3$	Cd	Cu	Zn	$\Sigma_6$	Fe	Al	Ca	$\Sigma_{общ}$
“Мечта”	3,0	0,01	0,01	3,0	0,07	3,1	5,0	11,2	9,1	5,2	9,2	34,7
“Мечта” (мята)	2,1	0,03	0,01	2,1	0,02	0,9	5,2	8,2	2,4	5,3	0,1	15,0
“Мечта” (персик)	0,5	0,03	0,01	0,5	0,03	2,0	2,3	4,8	2,4	5,2	2,4	14,8
“Витоша”	3,1	0,03	0,01	3,1	2,02	0,2	4,1	9,4	2,5	3,3	2,5	17,7
“Macleans”	0,9	0,01	0,01	0,9	0,33	0,4	0,4	2,0	4,2	5,5	0,3	12,0
“Aquafresh”	5,0	0,01	0,01	5,0	0,05	1,2	2,2	8,4	7,3	10	40	65,7
“Amigo plus”	3,0	0,01	0,01	3,0	0,06	0,06	2,1	5,2	4,4	2,6	3,4	15,6
“Amigo smokers”	0,9	0,01	1,0	1,9	0,08	0,6	8,0	10,6	2,1	0,2	4,3	17,1
“Tropicana”	3,0	0,01	0,01	3,0	0,03	0,5	1,8	5,3	0,7	20	0,5	26,5
“Hitdent”	3,1	0,01	0,01	3,1	0,03	1,4	2,1	6,6	10	20	0,5	37,1
“Eurodent”	1,3	0,01	0,01	1,3	0,08	0,6	0,5	2,5	2,3	0,2	4,4	9,4
“Silver”	1,2	0,01	0,01	1,2	0,03	1,1	0,7	3,0	4,2	6,0	0,2	13,4
“Radomed”	4,1	0,01	0,01	4,1	0,03	0,4	0,1	4,6	2,1	2,0	0,2	8,9
“Gold”	0,7	0,01	0,01	0,7	0,01	0,5	0,4	1,6	1,2	2,1	0,2	5,1
“Pepsodent”	9,1	0,01	0,01	9,1	0,03	2,4	90	101,5	0,7	3,2	1,5	106,9
“Colgate regular”	1,1	0,01	0,01	1,1	0,07	0,2	2,1	3,5	4,3	2,4	40	50,1
“Colgate total”	3,1	0,01	0,01	3,1	0,04	0,08	2,0	5,2	3,2	4,3	4,2	16,9
“Colgate whitening”	0,9	0,01	0,01	0,9	0,31	0,43	0,4	2,0	4,1	5,0	0,3	11,4
“Blend-a-med soda...”	2,1	0,01	0,01	2,1	0,02	0,7	2,0	4,8	2,1	7,2	3,4	17,5
“Blend-a-med complete”	9,0	0,01	0,01	9,0	0,03	0,8	1,1	10,9	2,2	6,1	4,2	23,4

Примечание.  $\Sigma_3$  – сумма первых трех наиболее токсичных металлов;  $\Sigma_6$  – сумма шести тяжелых элементов;  $\Sigma_{общ}$  – общая сумма определяемых элементов.

Анализ содержания тяжелых металлов в 20 зубных пастах показал, что общее количество особо токсичных металлов (свинец, мышьяк, ртуть) не превышало 9,0 мг/кг ни в одной из исследованных паст. Содержание свинца, мышьяка и ртути в зубных пастах “Мечта” (персик), “Macleans”, “Eurodent”, “Silver”, “Gold”, “Colgate regular”, “Colgate whitening” колебалось от 0,7 до 1,3 мг/кг, в зубных пастах “Мечта”, “Мечта” (мята), “Витоша”, “Amigo plus”, “Tropicana”, “Hitdent”, “Colgate total”, “Blend-a-med soda bicarbonate” – 2,1–3,1 мг/кг, “Aquafresh”, “Radomed” – 4,1–5,0 мг/кг, “Pepsodent” и “Blend-a-med complete” – до 9,0 мг/кг этих металлов.

В зубной пасте “Amigo smokers” отмечено значительное количество ртути – 1,0 мг/кг (по данным Госстандарта России, оно не должно превышать 0,01 мг/кг, международный стандарт ISO 5993 от 1991 г. устанавливает предел 1,0 мг/кг).

При оценке содержания ряда других металлов (меди, цинка, кадмия, алюминия, железа) общая их сумма не превышала 20,0 мг/кг в подавляющем большинстве исследованных паст. Концентрация этих металлов колебалась в пределах 25,0–25,5 мг/кг в зубных пастах “Мечта”, “Aquafresh”, “Tropicana”, в “Hitdent” она составила 36,6 мг/кг, возможно, за счет того, что эти четыре пасты находились в металлических тубах. Общее содержание металлов в зубной пасте “Pepsodent” достигало 106,9 мг/кг. В ней же обнаружен бериллий (0,01+0,003 мг/кг), который, как известно, относится к высокотоксичным элементам (ПДК в воде сравним с органическими соединениями ртути) [6].

Установлено, что нерастворимая в воде фракция содержит незначительные количества вредных для организма тяжелых металлов, что практически не влияет на суммарное количество тяжелых металлов в пастах.

Таким образом, атомно-эмиссионный анализ может быть эффективно использован при количественном определении токсичных элементов в предметах санитарии и гигиены. Полученные нами данные, а также проведенные автором работы [7] исследования микробиологических показателей этих же зубных паст могут быть использованы органами сертификации при совершенствовании нормативной документации.

1. Пасты зубные. Общие технические условия: Межгосударственный стандарт ГОСТ 7983-99. М., 2000.

2. Карцев А.В., Коваленко М.Н., Зажогин А.П. // Тезисы докладов XV Менделеевского съезда по общей и прикладной химии, Минск, 24–29 мая 1993 г.: В 4 т. Мн., 1993. Т. 2. С. 74.

3. Методические рекомендации по спектроскопическому определению тяжелых металлов в биологических материалах и объектах окружающей среды / Подгот. М.Т. Дмитриевым, Э.И. Грановским. М., 1986.

4. Карякин А.В., Грибовская И.Ф. Проблемы аналитической химии: В 8 т. М., 1976. Т. 3. С. 131.

5. Скурихин И.М. // Вопр. питания. 1981. № 2. С. 10.

6. Гороновский И.Т., Назаренко Ю.П., Некряч Е.Ф. Краткий справочник по химии. Киев, 1987. С. 767.

7. Юдина Н.А. Комплексная оценка зубных паст по основным критериям качества: Автореф. дис. ... канд. мед. наук. Мн., 2001.

Поступила в редакцию 04.01.2002.

*Жанна Игнатьевна Булойчик* – кандидат химических наук, старший научный сотрудник кафедры физической оптики.

*Климентий Иванович Червяковский* – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.П. Зажогин.

*Наталья Александровна Юдина* – кандидат медицинских наук, ассистент первой кафедры терапевтической стоматологии МГМУ.

УДК 535.37

В.И. ПОПЕЧИЦ

### СПЕКТРАЛЬНО-ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАММА-ОБЛУЧЕННЫХ РАСТВОРОВ ТРИКАРБОЦИАНИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ

Radiation stability of threecarbocyanine dyes solutions is investigated with spectral methods.

После аварии на Чернобыльской атомной электростанции значительно возрос интерес к исследованиям воздействия жестких излучений на различные объекты живой и неживой природы. При их проведении используются различные источники жестких излучений [1–3], методы и приборы современной радиационной физики и радиационной химии [1–6].

Растворы органических красителей в этом случае являются удобными модельными объектами, так как обладают интенсивными полосами поглощения и люминесценции в видимой области спектра, имеют достаточно высокий квантовый выход люминесценции, хорошо растворяются в различных органических и неорганических растворителях, доступны для исследователей. В последние годы в квантовой электронике и лазерной тех-

нике (компоненты активных и пассивных лазерных сред), в компьютерной технике (компоненты активных слоев оптических дисков), в медицине (фотосенсибилизаторы для фотодинамической терапии онкозаболеваний) и в других областях науки и техники широко используются трикарбоцианиновые красители [7]. В литературе имеется обширный экспериментальный и теоретический материал по фотофизическим характеристикам красителей [8–13], что позволяет изучать воздействие жестких излучений на растворы красителей с помощью надежных, высокоинформативных спектрально-люминесцентных методов [14–18].

В данной работе исследована радиационная деструкция растворов ряда спектроскопически чистых трикарбоцианиновых (полиметиновых) красителей, содержащих стабилизирующий ортофениленовый фрагмент в центре полиметиновой цепи: 7028, 7030 и 7033 (структурные формулы красителей приведены в таблице). Растворителями служили: этиленгликоль, 1,4-диоксан, диметилформамид, диметиламин и диэтиламин. Концентрация растворов не превышала  $10^{-5}$  М. Мощность экспозиционной дозы составляла 2,1 Гр/с.

В качестве примера на рис. 1 и 2 представлены спектры необлученных и облученных в течение различного времени растворов трикарбоцианиновых красителей 7028 и 7033 в диметилформамиде при комнатной температуре. Максимумы спектров необлученных растворов нормированы к единице. Оптическая плотность  $D$  необлученных растворов в максимуме длинноволновой полосы поглощения составляла 1,2–1,3. Для других исследованных растворов трикарбоцианиновых красителей в этиленгликоле, 1,4-диоксане и диметилформамиде наблюдались подобные изменения спектров поглощения.

С увеличением времени облучения происходит постепенное уменьшение интенсивности длинноволновых полос поглощения трикарбоцианиновых красителей, а в коротковолновой области спектров возникают полосы поглощения продуктов радиационной деструкции. В наборе растворов полиметиновых красителей 7028 и 7030 в этиленгликоле и 7033 в диметилформамиде наблюдаются изобестические точки, что связано, по-видимому, с образованием в этих растворах одного основного продукта деструкции. Для всех исследованных полиметиновых красителей в 1,4-диоксане в видимой области наблюдалось постепенное уменьшение интенсивности поглощения и новые полосы не возникали. Радиационное обесцвечивание исследованных растворов является необратимым.

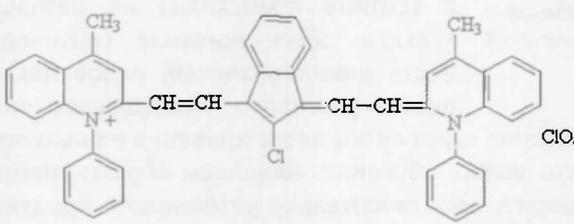
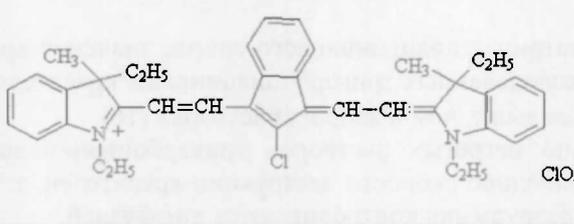
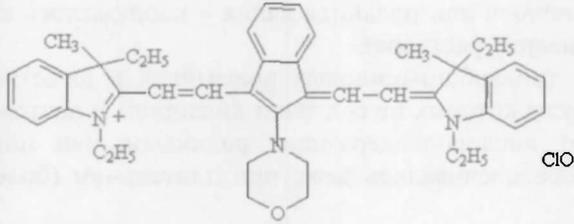
На рис. 3 в полулогарифмическом масштабе представлены зависимости значений интенсивности максимумов длинноволновых полос поглощения исследованных растворов от времени облучения для растворов 7030. Очевидно, что радиационное разрушение красителя в различных растворителях происходит по экспоненциальному закону. Подобные зависимости наблюдались и для растворов других красителей.

Интенсивность флуоресценции облученных растворов при возбуждении в максимуме длинноволновой полосы поглощения уменьшалась пропорционально уменьшению интенсивности длинноволновой полосы поглощения, т. е. продукты радиационной деструкции красителей при таком возбуждении практически не флуоресцировали.

Значения характерного времени "полуобесцвечивания" ( $t_{1/2}$ ) исследованных растворов полиметиновых красителей под действием гамма-излучения  $^{60}\text{Co}$  в расчете на мощность экспозиционной дозы 1 Гр/с приведены в таб-

лице. Видно, что наиболее устойчивы растворы красителей в диметилформамиде, а наименее устойчивы – в этиленгликоле. Наиболее устойчивым оказался краситель 7033, который содержит морфолиновую группу в центре полиметиновой цепи. Трикарбоцианиновые красители, содержащие эту же экранирующую полиметиновую цепь группу, также обладают высокой химической устойчивостью [19].

**Время "полуразрушения" трикарбоцианиновых красителей в различных растворителях ( $t_{1/2}$ , с) в расчете на мощность дозы 1 Гр/с**

Красители	Растворители		
	Этиленгликоль	1,4-Диоксан	Диметилформамид
<p>7028</p> 	315	861	882
<p>7030</p> 	294	357	378
<p>7033</p> 	525	876	903

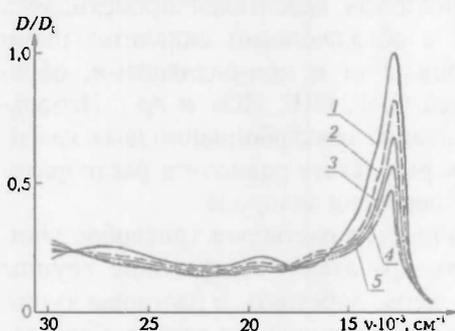


Рис. 1. Спектры поглощения раствора красителя 7028 в диметилформамиде: необлученный раствор – 1, облученный в течение 140 с – 2, 280 – 3, 420 – 4, 520 с – 5

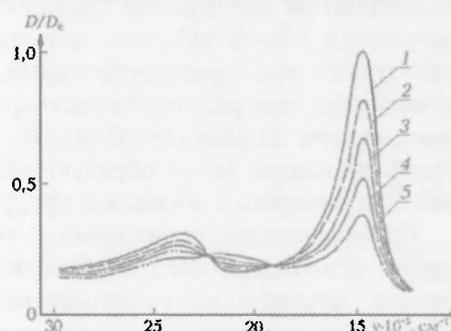


Рис. 2. Спектры поглощения раствора красителя 7033 в диметилформамиде: необлученный раствор – 1, облученный в течение 140 с – 2, 280 – 3, 420 – 4, 600 с – 5

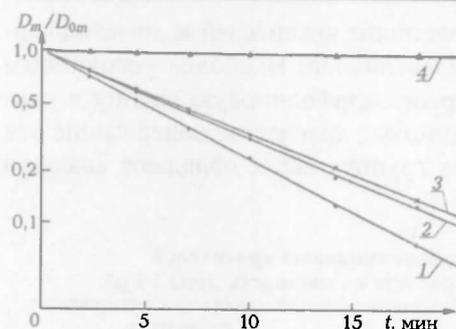


Рис. 3. Зависимость интенсивности максимума длинноволновой полосы поглощения растворов красителя 7030 в этиленгликоле – 1, 1,4-диоксане – 2, диметилформамиде – 3, диметиламин – 4 от времени облучения растворов

Облучение порошков трикарбоцианиновых красителей в течение длительного времени (более 4 ч), а затем их последующее растворение не выявило в спектрах этих растворов изменений, характерных для спектров облученных растворов. Это указывает на то, что молекулы трикарбоцианиновых красителей обладают большой радиационной устойчивостью [20–24].

При хранении растворов облученных трикарбоцианиновых красителей в темноте происходит их незначительное обесцвечивание (интенсивность длинноволновых полос поглощения растворов уменьшалась при-

мерно на 10 % при записи спектров через сутки после хранения наполовину обесцвеченных растворов), что можно объяснить влиянием образующегося в результате радиолитического разложения растворителей относительно устойчивого продукта – пероксида водорода ( $H_2O_2$ ). Добавление его в необлученные и облученные растворы приводило к аналогичным изменениям в спектрах поглощения [24].

В твердых полимерных матрицах поливинилового спирта значения времени полуобесцвечивания исследованных трикарбоцианиновых красителей были примерно на два порядка выше, чем в жидких растворах [16].

Облучение предварительно нагретых растворов трикарбоцианиновых красителей приводило к увеличению скорости деструкции красителей, т. е. процессы их радиационного разрушения контролируются диффузией.

При добавлении в растворы исследованных трикарбоцианиновых красителей ловушек радикалов – ионола или роданида калия – наблюдалось замедление скорости обесцвечивания растворов.

Растворы исследованных трикарбоцианиновых красителей в диметиламин и диэтиламин, молекулы которых не содержат кислорода и поэтому при радиолитическом разложении не образуют кислородсодержащих радикалов или ион-радикалов, практически не обесцвечивались даже при длительном (более 2 ч) гамма-облучении.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что необратимая радиационная деструкция трикарбоцианиновых красителей происходит в результате взаимодействия красителей с обладающими окислительными свойствами кислородсодержащими радикалами и ион-радикалами, образующимися при радиолитическом разложении растворителей ( $OH$ ,  $OH^+$ ,  $HO_2$  и др.). Небольшое влияние на радиационное обесцвечивание трикарбоцианиновых красителей оказывает также образующийся в результате радиолитического разложения растворителей относительно стабильный продукт – пероксид водорода.

Для повышения радиационной устойчивости растворов трикарбоцианиновых красителей следует использовать красители, содержащие группы атомов, экранирующие полиметиновую цепь; добавлять в растворы тушители радикалов (ионол, роданид калия и др.); применять в качестве растворителей твердые полимерные матрицы (поливиниловый спирт, полистирол, полиметилметакрилат и др.), а также растворители, молекулы которых не содержат атомов кислорода (диметиламин, диэтиламин и др.).

1. Пикаев А.К. Современная радиационная химия. Основные положения. Экспериментальная техника и методы. М., 1977.
2. Пикаев А.К. Современная радиационная химия. Радиолит газы и жидкостей. М., 1986.
3. Пикаев А.К. Современная радиационная химия. Твердое тело и полимеры. Прикладные аспекты. М., 1987.
4. Пикаев А.К., Кабакчи С.А. Реакционная способность первичных продуктов радиолиты воды. М., 1982.
5. Аллен А.О. Радиационная химия воды и водных растворов. М., 1963.
6. Калязин Е.П., Бугаенко Л.Т. // Журн. Всесоюз. хим. о-ва. 1990. Т. 35. № 5. С. 551.
7. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Современные вопросы оптики, радиационного материаловедения, информатики, радиофизики и электроники. Мн., 1997. С. 88.
8. Теренин А.Н. Фотоника молекул красителей и родственных органических соединений. Л., 1967.
9. Паркер С. Фотоллюминесценция растворов. М., 1972.
10. Степанов Б.И. Введение в химию и технологию органических красителей. М., 1977.
11. Мельников Б.П., Виноградова Г.И. Применение красителей. М., 1986.
12. Гайсенек В.А., Саржевский А.М. Анизотропия поглощения и люминесценции многоатомных молекул. Мн., 1986.
13. Ищенко А.А. Строение и спектрально-люминесцентные свойства полиметиновых красителей. Киев, 1994.
14. Harriman Anthony, Shoute Lian, Neta P. // J. Phys. Chem. 1991. Vol. 95. № 6. P. 2415.
15. Высоцкая Н.А., Бортун Л.Н., Ревина А.А. // Укр. хим. журн. 1991. Т. 57. № 1. С. 28.
16. Попечиц В.И. // Современные вопросы оптики, радиационного материаловедения, информатики, радиофизики и электроники: Сб. ст. Мн., 1997. С. 102.
17. Попечиц В.И. // Тезисы докладов международной конференции по люминесценции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.И. Вавилова. М., 2001. С. 111.
18. Попечиц В.И. // Тезисы докладов научной конференции, посвященной 75-летию Белгосуниверситета. Мн., 1996. С. 184.
19. Попечиц В.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 2. С. 36.
20. Попечиц В.И. // Радиационная физика твердого тела: Тр. XI Межнац. совещ. Севастополь, 2001. С. 329.
21. Попечиц В.И., Кравцова О.Н. // Квантовая электроника: Материалы II Межгос. науч.-техн. конф. Мн., 1998. С. 169.
22. Попечиц В.И. // Радиационная физика твердого тела: Тр. XI Межнац. совещ. М., 1999. Т. 2. С. 1167.
23. Попечиц В.И. // Актуальные проблемы дозиметрии: Материалы междунар. симпозиума. Мн., 1999. С. 102.
24. Попечиц В.И., Каленик С.М. // Тезисы докладов IV Международной конференции по лазерной физике и спектроскопии. Гродно, 1999. Ч. 1. С. 114.

Поступила в редакцию 12.08.2002.

*Владимир Иванович Попечиц* – кандидат физико-математических наук, доцент, ученый секретарь НИИПФП БГУ им. А.Н. Севченко.

УДК 537.534.539.12.04

*В.В. УГЛОВ, С.В. ЗЛОЦКИЙ, Е.К. ВОРОПАЙ*

## СТРУКТУРА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ TiN/ZrN НА СТАЛИ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ВАКУУМНО-ДУГОВОГО ОСАЖДЕНИЯ

Experiments have been carried out to deposit TiN/ZrN multilayers on carbon steel for different deposition times of monolayer ranging from 2 to 10 s. TiN/ZrN films have been produced by cathodic arc-vapour deposition (CAVD). An experimentally shown prerequisite for high hardness of multilayered coatings is that the lamellae are thin (the so-called «superlattice effect»), less than 10 nm.

Многослойные структуры, формируемые путем контролируемого чередующегося осаждения двух материалов, позволяют получать наноструктурированные объекты, обладающие рядом практически важных свойств. Немаловажную роль при формировании многослойных тонкопленочных систем играют состав и толщина одного слоя.

Покрyтия на основе нитридов переходных металлов (TiN, ZrN, CrN и т. д.) в настоящее время получили широкое применение. Это в первую очередь обусловлено тем, что они по сравнению с гомогенными покpытиями, сформированными на основе моонитридов переходных металлов, обладают такими улучшенными механическими свойствами, как высокая термическая и коррозионная стабильность, микротвердость и износостойкость [1–3].

Большой интерес представляет изучение структуры и механических свойств многослойных систем на основе нитридов титана и циркония при наличии в них наноструктурных эффектов. Целью данной работы является изучение влияния толщины одного слоя TiN/ZrN на структуру покpытия при его фиксированной толщине.

Покрyтия TiN/ZrN осаждались на полированные стальные подложки методом вакуумно-дугового осаждения (ВДО) [4]. В качестве подложки использовалась углеродистая сталь У8А. Перед осаждением поверхность подложек обрабатывалась ионами  $Ti^+$  в течение минуты при потенциале подложки 1 кВ, токе дуги титанового катода 100 А и давлении в камере  $10^{-7}$  Па. Условия осаждения следующие: давление азота в вакуумной камере  $10^{-7}$  Па, опорное напряжение 120 В, ток горения дуги титанового катода 100 А. Многослойное покpытие получалось путем попеременного напыления TiN и ZrN. Для создания системы с различной толщиной слоя варьировалось время осаждения одного слоя от 2 до 10 с. Общее время осаждения покpытия оставалось одинаковым и составляло 10 мин.

Микроструктура покpытий изучалась с помощью сканирующего электронного микроскопа Hitachi S806. Фазовый состав, текстура и микронапряжения исследовались на дифрактометре ДРОН 2.0 с использованием «медного» излучения. Толщина покpытий определялась с помощью сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) и магнитным методом [5]. Механические испытания проводились на нанотвердомере Nano Indenter-II индентором Берковича при нагрузке 60 мН. Твердость и модуль упругости находили по методике Оливера и Фарра [6]. Элементный состав многослойных покpытий изучался с помощью Оже-электронной спектроскопии (ОЭС).

Растрово-электронные микроскопические исследования поперечного сечения и магнитные измерения образцов показали, что толщина всех покpытий одинакова и составляет ~3 мкм. Измерения с помощью ОЭС выявили, что полученные многослойные покpытия представляют собой системы, состоящие из чередующихся слоев стехиометрических нитридов титана и циркония с толщиной слоя от 10 до 50 нм для различного времени осаждения одного слоя.

На рис. 1 представлены фрагменты рентгенограмм покpытий для различных величин толщины одного слоя. Рентгеноструктурные исследования свидетельствуют, что покpытия TiN/ZrN имеют кубическую структуру и преимущественную ориентацию (111). При толщине слоя 10 нм наблюдается дополнительный пик, соответствующий дифракции на сверхрешетке. Известно, что проявление только первого порядка отражения для много-

слоистой тонкопленочной системы связано с существованием межслоевой шероховатости [7]. В случае ее малого значения (до 1,5 атомных слоев) наблюдается несколько порядков отражения. Так, в работе [8] наблюдались пики сверхрешетки многослойных покрытий TiN/MoN для модуляционного периода 9 нм, TiN/NbN – 12 нм и TiN/TaN – 11 нм. Положение пиков, соответствующих сверхрешетке, зависит исключительно от среднего значения постоянных решеток слоев, модуляционного периода и определяется, исходя из кинематической модели приближения [9].

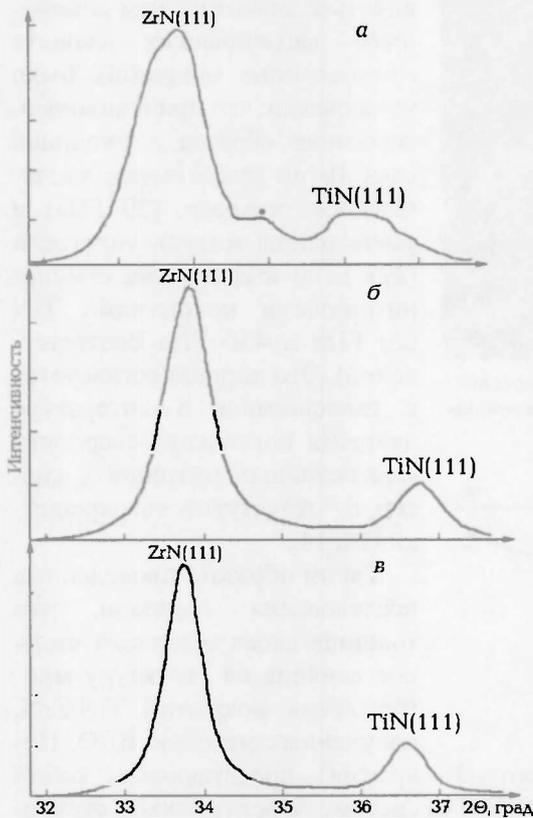


Рис. 1. Фрагмент рентгенограммы многослойных покрытий при толщине слоя: *a* – 10 нм, *б* – 25, *в* – 50 нм. Пик сверхрешетки обозначен «\*»

До настоящего времени не объяснен эффект «сверхрешетки», обусловленный появлением дополнительных пиков отражения, который обычно связывают с образованием скопленных дислокаций на границах и внутри слоев. Формирование последних объясняется различием модулей сдвига и периодов решеток слоев TiN и ZrN (несоответствие постоянных решеток составляет более 8 %). При этом следует также учитывать наличие границ зерен и дефектов внутри каждого слоя [10].

Многослойные покрытия TiN/ZrN, сформированные методом ВДО, имели столбчатый характер роста, причем поперечный размер кристаллитов возрастает с увеличением расстояния от поверхности раздела подложка – покрытие (рис. 2). Подобная структура роста наблюдается для TiN/NbN-, TiN/TaN-систем, полученных тем же методом [8].

Макронапряжения покрытий оценивались из данных рентгеновских измерений для дифракционных линий TiN(111) и ZrN(111) по формуле [11]  $\sigma = -\frac{(\bar{d} - d_0)E}{d_0\nu}$ , где  $E$  и  $\nu$  – мо-

дуль Юнга и коэффициент Пуассона ( $E = 450$  ГПа,  $\nu = 0,22$  [12]),  $d$  – межплоскостное расстояние покрытия,  $d_0$  – межплоскостное расстояние эталона из материала покрытия ( $d_0 = 0,4242$  нм [13]).

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Остаточные напряжения имеют сжимающий характер, и их величина изменяется от  $-7$  до  $-15$  ГПа. С уменьшением толщины слоя происходит увеличение уровня сжимающих напряжений. Наблюдаемое размытие линий на рентгенограммах (см. рис. 1) обусловлено в том числе измельчением блоков мозаики (областей когерентного рассеяния). На рис. 4 представлена зависимость размеров областей когерентного рассеяния, определенная методом аппроксимации [11], от



Рис. 2. РЭМ-изображение поперечного сечения многослойного покрытия TiN/ZrN с толщиной одного слоя 50 нм

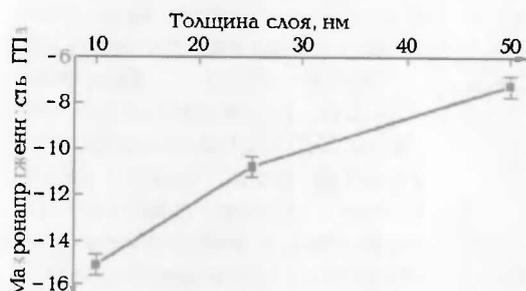


Рис. 3. Зависимость макронапряжений многослойных покрытий TiN/ZrN от толщины одного слоя

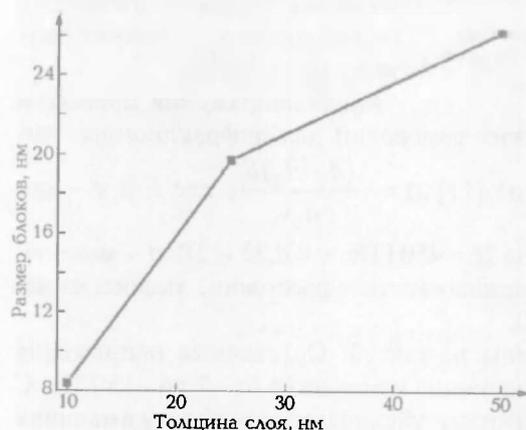


Рис. 4. Зависимость размеров блоков мозаики многослойных покрытий TiN/ZrN от толщины одного слоя

толщины слоя. С уменьшением толщины слоя происходит дробление блоков мозаики на фрагменты размером от 26 до 8 нм.

Изменения микроструктуры с уменьшением толщины слоя и появление в структуре покрытия сверхрешетки должны приводить к значительным изменениям механических свойств многослойных покрытий. Было установлено, что при наноиндентировании образца с толщиной слоя 10 нм существенно увеличивается твердость (29 ГПа) и уменьшается модуль упругости (291 ГПа) в сравнении с монослойными покрытиями TiN (20 ГПа и 450 ГПа соответственно). Это хорошо согласуется с имеющимися в литературе данными повышения твердости многослойных нитридных систем со структурой сверхрешетки [10, 14].

Таким образом, проведенные исследования показали, что толщина слоев оказывает сильное влияние на структуру многослойных покрытий TiN/ZrN, полученных методом ВДО. Покрытия представляют собой систему чередующихся стехиометрических слоев TiN и ZrN с преимущественной ориентацией (111). Многослойные покрытия имеют столбчатый характер роста. С уменьшением толщины слоя происходит дробление блоков мозаики (до 8 нм) и увеличение внутренних сжимающих напряжений (до 15 ГПа). С уменьшением толщины одного слоя до 10 нм в многослойной системе TiN/ZrN формируется сверхрешетка. Эта система обладает повышенной твердостью (29 ГПа).

1. Holbeck H., Schulz H. // Thin Solid Films. 1987. Vol. 153. P. 382.

2. Larsson M., Bromark M., Hedenqvist P., Hogmark S. // Surf. Coat. Technol. 1996. Vol. 86-87. P. 351.
3. Mordin M., Wiklund U., Larsson M. et al. // Conference Proc. Nortrib'96. Metal Forming and Boundary Lubrication. Session C2. 1996. Vol. 1.
4. Khadasevich V.V., Solodukhin I.A., Uglov V.V. et al. // Surf. Coat. Technol. 1998. Vol. 98. P. 1433.
5. Шукевич А. К., Лухвич А. А., Шарандо В. И. // Дефектоскопия. 2000. № 1. С. 31.
6. Oliver W.C., Pharr J.M. // J. Mater. Res. 1992. Vol. 7. № 6. P. 1564.
7. Tavares C.J., Rebouta L., Almeida B., Bessa e Sousa J. // Surf. Coat. Technol. 1998. Vol. 100-101. P. 65.
8. Nordin M., Larsson M., Hogmark S. // Surf. Coat. Technol. 1998. Vol. 106. P. 234.
9. Segmuller A., Blakeslee A.E. // Appl. J. Cryst. 1973. Vol. 6. P. 19.
10. Shinn M., Hultman L., Barnett S.A. // J. Mater. Res. 1992. Vol. 7. P. 901.
11. Горелик С.С., Расторгуев Л.Н., Скаков Ю.А. Рентгенографический и электроннооптический анализ. М., 1970.
12. Karlsson L., Hultman L., Sundgren J.E. // Thin Solid Films. 2000. Vol. 371. P. 167.
13. Холек Х. Двойные и тройные карбидные и нитридные системы переходных металлов: Справ. изд. М., 1988.
14. Chu X., Barnett S.A., Wong M.S., Sproul W.D. // Surf. Coat. Technol. 1993. Vol. 57. P. 13.

Поступила в редакцию 29.06.2002.

*Владимир Васильевич Углов* – кандидат физико-математических наук, доцент.

*Сергей Владимирович Злоцкий* – аспирант кафедры физики твердого тела. Научный руководитель – В.В. Углов.

*Елена Константиновна Воропай* – студентка 5-го курса физического факультета. Научный руководитель – В.В. Углов.

УДК 621.378:621.382

Д.В. ПОЗДНЯКОВ

## КОГЕРЕНТНОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛН В КВАНТОВОЙ ЯМЕ ДВУХБАРЬЕРНОЙ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

An approach to calculation of the electron waves coherence length in quantum well of the double barrier resonant tunneling structure when impurity, interface roughness and polar optical phonon scattering take place was developed.

Известно, что процессы рассеяния электронов оказывают значительное влияние на электрические свойства двухбарьерных резонансно-туннельных структур (ДБРТС) [1–5]. Именно рассеяние обуславливает разрушение когерентности электронных волн в квантовой яме ДБРТС, что в свою очередь определяет поведение вольт-амперных характеристик (ВАХ) таких структур. Для учета процесса разрушения когерентности, как правило, используется средняя длина свободного пробега электрона (СДСПЭ) [1–10], хотя более естественным было бы использование длины когерентности электронных волн (ДКЭВ) [11, 12]. По нашему мнению, именно некорректное использование СДСПЭ вместо ДКЭВ резко снижает согласование расчетной ВАХ с экспериментальными данными. С учетом этого обстоятельства цель данной работы состоит в повышении точности моделирования ВАХ ДБРТС при замене в моделях СДСПЭ на ДКЭВ.

Рассмотрим прежде всего различие между СДСПЭ и ДКЭВ. Под СДСПЭ обычно понимается средняя длина релаксации импульса электрона (по на-

правлению, если процесс рассеяния упругий; по направлению и величине, если процесс рассеяния неупругий) [13, 14]. Для того чтобы ввести ДКЭВ, можно воспользоваться оптической аналогией так же, как это было сделано в работах [10, 11] при рассмотрении ДБРТС как резонатора Фабри – Перо. Для наблюдения резонанса в резонаторе Фабри – Перо, т. е. для получения устойчивой во времени интерференционной картины, необходимо, чтобы световые волны удовлетворяли определенным фазовым соотношениям в случае многократных отражений от зеркал, что и характеризует их когерентность. В оптике для определения степени когерентности вводятся понятия длины и времени когерентности световых волн, под которыми понимают соответствующие расстояния между такими точками в пространстве и времени, что фазовые соотношения в них для различных волн изменяются на  $\pi$  радиан [15]. При этом длина и время когерентности связаны между собой следующим образом:

$$l = v \cdot \tau, \quad (1)$$

где  $l$  – длина когерентности,  $\tau$  – время когерентности,  $v$  – фазовая скорость волны.

Пользуясь далее оптической аналогией, можно считать, что ДКЭВ имеет тот же смысл, что и длина когерентности для световых волн. Теперь с процессом рассеяния, обуславливающим разрушение когерентности электронных волн, необходимо сопоставить определенную величину ДКЭВ. Сделать это несложно, если учитывать, что акт рассеяния электрона не означает обязательную потерю когерентности, как это предполагалось в работах [9, 10]. Суть этого явления в том, что мы имеем дело не с одним электроном, а с огромным ансамблем таких частиц, и уход электрона из каждого конкретного состояния обязательно будет сопровождаться приходом в это состояние другого электрона, так как в целом система электронов находится в динамическом равновесии. Тогда на основании принципа тождественности частиц акт рассеяния электрона может лишь означать возможную потерю когерентности электронной волной в данном состоянии, т. е. в этом случае будет происходить изменение фазы волны за счет рассеяния. Исходя из сказанного, под ДКЭВ можно понимать среднюю длину релаксации фазы электронных волн. Заметим, что электрон-частица сопоставляется в данном случае с СДСПЭ, а электронные волны – с ДКЭВ. Это очень важно, поскольку данное замечание четко разграничивает области использования СДСПЭ и ДКЭВ. В нашем же случае принципы работы ДБРТС основаны на волновых свойствах электронов, что исключает возможность построения адекватной модели данного прибора при использовании такого параметра, как СДСПЭ.

Для примера оценим величину продольной ДКЭВ в квантовой яме ДБРТС на основе GaAs. Будем учитывать три возможных механизма рассеяния электронов: на полярных оптических фононах, на шероховатостях поверхностей и на ионизированной примеси. Именно эти механизмы рассеяния носителей зарядов в GaAs являются определяющими. Вначале рассмотрим рассеяние на ионизированной примеси. Взаимодействие электронов с примесью можно представить как процесс распространения электронных волн через объемную дифракционную решетку. А поскольку примесь расположена хаотически в пространстве, то устойчивой интерференционной картины в этом случае наблюдаться не будет, что эквивалентно утрате электронными волнами когерентности на некотором количестве ди-

фракционных плоскостей. Количество таких плоскостей определяется среднеквадратическим отклонением фазы электронных волн. В нашем случае величина ДКЭВ будет равна утроенному периоду дифракционной решетки

$$l_n = 3N_L^{-1}, \quad (2)$$

где  $l_n$  – продольная ДКЭВ, обусловленная рассеянием на ионизированной примеси,  $N_L$  – продольная линейная ее концентрация в квантовой яме.

С рассеянием на полярных оптических фононах дело обстоит несколько иначе. Если ионизированная примесь создает стационарный во времени и изменяющийся в пространстве возмущающий потенциал, то полярные оптические фононы образуют постоянный в пространстве и изменяющийся во времени возмущающий потенциал [13, 14]. Следовательно, для рассеяния на полярных оптических фононах по аналогии с предыдущим случаем, заменив пространственную дифракционную решетку на временную с учетом равенства (1), можно получить следующее соотношение:

$$l_\phi = \frac{3\hbar k_x}{2m_d\omega}, \quad (3)$$

где  $l_\phi$  – продольная ДКЭВ, обусловленная рассеянием на полярных оптических фононах,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $k_x$  – продольная компонента волнового вектора электрона в центре квантовой ямы,  $m_d$  – эффективная масса электрона,  $\omega$  – циклическая частота полярного оптического фонона.

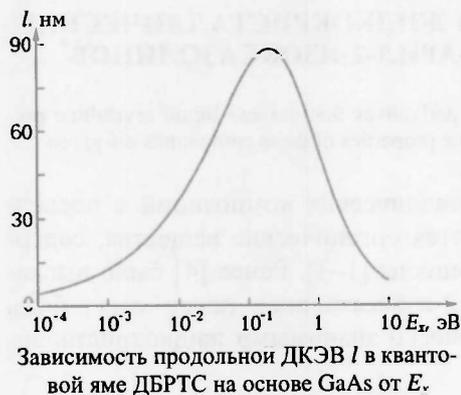
Продольную ДКЭВ, обусловленную рассеянием на шероховатостях поверхностей между барьерами и квантовой ямой  $l_w$ , можно получить, анализируя фазовый сдвиг электронных волн, отраженных от границ квантовая яма – потенциальный барьер

$$l_w = \frac{\pi^2 a}{(k_x \sigma)^2}, \quad (4)$$

где  $a$  – ширина квантовой ямы,  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение границы квантовая яма – потенциальный барьер от идеально плоской поверхности.

Зависимость продольной ДКЭВ  $l$  в квантовой яме ДБРТС на основе GaAs от продольной компоненты кинетической энергии электрона в центре этой ямы  $E_x$  и при параболическом законе дисперсии с учетом всех рассмотренных выше механизмов разрушения когерентности электронных волн представлена на рисунке. При этом использовались следующие значения расчетных параметров:

$$N_L = 10^7 \text{ м}^{-1}, \quad a = 5 \text{ нм}, \quad \sigma = 0,6 \text{ нм}.$$



Из рисунка видно, что с учетом равенств (3), (4) потеря когерентности при низких энергиях происходит в основном за счет рассеяния на полярных оптических фононах, а при высоких – путем рассеяния на шероховатостях поверхностей.

В заключение хотелось бы сделать ряд важных замечаний:

1. Численные значения продольной ДКЭВ для различных механизмов рассеяния оказываются достаточно близкими к значениям продольной

СДСПЭ в квантовой яме ДБРТС на основе GaAs.

2. Выражения (2)–(4) являются общими в том смысле, что могут применяться при любом значении электрического поля, приложенного к ДБРТС.

3. Зависимость продольной ДКЭВ только от продольной компоненты кинетической энергии электрона обуславливает возможность применения формул (2)–(4) для любой размерности электронного газа в квантовой яме ДБРТС.

Таким образом, предложенный в настоящей работе подход к учету разрушения когерентности электронных волн в квантовой яме ДБРТС является более строгим, чем матричный подход с использованием СДСПЭ [7–10]. Кроме того, он позволяет существенно сократить вычисления для расчета ВАХ ДБРТС и других характеристик подобных структур.

1. Борздов В.М., Поздняков Д.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2002. № 1. С. 26.
2. Roblin P., Liou W.-R. // Physical Review B. 1993. Vol. 47. № 4. P. 2146.
3. Jonson M., Grincwaig A. // Appl. Phys. Lett. 1987. Vol. 51. № 21. P. 1729.
4. Zou N., Chen Q., Willander M. // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. № 3. P. 1829.
5. Fu Y., Chen Q., Willander M. // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74. № 3. P. 1874.
6. Борздов В.М., Врубель М.М., Мулярчик С.Г., Хомич А.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 3. С. 28.
7. Borzdov V.M., Vruble M.M., Mulyarchik S.G., Homich A.V. // Phys. Low-Dim. Struct. 1997. Vol. 7. P. 67.
8. Борздов В.М., Комаров Ф.Ф. Моделирование электрофизических свойств твердотельных слоистых структур интегральной электроники. Мн., 1999.
9. Iannaccone G., Pellegrini B. // Physical Review B. 1995. Vol. 52. № 24. P. 17406.
10. Yuming H. // J. Phys. C: Solid State Phys. 1988. Vol. 21. P. L23.
11. Тагер А.С. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1987. № 9. С. 21.
12. Йогансен Л.В. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. № 2. С. 207.
13. Шур М. Современные приборы на основе арсенида галлия. М., 1991.
14. Иващенко В.М., Митин В.В. Моделирование кинетических явлений в полупроводниках. Метод Монте-Карло. Киев, 1990.
15. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М., 1980.

Поступила в редакцию 21.06.2002.

*Дмитрий Викторович Поздняков* – аспирант кафедры физической электроники. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники В.М. Борздов.

УДК 532.783 + 547.786

*А.А. МИНЬКО, В.С. БЕЗБОРОДОВ, Н.Н. КОВГАНКО, В.И. ЛАПАНИК*

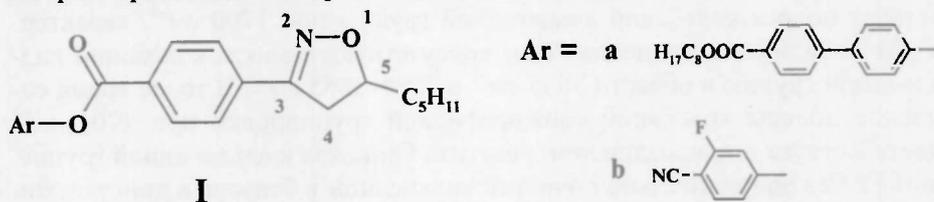
### **ПОЛУЧЕНИЕ, СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОВЫХ 3-АМИЛ-5-АРИЛ-2-ИЗОКСАЗОЛИНОВ\***

Synthesis of new 3-amyl-5-aryl-2-isoxazolines derivatives that possess liquid crystalline properties is described. The spectral and liquid crystalline properties of these compounds are given.

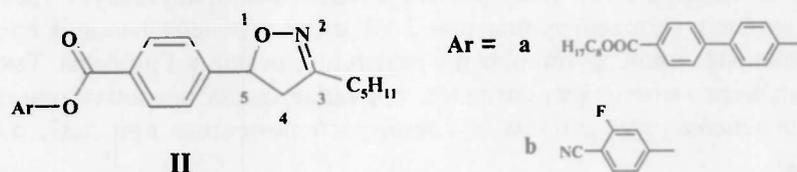
В качестве компонентов жидкокристаллических композиций в последнее время все более широко используются органические вещества, содержащие в структуре пятичленные гетероциклы [1–3]. Ранее [4] было высказано предположение о том, что среди 2-изоксазолинов также могут быть найдены вещества, обладающие практически значимыми жидкокристалли-

\* Авторы статьи – научные работники НИИФП БГУ им. А.Н. Севченко.

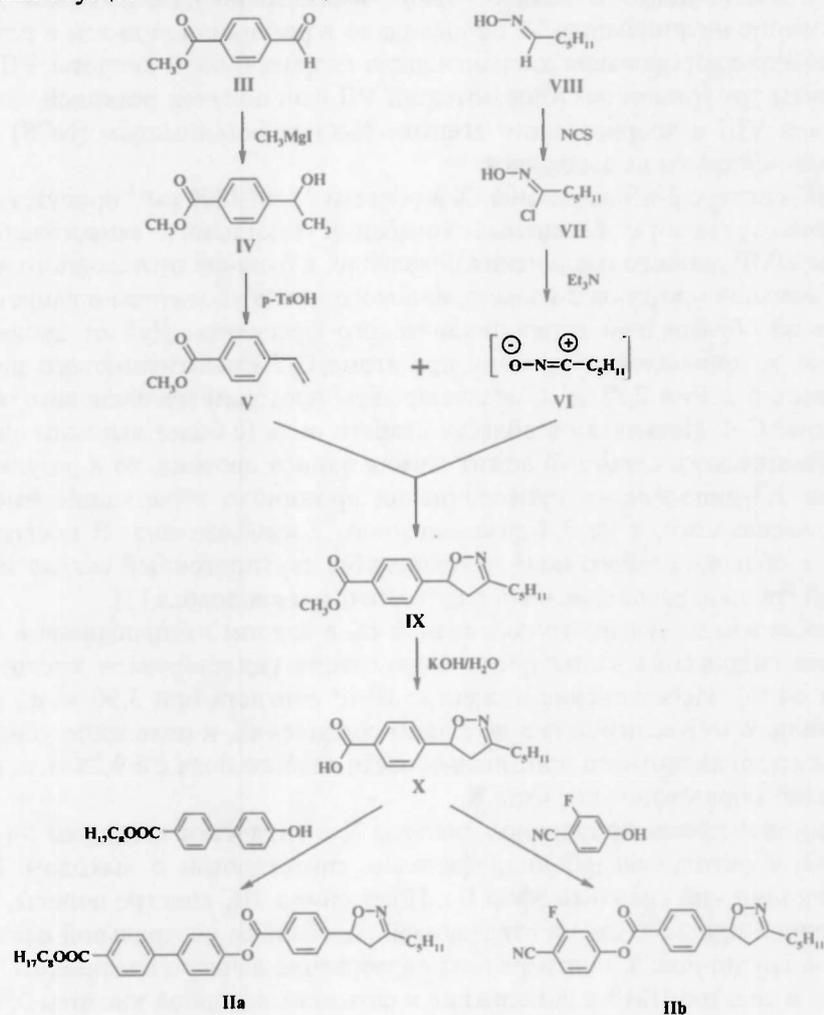
ческими свойствами. Нами получены и изучены мезоморфные свойства некоторых производных 3-арил-5-амил-2-изоксазолинов I:



Целью данной работы явилось получение и изучение спектральных и жидкокристаллических свойств соединений, содержащих в 2-изоксазолиновом цикле иное расположение заместителей – 3-амил-5-арил производных II:



Нами осуществлен пятистадийный синтез данных соединений:



На первой стадии синтеза из альдегида III реакцией Гриньяра с метилмагниййодидом получен спирт IV. В ИК-спектре данного соединения отсутствует полоса колебаний альдегидной группы при  $1700\text{ см}^{-1}$ , характерная для исходного соединения III, и присутствуют полосы колебаний гидроксильной группы в области  $3605\text{ см}^{-1}$  и  $3560\text{--}3365\text{ см}^{-1}$ . В то же время сохранение полосы колебаний сложноэфирной группировки при  $1705\text{ см}^{-1}$  свидетельствует о присоединении реактива Гриньяра к альдегидной группе. Спирт IV без дополнительной очистки кипячением в бензоле в присутствии *para*-толуолсульфокислоты в качестве катализатора подвергли дегидратации, в результате которой был получен алкен V. Об образовании в данном соединении двойной связи свидетельствуют исчезновение в ИК-спектре характерных полос колебания гидроксильной группы и появление полосы при  $980\text{ см}^{-1}$ . В спектре ПМР полученного соединения присутствует трехпротонный синглет метоксигруппы при 3,92 м. д., подтверждающий сохранность сложноэфирной группировки в результате реакции Гриньяра. Также в данном спектре имеется ряд сигналов, принадлежащих протонам при двойной связи алкена: три дублета дублета, расположенные при 5,37, 5,85 и 6,76 м. д.

Дальнейшей реакцией 1,3-диполярного присоединения алкена V с нитрилоксидом VI получен 3-амил-5-арил-2-изоксазолин IX с выходом 52%. Образование нитрилоксида VI происходило в реакционной смеси в результате дегидрохлорирования хлорангидрида гидроксамовой кислоты VII под действием триэтиламина. Хлорангидрид VII был получен реакцией оксима гексаналя VIII с хлорирующим агентом N-хлорсукцинимидом (NCS) и из реакционной смеси не выделялся.

В ИК-спектре 2-изоксазолина IX в области  $2850\text{--}3000\text{ см}^{-1}$  присутствуют интенсивные полосы валентных колебаний алкильного заместителя. В спектре ПМР данного соединения появление, в отличие от исходного алкена V, сигналов протонов 2-изоксазолинового цикла убедительно свидетельствуют об образовании гетероциклического фрагмента. Дублет дублета с  $\delta$  5,57 м. д. принадлежит протону при атоме С-5 изоксазолинового цикла. Сигналы с  $\delta$  2,36 и 2,83 м. д. отвечают двум протонам метиленового звена при атоме С-4. Поскольку в области слабого поля (с более высоким значением химического сдвига  $\delta$ ) лежит сигнал одного протона, то в результате реакции 1,3-диполярного присоединения произошло образование именно 3,5-дизамещенного, а не 3,4-дизамещенного 2-изоксазолина. В последнем случае в области слабого поля находился бы двухпротонный сигнал метиленовой группы, расположенной рядом с атомом кислорода [5].

Гидролизом полученного соединения IX в водном изопропанол в присутствии гидроксида калия после подкисления синтезировали кислоту X (выход 84%). Исчезновение в спектре ПМР синглета при 3,90 м. д., принадлежащего метоксигруппе в исходном соединении, и появление уширенного синглета кислотного протона в области слабого поля с  $\delta$  9,28 м. д. подтверждают образование кислоты X.

Взаимодействием полученной кислоты X с оптически активным *S*-(-)-4-гидрокси-4'-октилоксикарбонилдифенилом синтезирован с выходом 75% тетрациклический сложный эфир IIa. Появление в ИК-спектре полосы, расположенной при  $1700\text{ см}^{-1}$  и отвечающей колебаниям центральной сложноэфирной группировки, подтверждает образование данного соединения. Появление в спектре ПМР в дополнение к сигналам исходной кислоты X сиг-

налов алкильных и ароматических протонов фенольной части свидетельствует о строении сложного эфира *IIa*.

При реакции кислоты *X* с 3-фтор-4-цианофенолом синтезирован с выходом 82 % трициклический сложный эфир *IIb*. Его строение подтверждено аналогичным образом данными ИК- и ПМР-спектров.

Исследования мезоморфных свойств полученных три- и тетрациклических эфиров *IIa* и *IIb* показали, что только соединение *IIa* образует монотропную смектическую *A*-фазу с температурным интервалом существования 124–127 °С. Соединение *IIb* не образует никакой жидкокристаллической фазы и переходит при нагревании сразу в изотропную жидкость при 53 °С.

В отличие от 3-арил-5-амил-2-изоксазолинов *I* сложные эфиры *IIa* и *IIb* обладают более низкой температурой перехода в изотропную жидкость и даже отсутствием мезофазных свойств. Данный факт можно объяснить исчезновением сопряжения между связью  $C=N$  изоксазолинового цикла и ароматическим циклом в соединениях *IIa* и *IIb* по сравнению с соединениями *Ia* и *Ib*, а также нелинейной формой молекулы, искаженной за счет 2-изоксазолинового цикла.

Исследование электрооптических и динамических параметров жидкокристаллических смесей (табл. 1), содержащих трициклический сложный эфир *IIb* в качестве добавки, показало, что данное соединение может применяться в качестве компонента таких смесей, характеризующихся низкими значениями порогового напряжения и напряжения насыщения для твист-нематического эффекта и малыми значениями времени включения и выключения.

Таблица 1

Электрооптические и динамические параметры жидкокристаллических смесей\*

Соединение-смесь	$V_{10}$ , В	$V_{90}$ , В	$P_{10-90}$	$N_{10-90}$	$\tau_{вкл}$ , мс	$\tau_{выкл}$ , мс
<i>IIb</i> в смеси <i>A</i> **	2,04	2,80	0,373	11	34	72
<i>IIb</i> в смеси <i>B</i> **	1,28	1,78	0,390	10	23	78

Примечание.  $V_{10}$  – напряжение, при котором ячейка пропускает 10 % падающего на нее света;  $V_{90}$  – напряжение, при котором ячейка пропускает 90 % падающего на нее света;  $P_{10-90} = (V_{90} - V_{10})/V_{10}$  – параметр крутизны вольт-контрастной зависимости;  $N_{10-90}$  – число адресуемых строк для твист-нематического эффекта;  $\tau_{вкл}$  – время включения и  $\tau_{выкл}$  – время выключения.

\*Жидкокристаллическая смесь состоит из 80 % базовой смеси и 20 % соединения *IIb*.

\*\*Состав базовой смеси:

*A* (неполярная матрица): 4-этоксифениловый эфир *транс*-4-бутилциклогексанкарбоновой кислоты – 35 %, 4-бутоксифениловый эфир *транс*-4-бутилциклогексанкарбоновой кислоты, *транс*-4-(4-этоксифенил)-1-пропилциклогексан – 30 %.

*B* (полярная матрица): 4-амил-4'-цианобифенил – 35 %, 4-октил-4'-цианобифенил – 15 %, 4-пропокси-4'-цианобифенил – 25 %, 4-этоксифениловый эфир *транс*-4-бутилциклогексанкарбоновой кислоты – 20 %, 4-цианобифениловый эфир *транс*-4-бутилциклогексанкарбоновой кислоты – 5 %.

Таким образом, нами осуществлен синтез и исследование спектральных и жидкокристаллических новых производных 3-амил-5-арил-2-изоксазолинов. Данные соединения представляют интерес в качестве компонентов жидкокристаллических смесей и могут найти применение при производстве устройств отображения информации.

#### Экспериментальная часть

Температуры плавления и фазовых переходов определены с помощью нагревательного столика, соединенного с поляризационным микроскопом.

ИК-спектры получены в растворе хлороформа на приборе Specord 75 IR (спектр кислоты X записан в растворе тетрагидрофурана). Спектры ПМР растворов в дейтерохлороформе записаны на ЯМР-спектрометрах Tesla BS-567A (80 МГц) и Tesla BS-567 (100 МГц), спектр кислоты X – в растворе гексадейтероацетона. Химические сдвиги приведены относительно ГМДСО (гексаметилдисилоксана) как внутреннего стандарта (табл. 2).

Таблица 2

Характеристики полученных соединений				
Соединение	Спектр ПМР, $\delta$ , м. д.	ИК-спектр, $\nu$ , см <sup>-1</sup>	$T_{\text{пл}}, ^\circ\text{C}$ (растворитель)	Выход, %
V	3.92 (3H, с, MeO), 5.37 (1H, дд, $J_1$ 0.9 Гц, $J_2$ 10.8 Гц, <i>цис</i> -), 5.85 (1H, дд, $J_1$ 0.9 Гц, $J_2$ 17.6 Гц, <i>транс</i> -) (=CH <sub>2</sub> ), 6.76 (1H, дд, $J_1$ 10.8 Гц, $J_2$ 17.6 Гц, =CHAr), 7.45 (2H, д, $J$ 8.2 Гц, аром. протоны), 7.99 (2H, д, $J$ 8.2 Гц, аром. протоны)	3025, 3005 (C–H <sub>аром</sub> ), 2950, 2840 (C–H <sub>алкил</sub> ), 1705, 1275, 1105 (COOMe), 1620, 980 (C=C), 1600, 1500 (C=C <sub>аром</sub> )	$T_{\text{кип}}^{\text{а}}$ 183– 184 °C/40 мм рт. ст. $T_{\text{пл}}$ 32–33	40
IX	0.87 (3H, т, $J$ 6.3 Гц, CH <sub>3</sub> ), 1.20–1.78 (6H, м, CH <sub>2</sub> -группы), 2.36 (2H, т, $J$ 7.7 Гц, 3'-CH <sub>2</sub> ), 2.83 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 3.40 (1H, дд, $J_1$ 10.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 3.90 (3H, с, OCH <sub>3</sub> ), 5.57 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 10.7 Гц, 5-CH), 7.37 (2H, д, $J$ 6.7 Гц, аром. протоны), 8.00 (2H, д, $J$ 6.7 Гц, аром. протоны)	3015, 3000 (C–H <sub>аром</sub> ), 2950, 2920, 2850 (C–H <sub>алкил</sub> ), 1710, 1275, 1100 (COOMe), 1600, 1505 (C=C <sub>аром</sub> )	45–46 (этанол)	52
X	0.88 (3H, т, $J$ 6.3 Гц, CH <sub>3</sub> ), 1.20–1.72 (6H, м, CH <sub>2</sub> -группы), 2.38 (2H, т, $J$ 7.7 Гц, 3'-CH <sub>2</sub> ), 2.85 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 3.42 (1H, дд, $J_1$ 10.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 5.61 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 10.7 Гц, 5-CH), 7.42 (2H, д, $J$ 6.7 Гц, аром. протоны), 8.10 (2H, д, $J$ 6.7 Гц, аром. протоны), 9.28 (1H, уш. с, COOH)	1685 (C=O), 1600, 1500 (C=C <sub>аром</sub> )	104,5–106 (гексан – толуол)	84
IIIa	0.87 (3H, т, $J$ 6.3 Гц, CH <sub>3</sub> ), 1.20–1.75 (19H, м, CH <sub>3</sub> -группа и CH <sub>2</sub> -группы), 2.39 (2H, т, $J$ 7.7 Гц, 3'-CH <sub>2</sub> ), 2.87 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 3.45 (1H, м, O-CH), 5.63 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 10.7 Гц, 5-CH), 7.30 (2H, д, $J$ 8.7 Гц, аром. протоны), 7.48 (2H, д, $J$ 8.2 Гц, аром. протоны), 7.61 (2H, д, $J$ 2.7 Гц, аром. протоны), 7.69 (2H, д, $J$ 2.7 Гц, аром. протоны), 8.11 (2H, д, $J$ 8.7 Гц, аром. протоны), 8.20 (2H, д, $J$ 8.2 Гц, аром. протоны)	3020, (C–H <sub>аром</sub> ), 2955, 2925, 2850 (C–H <sub>алкил</sub> ), 1725 (COOOCt*), 1700, 1255, 1060 (COOAr), 1600, 1495 (C=C <sub>аром</sub> )	Нагревание: <i>Cr</i> 136 I. Охлаждение: <i>Cr</i> 124 <i>SmA</i> 127 I.	75
IIIb	0.89 (3H, т, $J$ 6.3 Гц, CH <sub>3</sub> ), 1.20–1.68 (6H, м, CH <sub>2</sub> -группы), 2.38 (2H, т, $J$ 7.7 Гц, 3'-CH <sub>2</sub> ), 2.85 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 3.46 (1H, дд, $J_1$ 10.7 Гц, $J_2$ 16.5 Гц, 4-CH), 5.63 (1H, дд, $J_1$ 7.7 Гц, $J_2$ 10.7 Гц, 5-CH), 7.20 (2H, д, $J$ 10.4 Гц, аром. протоны), 7.49 (2H, д, $J$ 9.5 Гц, аром. протоны), 7.70 (1H, т, $J$ 9.5 Гц, аром. протон), 8.17 (2H, д, $J$ 10.4 Гц, аром. протоны)	3020 (C–H <sub>аром</sub> ), 2960, 2935, 2865 (C–H <sub>алкил</sub> ), 2230 (C≡N), 1740, 1250, 1055 (COOAr), 1600, 1495 (C=C <sub>аром</sub> )	53 (метанол)	82

**Метилловый эфир 4-винилбензойной кислоты (V).** К раствору 20,0 г метилового эфира 4-формилбензойной кислоты III в 100 мл эфира добавили по каплям раствор метилмагнийиодида, полученный из 3,2 г магния и

9,4 мл метилиодида в 40 мл эфира. Реакционную смесь дополнительно перемешивали 1,5 ч, оставили на 12 ч при комнатной температуре, после чего добавили по каплям 140 мл 10 %-й серной кислоты. Органический слой отделили, водный экстрагировали 100 мл эфира. Объединенный органический слой промыли последовательно насыщенным раствором бикарбоната натрия, водой и сушили сульфатом натрия. Растворитель удалили при атмосферном давлении, образовавшийся в виде масла спирт IV (ИК-спектр ( $\text{CHCl}_3$ ,  $\text{cm}^{-1}$ ): 3605, 3560–3365 (O–H), 3025, 3000 (C–H<sub>аром</sub>), 2975, 2950, 2870 (C–H<sub>алкил</sub>), 1705, 1265, 1100 (COOMe)) использовали далее без дополнительной очистки. Для дегидратации спирта IV остаток, полученный после отгонки эфира, растворили в 100 мл толуола, добавили каталитические количества *para*-толуолсульфокислоты и кипятили с использованием насадки Дина – Старка в течение 2 ч. После охлаждения до комнатной температуры реакционную смесь промыли два раза водой и высушили сульфатом натрия. Растворитель удалили на роторном испарителе, остаток перегнали при пониженном давлении. Получили 7,8 г стирола V.

**Метилловый эфир 4-(3-амил-4,5-дигидроизоксазол-5-ил)бензойной кислоты (IX).** К раствору 2,4 г оксима гексанала VIII в 40 мл хлороформа добавили 3,3 г N-хлорсукцинимиды, две капли пиридина для начала реакции и перемешивали при комнатной температуре в течение 30 мин. Затем добавили раствор 7,5 г стирола V в 30 мл хлороформа, охладили до 0 °C и в течение 2 ч добавляли по каплям раствор 3,5 мл триэтиламина в 25 мл хлороформа. Через 30 мин добавили раствор гидроксимоилхлорида капроновой кислоты VII, полученный из 1,2 г оксима VIII, и 1,6 г N-хлорсукцинимиды в 15 мл метиленхлорида, дополнительно добавляли по каплям раствор 1,7 мл триэтиламина в 15 мл метиленхлорида в течение 1 ч. Реакционную смесь перемешивали 12 ч при комнатной температуре, затем обработали 25 мл разбавленной соляной кислоты (1:5). Органический слой отделили и промыли последовательно насыщенным раствором бикарбоната натрия и водой, высушили сульфатом натрия. Растворитель отогнали при пониженном давлении, остаток перекристаллизовали из смеси этанол – 2-пропанол. Получили 4,0 г изоксазолина IX. Двукратным упариванием и перекристаллизацией маточного раствора получили дополнительно 0,5 г изоксазолина IX.

**4-(3-Амил-4,5-дигидроизоксазол-5-ил)бензойная кислота (X).** К нагретому до 50 °C раствору 3,9 г изоксазолина IX в 30 мл 2-пропанола добавили раствор 1,0 г гидроксида калия в 10 мл воды. Реакционную смесь кипятили при перемешивании в течение 1,5 ч, затем охладили до комнатной температуры. После подкисления разбавленной соляной кислоты смесь нагрели до кипения и охладили до комнатной температуры. Выпавшую кислоту X экстрагировали дважды по 70 мл этилацетатом. Объединенный органический слой промыли два раза водой, высушили сульфатом натрия. Растворитель удалили при пониженном давлении, остаток перекристаллизовали из смеси гексан – толуол. Получили 3,1 г кислоты X.

**(S)-1-Метилгептиловый эфир 4'-[4-(3-фенил-4,5-дигидроизоксазол-5-ил)-бензоилокси]бифенил-4-карбоновой кислоты (IIa).** К смеси 0,50 г кислоты X, 0,69 г (S)-1-метилгептилового эфира 4'-гидроксибифенилкарбоновой кислоты и 0,41 г дициклогексилкарбодиимида в 15 мл метиленхлорида добавили каталитические количества N,N-диметиламинопиридина. Реакционную смесь перемешивали в течение 20 ч при комнатной температуре. Выпавший осадок отфильтровали через слой оксида алюминия и про-

мыли метиленхлоридом. Растворитель удалили при пониженном давлении, остаток перекристаллизовали из смеси 2-пропанол-метилэтилкетон, в результате получили 0,77 г сложного эфира *IIa*. После упаривания маточного раствора и перекристаллизации остатка из смеси 2-пропанол-метилэтилкетон выход соединения *IIa* составил 0,05 г. Суммарный выход 0,82 г.

**4-Циано-3-фторфениловый эфир 4-(3-амил-4,5-дигидроизоксазол-5-ил)бензойной кислоты (*IIb*)** получен аналогично соединению *IIa*.

1. Brettle R., Dunmur D. A., Marson C. M. et al. // *Liq. Cryst.* 1993. Vol. 13. P. 515.

2. Iglesias R., Serrano J. L., Sierra T. // *Liq. Cryst.* 1997. Vol. 22. P. 37.

3. Friedman M. R., Toyne K. J., Goodby J. W., Hird M. // *Liq. Cryst.* 2001. Vol. 28. P. 901.

4. Bezborodov V. S., Lee C. J., Uh K. H. 6<sup>th</sup> International Conference on Ferroelectric Liquid Crystals. Conference Summaries. Brest, 1997. P. 152.

5. Kanemasa S., Tsuge O. // *Heterocycles.* 1990. Vol. 30. № 1. P. 719.

Поступила в редакцию 03.09.2002.

*Анатолий Антонович Минько* – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по науке.

*Владимир Степанович Безбородов* – доктор химических наук, главный научный сотрудник лаборатории оптики конденсированных сред.

*Николай Николаевич Ковганко* – младший научный сотрудник лаборатории оптики конденсированных сред.

*Валерий Иванович Лапаник* – старший научный сотрудник лаборатории оптики конденсированных сред.

# Математика и информатика



УДК 539.3; 622.83

М.А. ЖУРАВКОВ, С.В. ПАВЛОВ

## К МОДЕЛИРОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ТРЕЩИН

In paper the problem about the estimation of stress intensity factor for arbitrary arranged cracks in case of single-axis loading with using of a method of sections is resolved. On the basis of the solution of this problem the model of the behavior of cracks system in rock's mass is built.

В работе [1] показана возможность применения метода сечений для решения задач, связанных с изучением напряженного состояния в деформируемых твердых телах с трещинами, в частности для оценки коэффициента интенсивности напряжения в окрестности вершины трещины. Авторами данной статьи на основании использования метода сечений рассматривается задача построения модели для изучения состояния областей породного массива в случае наличия в них нерегулярных систем трещин.

Отметим некоторые аспекты применения метода сечений к описанию поведения трещин в твердых деформируемых телах. Выделим часть тела сечением (которое может быть и ломаным) таким образом, чтобы трещина принадлежала линии сечения (рис. 1), и запишем условия равновесия внешних и внутренних сил, действующих на оставшуюся часть тела. При составлении этих условий принимаем во внимание асимптотическое выражение для определения напряжений в окрестности вершины трещины.

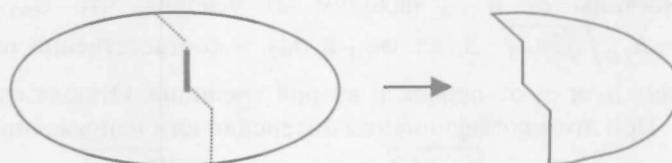


Рис. 1. Принципиальная схема использования метода сечений

Дополнительные усилия, возникающие у вершины трещины, определяются выражением

$$\int_0^a \sigma_{\theta} dr, \quad (1)$$

где величина  $a$  находится из условия, что  $\sigma_{\theta}$  при  $r=a$  равна номинальному напряжению в теле (без трещины).

Таким образом, условие равновесия сводится к тому, что усилие, не передающееся через линию трещины, компенсируется дополнительным усилием от концентрации напряжений у вершины трещины.

**Оценка коэффициентов интенсивности напряжений для систем трещин в случае плоскодеформированного состояния**

Кроме того, что сечение может быть ломаным, оно может содержать любое количество трещин. Поэтому, не нарушая общности, рассмотрим состояние бесконечной плоскости, ослабленной двумя трещинами, расположенными вдоль действительной оси. Пусть их длины равны соответственно  $2l_1$  и  $2l_2$ . Плоскость с трещинами находится в равновесии. Силовое нагружение на плоскость представляет собой равномерное растягивающее усилие интенсивности  $p$ , действующее перпендикулярно линии трещин.

Сечение (в данном случае совпадает с действительной осью) в рассматриваемой плоскости проводим таким образом, чтобы обе трещины принадлежали его линии. В соответствии с этим на основании (1) запишем условия равновесия отдельно для каждой половины трещин, а именно: не передающиеся через берега трещин усилия приравняем к дополнительным, возникающим у вершин трещин.

Для внешних концов трещин данные условия имеют вид [2]:

$$pl_1 = \int_0^{a_1} \left( \frac{K'_{(1)}}{\sqrt{2\pi r}} \right) dr, \quad pi_2 = \int_0^{a_2} \left( \frac{K'_{(2)}}{\sqrt{2\pi r}} \right) dr, \quad (2)$$

где  $a_1 = \sqrt{K'_{(1)}/2\pi p^2}$ ,  $a_2 = \sqrt{K'_{(2)}/2\pi p^2}$ . Значения  $a_i$  найдены на основании (1) относительно определения величины  $a$ .

Отсюда следует, что значения коэффициентов интенсивности напряжений равны:

$$K'_{(1)} = p\sqrt{\pi l_1}, \quad K'_{(2)} = p\sqrt{\pi l_2}. \quad (3)$$

Соответственно для внутренних концов трещин можно записать:

$$pl_1 = \int_0^{a_1} \sigma_{\theta(1)} dr, \quad pi_2 = \int_0^{a_2} \sigma_{\theta(2)} dr. \quad (4)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений для внутренних концов трещин зависят от расстояния  $c$  между внутренними их концами. Пусть  $c = a_1 + a_2$ . Величины  $a_1$  и  $a_2$  находим из условия, что  $\sigma_{\theta(1)} = \sigma_{\theta(2)}$  или  $K_{(1)}/\sqrt{2\pi a_1} = K_{(2)}/\sqrt{2\pi a_2}$ . Здесь  $\sigma_{\theta(1)}$  и  $\sigma_{\theta(2)}$  – соответственно напряжения на расстояниях  $a_1$  и  $a_2$  от первой и второй трещины. Отсюда следует, что  $a_1 = cl_1/(l_1 + l_2)$ . При этом коэффициенты интенсивности напряжений равны:

$$K_{(1)} = p\sqrt{\pi l_1} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)}{2c}}, \quad K_{(2)} = p\sqrt{\pi l_2} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)}{2c}}. \quad (5)$$

Если расстояние между трещинами велико (т. е.  $c \geq (l_1 + l_2)/2$ ), то трещины независимы друг от друга. Вследствие этого область тела, на напряженное состояние которой оказывает влияние трещина, является достаточно малой.

Рассмотрим на конкретных примерах процедуру определения коэффициентов интенсивности напряжений в соответствии с предложенной технологией.

**Пример 1.**

Пусть длины трещин равны соответственно:  $l_1=l_2=1$  м, а растягивающее напряжение  $p=50$  МПа. На основании предложенного подхода получена зависимость коэффициента интенсивности напряжений от расстояния между вершинами трещин (кривая 1 на рис. 2).

Кривая 2 рассчитана на основании точного решения, приведенного в работе [2]. Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае определяется формулой

$$K = \frac{p (R + 4l)^2 E(k) - R^2 F(k)}{\sqrt{\pi} 4\sqrt{R^2 l + 2Rl^2}}$$

Здесь  $R$  – расстояние между внутренними вершинами трещин,  $F$  и  $E$  – соответственно эллиптические интегралы первого и второго рода, модуль  $k$  которых равен

$$k = \sqrt{\left(\frac{R}{2} + 2l\right)^2 - \frac{R^2}{4} \left(\frac{R}{2} + 2l\right)^{-1}}$$

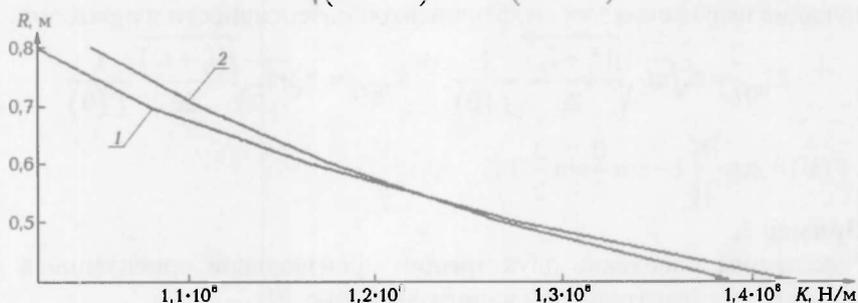


Рис. 2. Кривые зависимости коэффициента интенсивности напряжений, рассчитанные на основании различных подходов

Данный пример показывает правомерность применения метода сечений для оценки коэффициентов интенсивности напряжений в случае, когда расстояние между внутренними концами трещин порядка их средней длины.

**Пример 2.**

Рассмотрим поведение двух трещин, расположенных на параллельных прямых и находящихся в поле растягивающих усилий постоянной интенсивности  $p$  (рис. 3).

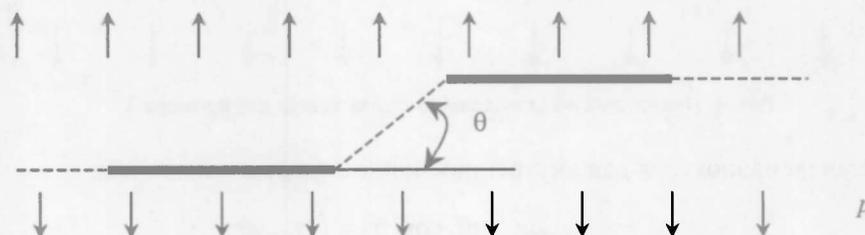


Рис. 3. Принципиальная модельная схема задачи для примера 2

Сечение проводим через обе трещины (см. рис. 3) (здесь и на рис. 4 сечение обозначено пунктирной линией).

Условие равновесия для внутренних концов трещин в этом примере такое же, как и в предыдущем.

Воспользуемся введенным обозначением  $c=a_1+a_2$ . В рассматриваемом случае условие для определения величин  $a_1$  и  $a_2$   $\sigma_{\theta(1)}=\sigma_{\theta(2)}$  имеет вид  $K_{(1)}f(\theta)/\sqrt{2\pi a_1} = K_{(2)}f(\theta)/\sqrt{2\pi a_2}$ , где  $f(\theta)$  – безразмерная функция угла  $\theta$ , равная:

$$f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right).$$

Выражение для величины  $a_1$  в данном случае такое же, как и ранее.

Тогда коэффициенты интенсивности напряжений для внутренних концов трещин соответственно равны (значения  $a_1$  и  $a_2$  подставляются в условия равновесия):

$$K_{(1)} = p\sqrt{\pi l_1} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)}{2c}} \frac{1}{f(\theta)}, \quad K_{(2)} = p\sqrt{\pi l_2} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)}{2c}} \frac{1}{f(\theta)}.$$

Применяя предложенную процедуру для системы двух трещин аналогичной геометрии, находящихся в поле сдвигающих напряжений, получим следующие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}$ :

$$K_{II(1)} = \tau\sqrt{\pi l_1} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)}{2c}} \frac{1}{f(\theta)}, \quad K_{II(2)} = \tau\sqrt{\pi l_2} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)}{2c}} \frac{1}{f(\theta)},$$

где  $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right)$ .

**Пример 3.**

Рассмотрим поведение двух трещин произвольной ориентации в поле растягивающих (касательных) напряжений (рис. 4).

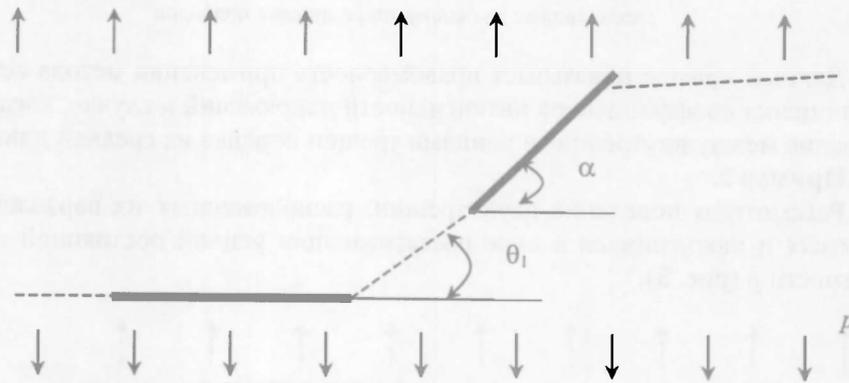


Рис. 4. Принципиальная модельная схема задачи для примера 3

Условия равновесия для внутренних концов трещин имеют вид:

$$p l_1 = \int_0^{a_1} \sigma_{\theta(1)} dr, \quad p l_2 \cos(\theta) = \int_0^{a_2} \sigma_{\theta(2)} dr.$$

Проводя вычисления, аналогичные описанным ранее, получаем следующие зависимости для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_{(1)} = p\sqrt{\pi l_1} \sqrt{\frac{(l_1+l_2 \cos(\theta_1))}{2c}} \frac{1}{f(\theta_1)},$$

$$K_{(2)} = \rho \sqrt{\pi l_2} \sqrt{\frac{\cos(\theta_2)(l_1 + l_2 \cos(\theta_2))}{2c}} \frac{1}{f(\theta_2)},$$

где  $f(\theta_i) = \cos \frac{\theta_i}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{3}{2} \theta_i \right)$ ,  $\theta_2 = 90 - (\theta_1 - \alpha)$ .

Таким образом, в случае присутствия в деформируемом твердом теле системы двух трещин выражение для определения коэффициентов интенсивности напряжений имеет следующий вид:

$$K_{(i)} = \rho \sqrt{\pi l_i} F(l_1, l_2, c, \theta, \alpha),$$

где параметр  $F$  зависит только от геометрии системы трещин, причем, учитывая ограничения, накладываемые на применение метода сечения, этот параметр больше единицы.

Переходя к анализу поведения системы трещин, логично предположить, что влияние на рассматриваемую трещину  $i$  любой из остальных трещин  $j$ , принадлежащих системе и находящихся на таком расстоянии от данной трещины, для которого выполняется неравенство  $c < (l_i + l_j)/2$ , можно учесть путем умножения КИН на параметр  $F_{ij}$ . Причем параметр  $F_{ij}$  рассчитывается только для двух трещин без учета всех остальных. Таким образом, для каждой трещины, принадлежащей рассматриваемой системе, можно предложить следующее выражение для определения коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_{(i)} = \rho \sqrt{\pi l_i} \cdot \frac{1}{\rho} \prod_{j=1}^n F_{ij}(l_i, l_j, c_{i,j}, \theta_i, \alpha_j), \quad (6)$$

где  $\rho$  – эффективный параметр трещиноватости рассматриваемой области.

Введение параметра  $\rho$  продиктовано следующими соображениями: основой метода сечений является составление уравнений равновесия для усилий, не передающихся через линию трещины, и дополнительных усилий, возникающих в вершинах трещины. Однако, если рассматриваемая область содержит большое количество трещин, которые к тому же перекрывают эту область несколькими уровнями (ярусами), то при таких условиях можно провести сечение, поверхность ослабления которого превышает (даже в несколько раз) геометрические размеры собственно рассматриваемой области. Наличие таких ситуаций вынуждает предположить, что при составлении уравнений равновесия необходимо рассматривать не номинальное усилие, передающееся через поверхность трещины, а некоторое эффективное усилие, не передающееся через одну трещину. Для вычисления этого эффективного усилия и вводится параметр  $\rho$ . Для его вычисления предлагается следующая схема:

1. Через рассматриваемую область проводится некоторое количество  $N$  параллельных прямых, расстояние между которыми должно на порядок превышать среднюю длину трещин.
2. Подсчитанное количество пересечений всех прямых с трещинами  $j$ , делится на общее количество прямых.
3. В соответствии с этим  $\rho = j/N$ , а эффективное усилие, не передающееся более чем через одну трещину, равно  $P = \rho l_i$ .

Таким образом, для оценки поведения системы трещин в породном массиве можно предложить следующую схему:

- Для каждой трещины (вернее для каждой вершины) выделяется множество трещин  $S$ , которые оказывают влияние на рассматриваемую трещину (для этого используем неравенство  $c < (l_i + l_j)/2$ ).
- После этого для каждой пары трещин: текущая трещина – трещины из множества  $S$  вычисляется параметр  $F_{ij}$ .
- Теперь составляется выражение (6) для определения коэффициента интенсивности напряжений.

**Пример 4.**

Исследуем поведение системы трещин в поле сдвигающих напряжений. Для простоты вычислений примем, что параметр  $\rho$  равен единице, т. е. рассматривается такая система, в которой трещины находятся друг от друга на достаточном расстоянии, и области ослабления, прилегающие к берегам каждой трещины, не пересекаются (рис. 5).

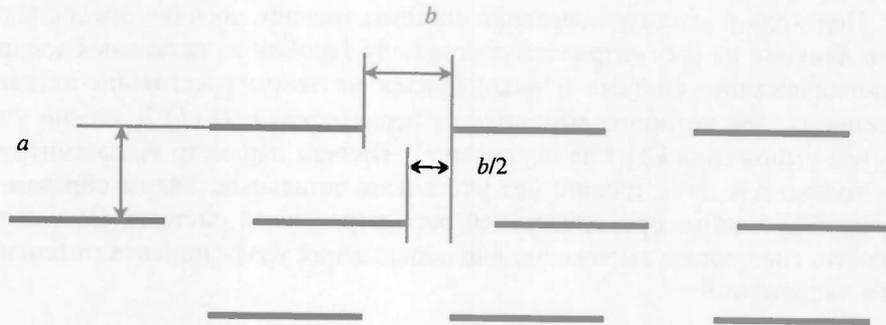


Рис. 5. Принципиальная модельная схема задачи для примера 4

Найдем значение коэффициента интенсивности напряжений для вершины, принадлежащей одной из внутренних трещин. Для этого необходимо оценить влияние на данную вершину пяти вершин окружающих трещин (см. рис. 5, рис. 6).

*Замечание.* Для простоты вычислений учитываем влияние только близлежащих вершин, хотя в общем случае необходимо рассматривать влияние возмущений напряженного состояния (концентраций напряжений) около вершин всех трещин, принадлежащих системе  $S$ .

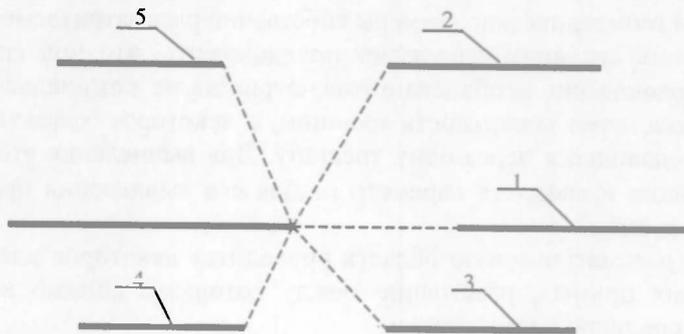


Рис. 6. Пояснительная схема к решению задачи для примера 4

В соответствии с формулой (6) и условиями задачи имеем:

$$K_{III(i)} = \tau \sqrt{\pi l_i} \prod_{j=1}^5 F_j(l_i, l_j, a, b),$$

где

$$F_1 = \sqrt{\frac{(l_i + l_1)}{2b}}, \quad F_{2, 3, 4, 5} = \sqrt{\frac{(l_i + l_{2, 3, 4, 5})}{\sqrt{4a^2 + b^2}}} \frac{1}{f(\theta_{2, 3, 4, 5})}, \quad \theta_{2, 3} = \operatorname{arctg} \frac{b}{2a},$$

$$\theta_{4, 5} = \operatorname{arccotg} \frac{b}{2a}, \quad f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right).$$

Воспользовавшись данными формулами, можно выполнить подобные вычисления для всех трещин системы и получить оценку КИН для каждой из них.

#### Применение метода сечений для оценки поведения систем естественных трещин в горных породах

Очевидно, что нарушения (трещины) в породном массиве недостаточно рассматривать только в плоской постановке (рассматривая одно из сечений). Исследование областей породного массива с системой трещин в плоской постановке приводит к существенному завышению значения коэффициента интенсивности напряжений, так как величина области ослабления сечения (пропорциональная длине трещины) и геометрические параметры сечения рассматриваемой области в большинстве случаев являются сравнимыми величинами. В действительности главной характеристикой трещины является не ее длина, а некоторая эффективная площадь поверхности –  $2s$ , которая несравнимо меньше (в подавляющем большинстве случаев) характерных протяженностей (параметров) рассматриваемой системы. Таким образом, при изучении трещины в породном массиве требуется учитывать ее пространственную конфигурацию.

На основании рассмотренных примеров можно сделать некоторые выводы:

1. Метод сечений дает удовлетворительную оценку коэффициентов интенсивности напряжений для систем трещин в случае, когда трещины находятся на достаточно малом расстоянии друг от друга.

2. В системе трещин каждую из них можно рассматривать не как структурное нарушение, а как два изолированных концентратора напряжений; соответственно система трещин в этом случае представляет собой систему концентраторов напряжений.

*Замечание.* В соответствии со вторым выводом можно сделать заключение, что в этом случае при описании поведения трещины следует рассматривать влияние друг на друга противоположных концов одной и той же трещины. Однако последнее не имеет места ввиду того, что противоположные вершины трещины разделены зоной ослабления, которая почти свободна от напряжений (именно за счет разгрузки этих зон и наблюдается концентрация напряжений у вершин), поэтому влияние вершин друг на друга несущественно.

Опишем модельную аналогию метода сечения для пространственного случая. Здесь рассматривается нарушение произвольной формы, присутствующее в достаточно большом объеме породной толщи, находящейся под действием обобщенного одноосного растяжения.

*Замечание.* Относительно нарушения принимается только одно предположение: два его линейных размера – толщина и ширина много меньше третьего – длины.

В исследуемом объеме проводится сечение (плоскость) перпендикулярно линии действия нагрузки и составляется уравнение равновесия на основании предположения, что усилие, не передающееся через сечение (вслед-

ствие наличия трещины), распределяется у вершин трещины в области, ограниченной некоторым контуром, за пределами которого напряжение можно считать номинальным. Поскольку значение КИН трещины, принадлежащей системе, не зависит от реального распределения напряжений вокруг как вершины, так и близлежащих концентраторов напряжений, то данный контур можно рассматривать как окружность.

Условие равновесия сечения в этом случае имеет вид:

$$\tau_s = \int_0^{2\pi} \int_0^a \tau_\theta dr d\alpha,$$

а значение КИН соответственно равно

$$K_{II} = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\pi s}.$$

Исходя из того, что трещина занимает только небольшую площадь сечения по сравнению с площадью собственных зон влияния, систему трещин можно рассматривать как множество симметричных концентраторов напряжений, причем в силу этой симметрии влияние концентраторов друг на друга зависит *только* от расстояния между их центрами (по аналогии с двумерным случаем).

Так как обычно системы трещин в горных породах ориентированы параллельно площадкам максимальных касательных напряжений, то интенсивность концентраторов напряжений определяется следующим выражением:

$$K_{II(i)} = \left( \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\pi s_i} - v \sqrt{\pi s_i} \right) \prod_{j=1}^n F(s_i, s_j, c_{i,j}),$$

где  $v$  – напряжения на берегах трещины, обусловленные трением между берегами.

1. Морозов Е. М. Метод сечений в теории трещин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1969. № 12.

2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, 1968.

Поступила в редакцию 13.03.2002.

*Михаил Анатольевич Журавков* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

*Сергей Валерьевич Павлов* – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – М.А. Журавков.

УДК 517.925.51

Н.Г. БУЛГАКОВ

## О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

The work is devoted to a problem of an establishment of limiting general criteria of stability of autonomous differential systems.

Проблемы устойчивости, возникающие в науке и технике, часто сводятся к задаче об устойчивости нулевого решения дифференциальной системы  $x' = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ , где  $f \in C(R^n)$  удовлетворяет условию Липшица. Хорошо известна роль классических теорем А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина, Н.Н. Красовского и Ж.П. Ла Салля в решении этой задачи [1–5]. К сожалению, построение знакоопределенной функции Ляпунова ( $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0$ ), лежащей в основе этих теорем, иногда вызывает серьезные трудности.

В последние 20 лет в Беларуси начали применяться знакопостоянные функции ( $V > 0$ ,  $V < 0$ ). Первые результаты в этом направлении были получены Б.С. Калитиным и автором данной статьи [6] (асимптотическая и глобально асимптотическая устойчивость). Критерий неасимптотической устойчивости установлен в [7]. Позднее, при разработке теории устойчивости вполне разрешимых многомерных дифференциальных уравнений, эти результаты были усилены и дополнены И.В. Гайшуном, Л.Б. Княжище [8, 9] и Э.И. Грудю [10].

К началу 1990-х гг. проблема установления критериев устойчивости, позволяющих (в случае, когда построение функции  $V > 0$ ,  $V < 0$  затруднено) искать функцию  $V > 0$ ,  $V < 0$ , практически была разрешена [11, 12]. В [13] автор предпринял попытку изложить решение проблемы в целом. Настоящая статья представляет собой сокращенный и переработанный вариант этой работы. Итак, рассмотрим систему. Решение  $x(t, x_0)$ ,  $x(0, x_0) = x_0$ , определенное на  $I = (-\infty, \infty)$ ,  $I^+ = [0, \infty)$ ,  $I^- = (-\infty, 0]$ , обозначим соответственно  $x^\infty(t, x_0)$ ,  $x^+(t, x_0)$ ,  $x^-(t, x_0)$ ; если решение рассматривается в фазовом пространстве  $R^n$ , то  $x^\infty(x_0, t)$ ,  $x^+(x_0, t)$ ,  $x^-(x_0, t)$ ; ограниченность будем отмечать дополнительным индексом  $\dot{x}^\infty(x_0, t)$ ,  $\dot{x}^+(x_0, t)$ ,  $\dot{x}^-(x_0, t)$ .

Пусть  $v: K^+ \rightarrow K^+$  есть функция Ляпунова,  $B_r = \{x \in R^n: \|x\| < r\}$  – замкнутый шар,  $r$  – положительная постоянная;  $\dot{B}_r = B_r \setminus \{0\}$ ;  $m = \{x \in R^n: V(x) = 0\}$ ,  $m_r = m \cap B_r$ ,  $\dot{m}_r = m \cap \dot{B}_r$ ;  $M = \{x \in R^n: V(x) = 0\}$  и т. д. Если  $V$  является знакопостоянной положительной функцией в узком смысле слова (не знакоопределенной), то будем писать  $V > 0$ ,  $x \in B_r$ .

*Замечания* [13]. 1. Если  $V > 0$ ,  $x \in \dot{B}_r$ , то  $m_r \subset M_r$ . 2. Если  $V > 0$ ,  $x \in B_r$ , то  $V$  не может быть знакоопределенной. 3. Если  $V > 0$ ,  $x \in B_r$ , то  $M_r \setminus m_r \not\subset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$ . 4. Если  $V > 0$ ,  $x \in B_r$ , то  $M_r \not\subset x^\infty(t) \Leftrightarrow M_r \setminus m_r \not\subset x^\infty(t)$ ,  $m_r \not\subset x^\infty(t)$ .

Нуль системы назовем устойчивым по Ла Саллю, если существуют замкнутые ограниченные множества  $d$  и  $D$  ( $\{0\} \in d \subset D \subset R^n$ ) такие, что  $\forall x \in d \Rightarrow x(t, x_0) \in D, t > 0$ . Устойчивость влечет устойчивость по Ла Саллю.

**Теорема Ла Салля о притяжении** ([4], теорема 5). Если: 1) нуль системы устойчив по Ла Саллю с множествами  $d$  и  $D$ , 2)  $V(x) \leq 0, x \in D$ ,

3)  $M_D \not\subset x^\infty(t)$ , где  $M_D = \{x \in D: V(x) = 0\}$ , то  $\forall x_0 \in d \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

**I. Неасимптотическая устойчивость.** Нуль системы назовем устойчивым относительно множества  $m$  ( $m$ -устойчивым), если  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon, t \geq 0$ ;  $m$ -локально притягивающим, если  $\exists \eta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\eta \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ;  $m$ -асимптотически устойчивым, если он  $m$ -устойчивый и  $m$ -локально притягивающий;  $m$ -глобально притягивающим, если  $\forall x_0 \in m \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ;  $m$ -глобально асимптотически устойчивым, если он  $m$ -устойчивый и  $m$ -глобально притягивающий.

Аналогично определяется устойчивость относительно множества  $M$ .

Приступая к решению задачи, установим сначала две леммы о структуре окрестностей  $m$ -асимптотически устойчивой и неустойчивой точек покоя.

**Лемма А** ([11], теорема 1). Если нуль системы  $m$ -асимптотически устойчив, то при любом достаточно малом  $\sigma > 0$  множество  $m_\sigma$  не содержит отрицательных полутраекторий ( $\exists \sigma > 0: m_\sigma \not\supset x^-(t)$ ).

**Доказательство.** Пусть  $\eta$  – число из определения  $m$ -локального притяжения. Предположим от противного, что  $\forall \sigma < \eta \exists x^-(x_0, t) \subset m_\sigma$ . Тогда  $A(x_0) \neq \emptyset$ . Пусть  $x^- \in A(x_0)$ . Если  $x^* = 0$  – единственная точка  $A(x_0)$ , то  $x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$ , что несовместимо с  $m$ -устойчивостью. Если  $x^* \neq 0$ , то  $x^* \in m \cap B_\sigma \Rightarrow x^* \in m \cap B_\eta \Rightarrow x(t, x^*) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Множество  $\alpha$ -предельных точек  $A(x_0)$  состоит из целых траекторий и является замкнутым. Следовательно, точка  $x=0$  будет  $\alpha$ -предельной для  $x^-(t, x_0)$ , что опять несовместимо с  $m$ -устойчивостью.

**Лемма о неустойчивом нуле** ([8], лемма 1; ср. [7], лемма 1). Если нуль системы неустойчив и  $\exists V: V > 0, V < 0, x \in B_r$ , то при любом достаточно малом  $\sigma > 0$  множество  $m_\sigma$  содержит отрицательную полутраекторию.

**Доказательство.** Нуль неустойчив. Следовательно,  $\exists \epsilon < r, \exists \{y_n\}, y_n \in B_\epsilon, y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  такое, что  $\forall \sigma \leq \epsilon, \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty: \|x(t_n, y_n)\| < \sigma, 0 < t < t_n; \|x_n\| = \|x(t_n, y_n)\| = \sigma$ , при этом  $x_n \rightarrow x', n \rightarrow \infty, \|x'\| = \sigma$ . Так как для любого  $\gamma < 0$  при достаточно большом  $n > 0$  выполняется неравенство  $0 \leq t_n + \gamma < t_n$ , то согласно сказанному и условию теоремы имеем

$$V(y_n) > V[x(t_n + \gamma, y_n)] = V[x(\gamma, x(t_n, y_n))] > 0;$$

$$\|x(t_n + \gamma, y_n)\| = \|x(\gamma, x(t_n, y_n))\| < \sigma.$$

Перейдя к пределу, получаем  $V[x(t; x')] = 0, t \in I^-; x^-(x'; t) \subset B_\sigma$ .

Объединяя теперь теорему Ляпунова об устойчивости с леммой о неустойчивом нуле и леммой А, приходим к следующему утверждению.

**Теорема А** ([8], теорема 1; ср. [7], теорема А). Если  $\exists V(x): V \geq 0, \dot{V} < 0, x \in B_r$  и нуль системы  $m$ -асимптотически устойчив, то он устойчив по Ляпунову.

Поскольку в теореме А фигурирует требование  $m$ -асимптотической устойчивости, то естественно иметь критерии такой устойчивости.

Приведенные ниже теоремы полностью решают этот вопрос.

**Теорема 1.1** ([14], теорема 5, с. 49; ср. [18], теорема 2.1). Пусть  $\exists V: V > 0, V < 0, x \in B_r$ . Нуль системы  $m$ -асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда  $\exists \sigma > 0: m_\sigma \supset x^-(t)$ .

**Доказательство.** Случай  $V > 0, \dot{V} < 0$  тривиален (теорема Ляпунова). Случай  $V \geq 0, \dot{V} < 0$  невозможен (замечание 2). Если  $V > 0, \dot{V} < 0$ , то нуль системы устойчив (лемма о неустойчивом нуле) и, следовательно,  $m$ -устойчив  $\Rightarrow \forall \epsilon < \sigma, \exists \delta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\delta \Rightarrow x^-(x_0, t) \subset m_\epsilon$ . Покажем, что нуль системы является  $m$ -локально притягивающим ( $\eta = \delta$ ). Предположим

от противного, что  $\exists x_0 \in m \cap B_\delta : x^+(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . Пусть  $x^* \in \Omega(x_0)$ . Если  $x^* = 0$  – единственная точка  $\Omega(x_0)$ , то  $x^+(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , что противоречит предположению.

Если  $x^* \neq 0$ , то очевидно  $V(x^*) = 0$ . Но тогда согласно [14] (лемма 1, с. 40)  $x^\infty(x^*, t) \subset m_\epsilon \subset m_\sigma$ . А это противоречит условию теоремы.

**Теорема 1.2** ([8], теорема 3). Условие, фигурирующее в теореме 1.1, эквивалентно двум условиям: 1)  $\exists \epsilon > 0 : m_\epsilon \not\supset x^\infty(t)$ ; 2)  $m \not\supset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$ .

*Доказательство.* Предположим от противного, что  $\forall \sigma < \epsilon : \exists x^-(x_0, t) \subset m_\sigma$ . Пусть  $x^* \in A(x_0)$ . Если  $x^* = 0$  – единственная точка  $A(x_0)$ , то  $x^-(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$ , что противоречит условию 2). Если  $x^* \neq 0$ , то  $V(x^*) = 0$  и согласно [14] (лемма 1, с. 40)  $x^\infty(x^*, t) \subset m_\epsilon$ . А это противоречит условию 1). Из доказательства сразу же вытекает

**Теорема 1.3** ([11], следствие 4). Условие, фигурирующее в теореме 1.1, эквивалентно условиям: 1)  $\exists \sigma > 0 : m_\sigma \not\supset x^\infty(t)$ ; 2) нуль системы  $m$ -устойчив.

II. *Асимптотическая устойчивость.* Установим сначала структурную особенность окрестности  $M$ -асимптотически устойчивой точки покоя.

**Лемма Б** ([11], теорема 1). Если нуль системы  $M$ -асимптотически устойчив, то  $\exists \sigma > 0 : M_\sigma \not\supset x^-(t)$ .

*Доказательство* не отличается от доказательства леммы А.

Теперь мы в состоянии получить второй основной результат.

**Теорема Б** ([11], теорема 1). Пусть  $\exists V : V > 0, V < 0, x \in B_r$ . Нуль системы асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда он  $M$ -асимптотически устойчив.

*Доказательство.* Устойчивость обеспечивает теорема А; притяжение – лемма Б и теорема Ла Салля о притяжении.

Теоремы, приводимые ниже, устанавливают признаки  $M$ -асимптотической устойчивости.

**Теорема 2.1** ([11], с. 302). Пусть  $\exists V : V \geq 0, V \leq 0, x \in B_r$ . Нуль системы  $M$ -асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда  $\exists \sigma > 0 : M_\sigma \not\supset x^-(t)$ .

*Доказательство.* Устойчивость обеспечивает теорема 1.1 и теорема А; притяжение – теорема Ла Салля о притяжении.

**Теорема 2.2** ([10], теорема 9). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно условиям: 1)  $\exists \epsilon > 0 : M_\epsilon \not\supset x^\infty(t)$ ; 2)  $m \not\supset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$ .

*Доказательство.* Предположим от противного, что  $\forall \sigma < \epsilon : \exists x^-(x_0, t) \subset M_\sigma$ . Пусть  $x^* \in A(x_0)$ . Если  $x^* = 0$  – единственная точка  $A(x_0)$ , то  $x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$  и, следовательно,  $M_\sigma \setminus m_\sigma \not\supset x^-(x_0, t)$  (замечание 3). Но тогда  $x^-(x_0, t) \subset m_\sigma \subset m_\epsilon$ , что противоречит условию 2).

Если  $x^* \neq 0$ , то согласно [14] (п. 2.2, лемма 1)  $x^\infty(x^*, t) \subset M_\sigma \subset M_\varepsilon$ . А это противоречит условию 1).

Добавим к условиям теоремы 1.2 условие  $M_\varepsilon \setminus m_\varepsilon \not\supset x^\infty(t)$ . Мы получим необходимое и достаточное условие  $M$ -асимптотической устойчивости (замечание 4, теорема 2.2). Поступая аналогично с теоремами 1.1, 1.3 и теоремой А, получим еще три критерия  $M$ -асимптотической устойчивости.

**Теорема 2.3** ([6], теорема 1). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1)  $\exists \sigma > 0: M_\sigma \setminus m_\sigma \not\supset x^\infty(t)$ ; 2)  $m_\sigma \not\supset x^-(t)$ .

**Теорема 2.4** ([11], с. 302). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1)  $\exists \sigma > 0: M_\sigma \not\supset x^\infty(t)$ ; 2) нуль системы  $m$ -устойчив.

**Теорема 2.5** ([7], теорема В). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1)  $\exists \sigma > 0: m_\sigma \setminus m_\sigma \not\supset x^\infty(t)$ ; 2) нуль системы  $m$ -асимптотически устойчив.

III. *Глобальная асимптотическая устойчивость*. Установим сначала два вспомогательных предложения.

**Лемма С** ([12], лемма 1). Если нуль системы  $M$ -глобально асимптотически устойчив, то  $M \not\supset x^-(t)$ .

Доказательство не отличается от доказательства леммы В.

Лемма С позволяет дополнить известную теорему Ла Салля о глобальном притяжении ([4], теорема 4) следующим образом.

**Теорема Ла Салля о глобальном притяжении**. Если  $\exists V: V \leq 0, x \in R^n$ , все решения системы ограничены при  $t > 0$  и выполняется одно из условий: 1)  $M \not\supset x^\infty(t)$ , 2) нуль системы  $M$ -глобально асимптотически устойчив, то он является глобально притягивающим.

Теперь нетрудно получить третий основной результат.

**Теорема С** ([6], теорема 2, [12], теорема 1). Пусть  $\exists V: V \geq 0, x \in B_r, \dot{V} \leq 0, x \in R^n$ . Нуль системы глобально асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда все решения системы ограничены при  $t \geq 0$  и выполняется одно из условий: 1)  $M \not\supset \hat{x}^\infty(t)$ , 2) нуль системы  $M$ -глобально асимптотически устойчив.

Доказательство. Устойчивость обеспечивают теорема В и теорема 2.1; глобальное притяжение – теорема Ла Салля о глобальном притяжении (полная формулировка).

IV. *Оценка области асимптотической устойчивости*. Для оценки области притяжения можно использовать следующие две теоремы.

**Теорема Д** ([13], теорема В). Если: 1) нуль системы устойчив по Ла Саллю с множествами  $d$  и  $D$ , 2)  $\exists V: V \geq 0, V \leq 0, x \in D$ , 3)  $M_D \not\supset x^\infty(t)$ , то нуль системы асимптотически устойчив. При этом  $\forall x_0 \in d \Rightarrow x(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. В силу 1), 2)  $\forall x_0 \in m \cap d \Rightarrow x^+(t; x_0) \subset m_D$ . Но согласно

3)  $m_D \not\subset x^\infty(t)$ . Следовательно,  $m_D \not\subset x^-(t)$ . Устойчивость обеспечивают теорема 1.1 и теорема А: притяжение – теорема Ла Салля о притяжении.

Теорема Д является обобщением теоремы Ла Салля ([4], теорема 5).

**Теорема Е** ([14], с. 51, теорема 4, ср. [6], теорема 1'). Если: 1)  $\exists V$  такая, что множество  $G = \{x \in R^n: V(x) < r\}$  ограничено, 2)  $V > 0, V < 0, x \in G$ ,

3)  $M_G \not\subset x^\infty(t)$ , то нуль системы асимптотически устойчив. При этом  $\forall x_0 \in G \Rightarrow x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

Доказательство. В силу 1), 2):

$$\forall x_0 \in G \Rightarrow V[x(t, x_0)] \leq V(x_0) \leq r, t > 0 \Rightarrow x(t; x_0) \in G, t > 0.$$

Все условия теоремы Д выполнены.

Теорема Е обобщает теорему Ла Салля – Лефшеца ([5], теорема VI). Проиллюстрируем использование теорем на простом примере. Пусть для системы  $x' = -x + \varphi(y), y' = -x - y, \varphi(0) = 0$  выполняется условие  $\varphi(y)/y > 0,$

$y \neq 0$ . Тогда для функции  $2V = x^2 + \int_0^y \varphi(y) dy$  имеем  $V > 0, V < 0$ . Рассмотрим

менее жесткое условие  $\varphi(y) = 0, y \in [0, 1]; \varphi(y)/y > 0, y \notin [0, 1]$ . Останется ли нуль асимптотически устойчивым? Возьмем ту же функцию. Теперь  $V > 0, V = -x^2 - u\varphi(y) \leq 0, M = \{(x, y): x = 0, y \in [0, 1]\}$ . Это обстоятельство, однако, не слишком осложняет решение вопроса. Действительно, на множестве  $M$  система принимает вид  $y' = -y$ . Нуль системы  $M$ -асимптотически устойчив и, следовательно, останется асимптотически устойчивым (теорема Б). Так как система  $y' = -y$  является линейной, то нуль системы будет  $M$ -глобально асимптотически устойчивым. Если при этом  $\int_0^y \varphi(y) dy \rightarrow \infty, |y| \rightarrow \infty$ , то все решения системы ограничены при  $t > 0$  и, следовательно, нуль системы глобально асимптотически устойчив (теорема С).

Если интеграл  $\int_0^y \varphi(y) dy$  ограничен при  $|y| \rightarrow \infty$ , то можно воспользоваться теоремой Е (ср. [18]). Действительно, при достаточно малых  $C > 0$  линии уровней  $V(x, y) = C$  огибают множество  $m = \{(x, y): x = 0, y \in [0, 1]\}$  и являются замкнутыми. Пусть  $r > 0$  – верхняя граница всех чисел  $C > 0$ , для которых линии уровней являются замкнутыми. Множество  $G = \{(x, y): V(x, y) < r\}$  ограничено. На множестве  $M_G = \{(x, y) \in G: V = 0\} = M$  система принимает вид  $y' = -y$ . Все условия теоремы Е выполнены. Нуль системы асимптотически устойчив, и множество  $D$  лежит в области притяжения.

В заключение выражаю благодарность заведующему кафедрой теоретической механики УрГУ профессору В.П. Прокопьеву и профессору этой же кафедры Ю.Ф. Долгому за внимание к работе.

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Л., 1950.

2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453.

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Ла Салль Ж.П. // Гидродинамическая неустойчивость. М., 1970.
5. Ла Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
6. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 3. С. 32.
7. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 9. С. 788.
8. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453.
9. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
10. Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 782.
11. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 4. С. 301.
12. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 19.01.1995. № 166-13-95. С. 6.
13. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 30.07.1996. № 2570-В96. С. 24.
14. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Мн., 1984. С. 78.
15. Княжище Л.Б. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 3. С. 17.
16. Булгаков Н.Г. // Проблемы оптимального управления. Мн., 1981. С. 63.
17. Булгаков Н.Г. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 87.
18. Kalitine B. // R.A.I.R.O. Automatique / Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 16. № 3. P. 275.

Поступила в редакцию 04.09.2001.

*Николай Григорьевич Булгаков* – кандидат физико-математических наук.

УДК 538

Б.С. КАЛИТИН

### РАВНОМЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ НЕАВТНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

In this paper, we initiate studies of property of uniformly integral continuity of solutions for non autonomous differential equations.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), x \in G \subset R^n, t > 0, \quad (1)$$

где  $f: G \times R^+ \rightarrow R^n$  – непрерывная функция,  $G$  – открытое связное подмножество евклидова пространства  $R^n$ . Предположим, что для любой пары  $(x_0, t_0) \in G \times R^+$  существует единственное решение  $\varphi(x_0, t_0, t)$  системы (1), удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(x_0, t_0, t_0) = x_0$ . Свойство единственности гарантируется, например, условием Липшица. Пусть  $\|x\|$  означает какую-нибудь норму пространства  $R^n$ . Напомним, что функция  $f(x, t)$  удовлетворяет условию Липшица (или, точнее, равномерному условию Липшица) по  $x$ , если для любого компактного подмножества  $K$  из  $G$  существует число  $L = L(K) > 0$  такое, что

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in K \text{ и } \forall t > 0. \quad (2)$$

При этом предположении решения обладают так называемым свойством интегральной непрерывности. А именно [1], пусть  $]\alpha, \beta[$  – интервал определения решения  $\varphi(x_0, t_0, t)$ , содержащий  $t_0$ . Тогда для любого замкнутого интервала  $[a, b]$  из  $]\alpha, \beta[$ , для любых  $T > 0$  ( $[t_0, t_0 + T] \subset [a, b]$ ) и  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что если  $\|x_0 - y_0\| < \delta$ , то решение  $\varphi(y_0, t_0, t)$  определено на  $[a, b]$ , причем  $\|\varphi(x_0, t_0, t) - \varphi(y_0, t_0, t)\| < \epsilon$  для всех  $t_0 \leq t < t_0 + T$ .

В качественной теории устойчивости движения наряду со свойством интегральной непрерывности [2] используется также и свойство равномерной интегральной непрерывности, которое играет важную роль при исследовании поведения траекторий абстрактных полудинамических систем (см., например, [3]). Однако даже для конечномерного случая систем неавтономных дифференциальных уравнений в настоящее время отсутствуют исследования свойства равномерной интегральной непрерывности и не выяснена взаимосвязь этого понятия с другими свойствами, используемыми в теории дифференциальных уравнений. Цель настоящей статьи – попытаться восполнить возникший при этом пробел и дать достаточные условия, гарантирующие свойство равномерной интегральной непрерывности решений.

Сформулируем следующее условие:

А) для любого компактного подмножества  $K$  из  $G$  и некоторого числа  $a > 0$  существует конечное число

$$C = C(K, a) = \sup_{t_0 > 0} \sup_{|t-t_0| < a, x \in K} \|f(x, t)\|.$$

Приведем теорему, доказательство которой можно осуществить почти дословным повторением доказательства известной теоремы Пикара – Линделефа (см., например, [4]).

**Теорема 1.** Пусть функция  $f: G \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывна, удовлетворяет условию Липшица (2) по  $x$ . Тогда для любых чисел  $a > 0, b > 0$  таких, что для  $K = \{x \in G: \|x-x_0\| \leq b\}, |t-t_0| \leq a$ , выполнено условие А), задача Коши

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

имеет единственное решение, причем  $\forall t_0 > 0$  всякое такое решение определено на отрезке  $[t_0, t_0 + \alpha]$  постоянной длины  $\alpha = \min\{a, b/C\}$  ( $\alpha = a$ , если  $C = 0$ ) и не покидает  $K$ .

Отметим, что, в отличие от теоремы Пикара – Линделефа, в данной теореме гарантируется существование семейства единственных решений задачи Коши (4) при каждом  $t_0 > 0$  на интервале одной и той же длины  $\alpha > 0$ .

**Лемма 1.** Пусть система (1) удовлетворяет условию А). Предположим, что решение  $\varphi(x_0, t_0, t)$  задачи (3) гарантировано теоремой 1 на интервале  $[t_0, t_0 + \alpha]$ . Тогда существуют числа  $\sigma > 0$  и  $h, 0 < h < \alpha$ , для которых при всех  $\Delta x_0$  и  $\Delta t_0$  таких, что  $\|\Delta x_0\| < \sigma$  и  $0 < \Delta t_0 < \sigma$ , решение  $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$  системы (1) определено, по крайней мере, на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$  для всех  $t_0 \geq 0$  и содержится в замкнутом ограниченном множестве из  $G$ .

**Доказательство.** По теореме 1 решение  $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$  содержится в шаре  $B(x_0 + \Delta x_0, b)$  при всех  $t \in [-\Delta t_0, \alpha - \Delta t_0]$ . Положим  $h = \alpha - \Delta t_0, 0 < \sigma < \alpha, \|\Delta x_0\| < \sigma, 0 < \Delta t_0 \leq \sigma$ . Тогда оба решения  $\varphi(x_0, t_0, t)$  и  $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$  будут определены на одном и том же интервале  $[t_0, t_0 + h]$  одновременно для всех значений  $t_0 \geq 0$  и будут принадлежать компактному множеству

$$K_1 = \overline{\bigcup_{\|\Delta x_0\| < \sigma} B(x_0 + \Delta x_0, b)},$$

где черта сверху означает операцию замыкания

множества. Ясно, что число  $\sigma > 0$  можно выбрать настолько малым, чтобы  $K_1 \in G$ . Отсюда и следует требуемое утверждение.

**Определение 1.** Будем говорить, что решение  $\varphi(x_0, t_0, t)$  системы (1), определенное на  $[\alpha, \beta]$  при всех  $t_0 > 0$ , равномерно интегрально непрерывно, если  $\varphi(x^*, t^*, t) \rightarrow \varphi(x_0, t_0, t)$  для  $t \in [a, b] \subset [\alpha, \beta]$  при  $(x^*, t^*) \rightarrow (x_0, t_0)$  равномерно по  $t_0 \in [0, +\infty[$ , т. е.  $(\forall \varepsilon > 0)(\forall [a, b] \subset [\alpha, \beta])(\exists \delta > 0)$ , что если  $\|x^* - x_0\| < \delta, |t^* - t_0| < \delta$  и  $(x^*, t^*) \in G \times \mathbb{R}^+$ , то  $\|\varphi(x^*, t^*, t) - \varphi(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \forall t \in [a, b]$  и  $\forall t_0 > 0$ .

Опираясь на лемму, можно показать, что справедлива

**Теорема 2.** Если функция  $f: G \times K^1 \rightarrow K^1$  непрерывна, удовлетворяет условию Липшица (2) по  $x$  и условию  $A$ ), то все решения уравнения (1) обладают свойством равномерной интегральной непрерывности.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x_0, t_0, t)$  – решение системы (1), заданное на интервале  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , где число  $\alpha$  определено согласно теореме 1. Докажем свойство равномерной интегральной непрерывности способом от противного. Пусть для некоторых чисел  $T \in ]0, \alpha]$  и  $\varepsilon > 0$  не существует числа  $\delta > 0$ , удовлетворяющего определению 1. Тогда согласно теореме 1 и лемме 1 можно указать число  $\sigma > 0$  такое, что всякое решение  $\varphi(y_0, t^*, t)$  для  $\|x_0 - y_0\| < \sigma$ ,  $|t - t_0| < \sigma$  определено, по крайней мере, для  $t \in [t_0, t_0 + T]$  при всех  $t_0 \geq 0$  одновременно и содержится в некотором компакте  $K_1$  из  $G$ . Согласно рассуждениям от противного для сходящейся к нулю последовательности положительных чисел  $(\delta_n)$ ,  $\delta_n < \sigma$ , можно указать последовательность начальных точек  $(y_{0n})$ ,  $\|y_{0n} - x_0\| < \delta_n$ , и две последовательности моментов времени  $(t_{0n})$ ,  $t_{0n} \geq 0$ , и  $(t_n)$ ,  $t_{0n} \leq t_n < t_{0n} + T$ ,  $\forall n \geq 1$ , такие, что выполняются неравенства

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1. \quad (4)$$

По построению  $y_{0n} \rightarrow x_0$ , при  $n \rightarrow +\infty$ , а в силу компактности интервала  $[t_{0n}, t_{0n} + T]$ , не теряя общности рассуждений, можно считать, что  $(t_n - t_{0n}) \rightarrow \tau \in [0, T]$ .

Используя интегральное представление решений, можем записать равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, t_{0n}, t_n) &= x_0 + \int_{t_{0n}}^{t_n} f(\varphi(x_0, t_{0n}, s), s) ds, \quad \varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) = \\ &= y_{0n} + \int_{t_{0n}}^{t_n} f(\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s), s) ds. \end{aligned}$$

В результате вычитания их и перехода к известным неравенствам для норм получим:

$$\begin{aligned} \|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| &\leq \|y_{0n} - x_0\| + \\ &+ \int_{t_{0n}}^{t_n} \|f(\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s), s) - f(\varphi(x_0, t_{0n}, s), s)\| ds. \end{aligned}$$

Отсюда на основании условия Липшица для компакта  $K_1$  следует, что

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| \leq \|y_{0n} - x_0\| + L \int_{t_{0n}}^{t_n} \|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s) - \varphi(x_0, t_{0n}, s)\| ds.$$

И поэтому по лемме Гронуолла получаем неравенство

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| < \|y_{0n} - x_0\| \exp(L(t_n - t_{0n})).$$

Правая часть последнего неравенства, а значит, и его левая часть, могут принимать сколь угодно малые значения при достаточно больших  $n$ . Однако это невозможно в силу (4). Полученное противоречие и доказывает теорему 2.

**Пример 1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение  $\dot{x} = (-1)^n 2tx$ ,  $t > 1$ . Нетрудно проверить, что, несмотря на то, что оно не удовлетворяет ни условию Липшица, ни условию  $A$ ), решения этого уравнения при  $n$  нечетном обладают свойством равномерной интегральной непрерывности; при  $n$  четном, напротив, свойство равномерной интегральной непрерывности отсутствует. Отметим также, что при  $n$  нечетном нулевое решение рассматри-

ваемого уравнения равномерно асимптотически устойчиво в смысле [4], а при  $n$  четном оно неустойчиво.

Другие достаточные условия равномерной интегральной непрерывности могут быть получены на основании следующего определения.

**Определение 2.** Решение  $\varphi(x_0, t_0, t)$  системы (1) будем называть равномерно ограниченным по  $t_0 \geq 0$ , если  $\forall T > 0 \exists C = C(T) > 0$ , что  $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq C\|x_0\|$  для  $t_0 < t < t_0 + T$  и всех  $t_0 > 0$ .

**Теорема 3.** Пусть правая часть системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, t)\| \leq g(t)\|x\|, x \in G, t \geq 0, \quad (5)$$

где  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  – непрерывная неотрицательная функция. Тогда, если для любого  $T > 0$  существует такая постоянная  $C > 0$ , что выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) ds < C < +\infty, \forall t_0 \geq 0, \quad (6)$$

то решения системы (1) обладают свойством равномерной ограниченности по  $t_0 \geq 0$ .

Действительно, оценивая интегральное равенство  $\varphi(x_0, t_0, t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(x_0, t_0, s), s) ds$ , получим  $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(\varphi(x_0, t_0, s), s)\| ds$  или с учетом (5) будем иметь неравенство  $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t g(s) \|\varphi(x_0, t_0, s)\| ds$ . Отсюда, воспользовавшись леммой Гронуолла и (6),

получим:  $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) ds\right) \leq C\|x_0\| \forall t_0 \geq 0$ , что и требовалось

доказать.

Заметим, что в примере 1 при  $n$  нечетном решения являются равномерно ограниченными при  $t_0 > 0$ , а при  $n$  четном они этим свойством не обладают.

Теперь нетрудно видеть, что справедлива

**Теорема 3.** Если все решения системы (1) равномерно ограничены по  $t_0 > 0$  для начальных состояний  $x_0$  из некоторого компакта  $K$ , то они обладают свойством равномерной интегральной непрерывности в  $K$ .

**Пример 2.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = (-1)^n \frac{x}{t} + xy, \\ \dot{y} = -\frac{y}{t}, \quad t \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Его общее решение имеет вид:

$$x(x_0, y_0, t_0, t) = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(-1)^n + y_0 t_0}, \quad y(x_0, y_0, t_0, t) = \frac{y_0 t_0}{t}, \quad t \geq t_0 \geq 1.$$

Все решения системы (7) равномерно ограничены для любого натурального числа  $n$ . Действительно, нетрудно проверить, что если  $n$  четное, то

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| < \|x_0\| \text{ при } 1 + y_0 t_0 \leq 0, \quad t_0 < t < t_0 + T$$

и

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| \leq |x_0| \exp(Ty_0) \text{ при } 1 + y_0 t_0 > 0, \quad t_0 \leq t < t_0 + T \text{ для всех } t_0 > 1.$$

Это означает, что решения системы (7) равномерно ограничены по  $t_0 \geq 1$  для всех начальных состояний  $x_0, y_0$  из компактного множества в  $R^2$ , и поэтому система (7) обладает свойством равномерной интегральной непрерывности решений.

Аналогично рассматривается случай нечетного значения  $n$ .

Отметим, что при нечетном  $n$  нулевое решение (7) устойчиво по Ляпунову, но не равномерно устойчиво по  $t_0 \geq 1$ . При  $n$  четном нулевое решение (7) неустойчиво, однако по координате  $y$  сохраняется свойство равномерной асимптотической устойчивости для любого натурального  $n$ .

Другие достаточные условия равномерной интегральной непрерывности, которые позволят воспользоваться обобщением леммы Гронуолла (см., например, лемму Бихари [5]), могут быть получены путем наложения менее жестких ограничений, чем неравенство (6).

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

2. Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970.

3. Seibert P., Florio J.S. // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). 1995. Vol. CLXIX. P. 291.

4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.

5. Bihari J.A. // Acta math. Acad. Scient. Hung. 1956. VII. 1. P. 81.

Поступила в редакцию 18.09.2001.

**Борис Сергеевич Калитин** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, И.А. КУЧМИЕНКО, Б.В. ФАЛЕЙЧИК

### ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА ПИКАРА

The computational algorithms that numerically solve the initial value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations are proposed. They allow to increase accuracy of the initial approximation not mainly by decreasing a discretization step, but also by using successive iterations of a Picard-like process.

Так как основное внимание в данной работе будет уделено проблеме повышения точности приближения решений дифференциальных уравнений на шаге дискретизации, то рассматриваемую задачу Коши для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, удобнее будет записать в локальной постановке:

$$\frac{d}{dx} u(x) = f(x, u(x)), \quad t \leq x < t + \tau, \quad (1)$$

$$u(t) = y. \quad (2)$$

Для традиционных фиксированного порядка точности методов численного решения исходной задачи практически единственным рычагом управления величиной локальной ошибки является шаг сетки  $\tau$ . Однако при использовании современных вычислительных машин, имеющих ограниченную разрядную сетку, уменьшение величины  $\tau$  с целью повысить точность приближения решения задачи (1), (2) может (вопреки ожиданиям) привести

со временем к росту погрешности приближенного решения. Одной из причин снижения точности результата пошаговых вычислений может быть, например, так называемое явление подвисания медленных составляющих искомого решения (см. [1]). Основной целью данной работы и будет построение таких вычислительных алгоритмов, которые позволяют поднимать уровень точности локального приближения, не прибегая к процедуре дальнейшего уменьшения величины шага дискретизации  $\tau$ . Такой рычаг повышения точности может опираться, скажем, на известный процесс последовательных приближений Пикара

$$u^{i+1}(x) = y + \int_t^x f(z, u^i(z)) dz, \quad u^0(x) \equiv y, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

привлекательный прежде всего свойствами его сходимости (см., например, [2, с. 48, 58]).

Главные трудности реального применения в вычислительной практике приближений типа (3) сопряжены с необходимостью нахождения (точного или приближенного) представления для интеграла с переменным верхним пределом вида

$$\int_t^x f(z, y^i(z)) dz \quad (4)$$

при известном приближении  $y^i(z)$  к  $u^i(z)$ ,  $i=0, 1, \dots$  ( $y^0(x)=y$ ).

Как и в [3], при построении такого представления будем использовать аппарат рядов Фурье.

После замены в (4) переменной интегрирования

$$z = t + \tau \sin^2 \frac{\Psi}{2} \quad (5)$$

интеграл, затрудняющий практическое применение процесса приближений типа Пикара, принимает вид

$$\int_t^x f(z, y^i(z)) dz = \frac{1}{2} \tau \int_0^\varphi f\left(t + \tau \sin^2 \frac{\Psi}{2}, y^i\left(t + \tau \sin^2 \frac{\Psi}{2}\right)\right) \sin \Psi d\Psi = \frac{1}{2} \tau \int_0^\varphi q^i(\Psi) d\Psi, \quad (6)$$

где (см. (5))

$$\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-t}{\tau}}. \quad (7)$$

Так как подынтегральная функция  $q^i(\Psi)$  в правой части (6) является нечетной и  $2\pi$ -периодической, при этом на границах отрезка  $0 \leq \varphi \leq \pi$  (см. (1), (7)) выполняются условия  $q^i(0)=q^i(\pi)=0$ , то удобным представлением такой функции может служить (см., например, [4, с. 227–229]) следующее разложение в ряд Фурье:

$$q^i(\Psi) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^i(j) \sin j\Psi, \quad (8)$$

$$\beta^i(j) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q^i(\varphi) \sin j\varphi d\varphi. \quad (9)$$

Если интеграл из (9) приблизить, скажем, посредством составной квадратурной формулы трапеций с равноотстоящими узлами

$$\varphi_p = \frac{\pi p}{m}, \quad p = 0, 1, \dots, m \quad (m \geq 2), \quad (10)$$

а в правой части (8) ограничиться, например, лишь первыми  $m-1$  слагаемыми, то приходим к приближенному равенству

$$q^i(\psi) = \sum_{j=1}^{m-1} b^j(i) \sin j\psi = q_m^i(\psi), \quad (11)$$

где (см. [5, с. 144])

$$b^j(i) = \frac{2}{m} \sum_{p=1}^{m-1} q^j(\varphi_p) \sin j\varphi_p \approx \beta^j(i). \quad (12)$$

Точные соотношения из (11), (12) с учетом (10) приводят к формулам интерполяции синусами (см. [4, с. 244]). Такого рода тригонометрический интерполяционный многочлен для функций с ограниченной вариацией сходится к заданной функции в каждой точке рассматриваемого отрезка, когда число узлов интерполирования неограниченно возрастает (см. [4, с. 219, 244]). Этим данная интерполяция выгодно отличается от степенной для случая равноотстоящих узлов.

Воспользовавшись аппроксимацией (11) и выполнив интегрирование в (6), вместо (3) для приближения  $y^{i+1}(x)$  к  $u^{i+1}(x)$  можно записать:

$$y^{i+1}(x) = y + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b^j(i) \frac{1}{j} \sin^2(j \arcsin \sqrt{\frac{x-t}{\tau}}), \quad i = 0, 1, \dots \quad (y^0(x) = y). \quad (13)$$

Если ввести обозначения  $\xi = \sqrt{\frac{x-t}{\tau}}$ ,  $S_j(\xi) = \sin(j \arcsin \xi)$ , то равенства (13) принимают более компактный вид

$$y^{i+1}(x) = y + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b^j(i) \frac{1}{j} S_j^2, \quad i = 0, 1, \dots,$$

при этом для последовательного нахождения  $S_k(\xi)$  можно воспользоваться (в силу тригонометрического тождества  $\sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta = 2 \cos \theta \sin k\theta$  при  $\theta = \arcsin \xi$ ) рекурсивными формулами

$$S_0(\xi) = 0, \quad S_1(\xi) = \xi, \quad S_{k+1}(\xi) = 2\sqrt{1-\xi^2} S_k(\xi) - S_{k-1}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что в правой части (13) используются значения функции  $y'(x)$  лишь в узлах

$$x_p = t + \tau \sin^2 \frac{\pi p}{2m}, \quad p = 0, 1, \dots, m-1, \quad (14)$$

вспомогательной сетки на отрезке дискретизации (см. (5), (6), (10), (12)). Поэтому для практических целей значения нового приближения  $y^{i+1}(x)$  также достаточно вычислять только в фиксированных точках  $x_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , вида (14). При этом значительно упрощаются и сами расчетные формулы (13):

$$y^{i+1}(x_k) = y + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b^j(i) \frac{1}{j} \sin^2 \frac{j\pi k}{2m}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (15)$$

$$y^{i+1}(t + \tau) = y + \tau \sum_{v=1}^{[m/2]} b^{2v-1}(i) \frac{1}{2v-1}, \quad i \geq 0. \quad (16)$$

Здесь (см. (12))

$$b^j(i) = \frac{2}{m} \sum_{p=1}^{m-1} f(x_p, y'(x_p)) \sin \frac{\pi p}{m} \sin \frac{j\pi p}{m}, \quad (17)$$

а через  $[\alpha]$ , как обычно, обозначена целая часть числа  $\alpha$ .

Если для сокращения записей ввести в рассмотрение скалярные функции

$$l_j(\varphi) = \frac{1}{j} \sin^2 \frac{j\varphi}{2}, \quad g_j(\varphi) = \sin \varphi \sin j\varphi, \quad j = 1, 2, \dots, m, \text{ а также } n \times m\text{-матрицы}$$

$$Y_{i+1} = [y^{i+1}(x_1), \dots, y^{i+1}(x_m)], \quad Y_i = [y, \dots, y], \quad B_i = [b^1(i), \dots, b^m(i)],$$

$$F(Y_i) = [f(x_1, y^1(x_1)), \dots, f(x_m, y^1(x_m))]$$

и квадратные матрицы

$$L = \begin{bmatrix} l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_m(\varphi_1) & \dots & l_m(\varphi_m) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_1(\varphi_1) & \dots & g_m(\varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1(\varphi_m) & \dots & g_m(\varphi_m) \end{bmatrix},$$

то векторные расчетные формулы (15)–(17) можно привести к матричному виду

$$Y_{i+1} = Y + \tau B_i L, \quad B_i = \frac{2}{m} F(Y_i) G,$$

или

$$Y_{i+1} = Y + \frac{2\tau}{m} F(Y_i) S, \quad i = 0, 1, \dots \quad (Y_0 = Y), \quad (18)$$

где

$$S = GL. \quad (19)$$

Отметим, что матрицы  $F(Y_i)$  в правой части (18) строятся только с использованием (1) и достигнутого приближения к решению задачи (1), (2), а матрица  $S$  (см. (19)) определяется лишь параметрами избранной аппроксимации интеграла (4), при этом она также не зависит от начальной точки  $t$  и от шага дискретизации  $\tau$ .

Построенные вычислительные алгоритмы могут быть особенно полезными, скажем, в ситуации, характерной для жестких (см. [1]) систем, когда в случае традиционных пошаговых численных методов уменьшение величины шага сетки, вызванное необходимостью повышения уровня точности приближения быстро изменяющихся составляющих решения исходной задачи, приводит к “подвисанию” во времени его медленных составляющих. Проведенные численные эксперименты подтверждают, в частности, и такие возможности предлагаемых методов.

1. Федоренко Р.П. // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. С.С. Филиппова. М., 1988. С. 17.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
3. Бобков В.В. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3. С. 57.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., 1961.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Мн., 1983.

Поступила в редакцию 17.01.2002.

**Владимир Васильевич Бобков** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики.

**Игорь Александрович Кучмиенко** – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – В.В. Бобков.

**Борис Викторович Фалейчик** – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – В.В. Бобков.

## О ВЫБОРЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ И ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОВ РЕДУКЦИИ И МАРШ-АЛГОРИТМА

The problem of the selection of the control parameters and the optimization of the reduction methods and the marching algorithm by the properties of the marching paths and the matrix of the closing equations system is investigated.

Рассмотрим трехточечное сеточное уравнение общего вида [1, 2]:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (1)$$

с разделенными двухточечными граничными условиями

$$G_0 y_0 + G_1 y_1 = \mu_0, \quad (2)$$

$$H_{N-1} y_{N-1} + H_N y_N = \mu_N, \quad (3)$$

где  $A_i, B_i, C_i, G_s, H_t$  – заданные квадратные матрицы порядка  $M$ ,  $F_i, \mu_0, \mu_N$  – известные векторы той же размерности,  $y_i$  – искомые векторы, подлежащие определению. Обычно  $N$  и  $M$  таковы, что  $N \gg M$ . В совокупности векторы  $y_i, i = \overline{0, N}$ , образуют решение задачи (1)–(3). Предполагается, что  $\det A_i B_i \neq 0, i = \overline{1, N-1}$ , и решение  $y_i, i = \overline{0, N}$ , существует и единственно. Каких-либо иных свойств и условий, присущих матрицам и векторам задачи (1)–(3) на множестве значений индексов  $I$  или на локальных подмножествах, пока не предполагается, хотя они и могут быть.

Классические вычислительные схемы метода редукции и марш-алгоритма, как и большинство других специализированных методов [1, 2], могут быть успешно реализованы только при жестких, достаточно частных ограничениях на параметры задачи (1)–(3). В общем случае это возможно только при соответствующих обобщениях и модификациях метода редукции и марш-алгоритма [3–5], основанных на некоторых процедурах разбиения множества значений сеточных индексов на локальные подмножества и вводимой соответствующим образом параметризации [4, 5].

В работе изучается проблема выбора управляющих параметров и оптимизации методов редукции и марш-алгоритма по свойствам маршевых траекторий и матрицы замыкающей системы уравнений.

Метод редукции и марш-алгоритм, несмотря на технические различия их вычислительных схем, имеют глубокое внутреннее родство. По этой причине и в целях экономии места далее сосредоточим основное внимание на обобщениях марш-алгоритма [5] и проведем изучение проблемы в случае, когда задача (1)–(3) допускает одновременную реализацию метода редукции и марш-алгоритма, а именно будем полагать, что [1, 2]:  $A_i = B_i \equiv E, C_i = C, G_0 = H_N = E, G_1 = H_{N-1} = 0, \mu_0 = \mu_N = 0$ .

Параметрами задачи объявим: 1) число подинтервалов, 2) их длины и 3) расположение, 4) маршевые значения сеточного решения.

Выберем на множестве индексов  $\{0, N\}$  совокупность точек  $r_j, j = \overline{0, 6}$  (верхнее значение 6 индекса  $j$  определено чисто в методических целях, и эта частность не меняет сути дела в общем случае) и, используя эти точки для сшивов значений решения задачи (1)–(3), разобьем множество индексов  $I = \{0, N\}$  на множество подинтервалов  $I_j = \{r_j, r_j + 1, \dots, r_{j+1}, r_{j+1} + 1\}$ , так что  $I = \bigcup_{j=0}^6 I_j$ , где  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_7 = N-1$ . Вычисления на  $I_j$  локализуем [4, 5], а

искомые значения сеточного решения в точках  $r_j, r_{j+1}, j=0, 6$ , определим из соответствующих замыкающих систем уравнений. При этом на каждом  $I_j$  будет:

$$y_k = D_k^{(j+1)} y_{r_j}^{(0)} + G_k^{(j+1)} y_{r_{j+1}}^{(0)} + w_k^{(j+1)}; \quad k = \overline{r_j, r_{j+1} + 1};$$

$$y_{r_j} = y_{r_j}^{(0)}, y_{r_{j+1}} = y_{r_{j+1}}^{(0)}; j = \overline{0, 6}. \quad (4)$$

Соединяя условия непрерывности решения (4) с требованием выполнения граничных условий, получим замыкающую систему уравнений [5]:

$$D_i^{(j+1)} y_k^{(0)} + G_i^{(j+1)} v_{r_{j+1}}^{(0)} + w_i^{(j+1)} - y_i^{(0)} = 0, \quad (5)$$

$$D_{i+1}^{(j+1)} y_k^{(0)} + G_{i+1}^{(j+1)} v_{r_{j+1}}^{(0)} + w_{i+1}^{(j+1)} - v_{i+1}^{(0)} = 0. \quad k = r_j, \quad t = r_{j+1}, \quad j = \overline{0, 6}. \quad (6)$$

Этой системе присущ внутренний динамизм высокого уровня, дающий вычислителю дополнительно новые, не присущие точным методам возможности по настройке и регулировке вычислительного алгоритма путем отслеживания в процессе его численной реализации свойств маршевых траекторий и оптимизации за счет выбора упомянутых параметров свойств матрицы замыкающей системы (5), (6), которую мы обозначим через  $H = (h_{ij})_{i,j}^{12}$ .

Она состоит из четырех диагоналей (все остальные элементы нулевые):

$$D_{12} = \text{diag} [-1, -1, -1, \dots, -1], \quad D_{11} = \text{diag} [G_{r_1}^{(1)}, 0, G_{r_2}^{(2)}, \dots, 0, G_{r_{j+1}}^{(7)}],$$

$$D_{21} = \text{diag} [G_{r_{j+1}}^{(1)}, D_{r_2}^{(2)}, G_{r_2}^{(2)}, D_{r_3}^{(3)}, \dots, D_{r_{j+1}}^{(j)}], \quad (7)$$

$$D_{31} = \text{diag} [0, D_{r_{j+1}}^{(2)}, 0, D_{r_{j+1}}^{(3)}, \dots, D_{r_{j+1}}^{(j)}, 0].$$

Здесь индексы  $i, j$  у диагоналей  $D_{ij}$  указывают место верхнего элемента соответствующей диагонали, места остальных элементов диагонали при этом определяются однозначно. Если обозначить

$$Y = (v_1^{(0)}, y_{r_1}^{(0)}, y_{r_1+1}^{(0)}, y_{r_2}^{(0)}, y_{r_2+1}^{(0)}, y_{r_3}^{(0)}, y_{r_3+1}^{(0)}, y_{r_4}^{(0)}, y_{r_4+1}^{(0)}, y_{r_5}^{(0)}, y_{r_5+1}^{(0)}, y_{r_6}^{(0)}, y_{r_6+1}^{(0)})^T,$$

$$W = (w_1^{(1)}, w_{r_1+1}^{(1)}, w_2^{(2)}, w_{r_2+1}^{(2)}, w_3^{(3)}, w_{r_3+1}^{(3)}, w_4^{(4)}, w_{r_4+1}^{(4)}, w_5^{(5)}, w_{r_5+1}^{(5)}, w_6^{(6)}, w_{r_6+1}^{(6)}, w_{r_{j+1}}^{(7)})^T,$$

то систему (5), (6) можно записать в матричном виде  $HY + W = 0$ , или

$$HY = -W, \quad (8)$$

где коэффициенты матрицы и вектор свободных членов определяются по формулам:

$$D_i^{(j)} = CD_{i-1}^{(j)} - D_{i-2}^{(j)}, \quad D_{r_j}^{(j)} = 1, \quad D_{r_{j+1}}^{(j)} = 0,$$

$$G_i^{(j)} = CG_{i-1}^{(j)} - G_{i-2}^{(j)}, \quad G_{r_j}^{(j)} = 0, \quad G_{r_{j+1}}^{(j)} = 1,$$

$$w_i^{(j)} = Cw_{i-1}^{(j)} - w_{i-2}^{(j)} - F_i, \quad w_{r_j}^{(j)} = 0, \quad w_{r_{j+1}}^{(j)} = 0, \quad i = \overline{r_j + 2, r_{j+1} + 1}, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Изменяя правую часть  $F_i$  уравнения (1) и моделируя, таким образом, некоторую совокупность пробных решений, реализуем для задачи (1)–(3) обобщенную вычислительную схему марш-алгоритма. В связи с этим рассмотрим различные способы выбора длин подинтервалов  $I_j, j=0, 6$ , и их размещения и изучим основные свойства алгоритма, считая  $Y = Y^*$  столбцом истинных значений решения  $u$ , задачи (1)–(3) и сравнивая с ним решение системы (8), полученное по данному методу. Проследим вычислительную картину метода и проведем анализ свойств замыкающей системы (8) при  $N=200, C=2$  и часть результатов отобразим в табл. 1.

Значения решения замыкающей системы (8)

$P_1$			$P_2$			$P_3$		
$k$	$y_k$	$y_k$	$k$	$y_k$	$y_k$	$k$	$y_k$	$y_k$
1	0,995	0,990	1	0,995	0,990	1	0,995	0,990
19	17,195	16,290	27	23,355	22,490	49	36,995	36,240
20	18,000	17,100	28	24,080	23,220	50	37,500	36,750
49	36,995	36,240	57	40,755	40,040	73	46,355	45,720
50	37,500	36,750	58	41,180	40,470	74	46,620	45,990
99	49,995	49,490	85	48,875	48,300	93	49,755	49,220
100	50,000	49,500	86	49,020	48,450	94	49,820	49,290
139	42,395	42,090	113	49,155	48,720	103	49,955	49,470
140	42,000	41,700	114	49,020	48,590	104	49,920	49,440
171	24,795	24,650	141	41,595	41,300	123	47,355	46,970
172	24,080	23,940	142	41,180	40,890	124	47,120	46,740
187	12,155	12,090	171	24,795	24,650	149	37,995	37,740
188	11,280	11,220	172	24,080	23,940	150	37,500	37,250

Примечание. Здесь и в табл. 2:  $P_1$  – произвольное,  $P_2$  – равномерное,  $P_3$  – некоторое локально сгущающееся разбиение.

Анализ данных табл. 1 подтверждает ожидаемую закономерность, состоящую в том, что различная длина маршевых нодинтервалов  $I_j$  существенно влияет на качество маршевых траекторий. Вместе с тем основные свойства метода в гораздо большей мере определяются свойствами матрицы  $H$ , в частности ее числом обусловленности  $\nu(H) = \sqrt{\beta(B) / \alpha(B)}$ , где  $B = H^T H$ . Для вычисления  $\beta(B)$  и  $\alpha(B)$  использовались итерации:

$$r^{(k+1)} = B \left( \frac{r^{(k)}}{\|r^{(k)}\|} \right), \quad w^{(k+1)} = C \left( \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|} \right), \quad \text{считая, что } r^{(0)} = w^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

$C = \beta(B)E - B$ . Число итераций определялось условием выполнения неравенства  $\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\| < \epsilon$ ,  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  и ограничением  $k \leq 50$ . Для приближенных значений верхних граней спектра матриц  $B$  и  $C$  брались соответственно значения:  $\beta(B) \sim \|r^{(k_0)}\|$ ,  $\beta(C) \sim \|w^{(j_0)}\|$ , затем вычислялось приближенное значение нижней границы спектра матрицы  $B$ :  $\alpha(B) = \beta(B) - \beta(C)$ .

Число обусловленности  $\nu(H)$  зависит от длин и числа нодинтервалов  $I_j$  и их размещения. Эта зависимость весьма динамична и особенно четко проявляется в случае уравнений (1) общего вида, но и в частном случае, рассматриваемом здесь, она вполне удовлетворительно наблюдается (табл. 2).

Характеристики матрицы  $H$  замыкающей системы для различных разбиений приведены в следующей табл. 2.

Таблица 2

Зависимость числа обусловленности  $\nu(H)$  от выбора разбиений  $P_i$

Разбиение	$\beta(B)$	$\alpha(B)$	$\nu(H)$
$P_1$	1,000400E + 04	8,780211E-04	3,375E + 04
$P_2$	3,604008E + 03	1,060516E-04	5,829E + 03
$P_3$	4,706001E + 03	3,496557E-05	1,16E + 04

В случае произвольного разбиения  $P_1$  и разбиения  $P_3$ , характеризующего дисбаланс длин нодинтервалов, число  $\nu(H)$  является большим, чем в случае равномерного разбиения  $P_2$ , что естественно при  $C_i = C = \text{const}$  [5].

В заключение еще раз подчеркнем важность качественной характеристики и конструктивного сопоставления задач (1)–(3) и (8), которые по своей сути являются системами ЛАУ. Свойства задачи (1)–(3) определяются входными данными и размерностью, а эти параметры в свою очередь строго определяются самой постановкой задачи, и изменять их каким-либо образом не представляется возможным. Существенно иной предстает подобная картина в системе (8). Здесь вычислитель в состоянии разнообразно влиять на определение порядка системы, числа и вида блоков матрицы  $H$ , определять и регулировать ее внутренние свойства, в частности изменять такую важную характеристику матрицы, как ее число обусловленности, и таким образом дополнительно получать вычислительные выгоды и преимущества.

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1987.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М., 1989.
3. Динь Куанг Тхай, Монастырный П. И., Нгуен Тхи Фыонг Май // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 3. С. 209.
4. Монастырный П. И. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 1. С. 35.
5. Монастырный П. И., Азаров А. И., Артюгин В. Г. // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 12. С. 1065.

Поступила в редакцию 01.02.2002.

*Анна Ивановна Кузельная* – аспирант кафедры численных методов и программирования. Научный руководитель – П. И. Монастырный.

*Петр Ильич Монастырный* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой численных методов и программирования.

УДК 517.925.41

ЛЕ ВАН ЛИНЬ, А. П. САДОВСКИЙ

### ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА ДЛЯ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ НУЛЕВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

The center and focus problem has been solved for systems  $x = y + P_2(x, y) + P_3(x, y)$ ,  $y = -x^3$ , where  $P_i$ ,  $i=2, 3$ , – homogeneous polynomial of degree  $i$ . There is proven the existence of such systems with six limit cycles in a neighbourhood of the point  $O(0, 0)$ .

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$x = y + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \quad y = -x^3, \quad (1)$$

где  $A, B, C, K, L, M, N$  – вещественные постоянные. Особая точка  $O(0, 0)$  системы (1) является центром или фокусом тогда и только тогда, когда [1, 2]

$$A^2 < 2. \quad (2)$$

Считая условие (2) выполненным, найдем для (1) необходимые и достаточные условия центра. Докажем существование систем (1) с шестью предельными циклами в окрестности начала координат. По методу [2–4] для

системы (1) находим формальную замену  $x = u + \sum_{i+j=2}^{\infty} r_{i,j} u^i v^j$ ,  $y = v + \sum_{i+j=2}^{\infty} q_{i,j} u^i v^j$ ,

которая преобразует (1) к системе

$$\dot{u} = v + \sum_{i=2}^{\infty} a_i u^i, \quad \dot{v} = -u^3 + \sum_{i=4}^{\infty} h_i u^i, \quad (3)$$

где  $d_2=A$ ;  $d_3=K$ ;  $d_4=(AB^2+3C-4A^2C+6BK-4AL)/12$ ;  $d_5=(2BC+5B^2K-20ACK+4M)/20$ ;  $h_4=-3B/2$ ;  $h_5=(8AC-5B^2-4L)/4$ ;  $h_6=(10ABC-3B^3+6CK-8BL+6AM)/4$ ;  $d_i, i=6, 15$ , – полиномы от  $A, B, K, L, M, N$ , состоящие соответственно из 17, 19, 49, 55, 119, 128, 253, 285, 491, 558 слагаемых;  $h_i, i=7, 16$ , – полиномы, состоящие соответственно из 12, 18, 33, 50, 84, 120, 184, 254, 370, 496 слагаемых.

Замена  $u_1=\varphi(u)-u \left(1-\sum_{k=4}^{\infty} h_k u^{k-3}\right)^{1/4}$ ,  $d\tau = \left(1-\sum_{k=4}^{\infty} h_k u^{k-3}\right) dt$  приводит систему (3) к виду

$$du_1/d\tau = v_1 + \sum_{k=2}^{\infty} d_k [\varphi^{-1}(u_1)]^k \equiv v_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k u_1^k, dv_1/d\tau = -u_1^3. \quad (4)$$

Величины  $f_i=A_{2i+1}$ ,  $i=1, 2, \dots$ , где  $A_{2i+1}$  из (4), будем называть фокусными величинами системы (1). Из [2] следует, что особая точка  $O(0, 0)$  системы (1) является центром тогда и только тогда, когда  $f_i=0$ ,  $i=1, 2, \dots$ . Фокусные величины  $f_i, i=1, 7$ , содержат соответственно 2, 9, 29, 76, 172, 351, 663 слагаемых. При этом  $f_1=g_1/5$ ;  $f_2=g_2/875+g_1v_{2,1}$ ;  $f_3=g_3/196875+g_1v_{3,1}+g_2v_{3,2}$ ;  $f_4=g_4/877081250+g_1v_{4,1}+g_2v_{4,2}+g_3v_{4,3}$ , где  $g_1=5K-3AB$ ;  $g_2=-AB(86B^2-375L)-25(15A^2+7)(BC-M)$ ;  $g_3=25(BC-M)(748B^2-1350AC-1775L)+28AB^3(366B^2+1075AC)+25B(-2408AB^2L+675CL-2625A^2CL+2625AL^2+3125AN+2625A^3N)$ ,  $v_{i,k}$  – полиномы от  $A, B, C, K, L, M, N$ .

**Теорема 1.** Особая точка  $O(0, 0)$  системы (1) является центром тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих трех условий:

- 1)  $B=0, K=0, M=0$ ;
- 2)  $A=0, C=0, K=0, M=0$ ;
- 3)  $A=0, K=0, L=0, M-BC=0, N=0$ .

**Доказательство. Достаточность.** В случае 1)  $O(0, 0)$  системы (1) – центр, так как поле направлений симметрично относительно оси  $Oy$ . В случае 2)  $O(0, 0)$  – центр, так как поле направлений симметрично относительно оси  $Ox$ . В случае 3) система (1) при  $B \neq 0$  имеет аналитический интеграл  $U=y^2/2+Cy^3/3+x/B^3-x^2/(2B^2)+x^3/(3B)-B^4 \ln(1+Bx)$ ,  $O(0, 0)$  – центр.

**Необходимость.** Пусть  $O(0, 0)$  системы (1) – центр. Из  $f_1=0$  находим  $K=3AB/5$ . С учетом найденного  $K$  из  $f_2=0$  получаем  $M=BC+AB\mu_1/(25\alpha_1)$ , где  $\alpha_1=15A^2+7$ ,  $\mu_1=86B^2-375L$ . Пусть  $B=0$ . Тогда  $K=0, M=0$ , т. е. выполняются условия 1). Далее будем предполагать, что  $B \neq 0$ . Если  $A=0$ , то с учетом найденных ранее  $K, M$   $f_3=3BCL/35$ ,  $f_4=BC(424B^2L-1275L^2+1750N)/15750$ . При  $A=0, C=0$  имеем  $K=0, M=0$ , т. е. для (1) выполняются условия 2). Если  $A \neq 0, C \neq 0$ , то из  $f_3=0$  находим  $L=0$ , а из  $f_4=0$  –  $N=0$ . Таким образом, имеем  $A=0, K=0, L=0, M=BC, N=0$ , т. е. выполняются условия 3). Пусть теперь  $A \neq 0$ . Тогда с учетом найденных ранее  $K, M$  из  $f_3=0$  получаем  $N=-C\mu_2/(375A)+[14\mu_2(86AB^2+175C)-35A\mu_1(86B^2-75L)-101948AB^4]/(46875A\alpha_2)+\mu_1(748AB^2+630C-1775AL)/(3125A\alpha_1\alpha_2)$ , где  $\alpha_2=21A^2+25$ ,  $\mu_2=172B^2-375L$ .

Предположим сначала  $L=-86A^2B^2/175$ . Тогда из  $f_4=0$  находим  $C=-2AB^2(1841063+112545261A^2+112884030A^4)/(81025\mu_3)$ , где  $\mu_3=385+3672A^2+2835A^4$ . С учетом значений  $C, K, L, M, N$   $f_5=64 \times AB^9 S_1 \alpha_2^2 \mu_3^{-2} / 7762100048828125$ , где

$$S_1=460752124257817001700+3341805014894232005A^2+ \\ +186206266313814839253A^4+751647435787044161496A^6+ \\ +1370100471699014883000A^8+1159186132586529729675A^{10}+ \\ +360907831382534580375A^{12},$$

т. е.  $O(0, 0)$  – фокус 5-го порядка для (1).

Таким образом, особая точка  $O(0, 0)$  системы (1) может быть центром в случаях, отличных от 1)–3), лишь при

$$AB(86A^2B^2+175L)\neq 0. \quad (5)$$

Будем предполагать в дальнейшем условие (5) выполненным. Полагая  $L=B^2u$ ,  $C=B^2v$ , с учетом найденных ранее  $K, M, N, f_i, i=\overline{4,7}$ , находим в виде  $f_4=\beta_1A^{-1}B^7\alpha_1^{-2}\alpha_2^{-1}g_4$ ,  $f_5=\beta_2A^{-1}B^9\alpha_1^{-3}\alpha_2^{-2}g_5$ ,  $f_6=\beta_3A^{-2}B^{11}\alpha_1^{-3}\alpha_2^{-2}g_6$ ,  $f_7=\beta_4A^{-2}B^{13}\times$   
 $\times\alpha_1^{-4}\alpha_2^{-3}g_7$ , где  $\beta_i\neq 0, i=\overline{1,4}$ ,  $g_i, i=\overline{4,7}$ , – полиномы от  $A, u, v$  с целыми коэффициентами. При этом  $g_4=1875\alpha_1\alpha_3\alpha_4v^2+\tilde{g}_4$ , где  $\alpha_3=495+1789A^2+6675A^4+$   
 $+4725A^6$ ,  $\alpha_4=86A^2+175u$ ,  $\tilde{g}_4$  – полином от  $A, u, v$  с целыми коэффициентами первой степени относительно  $v$ . Так как  $\alpha_1\alpha_3\alpha_4\neq 0$ , то с учетом  $g_4=0, g_i, i=\overline{5,7}$ , представляем в виде  $g_5=8A\alpha_3^{-2}\alpha_4^{-1}h_5$ ,  $g_6=352A^2\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-3}\alpha_4^{-2}h_6/9$ ,  
 $g_7=8A^2\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-4}\alpha_4^{-3}h_7/27$ , где  $h_i, i=\overline{5,7}$ , – полиномы от  $A, u, v$  с целыми коэффициентами первой степени относительно  $v$ . В дальнейшем через  $R_x(p, q)$  будем обозначать результат полиномов  $p, q$  относительно  $x$ . Найдем вещественные решения системы полиномиальных уравнений  $g_4=0, h_5=0, h_6=0$ . Имеем  $K_{\alpha}(g_{\alpha}, p_{n_{\alpha}}+n_{\alpha})=-18/500A^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4(z_1p^2+2z_2p+3\alpha_1\alpha_3\alpha_4z_3)$ , где  $z_i, i=\overline{1,3}$ , – полиномы от  $A, u$  с целыми коэффициентами. Далее находим  $R_u(z_1, z_2)=\gamma_1A^6\alpha_1^{102}\alpha_5^{10}WS_1S_2S_3^2$ ,  $R_u(z_1, z_3)=\gamma_2A^6\alpha_1^{101}\alpha_5W\tilde{S}_4$ , где  $\gamma_i\neq 0, i=\overline{1,2}$ ,  $\alpha_5=15A^2+1, S_2, S_3, S_4, W$  – взаимно простые полиномы от  $A$  с целыми коэффициентами. Полином  $W$  состоит из членов в четных степенях, коэффициенты которого взаимно простые целые числа порядка от  $10^{148}$  до  $10^{198}$ . Для полиномов  $z_1, z_2R_A(z_1, z_2)=\gamma_3u^6(375u-86)^{198}W_1^2V_1$ , где  $\gamma_3\neq 0, W_1$  – полином от  $u$  62-й степени, коэффициенты которого представляют взаимно простые целые числа порядка от  $10^{335}$  до  $10^{301}$ .  $V_1$  – полином от  $u$  404-й степени. Для полиномов  $z_1, z_3R_A(z_1, z_3)=\gamma_4u^6(375u-86)^{170}W_1^2V_2$ , где  $\gamma_4\neq 0, V_2$  – полином от  $u$  446-й степени. Полиномы  $V_1, V_2$  являются взаимно простыми. Введем вектор  $q=(A, u)$ . Система уравнений  $z_i=0, i=\overline{1,3}$ , имеет 6 вещественных решений  $q=q_i, i=\overline{1,6}$ , где  $q_i=(A_i, u_i), i=\overline{1,3}, q_{i+3}=(-A_i, u_i), i=\overline{1,3}, A_1=0,093833\dots, A_2=0,231139\dots,$   
 $A_3=0,269322\dots, u_1=0,34590855597643\dots, u_2=0,21759108053\dots,$   
 $u_3=0,314301723944\dots$

Других вещественных решений эта система не имеет. Подставляя найденные  $q=q_i, i=\overline{1,6}$ , в  $h_5=p_0+p_1v$ , где  $p_0, p_1$  – полиномы от  $A, u$  с целыми коэффициентами, содержащие соответственно 67, 58 слагаемых, из  $h_5=0$  находим  $v=v_i=-(p_0/p_1)|_{q=q_i}, i=\overline{1,6}$ . Положим  $r=(A, C, K, L, M, N)$ . В результате с учетом найденных ранее  $K, M, N$  получаем 6 вещественных решений  $r=r_k=(A_k, C_k, K_k, L_k, M_k, N_k), k=\overline{1,6}$ , системы уравнений  $f_k=0, k=\overline{1,6}$ , где  $L_k=B^2u_k, k=\overline{1,3}, C_1=-B(0,0227177277\dots), C_2=-B^2(0,00061347154\dots),$

$$C_3=B^2(0,06244339858...), \quad K_1=B(0,056300213...), \quad K_2=B(0,138683849...), \\ K_3=B(0,161593430...), \quad M_1=-B^3(0,0457237...), \quad M_2=B^3(0,0046050...), \\ M_3=B^3(0,02000304...), \quad N_1=B^4(0,042210042...), \quad N_2=-B^4(0,000487...), \\ N_3=B^4(0,00170831...), \quad r_{i+3}=(-A_i, -C_i, -K_i, L_i, -M_i, N_i), \quad i=1,3.$$

Для найденных выше  $r_k=(A_k, C_k, K_k, L_k, M_k, N_k), k=1,6, A_k$  – корни полинома  $W, u_k=L_k/B^2$  – корни полинома  $W_1, v_k=C_k/B^2=-(p_0/p_1)|_{r=r_k}$ . Покажем, что  $f_7|_{r=r_k} \neq 0, k=1,6$ .

Имеем  $R_9(h_5, h_7)=7500A\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4z_4$ , где  $z_4$  – полином от  $A, u$ , состоящий из 292 слагаемых. Далее находим  $R_u(z_1, z_4)=\gamma_5 A^5(15A^2+1)^2\alpha_1^{10}\alpha_2^{10}\alpha_3^{20}S_1^2S_3^2S_5$ , где  $\gamma_5 \neq 0, S_5$  – полином от  $A$  172-й степени с целыми коэффициентами. Так как  $W, S_5$  – взаимно простые полиномы от  $A$ , то  $f_7|_{r=r_k} \neq 0, k=1,6$ . Непосредственные вычисления дают  $f_7|_{r=r_k}=f_{7,k}, k=1,6$ , где  $f_{7,1}=10^{-7}B^{13}(1,580967352...), f_{7,2}=10^{-11}B^{13}(5,8775235903378...), f_{7,3}=10^{-10}B^{13}(7,4865127627703...), f_{7,i+3}=-f_{7,i}, i=1,3$ . Таким образом, при  $r=r_k, k=1,6, f_k=0, k=1,6$ , но  $f_7 \neq 0$ . Теорема доказана.

Из доказательства необходимости теоремы 1 вытекает

**Теорема 2.** При  $r=r_k, k=1,6$ , особая точка  $O(0, 0)$  системы (1) является фокусом седьмого порядка.

Исследуем теперь вопрос о предельных циклах аналитической системы

$$x = y + \sum_{k=2}^{2p+3} d_k x^k + \sum_{i+j=2p+4} d_{i,j} x^i y^j, \quad y = -x^3 + \sum_{i+j=2p+5} g_{i,j} x^i y^j, \quad (6)$$

где  $d_2^2 < 2$ , в окрестности особой точки  $O(0, 0)$ . Введем вектор  $d=(d_3, d_5, d_{2p+1})$ .

**Лемма 1.** Пусть  $d_{2p+3} \neq 0$ . Тогда для  $\forall \epsilon > 0, \delta > 0, \exists \alpha \in U_\delta(0)$ , где  $U_\delta(0)$  –  $\delta$ -окрестность нуля, при которой в  $\epsilon$ -окрестности точки  $O(0, 0)$  система (6) имеет  $p$  предельных циклов.

**Доказательство.** Полагая в (6)  $x=rC_s\theta, y=-r^2S_n\theta$ , где функции  $C_s\theta, S_n\theta$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений и начальным условиям вида  $dC_s\theta/d\theta=-S_n\theta, dS_n\theta/d\theta=C_s^3\theta, C_s\theta=1, S_n\theta=0$  [2, 5], и исключая время, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\theta)r^k, \quad (7)$$

где

$$R_1(0)=d_2C_s^5\theta/\varphi(\theta), \quad R_2(\theta)=d_3C_s^6\theta/\varphi^2(\theta), \\ R_3(\theta)=d_4C_s^7\theta/\varphi^2(\theta)+2d_3^2C_s^9\theta S_n\theta/\varphi^3(\theta), \\ R_4(0)=d_5C_s^8\theta/\varphi^2(0)+4d_3C_s^{10}\theta S_n\theta \times (d_3^2C_s^2\theta S_n\theta/\varphi^4(0)+d_4/\varphi^3(0)), \\ R_k(0)=d_{k+1}C_s^{k+4}\theta/\varphi^2(\theta) \dots, \quad k=5, 2p+3, \quad \varphi(\theta)=1-2d_2C_s^2\theta S_n\theta.$$

Произведя в (7) замену  $r=\rho \exp[\Theta(\theta)]$ , где  $\Theta(0) = \int_0^\theta R_1(t)dt$ , имеем уравнение

$$\frac{d\rho}{d\Theta} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\theta)\rho^k, \quad (8)$$

где  $P_k(\theta)=R_k(0)\exp[(k-1)\Theta(\theta)]$ . Правая часть (8) – сходящийся ряд относительно  $\rho$  при  $|\rho| < \rho_0, \rho_0 > 0$  для  $\forall \theta \in R$ . Заметим, что  $P_k(\theta)$  – периодические

функции с периодом  $2\omega = \Gamma^2 \left( \frac{1}{4} \right) / \sqrt{\pi}$ . Для уравнения (8) существует единственное решение  $\rho(0, c)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\rho(\theta, c) = c$ ,  $c > 0$ , и представимое в виде сходящегося ряда  $\rho(\theta, c) = c + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(\theta)c^k$ , где правая часть – аналитическая по  $d, c$  функция при  $\|d\| < M$ ,  $|c| < c_0$ ,  $c_0 > 0$ ,  $M$  – достаточно большое положительное число, при  $\theta \in [0, 2\omega]$ ,  $u_k(\theta) = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Функция последования  $\rho(2\omega, c) = c + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(2\omega)c^k$  представляет собой аналитическую по  $d, c$  функцию. Вопрос о существовании предельных циклов системы (6) в окрестности начала координат сводится к вопросу о существовании нулей функции  $\rho_1(c) = \rho(2\omega, c) - c = \sum_{k=2}^{\infty} g_k c^k$ , где  $g_{2k} = \sum_{i=1}^k d_{2i+1} v_{2k, 2i+1}$ ,  $k = \overline{1, p+1}$ ,  $g_{2k+1} = \sum_{i=1}^k d_{2i+1} v_{2k+1, 2i+1}$ ,  $k = \overline{1, p}$ ,  $v_{2k, 2k+1} = \int_0^{2\omega} C_5^{2k+4} \theta / \varphi^2(\theta) \times \exp[(2k-1)\Theta(\theta)] d\theta$ ,  $k = \overline{1, p+1}$ .

Положим  $d_{2i+1} = (-1)^{p-i+1} \text{sgn}(d_{2p+3}) 2^{-(2m)^{i-1}}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , где  $m$  – достаточно большое положительное число и такое, что  $|d_{2i+1}| < \delta/p$ ,  $2^{-m^2} < \varepsilon$ . При  $c - c_j = 2^{-m^{p-2j+1}}$ ,  $j = \overline{1, p}$ , получаем  $\rho_1(c_j) = (-1)^{p-j+1} \text{sgn}(d_{2p+3}) \times 2^{-(1+2^{p-j+1} m)^{p-j+1}}$  ( $1+0(1)$ ). Таким образом,  $\rho_1(c_{j-1})\rho_1(c_j) < 0$ ,  $j = \overline{2, p}$ .

При  $c = c_{p+1} = 2^{-m^2}$  имеем  $\rho_1(c_{p+1}) = d_{2p+3} 2^{-(m+1)} (1+0(1))$ , т. е.  $\rho_1(c_p)\rho_1(c_{p+1}) < 0$ . Уравнение  $\rho_1(c) = 0$  имеет на отрезке  $[c_1, c_{p+1}]$   $p$  вещественных корней, а значит, система (6) имеет в  $\varepsilon$ -окрестности особой точки  $O(0, 0)$   $p$  предельных циклов. Лемма доказана.

**Теорема 3.** Для  $\forall \forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \forall k, k = \overline{1, 6} \exists r \in U_\delta(r_k)$ , где  $U_\delta(r_k)$  –  $\delta$ -окрестность  $r_k$ , при которых система (1) имеет в  $\varepsilon$ -окрестности  $U_\varepsilon(0)$  точки  $O(0, 0)$   $6$  предельных циклов.

Доказательство. Образует  $f(r) = (f_1(r), \dots, f_6(r))$ , где  $f_k, k = \overline{1, 6}$ , – фокусные величины системы (1). Имеем  $f(r_k) = 0, k = \overline{1, 6}, \det \frac{\partial f}{\partial r}(r_k) = \tilde{\mu}_k, k = \overline{1, 6}$ , где  $\tilde{\mu}_1 = -10^{-15} B^{24} (6,8803\dots)$ ,  $\tilde{\mu}_2 = 10^{-10} B^{24} (4,0877\dots)$ ,  $\tilde{\mu}_3 = 10^{-16} B^{24} (1,8890\dots)$ ,  $\tilde{\mu}_{3+i} = \tilde{\mu}_i, i = \overline{1, 3}$ . Введем векторы  $b_k = (b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,6})$ .

Так как  $f(r_k) = 0, \tilde{\mu}_k \neq 0, k = \overline{1, 6}$ , то на основании теоремы об обратной функции [6] равенство  $f(r_k) = b_k, k = \overline{1, 6}$ , определяет единственную аналитическую в окрестности нуля функцию  $r = f^{-1}(b_k)$ , для которой  $f^{-1}(0) = r_k$ . Положим  $b_{k,i} = (-1)^{7-i} \text{sgn}(f_{7,k}) 2^{-(2m)^{7-i}}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Тогда для системы (1) при  $r = f^{-1}(b_k)$  существует аналитическое преобразование  $x = u + \varphi(u, v), y = v + \psi(u, v), d\tau = (1 + \omega(u))dt$ , приводящее (1) к системе

$$du/d\tau = v + \sum_{k=2}^{15} A_k u^k + \sum_{i+j=16}^{\infty} \alpha_{i,j} u^i v^j, dv/d\tau = -u^3 + \sum_{i+j=17}^{\infty} \beta_{i,j} u^i v^j, \quad (9)$$

где  $A_{2i+1} = b_{k,i}, i = \overline{1, 6}, A_{15} = f_7(f^{-1}(b_k))$ . Для  $\forall \forall \varepsilon > 0, \delta > 0$   $b_k$  будем считать выбранными такими, что  $f^{-1}(b_k) \in U_\delta(r_k), 2^{-m^2} < \varepsilon/N_0$ , где  $N_0$  – достаточно большое

положительное число. Из леммы 1 следует, что система (9) имеет в  $\varepsilon_1$ -окрестности точки  $O(0, 0)$ , где  $\varepsilon_1 = \varepsilon/N_0$ , 6 предельных циклов, а, значит, система (1) имеет в  $\varepsilon$ -окрестности  $U_\varepsilon(0)$  особой точки  $O(0, 0)$  6 предельных циклов. Теорема доказана.

1. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Мн., 1979.
2. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
3. Садовский А. П. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 7. С. 1237.
4. Садовский А. П. // Там же. 1980. Т. 16. № 12. С. 2284.
5. Ляпунов А. М. Собр. соч.: В 5 т. М.; Л., 1956. Т. 2. С. 272.
6. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М., 1969.

Поступила в редакцию 21.12.2001.

*Ле Ван Линь* – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – А.П. Садовский.

*Антон Павлович Садовский* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений.

УДК 517.925.42

О.Б. КОРСАНТИЯ

### СИЛЬНАЯ ИЗОХРОННОСТЬ ЦЕНТРА СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

Conditions that guarantee the existence of center's strong isochronism of the Lienard system which is defined by system of differential equations  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = q_0(x) + q_1(x)y$ , where  $q_0(x)$ ,  $q_1(x)$  are analytical odd functions are obtained.

Рассмотрим вещественную систему дифференциальных уравнений Лье-нара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = q_0(x) + q_1(x)y, \quad (1)$$

где  $q_0(x)$  и  $q_1(x)$  – аналитические нечетные функции.

В работе [1] доказана

**Теорема 1.** Для того чтобы система Лье-нара (1) имела в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости изохронный центр первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$q_0(x) = x + \frac{I^2(x)}{x^2}, \quad \text{где } I(x) = \int_0^x sq_1(s) ds. \quad (2)$$

*Замечание.* Пусть  $q_0(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots$ ,  $q_1(x) = a_2x + a_4x^3 + a_6x^5 + \dots$  тогда условие (2) примет следующий вид:

$$a_1 = 1, \quad (3)$$

$$a_{2k+3} = \sum_{m=0}^k \frac{a_{2m+2}a_{2k-2m+2}}{(2m+3)(2k-2m+3)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

*Следствие 1.* Для того чтобы система (1) имела в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости изохронный центр первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3), (4).

В настоящей статье дается ответ на вопрос о сильной изохронности [2] центра системы Лье-нара (1). Причем, так как сильная изохронность предполагает наличие изохронности первого порядка, то в качестве исходной системы рассматривается система Лье-нара (1) с условиями (3), (4).

Исследование этого вопроса свяжем с рассмотрением системы (1) в полярных координатах  $\rho, \varphi$ , где  $x=\rho \cos \varphi, y=\rho \sin \varphi$ , в которых система (1) с условием (3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k-1} \cos^{2k-1} \varphi \sin \varphi (a_{2k-1} + a_{2k} \rho \sin \varphi), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k-2} \cos^{2k} \varphi (a_{2k-1} + a_{2k} \rho \sin \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя результатам [2, с. 79], рассмотрим алгебраическую сумму  $t+\varphi_0-\varphi$  в виде ряда по степеням  $\rho$  с коэффициентами, являющимися функциями от  $\varphi$ , т. е. в виде:

$$t + \varphi_0 - \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(\varphi) \rho^k, \quad (6)$$

где

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega_k(\varphi_0) = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя левую и правую части (6) по  $t$  и используя дифференциальную систему (5), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $\rho$ . Получаем рекуррентные соотношения для определения функций  $\omega_k(\varphi)$ :

$$\omega'_k(\varphi) = - \sum_{m=0}^{k-1} (\omega'_m b_{k-m} + m \omega_m c_{k-m-1}), \quad (8)$$

где

$$\omega'_0 \equiv 1, \quad (9)$$

$$b_s(\varphi) = \begin{cases} a_{s+1} \cos^{s+2} \varphi, & \text{если } s \text{ четное,} \\ a_{s+1} \cos^{s+1} \varphi \sin \varphi, & \text{если } s \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (10)$$

$$c_s(\varphi) = \begin{cases} a_s \cos^{s-1} \varphi \sin^2 \varphi, & \text{если } s \text{ четное,} \\ a_{s+1} \cos^s \varphi \sin \varphi, & \text{если } s \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В работе [3] доказана

**Лемма 1.** Если для некоторого  $s$

$$\omega'_s(\varphi) = A \cos^2 \varphi \sin \varphi, \quad (11)$$

где  $A$  – некоторая отличная от нуля вещественная постоянная, то для нелинейной системы

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \quad (12)$$

где функции  $P$  и  $Q$  не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным  $x$  и  $y$  линейных и свободных членов, в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости может иметь место сильная изохронность только второго порядка с  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**Лемма 2.** Для системы Льенара (1) с серией условий (3), (4) в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости может иметь место сильная изохронность только второго порядка с  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**Доказательство.** Из рекуррентных соотношений (8) с учетом (9), (10) при  $k=1$  имеем  $\omega'_1(\varphi) = -a_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi$ . Так как система Льенара (1) является системой вида (12), то применение леммы 1 и доказывает лемму 2.

Наличие сильной изохронности центра некоторого порядка  $n$  для системы Льенара (1) в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости означает, что [2] существует по крайней мере один угол  $\varphi = \varphi_0$  и натуральное число  $n$  такие, что выполняются равенства

$$\omega_k \left( \varphi_0 + \frac{2\pi l}{n} \right) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad l = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$\omega_k(\varphi_0) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

где  $\omega_k(\varphi)$  – решение дифференциальной системы (8) с учетом соотношений (9), (10).

Согласно лемме 2 система Льенара (1) может иметь сильную изохронность только второго порядка с  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Серии условий (13), (14) примут следующий вид:

$$\omega_k \left( \frac{\pi}{2} + \pi l \right) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad l = \overline{1, 2}, \quad (15)$$

$$\omega_k \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots. \quad (16)$$

При  $l=1$  (15) принимает вид

$$\omega_k \left( \frac{3\pi}{2} \right) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots. \quad (17)$$

При  $l=2$  (15) означает условие обычной изохронности. С учетом (3), (4) этот факт установлен следствием 1.

Итак, наша задача – установить истинность (17) при выполнении условий (3), (4), (16).

Покажем сначала методом математической индукции, что при выполнении условий (3), (4)

$$\omega_k(-\varphi) = (-1)^{k-1} \omega_k(\varphi). \quad (18)$$

Предварительно заметим, что

$$b_k(-\varphi) = (-1)^k b_k(\varphi), \quad c_k(-\varphi) = (-1)^k c_k(\varphi). \quad (19)$$

При  $s=1$   $\omega_1(\varphi) = \frac{a_2}{3} \cos^3 \varphi$ . Следовательно,  $\omega_1(-\varphi) = \omega_1(\varphi)$  и, значит, (18) верно. Пусть (18) верно для всех  $s \leq k-1$ , тогда для  $s=k$  согласно (8), (19) имеем:

$$\begin{aligned} \omega'_k(-\varphi) &= - \sum_{m=0}^{k-1} \left( \omega'_m(-\varphi) b_{k-m}(-\varphi) + m \omega_m(-\varphi) c_{k-m+1}(-\varphi) \right) = \\ &= - \sum_{m=0}^{k-1} \left( (-1)^m \omega'_m(\varphi) (-1)^{k-m} b_{k-m}(\varphi) + m (-1)^{m-1} \omega_m(\varphi) (-1)^{k-m+1} c_{k-m+1}(\varphi) \right) = \\ &= (-1)^k \omega'_k(\varphi). \end{aligned}$$

Приравняв начало и конец этой цепочки равенств, получаем, что  $\omega'_k(-\varphi) = (-1)^k \omega'_k(\varphi)$ . Следовательно,

$$-\omega_k(-\varphi) = (-1)^k \omega_k(\varphi) + \bar{c}, \quad (20)$$

где  $\bar{c}$  – произвольная постоянная. Подставляя в (20)  $\varphi=0$  и учитывая четность либо нечетность индекса  $k$  и соответствующей ему функции  $\omega_k(\varphi)$ , получаем, что  $\bar{c} = 0$ . Таким образом, справедливость (18) установлена.

Покажем теперь методом математической индукции, что при выполнении условий (3), (4)

$$\omega_k(\varphi+\pi)=(-1)^k\omega_k(\varphi). \quad (21)$$

Предварительно заметим, что

$$b_k(\varphi+\pi)=(-1)^kb_k(\varphi), c_k(\varphi+\pi)=(-1)^{k-1}c_k(\varphi). \quad (22)$$

При  $s=1$   $\omega_1(\varphi)=\frac{\omega_2}{3}\cos^3\varphi$ . Следовательно,  $\omega_1(\varphi+\pi)=-\omega_1(\varphi)$  и, таким образом, (21) верно. Пусть (21) верно для всех  $s\leq k-1$ , тогда для  $s=k$  согласно (8), (22) имеем:

$$\begin{aligned} \omega'_k(\varphi+\pi) &= -\sum_{m=0}^{k-1} (\omega'_m(\varphi+\pi)b_{k-m}(\varphi+\pi) + m\omega_m(\varphi+\pi)c_{k-m+1}(\varphi+\pi)) = \\ &= -\sum_{m=0}^{k-1} ((-1)^m\omega'_m(\varphi)(-1)^{k-m}b_{k-m}(\varphi) + m(-1)^m\omega_m(\varphi)(-1)^{k-m+1}c_{k-m+1}(\varphi)) = \\ &= (-1)^k\omega'_k(\varphi). \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем, что  $\omega'_k(\varphi+\pi)=(-1)^k\omega'_k(\varphi)$ . Следовательно,

$$\omega_k(\varphi+\pi)=(-1)^k\omega_k(\varphi)+\bar{c}, \quad (23)$$

где  $\bar{c}$  – произвольная постоянная.

Подставив в (23)  $\varphi=-\frac{\pi}{2}$  и воспользовавшись (16), (18), получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k\omega_k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k(-1)^{k-1}\omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) + \omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (21) установлена.

Подставив в (21)  $\varphi=\frac{\pi}{2}$  и воспользовавшись (16), получаем  $\omega_k\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)^k\omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cdot 0 = 0$ . Следовательно, справедливость (17) также установлена. Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Для системы Льенара (1) в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости имеет место сильная изохронность центра второго порядка с  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Условия сильной изохронности для системы (1) совпадают с условиями изохронности центра первого порядка.

1. Sabatini M. // J. Differential Equations. 1999. № 152. P. 469.

2. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.

3. Амелькин В.В., Касим Мухамед Аль-Хайдер // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 867.

Поступила в редакцию 26.05. 2001.

*Ольга Борисовна Корсантия* – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.В. Амелькин.

**МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ  
ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С СОВОКУПНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ  
ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ**

Stability of the set of jointly-extreme solutions of a multicriterion problem on a system of subsets of a finite set with linear partial criteria is investigated.

Пусть на системе непустых подмножеств (траекторий)  $T \subset 2^E \setminus \{\emptyset\}$ ,  $|T| > 1$ , булеана множества  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $m > 2$ , задана векторная целевая функция  $f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A))$ ,  $n > 1$ , с линейными частными критериями (вида MINSUM)

$$f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \rightarrow \min_{i \in T}, i \in N_n.$$

Здесь  $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in R^{nm}$ ,  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$ .

В теории принятия решений наряду с широко известным принципом оптимальности по Парето рассматриваются и другие функции выбора (см., например, [1–4]). В настоящей заметке под векторной ( $n$ -критериальной) линейной траекторной задачей  $Z^n(A)$  будем понимать задачу поиска совокупно-экстремального множества (множества совокупно-экстремальных траекторий), которое определим традиционным образом [2–4]:

$$C^n(A) = \{t \in T : \exists i \in N_n \forall t^0 \in T (f_i(t, A) \leq f_i(t^0, A))\}.$$

Учитывая конечность множества траекторий  $T$ , легко убедиться в справедливости следующих соотношений, верных при любой матрице  $A \in R^{nm}$ :

$$C^n(A) = S^n(A) \setminus (P^n(A) \setminus L^n(A)) = L^n(A) \cup (S^n(A) \setminus P^n(A)),$$

$$L^n(A) \subset C^n(A) \subset S^n(A),$$

$$\emptyset \neq C^n(A) \subseteq S^n(A),$$

$$C^n(A) \cap P^n(A) = L^n(A),$$

где  $P^n(A)$  – множество Парето,  $S^n(A)$  – множество Слейтера,  $L^n(A)$  – лексикографическое множество, которые определяются следующим образом (см., например, [5–7]):

$$P^n(A) = \{t \in T : \nexists t^0 \in T (f(t, A) \geq f(t^0, A), f(t, A) \neq f(t^0, A))\},$$

$$S^n(A) = \{t \in T : \exists t^0 \in T \forall i \in N_n (f_i(t, A) > f_i(t^0, A))\},$$

$$L^n(A) = \bigcup_{s \in S_n} L(A, s), L(A, s) = \{t \in T : \forall t^0 \in T (f(t, A) \leq_s f(t^0, A))\}.$$

Здесь  $S_n$  – множество всех  $n!$  перестановок чисел  $1, 2, \dots, n$ ;  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$ , а бинарное отношение лексикографического порядка  $\leq_s$  векторов  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  и  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  из  $R^n$  задается по формуле

$$y <_s y^0 \Leftrightarrow (y = y^0) \vee (\exists j \in N_n \forall i \in \bar{n}_{j-1} (y_{s_i}, y_{s_i}^0, y_{s_j} < y_{s_j}^0)),$$

где  $N = \emptyset$ .

Как обычно [6–8], под устойчивостью векторной задачи  $Z^n(A)$  будем понимать дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) многозначного отображения, характеризующего зависимость множества  $C^n(A)$  от матрицы  $A$ . Поэтому радиусом устойчивости задачи  $Z^n(A)$  по аналогии с [7–9] назовем величину

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup Q, & \text{если } Q \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q = \{\epsilon > 0 : B \in \mathcal{B}(\epsilon) (C^n(A) \supseteq C^n(A+B))\},$$

$$\mathcal{B}(\epsilon) = \{B \in R^{nm} : \|B\|_\infty < \epsilon\},$$

$$\|B\|_\infty = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times m} \in R^{nm}.$$

Другими словами, радиус устойчивости задачи  $Z^n(A)$  – это предельный уровень независимых возмущений элементов матрицы  $A$ , которые не приводят к появлению новых совокупно-экстремальных траекторий. Ясно, что при выполнении равенства  $C^n(A) = T$  радиус устойчивости  $\rho^n(A) = \infty$ . Поэтому здесь будем рассматривать лишь так называемые нетривиальные задачи, т. е. задачи, для которых  $\overline{C^n(A)} = T \setminus C^n(A) \neq \emptyset$ . Задачу  $Z^n(A+B)$ , полученную из исходной задачи  $Z^n(A)$  при сложении матриц  $A$  и  $B$ , будем называть возмущенной, а матрицу  $B$  – возмущающей. Положим

$$\tau_i(t, t^0, A) = f_i(t, A) - f_i(t^0, A),$$

$$\Delta(t, t^0) = |(t \cup t^0) \setminus (t \cap t^0)|,$$

$$\varphi^n(A) = \min_{i \in N_n} \min_{t \in C^n(A)} \max_{t^0 \in T \setminus \{t\}} \frac{\tau_i(t, t^0, A)}{\Delta(t, t^0)}.$$

Очевидно, что для любой нетривиальной задачи  $\varphi^n(A) > 0$ .

**Теорема 1.** Для радиуса устойчивости  $\rho^n(A)$  векторной линейной траекторной нетривиальной задачи  $Z^n(A)$ ,  $n > 1$ , справедлива формула

$$\rho^n(A) = \varphi^n(A). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим для краткости  $\varphi := \varphi^n(A)$ . Сначала докажем неравенство  $\rho^n(A) \geq \varphi$ . При  $\varphi = 0$  это неравенство очевидно. Пусть  $\varphi > 0$ . Тогда в силу определения числа  $\varphi$  для любой траектории  $t \in C^n(A)$  (существование такой траектории гарантируется нетривиальностью задачи  $Z^n(A)$ ) и любого индекса  $i \in N_n$  найдется такая траектория  $t^0 \in T \setminus \{t\}$ , что

$$0 < \varphi < \frac{\tau_i(t, t^0, A)}{\Delta(t, t^0)}.$$

Поэтому для всякой возмущающей матрицы  $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathcal{B}(\varphi)$  в силу неравенства  $\|B\|_\infty < \varphi$  при любом индексе  $i \in N_n$  имеем

$$\tau_i(t, t^0, A+B) \geq \tau_i(t, t^0, A) - \sum_{i \in N_n((t \cup t^0) \setminus (t \cap t^0))} |b_{ij}| \geq \tau_i(t, t^0, A) - \|B\|_\infty \Delta(t, t^0) >$$

$$> \tau_i(t, t^0, A) - \varphi \Delta(t, t^0) > 0.$$

Отсюда  $t \in C^n(A+B)$ . Таким образом, при любой возмущающей матрице  $B \in \mathcal{B}(\varphi)$  справедливо включение

$$C^n(A+B) \subseteq C^n(A).$$

Следовательно, верна оценка  $\rho^n(A) \geq \varphi$ .

Далее покажем, что  $\rho^n(A) \leq \varphi$ . Согласно определению числа  $\varphi > 0$  найдутся индекс  $k \in N_n$  и траектория  $t \in C^n(A)$  такие, что для всякой траектории  $t^0 \in T \setminus \{t\}$  выполняется неравенство

$$\tau_k(t, t^0, A) \leq \varphi \Delta(t, t^0). \tag{2}$$

Далее, полагая  $\varepsilon > \varphi$ , рассмотрим возмущающую матрицу  $B^* = [b_{ij}^*]_{n \times m}$  с элементами

$$b_{ij}^* = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } i = k, j \in N(t), \\ \alpha, & \text{если } i = k, j \notin N(t), \\ 0, & \text{если } i \neq k, j \in N_m, \end{cases}$$

где  $\varphi < \alpha < \varepsilon$ . Очевидно, что  $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ . Учитывая (2) и структуру матрицы  $B^*$ , получаем соотношения

$$\tau_k(t, t^0, A + B^*) = \tau_k(t, t^0, A) - \alpha \Delta(t, t^0) < \tau_k(t, t^0, A) - \varphi \Delta(t, t^0) < 0,$$

верные для любой траектории  $t^0 \neq t$ . Поэтому  $t$  является совокупно-экстремальной траекторией возмущенной задачи  $Z^n(A + B^*)$ . Таким образом, для любого числа  $\varepsilon > \varphi$  существует такая матрица  $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ , что  $C^n(A + B^*) \not\subseteq C^n(A)$ . Следовательно, при любом числе  $\varepsilon > \varphi$  справедливо неравенство  $\rho^n(A) < \varepsilon$ , т. е.  $\rho^n(A) < \varphi$ .

Теорема доказана.

Так как из определения множества  $\overline{C^n(A)}$  вытекает формула

$$\forall t \in \overline{C^n(A)} \forall i \in N_n \exists t^0 \in T (\tau_i(t, t^0, A) > 0),$$

то для всякой нетривиальной задачи  $Z^n(A)$  число  $\varphi^n(A) > 0$ . Поэтому из теоремы легко получаем

*Следствие.* Всякая задача  $Z^n(A)$ ,  $n > 1$ , устойчива ( $\rho^n(A) > 0$ ).

*Замечание.* Если  $n=1$ , то формула (1) превращается в известную формулу радиуса устойчивости скалярной (однокритериальной) траекторной задачи с линейным критерием [10].

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Алгоритм».

1. Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. М., 1987.
2. Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М., 1989.
3. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М., 1989.
4. Айзерман М. А., Алексеров Ф. Т. Выбор вариантов: основы теории. М., 1990.
5. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
6. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
7. Емеличев В. А., Бердышева Р. А. // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 4. С. 119.
8. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801.
9. Емеличев В. А., Никулин Ю. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 47.
10. Леонтьев В. К. // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.

Поступила в редакцию 18.05.2002.

*Сергей Евгеньевич Бухтояров* – студент 5-го курса механико-математического факультета.

*Владимир Алексеевич Емеличев* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.

**ОЦЕНКИ СНИЗУ ЧИСЛА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН  
МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ  
О НАЗНАЧЕНИЯХ**

Explicit formula for determination of  $r$ -non-integer vertices number of the three-axial assignment polytope, i. e. the vertices with the number of fractional components being equal  $r$ , is obtained.

Настоящая работа является продолжением исследований нецелочисленных вершин многогранника  $M(3, n) = \{x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} > 0 \forall (i, j, t) \in N_n^3, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1 \forall t \in N_n, \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall j \in N_n, \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall i \in N_n\}$ , где  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$ , трехиндексной аксиальной задачи о назначениях порядка  $n > 2$ , начатых в [1–5].

Напомним [6, 7], что всякая вершина многогранника  $M(3, n)$  содержит не более чем  $3n - 2$  положительных компонент.

Пусть  $r \in R_n = \{4, 6, 7, \dots, 3n - 2\}$ . Вершину многогранника  $M(3, n)$  будем называть  $r$ -нецелочисленной, если она содержит ровно  $r$  дробных компонент.

В [4] доказано, что для любого числа  $r \in R_n$  и только для него у многогранника  $M(3, n)$  существуют  $r$ -нецелочисленные вершины.

Через  $\sigma(n, r)$  будем обозначать число всех  $r$ -нецелочисленных вершин многогранника  $M(3, n)$ , а через  $m(r)$  – наименьшее натуральное число  $k$ , для которого выполняется неравенство  $\sigma(k, r) > 0$ .

Неопределенные здесь термины и обозначения взяты из [3, 4].

В работе [4] доказана следующая основная теорема, позволившая опровергнуть гипотезу 18 из [6].

**Теорема 1.** Для любых натуральных чисел  $n > 3$  и  $r \in R_{n-1}$  справедливо неравенство

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r)}^3 \left( (n - m(r))! \right)^2 \sigma(m(r), r),$$

причем равенство достигается в случае, когда  $r \in \{2m(r), 2m(r) + 1\}$ .

В настоящей статье этот результат обобщен следующим образом.

**Теорема 2.** Для любых натуральных чисел  $n > m(r) \geq 5$  и  $r \in \bar{R}_{n-1}$  справедливо неравенство

$$\sigma(n, r) > \binom{n}{m(r)}^3 \left( (n - m(r))! \right)^2 \sigma(m(r), r) + \sum_{l=1}^{q(n, r)} \delta(n, r, l),$$

где

$$\bar{R}_{n-1} = R_{n-1} \setminus \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

$$q(n, r) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor - 1, n - m(r) \right\}.$$

$$\delta(n, r, l) = \binom{n}{m(r)+l}^3 ((n-m(r)-l)!)^2 \binom{m(r)+l}{3l}^3 \times \frac{((3l)!)^3}{(3!)^{3l} l!} \sigma(m(r)-2l, r-6l) (\sigma(3, 6))^l \quad (1)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что для любых натуральных чисел  $n > m(r) > 5$ ,  $r \in \bar{R}_{n-1}$  и  $l \in \{1, 2, \dots, q(n, r)\}$  у многогранника  $M(3, n)$  существует по меньшей мере  $\delta(n, r, l)$   $r$ -нецелочисленных вершин, дробные компоненты каждой из которых содержатся в  $m(r)+l$  двумерных сечениях матрицы, представляющей собой соответствующую вершину. Напомним, что под двумерным сечением ориентации  $(jt)$  матрицы  $x = \|x_{ijt}\|_n$  будем понимать совокупность элементов матрицы  $x$  с фиксированным значением индекса  $i$ .

Пусть  $l$  – произвольное число из множества  $\{1, 2, \dots, q(n, r)\}$ , а  $I_s, J_s, T_s$ ,  $s=0, 1, 2, \dots, l$ , – некоторые подмножества (возможно, тождественные) множества  $\{1, 2, \dots, m(r)+l\}$ , подчиненные условиям:

$$I_p \cap I_q = \emptyset, \quad J_p \cap J_q = \emptyset, \quad T_p \cap T_q = \emptyset \quad \forall p, q \in \{0, 1, 2, \dots, l\}, \quad p \neq q,$$

$$|I_0| = |J_0| = |T_0| = m(r) - 2l, \quad |I_s| = |J_s| = |T_s| = 3 \quad \forall s \in N_l.$$

$$\text{Положим } I(l) = \bigcup_{s=0}^l I_s, \quad J(l) = \bigcup_{s=0}^l J_s, \quad T(l) = \bigcup_{s=0}^l T_s.$$

Очевидно, что  $|I(l)| = |J(l)| = |T(l)| = m(r) + l \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, q(n, r)\}$ .

Обозначим  $I_{l+1} = N_n \setminus I(l)$ ,  $J_{l+1} = N_n \setminus J(l)$ ,  $T_{l+1} = N_n \setminus T(l)$ .

Возможны два случая:

- 1)  $n > m(r) + q(n, r)$ ;
- 2)  $n = m(r) + q(n, r)$ .

В первом случае имеем  $I_{l+1} \neq \emptyset$ ,  $J_{l+1} \neq \emptyset$ ,  $T_{l+1} \neq \emptyset$ . Для любой тройки подмножеств  $(I_s, J_s, T_s)$ ,  $s=0, 1, \dots, l+1$ , определим многогранник  $M(I_s, J_s, T_s) = \{x = \|x_{ijt}\|_{I_s \times J_s \times T_s} : x_{ijt} \geq 0 \quad \forall (i, j, t) \in I_s \times J_s \times T_s, \sum_{i \in I_s} \sum_{j \in J_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall t \in T_s, \sum_{i \in I_s} \sum_{j \in J_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall j \in J_s, \sum_{j \in J_s} \sum_{t \in T_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall i \in I_s\}$ . Заметим, что многогранник  $M(I_s, J_s, T_s)$ ,  $s=0, 1, \dots, l+1$ , отличается от многогранника  $M(3, m_s)$ , где  $m_s = |I_s| = |J_s| = |T_s|$ , лишь нумерацией элементов их матриц.

Пусть  $y^0 = \|y_{ijt}^0\|_{I_0 \times J_0 \times T_0}$  –  $(r-6l)$ -нецелочисленная вершина многогранника  $M(I_0, J_0, T_0)$ ,  $y^s = \|y_{ijt}^s\|_{I_s \times J_s \times T_s}$ ,  $s=1, 2, \dots, l$ , –  $6$ -нецелочисленная вершина многогранника  $M(I_s, J_s, T_s)$ , а  $y^{l+1} = \|y_{ijt}^{l+1}\|_{I_{l+1} \times J_{l+1} \times T_{l+1}}$  – целочисленная вершина многогранника  $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})$ . Тогда согласно лемме 2 [3] матрица  $x^0 = \|x_{ijt}^0\|_n$ , элементы которой определяются по формуле

$$x_{ijt}^0 = \begin{cases} y_{ijt}^s, & \text{если } (i, j, t) \in I_s \times J_s \times T_s, \quad s=0, 1, 2, \dots, l+1, \\ 0 & \text{для остальных } (i, j, t) \text{ из } N_n^3, \end{cases}$$

является  $r$ -нецелочисленной вершиной многогранника  $M(3, n)$ .

Известно (см. с. 309 [7]), что для числа  $f_0^z(M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1}))$  целочисленных вершин многогранника  $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})$  справедливо равенство

$$f_0^z(M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})) = f_0^z(M(3, n-m(r)-l)) = ((n-m(r)-l)!)^2.$$

Так как для любых чисел  $r \in \bar{R}_{n-1}$  и  $l \in \{1, 2, \dots, q(n, r)\}$  справедливо равенство  $m(r-6l) = m(r) - 2l$ , то число  $(r-6l)$ -нецелочисленных вершин многогранника  $M(I_0, J_0, T_0)$  равно  $\sigma(m(r)-2l, r-6l)$ , а число 6-нецелочисленных вершин многогранника  $M(I_s, J_s, T_s)$ ,  $s=1, 2, \dots, l$ , равно  $\sigma(3, 6)$ . Для завершения доказательства остается заметить, что декартовы произведения  $I_s \times J_s \times T_s$ ,  $s=0, 1, 2, \dots, l$ , приводящие к получению различных  $r$ -нецелочисленных вершин многогранника  $M(3, n)$ , можно образовать

$\frac{1}{l!} \binom{n}{m(r)+l}^3 \binom{m(r)+l}{3l} \prod_{h=0}^{l-1} \binom{3(l-h)}{3}^3$  способами  $\left( \prod_{h=0}^n (\cdot) = 1 \right)$  и воспользоваться равенством  $\prod_{h=0}^{l-1} \binom{3(l-h)}{3}^3 = \frac{((3l)!)^3}{(3!)^{3l}}$ .

Во втором случае доказательство проводится аналогично с той лишь разницей, что при  $l=q(n, r)$  имеет место соотношение  $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1}) = \emptyset$ , поскольку  $I_{l+1} = \emptyset, J_{l+1} = \emptyset, T_{l+1} = \emptyset$ . Теорема 2 доказана.

Аналогичным образом доказываются следующие неравенства

$$\sigma(n, 10) > \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4, 10) + \binom{n}{5}^3 \times ((n-5)!)^2 \binom{5}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(2, 4), \quad n > 4, \quad (2)$$

$$\sigma(n, 12) > \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5, 12) + \frac{1}{2} \binom{n}{6}^3 \times ((n-6)!)^2 \binom{6}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(3, 6), \quad n > 5. \quad (3)$$

Из теоремы 1 в силу неравенств (2), (3) и теоремы 2 получаем

*Следствие 1.* Пусть  $n > m(r) > 2$ . Для любого натурального числа  $r=4, 6, 7, 8, 9, 11$  и только для него справедлива формула

$$\sigma(n, r) = \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r).$$

Из теоремы 2 и неравенств (2), (3) вытекает

*Следствие 2.* Для числа  $f_0^u(M(3, n))$  нецелочисленных вершин многогранника  $M(3, n)$  справедливо неравенство

$$f_0^u(M(3, n)) \geq \sum_{r \in R_n} \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r) + \sum_{r \in \bar{R}_{n-1}} \Delta(n, r),$$

где

$$\Delta(n, r) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{q(n, r)} \delta(n, r, l), & \text{если } r \in \bar{R}_{n-1}, \\ \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \binom{5}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(2, 4), & \text{если } r = 10, \\ \frac{1}{2} \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \binom{6}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(3, 6), & \text{если } r = 12, \end{cases}$$

$0! = 1$ ,  $\binom{n}{n} = 1$ , а число  $\delta(n, r, l)$  определяется по формуле (1).

1. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 12. С. 65.
2. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3. С. 67.
3. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 12. С. 89.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Вестн НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2000. № 4. С. 59.
5. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Дискрет. материалы. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
6. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Дискрет. материалы. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.

Поступила в редакцию 26.05.2001.

*Виктор Михайлович Кравцов* – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 514.765

Ю.Я. РОМАНОВСКИЙ

## ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СОБСТВЕННОЙ ГРУППОЙ ПУАНКАРЕ

The geometrical interpretation of homogeneous space generated by an own Poincaré group is given.

Пусть  $M$  – ориентированное пространство Минковского, в котором задана инерциальная система координат [1]. Любому вектору  $z \in M$  можно поставить в соответствие эрмитову матрицу следующим образом:

$$z \rightarrow z_0\sigma_0 + z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $z_0, z_1, z_2, z_3$  – координаты вектора  $z$ ,  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – матрицы Паули [2].

Если на векторном пространстве эрмитовых матриц  $He(2)$  задать скалярное произведение  $\langle z, u \rangle = (Tr(z)Tr(u) - Tr(zu))/2$ , то соответствие (1) является изоморфизмом ориентированных пространств Минковского.

Рассмотрим аффинное пространство

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \mid z \in He(2) \right\}$$

над векторным пространством

$$\underline{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid z \in He(2) \right\}.$$

С помощью отображения

$$\rho: He(2) \rightarrow \underline{K}: z \rightarrow Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix},$$

которое является биекцией, задаем структуру ориентированного пространства Минковского на  $\underline{K}$  со скалярным произведением  $\langle Z, U \rangle = \langle \rho^{-1}(Z), \rho^{-1}(U) \rangle$ .

Аффинное пространство  $K$  над ориентированным пространством Минковского будем обозначать  $A^4M$ .

Пусть  $\phi: SL(2, C) \rightarrow SL(2, C): b \rightarrow \bar{\epsilon} b \epsilon^{-1}$ , где  $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  – эндоморфизм группы  $SL(2, C)$  (здесь и дальше черта обозначает комплексное сопряжение),  $H = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\}$  – группа вращений  $A^4M$  (собственная группа Лоренца), тогда группа  $G$  собственных преобразований  $A^4M$  (собственная группа Пуанкаре) представляется в виде полупрямого произведения мультипликативных групп  $K$  и  $H$ :

$$G = K * H = \{ g = kh \mid k \in K, h \in H \} = \left\{ g = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ z\phi(a) & a \end{pmatrix} \mid z \in He(2), a \in SL(2, C) \right\}.$$

При этом групповая операция в  $G$  есть обычное умножение матриц. Обозначим:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ где } \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ где } \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\Gamma$  – полугруппа, порождаемая эндоморфизмами:

$$\begin{aligned} \Psi: G &\rightarrow G: \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ z\phi(a) & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \\ \Phi_1: G &\rightarrow G: g \rightarrow \tilde{\mu}\Psi(g)\tilde{\mu}^{-1}; \\ \Phi_2: G &\rightarrow G: g \rightarrow \Psi(\bar{g}); \\ \Phi_3: G &\rightarrow G: g \rightarrow \tilde{\epsilon}\Psi(\bar{g})\tilde{\epsilon}^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим глобальную пару [3]  $(G, \Gamma)$ .

*Предложение.* Глобальная пара  $(G, \Gamma)$  является полной глобальной парой.

*Доказательство.* Достаточно показать [3], что  $H^\Gamma = \{ h \in G \mid F_G(h) = h, \forall F_G \in \Gamma \}$  – конечная подполугруппа в  $G$ .

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} H^\Gamma &= \{ h \in G \mid \Psi(h) = h, \Phi_1(h) = h, \Phi_2(h) = h, \Phi_3(h) = h \} = \\ &= \left\{ h \in G \mid h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \Phi_1(h) = h, \Phi_2(h) = h, \Phi_3(h) = h \right\} = \\ &= \left\{ h \in G \mid h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a = \text{diag}[\pm 1, \pm 1] \right\} = \\ &= \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a = \text{diag}[\pm 1, \pm 1] \right\}. \end{aligned}$$

Глобальная пара  $(G, \Gamma)$  порождает [3] серию однородных пространств

$$Q(F_G) = \{ x \in G \mid x = gF_G(g^{-1}), g \in G \}, F_G \in \Gamma,$$

на которых действие группы  $G$  задается отображением

$$\eta: G \times Q(F_G) \rightarrow Q(F_G): (g, x) \rightarrow gx F_G(g^{-1}).$$

С глобальной парой  $(G, \Gamma)$  ассоциируется [4] глобальная пара  $(H, \Gamma_H)$ , где  $\Gamma_H = \Gamma|_H$ , которая также порождает однородные пространства

$$Q(F_H) = \{x \in H \mid x = g F_H(g^{-1}), g \in H\}, F_H \in \Gamma_H.$$

Рассмотрим пространства  $Q(F_G)$  и  $Q(F_H)$ , определяемые системами образующих полугрупп  $\Gamma$  и  $\Gamma_H$  соответственно:

$$M_0 = Q(\Psi) = \{x_0 = g \Psi(g^{-1}) \mid g \in G\} = \left\{ x_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \mid z \in He(2) \right\},$$

$$M_1 = Q(\Phi_1) = \{x_1 = g \Phi_1(g^{-1}) \mid g \in G\} = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & 0 \\ z\phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & a\mu a^{-1}\mu^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in He(2), a \in SL(2, C) \right\},$$

$$M_2 = Q(\Phi_2) = \{x_2 = g \Phi_2(g^{-1}) \mid g \in G\} = \left\{ x_2 = \begin{pmatrix} \phi(aa^{-1}) & 0 \\ z\phi(aa^{-1}) & aa^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in He(2), a \in SL(2, C) \right\},$$

$$M_3 = Q(\Phi_3) = \{x_3 = g \Phi_3(g^{-1}) \mid g \in G\} = \left\{ x_3 = \begin{pmatrix} \phi(a\epsilon a^{-1}\epsilon^{-1}) & 0 \\ z\phi(a\epsilon a^{-1}\epsilon^{-1}) & a\epsilon a^{-1}\epsilon^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in He(2), a \in SL(2, C) \right\}.$$

$$N_1 = Q(\Phi_1|_H) = \{y_1 = g \Phi_1(g^{-1}) \mid g \in H\} = \left\{ y_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & a\mu a^{-1}\mu^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\},$$

$$N_2 = Q(\Phi_2|_H) = \{y_2 = g \Phi_2(g^{-1}) \mid g \in H\} = \left\{ y_2 = \begin{pmatrix} \phi(aa^{-1}) & 0 \\ 0 & aa^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\},$$

$$N_3 = Q(\Phi_3|_H) = \{y_3 = g \Phi_3(g^{-1}) \mid g \in G\} = \left\{ y_3 = \begin{pmatrix} \phi(a\epsilon a^{-1}\epsilon^{-1}) & 0 \\ 0 & a\epsilon a^{-1}\epsilon^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\}.$$

Выясним геометрический смысл пространств, названных пространствами типа  $Q(F)$ . Прямыми вычислениями показывается, что однородное

$G$ -пространство  $M_0 = \left\{ x_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \mid z \in He(2) \right\}$  изоморфно  $A^4M$ .

Заметим, что  $M_0$  как пространство с действующей группой  $H$  изоморфно  $M$  и разбивается на две  $H$ -орбиты:  $\{0\}$  и  $M_H = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \mid z \in He(2), z \neq 0 \right\}$ .

$H$  действует на  $M_H$  сопряжениями.

Для удобства проведения вычислений будем рассматривать изоморфные модели

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 = \{ \tilde{y}_1 = y_1 \tilde{\mu} \mid y_1 \in N_1 \} &= \left\{ \tilde{y}_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}) & 0 \\ 0 & a\mu a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\}, \\ \tilde{N}_3 = \{ \tilde{y}_2 = y_2 \tilde{\epsilon} \mid y_2 \in N_2 \} &= \left\{ \tilde{y}_2 = \begin{pmatrix} \phi(a\epsilon a^{-1}) & 0 \\ 0 & a\epsilon a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in SL(2, C) \right\} \end{aligned}$$

пространств  $N_1, N_3$  соответственно. Чтобы придерживаться единых обозначений, примем, что  $\tilde{N}_2 = N_2$ .

Действие группы  $H$  на  $\tilde{N}_1$  задается отображением

$$\eta_1 : H \times \tilde{N}_1 \rightarrow \tilde{N}_1 : (h, a) \rightarrow h a h^{-1},$$

а на  $N_2$  и  $N_3$  – отображением

$$\eta_2 : H \times \tilde{N}_i \rightarrow \tilde{N}_i : (h, a) \rightarrow h a h^{-1}, \quad i = 2, 3.$$

Введем морфизмы

$$f_i : M_H \times \tilde{N}_i \rightarrow P : (x, \tilde{y}_i) \rightarrow x^{-1} \tilde{y}_i,$$

где  $P$  – пространство матриц над полем комплексных чисел размера  $4 \times 4$ . Отметим, что при  $i=1$  действие группы  $H$  на  $P$  задается отображением  $\eta_1$ , а при  $i=2$  и  $i=3$  – отображением  $\eta_2$ .

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  – инвариантные части в  $P$ , тогда определяются морфизмы  $\sigma$  [5]:

$$\sigma_i : \tilde{N}_i \rightarrow 2^{M_H} \times 2^{M_H} : \tilde{y}_i \rightarrow (K_i, L_i),$$

где  $K_i = \{x \in M_H \mid f_i(x, \tilde{y}_i) \in P_1\}$ ,  $L_i = \{x \in M_H \mid f_i(x, \tilde{y}_i) \in P_2\}$ .

**Теорема 1.** Пространство  $N_1$  изоморфно  $H$ -пространству пар ортогональных фигур  $(K_1, L_1)$ , проходящих через начало координат, где  $K_1$  – двумерная ориентированная евклидова плоскость,  $L_1$  – двумерная ориентированная плоскость индекса 1.

**Доказательство.** Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \mid A = A^{-1}, C = C^{-1}, B \in He(2) \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \mid A = A^{-1}, C = C^{-1}, B - \text{косозермитова матрица} \right\} \text{ и } \tilde{y}_1 = y_0 = \tilde{\mu},$$

тогда  $\sigma_1(y_0)$  – пара ортогональных фигур  $(K_1, L_1)$ , где  $K_1$  – двумерная ориентированная евклидова плоскость,  $L_1$  – двумерная ориентированная плоскость индекса 1.  $H$ -пространство таких пар однородно.

Прямыми вычислениями показывается, что стационарные группы при действии группы  $H$  на точку  $y_0$  и пару  $\sigma_1(y_0)$  совпадают:

$$H_{y_0} = \left\{ h \in H \mid h y_0 h^{-1} = y_0 \right\} = \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in C \right\} \text{ и}$$

$$H_{\sigma_1(y_0)} = H_{z_1} \cap H_1 = \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in C \right\}.$$

**Теорема 2.** Пространство  $N_2$  изоморфно  $H$ -пространству пар ортогональных фигур  $(K_2, L_2)$ , пересекающихся в начале координат, где  $K_2$  – ориентированная гиперплоскость индекса 1,  $L_2$  – ориентированная пространственноподобная прямая.

**Доказательство.** Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A, C \in SL(2, C), B = B^T \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A, C \in SL(2, C), B = -B^T \right\} \text{ и } \bar{y}_2 = y_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

тогда  $\sigma_2(y_0)$  – пара ортогональных фигур  $(K_2, L_2)$ , пересекающихся в начале координат, где  $K_2$  – ориентированная гиперплоскость индекса 1,  $L_2$  – ориентированная пространственноподобная прямая.  $H$ -пространство таких пар однородно. Прямые вычисления дают совпадения стационарных групп при действии группы  $H$  на точку  $y_0$  и пару  $\sigma_2(y_0)$ .

**Теорема 3.** Пространство  $N_3$  изоморфно  $H$ -пространству пар ортогональных фигур  $(K_3, L_3)$ , пересекающихся в начале координат, где  $K_3$  – ориентированная евклидова гиперплоскость,  $L_3$  – ориентированная времениподобная прямая.

**Доказательство.** Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A, C \in SL(2, C), B = B^T \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A, C \in SL(2, C), B = -B^T \right\} \text{ и } \bar{y}_3 = y_0 = \varepsilon,$$

тогда  $\sigma_3(y_0)$  – пара ортогональных фигур  $(K_3, L_3)$ , пересекающихся в начале координат, где  $K_3$  – ориентированная евклидова гиперплоскость,  $L_3$  – ориентированная времениподобная прямая.  $H$ -пространство таких пар однородно. В силу совпадения стационарных групп точки  $y_0$  и пары  $\sigma_3(y_0)$  при действии группы  $H$  утверждение теоремы верно.

**Теорема 4.** Для каждого  $i=1, 2, 3$  пространство  $M_i$  изоморфно  $G$ -пространству  $\{\bar{T}_z N_i\}_{z \in M}$ , где  $N_i$  – соответствующее  $H$ -пространство, а  $T_z$  – параллельный перенос в  $A^4 M$  на вектор  $z$ .

**Доказательство.** Непосредственно следует из специфики действия группы  $G$  на пространствах  $M_i$ .

1. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М., 1986.
2. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., 1969.
3. Ведерников В.И., Ведерников С.В. // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). 1987. Т. 19. С. 155.
4. Ведерников С.В. // Там же. 1983. Т. 15. С. 165.
5. Ведерников С.В. // Там же. 1975. Т. 7. С. 49.

Поступила в редакцию 03.10.2001.

**Юрий Яценкович Романовский** – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики В.В. Суворов.

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ФУНКЦИЙ  
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ВАЛЛЕ ПУССЕНА**

Rational operators of Vallee Poussin type are built for functions having bounded variation and satisfying the Holder's property, with the estimate of their deviation from initial function being given.

**1. Постановка задачи.** Класс гельдеровских функций ограниченной вариации приближается рациональными функциями существенно лучше, чем полиномами. Действительно, пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$ ,  $V_a^b [f] < \infty$  (вариация ограничена) и  $f \in \text{Lip}_M \alpha [a, b]$ , т. е. для любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad M > 0.$$

Тогда

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad R_n(f) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где через  $E_n(f)$  и  $R_n(f)$  обозначены наилучшие полиномиальные и рациональные приближения функции  $f$  соответственно. Оценка для  $E_n(f)$  широко известна и может быть найдена, например, в [1, с. 161]. Оценка для  $R_n(f)$  в окончательном виде была независимо получена А.А. Пекарским [2] и П.П. Петрушевым [3]. При этом применялся метод рациональной аппроксимации ступенчатой функции, дающей хорошее приближение  $f$ . В данной работе гельдеровские функции ограниченной вариации приближаются рациональными операторами типа Валле Пуссена.

Прежде чем определить такой рациональный оператор, необходимо продолжить функцию  $f$  за пределы отрезка  $[a, b]$  с сохранением ее свойств. С этой целью положим

$$f(x) = \begin{cases} f(a), & x \in [a-h, a], \\ f(b), & x \in [b, b+h], \end{cases} \quad h = b - a. \quad (1)$$

Пусть  $\{z_k\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , – набор комплексных чисел с положительной мнимой частью,

$$\pi_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - z_k}{x - \bar{z}_k}, \quad \bar{\pi}_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - \bar{z}_k}{x - z_k}, \quad (2)$$

$$\Phi'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\text{Im } z_k}{(\text{Re } z_k - x)^2 + \text{Im}^2 z_k}, \quad (3)$$

$$G_n(t, x) = \frac{\pi_n(t)\bar{\pi}_n(x) + \bar{\pi}_n(t)\pi_n(x) - \pi_n^z(t)\bar{\pi}_n^z(x) - \bar{\pi}_n^z(t)\pi_n^z(x)}{4(t-x)^2}. \quad (4)$$

Идея создания рационального оператора типа Валле Пуссена, определяемого по формуле

$$V_n(x, f) = \frac{1}{\pi_n^z \Phi'_n(x)} \int_{a-h}^{b+h} f(t) G_n(t, x) dt, \quad (5)$$

принадлежит В.Н. Русаку [4, с. 129].

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема.** Пусть  $f \in \text{Lip}_M \alpha [a, b]$ ,  $V_a^b [f] < \infty$ . Тогда существует такой набор параметров  $\{z_k\}$ ,  $\text{Im } z_k > 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ , что

$$\|f - V_n(f)\|_{C[a, b]} \leq 60 V_a^b[f] \frac{\ln n}{\alpha n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \quad (6)$$

Известно [4, с. 129], что  $V_n(x, f)$  является, вообще говоря, рациональной функцией порядка  $4n-2$  с полюсами в точках  $z_k$  и  $\bar{z}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , а также в нулях функции  $\Phi'_n(x)$ . Кроме того, ядро (4) обладает следующими свойствами [4, с. 115]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(t, x) dt = \pi \Phi'_n(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |G_n(t, x)| dt < 3\pi \Phi'_n(x). \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что

$$u > 3,7, \quad v > 2, \quad N = [uv], \quad \varepsilon = e^{-u}, \quad \rho = \varepsilon^{1/N}. \quad (8)$$

**Лемма 1.** Если  $x_0 \in \mathbf{R}$ , то при  $\varepsilon \leq |x - x_0| < 1$

$$\gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \pi \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{k-1}}{(x-x_0)^2 + \rho^{2(k-1)}} \geq \frac{2}{3} \frac{v}{|x-x_0|}.$$

**Доказательство.** Выберем натуральное число  $k_0$ ,  $1 < k_0 \leq N$ , из условия  $\rho^{k_0} \leq |x - x_0| < \rho^{k_0-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{\pi}{|x-x_0|} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\frac{|x-x_0|}{\rho^{k-1}} + \frac{\rho^{k-1}}{|x-x_0|}} \geq \frac{\pi}{2|x-x_0|} \left( \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|x-x_0|}{\rho^{k-1}} + \sum_{k=k_0+1}^N \frac{\rho^{k-1}}{|x-x_0|} \right) \geq \\ &\geq \frac{\pi \rho}{2|x-x_0|} \left( \sum_{k=1}^{k_0} \rho^{\tilde{k}_0-k} + \sum_{k=k_0+1}^N \rho^{k-(k_0+1)} \right) = \\ &= \frac{\pi \rho}{2|x-x_0|} \left( \frac{1-\rho^{k_0}}{1-\rho} + \frac{1-\rho^{N-k_0}}{1-\rho} \right) \geq \frac{\pi}{2|x-x_0|} \frac{1-\varepsilon}{\rho^{-1}-1} \geq \frac{2}{3} \frac{v}{|x-x_0|}. \end{aligned}$$

**2. Леммы о выборе полюсов.** Многие методы теории рациональной аппроксимации функций базируются на лемме Ньюмена [5]. Приведем здесь следующую ее модификацию.

**Лемма 2.** Для  $x \in [\varepsilon, 1]$

$$\left| \prod_{k=1}^N \frac{x - \rho^{k-1}}{x + \rho^{k-1}} \right| \leq e^{-v},$$

где  $u, v, \varepsilon, N, \rho$  есть числа, определенные в (8).

**Лемма 3.** Пусть  $n \geq 2N$ ,  $N \geq 5$ , и среди чисел  $z_k$ , задающих произведение Бляшке (2), содержатся следующие:

$$z_k = \begin{cases} x_0 + \rho^{k-1}, & 1 \leq k \leq N, \\ x_0 + \rho^{N+1-k}, & N+1 \leq k \leq 2N, \end{cases} \quad \rho = e^{-\frac{1}{\sqrt{N}}}, \quad x_0 \in \mathbf{R}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{\infty} |\pi_+(x_0 + iy)| \frac{dy}{1+y^2} \leq 4e^{-\sqrt{N}}.$$

Пусть  $t \in \mathbf{R}$ . С учетом обозначений (8) введем в рассмотрение набор  $\{z_k\} = \{z_k\}(u, v, t)$ , состоящий из  $N$  комплексных чисел, определяемых из соотношения

$$z_k = t + i\rho^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (9)$$

Пусть  $w \in \mathbb{N}$ ,  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ . Элементы набора  $\{z'_k\} = \{z'_k\}(w, t_1, t_2)$  определим следующим образом:

$$z'_k = \frac{t_1 + t_2}{2} + i \frac{t_2 - t_1}{2}, \quad 1 \leq k \leq w. \quad (10)$$

**Лемма 4.** Пусть  $x < t_1 < t_2$ , и среди чисел  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , задающих произведение  $\pi_n$ , содержатся наборы  $\{z_k\}(u, v, t_1)$ ,  $\{z_k\}(u, v, t_2)$ , и  $\{z'_k\}(w, t_1, t_2)$ . Тогда

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\pi_n(t)}{(t-x)^2} dt \right| \leq \frac{2\varepsilon}{(t_1-x)^2} + \frac{e^{-\frac{4}{5}w}}{t_1-x} + 2e^{-v} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t-x)^2}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Положим  $h = (t_2 - t_1)/2$ . По интегральной теореме Коши

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\pi_n(t)}{(t-x)^2} dt = \int_{t_1+i\varepsilon}^{t_1+i\varepsilon} + \int_{t_1+i\varepsilon}^{t_1+ih} + \int_{t_1+ih}^{t_2+ih} - \int_{t_2+ih}^{t_2+i\varepsilon} - \int_{t_2+i\varepsilon}^{t_2} = J_1 + J_2 + J_3 - J_4 - J_5.$$

Так как при  $\text{Im } z \geq 0$   $|\pi_n(z)| < 1$ , то

$$|J_1| \leq \int_0^\varepsilon \frac{|\pi_n(t_1 + it)|}{(t_1-x)^2 + t^2} dt \leq \frac{\varepsilon}{(t_1-x)^2}.$$

Согласно лемме 2 при  $\varepsilon \leq t \leq 1$

$$|\pi_n(t_1 + it)| \leq \left| \prod_{k=1}^N \frac{t_1 + it - (t_1 + i\rho^{k-1})}{t_1 + it - (t_1 - i\rho^{k-1})} \right| = \left| \prod_{k=1}^N \frac{t - \rho^{k-1}}{t + \rho^{k-1}} \right| < e^{-v}.$$

Следовательно,

$$|J_2| \leq e^{-v} \int_{\varepsilon}^h \frac{dt}{(t_1-x)^2 + t^2} < 2e^{-v} \int_0^h \frac{dt}{((t+t_1)-x)^2} = 2e^{-v} \int_{t_1}^{t_1+h} \frac{dt}{(t-x)^2}.$$

При  $t \in [t_1, t_2]$

$$|\pi_n(t + ih)| \leq \left| \frac{t - (t_1 + t_2)/2}{t - (t_1 + t_2)/2 + 2ih} \right|^w \leq \left| \frac{h}{h + 2ih} \right|^w = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^w < e^{-\frac{4}{5}w}.$$

Тогда

$$|J_3| \leq e^{-\frac{4}{5}w} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t_1-x)^2 + h^2} \leq \frac{e^{-\frac{4}{5}w}}{t_1-x}.$$

Оценивая  $|J_4|$  аналогично  $|J_2|$  и  $|J_5|$  аналогично  $|J_1|$ , убеждаемся в справедливости леммы.

*Замечание.* Лемма 4 останется в силе, если:

1) считать, что  $t_1 < t_2 < x$  (в этом случае в неравенстве (11)  $t_1 - x$  следует заменить на  $x - t_2$ );

2) в левой части (11) вместо  $\pi_n(t)$  записать  $\pi_n^2(t)$ .

**3. Разбиение отрезка и выбор полюсов.** С целью упрощения выкладок будем для начала считать, что функция  $f$  задана на отрезке  $[0, 1]$  и  $V_0[f] = 1$ . Продолжим  $f$  на  $[-1, 2]$  по правилу (1). Пусть

$$\ln_j n = \underbrace{\ln \ln \dots \ln}_j n,$$

$\lambda$  – такое натуральное число, что  $1 < \ln_\lambda n < e$ ,

$$m_j = \left[ \frac{\alpha n}{B \ln n \ln^2 n} + 1 \right], \quad 1 \leq j \leq \lambda - 1; \quad m_\lambda = \left[ \frac{\alpha n}{B \ln n} + 1 \right], \quad (12)$$

и значение постоянной величины  $B$  будет определено в дальнейшем.

В силу непрерывности  $f$  функция  $V_{\tau_{k-1}^j}[f]$  также непрерывна. Следовательно, можно построить разбиение

$$\{\tau_k^j\}, \quad 0 < k < \mu_j, \quad -1 = \tau_0^j < \tau_1^j < \dots < \tau_{\mu_j-1}^j < \tau_{\mu_j}^j = 2,$$

исходя из условия

$$V_{\tau_{k-1}^j}[f] = \frac{1}{m_j}, \quad 1 \leq k \leq \mu_j.$$

Очевидно,  $\mu_1 = m_1$ .

Пусть  $2 \leq j \leq \lambda$ , и разбиение  $\{\tau_k^{j-1}\}$ ,  $0 < k < \mu_{j-1}$ , уже построено. Выберем разбиение  $\{\tau_k^j\}$ ,  $0 < k < \mu_j$ , так, чтобы

$$V_{\tau_{k-1}^j}[f] = \frac{1}{m_j}, \quad 1 < k < \mu_j.$$

Объединив  $\{\tau_k^j\}$  и  $\{\tau_k^{j-1}\}$ , получим разбиение  $\{\tau_k^j\}$ ,  $0 < k < \mu_j$ , обладающее следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \{\tau_k^j\} \supset \{\tau_k^{j-1}\}, \quad 2 < j < \lambda; \\ V_{\tau_{k-1}^j}[f] < \frac{1}{m_j}, \quad \mu_j \leq \frac{6}{5} m_j, \quad 1 \leq j \leq \lambda, \quad 1 < k \leq \mu_j. \end{aligned} \quad (13)$$

Определим следующие константы:

$$\begin{aligned} v_1 = \ln n, \quad w_1 = \left[ \frac{3}{2} \ln n \right]; \quad v_j = 2 \ln_j n, \quad w_j = \left[ \frac{1}{4} \ln n \right], \quad 2 < j < \lambda; \\ u = \frac{1,2}{\alpha} \ln n, \quad \varepsilon = e^{-u} = n^{-\frac{1,2}{\alpha}}, \quad N_0 = \left[ \frac{n}{1000} \right]; \quad N_j = [uv_j], \quad 1 \leq j \leq \lambda. \end{aligned}$$

Приступим к выбору параметров  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , задающих оператор (5). Принимая поочередно  $x_0 = -1$  и  $x_0 = 2$ , возьмем для каждой из этих точек по  $2N_0$  параметра в соответствии с леммой 3. К их числу добавим  $z_0 = i$  кратности  $N_0$ .

Пусть  $1 < j < \lambda$ ,  $1 \leq k \leq \mu_j - 1$ . Если  $\tau_k^j$  не входит в разбиение  $\{\tau_k^{j-1}\}$ , то добавляем к общему числу параметров набор  $\{z_k\}(u, v_j, \tau_k^j)$ , определенный в (9). И наконец, для  $2 \leq k \leq \mu_j - 1$  возьмем набор  $\{z_k'\}(w_j, \tau_{k-1}^j, \tau_k^j)$ , определенный в (10).

На этом выбор параметров заканчивается; и, как несложно убедиться, общее их число не превосходит

$$\begin{aligned} 5N_0 + \sum_{j=1}^{\lambda} ((m_j - 1)N_j + w_j(\mu_j - 2)) \leq \\ \leq \frac{n}{200} + \sum_{j=1}^{\lambda-1} \frac{\alpha n}{B \ln n \ln^2 n} \left( \frac{2,4}{\alpha} + \frac{0,3}{e} \right) \ln n \ln_j n + \frac{\alpha n}{B \ln n} \left( \frac{2,4e}{\alpha} + 0,3 \right) \ln n \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{n}{200} + 2.52 \frac{n}{B} \sum_{j=1}^{\lambda-1} \frac{1}{\ln j} + 6.83 \frac{n}{B} \leq \frac{n}{200} + 7.94 \frac{n}{B} \leq n,$$

если считать, что  $B=8$ .

4. Доказательство теоремы. Пусть  $x \in [0, 1]$ . Тогда согласно (7)

$$\begin{aligned} f(x) - V_n(x, f) &= \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 2]} f(x)G_n(t, x)dt - \\ &\quad - \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \int_{-1}^x (f(t) - f(x))G_n(t, x)dt - \\ &\quad - \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \int_x^2 (f(t) - f(x))G_n(t, x)dt = J_0 + J_1 + J_2. \end{aligned}$$

С помощью леммы 3 несложно показать, что  $J_0 = o(\ln n/n)$ .

Оценим сверху  $|J_2|$ . С этой целью введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть  $1 \leq j \leq \lambda$ . Натуральные числа  $s_j$  и  $k_j$  определяются соответственно из условий:

$$x \in [\tau_{s_j-1}^j, \tau_{s_j}^j], \quad x + \varepsilon \in [\tau_{k-1}^j, \tau_k^j].$$

Через  $n_k^j$ ,  $2 \leq j \leq \lambda$ ,  $1 \leq k \leq \mu_j$ , обозначим номер отрезка  $(j-1)$ -го ранга, содержащего отрезок  $[\tau_{k-1}^j, \tau_k^j]$ , т. е.  $[\tau_{k-1}^j, \tau_k^j] \subset [\tau_{n_k^j-1}^{j-1}, \tau_{n_k^j}^{j-1}]$ .

Введем в рассмотрение следующие суммы:

$$\begin{aligned} J_2^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \sum_{k=s_1+1}^{\mu_1} \int_{\tau_{k-1}^1}^{\tau_k^1} (f(\tau_{k-1}^1) - f(x))G_n(t, x)dt; \\ J_2^j &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \sum_{k=s_j+1}^{\mu_j} \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} (f(\tau_{k-1}^j) - f(\tau_{n_k^j-1}^{j-1}))G_n(t, x)dt, \quad 2 \leq j \leq \lambda; \\ J_2^d &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \int_x^{\tau_{n_2}^2} (f(t) - f(x))G_n(t, x)dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi\Phi'_n(x)} \sum_{k=s_\lambda+1}^{\mu_\lambda} \int_{\tau_{k-1}^\lambda}^{\tau_k^\lambda} (f(t) - f(\tau_{k-1}^\lambda))G_n(t, x)dt. \end{aligned}$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$J_2 = J_2^1 + J_2^2 + \dots + J_2^\lambda + J_2^d. \tag{14}$$

Представим сумму  $J_2^j$ ,  $1 \leq j \leq \lambda$ , в виде

$$J_2^j = \sum_{k=s_j+1}^{\mu_j} = \sum_{k=s_j+1}^{k_j} + \sum_{k=k_j+1}^{\mu_j-1} + \sum_{k=\mu_j}^{\mu_j} = \Sigma_1^j + \Sigma_2^j + \Sigma_3^j.$$

Из свойства (7) ограниченности нормы рационального оператора типа Вилле Пуссена и того, что  $f \in \text{Lip}_M \alpha$ , следует оценка

$$|\Sigma_i^j| \leq \frac{M\varepsilon^\alpha}{\pi\Phi'_n(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_n(t, x)| dt \leq \frac{3M}{\pi}, \quad 1 \leq j \leq \lambda.$$

Пусть  $2 < j \leq \lambda$ . По определению (4) ядра  $G_n(t, x)$

$$|\Sigma_2^j| \leq \frac{1}{\pi \Phi'_n(x)} \sum_{k=k_j+1}^{\mu_j-1} \left| f(\tau_{k-1}^j) - f(\tau_{n_{k-1}^{j-1}}) \right| \left| \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} \frac{\pi_n(t)}{(t-x)^2} dt \right|.$$

Согласно свойствам (13) разбиений

$$\left| f(\tau_{k-1}^j) - f(\tau_{n_{k-1}^{j-1}}) \right| < \min \left\{ M(\tau_{k-1}^j - x)^\alpha, \frac{1}{m_{j-1}} \right\}.$$

По формуле (3) и лемме 1

$$\frac{1}{\pi \Phi'_n(x)} < \frac{3}{2} \frac{\tau_{k-1}^j - x}{v_j(k-s_j)}, \quad k_j+1 \leq k \leq \mu_j-1.$$

Следовательно, в силу леммы 4

$$|\Sigma_2^j| \leq \frac{3}{2} \left( M \varepsilon^\alpha + \frac{e n^{-0.2}}{2 m_{j-1}} \right) \sum_{k=k_j+1}^{\mu_j-1} \frac{1}{k-s_j} + \frac{3}{2} \frac{e^{-v_j}}{m_{j-1}} \frac{\tau_{k_j}^j - x}{\ln_j n} \int_{\tau_{k_j}^j}^{\tau_{\mu_j-1}^j} \frac{dt}{(t-x)^2}.$$

Оценка  $|\Sigma_3^j|$  не представляет трудности и требует лишь незначительной модификации леммы 4. В результате согласно (12)

$$|J_2^j| \leq C \frac{\ln^4 n}{n^{1.2}} + \frac{3}{2} \frac{B \ln n}{\alpha n \ln_j n},$$

где  $C = C(\alpha, M)$  есть некоторая положительная константа.

Несложно убедиться в том, что для  $|J_2^d|$  верна аналогичная оценка. Рассмотрим теперь диагональную составляющую  $J_2^d$ . В силу (12)

$$|J_2^d| \leq \frac{B \ln n}{\alpha n} \frac{1}{\pi \Phi'_n(x)} \int_x^2 |G_n(t, x)| dt.$$

Так как  $\sum_{j=1}^3 1/\ln_j n \leq 3/2$ , то в соответствии с (14)

$$|J_2| \leq 18 \frac{\ln n}{\alpha n} + 8 \frac{\ln n}{\alpha n} \frac{1}{\pi \Phi'_n(x)} \int_x^2 |G_n(t, x)| dt + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Оценка  $|J_1|$  проводится аналогично, и по свойству (7) ограниченности нормы

$$|f(x) - V_n(x, f)| \leq |J_0| + |J_1| + |J_2| < 60 \frac{\ln n}{\alpha n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Переходя к общему случаю (произвольные отрезок  $[a, b]$  и вариация функции  $f$ ), положим

$$\varphi(t) = \frac{f(a+(b-a)t)}{V_a^b[f]}, \quad t \in [0, 1].$$

Определенная таким образом функция  $\varphi$  обладает следующими свойствами:

$$V_0^1[\varphi] = 1; \quad |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < M \frac{(b-a)^\alpha}{V_a^b[f]} |t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in [0, 1].$$

Следовательно, при некотором наборе параметров  $z_k^*$ ,  $1 < k < n$ , для  $\varphi$  справедлива оценка (6). Проведя обратную замену переменных, несложно

убедиться, что оценка (6) верна и для  $f$  с набором параметров  $z_k = a + (b - a)z_k^*$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Теорема доказана.

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
2. Пекарский А. А. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 5. С. 34.
3. Петрушев П. П. // Pliska Studia Math. Bulgarica. 1977. Vol. 1. P. 144.
4. Русак В. Н. // Рациональные функции как аппарат приближения. 1979.
5. Newman D. // Michigan Math. J. 1964. Vol. 11. P. 11.

Поступила в редакцию 06.12.2001.

*Александр Сергеевич Ляликов* – аспирант кафедры высшей математики и математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Русак.

УДК 517.977

Л.И. ЛАВРИНОВИЧ

### КОРРЕКЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

The method of construction of optimal closable program controls is shown, for small number of vectors of approximation. The algorithm of synthesis of optimal closable feedback in the conditions of uncertainty is described.

1. В классе дискретных управлений рассматривается задача [1]:

$$\begin{aligned} c^* x(t^*) \rightarrow \max, \quad x = A(t)x + b(t)u + w(t), \quad x(t_*) = x_0, \\ x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n : g_* \leq Hx \leq g^*\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(t) \in W = \{w \in R^n : w_* \leq w \leq w^*\}, \quad u(t) \in U = \{u \in R : |u| \leq 1\}, \quad t \in T,$$

где  $A(t)$ ,  $b(t)$ ,  $t \in T$ , – кусочно-непрерывные функции,  $H \in R^{m \times n}$ ,  $g_*$ ,  $g^* \in R^m$ .

Предполагается: 1)  $w(t) \in W$ ,  $t \in T$ , – кусочно-непрерывная функция; 2)  $u(t)$ ,  $t \in T$ , – дискретная функция с периодом квантования  $h$ ; 3) в текущие моменты  $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$  известно состояние  $x(\tau)$ ; 4) в моменты  $T^p = \{t^q : t_* < t^q < t^*, q = \overline{1, p}\}$  будут известны значения  $x(t^q)$ ,  $q = \overline{0, p+1}$ .

Требуется построить такое управление, чтобы: 1) система в момент  $t^*$  попала на множество  $X^*$  независимо от реализовавшегося возмущения; 2) гарантированное значение критерия качества задачи (1) было наибольшим.

В [1] предложен метод построения приближенного решения задачи (1), основанный на внешней аппроксимации множеств замыкания, и показано, что с увеличением количества векторов аппроксимации построенное управление сходится к замыкаемому оптимальному программному управлению.

2. Опишем процедуру коррекции приближенного управления, позволяющую повысить точность решения, полученного при использовании небольшого количества векторов аппроксимации. Выберем небольшой набор единичных  $n$ -векторов  $F(q) = \{f_{1,q}, f_{2,q}, \dots, f_{s(q),q}\}$  и, следуя [1], построим экстремальное управление. При этом будут найдены  $\alpha^*(t_*)$ ,  $\bar{X}^{0, \bar{\alpha}(t_*)}$ ,  $\bar{X}^{1, \bar{\alpha}(t_*)}$ , ...,  $\bar{X}^{p+1, \bar{\alpha}(t_*)}$ , цепочка активных индексов  $K(i(t_*))$ , соответствующих множествам замыкания, и векторы  $x_i^q$ ,  $q = \overline{0, p+1}$ , соответствующие актив-

ным индексам  $i^* \in K(i(t_*))$ . Скорректируем вектор  $f_{i(t_*)0}$ , т. е. заменим его на новый вектор  $f_{i(t_*)0}^* = (f_{i(t_*)0} + \varepsilon(x_0 - x_{i(t_*)}^0)) / |f_{i(t_*)0} + \varepsilon(x_0 - x_{i(t_*)}^0)|$ , где  $\varepsilon$  – шаг коррекции, который можно менять на каждой итерации. Если активных векторов несколько, то осуществим подобную коррекцию для всех активных векторов. Построим множество  $\bar{X}^{0,\alpha(t_*)}$  по новому набору векторов  $F(0)$ . При  $x_0 \notin \bar{X}^{0,\alpha(t_*)}$  повторим операцию. Если  $x_0 \in \bar{X}^{0,\alpha(t_*)}$ , то при  $x_0 \in \partial X^{0,\alpha(t_*)}$  ( $\partial X$  – граница множества  $X$ ) перейдем к коррекции множества  $\bar{X}^{1,\alpha(t_*)}$ , а при больших значениях  $\varepsilon$  уменьшим их и повторим итерацию снова.

Пусть  $x_0 \in \partial X^{0,\alpha(t_*)}$ . Под действием построенного ранее экстремального управления и наилучшего возмущения система в момент  $t^1$  перейдет в состояние  $x^1(t^1) \in \partial \bar{X}^{1,\alpha(t_*)}$ . Скорректируем вектор  $f_{i(t^1)1}$ ,  $i(t^1) \in K(i(t^1))$ :  $f_{i(t^1)1}^* = (f_{i(t^1)1} + \varepsilon(x^1(t^1) - x_{i(t^1)1}^1)) / |f_{i(t^1)1} + \varepsilon(x^1(t^1) - x_{i(t^1)1}^1)|$  и построим множество  $\bar{X}^{1,\alpha(t_*)}$  по новой системе векторов  $F(1)$ . Если  $x^1(t^1) \notin \bar{X}^{1,\alpha(t_*)}$ , то возвращаемся к началу процедуры. В противном случае переходим к коррекции множества  $\bar{X}^{2,\alpha(t_*)}$ .

Следуя [2], можно показать, что скорректированные экстремальные управления сходятся к оптимальному гарантированному программному управлению задачи [1] в классе дискретных функций. Для построения оптимального гарантированного управления в классе кусочно-постоянных функций можно использовать процедуру доводки [3].

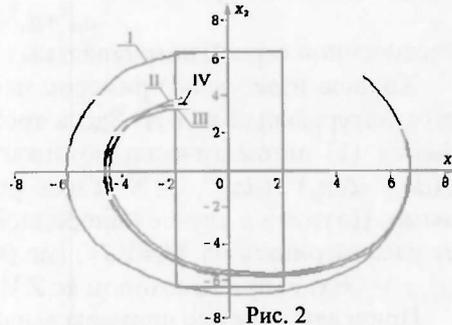
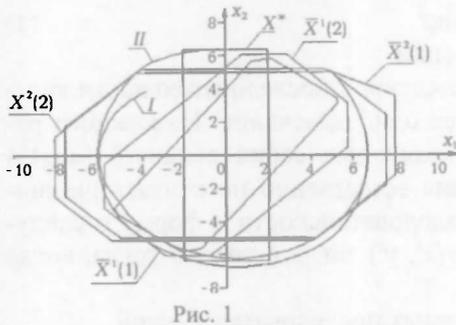
3. Метод коррекции проиллюстрируем на примере задачи [1]

$$\begin{aligned} |x_2(5)| \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 5, \\ |x_1(5)| \leq 2, \quad |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0,5, \quad t \in [0,5], \end{aligned} \quad (2)$$

с моментом замыкания  $t^1=2,5$  и периодом квантования 0,05. На рис. 1 представлены начальные аппроксимации множеств замыкания  $\bar{X}^1(1)$ ,  $\bar{X}^0(1)$ , построенные по восьми векторам, и траектория (I) системы, соответствующая этим множествам, а также скорректированные оптимальные аппроксимации множеств замыкания  $\bar{X}^1(2)$ ,  $\bar{X}^0(2)$  и оптимальная траектория (II) системы, соответствующая этим множествам.

4. Опишем процедуру реализации оптимальной замыкаемой обратной связи для задачи (1). Предположим, что на промежутке  $[t_*, \tau]$ ,  $\tau \in T_h$ ,  $t_* \in [t^{q-1}, t^q - h]$ , были вычислены значения оптимальной обратной связи  $u^*(t_*)$ ,  $u^*(t_* + h)$ , ...,  $u^*(\tau)$ , и под действием построенного управления и реализовавшегося возмущения система перешла в состояние  $x^*(\tau + h)$ . Обозначим  $X^{\tau,\alpha(\tau)}$  – множество всех состояний, из которых за время  $[\tau, t^q]$  можно попасть на множество  $X^{q,\alpha(\tau)}$ . Его аппроксимацию начнем строить по набору векторов, полученному при аппроксимации множества  $\bar{X}^{\tau-h,\alpha(\tau)}$ . Предположим, что в момент  $\tau+h$  известны  $\alpha^*(\tau)$ ,  $\bar{X}^{l,\alpha(\tau)}$ ,  $\bar{X}^{i,\alpha(\tau)}$ ,  $l = \overline{q,p}$ , цепочка активных индексов  $K(i(\tau))$ , соответствующих множествам замыка-

ния, и векторы  $x_i^*$ ,  $l = \overline{q, p}$ , соответствующие активным индексам  $i^* \in K(i(\tau))$ . Вычисление текущего значения оптимальной замыкаемой обратной связи  $u(\tau+h)$  будем производить согласно описанной выше процедуре, используя для аппроксимации множеств замыкания только  $\varepsilon$ -активные ограничения (вектор  $f_{i,l}$  назовем  $\varepsilon$ -активным, если  $|\dot{f}_{i,l} x(\tau) - \beta^{l,\alpha}(\tau)| < \varepsilon$ ). Более точную аппроксимацию множеств замыкания можно вычислять параллельно на других процессорах в процессе функционирования системы.



5. Реализацию оптимальной замыкаемой обратной связи проиллюстрируем на примере (2). На рис. 2 представлены траектория системы при действии оптимального гарантированного программного управления и наихудшего возмущения (I), а также траектории системы при действии замыкаемых обратных связей для случаев  $w_1(t) \equiv 0$  (II),  $w_2(t) \equiv 0,5$  (III),  $w_3 = -0,5$  (IV).

1. Лавринович Л. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Задачи управления: В 2 ч. Мн., 1984. Ч. 2.

Поступила в редакцию 27.02.2001.

*Леонид Иванович Лавринович* – ассистент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.

УДК 511.5

С.Л. ШТИН

### ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

We can associate with any real sequence its cartesian powers and study their geometry. In this article we consider the only such geometric property – the distance from zero for elements of cartesian square of a sequence. The intention to classify sequences in dependence on this distance leads to some difficult diophantine problems. We restrict our consideration to some simple cases.

Рассмотрим произвольную вещественную последовательность  $A = \{a_n\}$ , множество значений которой бесконечно. Вместо  $A$  можно рассматривать  $A \times A = \{(a_i, a_j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ , поскольку любое из этих множеств вполне определяет другое. Под геометрическими свойствами последовательности  $A$  будем понимать геометрические свойства множества  $A \times A$  из  $\mathbb{R}^2$ .

Зададим функцию  $\varphi: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(a_i, a_j) = a_i^2 + a_j^2$ . Можно пытаться классифицировать последовательности в зависимости от инъективности  $\varphi$ . Ввиду

того что  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ , естественно рассматривать  $\varphi$  на фактормножестве  $V_A = A \times A / \equiv$ , где  $\equiv$  – отождествление симметричных точек  $(x, y) = (x', y')$  тогда и только тогда, когда  $x=x'$  и  $y=y'$  или  $x=y'$  и  $y=x'$ .

*Определение.* Последовательность  $A$  назовем вырожденной, если отображение  $\varphi: V_A \rightarrow \mathbf{R}, (a_i, a_j) \rightarrow a_i^2 + a_j^2$  почти инъективно, т. е. становится инъективным после удаления из  $V_A$  не более чем конечного множества. В противном случае назовем  $A$  невырожденной.

Вопрос о невырожденности последовательности  $A$  сводится к вопросу о том, обладает ли уравнение

$$a_m^2 + a_n^2 = a_p^2 + a_g^2 \quad (1)$$

бесконечной серией нетривиальных решений.

Хорошо известным примером невырожденной последовательности является натуральный ряд  $\mathbf{N}$ . Здесь требуется одно замечание. Из каждого решения (1) автоматически возникает бесконечная серия решений  $(da_m)^2 + (da_n)^2 = (da_p)^2 + (da_g)^2, d \in \mathbf{N}$ . Такие решения естественно не считать различными. Поэтому в случае однородной последовательности  $A$  форму  $\varphi$  следует рассматривать на  $w_A = V_A / \equiv$ , где  $(x, y) \equiv (x', y')$  тогда и только тогда, когда  $(x', y') = k(x, y)$  при некотором  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ .

Приведем простые примеры вырожденных последовательностей.

1. Факториал  $\{n!\}$ .

Запишем уравнение (1), и пусть  $n = \max\{m, n, p, g\}$ . Тогда уже  $(n!)^2 > (p!)^2 + (g!)^2$ , так как  $(n!)^2 > (n-1)! + (n-1)! \sim n^2 > 2$ .

2. Геометрическая прогрессия  $\{a^n\}, a \in \mathbf{N}$ .

Если  $a^{2n} + a^{2m} = a^{2p} + a^{2g}$  и  $n = \max\{m, n, p, g\}$ , то  $m = \min\{m, n, p, g\}$  и, сократив на  $a^{2m}$ , получим противоречивое соотношение  $a^{2n'} + 1 = a^{2p'} + a^{2g'}$ .

Вырожденность рассмотренных последовательностей очевидна потому, что они слишком быстро возрастают.

Перейдем к последовательностям, имеющим не столь сильный рост. Легко доказать следующее

**Предложение 1.** Любая последовательность вида  $\{\sqrt{an^2 + bn + c}\}$  ( $a, b, c \in \mathbf{Z}, a > 0$ ) невырождена.

*Доказательство.* Записываем (1):  
 $(an^2 + bn + c) + (av^2 + bv + c) = (am^2 + bm + c) + (au^2 + bu + c)$   
 или

$$a(n^2 - m^2) + b(n - m) = a(u^2 - v^2) + b(u - v). \quad (2)$$

После замены неизвестных

$$\begin{cases} n - m = S & \begin{cases} u - v = U \\ u + v = V \end{cases} \\ n + m = T, \end{cases}$$

уравнение (2) принимает вид

$$S(aT + b) = U(aV + b), \text{ где } S \equiv T \pmod{2}, U \equiv V \pmod{2}.$$

Итак, нужно убедиться, что существует бесконечно много чисел  $N \in \mathbf{N}$ , имеющих хотя бы два различных представления вида

$$N = S(aT + b), S \equiv T \pmod{2}, T > S. \quad (3)$$

Будем выбирать  $S, T$  из  $\mathbf{N}$  так, что  $S \equiv T \pmod{2}$  и  $T > S(2a + 1)$ .

Тогда каждое число  $N$  вида  $S(aT + b)(2a + 1)$  имеет различные представления (3):  $N = S(2a + 1)(aT + b) = S[a(2aT + T + 2b) + b]$  (оба сравнения совпадают с  $S \equiv T \pmod{2}$ ).

*Следствие.* Любая арифметическая прогрессия  $\{a + nd\}$  невырождена.

Для подпоследовательности  $A$  натурального ряда обозначим через  $A(N)$  число элементов множества  $\{a_n \in A \mid a_n \leq N\}$ .

*Определение.* Если существует  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N)}{N}$ , назовем его (асимптотической) плотностью последовательности  $A = \{a_n\}$ .

Очевидно, что прогрессия  $\{a+nd\}$  имеет плотность  $1/d$ . Таким образом, у нас есть последовательности, которые невырождены и обладают сколь угодно малой плотностью. Однако арифметические прогрессии весьма правильно устроены. Возникает вопрос: можно ли сделать какие-то выводы о невырожденности последовательности, располагая лишь информацией о ее плотности.

**Предложение 2.** Любая последовательность, обладающая плотностью  $>1/2$ , является невырожденной.

*Доказательство.* Сначала мы иначе докажем следствие предложения 1. Начнем с некоторого уравнения в  $\mathbf{Z}[t, u]$ :

$$(At - Bu + C)^2 + (Dt + Eu + F)^2 = (At - Eu + C)^2 + (Dt - Bu + F)^2, \quad (4)$$

где  $A, B, \dots, F$  – неопределенные пока коэффициенты из  $\mathbf{Z}$ , которые подчинены условиям:

$$A, B, D, E = 0 \pmod{d}; C = F \pmod{d}.$$

Эти условия возникают из требования, чтобы каждая скобка в (4) была членом прогрессии  $\{a+nd\}$ . Убедимся, что при помощи подходящей специализации неопределенных коэффициентов уравнение (4) превращается в тождество. Коэффициенты при  $t^2, u^2, t$  и свободные члены в обеих частях совпадают. Потребуем совпадения коэффициентов при  $tu$  и  $u$ :

$$\begin{cases} -AB + DE = -FE - DB \\ -BC + EF = -EC - BF \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (A - D)B = (A + D)E \\ (B - E)C = (B + E)F. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть  $B = \lambda E, F = a, C = a + d$ . Из второго уравнения в (5) находим  $\lambda = (2a + d)/d$ . Положим  $A = kd, D = ld$ . Тогда первое уравнение из (5) можно записать в виде  $k = (a + d)l/a$ .

Если, наконец,  $l = a$  и  $E = d^2$ , то получаем:

$$A = (a + d)d; D = ad; B = \lambda E = (2a + d)E/d = (2a + d)d.$$

В итоге возникает тождество:

$$\begin{aligned} & [(ad + d^2)t - (2ad + d^2)u + (a + d)]^2 + [(ad)t + d^2u + a]^2 = \\ & = [(ad + d^2)t - d^2u + (a + d)]^2 + [(ad)t - (2ad + d^2)u + a]^2, \end{aligned}$$

которое и доказывает следствие.

Возвращаясь к предложению 2, зафиксируем  $a = d = 1$ :

$$(2t - 3u + 2)^2 + (t + u + 1)^2 = (2t - u + 2)^2 + (t - 3u + 1)^2.$$

Полагая последовательно  $t = 4u, 4u + 1, \dots, 4u + 4$ , получим следующие тождества с одной переменной  $u$ :

$$(5u + 2)^2 + (5u + 1)^2 = (7u + 2)^2 + (u + 1)^2, \quad (I)$$

$$(5u + 4)^2 + (5u + 2)^2 = (7u + 4)^2 + (u + 2)^2, \quad (II)$$

$$(5u + 6)^2 + (5u + 3)^2 = (7u + 6)^2 + (u + 3)^2, \quad (III)$$

$$(5u + 8)^2 + (5u + 4)^2 = (7u + 8)^2 + (u + 4)^2, \quad (IV)$$

$$(5u + 10)^2 + (5u + 5)^2 = (7u + 10)^2 + (u + 5)^2. \quad (V)$$

Очевидно, что последовательность, содержащая невырожденную подпоследовательность, сама невырождена.

(I). Если последовательность  $\{a_n\}$  вырождена, она может содержать не более конечного числа четверок вида  $(5u + 2, 5u + 1, 7u + 2, u + 1)$ . Поэтому, же-

лая обеспечить вырожденность  $\{a_n\}$ , почти все такие четверки необходимо “разрушить”.

Наиболее экономно это можно сделать, убирая координату  $7u+2$ , так как последовательность  $\{7u+2\}$  обладает наименьшей плотностью, равной  $1/7$  (уже отсюда следует, что вырожденная последовательность не может иметь плотность больше  $6/7$ ).

(II). На этом шаге следует выбросить последовательность  $\{7u+4\}$ .

Поскольку  $\{7u+2\} \cap \{7u+4\} = \emptyset$ , то за два шага нужно удалить последовательность плотности  $1/7 + 1/7$ .

(III). Для наиболее экономного разрушения всех четверок из (I), (II), (III) нужно пересмотреть стратегию: из (I) и (II) удаляем  $\{5u+2\}$  и  $\{7u+6\}$  – из (III). Суммарная удаляемая плотность составит  $1/5 + 1/7 - 1/35 = 11/35$  (здесь  $1/35$  – плотность последовательности  $\{5u+2\} \cap \{7u+6\}$ ).

(IV). Из (I) и (II) удаляем  $\{5u+2\}$ , а из (III) и (IV) –  $\{7u+3\} = \{5u+8\}$ .

В итоге удаляется последовательность плотности  $2/5$ .

(V). Из (V) удаляем  $\{7u+10\}$ . Плотность удаляемой последовательности составит  $1/5 + 1/5 + 1/7 - 2/35 = 17/35$ .

Для доказательства нашего неравенства остается сделать последний шаг,  $t=5u$ :

$$(7u+2)^2 + (6u+1)^2 = (9u+2)^2 + (2u+1)^2. \quad (VI)$$

(VI). Удаляем  $\{9u+2\}$ . Плотность последовательности, выбрасываемой за 6 шагов, не меньше чем  $17/35 + 1/9 - 2/45 - 1/63 > 1/2$ .

Очевидно, что такие рассуждения можно продолжить, постепенно усиливая неравенство для плотности. Вполне естественной представляется гипотеза о том, что последовательность положительной плотности всегда невырождена.

В заключение приведем пример вырожденной последовательности, всюду плотной на  $\mathbf{R}$ . Начнем с последовательности  $\{\sin n\}$ . Хорошо известно (теорема Якоби), что она всюду плотна на  $[-1, 1]$ . Воспользуемся теоремой Линдемана (если число  $a$  алгебраично, то  $e^a$  трансцендентно) и из трансцендентности  $e'$  сразу получим, что  $\sin 1$  трансцендентно. Из равенства

$$\sin n = (\cos 1)^{n-1} \sin 1 - (\cos 1)^{n-3} (\sin 1)^3 + (\cos 1)^{n-5} (\sin 1)^5 - \dots$$

легко заключить, что  $\sin^2 n$  – целочисленный многочлен от  $\sin 1$ .

$$\{\sin n\} \text{ – вырожденная последовательность, ибо равенство } \sin^2 n + \sin^2 m = \sin^2 p + \sin^2 g \text{ (где } (n, m) \neq (p, g), (g, p))$$

означало бы алгебраичность числа  $\sin 1$ .

Теперь вырожденную всюду плотную на  $\mathbf{R}$  последовательность можно построить так: первые  $10^k$  членов последовательности  $\{\sin n\}$  записываем со сдвигами  $-2^k, -2^{k-1}, \dots, 0, 2, 4, \dots, 2^k$  и заставляем  $k$  пробегать значения  $1, 2, \dots$ .

1. Дэвенпорт. Высшая арифметика. М., 1965.

2. Lander L. A survey of equal sums of like powers // Math. Comp. 21(1967). P. 446.

Поступила в редакцию 29.12.2001.

*Сергей Львович Штин* – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры функционального анализа.

## РЕФЕРАТЫ

*УДК 535.373:546.791.6*

Зажогин А.А., Зажогин А.П., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Низкотемпературные спектры люминесценции смешанных твердых растворов тринитратов уранила // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Спектрально-люминесцентным методом изучена природа центров свечения, образующихся в смешанных твердых растворах тринитратных соединений уранила. Показано, что положение трех первых возбужденных электронных переходов хорошо коррелирует с концентрацией изоморфной примеси.

Библиогр. 2 назв., табл. 2, ил. 4.

*УДК 535.37:537.86*

Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Радько А.Е., Шевченко К.А. Импульсный спектрофлуориметр наносекундного диапазона // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Разработан и изготовлен комплекс аппаратуры для спектрально-кинетических измерений в наносекундном временном диапазоне. Комплекс построен по модульному принципу, в основу его функционирования положен статистический одноквантовый метод временного анализа нестационарных потоков люминесценции, образующихся в результате импульсного возбуждения исследуемых объектов. Основные параметры комплекса: спектральный диапазон возбуждения – 220–800 нм, регистрации 270–800 нм, временной диапазон – 0,5–120 нс, минимальное разрешающее время –  $2 \times 10^{-10}$  с.

Библиогр. 7 назв., ил. 3.

*УДК 543.422*

Болотько Л.М., Покаташкин В.И., Денисенко В.Н., Красовский А.Н., Тавгин В.Л., Турышев Л.Н. Спектрофотометрическая установка для создания и анализа озоносодержащих газовых смесей // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Предложена универсальная лабораторная установка на основе спектрофотометра, позволяющая создавать и дозировать озono-кислородные и озono-воздушные смеси с контролем содержания в них озона. Определяется кинетика разрушения озона в оптической кювете с газовой смесью. Рассматриваются возможности исследования взаимодействия озона с различными молекулярными системами с помощью созданной установки.

Библиогр. 8 назв., ил. 3.

*УДК 535.37*

Бабичев С.Г., Буров Л.И., Клищенко А.П. Проявление природы формирования виртуального состояния в спектрально-поляризационных зависимостях сечения двухфотонного поглощения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Теоретически исследован вклад колебательных подуровней конечного состояния в формирование виртуального промежуточного состояния при двухфотонном поглощении в сложных органических молекулах. Показано, что величина этого вклада существенным образом влияет на поляризационные зависимости сечения двухфотонного поглощения.

Библиогр. 19 назв.

*УДК 538.95-405:539.12.04; 548:539.12.04*

Власукова Л.А., Комаров Ф.Ф., Дидык А.Ю. Радиационные повреждения в кристаллах InP, облученных ионами ксенона с энергией 595 МэВ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Методом селективного травления исследованы радиационные повреждения в кристаллах InP, облученных быстрыми ионами ксенона. Показано, что пороговые по отношению к возможности формирования треков в монокристаллическом InP удельные неупругие потери энергии для непрерывных треков составляют 19 кэВ/нм, а для прерывистых – 16 кэВ/нм. Оценена термостабильность треков, выявленных в данном материале селективным травлением.

Библиогр. 21 назв., ил. 2.

*УДК 541.423*

Булойчик Ж.И., Червяковский К.И., Юдина Н.А. Анализ зубных паст методом атомно-эмиссионной спектроскопии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Разработаны методики пробоподготовки зубных паст. Количественное определение содержания в них ряда тяжелых металлов проведено методом атомно-эмиссионной спектроскопии.

Библиогр. 7 назв., табл. 2.

*УДК 535.37*

Попечиц В.И. Спектрально-люминесцентные характеристики гамма-облученных растворов трикарбонициновых красителей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Спектральными методами определены характерные времена радиационного обесцвечивания растворов ряда трикарбонициновых красителей. Сделан вывод, что необратимая радиационная деструкция трикарбонициновых красителей в растворах происходит в результате взаимодействия красителей с обладающими окислительными свойствами кислородсодержащими радикалами и ион-радикалами, образующимися при радиоллизе растворителей. Даны практические рекомендации по повышению радиационной устойчивости растворов трикарбонициновых красителей.

Библиогр. 24 назв., табл. 1, ил. 3.

*УДК 537.534.539.12.04*

Углов В.В., Злоцкий С.В., Воропай Е.К. Структура многослойных покрытий TiN/ZrN на стали, полученных методом вакуумно-дугового осаждения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Методом вакуумно-дугового осаждения получены многослойные системы TiN/ZrN на стальной подложке при различных толщинах одного слоя, представляющих собой чередующиеся системы стехиометрических слоев TiN и ZrN с преимущественной ориентацией (111). Рассмотрено влияние толщины слоя на структурные свойства многослойных покрытий при фиксированной их толщине. С уменьшением толщины слоя происходит дробление блоков мозаики (до 8 нм) и увеличение внутренних сжимающих напряжений (до 15 ГПа). При уменьшении толщины слоя до 10 нм в многослойной системе TiN/ZrN формируется сверхрешетка. Эта система обладает повышенной твердостью (29 ГПа).

Библиогр. 14 назв., ил. 4.

*УДК 621.378:621.382*

Поздняков Д.В. Когерентность электронных волн в квантовой яме двухбарьерной резонансно-туннельной структуры // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Предложен подход, позволяющий провести расчет длины когерентности электронных волн при рассеянии электронов на полярных оптических фонах, ионизированной примеси и шероховатостях поверхностей в квантовой яме двухбарьерной резонансно-туннельной структуры на основе GaAs.

Библиогр. 15 назв., ил. 1.

*УДК 532.783 + 547.786*

Минько А.А., Безбородов В.С., Ковганко Н.Н., Лапаник В.И. Получение, спектральные и жидкокристаллические свойства новых 3-амил-5-арил-2-изоксазолинов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Осуществлен синтез новых производных 3-амил-5-арил-2-изоксазолинов. Изучены спектральные и жидкокристаллические свойства данных соединений.

Библиогр. 5 назв., табл. 2.

*УДК 539.3; 622.83*

Журавков М.А., Павлов С.В. К моделированию состояния породных массивов с произвольными системами трещин // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

С использованием метода секций решается задача оценки коэффициента интенсивности напряжений для произвольной системы трещин в случае обобщенного одноосного нагружения. На основе решения этой задачи построена модель поведения системы трещин в массиве горных пород.

Библиогр. 2 назв., ил. 6.

УДК 517.925.51

Булгаков Н.Г. О критериях устойчивости автономных систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Освещается проблема установления предельно общих критериев устойчивости автономных дифференциальных систем.

Библиогр. 18 назв.

УДК 538

Калитин Б.С. Равномерная интегральная непрерывность неавтономных дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Приведены достаточные условия равномерной интегральной непрерывности решений систем обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений. На примерах отмечена взаимосвязь этого свойства со свойствами ограниченности и устойчивости решений.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.62

Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В. Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Для численного решения начальной задачи в случае системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида предлагаются вычислительные алгоритмы, позволяющие повышать уровень точности локального приближения не столько ценой уменьшения величины шага дискретизации, сколько путем организации специального вида последовательных приближений типа Пикара.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.63

Кужельная А.И., Монастырный П.И. О выборе управляющих параметров и оптимизации методов редукции и марш-алгоритма // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Изучается проблема выбора управляющих параметров и оптимизации методов редукции и марш-алгоритма по свойствам маршевых траекторий и матрицы замыкающей системы уравнений. Предложены вычислительные алгоритмы решения сеточных уравнений, основанные на разбиении области определения дискретных индексов на подинтервалы, где вычисления жестко адаптируются к свойствам уравнений, меняющимся условиям и входным данным исходной задачи. Исследована возможность оптимизации вычислений посредством изменения числа обусловленности и структуры матрицы замыкающей системы уравнений.

Библиогр. 5 назв., табл. 2.

УДК 517.925.41

Ле Ван Линь, Садовский А.П. Проблема центра и фокуса для одной кубической системы в случае нулевых собственных значений линейной части // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Для систем  $\dot{x} = y + P_2(x, y) + P_3(x, y)$ ,  $\dot{y} = -x^3$ , где  $P_i$ ,  $i=2, 3$ , – однородные полиномы  $i$ -й степени, разрешена проблема различения центра и фокуса. Доказано существование таких систем с шестью предельными циклами в окрестности точки  $O(0, 0)$ .

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.925.42

Корсантия О.Б. Сильная изохронность центра системы Лъенара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Рассматривается вещественная система дифференциальных уравнений Лъенара  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = q_0(x) + q_1(x)y$ , где  $q_0(x)$  и  $q_1(x)$  – аналитические нечетные функции. В случае если

выполняется условие  $q_0(x) = x + \frac{I^2(x)}{x^3}$ , где  $I(x) = \int_0^x sq_1(s)ds$ , показано, что для системы

Лъенара в начале координат  $O(0, 0)$  фазовой плоскости имеет место сильная изохронность

центра второго порядка с  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Библиогр. 3 назв.

*УДК 519.10*

Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. Мера устойчивости векторной линейной траекторной задачи с совокупно-экстремальным принципом оптимальности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Исследуется устойчивость множества совокупно-экстремальных решений многокритериальной задачи на системе подмножеств конечного множества с линейными частными критериями.

Библиогр. 10 назв.

*УДК 519.10*

Кравцов В.М. Оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Для любого числа  $r \in \{13, 14, \dots, 3n-5\}$  получены достаточно точные оценки снизу числа  $r$ -нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях порядка  $n > 5$ , т. е. вершин, количество дробных компонент у которых равно  $r$ .

Библиогр. 7 назв.

*УДК 514.765*

Романовский Ю.Я. Пространства, порожденные собственной группой Пуанкаре // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Дается геометрическая интерпретация однородных пространств, порожденных собственной группой Пуанкаре.

Библиогр. 5 назв.

*УДК 517.5*

Ляликов А.С. Приближение гильбертовских функций рациональными операторами типа Валле Пуссена // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Для функций, имеющих ограниченную вариацию и удовлетворяющих условию Липшица, строится рациональный оператор типа Валле Пуссена и дается оценка его уклонения от исходной функции.

Библиогр. 5 назв.

*УДК 517.977*

Лавринович Л.И. Коррекция приближенных решений задачи гарантированной оптимизации систем управления // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Показан метод построения оптимальных замыкаемых программных управлений при большом числе векторов аппроксимации. Описан алгоритм синтеза оптимальных замыкаемых обратных связей в условиях неопределенности.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

*УДК 511.5*

Штин С.Л. Об одной классификации вещественных последовательностей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3.

Рассматривается возможность классификации последовательностей в зависимости от свойств функции расстояния от нуля точек соответствующей псевдорешетки. Изучается взаимосвязь такой классификации и асимптотической плотности последовательностей.

Библиогр. 2 назв.

## УКАЗАТЕЛЬ статей, опубликованных в 2002 г.

### НАШИ ЛАУРЕАТЫ

<i>Ходасевич В.В., Углов В.В., Понарядов В.В., Жукова С.И.</i> Ионно-лучевая модификация свойств металлов и сплавов .....	1 3
---	-----

### ФИЗИКА

<i>Бабичев С.Г., Буров Л.И., Клищенко А.П.</i> Проявление природы формирования виртуального состояния в спектрально-поляризационных зависимостях сечения двухфотонного поглощения .....	3 18
<i>Баимаков И.А., Доросинец В.А., Лукашевич М.Г., Мазаник А.А., Тихонова Т.Ф., Скрипка Д.А.</i> Электрические и магнитные характеристики кобальтосодержащих углеродных волокон .....	1 48
<i>Бельский А.М., Литвин И.А., Степанов М.А.</i> Формулы Френеля для дифракции плоской волны на поверхности гиротропной изотропной среды общего вида .....	1 16
<i>Болотко Л.М., Покаташкин В.И., Денисенко В.Н., Красовский А.Н., Тавгин В.Л., Турдыев Л.Н.</i> Спектрофотометрическая установка для создания и анализа озоносодержащих газовых смесей .....	3 13
<i>Борздов В.М., Поздняков Д.В.</i> Интенсивность рассеяния электронов на полярных оптических фононах в квантовой яме двухбарьерной резонансно-туннельной структуры на основе арсенида галлия .....	1 26
<i>Бринкевич Д.И., Вабищевич С.А., Вабищевич Н.В., Просолович В.С., Янковский Ю.Н., Явид В.Ю.</i> Микротвердость ковалентных полупроводников, легированных редкоземельными примесями .....	1 53
<i>Бринкевич Д.И., Просолович В.С., Янковский Ю.Н.</i> Эпитаксиальные слои кремния, легированные германием и лютетием .....	2 53
<i>Булойчик Ж.И., Червяковский К.И., Юдина Н.А.</i> Анализ зубных паст методом атомно-эмиссионной спектроскопии .....	3 29
<i>Василевич Е.Ю., Гутько Е.С., Шепелевич В.Г.</i> Рекристаллизация быстрозатвердевшей фольги алюминия .....	1 38
<i>Власукова Л.А., Комаров Ф.Ф., Дидык А.Ю.</i> Радиационные повреждения в кристаллах InP, облученных ионами ксенона с энергией 595 МэВ .....	3 24
<i>Воропай Е.С., Самцов М.П., Каплевский К.Н., Радько А.Е., Шевченко К.А.</i> Импульсный спектрофлуориметр наносекундного диапазона .....	3 7
<i>Вырко С.А.</i> Экранирование электростатического поля в кристаллах с прыжковой миграцией электронов по примесям .....	2 55
<i>Герман А.Е.</i> Резонансное отражение и поглощение света гранулярными серебряными пленками .....	2 32
<i>Горбачевич С.К., Михневич С.Ю.</i> Характеристики флуоресценции твердых растворов флуоресцеина при безызлучательном переносе энергии электронного возбуждения на насыщающийся акцептор .....	1 34
<i>Гринчук А.В., Ушаков Е.А.</i> Приближенное вычисление интеграла по путям для частицы со спином .....	2 22
<i>Гулис И. М., Саечников К.А.</i> ВКР-преобразователь на LiIO <sub>3</sub> с синхронной накачкой .....	5 2
<i>Ермолаев О.П., Микутьчик Т.Ю.</i> Изотермический отжиг радиационных дефектов в германии, облученном большими флюенсами надкадмиевых нейтронов .....	2 43
<i>Зажогин А.А., Зажогин А.П., Комяк А.И., Умрейко Д.С.</i> Низкотемпературные спектры люминесценции смешанных твердых растворов тринитратов уранила .....	3 3
<i>Карих Е.Д.</i> Обобщенная модель полупроводникового лазера с оптической обратной связью от рассеивающей среды .....	1 20
<i>Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А.</i> Минимизация искажений голографического изображения томографической системы с оптическим восстановлением .....	2 3
<i>Леонтьев А.В.</i> Модернизация TRIM-алгоритма метода Монте-Карло .....	2 27
<i>Минько А.А., Безбородов В.С., Ковганко Н.Н., Лапаник В.И.</i> Получение, спектральные и жидкокристаллические свойства новых 3-амил-5-арил-2-изоксазолинов.....	3 44
<i>Новикова Т.М., Лапчук Н.М., Хмельницкий А.И., Черенкевич С.Н.</i> Исследование синтетических препаратов меланина методом ЭПР .....	1 30

<i>Новицкий А.В., Барковский Л.М., Фурс А.Н.</i> Особенности тензорных геометрооптических рядов в стратифицированных средах .....	2	9
<i>Поздняков Д.В.</i> Когерентность электронных волн в квантовой яме двухбарьерной резонансно-туннельной структуры .....	3	41
<i>Попечиц В.И.</i> Спектрально-люминесцентные характеристики гамма-облученных растворов трикарбоцианиновых красителей .....	3	33
<i>Скрипка Д.А., Лукашевич М.Г.</i> Электрический эффект в магнитосопротивлении арсенида галлия .....	2	46
<i>Стражев В.И., Ционенко Д.А.</i> О калибровочной теории поля Дирака – Кэлера в искривленном пространстве-времени .....	2	15
<i>Тихомиров В.В., Юралевиц С.Э.</i> О поглощении нейтронной звезды мини черной дырой .....	1	10
<i>Углов В.В., Злоцкий С.В., Воропай Е.К.</i> Структура многослойных покрытий TiN/Zn на стали, полученных методом вакуумно-дугового осаждения .....	3	37
<i>Цвирко В.И., Кононенко В.К.</i> Нелинейная рефракция в квантоворазмерных гетероструктурах .....	1	40
<i>Червяковский К.И.</i> Изучение механизма поступления примесей в плазму дуги переменного тока из корольков серебра малой массы .....	2	37

### МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Акинфин А.В., Кирлица В.П., Черкас Е.А.</i> Непрерывные $D$ -оптимальные планы экспериментов для квадратичной регрессии с линейным изменением дисперсии наблюдений .....	2	91
<i>Альсевич Л.А.</i> Устойчивость решений линейных систем с блочно-диагональными отражающими матрицами .....	2	83
<i>Ахраменка В.К.</i> Необходимы умовы центра для адной диферэнцияльнай сістэмы у асобным выпадку складанага асаблівага пункта .....	1	85
<i>Базылев Д.Ф., Янчевский В.И.</i> Целочисленные точки специальных алгебраических кривых .....	1	71
<i>Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В.</i> Дискретный аналог метода Пикара .....	3	68
<i>Буза М.К., Ливак Е.Н.</i> Идентификация компьютерных программ .....	2	61
<i>Булгаков Н.Г.</i> О критериях устойчивости автономных систем .....	3	58
<i>Бухтояров С.Е., Емеличев В.А.</i> Мера устойчивости векторной линейной траекторной задачи с совокупно-экстремальным принципом оптимальности .....	3	84
<i>Гатальская Т.И., Зверович Э.И.</i> Задача линейного сопряжения для двоякопериодических функций .....	2	71
<i>Демиденко О.М.</i> Методика исследования параметров вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть .....	1	96
<i>Журавков М.А., Павлов С.В.</i> К моделированию состояния породных массивов с произвольными системами трещин .....	3	51
<i>Калитин Б.С.</i> Равномерная интегральная непрерывность неавтономных дифференциальных уравнений .....	3	64
<i>Килбас А.А., Демьянко С.В.</i> Достаточные условия разрешимости интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространстве интегрируемых функций .....	1	64
<i>Корзюк В.И., Борухов В.Т.</i> Смешанные задачи для параболического уравнения с интегро-дифференциальными условиями на границе .....	1	57
<i>Корсантия О.Б.</i> Сильная изохронность центра системы Лъенара .....	3	80
<i>Кравченко Ж.М.</i> Гарантированная оптимизация систем управления с использованием краткосрочных прогнозов возмущений .....	2	86
<i>Кравцов В.М.</i> Оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях .....	3	87
<i>Кужельная А.И., Монастырный П.И.</i> О выборе управляющих параметров и оптимизации методов редукции и марш-алгоритма .....	3	72
<i>Лавринович Л.И.</i> Коррекция приближенных решений задачи гарантированной оптимизации систем управления .....	3	101
<i>Ле Ван Линь, Садовский А.П.</i> Проблема центра и фокуса для одной кубической системы в случае нулевых собственных значений линейной части .....	3	75
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Задачи Коши для гиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения .....	2	78

<i>Лукашевич Н.А., Орлов В.Н., Самодуров А.А.</i> Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве .....	1	79
<i>Ляликов А.С.</i> Приближение гельдеровских функций рациональными операторами типа Валле Пуссена .....	3	95
<i>Мандрик П.А.</i> Решение задачи нестационарной теплопроводности со смешанными граничными условиями при локальном нагреве ортотропного полуограниченного тела круговым источником тепла .....	1	75
<i>Матвеев Г.В., Ширяев В.М.</i> Оценки для числа неравенств .....	2	67
<i>Мельников О.И., Косолапов В.Н.</i> Распознавание $P_4$ -структуры гусеницы .....	2	94
<i>Романовский Ю.Я.</i> Пространства, порожденные собственной группой Пуанкаре ....	3	90
<i>Старовойтов А.П.</i> Существование абсолютно непрерывных функций с заданной последовательностью наилучших рациональных приближений .....	2	75
<i>Харин А.Ю.</i> Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез .....	1	92
<i>Штин С.Л.</i> Об одной классификации вещественных последовательностей .....	3	103

#### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Агафонова Н.К.</i> О скорости приближения дифференцируемых функций операторами типа Фурье с подходяще выбранными полюсами .....	1	108
<i>Базьлев Д. Ф.</i> Рациональные точки эллиптических кривых нулевого ранга .....	2	99
<i>Булатов В.И.</i> О разрешимости линейных регулярных неоднородных систем .....	1	106
<i>Кашиевский В.В.</i> Обобщенное преобразование типа Гильберта с логарифмом в ядре .....	2	106
<i>Лавринович Л.И.</i> К методам гарантированной оптимизации систем управления .....	2	101
<i>Меленец Ю.В., Орлова Е.Н.</i> Об одной задаче статистического анализа бинарных случайных последовательностей .....	2	109
<i>Степанишина Ю.В.</i> Радиус устойчивости мажоритарно эффективного решения многокритериальной линейной траекторной задачи .....	2	104
<i>Цеховая Т.В.</i> Предельное распределение оценки вариограммы стационарного случайного процесса .....	1	104
<i>Шишкевич А.А.</i> Конечно представимые почти свободные асферические про- $p$ -группы .....	2	108

#### НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Анатолий Борисович Антоневиц .....	1	112
Сергей Николаевич Черенкевич .....	2	113
Николай Иосифович Юрчук .....	2	114
Рефераты .....	1	114
Рефераты .....	2	116
Рефераты .....	3	107

## CONTENTS

## PHYSICS

Zazhigin A.A., Zazhigin A.P., Komyak A.I., Umreiko D.S. Low-temperature luminescence spectra of mixed solid solutions of uranyl trinitrates .....	3
Voropay E. S., Samtsov M.P., Kaplewsky K.N., Rad'ko A.E., Shevchenko K.A. Nanosecond pulse spectrofluorimeter .....	7
Bolot'ko L.M., Pokatashkin V.I., Denisenko V.N., Krasovski A.N., Tavgin V.L., Turishev L.N. Spectrophotometric setup for producing and analysis of ozone containing gas mixtures .....	13
Babichev S.G., Burov L.I., Klistchenko A.P. Nature manifestation of the virtual intermediate state formation in spectral-polarization dependences of the two-photon absorption cross-section .....	18
Vlasukova L.A., Komarov F.F., Didyk A.Yu. Damage in InP crystals irradiated with 595 MeV-xenone ions .....	24
Buloichik Zh. I., Chervyakowsky K.I., Yudina N.A. Analysis of tooth pastes by the atomic-emission spectroscopy method .....	29
Popechits V.I. Spectral-luminescent characteristics of gamma-ray threecarbocyanine dyes solutions .....	33
Uglov V.V., Zlotski S.V., Voropay E.K. Structure of TiN/ZrN multiyear films on steel prepared by cathodic arc vapour deposition .....	37
Pozdnyakov D.V. Coherence of electron waves in quantum well of the double barrier resonant tunneling structure .....	41
Minko A. A., Bezborodov V. S., Kauhanka N. N., Lapanik V. I. Synthesis, spectral and liquid crystalline properties of new 3-amyl-5-aryl-2-isoxazolines .....	44

## MATHEMATICS AND INFORMATICS

Zhuravkov M.A., Pavlov S.V. About modelling of rock's massifs condition with arbitrary systems of cracks .....	51
Bulgakov N.G. About criteria of the stability of the autonomous systems .....	58
Kalitin B.S. Uniformly integral continuity of solutions of non autonomous differential equations .....	64
Bobkov V.V., Kuchmienko I.A., Faleichik B.V. The discrete analog of Picard's method.....	68
Kuzhelnaya A.I., Monastyrnyi P.I. On the selection of the control parameters and the optimization of the reduction methods and the marching algorithm .....	72
Le Van Linh, Sadovski A.P. The center and focus problem for cubic system in the case of zero proper values of the linear part .....	75
Korsantia O.B. A strong isochronism of Lienard systems .....	80
Bukhtoyarov S.E., Emelichev V.A. Measure of stability of vector linear trajectorial problem with jointly-extreme principle of optimality .....	84
Kravtsov V.M. Lower bounds of the number of non-integer vertices of the tree-axial assignment problem .....	87
Romanovski Y.J. The spaces are generated by an own Poincaré group .....	90
Lyalikov A.S. Approximation of Holder's functions by rational operators of Vallee Pousin type .....	95
Lavrinoich L.I. Correction of the solution approximate of the problem of guaranteed optimization of control systems .....	101
Shtin S.L. On a classification of real sequences .....	103
Summary .....	107
Index of articles published in 2002 .....	111