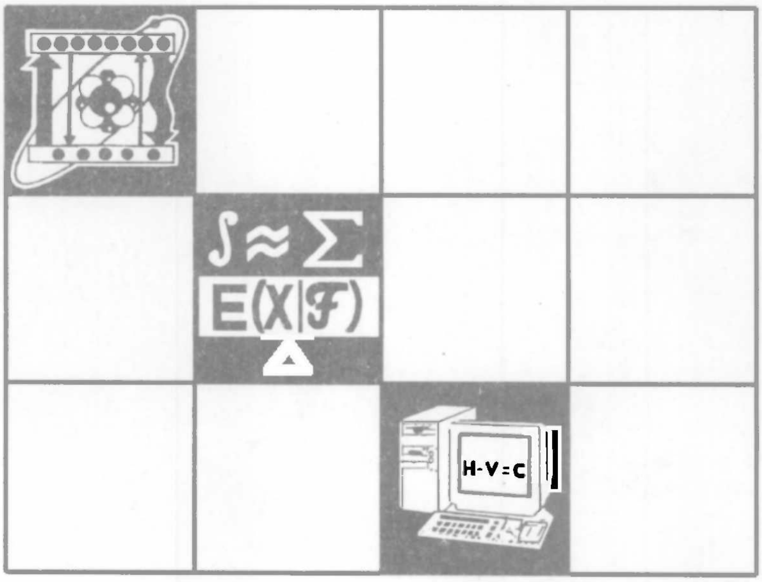
ISSN 0321-0367

ВЕСТНИК
Белорусского государственного университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

2/2002



1727 р. Индекс 74851

CONTENTS

PHYSICS

Kuharchik P.D., Serdyuk V.M., Titovitsky I.A. Holographic image distortions minimization of optically reconstructing tomographic system 3

Gulis I.M., Saechnikov K.A. Synchronously pumped $LiIO_3$-based SRS-converter 5

Novitsky A.V., Barkovsky L.M., Furs A.N. Features of the geometrical optics tensor series in stratified media 9

Strazhew V.I., Tsionenko D.A. On a gauge theory of Dirac – Kaehler field in a curved space-time 15

Grinchuk A.V., Ushakov E.A. Approximate calculation of path integrals for a particle with spin 22

Leontyev A.V. Modernization of TRIM- algorithm of Monte-Carlo method 27

German A.E. Resonant reflection and absorption of light by granular silver films 32

Chervyakowsky K.I. A study into the mechanism of impurity introduction into the alternate current arc plasma of small-weight silver reguli 37

Ermolaev O.P., Mickulchik T.Y. The isothermal annealing of radiation defects in germanium irradiated with the large fluences of epicadmium neutrons 43

Skripka D.A., Lukashevich M.G. The electric field effect in magnetoresistance of gallium arsenide 46

Brinkevich D.I., Prosolovich V.S., Yankovski Yu.N. Silicon epitaxial layers doped by germanium and lutecium 53

Vyrko S.A. Electrostatic field screening in the crystals with hopping migration of electrons over impurities 55

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Bouza M., Livak Ye. The identification of computer programs 61

Matsveyev G.V., Shiriaev V.M. Bounds for number of unequalityes 67

Gatalskaja T.I., Zverovich E. I. Problem of the linear association for biperiodic functions 71

Starovoitov A.P. About existence of absolutely continuous functions with the given sequence of the best rational approximations 75

Lomovtsev F.E. Cauchy problems for hyperbolic factorized even-order differential-operator equations with variable domains 78

Alsevich L.A. The stability of solutions of linear systems block-diagonal reflecting matrices 83

Kravchenko J.M. Guaranteed optimization of control system with short-term forecast of perturbations 86

Akinfin A.V., Kirlitsa V.P., Cherkas Y.A. *D*-optimal continuous designs of experiments for quadratic regression under linear variation of dispersions of observations 91

Melnikov O.I., Kosolapov V.N. Linear-time recognition of the P_4-structure of caterpillar.... 94

BRIEF COMMUNICATIONS

Bazylev D.F. Rational points on the elliptic curves of zero rank 99

Lavrinovich L.I. About methods of guaranteed optimization of control systems 101

Stepanishyna Yu.V. Stability radius of a majority efficient solution of a multicriteria linear trajectorial problem 104

Kashevskii V.V. Generalized Hilbert's transform with a log in a kernel 106

Shishkevich A.A. Finitely presented virtually freely aspherical pro-*p*-groups 108

Melenetc Yu.V., Orlova E.N. One problem of statistic analysis of binary random sequences 109

OUR JUBILEE

Sergeiy Nikolaevich Cherenkevich 113

Nikolay Iosifovich Yurchuk 114

Summary 116

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

2/2002

Май

МИНСК
БГУ

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Регистрационный № 805

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2002. № 2

На русском и белорусском языках

Адрес редакции: 220050, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 209-54-00.
E-mail vestnikbsu@bsu.by

Редактор *И.А. Лешкевич*
Корректор *Л.А. Меркуль*
Технический редактор *Ю.И. Денисов*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Р.Е. Овсянниковым и Ю.И. Денисовым*

Подписано в печать 27.05.02. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.
Гарнитура Times New Roman. Усл.печ. л. 10,85. Усл. кр.-отт. 11,05. Уч.-изд. л. 10,65.
Тираж 470 экз. Заказ 705. Цена 1727 р.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в РУП «Издательский центр БГУ».
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.
ЛП № 461 от 14.04.01.

УДК 535.317.1:778.38

П.Д. КУХАРЧИК, В.М. СЕРДЮК, И.А. ТИТОВИЦКИЙ

МИНИМИЗАЦИЯ ИСКАЖЕНИЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОПТИЧЕСКИМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

The optimal conditions of composite objects holographing applied to the holographic tomographic systems with reconstruction in the optical range are determined on the basis of the approximate holographic-image diffraction aberration theory, established by the authors earlier.

В методах рентгеновской, ультразвуковой и СВЧ-томографии непосредственная визуализация внутренней структуры исследуемого объекта осуществляется посредством анализа множества различных его плоских сечений [1]. Более перспективным представляется анализ объемного изображения сразу всего объекта, т. е. использование голографического метода представления томографической информации. Однако исследуемые объекты обычно непрозрачны, и их приходится просвечивать с помощью рентгеновского, СВЧ-излучения или ультразвука, длина волны которого во много раз отличается от длины световых волн, используемых затем для визуализации полученной информации. Основной проблемой здесь является уменьшение сильных искажений, или аберраций изображения объекта, которые неизбежно возникают, если длины волн записывающего λ_0 и восстанавливающего λ излучений значительно различаются между собой [2]. Общая теория таких аберраций построена в работе [3] для стандартной модели записи и считывания плоской амплитудной голограммы точечного источника. В данной работе на основе результатов [3] рассматривается возможность уменьшения аберраций за счет выбора конкретной схемы голографического эксперимента.

Применительно к голограмме сложного объекта, состоящего из множества точек-источников, необходимо исключить такие аберрации, которые проявляются как неоднородное изменение масштабов изображения. Рассмотрим функциональные зависимости координат точек изображения (индекс i) от координат точек объекта (индекс S) [2, 3] и потребуем их пропорциональности:

$$(\partial / \partial x_S)(x_i / x_S) = (\partial / \partial y_S)(y_i / y_S) = (\partial / \partial z_S)(z_i / z_S) = 0.$$

Эти условия выполняются, если координаты опорного восстанавливающего источника (индекс C) связаны с координатами опорного записывающего источника (индекс R) следующим образом:

$$x_C = x_R; \quad y_C = y_R; \quad z_C = \pm m z_R, \tag{1}$$

где плоскость xOy совпадает с плоскостью голограммы, $m=\lambda_0/\lambda$. Если аберрациями третьего порядка пренебречь, то координаты точек-изображений будут связаны с координатами объектных точек соотношениями [2, 3]:

$$x_i = x_S; \quad y_i = y_S; \quad z_i = \pm m z_S. \tag{2}$$

Аберрационные поправки к координатам точек-изображений (2) обычно вычисляются при рассмотрении поля не в самой точке наблюдения, а в области изображения [4]. При этом качество воспроизведения изображения точечного объекта может быть охарактеризовано одним скалярным параметром [3], так называемым параметром аберраций ν_a, который при условиях (1), (2) будет равен:

$$\nu_a = \pm\pi H_x^2[(y_S^2 - x_S^2 + q)z_S^{-3} - (y_R^2 - x_R^2 + a)z_R^{-3}](1 - m^{-2})/\lambda_0. \tag{3}$$

Здесь $a=(H_y^2-H_x^2)/6$: $2H_x$ и $2H_y$ – линейные размеры голограммы по осям x и y (предполагается, что $H_y>H_x$).

Имеет место следующая закономерность [3]: пока параметр ν_a невелик ($|\nu_a|<3$), профиль интенсивности поля изображения точки имеет явно выраженный центральный максимум и мало отличается от его профиля в отсутствие аберраций ($\nu_a=0$), однако при $|\nu_a|>3{,}5$ резко возрастают боковые максимумы и вид кривой профиля интенсивности будет соответствовать визуальному наблюдению уже не одной, а нескольких точек.

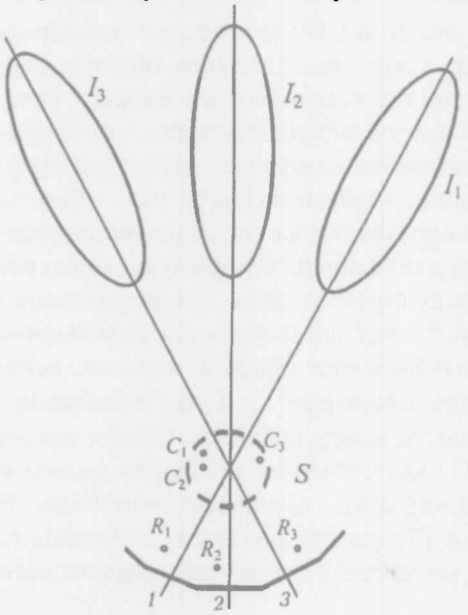


Схема голографирования протяженного объекта составной голограммой с синтезированной апертурой:

1, 2, 3 – отдельные плоские голограммы, $R_{1,2,3}$ и $C_{1,2,3}$ – опорные записывающие и восстанавливающие точечные источники, S – объект, $I_{1,2,3}$ – его изображения

Для схемы, определяемой соотношениями (1), поперечные координаты изображения без учета малых аберрационных поправок совпадают с поперечными координатами исходного объекта независимо от длины волны λ восстанавливающего излучения, однако в продольном направлении изображение оказывается растянутым и удаленным от голограммы в m раз, что затруднит визуальное наблюдение боковых поверхностей объекта. Чтобы преодолеть этот недостаток, можно использовать голограммы, составленные из множества отдельных голограмм – плоских пластинок, центры которых размещаются на поверхности 2-го порядка, например сфере (рисунок). Каждая такая отдельная голограмма дает возможность визуально изучать лицевую относительно данной пластинки поверхность объекта, а применение составной голограммы позволит наблюдать его поверхность с различных ракурсов. Однако при этом необходимо, чтобы каждый элемент составной голограммы имел свой отдельный опорный источник и его излучение не попадало на поверхность остальных голограмм. Можно рассчитать оптимальное положение этого источника с точки зрения минимизации аберраций пространственной структуры изображения. Пусть исходный объект выпуклый. Тогда удобно свести к минимуму искажения для точек изображения с поперечными координатами $x_S=0$, $y_S=0$ в координатной системе каждой отдельной голограммы. Это значит, что параметр аберраций (3) должен обращаться в нуль для $x_S=0$, $y_S=0$, т. е. поперечные координаты опорного источника должны удовлетворять условию:

$$y_R - x_R = (H_y^2 - H_x^2)(z_R^3/z_S^3 - 1)/6 \; .$$

Пусть, к примеру, $z_R=z_S/2$. Тогда последнему условию удовлетворяют такие поперечные координаты опорного источника: $y_R^2 = 7H_x^2/48$; $x_R^2 = 7H_y^2/48$, отсчитываемые от центра каждой прямоугольной голограммы.

Таким образом, один из оптимальных путей уменьшения аберраций голографотомографического изображения и повышения его качества – использование так называемой синтезированной приемной апертуры, когда регистрирующая среда в совокупности представляет собой множество элементарных плоских голограмм, составляющих сложную пространственную поверхность.

1. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. М., 1989.
2. Милер М. Голография. Л., 1979.
3. Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 82. № 2. С. 335.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.

Поступила в редакцию 24.11.2001.

Петр Дмитриевич Кухарчик – доктор технических наук, профессор, ректор Академии управления при Президенте Республики Беларусь.

Владимир Михайлович Сердюк – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ ПФП.

Иосиф Антонович Титовицкий – кандидат технических наук, заведующий лабораторией радиоголографии НИИ ПФП.

УДК 621.373

И.М. ГУЛИС, К.А. САЕЧНИКОВ

ВКР-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ НА $LiIO_3$ С СИНХРОННОЙ НАКАЧКОЙ

The generation schemes and parameters of Stockes SRS (stimulated Raman scattering) pulses in $LiIO_3$-based SRS-lasers synchronously pumped by picosecond pulses of a passively mode-locked AYG:Nd^{3+} laser in the intra- and extracavity pump mode have been compared. The profiles of pump and SRS-pulses have been analyzed depending on the mismatch of the cavity lengths. The possibility for a considerable reduction of SRS-pulse duration relative to that of the pump pulses has been demonstrated. A mechanism underlying the formation of SRS-pulse profile has been considered.

В работах [1] описан твердотельный лазер на АИГ:Nd^{3+} с непрерывной накачкой и пассивной синхронизацией мод, в котором кристалл $LiIO_3$ внутри резонатора выполняет одновременно две функции: комбинационно-активной среды и нелинейного преобразователя частоты (в нем происходит суммирование компонент вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) с излучением основной частоты), в результате чего на выходе при соответствующих ориентациях кристалла вырабатывается излучение видимого диапазона спектра. Исследования структуры цугов пикосекундных импульсов показали [2], что цуг ВКР резко укорочен по сравнению с цугом импульсов накачки. Причиной этого является не только истощение накачки за счет развития ВКР-преобразования, но и нарушение согласованности резонаторов для частот накачки и ВКР в случае несовпадения их оптических длин для данных частот вследствие дисперсии во внутрирезонаторных элементах. Оптимальной с точки зрения согласованности баз резонаторов явилась бы схема с независимыми резонаторами для накачивающего и ВКР-лазеров.

Настоящая работа посвящена исследованию и сопоставлению режимов и механизмов генерации стоксовых ВКР-импульсов в синхронно накачиваемых ВКР-лазерах на кристаллах $LiIO_3$ в двух вариантах: внутри- и внерезонаторной синхронной накачки (СН).

Схемы экспериментальных установок представлены на рис. 1. Разработанный вариант схемы внутрирезонаторной СН (рис. 1 *а*) обеспечивает возможность независимого изменения базы резонатора для ВКР-излучения при постоянной базе резонатора для излучения накачки (основная частота АИГ:Nd^{3+}) за счет пространственного разделения пучков при помощи дисперсионного элемента. Повышение эффективности преобразования достигается за счет использования высокой внутрирезонаторной мощности накачивающего лазера и коллинеарного совмещения пучков накачки и ВКР в кристалле $LiIO_3$. Было получено ВКР-рассеяние на фононной моде 820 см$^{-1}$. Эффективность преобразования основного излучения лазера накачки в ВКР-компоненту составила ~20 %. В данном варианте схемы часть энергии импульса накачки переходит в излучение ВКР-компоненты, что при последовательных обходах основного резонатора деформирует фронт возбуждающего импульса.

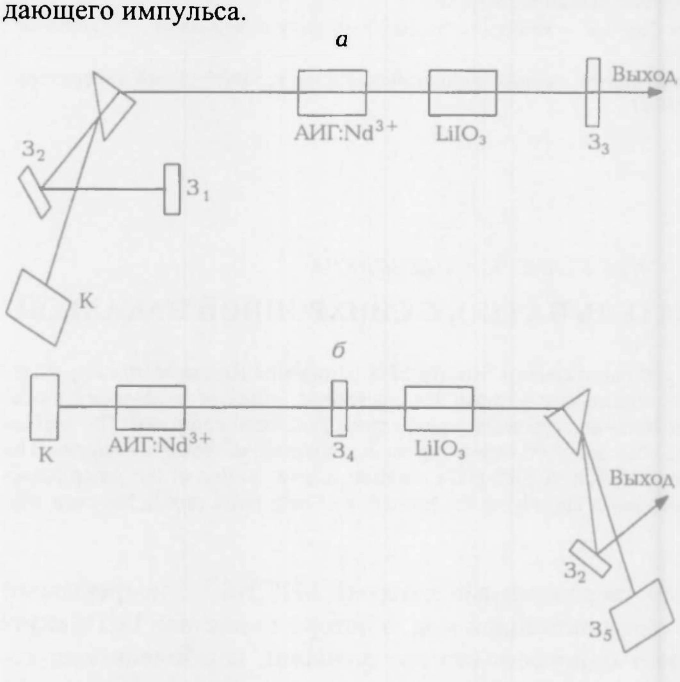


Рис. 1. Схемы экспериментальных установок для получения дискретно-перестраиваемого ВКР-излучения с *а* – внутри- и *б* – внерезонаторной СН.

К – кювета с насыщающимся поглотителем в контакте с глухим зеркалом; $З_1$, $З_2$, $З_5$ – глухие зеркала для ВКР-компонент; $З_3$ – R = 91 % для 1,06 мкм и 10 % для 1,16 мкм; $З_4$ – R = 50 % для 1,06 мкм и 90 % для ВКР-компоиент

На рис. 1 *б* показан оптимальный вариант схемы внерезонаторной СН. Для обеспечения устойчивой работы лазера в резонаторах использованы глухие зеркала с радиусом кривизны 1,5 м. Селективное зеркало $З_4$, связывающее резонаторы накачивающего и накачиваемого лазеров, пропускает 50 % излучения накачки (1,064 мкм) и отражает 90 % излучения ВКР в широкой спектральной области. Для снижения лучевой нагрузки на кристалл он устанавливается между зеркалом $З_4$ и призмой ВКР-резонатора вне области перетяжки пучка. Использование призмы позволяет развязать резонаторы накачивающего и ВКР-лазеров и производить настройку резонатора на отдельные ВКР-компоненты. Перестройка частоты излучения ВКР-преобразователя осуществляется поворотом зеркала $З_5$. Преобразованное ВКР-излучение выводится из резонатора призмой и зеркалом $З_2$. Такая схема (см. рис. 1 *б*) обеспечивает накачку ВКР-среды импульсами основной частоты лазера накачки с недеформированным профилем. Анализ частот полученного преобразованного ВКР-излучения с использованием результатов работ [3] показал, что ВКР-рассеяние осуществляется на фононных частотах 820, 171 и 87 см$^{-1}$ при соответствующей настройке дисперсионного резонатора. Отметим, что для схемы с внутрирезонаторным ВКР-преобразователем рассеяние на модах 171 и 87 см$^{-1}$ не наблюдалось вследствие экспериментальных трудностей, связанных с геометрической компоновкой схемы.

Для двух вариантов схем с использованием метода неколлинеарной генерации второй гармоники измерены кросс-корреляционные и автокорреляционные функции интенсивности (сложение импульсов второй гармоники излучения ВКР с основной частотой, сложение импульсов второй гармоники ВКР) и исследована зависимость длительности ВКР-импульсов от рассогласования баз резонаторов $\Delta l = l_{нак} - l_{ВКР}$ (рис. 2). Видно, что для схемы с внутрирезонаторным расположением кристалла минимальные длительности импульсов ~5 пс достигаются при $L_{ВКР} > L_{нак}$, при этом область устойчивости режима генерации ВКР составляет ~3 мм, а область минимальных значений длительностей импульсов – ~0,5 мм. При $L_{ВКР} < L_{нак}$ импульсы ВКР удлиняются, однако режим генерации остается устойчивым. При длительностях накачивающих импульсов ~40 нс минимальные длительности ВКР импульсов ~5 пс. При более высоких добротностях резонатора импульсы удлиняются до 15 пс, а импульсы накачки в этих режимах также увеличиваются до ~100 не, область устойчивости режима расширяется до 10 мм.

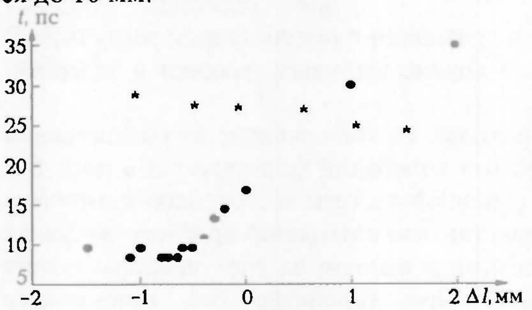


Рис. 2. Зависимость длительностей ВКР-импульсов, определяемых путем измерения полуширин автокорреляционных функций интенсивности, от величины рассогласования баз резонаторов. Δl для схем с внутрирезонаторным (•) и внерезонаторным (*) расположением кристалла $LiIO_3$

Для схемы с внерезонаторной СН (см. рис. 2) область устойчивости режима генерации составляет ~1 мм возле положения с $\Delta l = 0$ мм, принятого условно (максимальная мощность и стабильность ВКР-генерации). В данном случае длительности импульсов ВКР-излучения достигают ~25 пс и существенным образом не меняются в пределах устойчивой работы лазера.

На рис. 3 (кривые *1*) представлены результаты измерений кросс-корреляционных функций при сложении короткого импульса второй гармоники ВКР и импульса накачивающего лазера для схемы внутрирезонаторной СН. Обнаружено резкое изменение профиля импульса накачки в процессе развития ВКР (формирование провала и резкого фронта), определяемое степенью рассогласования баз резонаторов лазера накачки и ВКР. Аналогичные эффекты для газовой ВКР-среды рассматривались ранее в [4]. На этом же рисунке приведены формы кросс-корреляционных функций импульсов ВКР (кривые *2*). Рис. 3 *б* соответствует равенству баз резонаторов лазера накачки и ВКР.

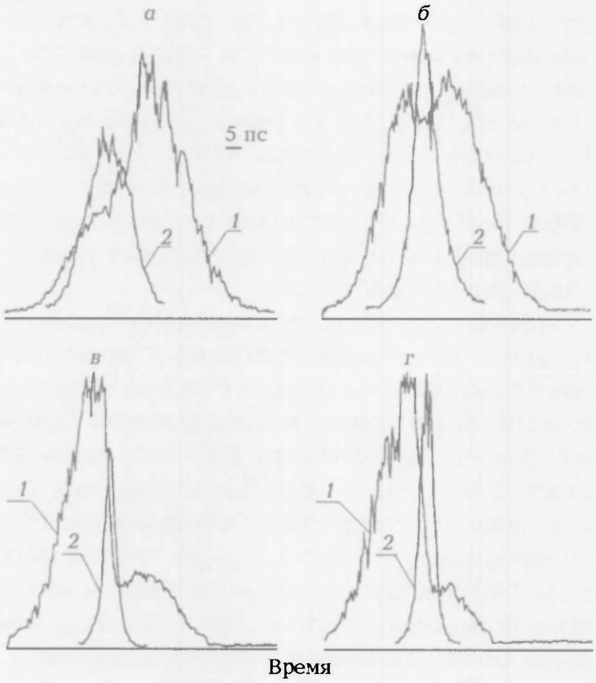


Рис. 3. Вид кросс-корреляционных функций импульсов излучения лазера накачки – *1* и ВКР-лазера – *2*, измеренных при разной длине базы Δl ВКР-резонатора: *а* – 2, *б* – 0, *в* – (–1), *г* – (–1,5) мм

На основе полученных экспериментальных результатов можно предложить динамику процесса формирования импульсов ВКР. На начальном этапе формирования пикосекундных импульсов в резонаторе мощность импульсов меньше пороговой для развития ВКР. Когда в нелинейный кристалл приходит импульс накачки с интенсивностью выше пороговой, в среде формируются когерентные колебания, развитие которых (нестационарный режим ВКР) несколько запаздывает относительно накачки. Так как длительность импульса накачки больше типичных значений времени фазовой релаксации среды (единицы пикосекунд), это запаздывание невелико в сравнении с полушириной импульса. В результате импульс ВКР несколько короче импульса накачки и задержан относительно накачки по времени.

При втором и последующих проходах картина зависит от соотношения баз резонаторов. Импульс когерентных колебаний формируется в поле бигармонической накачки (импульс основной частоты и стоксовой компоненты). Важным является то обстоятельство, что временной профиль импульса основной частоты оказывается деформированным за счет преобразования энергии в стоксову компоненту. При равенстве баз резонаторов (см. рис. 3 *б*) вследствие указанного искажения временной профиль амплитуды когерентных колебаний смещается в область меньших времен, импульс ВКР на этом проходе формируется в области перекрытия крутого спада импульса накачки и сдвинутого по времени импульса ВКР от первого прохода. На третьем и последующих проходах за счет усиления деформации импульса накачки его спадающий фронт и далее сдвигается в область меньших времен, одновременное сокращение импульса ВКР и увеличение крутизны спада импульса накачки прогрессивно уменьшают длительность ВКР-импульса на последующих проходах. Результирующая картина наложения всех импульсов накачки (которая регистрируется кросс-корреляционной функцией) изображена на рис. 3 (кривые *1*).

При $L_{ВКР}>L_{нак}$ (рис. 3 *в*, *г*) импульс ВКР с запозданием приходит на крутой спадающий фронт деформированного импульса накачки, что способствует более быстрому сокращению длительностей, однако при этом режим может становиться неустойчивым из-за прогрессивного запаздывания импульса ВКР на последующих проходах. Это коррелирует с постепенным укорачиванием наблюдающихся цугов импульсов ВКР. Импульс накачки при этом сильнее истощается в области больших времен.

При $L_{ВКР} < L_{нак}$ (рис. 3 *а*) импульс ВКР приходит с опережением импульса накачки и не срабатывает обсуждавшийся выше механизм сокращения с участием крутого фронта деформированного импульса накачки. Длительность импульсов ВКР при этом возрастает по мере увеличения рассогласования баз резонаторов.

Таким образом, полученные результаты показывают, что наиболее короткие импульсы ВКР получаются в схеме с внутрирезонаторным расположением кристалла (см. рис. 1 *а*), а основой механизма сокращения длительностей ВКР-импульсов при накачке относительно длительными (десятки пикосекунд) импульсами является резкая деформация импульса накачки за счет преобразования энергии в стоксову компоненту, что на последовательных обходах резонатора приводит к возбуждению когерентных колебаний среды в поле бигармонической накачки сдвинутыми по времени импульсами.

В варианте внерезонаторной СН деформации импульсов накачки не происходит, обсуждавшийся выше механизм сокращения длительностей не работает, длительности импульсов (см. рис. 2) оказываются больше, чем для случая схемы с внутрирезонаторной СН при оптимальном согласовании баз.

1. Бельский А.М., Гулис И.М., Саечников К.А. и др. // Квант. электрон. 1992. Vol. 19. № 8. P. 769; 1994. Vol. 21. № 8. P. 767; 1994. Vol. 21. № 3. P. 371; 1995. Vol. 22. № 8. P. 841.

2. Гулис И.М., Саечников К.А. // III Международная конференция по лазерной физике и спектроскопии: В 2 т. Гродно, 1997. Т. 1. С. 84.

3. Claus R., Schrotter H. W., Hacker H. H. at al. // Z. Naturforsch. 1969. Vol. 24A. P. 1733; 1970. Vol. 25A. P. 306.

4. Апанасевич А., Запорожченко Р.Г., Орлович В.А. и др. // Квант. электрон. 1989. Vol. 16. № 5. P. 1009.

Поступила в редакцию 09.11.2001.

Игорь Михайлович Гулис – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии.

Константин Алексеевич Саечников – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики БГПУ им. М. Танка.

УДК 534

А.В. НОВИЦКИЙ, Л.М. БАРКОВСКИЙ, А.Н. ФУРС

ОСОБЕННОСТИ ТЕНЗОРНЫХ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ РЯДОВ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Tensor series of geometrical optics is considered in anisotropic one-dimensional media. Tensor eikonal equation, the solution of Maxwell equations in geometro-optical approximation and transfer equations are obtained. The calculations are fulfiled in a particular case of isotropic stratified medium, and a possibility for the coinsidence of approximate solution with an exact solution of Maxwell equations is investigated.

В геометрической оптике при расчетах обычно используется скалярный подход [1, 2]. Введение скалярного эйконала позволяет вычислять направления распространения лучей, дает возможность находить векторные геометрооптические решения в случае изотропных и анизотропных сред. Для анизотропной неоднородной среды решение в эйкональном приближении представляется суммой амплитуд двух собственных волн. В этом случае должно выполняться условие независимости нормальных волн [2], что является еще одним приближением. В силу этого, например, принципиально невозможен предельный переход от анизотропной к изотропной среде [2]. В рамках ковариантных методов Ф.И. Федорова [3] был разработан тензорный формализм [4–7], позволяющий находить геометрооптические решения без разложения полей на собственные волны. В этом подходе используются эволюционные представления решений волнового уравнения, что позволяет явно учесть зависимость эйконального приближения от начальной поляризации электромагнитного поля. При этом эволюционный оператор волнового решения в геометрооптическом приближении представляет собой мультипликативный интеграл [8] от тензора нормальной рефракции. Его расчет сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений известными операторными методами [9].

Основные положения тензорной геометрической оптики стратифицированных сред

Монохроматическая волна частоты ω, распространяющаяся в неоднородной анизотропной магнитной среде, подчиняется уравнению Гельмгольца для вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\nabla^{\times}\left(\varepsilon^{-1}\nabla^{\times}\mathbf{H}\right)-k^{2}\mu\mathbf{H}=0, \tag{1}$$

где ε – тензор диэлектрической проницаемости, μ – тензор магнитной проницаемости, $k=\dfrac{\omega}{c}$ – волновое число, $\nabla^{\times}$ – тензор, дуальный вектору ∇.

В общем случае распространения волны в среде, стратифицированной вдоль оси z, уравнение волны допускает следующее разделение переменных:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{H}(z)\exp(ik\mathbf{br}). \tag{2}$$

Здесь единичный вектор $\mathbf{q}$ направлен вдоль оси z, так что $z=\mathbf{qr}$, вектор $\mathbf{b}$ – вдоль оси x, лежащей в плоскости стратификации, $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{q}$. Модуль вектора $\mathbf{b}$ определяется углом падения волны. В частности, нормальному падению (распространению волны вдоль оси z) соответствует $\mathbf{b}=0$.

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение

$$-k^{2}(B+\mu)\mathbf{H}(z)+ik\left[\frac{dC}{dz}\mathbf{H}(z)+(C+S)\frac{d\mathbf{H}(z)}{dz}\right]+$$

$$+\frac{dQ}{dz}\frac{d\mathbf{H}(z)}{dz}+Q\frac{d^{2}}{dz^{2}}\mathbf{H}(z)=0, \tag{3}$$

причем тензоры C, S, Q, B имеют следующий вид:

$$B=\mathbf{b}^{\times\varepsilon^{-1}}\mathbf{b}^{\times},\ Q=\mathbf{q}^{\times\varepsilon^{-1}}\mathbf{q}^{\times},\ C=\mathbf{q}^{\times\varepsilon^{-1}}\mathbf{b}^{\times},\ S=\mathbf{b}^{\times\varepsilon^{-1}}\mathbf{q}^{\times}. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) представляем в виде

$$\mathbf{H}(z)=\exp(ik\Psi)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^{j}\mathbf{A}_{j}(z), \tag{5}$$

где $\Psi(z)$ – тензорный эйконал, $\mathbf{A}_j(z)$ – медленно меняющиеся векторные амплитуды. Поле $\mathbf{H}(z)$ дается разложением в ряд по степеням i/k аналогично известной формуле скалярной геометрической оптики [1], что соответствует частному случаю разложения Дебая по длине волны, или обратному волновому числу. Известно, что решение уравнения (3) для однородной среды имеет вид

$$\mathbf{H}(z)=\exp(ikNz)\mathbf{H}(z_0), \tag{6}$$

где N – не зависящий от z тензор 2-го ранга, называемый тензором нормальной рефракции, z_0 – начальная координата. Важно, что волновое решение типа (6), записанное в эволюционной форме, учитывает как прямую, так и обратную волну. Стратифицированную среду можно разбить на ряд бесконечно тонких однородных слоев, в каждом из которых применима формула (6). Тогда решение уравнения (3) будем искать в виде [6, 7]:

$$\mathbf{H}(z)=\exp\left(ik\int_{z_0}^{z} N_z(z)dz\right)\mathbf{A}(z), \tag{7}$$

где $\mathbf{A}(z)$ – медленно меняющаяся амплитуда, причем индекс z при N указывает на порядок операторов, так как в общем случае они не перестановочны $N(z_1)N(z_2)\neq N(z_2)N(z_1)$, $z_1\neq z_2$. Сравнивая (5) и (7), получаем выражение для тензорного эйконала

$$\Psi(z)=\int_{z_0}^{z} N_z(z)dz.$$

Выражение (7) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{H}(z)=\int_{z_0}^{z}\left[1+ikN(z_1)dz_1\right]\mathbf{A}(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)\right]\mathbf{A}(z),$$

где символ $\Omega_{z_0}^{z}$ обозначает мультипликативный интеграл [8]. Этот интеграл является решением операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]=ikN(z)\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]. \tag{8}$$

Подставляя (7), уравнение (3) можно представить в виде

$$\left[QN^2+(S+C)N+B+\mu\right]\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\mathbf{A}_{j+1}(z)-\frac{d(QN+C)}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\mathbf{A}_j(z)-$$

$$-(2QN+S+C)\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d\mathbf{A}_j(z)}{dz}+Q\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d^2\mathbf{A}_{j-1}(z)}{dz^2}+$$

$$+\frac{dQ}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d\mathbf{A}_{j-1}(z)}{dz}=0, \tag{9}$$

причем $\mathbf{A}_j=0$ при $j<0$.

В (9) собраны члены при одинаковых степенях i/k. Тогда, приравнивая нулю коэффиценты при различных степенях i/k, для $j=-1$ (нулевое приближение) получим

$$(QN^2+(S+C)N+B+\mu)\mathbf{H}_0(z)=0. \tag{10}$$

Так как уравнение (10) должно выполняться для любых z, то

$$QN^2+(S+C)N+B+\mu=0. \tag{11}$$

Таким образом, в нулевом геометрооптическом приближении для $N(z)$ получается квадратное уравнение, называемое тензорным уравнением эйконала [6, 7]. Для нормального падения ($\mathbf{b}=0$) оно принимает вид

$$QN^2+\mu I=0,$$

где I=**1**–(**q**⊗**q**μ)/(**q**μ**q**) – проективный оператор. Решение этого уравнения дается формулой $N=(-\mu^{-1}Q)^{-1/2}$ (корень из тензора, псевдообратного к $-\mu^{-1}Q$).

Обратимся к уравнениям (9). Член, содержащий $\mathbf{A}_{j+1}(z)$, обращается в нуль в силу уравнения эйконала (11). Таким образом, можно получить рекуррентные формулы для $\mathbf{A}_j(z)$ [7, 8]:

$$\mathbf{A}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\mathbf{A}_j(z_0)+\int_{z_0}^{z}K(z,z_1)H(z_1)\mathbf{A}_{j-1}(z_1)dz_1, \tag{12}$$

где $G(z)=-\left\{\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\right\}^{-1}(2QN+S+C)^{-1}\dfrac{d}{dz}(QN+C)\Omega_{z_0}^{z}[ikN]$,

$$H(z)=\left\{\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\right\}^{-1}(2QN+S+C)^{-1}\left\{\frac{dQ}{dz}\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d}{dz}+Q\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d^2}{dz^2}\right\},$$

$$K(z,z_1)=\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\Omega_{z_1}^{z_0}\left[G(z_1)\right],\ j=0,1,2,\ldots.$$

В тензорном геометрооптическом приближении решение имеет вид

$$\mathrm{H}_0(z)=\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\mathrm{H}_0(z_0), \tag{13}$$

где $\mathbf{H}_0(z_0)$ – вектор магнитного поля в начальной точке падения z_0. Тогда для нахождения $\mathbf{H}_0(z)$ сначала необходимо вычислить $\Omega_{z_0}^{z}[ikN]$, затем подставить это значение в $G(z)$, рассчитать $\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]$ и воспользоваться (13), что приведет к громоздким вычислениям даже в случае простейших неоднородных сред. Существует более простое представление решения уравнения (9), которое мы используем в дальнейшем. Введем

$$\mathbf{H}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\mathbf{A}_j(z),$$

тогда $\mathbf{H}(z)=\mathbf{H}_0(z)+\left(\dfrac{i}{k}\right)\mathbf{H}_1(z)+\ldots$, причем $\mathbf{H}_0(z)$ – искомое геометрооптическое приближение. Используя преобразование Лежандра

$$\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d\mathbf{A}_j}{dz}=\left(\frac{d}{dz}-ikN\right)\mathbf{H}_j(z),$$

получим дифференциальные уравнения относительно $\mathbf{H}_j(z)$, решение которых найдем аналогично (12) методом вариации постоянной:

$$\mathbf{H}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\mathbf{H}_j(z_0)+\int_{z_0}^{z}K_1(z,z_1)L(z_1)\mathbf{H}_{j-1}(z_1)dz_1, \tag{14}$$

где $G_1(z)=-(2QN+S+C)^{-1}\dfrac{d}{dz}(QN+C)$,

$$L(z)=(2QN+S+C)^{-1}\left[\frac{dQ}{dz}\left(\frac{d}{dz}-ikN\right)+Q\left(\frac{d^2}{dz^2}-\frac{d}{dz}ikN-ikN\frac{d}{dz}+(ik)^2N^2\right)\right],$$

$$K_1(z,z_1)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\Omega_{z_1}^{z_0}\left[ikN(z_1)+G_1(z_1)\right].$$

Нулевое приближение в этом случае выражается формулой

$$\mathbf{H}_0(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\mathbf{H}_0(z_0).$$

Теперь достаточно найти лишь мультипликативный интеграл $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$, что значительно проще, чем вычисление по формуле (13).

Расчет поля в нулевом приближении для изотропной среды

Рассмотрим частный случай среды со скалярными диэлектрической $\varepsilon=\varepsilon(z)$ и магнитной проницаемостью $\mu=\mu(z)$. Вначале найдем тензор нормальной рефракции $N(z)$. Тензоры C, S, B, Q (4) принимают вид

$$B=\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}^2),\quad Q=\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}-1)=-\frac{1}{\varepsilon}I,\quad S=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{q}\otimes\mathbf{b},\quad C=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{b}\otimes\mathbf{q},$$

где $I=\mathbf{1}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}$ – проектор на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{q}$.

Тогда тензорное уравнение эйконала записывается в следующем виде:

$$IN^2-(\mathbf{b}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{b})N-\xi-\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}=0,$$

где $\xi(z)=\varepsilon(z)\mu(z)-\mathbf{b}^2$. Его решение [6, 7]

$$N(z)=\pm\frac{\sqrt{\xi}}{\mathbf{b}^2}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}-\frac{\xi(z)}{\mathbf{b}^2}\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{b}.$$

Переходим к вычислению мультипликативного интеграла $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$, используя известную процедуру Вея – Нормана [9].

Оператор $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$ согласно (8) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{d}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\right]\left\{\Omega_{z_0}^{z}\right\}^{-1}=ikN(z)+G_1(z)$$

с начальным условием $\Omega_{z_0}^{z_0}=1$. Вычисление $G_1(z)$ дает

$$G_1(z)=V_1(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+V_2(z)\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q},$$

где $V_1(z)=-\dfrac{1}{2\mathbf{b}^2}\dfrac{d}{dz}\ln\left(\dfrac{\sqrt{\xi}}{\varepsilon}\right)$, $V_2(z)=-\left(2\mu-\dfrac{\mathbf{b}^2}{\varepsilon}\right)^{-1}\dfrac{d\mu}{dz}$.

Введем операторы

$$L_1=\mathbf{b}\otimes\mathbf{q},\quad L_2=\mathbf{q}\otimes\mathbf{b},\quad L_3=\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}^2\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q},\quad L_4=\mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\quad L_5=\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}. \tag{15}$$

Они образуют алгебру Ли и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[L_1, L_2]=L_3,\quad [L_1, L_3]=-2\,\mathbf{b}^2L_1,\quad [L_2, L_3]=2\,\mathbf{b}^2 L_2,\quad [L_1, L_5]=L_1,\quad [L_2, L_5]=-L_2,$$
$$[L_1, L_4]=[L_2, L_4]=[L_3, L_4]=[L_3, L_5]=[L_4, L_5]=0.$$

Кроме того,

$$ikN(z)+G_1(z)=-ik\frac{\xi(z)}{\mathbf{b}^2}L_1-ikL_2+\left(\pm\frac{ik}{\mathbf{b}^2}\sqrt{\xi(z)}+V_1\right)L_4+V_2L_5.$$

Искомый мультипликативный интеграл представляется в виде произведения операторных экспонент

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]=\exp[ig_1L_1]\exp[ig_2L_2]\exp[g_3L_3]\exp[ig_4L_4]\exp[g_5L_5], \tag{16}$$

где g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 – неизвестные функции переменной z.

Воспользовавшись формулой Бейкера – Хаусдорфа

$$e^X\,Y\,e^{-X}=Y+[X, Y]+\frac{1}{2!}[X,[X, Y]]+\frac{1}{3!}[X,[X,[X, Y]]]+\ldots,$$

получим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [7, 9]:

$$\frac{dg_1}{dz}=-\frac{k}{\mathbf{b}^2}\xi-k\mathbf{b}^2g_1^2-V_2g_1, \tag{17а}$$

$$\frac{dg_2}{dz}=-k\left(1-2\mathbf{b}^2g_1g_2\right)+V_2g_2, \tag{17б}$$

$$\frac{dg_3}{dz} = -kg_1, \tag{17в}$$

$$\frac{dg_4}{dz} = \pm\frac{k}{\mathbf{b}^2}\sqrt{\xi(z)} - iV_1, \tag{17г}$$

$$\frac{dg_5}{dz} = V_2, \tag{17д}$$

причем функции g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 удовлетворяют начальным условиям

$$g_1(z_0) = g_2(z_0) = g_3(z_0) = g_4(z_0) = g_5(z_0) = 0.$$

Учитывая явный вид операторов (15), можно записать искомое решение (16) в виде

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right] = \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,(1-\mathbf{b}^2 g_1 g_2)\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} +$$
$$+ ig_1\exp[g_5 - g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q} + ig_2\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{b} +$$
$$+ \exp[g_5 - g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q} + \frac{1}{b^2}\exp[ig_4\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}.$$

Сравнение геометрооптических полей с точным решением уравнений Максвелла

Рассмотрим немагнитную среду $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = 1$. Тогда $V_2 = 0$ и

$$G_1(z) = V_1(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}.$$

Из (17д) легко получить, что $g_5 = 0$, а уравнения 17а–17г упрощаются, так что

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN + G_1\right] = \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[g_3\,\mathbf{b}^2](1-\mathbf{b}^2 g_1 g_2)\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + ig_1\exp[-g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q} +$$
$$+ ig_2\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{b} + \exp[-g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q} + \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[ig_4\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}. \tag{18}$$

Воспользовавшись формулой (14), можно вычислить члены высших порядков. Очевидно, что $\mathbf{H}_j(z_0)=0$, $j>0$, так как первоначальный вектор магнитного поля известен точно, т. е. $\mathbf{H}(z_0) = \mathbf{H}_0(z_0)$. Результат расчета представим в виде

$$\mathbf{H}_j(z) = F_j(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\,\mathbf{H}(z_0),\ j \geq 1,$$

где $F_j(z)$ – некоторые функции от z, причем $\mathbf{H}_j(z)$ направлены вдоль **a** и входят в $\mathbf{H}(z)$ с коэффициентами $(i/k)^j$. Из (18) видно, что члены высших порядков не вносят каких-либо изменений в решение для поля $\mathbf{H}(z)$, поляризованного в плоскости падения (**b**, **q**), но уточняют решение для поля $\mathbf{H}(z)$, поляризованного перпендикулярно плоскости падения.

* * *

Таким образом, совпадение или несовпадение решений уравнений Максвелла и геометрооптических решений для изотропной немагнитной среды определяется начальной поляризацией электромагнитной волны. Если вектор $\mathbf{H}(z_0)$ лежит в плоскости падения, то точное и геометрооптическое решения совпадают, если же он перпендикулярен плоскости падения, то необходимо учитывать члены более высокого порядка разложения по длине волны. Отметим, что тензор нормальной рефракции не коммутирует в различных точках стратифицированной среды, являясь генератором неабелевой алгебры Ли. Данное свойство тензора N является одной из причин несовпадения скалярных и тензорных геометрооптических решений.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973. С. 116.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. С. 217.
3. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. М., 1976.
4. Барковский Л.М., Ханг Ф.Т.Н. // Оптика и спектроскопия. 1990. № 68. С. 670.
5. Они же // Акуст. журн. 1991. № 37. С. 222.
6. Barkovsky L.M., Furs A.N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 1999. Vol. 2. № 3. P. 61.
7. Iidem // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. Vol. 33. P. 3241.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967. С. 429.
9. Wei J., Norman E. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 4. № 4. P. 575.

Поступила в редакцию 28.11.2001.

Андрей Викторович Новицкий – студент 5-го курса физического факультета. Научный руководитель – Л.М. Барковский.

Леонид Матвеевич Барковский – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики.

Александр Николаевич Фурс – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.

УДК 539.12

В.И. СТРАЖЕВ, Д.А. ЦИОНЕНКО

О КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛЕРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

It is shown that an accordance in the description of a spin ½ particle by Dirac equation and by Dirac – Kaehler equation in a curved space-time, when the transformations of the Lorentz group are localized, is possible only in case of localization of the internal symmetry group. A classical theory of the Dirac – Kaehler field interacting with a non-Abelian gauge field in the curved space-time has been constructed.

В плоском пространстве-времени теория поля Дирака – Кэлера обладает группой $SU(2,2)$ внутренней (диальной) симметрии, которая образует полупрямое произведение с группой Лоренца (см. [1, 2]). Существование диальной симметрии позволяет переопределить трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака – Кэлера относительно преобразований Лоренца, в силу чего его решения эквивалентны решениям уравнения Дирака для частиц со спином 1/2 и внутренней симметрией $SU(2,2)$ [3]. Такая возможность существует и при введении взаимодействия, не нарушающего симметрию теории [4].

В плоском пространстве-времени решения уравнения Дирака с внутренней симметрией сопоставимы с решениями уравнения Дирака – Кэлера, и сопоставление можно делать глобально [5]. Но в искривленном пространстве последнее возможно только в точке, что означает обязательность локализации и преобразований группы внутренней симметрии. Решения уравнения Дирака – Кэлера в точке можно сопоставить с решениями уравнения Дирака с внутренней симметрией только при одновременной локализации как преобразований группы Лоренца, так и группы внутренней симметрии.

Таким образом, в случае, когда симметрии не являются глобальными, для соответствия теории дираковских частиц и теории Дирака – Кэлера необходимо положить:

$$\delta^a_\mu(x)\delta^b_\nu(x)\Sigma_{ab}(x) = \chi_{\mu\nu}(x) + \omega_{\mu\nu}(x), \tag{1}$$

где $\Sigma_{ab}(x)$ – параметры преобразований подгруппы $SO(3.1)$ внутренней симметрии поля Дирака, $\chi_{\mu\nu}(x)$ – параметры преобразований подгруппы диальной симметрии поля Дирака – Кэлера, изоморфной группе $SO(3.1)$ ([2, 3]), $\omega_{\mu\nu}(x)$ – параметры преобразований локальной группы Лоренца. В выражении (1) величины $\delta_\mu{}^a(x)$ и $\delta_\nu{}^b(x)$ определяются соотношениями: $\delta_\mu{}^a(x)=1$, если $a=\mu$, и $\delta_\mu{}^a(x)=0$ в противном случае. Эти величины преобразуются по нижнему индексу согласно преобразованиям Лоренца, а по верхнему – согласно преобразованиям группы внутренней симметрии, т. е. являются 4-векторами по отношению к обеим группам симметрии. Закон преобразования для $\delta_\mu{}^a(x)$ имеет вид:

$$\delta^a_{\mu'}(x)=B^{\mu}_{\mu'}(x)\delta^a_{\mu}(x); \qquad (2)$$
$$\delta^{a'}_{\mu}(x)=A^{a'}_{a}(x)\delta^a_{\mu}(x),$$

где $B^{\mu}_{\mu'}(x)$ – оператор, задающий преобразования Лоренца в точке с координатами x, а $A^{a'}_{a}(x)$ – оператор, задающий преобразования локализованной группы внутренней симметрии. Для того чтобы выражение (1) было инвариантным относительно преобразований (2), необходимо вместе с преобразованиями Лоренца волновые функции уравнений подвергнуть преобразованиям подгруппы $SO(3.1)$ внутренней симметрии. Таким образом, алгебраическое переопределение генераторов группы Лоренца, т. е. переход от генераторов

$$J_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\left\{\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}+\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}\right\} \qquad (3)$$

к генераторам $J'_{\mu\nu}=J_{\mu\nu}-G_{\mu\nu}=1/4\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}$, соответствует инвариантному заданию условия (1) (см. также [6]). Матрицы Γ_μ и Γ'_μ осуществляют представление алгебры Клиффорда и коммутируют между собой. Величины $G_{\mu\nu}=1/4\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}$ являются генераторами подгруппы преобразований диальной симметрии поля Дирака – Кэлера изоморфной группе $SO(3.1)$.

Иначе для описания частиц со спином $s=1/2$ посредством уравнения Дирака – Кэлера в рамках пространств, где группа Лоренца не является глобальной группой симметрии, необходимо ввести в рассмотрение взаимодействие с неабелевым калибровочным полем, соответствующим локализации группы $SU(2.2)$ диальной симметрии.

Соответствие между теориями Дирака и Дирака – Кэлера в случае неевклидова пространства-времени предполагает введение взаимодействия полей указанных типов с неабелевым калибровочным полем $\hat{A}_\mu=A^A_\mu G_A$, где G_A – генераторы группы $SU(2.2)$, $A=(1\div15)$.

В плоском пространстве калибровочно-инвариантный лагранжиан для поля Дирака – Кэлера имеет вид:

$$L=-\bar{\Phi}(x)[\Gamma^\mu(\partial_\mu-iqA^A_\mu G_A)+m]\Phi(x)-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A, \qquad (4)$$

где $\bar{\Phi}(x)=\Phi^+(x)\theta$, $\Phi(x)$ – 16-компонентная волновая функция, реализующая представление группы Лоренца с генераторами (3), $\theta=\Gamma_4\Gamma'_4$ – матрица билинейной инвариантной формы,

$$F^A_{\mu\nu}=\partial_\mu A^A_\nu-\partial_\nu A^A_\mu-qC^A_{CB}A^C_{[\mu}A^B_{\nu]} \qquad (5)$$

и $C^A{}_{CB}$ – структурные константы группы $SU(2.2)$. Из лагранжиана (4) варьированием по $A_\mu{}^A$, $\bar{\Phi}(x)$ получим:

$$\partial^\nu F^C_{\mu\nu} + qC^C_{AB}A^{\nu A}F^B_{\mu\nu} = J^C_\mu, \tag{6}$$

$$\Gamma^\mu(\partial_\mu - iqA^C_\mu G_C)\Phi(x) + m\Phi(x) = 0,$$

где $J_\mu^C = q\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu G^C\,\Phi(x)$ – ток, являющийся источником поля $A_\mu^C(x)$, q – постоянная взаимодействия. Поскольку решающую роль в переопределении лоренцевых трансформационных свойств волновой функции играет подгруппа $SO(3.1)$ внутренней симметрии, ограничимся случаем, когда локализованы только ее параметры. Запишем:

$$\Gamma^\mu(\partial_\mu - iqA^{\alpha\beta}_\mu \frac{1}{4}[\Gamma_\alpha\Gamma_\beta])\Phi(x) + m\Phi(x) = 0.$$

Лоренц-инвариантность последнего уравнения обеспечивается условиями:

$$[\Gamma_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = \delta_{\alpha\mu}\Gamma_\beta - \delta_{\beta\mu}\Gamma_\alpha$$

и коммутационными соотношениями

$$[G_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}]_- = \delta_{\beta\mu}G_{\alpha\nu} + \delta_{\alpha\nu}G_{\beta\mu} - \delta_{\beta\nu}G_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\mu}G_{\beta\nu},$$

из которых следует, что при переходе из одной системы отсчета в другую, осуществляемом преобразованиями Лоренца (здесь группа Лоренца – группа пространственно-временной симметрии), матрицы Γ_μ и поля $A_\mu{}^{\alpha\beta}$ преобразуются так:

$$S\Gamma_\mu S^{-1} = L^{\nu'}_\mu\Gamma_{\nu'},$$

$$L^{\nu'}_\mu SA^{\alpha'\beta'}_{\nu'}S^{-1} = L^{\nu'}_\mu L^{\alpha'}_\alpha L^{\beta'}_\beta A^{\alpha\beta}_{\nu'},$$

поскольку $S^{-1}G_{\alpha\beta}S = L^{\alpha'}_\alpha L^{\beta'}_\beta G_{\alpha'\beta'}$. Таким образом, калибровочные поля $A_\mu{}^{\alpha\beta}$ являются 3-валентными тензорами по отношению к преобразованиям Лоренца [6].

Обобщим предложенную теорию на случай неевклидова пространства-времени, где геометрическую симметрию описывает группа общекоординатных преобразований H_4. Если рассматриваемое поле $\Phi(x)$ осуществляет скалярное представление группы H_4, тогда инвариантную производную $\partial_\mu - iq\hat{A}_\mu$ необходимо обобщить до ковариантной, определяемой связностью в пространстве представления локальной группы Лоренца [7, 8].

Это приводит к следующему виду "удлиненной" производной: $\partial_\mu - iq\hat{A}_\mu - iq'\hat{B}_\mu$, где q' – постоянная взаимодействия с полем $\hat{B}_\mu$ и

$$\hat{B}_\mu = \frac{1}{4}B^{(i)(j)}_\mu(\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} + \Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]}), \quad \hat{A}_\mu = \frac{1}{4}A^{(i)(j)}_\mu\Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]}.$$

Здесь и далее индексы μ, ν, σ… – пространственно-временные, преобразование которых задается группой H_4, индексы (i), (j), (k)… являются локальными лоренцевыми, индексы a, b, c... относятся к преобразованиям группы внутренней (изоспиновой) симметрии дираковского поля. В дальнейшем преобразования групп Лоренца и диальной симметрии будут вводиться одновременно, т. е. будет учтено требование согласования индексов $[(i)(j)]$ генераторов и параметров этих групп. Общековариантность уравнения, построенного на такой производной, обеспечена тем, что компенсирующие поля $B_\mu{}^{(i)(j)}$ и $A_\mu{}^{(i)(j)}$ являются векторными по отношению к группе H_4, а локальная лоренц-инвариантность требует, чтобы по индексам $[(i)(j)]$ поля являлись антисимметричными тензорами по отношению к преобразованиям Лоренца.

Обобщим определение (5) тензора напряженностей $F_{\mu\nu}$ на случай неевклидова пространства-времени, полагая тензор кручения равным нулю ($K_{\alpha\beta}{}^{\mu} = 0$):

$$F^{A}_{\mu\nu} = A^{\ A}_{\nu.\mu} - A^{A}_{\mu.\nu} - qC^{A}_{CB}A^{c}_{[\mu}A^{B}_{\nu]}. \tag{7}$$

Здесь точка "." обозначает ковариантное дифференцирование в соответствии со связностью:

$$\Gamma^{\chi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\chi}(g_{\mu\sigma,\ \nu} + g_{\nu\sigma,\ \mu} - g_{\mu\nu,\ \sigma}), \tag{8}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени и запятая "," обозначает частную производную.

При сравнении (5) и (7) видно, что связь $F_{\mu\nu}{}^{A}$ и $A_{\mu}{}^{A}$ остается той же, что и в случае плоского пространства-времени. При наличии кручения уравнение (7) обобщается введением слагаемого $K_{[\mu}A_{\nu]}{}^{A}$. Обобщение уравнения (6) на искривленное пространство-время получается при замене обычной производной на ковариантную. Действие дифференциального оператора ∇^{μ} на тензор $F_{\mu\nu}{}^{A}$ может быть представлено действием оператора δ, определенного на пространстве дифференциальных форм [5]:

$$\nabla^{\mu}F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}F^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}).$$

Окончательно запишем:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{\nu}_{\mu}) + qCA^{\nu}F_{\mu\nu} = J_{\mu}\sqrt{-g},$$

где C – матрица в присоединенном представлении группы $SU(2.2)$.

Аналогичному обобщению подвергаются уравнения, определяющие динамику поля $B_{\mu}{}^{(i)(j)}$, ассоциируемого с локальными преобразованиями подгруппы $SO(3.1)$ в пространстве представления группы Лоренца. Лагранжиан, инвариантный относительно обоих типов преобразований, имеет вид:

$$L = -\bar{\Phi}(x)[\Gamma^{\mu}D_{\mu} + m]\Phi(x) + \frac{1}{4}F^{A}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{A} - \frac{1}{4}R^{(i)(j)}_{\mu\nu}R^{\mu\nu}_{(i)(j)}, \tag{9}$$

где D_{μ} – ковариантная производная, определенная полями $A_{\mu}{}^{A}$ и $B_{\mu}{}^{(i)(j)}$:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - iq\hat{A}_{\mu} - iq'\hat{B}_{\mu}.$$

Ограничиваясь подгруппой $SO(3.1)$, запишем:

$$L = -\bar{\Phi}(x)[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iqA^{(i)(j)}_{\mu}\frac{1}{4}\Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]} - iq'B^{(i)(j)}_{\mu}(\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} +$$

$$+\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]})) + m]\Phi(x) + \frac{1}{4}F^{(i)(j)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(i)(j)} - \frac{1}{4}R^{(i)(j)}_{\mu\nu}R^{\mu\nu}_{(i)(j)}.$$

Тогда правило коммутации для производной D_{μ}, входящей в лагранжиан (9), имеет вид:

$$D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} = 0,$$

где $F_{\mu\nu}{}^{(i)(j)}$ – тензор напряженностей поля $A_{\mu}{}^{(i)(j)}$ (5), а $R_{\mu\nu}{}^{(i)(j)}$ определяется следующим образом:

$$R^{(i)(j)}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B^{(i)(j)}_{\ \nu} - \partial_{\nu}B^{(i)(j)}_{\mu} - q'C^{(i)(j)}_{(k)(l)\ (m)(n)}B^{(k)(l)}_{[\mu}B^{(m)(n)}_{\nu]}. \tag{10}$$

Записывая полное действие системы в виде: $S - S_{\Phi} + S_{A} + S_{B}$, где

$$S_{\Phi} = \frac{1}{2}\int d^{4}x(\sqrt{-g}\ \ \bar{\Phi}(x)[\Gamma^{\mu}D_{\mu} + m]\Phi(x)),$$

$$S_A = \frac{1}{2}\int d^4x(\sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}^{(i)(j)} F_{(i)(j)}^{\mu\nu}),$$

$$S_B = \frac{1}{2}\int d^4x(\sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}^{(i)(j)} R_{(i)(j)}^{\mu\nu}),$$

варьированием по $\bar{\Phi}(x)$, $A_\mu^{(i)(j)}$, $B_\mu^{(i)(j)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\partial_\nu(\sqrt{-g}\, F_\mu^{(i)(j)\nu}) + qC_{(k)(l)\,(m)(n)}^{(i)(j)} A^{(k)(l)\nu} F_{\mu\nu}^{(m)(n)} = {}^{[A]}J_\mu^{(i)(j)}, \\
\partial_\nu(\sqrt{-g}\, R_\mu^{(i)(j)\nu}) + q'C_{(k)(l)\,(m)(n)}^{(i)(j)} B^{(k)(l)\nu} R_{\mu\nu}^{(m)(n)} = {}^{[B]}J_\mu^{(i)(j)}, \\
\Gamma^\mu D_\mu \Phi(x) + m\Phi(x) = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Токи ${}^{[A]}J_\mu^{(i)(j)}$, ${}^{[B]}J_\mu^{(i)(j)}$ определены следующим образом:

$${}^{[A]}J_\mu^{(i)(j)} = q\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu G^{(i)(j)}\Phi(x) = q\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu \frac{1}{4}(\Gamma'^{[(i)}\Gamma'^{(j)]})\Phi(x)\,,$$

$${}^{[B]}J_\mu^{(i)(j)} = q'\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu J^{(i)(j)}\Phi(x) = q'\bar{\Phi}(x)\Gamma_\mu \frac{1}{4}(\Gamma^{[(i)}\Gamma^{(j)]} + \Gamma'^{[(i)}\Gamma'^{(j)]})\Phi(x).$$

Расписывая производную D_μ в третьем уравнении (11), получаем:

$$\Gamma^\mu(\partial_\mu - iq'B_\mu^{(i)(j)}\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} - iq(A_\mu^{(i)(j)} + \frac{q}{q'}B_\mu^{(i)(j)})\frac{1}{4}\Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]})\Phi(x) + m\Phi(x) = 0. \tag{12}$$

Вводя в рассмотрение поле $C_\mu^{(i)(j)} = A_\mu^{(i)(j)} + \frac{q}{q'}B_\mu^{(i)(j)}$, получим следующую формулировку уравнения (12):

$$\Gamma^\mu(\partial_\mu - iq'B_\mu^{(i)(j)}\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} - iqC_\mu^{(i)(j)}\frac{1}{4}\Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]})\Phi(x) + m\Phi(x) = 0,$$

которая удобна для исследования соответствия между теориями Дирака – Кэлера и Дирака.

Изменение волновой функции и калибровочных полей под действием преобразований подгруппы $SO(3.1)$, соответствующей локальным преобразованиям Лоренца, и преобразований той же подгруппы в пространстве представления группы внутренней симметрии (пространстве "ароматов") задается в соответствии с формулами:

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp\{i\omega_{(i)(j)}(x)J^{(i)(j)}\}\Phi(x),$$

$$\hat{B}_\mu(x) \to \hat{B}'_\mu(x) = \hat{B}_\mu(x) + \delta\hat{B}_\mu(x),$$

$$\delta B_\mu^{(i)(j)}(x) = \partial_\mu\omega^{(i)(j)}(x) - q'C_{(k)(l)\,(m)(n)}^{(i)(j)} B_\mu^{(i)(j)}(x)\omega^{(m)(n)}(x);$$

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp\{i\chi_{(i)(j)}(x)G^{(i)(j)}\}\Phi(x),$$

$$\hat{A}_\mu(x) \to \hat{A}'_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) + \delta\hat{A}_\mu(x),$$

$$\delta A_\mu^{(i)(j)}(x) = \partial_\mu\chi^{(i)(j)}(x) - qC_{(k)(l)\,(m)(n)}^{(i)(j)} A_\mu^{(i)(j)}(x)\chi^{(m)(n)}(x),$$

где $\omega_{(i)(j)}$ и $\chi_{(i)(j)}$ – параметры преобразований этих групп.

Отметим, что при задании локальных преобразований Лоренца пространственно-временные координаты не изменяются. При одновременном задании обоих типов преобразований волновой функции введенное выше калибровочное поле $C_\mu^{(i)(j)}$ преобразуется соответствующим образом.

Рассмотрим теперь мультиплет дираковских полей $\Psi(x)$, осуществляющих представление группы $SU(2.2)$ внутренней симметрии. В случае неевклидова пространства-времени ковариантное уравнение Дирака (см. [9, 10]) в присутствии неабелева калибровочного поля E_μ^{ab}, соответствующего подгруппе $SO(3.1)$, имеет вид:

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\,\tilde{F}_\mu^{ab\nu}) + qC^{ab}_{cd\ fg}E^{cd\nu}\tilde{F}^{fg}_{\mu\nu} = {}^{[E]}J^{ab}_\mu,$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\,R_\mu^{(i)(j)\nu}) + q'C^{(i)(j)}_{(k)(l)\ (m)(n)}B^{(k)(l)\nu}R^{(m)(n)}_{\mu\nu} = {}^{[B]}J^{(i)(j)}_\mu, \tag{13}$$

$$\Gamma^\mu(\partial_\mu - iq'B_\mu^{(i)(j)}\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} - iqE_\mu^{ab}\frac{1}{4}\Gamma'_{[a}\Gamma'_{b]})\Psi(x) + m\Psi(x) = 0.$$

Данная система уравнений может быть получена варьированием по $\overline{\Psi}(x)$, $E_\mu{}^{ab}$ и $B_\mu{}^{(i)(j)}$ из лагранжиана:

$$L = -\overline{\Psi}(x)[\Gamma^\mu(\partial_\mu - iqE_\mu^{ab}\frac{1}{4}\Gamma'_{[a}\Gamma'_{b]} - iq'B_\mu^{(i)(j)}\frac{1}{4}\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]}) + m]\Psi(x) +$$

$$+\frac{1}{4}F^{ab}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{ab} - \frac{1}{4}R^{(i)(j)}_{\mu\nu}R^{\mu\nu}_{(i)(j)}.$$

Сравнивая (11) и (13) с учетом (12), приходим к выводу, что соответствие теории Дирака – Кэлера и теории, описывающей мультиплет дираковских частиц, предполагает выполнение условий:

$$\delta_a^{(i)}(x)\delta_b^{(j)}(x)\tilde{F}^{ab}_{\mu\nu} = F^{(i)(i)}_{\mu\nu} + q'R^{(i)(j)}_{\mu\nu},$$

$$\partial_\nu\delta^a_{(i)}(x) + B_{\nu(i)(j)}\delta^{a(j)}(x) - E_\nu^{ab}\delta_{b(i)}(x) = 0,$$

где $\delta_a{}^{(i)}(x)$ – введенные ранее символы Кронекера, определенные в каждой точке пространства-времени. Под действием подгруппы $SO(3.1)$ локальных преобразований во внутреннем (изотопическом) пространстве калибровочное поле E_μ^{ab} и поле $\Psi(x)$ преобразуются следующим образом:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\{i\Sigma_{ab}(x)G^{ab}\}\Psi(x),$$

$$\hat{E}_\mu(x) \to \hat{E}'_\mu(x) = \hat{E}_\mu(x) + \delta\hat{E}_\mu(x),$$

$$\delta E^{ab}_\mu(x) = \partial_\mu\Sigma^{ab}(x) - qC^{ab}_{cd\ fg}A^{cd}_\mu(x)\Sigma^{fg}(x).$$

Учитывая условие (1), приходим к выводу, что, переопределяя в спинорном пространстве локальные трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака – Кэлера $\Phi(x)$, можно установить соответствие между названными теориями и в случае неевклидова пространства-времени. В обоих случаях присутствует взаимодействие указанных массивных полей с неабелевым калибровочным полем, соответствующим подгруппе $SO(3.1)$ внутренней симметрии. Однако в спинорной формулировке уравнения Дирака – Кэлера поля $C_\mu{}^{(i)(j)}$ являются антисимметричными лоренц-тензорами по индексам $[(i)(j)]$, тогда как в теории дираковских полей соответствующие индексы у $E_\mu{}^{ab}$ являются изоспиновыми. Данное обстоятельство имеет значение в случае связи между преобразованиями подгруппы $SO(3.1)$ в спинорном пространстве и локальными преобразованиями Лоренца тетрады $h_\mu{}^{(i)}$, когда локальному преобразованию тетрады $h_\mu{}^{(i)\prime} = L_{(j)}{}^{(i)}{}' h_\mu{}^{(j)}$ соответствует преобразование в спинорном пространстве.

Как и в случае плоского пространства-времени, переопределение лоренцевых трансформационных свойств волновой функции $\Phi(x)$ приводит к переопределению спиновых свойств у частиц – переносчиков взаимодействия. Следует подчеркнуть, что спиновые степени свободы частиц определяются как чисто внутренние, не зависящие от геометрии пространства-времени. Это обстоятельство связано с независимостью локальных преобразований Лоренца и преобразований координат многообразия, осуществляемых группой H_4.

Рассмотрим в применении к исследуемому случаю следствие требования равенства нулю ковариантной производной от тетрады $h_\mu^{(i)}(x)$:

$$\nabla_\mu h_\nu^{(i)} = \partial_\mu h_\nu^{(i)} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} h_\sigma^{(i)} + B_\mu^{(i)(j)} h_{\nu(j)} = 0. \qquad (14)$$

Умножая (14) на $h^{\nu(k)}$ и учитывая соотношения (8), получаем:

$$B_\mu^{(i)(j)} = \frac{1}{2} h^{\nu(i)} (h_{\mu,\nu}^{(j)} - h_{\nu,\mu}^{(j)}) - \frac{1}{2} h^{\nu(j)} (h_{\mu,\nu}^{(i)} - h_{\nu,\mu}^{(i)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} h^{\nu(i)} h^{\sigma(j)} (h_{\nu(k),\sigma} - h_{\sigma(k),\nu}) h_\mu^{(k)}, \qquad (15)$$

где использовано выражение (см. также [11]):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\chi} = \frac{1}{2} h_{(i)}^{\chi} h^{\sigma(i)} ((h_{\mu(j)} h_\nu^{(j)})_{,\sigma} + (h_\mu^{(j)} h_{\sigma(j)})_{,\nu} - (h_{\sigma(j)} h_\nu^{(j)})_{,\mu}).$$

Подставляя (15) в определение тензора напряженностей $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ поля $B_\mu^{(i)(j)}$ (10), получаем:

$$R_{\mu\nu}^{(i)(j)} = \frac{1}{2} h^{\chi(i)} h^{\sigma(j)} (g_{\mu\sigma,\nu\chi} + g_{\nu\chi,\mu\sigma} - g_{\mu\chi,\nu\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu\chi}) +$$

$$+ h^{\rho(i)} h^{\sigma(j)} (\Gamma_{\mu\sigma\rho} \Gamma_{\nu\theta\chi} - \Gamma_{\mu\theta\rho} \Gamma_{\sigma\nu\chi}) h^{\chi(k)} h_{(k)}^{\theta},$$

т. е. $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ – тензор кривизны пространства, два индекса которого превращены в реперные.

Таким образом, при рассмотрении теорий Дирака и Дирака – Кэлера в неевклидовом пространстве-времени, включающих взаимодействие с неабелевым калибровочным полем, возможно переопределение лоренцевых трансформационных свойств и установление локального соответствия между ними.

Полагая в уравнениях (13) $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}=0$, приходим к ситуации, соответствующей плоскому пространству-времени, которая была описана ранее (6). Калибровочная теория поля Дирака – Кэлера в пределе плоского пространства также рассмотрена в [12].

1. Стражев В.И., Плетюхов В.А. // Acta. Phys. Polon. 1981. Vol. B12. № 7. P. 651.
2. Стражев В.И. // Acta. Phys. Polon. 1978. Vol. B9. № 5. P. 449.
3. Плетюхов В.А., Стражев В.И. // ДАН БССР. 1982. Т. 26. № 8.
4. Стражев В.И. Спиновые степени свободы и калибровочные симметрии: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1985.
5. Becher P., Joos H. // Zeit. f. Phys. 1982. Bd. C15. S. 343.
6. Круглов С.И., Стражев В.И. // Изв. вузов СССР. Физика. 1981. № 12. С. 82.
7. Биррел Н., Дэвис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984.
8. Девитт Брайс С. Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
9. Schmutzer E. Relativistische Phusik. Leipzig , 1968.
10. Горбацевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Мн., 1985.
11. Holdom B. // Nucl. Phys. 1984. Vol. B23. № 3. P. 413.
12. Круглов С.И., Стражев В.И. // Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1981. Т. 1. С. 105.

Поступила в редакцию 09.11.2001.

Василий Иванович Стражев – доктор физико-математических наук, профессор, ректор РИВШ БГУ.

Дмитрий Александрович Ционенко – младший научный сотрудник лаборатории квантовой теории поля Национального научно-учебного центра физики частиц и высоких энергий БГУ.

УДК 530.12

А.В. ГРИНЧУК, Е.А. УШАКОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ

The method of approximate calculation of path integrals for a particle with a spin is offered. The used approach is based on quantum field theory methods and on expansion of a Lagrangian and operator of parallel transport. The accuracy of this approximation is checked by means of comparison with exact result (free particle propagator on pseudosphere).

Одним из важнейших объектов в квантовой теории поля является фейнмановский пропагатор, с помощью которого выражаются такие величины, как амплитуды процессов рассеяния, вакуумное значение тензора энергии-импульса, интенсивность рождения пар и т. д. [1]. В искривленном пространстве-времени пропагатор является одним из наиболее эффективных инструментов для проведения процедуры перенормировки. В данной работе мы рассмотрим возможность применения интегралов по путям для приближенного вычисления пропагатора.

В работах Швингера и Девитта было показано, что пропагатор скалярной частицы можно представить в виде интеграла по путям [2, 3]:

$$G(x'', x') = -\frac{i}{2}\int_0^\infty ds \exp\left(-i m^2 s/2\right)\int D\{x(s)\} \exp\left\{i \int L(x(s), \dot{x}(s))\, ds\right\}.$$

В случае обобщенного уравнения Клейна – Гордона [4]

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2\right) \psi^A = 0, \quad \mu = 1.\ 2,\ 3, \tag{1}$$

где A – обобщенный (спинорный, векторный, тензорный) индекс, пропагатор имеет вид

$$G^{A''}{}_{A'}(x'', x') = \int_0^\infty ds \exp\left(-i m^2 s/2\right)\int D\{x(s)\}\mathbf{P}^{A''}{}_{A'}(x(s)) \exp\left\{i\int L(x(s), \dot{x}(s))ds\right\}, \tag{2}$$

$\mathbf{P}^{A''}{}_{A'}(x(s))$ – оператор параллельного переноса по пути $x(s)$; $L(x(s), \dot{x}(s))$ – эффективный лагранжиан:

$$L(x(s), \dot{x}(s)) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x(s))\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + V_{QP}(x(s)).$$

Здесь при использовании недекартовых координат появляется дополнительное слагаемое $V_{QP}(x(s))$ – квантовый потенциал, явный вид которого зависит от используемого метода упорядочения операторов [2, 7]. Оператор параллельного переноса выражается через упорядоченную экспоненту:

$$\mathbf{P}^A{}_{B'}(x(s)) = \hat{T}\exp\left(-\int \mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}\dot{x}^\mu(s)ds\right),$$

где $\hat{T}$ – символ упорядочения по s; $\mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}$ – связность ($\nabla_\mu\psi^A = \partial_\mu\psi^A + \mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}\psi^B$).

Пропагатор, выраженный интегралом (2), тесно связан с пропагаторами реальных физических полей. Так, в случае уравнения Прока пропагатор имеет вид

$$G^\alpha{}_{\beta'} - \frac{\nabla^\alpha \nabla_{\beta'} G}{m^2},$$

где G – пропагатор скалярного поля. Для частицы, описываемой уравнением Дирака, получим:

$$\frac{1}{i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-m}=\frac{1}{\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right)\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-m\right)}\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right)=$$

$$=-\frac{1}{\nabla^{2}+R/4+m^{2}}\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right),$$

где R – скалярная кривизна.

Из последнего операторного тождества видна связь между пропагаторами для уравнения Дирака и обобщенного уравнения Клейна – Гордона (1).

Вычисление интегралов по путям вида (2) – достаточно сложная задача, точные аналитические выражения можно получить только в исключительных случаях [5, 6]. Поэтому особое значение приобретают приближенные методы, например методы, разработанные в квантовой теории поля и основанные на выделении в лагранжиане квадратичных членов по полевым переменным и применении производящего функционала $Z(J(s))$ [1, 9]

$$Z(J(s))=\int D\{\xi(s)\}\ \exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}\ ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\ \xi(s)\ ds\right),$$

$$\xi(0)=\xi(T)=0. \qquad (3)$$

Эта величина обладает двумя важными свойствами. Во-первых, интеграл по путям вида (3) вычисляется точно

$$Z(J(s))=\frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ i\ T}}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}J(s')\ \ G(s',\ s'')J(s'')\ \ ds'\ \ ds''\right\},$$

где $G(s,\ s_0)$ – решение уравнения $\frac{d^2\xi}{d\ s^2}=\delta(s-s_0)$ с граничными условиями $\xi(0)=\xi(T)=0$,

$$G(s,\ s_0)=s\left(\frac{s_0}{T}-1\right)+\ (s-s_0)\ \ \Theta(s-s_0)=\begin{cases} s\left(\frac{s_0}{T}-1\right), & s<s_0,\\ s_0\left(\frac{s}{T}-1\right), & s_0<s.\end{cases}$$

Во-вторых, производящий функционал позволяет вычислять и более сложные функционалы [4, 9]:

$$\int D\{\xi(s)\}\xi(s)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$

$$=\lim_{J\to 0}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial J(s)}\int D\{\xi(s)\}\exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}\ \ ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\xi(s)ds\right),$$

$$\int D\{\xi(s)\}F\left(\xi(s)\right)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$

$$=\lim_{J\to 0}F\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial J(s)}\right)\int D\{\xi(s)\}\exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\xi(s)ds\right).$$

В качестве примера вычислим «среднее» от функционала $\int_{0}^{T}\xi^{2}(s)\ \ ds$:

$$\int D\{\xi(s)\}\left(\int_{0}^{T}\xi^{2}(s)\ \ ds\right)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$

$$= \lim_{J\to 0}\int_0^T ds \left(\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial J(s)} \right)^2 \int D\{\xi(s)\} \exp\left(i \int_0^T \left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 ds \right) + i\int_0^T J(s)\xi(s) ds \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \int_0^T (-iG(s,s)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \int_0^T \left(-is\left(\frac{s}{T} - 1 \right) \right) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \frac{iT^2}{6}.$$

Такого рода функционалы удобны при приближенном вычислении интегралов по путям. Условие $\xi(0)=\xi(T)=0$ возникает, если рассматривается действие на классической траектории, лагранжиан разлагается в ряд по отклонению $\xi(s)$ от классической траектории. Начальная и конечная точки при этом остаются фиксированными. В искривленном пространстве этот подход необходимо несколько модифицировать, для чего:

1) проводим геодезическую, соединяющую начальную и конечную точки $x_0^\mu(s)$:

$$\frac{D}{ds}\frac{dx_0^\mu(s)}{ds} = \frac{D}{ds}u^\mu(s) = 0;$$

2) параллельно переносим вдоль геодезической ортонормированный базис:

$$\frac{D}{ds}\mathbf{e}^\alpha(s) = 0, \quad \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \eta^{\alpha\beta},$$

где $\eta^{\alpha\beta}$ – тензор Минковского;

3) в параллельно переносимом базисе задаем вектор с координатами ξ^α и переносим его параллельно самому себе с каноническим ξ-параметром, изменяющимся от 0 до 1:

$$\frac{D\xi^\alpha}{d\xi} = 0.$$

В результате имеем координатную систему $\{\xi^\alpha\}$, у которой начало координат перемещается по мере изменения параметра s. В этой координатной системе получаем разложение лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}u^\alpha u_\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha\xi^\beta u^\gamma\xi^\delta + \cdots$$

$$+V_{QP}(x_0(s)) + \xi^\alpha\nabla_\alpha V_{QP}(x_0(s)) + \frac{1}{2}\xi^\alpha\xi^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta V_{QP}(x_0(s)) + \cdots$$

и оператора параллельного переноса

$$\mathbf{P}^A{}_{B'}(x(s)) = \mathbf{P}^A{}_{B'}(x_0(s)) + \int_0^T \mathbf{P}^A{}_{C''}(x_0(s)) R^{C''}{}_{D''\alpha\beta}\mathbf{P}^{D''}{}_{B'}\xi^\alpha u^\beta \, ds + \cdots$$

Учитывая, что в параллельно переносимом базисе $\mathbf{P}^A{}_{B'} = \delta^A{}_{B'}$, находим:

$$\mathbf{P}^A{}_B = \delta^A{}_B + \int_0^T R^A{}_{B\alpha\beta}\xi^\alpha u^\beta ds + \int_0^T ds \int_0^s ds' R^A{}_{C\alpha\beta}(x(s)) R^C{}_{D\gamma\delta}(x(s'))\xi^\alpha u^\beta \xi^\gamma u^\delta +$$

$$+\int_0^T \nabla_\alpha R^A{}_{B\mu\nu}\xi^\alpha\xi^\mu u^\nu ds + \cdots$$

Если ограничиться случаем искривленного пространства ($R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \neq 0$) в окрестности источников гравитационного поля ($T^\alpha_\beta = 0 \Rightarrow R^\alpha_\beta = 0$), то с точностью до второго порядка для пропагатора получим:

$$G^{A''}{}_{B'}(x'',x')\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-i\,m^2T/2}\,dT}{(2\pi iT)^2}e^{-i\,\sigma(x'',x')/T}\mathbf{P}^{A''}{}_{C'}(x_0(s))\times$$

$$\times\left(\delta^{C'}_{B'}+\int_0^T\nabla^\mu R^{C'}{}_{B'\mu\nu}(s)u^\nu s\left(1-\frac{s}{T}\right)ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T ds\int_0^T ds' R^{C'}{}_{D}{}^{\mu}{}_{\nu}(s)u^\nu R^{D'}{}_{B'\mu\lambda}(s')u^\lambda\left(-s\left(1-\frac{s'}{T}\right)+\Theta(s-s')(s-s')\right)\right)+\cdots \quad (4)$$

Слагаемое с $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\alpha u^\beta\xi^\gamma u^\delta$ приводит к интегралу от $R_{\beta\delta}u^\beta u^\delta$ $G(s,s)$, этот интеграл обращается в нуль в силу $R^\alpha_\beta=0$. Здесь учитывалось, что квантовый потенциал, пропорциональный $R=R^\alpha_\alpha$, в данном случае также равен нулю, $\sigma(x,\ x')$ – мировая функция Синга [8], которая выражается через геодезическое расстояние $d(x,x')$ между точками: $\sigma(x,\ x')=\frac{d^2(x,\ x')}{2}$,

$$d(x,x')=\int\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}ds\,.$$

Для проверки точности предлагаемого приближенного метода можно сравнить получаемые с его помощью результаты с хорошо исследованным точным решением. Так, на псевдосфере с метрикой

$$dl^2=d\chi^2+\alpha^2\sinh^2\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)\left(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)\ d\varphi^2\right)$$

лагранжиан имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu+\frac{R}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu-\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Отметим также соотношения:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{1}{\alpha^2}\left(g_{\alpha\gamma}\ g_{\beta\delta}\ -\ g_{\alpha\delta}\ g_{\beta\gamma}\right),\ R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{\alpha^2}g_{\alpha\beta},\ R=-\frac{6}{\alpha^2},\ \nabla_\mu R=0\,.$$

Пропагатор для скалярной частицы имеет сравнительно простой вид. В работах [7, 10] рассмотрен случай с α=1:

$$G(x'',\ x';\ T)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\frac{d(x'',\ x')}{\sinh\left(d(x'',\ x')\right)}\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2}\right),$$

который линейными преобразованиями $\chi\to\alpha\ \chi,\ ds\to\alpha^2 ds$ приводится к виду

$$G(x'',x';T)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\frac{d(x'',\ x')}{\alpha\sinh\left(\frac{d(x'',\ x')}{\alpha}\right)}\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right).\quad (17)$$

В результате при приближенном вычислении с точностью до членов второго порядка получаем

$$G(x'',\ x';\ T)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times\int D\{\xi(s)\}\exp\left\{i\int\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu}{2}ds\right\}\times$$

$$\times\left(1-\frac{i}{2}\int R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha\xi^\beta u^\gamma\xi^\delta ds+\cdots\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}u^{\gamma}\eta^{\beta\delta}\frac{T^2}{6}\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}\bar{R}_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}\frac{T^2}{6}\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1-\frac{u^2T^2}{6\alpha^2}\right)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\left(1-\frac{d^2(x'',\ x')}{6\alpha^2}\right),\quad(18)$$

где $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,1,1)$, $d^2=T^2u^2$.

Сравнивая (17) и (18), находим, что при больших значениях α (соответствует малой кривизне $\sim 1/\alpha^2$) оба результата совпадают с точностью до $O(d/\alpha)^3$:

$$\frac{d}{\alpha\sinh(d/\alpha)}\approx\frac{d}{d+\frac{1}{6}\frac{d^3}{\alpha^2}+\frac{1}{120}\frac{d^5}{\alpha^4}}\approx 1-\frac{1}{6}\frac{d^2}{\alpha^2}+\cdots$$

Таким образом, предлагаемый приближенный метод вычислений может использоваться в том случае, когда

$$\int R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}G(s,s)ds\sim\frac{u'^2}{r^2}\ll 1,$$

где r – характерный радиус кривизны пространства.

Остальные интегралы, фигурирующие в разложении (4), имеют такой же или более высокий порядок малости.

В этой ситуации использованный метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими подходами. Во-первых, он основан на явно ковариантном разложении лагранжиана и параллельного переноса, поэтому здесь можно отделить физические эффекты от координатных (ср. [11]). Во-вторых, в слабом поле он пригоден не только для бесконечно малых ([3]), но и для конечных геодезических расстояний.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф99-178).

1. Биррелл Н., Девис П. Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984.
2. Dewitt B.S. // Rev. Mod. Phys. 1957. Vol. 29. P. 377.
3. Девитт Брайс С. Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
4. Менский М.Б. Группа путей. М., 1983.
5. Гринчук А.В. // Гравитация и электромагнетизм. М., 1998. Вып. 6. С. 63.
6. Grinchuk A.V., Ushakov E.A. // Gravitation and Cosmology. 1999. Vol. 5. P. 173.
7. Grosche C., Steiner F. Handbook of Feynman Path Integrals. Berlin, 1998.
8. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С. 64.
9. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля: В 2 т. М., 1984. Т. 2.
10. Grosche C. Path Integration and Separation of Variables In Spaces of Constant Curvature In Two and Three Dimensions. Preprint DESY 93–141. 1993.
11. Bekenstein J. D., Parker L. // Physical Review. 1981. Vol. 23D. P. 2850.

Поступила в редакцию 24.11.2001.

Александр Викторович Гринчук – преподаватель кафедры технологий образования РИВШ БГУ.

Евгений Алексеевич Ушаков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.

УДК 537. 311

А.В. ЛЕОНТЬЕВ

МОДЕРНИЗАЦИЯ TRIM-АЛГОРИТМА МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

The problem questions of the ion beam masking in microelectronics are considered. Is shown, that the decision of the put task consists of two parts: a choice of optimum thickness of a protective mask and control arising at the subsequent.

Метод Монте-Карло (МК) является одним из основных при расчете траекторных параметров (R_p, ΔR_p, γ, β) ускоренных ионов, внедряемых в аморфные материалы [1]. Он позволяет решать задачи, связанные с ионным перемешиванием [2], расчетом физического распыления мишени ионным пучком [3], и незаменим при моделировании ионного легирования многослойных мишеней. Наиболее известной и часто применяемой на практике численной схемой реализации метода МК является TRIM-алгоритм [4, 5], который имеет ряд неоспоримых преимуществ перед другими алгоритмами реализации процедуры МК. Во-первых, для описания неупругих потерь энергии движущихся ионов положена наиболее корректная и легко реализуемая на практике модель Брандта – Китагавы [6, 7]. Во-вторых, “магическая” формула дает возможность с удовлетворительной точностью быстро рассчитать угол рассеяния в системе центра масс (СЦМ), необходимый для вычисления энергии, переданной в упругих столкновениях. В-третьих, TRIM-алгоритм позволяет достаточно просто менять физические модели, используемые для описания взаимодействия движущегося иона с атомами мишени. Вместе с тем имеются некоторые ограничения TRIM-схемы. В первую очередь следует отметить, что только универсальный потенциал ион-атомного взаимодействия используется в последних версиях программ. Некоторая возможность работы с другими потенциалами была предусмотрена только в ее ранних версиях [5]. Важным моментом, который может также повлиять на результаты вычисления траекторных параметров, является учет влияния неупругих потерь энергии на угол рассеяния [8, 9]. Данный аспект вычислений в известных версиях TRIM-программ не отражен, а имеющиеся в литературе данные весьма противоречивы.

Целью настоящей работы является разработка программного обеспечения, позволяющего использовать любой потенциал ион-атомного взаимодействия для описания упругих столкновений, а также выяснение влияния корреляционных эффектов на угол рассеяния в СЦМ.

Математическая модель и результаты расчетов

Для описания процесса взаимодействия ускоренных ионов с аморфными мишенями выбран алгоритм метода МК, реализованный в программе TREK-1 [10–12], которая не выходит за рамки бинарного приближения, но дает возможность расширить диапазон физических приближений для описания ион-атомных столкновений. Для работы программного комплекса TREK-1 с любым потенциалом ион-атомного взаимодействия необходимо отказаться от расчета угла рассеяния в СЦМ Θ_c по “магической” формуле. Основная трудность заключается в том, что необходимо выбрать достаточно быстрый алгоритм вычисления известного [13] классического интеграла рассеяния (КИР). Это связано с тем, что при моделировании методом МК ионной имплантации заряженной частицы средней массы с энергией в несколько сот электронвольт при наборе числа историй N=10^4 и средним числом столкновений до остановки $N^* = 10^3$ необходимо вычислить до 10^7 КИР. При работе в режиме полного расчета каскадов ион-атомных столкновений количество вычисляемых КИР увеличится на несколько порядков. Поэтому выбор метода расчета КИР для моделирования ионного легирования методом МК достаточно актуален, так как при сохранении хорошей точности расчета Θ_c необходим быстрый алгоритм вычислений. Выражение для классического интеграла рассеяния имеет вид:

$$\Theta_c = \pi - 2\beta \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx / x^2 , \tag{1}$$

где $f(x) = \left(1 - \frac{\Phi(x)}{x\varepsilon} - \left(\frac{\beta}{x}\right)^2\right)^{-1/2}$, $\beta = b/a$, $x = r/a$, b – прицельный параметр, a – длина экранирования, ε – приведенная энергия, $\Phi(x)$ – функция экранирования. Данный интеграл берется аналитически только для некоторых форм представления потенциала. Прямое вычисление (1) в программах МК-моделирования не применялось из-за сингулярности на нижнем пределе, так как величина $x_0 = r_0 / a$ определяется путем решения трансцендентного уравнения: $[f(x_0)]^{-2} = 0$. Для расчета мы адаптировали метод вычисления интегралов типа (1), предложенный в [14], к процедуре метода МК. Заменой переменных $x = x_0/\cos(\pi z/2)$ интеграл (1) приводится к виду [14]:

$$\Theta_c = \pi\left(1 - \frac{\beta\alpha(\varepsilon, \beta)}{x_0}\right), \tag{2}$$

где $\alpha(\varepsilon, \beta)$ дается выражением:

$$\alpha(\varepsilon, \beta) = \int_0^1 \sin(\pi z / 2) f\left(\frac{x_0}{\cos(\pi z / 2)}\right) dz. \tag{3}$$

На основе приведенных формул нетрудно произвести вычисления, для чего необходимо выбрать соответствующую рассматриваемой задаче функцию экранирования $\Phi(x)$. Далее следует определить расстояние наибольшего сближения x_0.

В качестве начального приближения брали $x_0 = \frac{1}{2\varepsilon} + \left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 + \beta^2\right]^{1/2}$, что соответствует неэкранированному кулоновскому потенциалу. Для нахождения x_0 использовали программу ZEROIN [15], в которой реализован один из лучших алгоритмов нахождения действительного нуля функции.

Рассмотренный подход реализован с помощью пакета Borland Delphi 5.5. Программа ANGLE тщательно тестировалась. В табл. 1 приведены результаты расчета x_0 из работы [14] и полученного нами алгоритма (колонка 4). Результаты расчета Θ_c по программе ANGLE для разных потенциалов ион-атомных взаимодействий совместно с данными [14] приведены в табл. 2. В последней колонке даны значения Θ_c, полученные с использованием “магической” формулы. Как следует из табл. 2, данный алгоритм дает значения Θ_c, близкие к “магической” формуле, но позволяет работать с широким кругом потенциалов ион-атомных взаимодействий. Сама подпрограмма расчета Θ_c (ANGLE) интегрирована в TREK-1.

Таблица 1

Значения расстояния наибольшего сближения x_0, рассчитанные по данным [11] и настоящей работы для различных значений приведенной энергии ε и прицельного параметра b

ε	b	x_0 [14]	x_0
1E–3	5E–1	11,416	11,415
1E–3	2E+1	20,391	20,388
1E–1	2E–1	2,209	2,209
1E–1	8E+0	8,152	8,153
1E+1	2,5E–2	0,095	0,094
1E+1	1E+0	1,021	1,022

Таблица 2

Значения угла рассеяния θ_c, рассчитанные по программе ANGLE для ряда значений приведенной энергии и прицельного параметра

ε	b	$\theta_c^{мол}$, рад	$\theta_c^{унив}$, рад	$\theta_c^{C\text{-}Kr}$, рад	$\theta_c^{маг}$, рад
1E–3	5E+01	3,020	3,050	3,020	2,990
1E–3	2E+01	0,120	0,140	0,100	0,100
1E–1	2E–01	2,860	2,940	2,860	2,860
1E–1	8E+00	0,081	0,082	0,062	0,062
1E+1	2,5E–2	2,150	2,300	2,170	2,170
1E+1	1E+00	0,056	0,056	0,059	0,059

Разработанный в [16] критерий достаточности историй подвергнут нами проверке в связи с огромным повышением производительности ПЭВМ. Ранее [16] мы анализировали зависимости первых четырех моментов функции распределения пробегов от числа историй N. Значение N не превышало (3–5)×10^4. Теперь мы увеличили N до 10^5–10^6. Результаты расчетов показали, что выводы [16] в основном верны. Только при моделировании пространственного распределения легких ионов (Z_1<10) средней энергии (100 кэВ <E< 500 кэВ) при N<10^5 зависимости асимметрии $\gamma(N)$ и эксцесса $\beta(N)$ носят осциллирующий характер. При N>10^6 осцилляции этих величин не превышают 1 %.

В табл. 3 приведены расчеты по программе TREK-1 траекторных параметров (R_p, ΔR_p), числа созданных радиационных дефектов $N_в$ при имплантации ряда ионов в ПММА (полиметилметакрилат – $C_5H_8O_2$) в случае использования в качестве потенциалов ион-атомного взаимодействия универсального, Мольеровского и C-Kr. Результаты расчетов показывают, что широко рекламируемый авторами [5] универсальный потенциал не имеет каких-либо преимуществ перед C-Kr-потенциалом при моделировании имплантации ионов различных масс в легкие мишени. Как и ожидалось, для легких ионов все три потенциала дают практически одни и те же значения траекторных параметров. Для более тяжелых ионов отличие имеет место в области доминирования упругих потерь энергий (до 21 %), и с ростом энергии внедряемых частиц разница быстро уменьшается.

Вопрос о влиянии неупругих потерь энергии на угол рассеяния θ_c и соответственно на рассчитываемые потери энергии и траекторные параметры внедряемых в твердые тела ускоренных частиц [8, 9, 17] можно рассматривать следующим образом.

1. Траекторию рассеиваемой частицы следует разделить на два участка: первый – до точки максимального сближения r_0, второй – от r_0 до ∞.

2. На первом участке потенциал ион-атомного взаимодействия есть экранированный кулоновский $V_{кул}$. В точке r_0 потенциал меняется скачком в связи с возбуждением атома мишени за счет локальных неупругих потерь энергии (Q), которые необходимо представить явно зависящими от прицельного параметра $Q(b)$.

3. При этом необходимо уточнить два основных момента. Во-первых, задать аналитический вид $Q(b)$. На наш взгляд, наиболее правильно применить в данном случае теорию Фирсова [18] для расчета локальных неупругих потерь энергии, а не формулу Оуэна и Робинсона [19], используемую в ряде работ [20, 21]. Теория Фирсова хорощо описывает основные закономерности торможения тяжелых ионов с низкими скоростями, для которых

учет рассматриваемых корреляционных эффектов особенно важен. Формула Оуэна и Робинсона наилучшим образом описывает передачу энергии легкими ионами, для которых данные эффекты несущественны. Во-вторых, необходимо задать аналитический вид потенциала ион-атомного взаимодействия при $r>r_0$. В общем виде мы остановились на выражении $V^{\text{возб}} = \lambda V_{\text{ZBL}}+Q(b)$, где $\lambda=1-Q(b)/V_{\text{ZBL}}(r_0)$ [21], в котором, в отличие от оригинала, мы можем использовать любой невозбужденный потенциал в качестве исходного. Величина $Q(b)$ рассчитывалась в [21] по формуле Оуэна и Робинсона:

$$Q_e(b) = \frac{0{,}045kE^{1/2}}{\pi a^2}\exp\left(-0{,}3\frac{r_0}{a}\right). \qquad (4)$$

Таблица 3

Значения траекторных параметров некоторых ионов, рассчитанные с использованием универсального, Мольеровского и C·Kr потенциалов

Ион	Энергия, кэВ	$[dE/dx]_n/[dE/dx]_{el}$	Универсальный			Мольера			C-Kr			γ	β	δ, %
			R_p, нм	ΔR_p, нм	$N_в$	R_p, нм	ΔR_p, нм	$N_в$	R_p, нм	ΔR_p, нм	$N_в$			
$^{1}H^{+}$	100	–	1191	53,6	8,8	1192	53,6	8,6	1192	53,3	8,7	–5,9	64,3	–
	200	–	2321	60,1	9,8	2321	66,4	9,8	2321	59.8	9,8	–6,5	78,1	–
	300	–	3699	84	10,7	3699	83,1	10,7	3699	93,2	10,7	–17	490,7	–
$^{4}He^{+}$	100	–	835	85,1	84,6	839	84,7	83,4	836	85,1	84,3	–2,3	13,0	–
	200	–	1293	91,7	90,9	1292	95,9	91,1	1293	92.9	91	–2,7	18,5	–
	300	–	1656	94,7	94,5	1657	95,3	93,9	1655	96	94,6	–2,8	20,1	–
$^{10}Ne^{+}$	50	0,84	119	29,5	313	117	28,3	317	119	29,0	315	–0,64	3,3	1,6
	100	0,46	238	48,9	485	237	47,7	491	238	48,5	488	–0,93	4,1	–
	200	0,25	471	76,4	698	471	76,5	701	471	76,9	703	–1,35	5,8	–
$^{40}Ar^{+}$	50	1,83	67,5	16,6	382	63,3	15,7	398	66,5	16,3	387	-0,28	2,8	6,2
	100	1,16	129,3	28,8	642	124,2	27,8	664	128,1	28,8	648	–0,44	2,9	3,9
	200	0,68	253,5	49,1	1022	249,2	48,0	1050	252,9	48,3	1033	–0,66	3,4	1,7
^{84}Kr	25	4,42	32,4	7,3	290	25,9	5,8	302	31,2	6,8	294	0,19	2,9	20
	50	3,53	53,7	12,0	531	45,1	10,1	554	51,9	11,5	539	0,14	2,8	16
	100	2,80	93,4	20,5	944	82,3	18,5	981	91,2	19,7	959	0,09	2,8	12
	200	1,97	170,2	34,9	1624	157,5	33,6	1684	167,9	34,4	1650	–0,05	2,6	7,5
$^{131}Xe^{+}$	25	5,51	26,4	4,5	261	20,8	3,5	282	25,6	4,2	266	0,14	2,9	21,2
	50	4,90	41,2	7,1	481	33,5	5,7	517	51,9	11,5	539	0,12	2,9	18,7
	100	4,10	66,3	11,2	858	56,2	9,7	918	64,4	10,7	875	0,03	2,8	15,2
	200	3,20	111,2	18,0	1470	98,2	16,4	1566	108,4	17,3	1503	–0,07	2,8	11,7
$^{70}Ga^{+}$	25	4,03	33,8	8,2	287	27,7	6,9	299	32,7	7,8	291	0,14	2,8	18
	50	3,24	57,8	14,1	522	49,8	12,1	542	56,1	13,4	529	0,14	2,8	13,8
	100	2,38	103,5	24,5	921	93,4	22,3	954	101,3	23,6	935	0,04	2,7	9,8
	200	1,54	195,2	43,2	1573	182,8	41,1	1623	193,6	42,6	1599	–0,11	2,7	6,3
$^{115}In^{+}$	25	5,21	30,8	6,0	302	23,8	4,5	315	29,7	5,6	305	0,18	2,8	21,2
	50	4,57	48,9	9,6	558	39,3	7,7	583	47,3	9,1	566	0,17	2,9	19,6
	100	3,75	85,1	16,1	1006	68,4	13,7	1049	78,8	15,2	1023	0,16	2,9	17,6
	200	2,84	142,4	27,6	1764	125,2	24,7	1834	139,2	26,6	1796	0,07	2,8	12,0
$^{122}Sb^{+}$	25	5,31	30,7	5,8	303	23,8	4,4	316	29,7	5,5	306	0,20	3,0	22,4
	50	4,68	48,7	9,3	562	38,8	7,5	586	46,2	8,7	570	0,15	2,8	20,3
	100	3,86	80,5	15,5	1015	67,1	13,0	1058	77,5	14,8	1030	0,15	2,9	16,6
	200	2,87	139,8	26,5	1783	121,6	23,5	1853	135,8	25,6	1814	0,08	2,8	13,0

Формула (4) заменена нами в расчетах выражением (5) [16]:

$$Q(b) = \frac{0{,}35(Z_1+Z_2)^{5/3}\hbar v/a_0}{[1+0{,}16(Z_1+Z_2)^{1/3}b/a_0]^5}. \qquad (5)$$

4. Для расчета величины угла рассеяния использовали выражения, полученные в [21]:

$$\Theta(b) = \left[\frac{\Theta_1(\varepsilon,\, b)+\Theta_2(\varepsilon^*,\, b^*)}{2}\right], \qquad (6)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon\frac{\left[1-Q(b)/E_{\text{СЦМ}}\right]}{\lambda},\; b^* = \frac{b}{\sqrt{(1-Q(b)/E_{\text{СЦМ}})}}. \qquad (7)$$

Результаты вычислений траекторных параметров, проведенных по программе TREK-1 с учетом влияния локальных неупругих потерь энергии на угол рассеяния, показали слабое влияние модели локальных неупругих потерь энергии как на угол рассеяния, так и на расчетные величины R_p, ΔR_p для всех ионов (см. табл. 3), за исключением самых тяжелых, при E<50 кэВ. В дальнейшем схема учета корреляционных эффектов будет совершенствоваться, и п. 4 представленной схемы будет модифицирован.

Таким образом, разработанная программа позволяет использовать практически любой потенциал для расчета угла рассеяния в системе центра масс с хорошей точностью и приемлемым быстродействием, что расширяет возможности TRIM-алгоритма для описания упругих взаимодействий.

1. Biersack J.P., Haggmark L.G. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1980. Vol. 174. P. 257.

2. Posselt M. // Phys. Stat. Sol. (A). 1986. Vol. 94. P. 403.

3. Moller W., Eckstein W., Biersack J.P. // Comput. Phys. Commun. 1988. Vol. 51. P. 355.

4. Ziegler J.P., Manoyan J.M. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1988. Vol. B35. P. 215.

5. Ziegler J.P., Biersack J.P., Littmark U. Stopping and Ranges of Ions in Solids. Perg. Pr. New York, 1985.

6. Brandt W., Kitagawa M. // Phys. Rev. 1982. Vol. 25. № 9. P. 5631.

7. Mathar R.J., Posselt M. // Phys. Rev. (B). 1995. Vol. 51. № 1. P. 107.

8. Губарев А.А., Запороженко О.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 1996. Т. 60. № 4. С. 166.

9. Grande P.L., Schiwietz G. // Phys. Rev. (A). 1998. Vol. 58. № 5. C. 3796.

10. Леонтьев А.В., Нечаев С.В. // Взаимодействие излучений с твердым телом: Материалы III Междунар. конф.: В 2 ч. Мн., 1999. Ч. 2. С. 156.

11. Довнар С.В., Григорьев В.В., Камышан М.А. и др. // Взаимодействие излучений с твердым телом: Материалы IV Междунар. конф. Ми., 2001. С. 15.

12. Леонтьев А.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 15.

13. Комаров Ф.Ф., Комаров А.Ф. Физические процессы при ионной имплантации в твердые тела. Мн., 2001.

14. Marcus H., Mendenhall K., Robert A. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1991. Vol. B58. P. 11.

15. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980.

16. Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Коньшин И.В. // Вакуумная техника и технология. 1994. Т. 4. № 4. С. 45.

17. Kabachnik N.M. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1992. Vol. B69. P. 76.

18. Фирсов О.Б. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. № 7. С. 1517.

19. Oen O.S., Robinson M.T. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1976. Vol. 132. P. 647.

20. Взаимодействие заряженных частиц с твердым телом: Сб. / Под ред. А. Грас-Марти. М., 1994.

21. Behar M., Grande P.L., Amaral L. et al. // Phys. Rev. (B). 1990. Vol. 41. № 10. P. 6145.

Поступила в редакцию 15.02.2002.

Александр Викторович Леонтьев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники.

УДК 535.34+543.424+547.963

А.Е. ГЕРМАН

РЕЗОНАНСНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА ГРАНУЛЯРНЫМИ СЕРЕБРЯНЫМИ ПЛЕНКАМИ

This work presents the spectra of resonance absorption and mirror reflection of light of the granular silver films. The received results are considered in application of described silver films as substrates for the surface enhanced spectroscopy.

В последнее время возрос интерес к применению в качестве субстратов для спектроскопии гигантского комбинационного рассеяния (ГКР) и усиленной поверхностью флуоресценции (УПФ) [1] гранулярных пленок, полученных в результате вакуумного осаждения благородных металлов на диэлектрическую поверхность [2]. При наличии на поверхности пленки близких к сферической форме частиц наноразмерной величины может наблюдаться резонансное поглощение света при возбуждении плазмонных колебаний. В этом случае в области сфероидов создается усиленное поле, а по поверхности делокализовано более слабое поле. Резонансное возбуждение способно привести к значительному возрастанию напряженности локального поля вблизи шероховатостей поверхности, что приводит к сильному увеличению сечения ГКР, УПФ молекулами адсорбата [1]. Ранее нами были получены экспериментальные данные [3], связывающие оптические и морфологические свойства гранулярных пленок серебра (ГПС) с коэффициентом усиления ГКР и УПФ хромофоров, поглощающих свет в видимой области спектра. Настоящая работа посвящена исследованию спектров поглощения и отражения ГПС, а также выяснению связи интенсивности ГКР света молекулами адсорбата с условиями возбуждения поверхностных плазмонов.

ГПС были получены термическим напылением серебра в вакууме (вакуумный пост ВУП-5) на кварцевые подложки. Рабочее давление составляло не более 10^{-5} мм рт. ст. Полученные пленки подвергались ступенчатому отжигу с конечной температурой 340 °С [4, 5]. Нанесение исследуемого хромофора на поверхность ГПС проводилось вымачиванием подложки в течение 30 мин в водном растворе вещества (концентрация 10^{-5} М) с последующей двукратной промывкой дистиллированной водой и высушиванием на воздухе в наклонном положении.

Изображения поверхностей изучаемых пленок были получены с использованием атомно-силового микроскопа (АСМ) "NANOTECH P4-SPM". Спектры оптической плотности (ОП), зеркального отражения и пропускания регистрировались с помощью спектрофотометра Specord 200 (Jena Analytic). Спектры ГКР и УПФ были получены на автоматизированном спектрометре ДФС-52 (ЛОМО) при возбуждении излучением аргонового ионного лазера ILA-120 (Carl Zeiss Jena) с длиной волны 488 нм.

Оптические и морфологические свойства ГПС изучались ранее нами [4–6] и другими авторами [2, 7, 8]. Так, в [7] было показано, что спектры оптической плотности гранулярных пленок серебра зависят от состояния поляризации света и от угла его падения. Авторами установлено, что *p*-поляризованный свет способен возбуждать как плоскостные, так и внеплоскостные локализованные плазмоны; *s*-поляризованный свет – только плоскостные осцилляции. Проведенные нами аналогичные эксперименты полностью подтверждают данные литературы. Кроме этого, нами получены угловые зависимости коэффициента зеркального отражения ГПС в *s*- и *p*-поляризованном свете (рис. 1). Определено, что для *p*-поляризованного излучения коэффициент отражения уменьшается с увеличением угла падения (до 1,8 раза при изменении угла падения от 0 до 60°). Для *s*-поляризованного излучения коэффициент отражения монотонно растет с увеличением угла. Для спектров отражения, зарегистрированных в *p*-поляризованном свете, характерно наличие коротковолнового сдвига (до 12 нм) положения максимума отражения, увеличивающегося с возрастанием угла падения. Схожесть формы и положения максимумов ОП [7] и отражения пленок (см. рис. 1) позволяют говорить о значительном вкладе локализованных плазмонов в формирование спектров зеркального отражения.

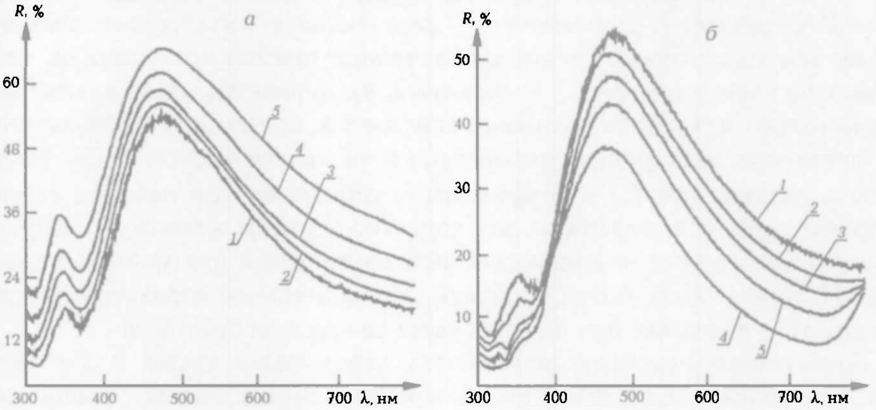


Рис. 1. Спектры зеркального отражения ГПС в (*а*) *s*- и (*б*) *p*-поляризованном свете.
Углы падения: *1* – 10°, *2* – 20, *3* – 30, *4* – 40, *5* – 52°

Проведено сравнение спектров пропускания, отражения и поглощения ГПС при падении света со стороны металлической пленки и подложки из кварцевого стекла. Спектры поглощения определялись вычитанием из спектра падающего света спектров пропускания и отражения пленок. Измеренная нами величина коэффициента диффузного отражения (3–5 %) для рассматриваемых пленок сравнима с погрешностью определения коэффициента зеркального отражения. На основе анализа экспериментальных данных сделан вывод, что спектры ОП тонких серебряных пленок определяются суммой поглощения зеркального, а не диффузного отражения, которым при анализе спектров пленок вблизи их максимума поглощения можно пренебречь.

Поглощение света в тонкой гранулярной пленке может быть описано с помощью диэлектрической постоянной $\varepsilon(\lambda)=\varepsilon_1(\lambda)+i\varepsilon_2(\lambda)$. Воспользуемся соотношениями Вольтерра [8], связывающими мнимую часть диэлектрической постоянной с энергетическими коэффициентами отражения и пропускания

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2(\lambda) &= \frac{n_2\lambda}{2\pi\ h}\frac{1-R-T}{T} = \frac{n_2\lambda}{2\pi}\frac{A}{h\,T} \\ \varepsilon_2(\lambda) &= \frac{n_0\lambda}{2\pi\ h}\frac{1-R'-T}{T} = \frac{n_2\lambda}{2\pi}\frac{A'}{h\,T} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где *T*, *R*, *A* – соответственно коэффициенты пропускания, отражения и поглощения при падении света со стороны пленки; (*R'*, *A'* – коэффициенты отражения и поглощения при падении света со стороны подложки; n_2 – коэффициент преломления подложки; h – толщина пленки). Из уравнений (1) следует, что

$$A'=n_2A. \quad (2)$$

Обнаружено, что коэффициент зеркального отражения ГПС (в максимуме) при падении света со стороны серебряной пленки в 1,4–1,6 раза превосходит значение данного параметра для случая падения света со стороны подложки (рис. 2 *а*). Спектры пропускания при падении света со стороны пленки и подложки практически полностью идентичны в широком диапазоне углов падения. Определенные на основании экспериментальных данных спектры поглощения ГПС при падении света со стороны подложки (рис. 2 *б*; спектры *1*, *2*) имеют в ≈1,5 раза большую интенсивность в максимуме, чем аналогичные спектры, полученные при падении света на металлическую пленку (см. рис. 2 *б*; спектры *3*, *4*). Данная закономерность характерна только для длинноволнового максимума, связанного с возбуждением коллективных электронных резонансов в плоскости подложки [1]. Наблюдаемая разница (≈4 %) в коэффициенте отражения при падении света со стороны пленки и подложки для коротковолнового максимума, обусловленного возбуждением внеплоскостной компоненты плазмонных резонансов [1], может объясняться наличием дополнительной отражающей границы воздух – подложка при падении света со стороны субстрата.

Качественно подобная зависимость наблюдается также и для неотожженных пленок. Соотношения (1) справедливы для пленок с толщиной h, значительно меньшей λ. С увеличением толщины пленки коэффициенты отражения, измеренные со стороны пленки и подложки, сближаются, стремясь к величине, характерной для толстых серебряных пленок. Это свидетельствует о существенной зависимости коэффициента зеркального отражения света от возбуждения плазменных осцилляций на шероховатой поверхности. При падении света на металлическую поверхность со стороны более плотной среды (подложки) создаются условия для увеличения поглощения света пленкой и улучшения условий возбуждения поверхностных плазмонов падающей световой волной. Кроме этого, учитывая разницу в коэффициентах преломления воздуха и материала подложки, падающее излучение входит в металл под большим углом со стороны подложки, чем со стороны воздуха, что также приводит к усилению возбуждения коллективных электронных резонансов.

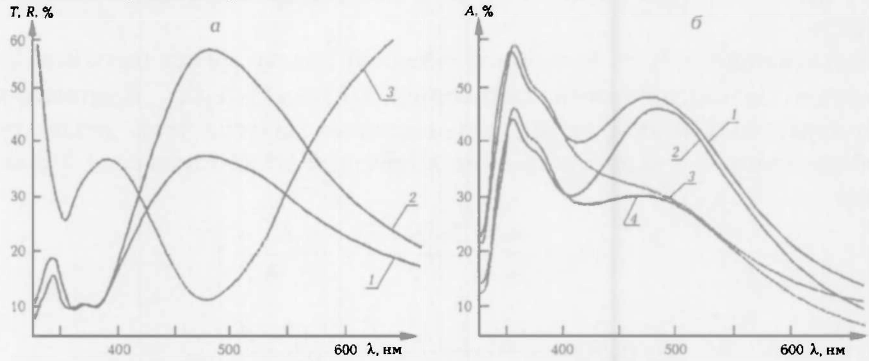


Рис. 2. Спектры отражения (*1*, *2*) и пропускания (*3*) ГПС, полученные при падении неполяризованного света со стороны подложки (*1*) и пленки (*2*) под углом 45° (*а*). Спектры пропускания ГПС при углах падения света 45° (*1*, *3*) и 20° (*2*, *4*) со стороны подложки (*1*, *2*) и пленки (*3*, *4*) (*б*)

На рис. 3 *а* представлены спектры ГКР оксазина О-17М, адсорбированного на поверхности ГПС при возбуждении *s*- и *p*-поляризованным светом, а также зависимости интенсивности ГКР (полоса 1493 см$^{-1}$) $I_{ГКР}$ от угла падения φ возбуждающего излучения (рис. 3 *б*). Подобные результаты получены и для других окрашенных хромофоров, адсорбированных на аналогичных субстратах. Обнаружено, что с увеличением угла падения интенсивность комбинационного рассеяния света молекулами адсорбата возрастает, причем для *p*-поляризованного света этот эффект выражен гораздо сильнее. При угле падения, отличном от нормального, как *p*-, так и *s*-поляризованное излучение может вызвать усиление ГКР, связанное с резонансными эффектами. Это может объясняться наличием как для *p*-, так и для *s*-поляризованного излучения компонент электрического поля, нормальных к некоторым частям островков на поверхности ГПС.

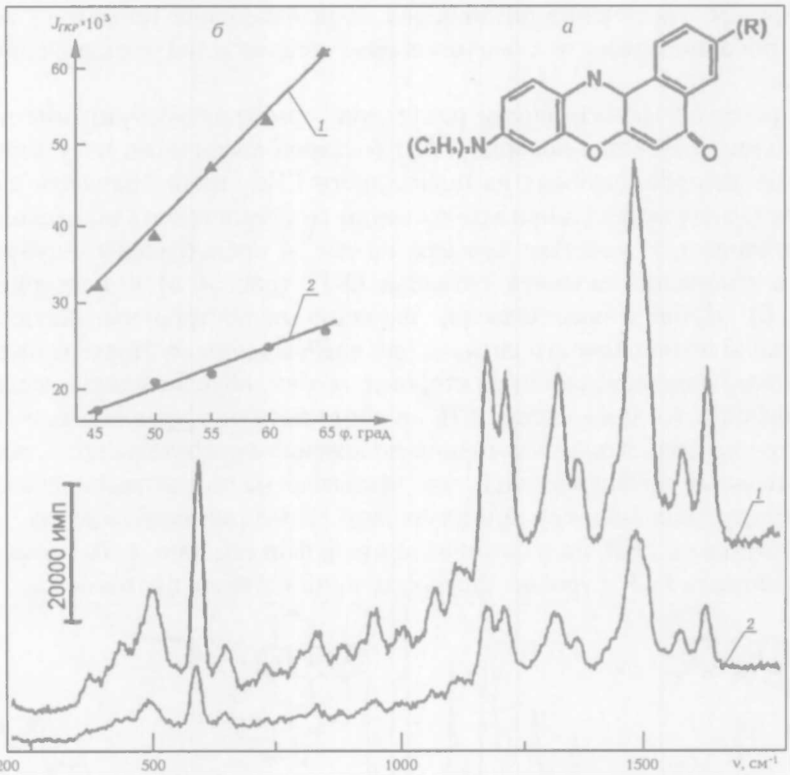


Рис. 3. Спектры ГКР оксазина О-17М, адсорбированного на ГПС при возбуждении (*1*) *p*- и (*2*) *s*-поляризованным светом (*а*). Зависимость интенсивности ГКР от угла падения возбуждающего излучения (*б*)

Если интенсивность отраженного от пленки луча минимальна, то это соответствует случаю оптимального возбуждения поверхностных плазмонов. Таким образом, полученные для *p*-поляризованного света угловые зависимости интенсивности ГКР (см. рис. 3 *б*) и коэффициента отражения (см. рис. 1 *б*) серебряных пленок находятся в полном соответствии друг с другом. Для *s*-поляризованного излучения с увеличением угла падения коэффициент отражения возрастает (см. рис. 1 *а*). Некоторое повышение при этом интенсивности ГКР молекул, адсорбированных на поверхности ГПС (см. рис. 3 *б*), можно объяснить увеличением эффективной площади взаимодействия лазерного излучения с поверхностью островков. Представленные результаты являются прямым доказательством ведущего участия в ГКР и УПФ процессов резонансного усиления падающего, излученного и рассеянного света локализованными плазмонами.

Известно, что интенсивность ГКР пропорциональна произведению интенсивностей падающего и рассеянного света и может быть определена через коэффициенты поглощения субстрата, как [1]:

$$I_{ГКР} \approx [\varepsilon(\lambda)_L]^2 \lambda_L A_L{}^2 [\varepsilon(\lambda)_{st}]^2 \lambda_{st} A_{st}{}^2 / \varepsilon_2(\lambda)_L \varepsilon_2(\lambda)_{st}, \quad (3)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость серебра, ε_2 – мнимая часть ε, A – коэффициент поглощения серебряной пленки. Индекс L относится к величине, измеренной на частоте возбуждения, индекс st – на стоксовой частоте.

Как следует из формулы (3), интенсивность комбинационного рассеяния молекул адсорбата пропорциональна квадрату коэффициента поглощения островковой пленки на длине волны возбуждения и стоксовой частоте. Таким образом, увеличение поглощения из-за изменения геометрии возбуждения способно привести к значительному возрастанию уровня усиленного сигнала.

Для проверки эффективности различной геометрии возбуждения при исследовании усиленных поверхностью спектров вторичного излучения хромофоров, адсорбированных на поверхности ГПС, нами получены спектры ГКР некоторых молекул при возбуждении со стороны металлической пленки и подложки. В качестве примера на рис. 4 представлены спектры вторичного излучения молекул оксазина О-17 (рис. 4 *а*) и доксорубицина (рис. 4 *б*). Приведенные спектры наглядно иллюстрируют значительное возрастание интенсивности сигнала при возбуждении со стороны подложки в сравнении с возбуждением со стороны пленки, обусловленное увеличением коэффициента поглощения ГПС в соответствии с уравнениями (2), (3). При этом не происходит изменения положения колебательных полос и их относительных интенсивностей, что указывает на тождественность состояний исследуемых молекул при различной геометрии возбуждения. Усиливается не только ГКР, но и флуоресцентный фон (см. рис. 4 *б*), а отношение уровня сигнала ГКР к уровню флуоресценции остается постоянным.

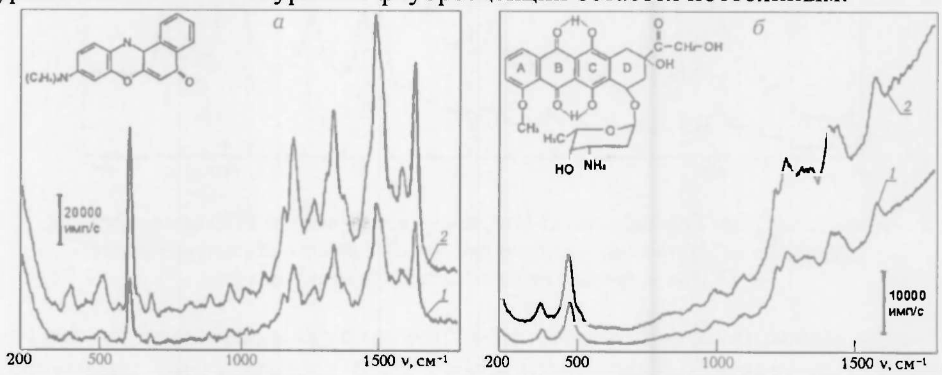


Рис. 4. Спектры вторичного излучения оксазина О-17 (*а*) и доксорубицина (*б*), адсорбированных на поверхности ГПС при падении возбуждающего излучения со стороны пленки (*1*), со стороны подложки (*2*)

Таким образом, коэффициент зеркального отражения света островковыми металлическими пленками зависит от состояния поляризации падающей световой волны, уменьшаясь с увеличением угла падения для *p*-поляризованного света и увеличиваясь для случая *s*-поляризации. Спектры оптической плотности ГПС определяются спектрами поглощения и зеркального отражения, роль диффузного отражения в формировании спектров ОП невелика.

Преимущественный вклад в усиление ГКР света молекулами адсорбата дают сильные поля, возникающие вследствие индуцированного поверхностной шероховатостью возбуждения поверхностных плазмонов падающими фотонами. Металлические островки при этом являются "резонансными усилителями" для падающего и рассеянного излучений. Наибольшее усиление достигается при возбуждении экспериментальной системы *p*-поляризованным светом при больших углах падения. Применение возбуждения экспериментальной системы со стороны прозрачного субстрата, оптически более плотного в сравнении с воздухом, позволяет получить дополнительное усиление спектров вторичного излучения молекул, адсорбированных на шероховатой поверхности тонкой металлической пленки, вследствие улучшения условий возбуждения поверхностных плазмонов.

1. Гигантское комбинационное рассеяние / Под ред. Р. Ченга, Т. Фуртака. М., 1984.
2. Schlegel V.L., Cotton T.M. // Anal. Chem. 1991. Vol. 63. P. 241.
3. Strekal N., German A., Gachko G. et al. // J. Mol. Str. 2001. Vol. 563-564. P. 183.
4. Стрекаль Н.Д., Гачко Г.А., Василюк Г.Т. и др. // Наноструктурные материалы. Получение и свойства: Сб. докл. М., 2000. С. 66.
5. Василюк Г.Т., Воронич В.Е., Герман А.Е. и др. // Сборник докладов III Белорусского семинара по сканирующей зондовой микроскопии. Гродно, 1998. С. 28.
6. Гачко Г.А., Герман А.Е., Василюк Г.Т. // Низкоразмерные системы. М., 1999. С. 32.
7. Feofanov A., Ianoul A., Kryukov E. et al. // Anal. Chem. 1997. Vol. 69. P. 3731.
8. Шкляревский И.Н., Корнеева Т.И. // Оптика и спектроскопия. 1968. Т. 24. № 5. С. 744.

Поступила в редакцию 12.06.2001.

Андрей Евгеньевич Герман – преподаватель кафедры общей физики ГРГУ им. Я. Купалы.

УДК 541.423

К.И. ЧЕРВЯКОВСКИЙ

ИЗУЧЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСТУПЛЕНИЯ ПРИМЕСЕЙ В ПЛАЗМУ ДУГИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ИЗ КОРОЛЬКОВ СЕРЕБРА МАЛОЙ МАССЫ

The volatilization curves for some impurities from small-weight silver samples were obtained and explained. The influence of silver erosion rate on the curve form was established.

При спектральном анализе металлов, сплавов в электрической дуге и искре в поверхностных слоях пробы могут происходить значительные изменения их химического и фазового состава. Эрозию сопровождает сложный комплекс процессов окисления, испарения и диффузии. Итоговая скорость поступления компонентов сплава в плазму разряда, как и во всяком сложном процессе, состоящем из более простых последовательных стадий, определяется скоростью самой медленной стадии.

Попытки связать составы излучающего облака и исследуемого образца, а также выяснить, какой фактор определяет скорость поступления примеси, предпринимались неоднократно [1–9]. Однако полученные результаты и выводы зачастую не совпадали и противоречили друг другу. Особенно это касается оценки значимости диффузии. Так, в ряде работ, где рассматривался механизм поступления составляющих из металлической пробы в разряд в дуге [4] и в искре [5, 6], главенствующая роль отводилась диффузии, причем интенсивность спектральных линий непосредственно связывалась с коэффициентом диффузии анализируемых элементов сплава. В работах [5, 7] влияние «третьих» элементов на результаты спектрального анализа сплавов рассматривалось как следствие двух процессов: избирательного окисления и изменения коэффициента диффузии. В других исследованиях [9, 10] не было установлено какой-либо заметной роли диффузионных процессов в поступлении материала пробы в излучающее облако.

Роль процессов окисления элементов на скорость их поступления в излучающее облако также недостаточно ясна. Так, теоретические предпосылки, положенные в основу исследований [1–3], в настоящее время являются в известной мере устаревшими. Предположение, что скорость поступления элементов в окисные пленки определяется степенью сродства элементов к кислороду – первыми окисляются элементы, обладающие самым большим сродством к кислороду (Al, Si и т. д.), а элементы с малым сродством (Cu, Ni и т. д.) должны накапливаться под окисными пленками, – оказалось не совсем верным. Теория и практика окисления металлов и сплавов свидетельствуют о том, что при высоких температурах скорость окисления металла не определяется только величиной отрицательной свободной энергии образования окисла ΔF или значением соответствующего термодинамического потенциала ΔG [11, 12]. Причина заключается в том, что во многих случаях скорость окисления определяется только реакциями на границах фаз и диффузионными процессами. Степень сродства элементов сплава к кислороду, как утверждается в [13], должна быть не менее некоторой определенной величины и часто не оказывает непосредственного влияния на кинетику окисления.

В перечисленных работах [1–9] исследования главным образом проводились на достаточно массивных образцах цветных металлов, служивших в дуге или искре одним из электродов. В то же время для анализа благородных металлов высокой чистоты в основном применяют так называемую глобульную дугу, т. е. дуговой разряд, горящий между расплавленной каплей металла или его окисла (обладающего металлической проводимостью) и противоэлектродом. Аналогичных же исследований для глобул благородных металлов крайне мало. К ним можно отнести исследования по разработке методики определения примесей в особо чистом серебре [13], серебре, золоте и их сплавах [14], аффинированных платине и палладии [15]. В работе [16] рассматривались особенности поступления примесей в разрядный промежуток при испарении платиновых металлов с анода графитовых электродов.

Следует отметить, что основная масса работ, посвященных изучению механизмов поступления компонентов сплава в плазму разряда, выполнена в 50–60-е гг. XX в. с использованием спектрографов. Эти работы были достаточно трудоемкими. Например, дискретные зависимости интенсивности спектральных линий от времени, так называемые кривые испарения элементов, получали путем регистрации спектров на ряд фотопластинок или кинопленку.

В настоящее время в атомно-эмиссионном анализе широкое распространение получили приборы с фотоэлектрической регистрацией спектров, обладающие более высокой чувствительностью, нежели спектрографы. Появилась возможность с помощью фотодиодных и ПЗС-линеек и матриц, соединенных с ПЭВМ непосредственно сразу после регистрации спектров, получать кривые испарения и детализировать их, уменьшая временной интервал до долей секунды.

В связи с этим большой практический интерес представляют расширение знания о механизме поступления примесей и разработка на основе новых и ранее полученных данных методик по определению примесей в чистых благородных металлах с помощью современных приборов.

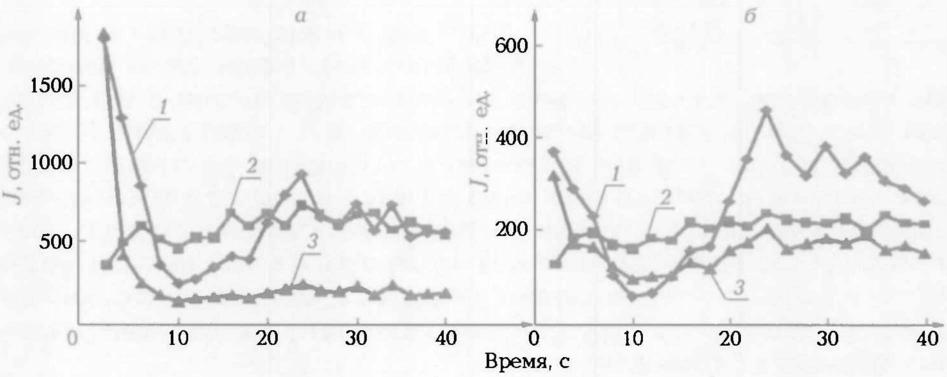


Рис. 1. Кривые испарения:
а) 1 – магния, 2 – серебра, 3 – кремния; б) 1 – олова, 2 – золота, 3 – железа из корольков серебра массой 69,2 мг

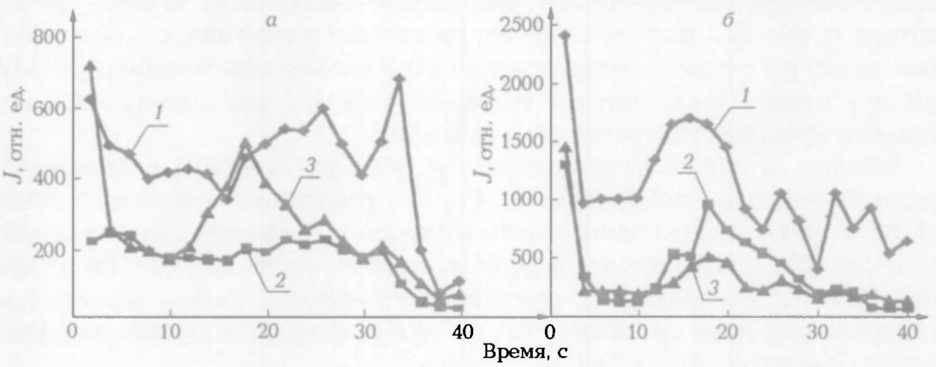


Рис. 2. Кривые испарения:
а) 1 – золота, 2 – серебра, 3 – железа; б) 1 – магния, 2 – олова, 3 – кремния из корольков серебра массой 30,4 мг

Нами было проведено исследование механизма поступления микропримесей (содержание не превышает 10^{-3} %) Si, Mg, Sn, Fe и Au из корольков серебра малой массы в течение первых секунд горения дуги переменного тока, поскольку при выполнении количественного анализа время регистрации спектра редко превышает минуту. Выбор данных примесей основан на том, что среди них есть как сильно окисляющиеся элементы Si, Mg, так и слабо окисляющийся Sn, а также Au – элемент практически не окисляющийся. В результате были получены кривые испарения данных примесей из корольков серебра массой 69,2 и 30,4 г за первые 40 с горения дуги (рис. 1, 2). Спектральные линии, по которым изучались кривые испарения, представлены в таблице.

В работе использовались следующие параметры регистрации: переменный ток силой 6 А, ширина щели спектрометра 50 мкм, расстояние между угольными электродами 3 мм. Проба помещалась в кратер нижнего электрода глубиной 1 мм и диаметром 6 мм. Верхний электрод имел конусообразную форму.

Длины волн аналитических линий элементов

Элемент	Длина волны, нм
Ag	257,574
Au	267,595
Fe	271,902
Mg	285,213
Si	288,158
Sn	283,999

Как видно из рис. 1 и 2, для всех спектральных линии примесей, кроме золота, наблюдается сначала спад их интенсивности, а затем увеличение. Причем для всех элементов, кроме олова, с уменьшением массы увеличение интенсивности усиливается.

Такой вид кривых испарения в данном случае может быть вызван двумя причинами: изменением условий возбуждения (температуры плазмы и концентрации электронов в ней) или концентрации примесей в плазме дуги. Колебания температуры дуги при практически постоянном расстоянии между электродами и постоянной силе тока в процессе опыта, как в нашем случае, могут быть вызваны поступлением в плазму дуги элементов с гораздо более низким потенциалом возбуждения, чем у серебра, и в количествах порядка 10^{-2} % и выше. Отсутствие таковых элементов в исследуемом серебре свидетельствует о том, что в процессе опыта изменяется концентрация указанных примесей в плазме дуги.

Так как данное явление присуще только примесям, способным к окислению, можно предположить, что изменение их концентрации в плазме связано с изменениями процессов окисления и поступления окислов на поверхность серебра. В связи с тем что увеличение интенсивности спектральных линий наблюдается одновременно как у сильно окисляющихся Si, Mg, так и у слабо окисляющегося Sn, мы не можем связать данное явление только с эффектом избирательного окисления.

Большая разница в сродстве к кислороду между серебром и неблагородными примесями указывает на то, что при расплавлении серебра в атмосфере воздуха должно происходить внутреннее окисление этих примесей. Коэффициент диффузии кислорода в серебре равен $8{,}9 \cdot 10^{-5}$ см^2/с при 1000 °С [17]. Для сравнения: коэффициент диффузии олова в серебре при той же температуре составляет $4{,}1 \cdot 10^{-5}$ см^2/с, коэффициент самодиффузии серебра равен $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ см^2/с [18].

Растворимость кислорода в жидком серебре 2 ат. % [11], что более чем достаточно для полного внутреннего окисления примесей, находящихся в слое, в который продиффундировал кислород, с незначительным изменением концентрации кислорода. Скорость химического взаимодействия в металлургических реакциях при высоких температурах обычно на несколько порядков превышает скорости таких процессов, как диффузия в жидких фазах, и в первом приближении можно предположить, что внутри расплавленной глобулы существует граница между окислами примесей и самими примесями. Эта граница будет смещаться в глубь глобулы с суммарной скоростью диффузии кислорода и примесей.

Результаты работы [13] указывают на то, что окислы примесей преимущественно выводятся на поверхность расплавленного образца вследствие их всплытия, а не диффузии. Скорость поступления окисляющихся примесей в плазму может быть связана с изменением скорости: а) внутреннего окисления (образования самих окислов), б) всплытия окислов, в) эрозии (испарения) образца. Рассмотрим более детально роль последнего фактора в процессе формирования излучающего облака примесей, так как она наименее очевидна. Скорость поступления окислов на поверхность глобулы, а следовательно, и в плазму есть суммарная скорость их всплытия и эрозии образца. Кроме этого, процесс испарения основного металла влияет на кинетику его внутреннего окисления: чем выше скорость данного процесса, тем меньше время, необходимое для полного внутреннего окисления образца.

Так как во время испарения образца серебра в дуге переменного тока скорость его эрозии возрастает, мы предположили, что, возможно, появление усиления спектральных линий (увеличение концентрации окисляющихся примесей в плазме) связано с данным явлением.

Исходя из сказанного, можно предположить, что существование определенной вероятности изменения начальной скорости эрозии будет влиять на вид кривых испарения следующим образом: с ростом скорости эффект усиления спектральных линий может проявляться более отчетливо, а с падением – менее. Изменять начальную скорость эрозии можно либо изменяя силу тока дуги, либо начальную массу королька. Чем больше сила тока, тем больше скорость эрозии. В случае с массой, наоборот, чем выше начальная масса, тем меньше скорость эрозии при прочих равных условиях.

Результаты приведенных опытов с корольками различной массы частично подтвердили выдвинутое предположение. Дополнительно мы провели опыты с изменением силы тока при постоянной начальной массе королька. Корольки массой 70,0 мг сжигали при силе тока 4 и 8 А. Кривые испарения на примере олова, кремния и магния представлены на рис. 3.

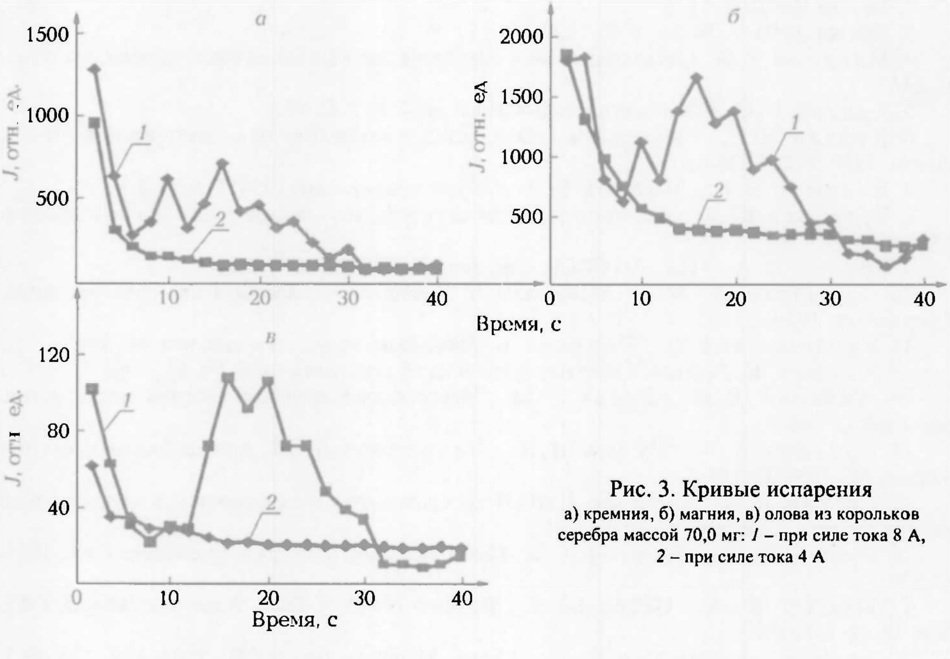


Рис. 3. Кривые испарения
а) кремния, б) магния, в) олова из корольков серебра массой 70,0 мг: *1* – при силе тока 8 А, *2* – при силе тока 4 А

Как видим, с уменьшением силы тока с 6 до 4 А увеличение интенсивности не наблюдается, тогда как увеличение силы тока до 8 А не только приводит к данному явлению, но и усиливает его для магния и кремния. Необходимо отметить и тот факт, что с увеличением силы тока (уменьшением массы образца) сокращается промежуток времени после начала горения дуги, когда появляется повторное увеличение интенсивности спектральных линий, а значит, и увеличение концентрации элементов в плазме.

Таким образом, выдвинутое предположение о влиянии скорости эрозии на вид кривых испарения элементов, способных к окислению, подтвердилось.

Важно выяснить фактор, определяющий скорость поступления золота, которое в данных условиях не окисляется. Так как скорость испарения золота меньше скорости испарения серебра (на это указывает как различие в давлении пара, так и в теплоте сублимации), можно предположить, что концентрация золота в поверхностном слое будет больше, чем внутри глобулы. Это должно привести к диффузии золота внутрь глобулы. Однако и в этом случае влияние на скорость поступления примеси в плазму дуги будет оказывать эрозия серебра.

Если скорость эрозии недостаточно велика и концентрационный избыток атомов примеси золота в поверхностных слоях нивелируется в результате диффузионных процессов, должен наблюдаться эффект концентрирования золота в серебре. В противном случае примесь поступает в плазму вместе с основой, несмотря на то, что скорость ее испарения меньше.

Как видно из рис. 1, 2, золото поступает в плазму дуги вместе с серебром, и, следовательно, его концентрация в дуге соответствует концентрации в корольке. В то же время концентрация примесей, способных к окислению, в плазме дуги в процессе опыта меняется и не соответствует концентрации данных примесей в корольке серебра.

1. Филимонов Л.Н. // Зав. лаб. 1949. Т. 15. № 8. С. 919.
2. Там же. № 10. С. 1178.
3. Там же. 1950. Т. 16. № 10. С. 1200.
4. Макулов Н.А. Металловедение и обработка цветных металлов и сплавов. М., 1961. С. 246.
5. Куделя Е.С. // Автоматическая сварка. 1954. № 2. С. 66.
6. Куделя Е.С. // Материалы X Всесоюзного совещания по спектроскопии: В 2 т. Львов, 1958. Т. 2. С. 238.
7. Налимов В.В., Ионова К.И. // Журн. аналит. хим. 1954. Т. 9. № 2. С. 76.
8. Буравлев Ю.М. Влияние структуры на результаты спектрального анализа сплавов. М., 1963.
9. Грикит И.А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1962. Т. 26. № 7. С. 887.
10. Буравлев Ю.М. // Материалы II Уральского совещания по спектроскопии. Свердловск, 1959. С. 10.
11. Кубашевский О., Гопкинс Б. Окисление металлов и сплавов. М., 1965.
12. Хауффе К. Реакции в твердых телах и на их поверхности: В 2 ч. М., 1963. Ч. 2.
13. Харапай В.П., Гусев Г.М. Спектральный анализ в цветной металлургии. М., 1960. С. 308.
14. Куранов А.А., Рукша Н.П., Свиридова М.М. Анализ благородных металлов. М., 1959. С. 139.
15. Гутько А.Д., Щурова Е.И. Некоторые вопросы эмиссионной и молекулярной спектроскопии. Красноярск, 1960. С. 91.
16. Гутько А.Д., Щурова Е.И. Спектроскопия. Методы и приложения. М., 1969. С. 270.
17. Mizikar E. A., Grace K. E., Parlee N. D. // Trans. Amer. Soc. Metals. 1963. Vol. 56. № 1. P. 101.
18. Leak V. G., Swalin R. A. // Trans. Metallurg. Soc. AIME. 1964. Vol. 230. № 3. P. 426.

Поступила в редакцию 12.10.2001.

Климентий Иванович Червяковский – аспирант кафедры физики и спектроскопии. Научные руководители – доктор физико-математических наук, профессор А.П. Зажогин, доктор физико-математических наук, профессор Е.С. Воропай.

УДК 621.315.592

О.П. ЕРМОЛАЕВ, Т.Ю. МИКУЛЬЧИК

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ОТЖИГ РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В ГЕРМАНИИ, ОБЛУЧЕННОМ БОЛЬШИМИ ФЛЮЕНСАМИ НАДКАДМИЕВЫХ НЕЙТРОНОВ

The low temperature (down to ~1,6 K) electric conductivity of *n*-type germanium irradiated with the large fluences of epicadmium neutrons and subjected to the isothermal annealing (at 400 °C) was studied. Radiation defects which do not contain doped impurities (Sb) and are stable to the high-temperature annealing are established to form in germanium doped by the epicadmium neutrons.

Метод трансмутационного легирования (ТЛ) полупроводников нейтронами является одним из основных при получении материалов для производства мощных высоковольтных диодов и тиристоров, детекторов излучений и низкотемпературных термометров сопротивления. Это обусловлено более высокой степенью однородности пространственного распределения примесей и точностью легирования по сравнению с традиционными методами, связанными с введением примесей в расплав или диффузией их с поверхности [1].

При облучении в реакторе основной вклад в ТЛ германия связан с тепловыми нейтронами. Так как сечение поглощения нейтронов s изменяется с энергией E по закону $s{\sim}E^{-1/2}$ (в области энергий, далеких от резонансных), то "ужесточение" нейтронного спектра (т. е. легирование надкадмиевыми нейтронами) увеличивает однородность распределения легирующих примесей. Наличие в реакторном спектре быстрых нейтронов приводит к появлению в материале радиационных дефектов (РД), которые обычно удаляют длительным высокотемпературным отжигом, что является сложной технологической задачей, так как РД образуют комплексы с примесями, содержащимися в кристаллах. В литературе содержатся сведения о наблюдении после длительного высокотемпературного отжига остаточных явлений как в облученном кремнии [2], так и в германии [3]. При исследовании низкотемпературной фотолюминесценции германия, трансмутационно легированного надкадмиевыми нейтронами, было установлено существование радиационных дефектов, устойчивых к длительному высокотемпературному отжигу [4]. Поэтому важной задачей является изучение свойств дефектов, остающихся в трансмутационно легированном германии после отжига. Изучение влияния отжига РД на электрические свойства (электропроводность и коэффициент Холла) германия, облученного быстрыми нейтронами реактора, ранее проводилось главным образом в интервале температур 77–300 К (обзор работ см., например, в [5, 6]). Позже в работах [7, 8] было исследовано влияние изохронного отжига РД на низкотемпературную (до 1,6 К) проводимость германия, облученного большими флюенсами быстрых нейтронов, однако изучение изотермического отжига РД не проводилось. Цель настоящей работы – исследовать влияние изотермического отжига РД на низкотемпературную проводимость германия, облученного большими флюенсами быстрых (надкадмиевых) нейтронов.

Эксперименты проводились на образцах германия с концентрацией сурьмы $7{\cdot}10^{15}$ см$^{-3}$, которые облучались быстрыми нейтронами реактора, при этом флюенс быстрых нейтронов с энергией $E{\geq}0{,}1$ МэВ был равен $\Phi{=}2{\cdot}10^{17}$ см$^{-2}$. Для отсечки медленного компонента реакторного спектра нейтронов (E<0,4 эВ) и для ослабления факторов, связанных с ядерным легированием медленными (тепловыми) нейтронами, образцы облучались в кадмиевых пеналах с толщиной стенок около 0,5 мм. Измерялись температурные зависимости удельного сопротивления в диапазоне температур 1,6–300 К. Концентрация дефектов определялась из измерений коэффициента Холла.

В результате облучения быстрыми реакторными нейтронами исследуемые образцы претерпели конверсию проводимости и стали низкоомными образцами p-типа. Из кривых, представленных на рис. 1, видно, что при T<7 К наблюдается прыжковая проводимость с постоянной энергией активации по мелким уровням РД (E_v +0,016 эВ) [9]

$$\sigma=\sigma_3\exp(-\varepsilon_3/kT).$$

Предэкспоненциальный множитель σ_3 имеет вид [10, 11]

$$\sigma_3=\sigma_{03}\exp(-[1{,}73+\varphi(K)]/\alpha\cdot N^{1/3}), \qquad (1)$$

где α – боровский радиус примеси, N – концентрация основной примеси, φ(K) – функция, слабо зависящая от степени компенсации K (особенно при K<0,5), σ_{03} – коэффициент, степенным образом зависящий от N. Величина σ_3 находилась путем экстраполяции прямолинейных низкотемпературных участков зависимости к бесконечной температуре (см. рис. 1).

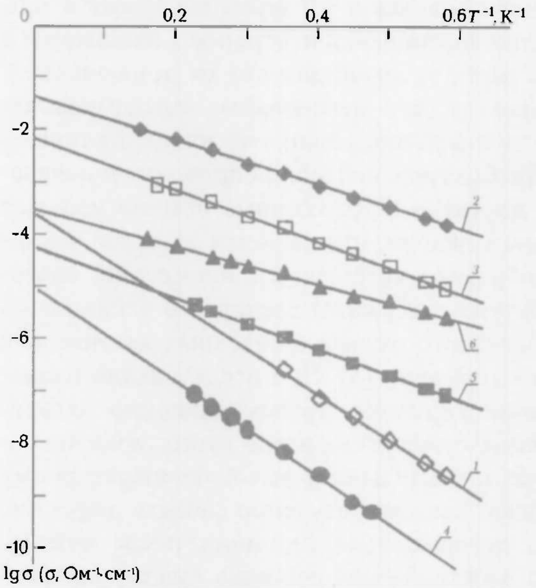


Рис. 1. Температурная зависимость электропроводности в прыжковой области:
1 – исходный (до облучения) образец; *2* – после облучения нейтронами (Ф = 2 10^{17} см$^{-2}$); *3–6* – на различных стадиях отжига. $t_3 < t_4 < t_5 < t_6$ = 24 ч

Из рис. 1 видно, что в поведении σ при отжиге обнаружился ряд особенностей. Вначале при $t \geq t_3$ (t – время отжига) отжиг идет обычным путем, т. е. проводимость уменьшается вследствие снижения концентрации РД, что подтверждается величиной концентрации дырок. Затем, достигнув минимума при $t=t_4$, проводимость начинает возрастать, стремясь к предельному состоянию, что свидетельствует об увеличении концентрации основных примесей, определяющих прыжковую проводимость. При $t>t_4$ образец претерпевает p–n-конверсию типа проводимости, после чего и концентрация электронов, и проводимость возрастают, стремясь к исходным (предельным) значениям. Предельным оказалось состояние, полученное в результате полного отжига (24 ч при 400 °С). Важно отметить, что коэффициенты σ_3 после отжига при $t>t_3$ имели значения ниже предельного и ниже исходного, что объясняется возникновением в процессе отжига конкурирующего механизма проводимости, связанного с примесями Ga и Sb. В облученных, но не отожженных образцах исходные примеси и трансмутационно введенная примесь Ga не обладают электрической активностью. В результате отжига $t>t_4$ исходные примеси Sb, а также Ga, введенные трансмутационным легированием, проявляют электрическую активность.

Из полученных экспериментально значений σ_3 с учетом того, что боровский радиус в Ge(Sb) равен 43 Å [10], а в Ge с РД – 40 Å [9], с помощью зависимости (1) можно определить концентрацию основных примесей N, определяющих прыжковую проводимость. Для $t<t_4$ N соответствует концентрации РД, а для $t>t_4$ N~N_{Sb}.

Для случая ТЛ Ge надкадмиевыми нейтронами в [12] получено значение степени компенсации К=0,54. Отметим, что в наших экспериментах значение компенсации было около 0,65 (кривая *б*).

После отжига при $t<t_4$ экспериментальные точки в координатах рис. 2 хорошо ложатся на прямую с наклоном, соответствующим боровскому радиусу 40 Å. Это доказывает, что при $t<t_4$ происходит отжиг РД. В результате дальнейшего отжига экспериментальные точки смещаются в сторону от прямой (*а*), а при $t>t_4$ хорошо ложатся на прямую (*б*), соответствующую боровскому радиусу 43 Å. Это означает, что определяющим механизмом проводимости после отжига при $t>t_4$ является проводимость по примесям сурьмы, а не по РД. Из равенства величин σ_3 для образца, подвергнутого полному отжигу (см. рис. 1, кривая *6*) и исходного (см. рис. 1, кривая *1*), следует, что концентрация доноров сурьмы после облучения и отжига полностью восстановилась.

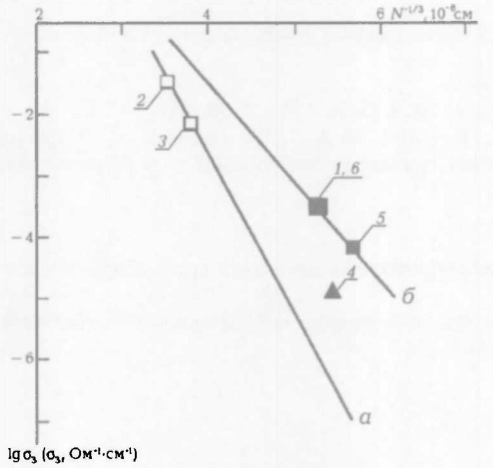


Рис. 2. Прыжковая проводимость σ_3 как функция концентрации основных примесей N:
а – германий с РД, α = 40 Å; *б* – германий с Sb, α = 43 Å. Номера точек соответствуют номерам на кривых рис. 1

Наши результаты хорошо согласуются с данными и моделью изменения электрической активности примесей [8], в которой показано, что электрические свойства облученного германия обусловлены мелкими уровнями радиационных дефектов. После облучения исходные примеси (Sb), а также примеси (Ga, As и Se), образующиеся в результате ядерных реакций с нейтронами, становятся электрически неактивными. Примеси начинают проявлять электрическую активность при отжиге ($t>t_4$). После завершения процесса полного отжига все исходные и трансмутационно введенные примеси становятся электрически активными.

Из исследования изотермического отжига можно определить энергию активации отжига, например, методом отношения угловых коэффициентов (см. [6]). Найденная нами величина энергии активации отжига, равная 2,5 эВ, возможно характеризует отжиг многовакансионных комплексов с уровнями E_v + 16 МэВ [9].

Исходя из известного значения коэффициента легирования надкадмиевыми нейтронами, можно оценить концентрацию трансмутационно введенного галлия [9, 13]

$$N_{Ga}=\alpha_{Cd}\cdot\Phi, \qquad (2)$$

где для природного германия величина $\alpha_{Cd}=(5\div6)\cdot10^{-3}$ см$^{-1}$. Из соотношения (2) следует, что в наших образцах концентрация галлия, введенного трансмутационным легированием, значительно меньше (в 3–4 раза) концентрации компенсирующих акцепторов, определенных из экспериментальных величин степени компенсации. Следовательно, необходимо сделать вывод о том, что в результате облучения Ge быстрыми (надкадмиевыми) нейтронами реактора и последующего отжига образуются радиационные дефекты, играющие роль акцепторов. Восстановление после облучения и отжига концентрации основной легирующей примеси (Sb) свидетельствует о том, что сурьма не входит в состав образующихся дефектов. Возможно, в состав радиационных дефектов входят глубокие остаточные технологические примеси, такие, например, как кислород или углерод.

1. Шлимак И.С. // ФТТ. 1999. Т. 41. № 5. С. 794.
2. Yong R., Cleland J., Wood R., Abraham M. // J. Appl. Phys. 1978. Vol. 49. P. 4752.
3. Добрего В.П., Ермолаев О.П. // ФТП. 1980. Т. 14. № 6. С. 1120.
4. Ермолаев О.П. // ЖПС. 1997. Т. 64. № 4. С. 479.
5. Коноплева Р.Ф., Литвинов В.Л., Ухин Н.А. Особенности радиационного повреждения полупроводников частицами высоких энергий. М., 1971.
6. Коноплева Р.Ф., Остроумов В.Н. Взаимодействие заряженных частиц высоких энергий с германием и кремнием. М., 1975.
7. Кожух М.Л., Липкина Н.С. // ФТП. 1987. Т. 21. № 2. С. 284.
8. Ермолаев О.П. // ФТП. 1994. Т. 28. № 11. С. 2021.
9. Dobrego V.P., Ermolaev O.P., Tkachev V.D. // Phys. stat. sol. (a). 1977. Vol. 44. № 2. P. 435.
10. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979.
11. Они же // ФТП. 1980. Т. 14. № 5. С. 825.
12. Забродский А.Г., Алексеенко М.В. // ФТП. 1994. Т. 28. № 1. С. 168.
13. Рывкин С.М., Кожух М. Л., Трунов В.А., Шлимак И.С. // Труды Международной конференции по радиационной физике полупроводников и родственных материалов. Тбилиси, 1979. С. 789.

Поступила в редакцию 29.05.2001.

Олег Павлович Ермолаев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры атомной физики и физической информатики.

Татьяна Юрьевна Микульчик – аспирант кафедры физики полупроводников. Научный руководитель – О.П. Ермолаев.

УДК 621.315.542

Д.А. СКРИПКА, М.Г. ЛУКАШЕВИЧ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИИ АРСЕНИДА ГАЛЛИЯ

The influence of electric field on the magnetoresistance of *n*-type epitaxial gallium arsenide with free electrons concentration n_e=1,2×10^{17} cm^{-3} in the temperature range 1,5–300 K has been studied in the magnetic field up to 1,5 *T*. Positive magnetoresistance increases with increasing electric field at 300 and 77 K due to heating of electron gas by the electric field and redistribution of charge carriers between valleys. In spite of the fact that impurity and conduction bands are coincided in the investigated samples, the transition from negative to positive magnetoresistance is found to occur at low temperature because of the sample heating by the current.

Электрические эффекты в гальваномагнитных явлениях могут быть обусловлены, например, следующими изменениями: 1) числа свободных носителей заряда вследствие ударной ионизации, 2) их подвижности из-за разогрева электрическим полем, 3) функции распределения в скрещенных магнитном и электрическом полях. Влияние электрического поля на магнитосопротивление (МС) арсенида галлия исследовано при низких температурах в компенсированных [1] и некомпенсированных [2] образцах. Изменение подвижности носителей вследствие разогрева в первом случае [3] и числа свободных носителей из-за ударной ионизации во втором [2] приводило к суперлинейной вольт-амперной характеристике (ВАХ) и уменьшению величины магниторезистивного эффекта в сильном электрическом поле независимо от его знака. Сублинейная ВАХ арсенида галлия, обусловленная междолинным переходом электронов, и влияние на нее магнитного поля исследованы в образцах арсенидгаллиевых диодов Ганна, а теоретические модели для ее описания достаточно подробно проанализированы в [4–6]. Однако в арсениде галлия в магнитном поле возможно как увеличение, так и уменьшение подвижности носителей заряда в зависимости от величины приложенного электрического поля и даже немонотонная ее зависимость при приближении к критическому электрическому полю образования домена [7]. Это может приводить к появлению положительного и отрицательного магниторезистивного эффектов в греющем электрическом поле. Так, моделирование ВАХ методом Монте-Карло в трехдолинной Г-L-X-модели [8] указывает на возможность наблюдения отрицательного магнитосопротивления в слабых и положительного – в сильных магнитных полях вблизи критического электрического поля, в котором дрейфовая скорость носителей достигает максимальной величины. На неоднозначность поведения магниторезистивного эффекта при разогреве носителей указывает и трансформация ВАХ в магнитном поле из N- в S-образную [9], а также возможность достижения критической напряженности электрического поля Холла, необходимого для образования домена сильного поля, т. е. неоднородного распределения электрического поля по образцу.

Целью данной работы было исследование влияния электрического поля на величину и характер магнитополевой зависимости МС в случае сублинейной ВАХ, при котором еще сохраняется однородное распределение поля в образце. Исследовались кристаллы n-GaAs, выращенные методом жидкофазной эпитаксии на полуизолирующих подложках из того же материала. Концентрация носителей заряда при комнатной температуре была n_e=1,2·10^{17}см$^{-3}$, а подвижность μ=3000 см^2/В·с. Методом фотолитографии и травления образцам толщиной d=0,24 мкм придавалась гантелеобразная форма с расстоянием между контактами (длина) l=75–100 мкм и шириной b=15–35 мкм. Омические контакты были получены путем вжигания сплава индия с оловом. Поперечное МС измерено в температурном интервале 1,5–300 К в постоянном магнитном поле до 1,5 Тл при перпендикулярной и параллельной ориентации магнитного поля относительно плоскости пленки. Измерение ВАХ и МС при температуре 77 К проводилось в импульсном режиме при непосредственном погружении образцов в жидкий азот. Измерения при температуре жидкого гелия и ниже проводились в режиме постоянного тока. Образцы крепились к медному хладопроводу через тонкую сапфировую пластинку.

На рис. 1 показана ВАХ образца длиной l=100 мкм и шириной b=38 мкм при T=300 К и 4,2 К без магнитного поля (кривая *1*) и в магнитном поле (кривая *2*), измеренная в конфигурации Холла, т. е. когда магнитное поле перпендикулярно плоскости образца. Видно, что при T=300 К в электрическом поле E_0 >10 В (соответствует напряженности поля в образце 1 кВ/см) наблюдается отклонение от закона Ома, а при низких температурах отклонение от закона Ома наблюдается в значительно более слабых электрических полях. Несмотря на ожидаемый эффект охлаждения электронов магнитным полем, величина E_0 при приложении магнитного поля увеличивается незначительно.

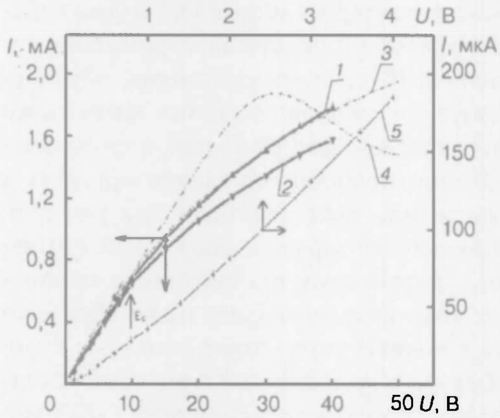


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика образца с n_e=1,2·10^{17}см$^{-3}$ и размерами 100×38×0,24 (мкм)^3 при T=300 К без магнитного поля (*1*) и в магнитном поле B=1,45 Тл (2) и при T=4,2 К (5). Теоретические ВАХ при B=0 без учета разогрева (*3*) по [8] и с учетом увеличения электронной температуры (*4*) по [9]

Сублинейность ВАХ арсенида галлия в электрическом поле такой напряженности, интерпретируемая в рамках механизма Хилсума – Шокли – Рида – Ганна [6], обусловлена разогревом электронов электрическим полем и их перераспределением между основным минимумом и вышележащими (Δ=0,35 эВ) долинами. Причем нелинейность ВАХ при $E>E_0$ с приемлемой точностью можно описать как в рамках простой модели перераспределения носителей между долинами с использованием подгоночных параметров [10], так и перераспределением носителей, при котором учитываются разогрев электронного газа и увеличение его температуры [11]. Теоретические ВАХ, рассчитанные для этих двух случаев, приведены на рис. 1 (кривые *3* и *4* соответственно). Видно, что для данного образца использование подгоночных параметров [10] позволяет лучше согласовать теоретическую и экспериментальную ВАХ, в то время как учет разогрева электронов дает несколько более слабое электрическое поле насыщения дрейфовой скорости.

На рис. 2 показаны магнитополевые зависимости поперечного МС, измеренные при температурах 300 К и 4,2 К в слабом и сильном электрическом поле. Во всем интервале магнитных полей выполняется критерий слабого магнитного поля $\mu B \ll 1$ (μ – дрейфовая подвижность носителей, B – индукция магнитного поля), и положительный магниторезистивный эффект квадратично зависит от магнитного поля при любых углах φ между направлением поля и плоскостью пленки. Отметим, что при φ=0° величины магнитосопротивлений образцов с разным отношением длины к ширине отличались незначительно, в то время как при φ=90° из-за геометрического эффекта величина МС образца с l/b=2,4, как и следовало ожидать, больше. Несмотря на то что отношение длины образца к его размеру в направлении, перпендикулярном магнитному и электрическому полям, при φ=0° очень большое (это соответствует $l/d \gg 10$), измеренный магниторезистивный эффект не является физическим, так как величина МС может быть сильно уменьшена из-за проявления классического размерного эффекта на ряде характеристических длин, величины которых в арсениде галлия могут превышать толщину исследуемых образцов [12]. Определенный из результатов измерений коэффициент магнитосопротивления $b_r=(\Delta\rho/\rho_0)/(\mu B)^2$ для образцов с l/b=5,2 при φ=0° и φ=90° был равен 0,005 и 0,12 соответственно, что в первом случае более чем на порядок меньше, а во втором более чем в три раза больше величины b_r для физического магнитосопротивления при учете смешанного механизма рассеяния носителей ионами примеси, пьезоэлектрическими колебаниями, а также акустическими и оптическими фононами.

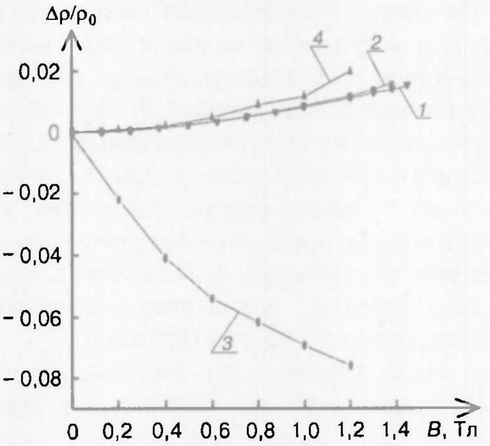


Рис. 2. Магнитосопротивление образца с l/b=5,2 при $\varphi=0^\circ$, T=300 К (*1*, *2*), T=4,2 К (*3*, *4*) и разных электрических полях U, В: *1* – 0,1; *2* – 20; *3* – 0,01; *4* – 5

Из рис. 2 видно, что при комнатной температуре наблюдается увеличение магниторезистивного эффекта в электрическом поле, а тщательный анализ магнитополевой зависимости показывает, что при напряженности поля около 4 кВ/см она близка к линейной. Увеличение МС в электрическом поле в первую очередь может быть обусловлено междолинным перераспределением носителей заряда. Как известно, появление даже небольшого количества носителей того же знака, имеющих другое время релаксации квазиимпульса, приводит к увеличению магниторезистивного эффекта. Определяя неравновесный коэффициент магнитосопротивления b_r^* так же, как и равновесный b_r, и предполагая, что доля носителей заряда в верхних долинах и коэффициенты для расчета дрейфовой скорости определяются так же, как в [10], для зависимости b_r^* от электрического поля в случае проводимости двумя типами носителей получим следующую формулу:

$$b_r^* = \frac{1}{A_r^2}\left[C_r \frac{1+x\theta^3}{1+x\theta} - A_r^2 \frac{(1+x\theta^2)^2}{(1+x\theta)^2}\right], \qquad (1)$$

где перераспределение носителей заряда между долинами в электрическом поле x определяется выражением:

$$x = \frac{n_2}{n_1} = \frac{W\left(\frac{\mu E}{V_s}\right)^{t-1}\left(1-\frac{\mu E}{V_s}\right)}{1-\frac{V_s}{\mu E}}; \qquad (2)$$

n_1, n_2, μ_1, μ_2 – концентрации и подвижности носителей заряда в нижней и верхней долине соответственно; $\theta=\mu_2/\mu_1$; $n_0=n_1+n_2$. Коэффициенты W, V_s, t определяются, как в [10], а A_r и C_r – как в [13].

На рис. 3 приведены измеренные зависимости коэффициента МС от электрического поля при T=300 К (кривая *1*) и рассчитанные по формуле (1) для разных моделей перераспределения носителей между долинами. Для сравнения результатов расчета с экспериментальными данными величина МС при $\varphi=90^\circ$ корректировалась на величину геометрического фактора, определенного по [14]. Экспериментально установлено более сильное увеличение коэффициента МС, чем дает теоретический расчет (кривая *2*) с учетом простого перераспределения носителей по [10], несмотря на достаточно хорошее совпадение экспериментальной и теоретической ВАХ (кривые *1* и *3* на рис. 1). Вычисление коэффициента МС с учетом увеличения электронной температуры носителей по [11] (кривая *3*) дает неплохое совпадение рассчитанной и измеренной величин b_r^* в области сильных электрических полей. Однако максимальной величины коэффициент МС в этом случае достигает в электрическом поле, большем 5 кВ/см, а в области слабых полей он больше измеренного. Не вносит существенных изменений в зависимость b_r^* от электрического поля и моделирование увеличения электронной температуры методом Монте-Карло [11], и использование его для нахождения зависимости b_r^* от электрического поля (кривая *4*). При этом величина b_r^* слабо зависит от электрического поля, а рассчитанный коэффициент МС качественно согласуется с измеренным лишь в области сильных полей и значительно его превосходит в слабом электрическом поле. В [8] для объяснения нелинейности ВАХ *n*-GaAs предложен механизм перераспределения носителей в электрическом поле между Г-*L*-*X*-долинами. Его использование приводит к такому же результату, как и учет изменения электронной температуры в простой двухдолинной модели (кривая *3*).

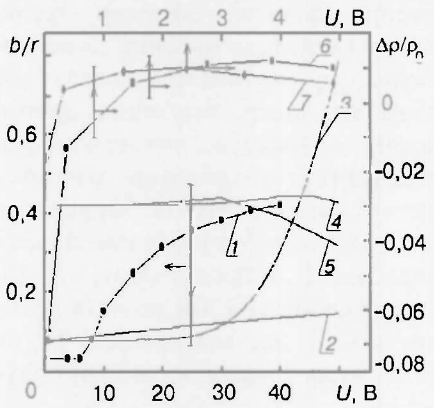


Рис. 3. Зависимость коэффициента МС от электрического поля при T=300 К (*1*) и МС при T=4,2 К (*6*, *7*).

Другие линии – расчет по одножидкостной модели перераспределения носителей между двумя долинами (*2*), тремя долинами (*3*), с учетом разогрева носителей (*4*) и по двухжидкостной модели (*5*). φ :*1*. *6* – 0; *7* – 90°

Надо отметить, что формула (1) не учитывает того, что зависимость времени релаксации квазиимпульса электронов от энергии в разных долинах может отличаться, и, как следствие, коэффициенты магнитосопротивления для нижней и верхней долин должны быть разными. Используя общее выражение для МС полупроводника со смешанной проводимостью и разными зависимостями времени релаксации квазиимпульса от энергии [13] для зависимости неравновесного коэффициента МС от электрического поля, получим выражение, учитывающее как смешанный механизм проводимости, так и различный вклад в МС каждого типа носителей:

$$b_r^* = \frac{[\mu_1 + x(\mu_1 + \mu_2)][\mu_1\mu_{H1}^2(1+x)(b_{r1}+1) + \mu_2\mu_{H2}^2(b_{r2}+1)]}{[\mu_1\mu_{H1}(1+x) - \mu_2\mu_{H2}x]^2}, \qquad (3)$$

где μ_{H1} и μ_{H2} – холловские подвижности, b_{r1} и b_{r2} – коэффициенты магнитосопротивления для носителей заряда в нижней и верхней долинах соответственно. Перераспределение носителей между долинами также дается формулой (2).

Зависимость b_r^* от электрического поля, рассчитанная по (3), в предположении, что электроны в нижней долине имеют минимальный коэффициент МС для смешанного механизма рассеяния (b_r=0,03), а в верхней – максимальный для рассеяния ионами примеси (b_r=0,57), приведена на рис. 3 (кривая *5*). Несмотря на это, расчет дает существенно большие величины b_r^* в области слабых и близких к 4 кВ/см полей, они совпадают. Используя меньшие величины b_r для носителей верхней долины, можно согласовать измеренные и рассчитанные значения b_r^* в области более сильных полей, хотя тенденция изменения b_r^* в сильном поле уже противоположна экспериментально наблюдаемой (кривые *1* и *4*, *5*).

Следует отметить, что все рассмотренные модели дают немонотонную зависимость коэффициента МС от электрического поля. Причем величина и положение максимума b^* в электрическом поле в разных моделях различны и лишь качественно согласуются с экспериментом. Очевидно, что положение максимума в этом случае определяется законом междолинного перераспределения носителей, в то время как его величина может существенно зависеть от доли вклада различных механизмов рассеяния или коэффициентов МС различных долин при разогреве носителей, а также от изменения функции распределения носителей в скрещенных сильном электрическом и магнитном полях.

Из рис. 1 (кривая *5*) видно, что при T=4,2 К отклонение ВАХ от закона Ома наблюдается в значительно более слабом электрическом поле, причем она имеет не сублинейный, а суперлинейный вид. Как и следовало ожидать, МС таких образцов в слабом электрическом поле независимо от угла между направлением поля и плоскостью пленки при гелиевых температурах отрицательно. Кроме того, величина и его характер (отрицательный или положительный) также зависят от приложенного к образцу электрического поля. Магнитополевые зависимости МС образца с l/b=5,2, измеренные в геометрии Холла при T=4,2 К и разных электрических полях, приведены на рис. 2 (кривые *3*, *4*). В слабом электрическом поле на линейном участке ВАХ (кривая *3*) магнитосопротивление отрицательно и пропорционально $\Delta\rho/\rho_0 \approx B^{\alpha}$, где α=1/2. Такой вид магнитополевой зависимости характерен для слабо разупорядоченных кристаллов и предсказывается теорией квантовых поправок проводимости [15]. С увеличением электрического поля величина отрицательной компоненты МС уменьшается и в более сильных электрических полях МС становится положительным с α=2 (кривая *4*), что характерно для лоренцевского магниторезистивного эффекта в пределе слабого магнитного поля и металлического типа проводимости. Во всех исследованных образцах при φ=0° отмечалось только изменение величины МС и наблюдалась трансформация его магнитополевой зависимости без изменения знака.

Нелинейность ВАХ и переход от отрицательного к положительному магниторезистивному эффекту в электрическом поле при низких температурах обусловлены нагревом образца протекающим током. Известно, что при n_e>3·10^{16} см$^{-3}$ в n-GaAs примесная зона уже слилась с зоной проводимости и нелинейность ВАХ, так же как и изменение МС, не может быть вызвана перераспределением носителей заряда между зонами в электрическом поле из-за ударной ионизации мелких примесных уровней [16]. При таких предположениях зависимость МС от электрического поля должна коррелировать с его температурной зависимостью и зависимостью проводимости от температуры. Действительно, изучение температурных зависимостей проводимости и магниторезистивного эффекта показало, что они хорошо коррелируют с зависимостью МС от электрического поля при T=4,2 К, показанной на рис. 3 (кривые *6*, *7*), а именно: максимум положительного МС наблюдается в той области температур, где максимальна подвижность. Дополнительным подтверждением этому может служить тот факт, что при T=4,2 К переход от отрицательного к положительному МС при φ=90° происходит в более слабых электрических полях (кривые *6*, *7* на рис. 3) и при более низких температурах, что (как и при T=300 К) свидетельствует о существенном вкладе положительного геометрического МС при измерении его в геометрии Холла. Характерно, что при меньшей площади теплового контакта образца с хладопроводом критическая мощность перехода от отрицательного к положительному МС была несколько меньше. Корреляция температурной зависимости МС с его зависимостью от рассчитанной эффективной температуры электронного газа в сильно компенсированном n-GaAs позволила авторам [1, 3] сделать заключение о том, что величина отрицательного МС определяется только температурой электронов и не зависит от температуры решетки. Как следует из корреляции температурных зависимостей проводимости, магниторезистивного эффекта и зависимости МС от электрического поля, в слабо компенсированных кристаллах n-GaAs как отрицательная, так и положительная компоненты МС зависят от температуры образца.

Интересно отметить, что выделяющаяся в образце критическая электрическая мощность, при которой происходит переход от отрицательного магниторезистивного эффекта к положительному при гелиевых температурах, была 2,7–3 Вт/см^2, в то время как при той же температуре и непосредственном погружении образцов в жидкий гелий критическая мощность, при которой нарушался тепловой контакт с жидкостью, согласно оценкам [17], составляла всего 0,5 Вт/см^2. Такая величина критической мощности в наших измерениях соответствовала началу отклонения ВАХ от закона Ома.

Следовательно, при температурах 300 К и 77 К разогрев электронов в n-GaAs электрическим полем приводит к росту положительного магниторезистивного эффекта и линеаризации магнитополевой зависимости в случае нахождения образцов на металлической стороне перехода диэлектрик – металл. При гелиевых температурах в таких образцах возможен переход от отрицательного к положительному магнитосопротивлению из-за нагрева образца протекающим током.

1. Вул Б.М., Котельникова Н.В., Заварицкая Э.М., Воронова И.Д. // ФТП. 1977. Т. 11. № 3. С. 573.
2. Kamara M.S., Lukashevich M.G., Stelmakh V.F. // Phys. Stat. Sol. (a). 1984. Vol. 84. P. 613.
3. Вул Б.М., Заварицкая Э.И., Воронова И.Д. // ФТП. 1973. Т. 7. № 9. С. 1766.
4. Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С. // Эффект Ганна. М., 1975.
5. Шур М. Современные приборы на основе арсенида галлия. М., 1991.
6. Jervis T.R. // Phys. Stat. Sol. (a). 1972. Vol. 10. P. 193.
7. Бородовский П.А., Осадчий В.М., Токарев А.С. // ФТП. 1983. Т. 17. № 2. С. 252.
8. Горфикель В.Б., Левинштейн М.Е. // ФТП. 1980. Т. 14. № 9. С. 1694.
9. Jinging X.U., Shur M. // IEEE Trans. 1987. Vol. ED-34. № 8. P. 1831.
10. McCamber D.E., Chynoweth A.G. // IEEE Trans. 1966. Vol. ED-13. № 1. P. 4.
11. Carner B., Cappy A., Kasrynski A., Constant E., Salmer G. // J. Appl. Phys. 1980. Vol. 55. № 1. P. 784.
12. Кравченко А.Ф., Митин В.В., Скок Э.М. // Явления переноса в полупроводниковых пленках. Новосибирск, 1979.
13. Смит Р. // Полупроводники. М., 1982.
14. Соколов Ю.Ф., Степанов Б.Г. // Микроэлектроника. 1974. Т. 3. № 2. С. 142.
15. Kawabata A. // J. Phys. Soc. Japan. 1980. Vol. 49. № 2. P. 628.
16. Лукашевич М.Г., Стельмах В.Ф. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1981. № 3. С. 37.
17. Заварицкая Э.И. // Труды ордена Ленина физического института имени П.И. Лебедева АН СССР. 1966. Т. 37. С. 41.

Поступила в редакцию 05.01.2001.

Дмитрий Александрович Скрипка – аспирант кафедры физики полупроводников. Научный руководитель – М.Г. Лукашевич.

Михаил Григорьевич Лукашевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников.

УДК 546.28:621.315.592

Д.И. БРИНКЕВИЧ, В.С. ПРОСОЛОВИЧ, Ю.Н. ЯНКОВСКИЙ

ЭПИТАКСИАЛЬНЫЕ СЛОИ КРЕМНИЯ, ЛЕГИРОВАННЫЕ ГЕРМАНИЕМ И ЛЮТЕЦИЕМ

The possibility of the use of Lu and Ge doped silicon in the base MOS-technology were studied. Doping by these impurities decreased the quantity of leakage current and increased the breakdown voltage of p – n-junctions and Si – SiO_2-polySi structures. It is shown that Ge and Lu doping of the epitaxial layers allows to improve the stability of p – n-junctions and MOS-structures to the radiation effects.

Один из методов повышения устойчивости полупроводниковых материалов и приборов к воздействию радиации заключается в создании в объеме монокристалла центров аннигиляции (стоков) для компонентов пар Френкеля. Наиболее перспективно в этом аспекте легирование кремния редкоземельными или изовалентными примесями, не проявляющими непосредственно после выращивания электрической активности [1, 2].

В настоящей работе исследовались возможности использования в базовой КМОП-технологии кремния, легированного германием и редкоземельным элементом (РЗЭ) Lu. Указанные примеси вводились в монокристаллы как в процессе выращивания из расплава по методу Чохральского, так и в эпитаксиальные слои (ЭС) в процессе низкотемпературной хлоридной эпитаксии в системе H_2+$SiCl_4$+$GeCl_4$+$LuCl_3$. Концентрации германия (N_{Ge}) и лютеция (N_{Lu}), измеренные нейтронно-активационным анализом, составляли (0,1–2,0)·10^{20} см$^{-3}$ и 5,0·10^{15} см$^{-3}$ соответственно. На полученных эпитаксиальных слоях формировались p – n-переходы и МОП-структуры.

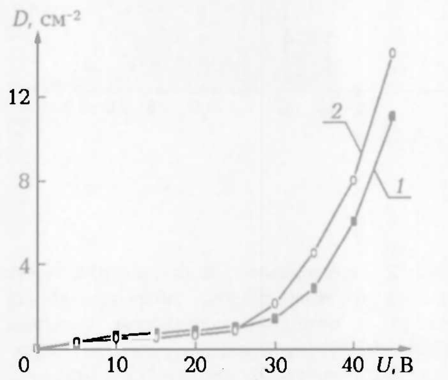


Рис. 1. Зависимость дефектности (D) подзатворного диэлектрика от приложенного напряжения для МОП-структур, изготовленных на подложках КЭФ4,5 (*1*) и Si:Lu (*2*)

Результаты исследований влияния Lu и Ge на дефектность p – n-переходов и подзатворного диэлектрика представлены на рис. 1, 2. Плотность дефектов (D) определялась из выражения

$$D(U) = \frac{\ln P}{S},$$

где S – площадь структуры, P – вероятность того, что структура не пробивается при приложении к ней напряжения U.

Полученные экспериментальные результаты указывают на то, что дефектность эпитаксиальных пленок, сформированных на подложках, легированных германием, существенно не отличается от дефектности монокристаллов. Легирование ЭС изовалентной примесью также позволяет снизить величину токов утечки почти до значений, соответствующих $p - n$-переходам, сформированным на исходных подложках без эпислоя. Оптимальные параметры были получены на эпитаксиальных структурах с концентрацией германия ~5,0·10^{19} см$^{-3}$ (см. рис. 2). Увеличение N_{Ge} до значений, близких к 1,0·10^{20} см$^{-3}$. приводило к возрастанию дефектности.

Полученные результаты можно объяснить с учетом того, что основной легирующей примесью в подложках являлась сурьма в концентрации

$6{,}0\cdot10^{17}$ см$^{-3}$. Ковалентный радиус атома германия, так же как и сурьмы, больще, чем у кремния. Поэтому легирование ЭС Ge позволяет уменьшить степень несоответствия параметров решеток подложки и эпитаксиального слоя. Это, в свою очередь, приводит к снижению плотности дислокаций несоответствия и уменьшению напряжений на границе раздела подложка – эпитаксиальный слой. Оптимальное согласование решеток достигается при N_{Ge} ~$5{,}0\cdot10^{19}$ см$^{-3}$. Легирование германием в более высоких концентрациях приводит к увеличению периода решетки ЭС по сравнению с подложкой, что вновь вызывает формирование дислокаций несоответствия.

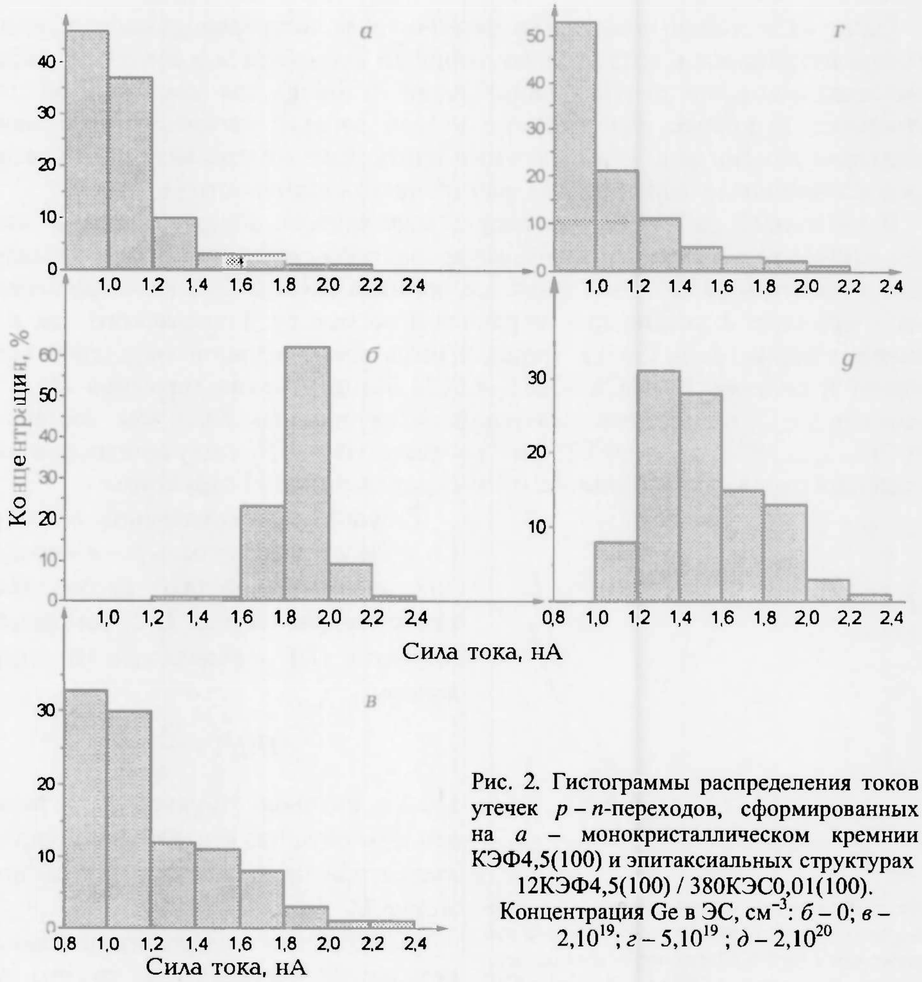


Рис. 2. Гистограммы распределения токов утечек $p-n$-переходов, сформированных на *а* – монокристаллическом кремнии КЭФ4,5(100) и эпитаксиальных структурах 12КЭФ4,5(100) / 380КЭС0,01(100). Концентрация Ge в ЭС, см$^{-3}$: *б* – 0; *в* – $2{,}10^{19}$; *г* – $5{,}10^{19}$; *д* – $2{,}10^{20}$

Наличие примесей Ge и Lu в подложке не оказывает существенного влияния на характеристики МОП-структур, в том числе и на дефектность подзатворного диэлектрика. Следут, однако, отметить, что структуры, сформированные на основе Si:Lu, имели более низкие значения порогового напряжения, напряжения плоских зон, емкости плоских зон, плотности поверхностных состояний на границе Si – SiO_2 и эффективной концентрации примесей в подложке.

Влияние примесей лютеция и германия на процессы генерации радиационных дефектов в МОП-структурах исследовалось в процессе облучения гамма-квантами ^{60}Co. Из таблицы видно, что эффективность радиационных изменений МОП-структур снижается с уменьшением толщины пленки диоксида кремния. Однако следует отметить, что тонкие, порядка 20 нм, окислы обладают повышенной проводимостью и заряд, наводимый радиацией в SiO_2, не накапливается, а стекает в кремний. Сравнение образцов с одинаковыми технологиями получения и толщиной диоксида, например 3 и 7, 6 и 8, показывает большую устойчивость структур, легированных РЗЭ, к воздействию радиации. Так, изменения напряжения плоских зон и порогового напряжения при облучении МОП-структур, созданных на Si:Lu, были примерно в два раза меньше, чем для аналогичных контрольных образцов (см. таблицу).

Чувствительность МОП-структур к γ-облучению

Образец	Наличие РЗЭ	Тип окисла	Толщина SiO_2, нм	U_{th}, В	U_{th}, В при $D_n=10^6$ рад	ΔU^{r}_{th}, В
1	–	O_2+HCl	22,0	–1,35	–2,20	0,85
2	–	O_2+HCl	29,0	–1,60	–2,50	0,90
3	–	O_2+HCl	42,0	–1,90	–3,90	2,00
4	–	O_2+H_2+HCl	20,0	–1,50	–2,10	0,60
5	–	O_2+H_2+HCl	40,0	–1,40	–3,50	2,10
6	+	O_2+H_2+HCl	20,0	–1,00	–1,40	0,40
7	+	O_2+H_2+HCl	38,0	–1,75	–2,10	0,35
8	+	O_2+HCl	40,0	–1,20	–1,60	0,40

Таким образом, использование пластин кремния, легированных Ge и Lu, в качестве подложек для эпитаксиальных слоев позволяет повысить устойчивость $p - n$-переходов и МОП-структур к воздействию радиации. Указанный эффект обусловлен, вероятно, действием примесей редкоземельных элементов и германия как стоков для компонентов пар Френкеля, генерируемых высокоэнергетичными излучениями, а также как центров их аннигиляции.

1. Бочкарев Э.П., Гришин В.П., Карпов Ю.А., Марунина Н.И. Свойства легированных полупроводников. М., 1977. С. 88.

2. Петров В.В., Просолович В.С., Ткачев В.Д. и др. // ФТП. 1985. Т. 19. № 4. С. 767.

Поступила в редакцию 13.11.2001.

Дмитрий Иванович Бринкевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры физики полупроводников.

Владислав Савельевич Просолович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры физики полупроводников.

Юрий Николаевич Янковский – старший научный сотрудник кафедры физики полупроводников.

УДК 537.311.33

С.А. ВЫРКО

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО НОЛЯ В КРИСТАЛЛАХ С ПРЫЖКОВОЙ МИГРАЦИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ПРИМЕСЯМ

The expressions for Debye – Hückel and Schottky – Mott screening length of external electrostatic field in the crystal semiconductor with hopping migrations of electrons (holes) over hydrogen-like donors (acceptors) is obtained. The existence of a “hidden” conducting layer in the hopping conductivity regime for semiconductors with small and high compensation degrees is predicted.

В работе [1] впервые теоретически рассмотрен вопрос управления прыжковой электропроводностью по водородоподобным донорам в полупроводниковой пленке с помощью внешнего, перпендикулярного поверхности пленки электростатического поля $E(x)=-d\varphi/dx$, не приводящего к появлению тока и не нарушающего электронейтральность пленки. Было показано, что омическая проводимость в направлении, перпендикулярном “управляющему” полю $E(x)$, т. е. вдоль пленки, при обеих полярностях напряжения определяется перескоками электронов по донорам на некотором характеристическом расстоянии $x \sim x_h$ от поверхности. Координата x_h зависит от степени компенсации доноров акцепторами. Поскольку при $x<x_h$ доноры в основном ионизованы, а при $x>x_h$ они нейтральны, то в этих областях прыжковая электропроводность значительно меньше, нежели при $x \sim x_h$, где локальные концентрации ионизированных и нейтральных доноров примерно равны.

В [2] исследовался эффект поля в слое кристаллического p-Si:B с прыжковой электропроводностью. Внешним электростатическим полем осуществлялось локальное смещение уровня Ферми в акцепторной зоне, т. е. изменялась, по терминологии [1], локальная концентрация прыгающих по атомам бора дырок. Было обнаружено [3] подавление прыжковой электропроводности p-Si:Ga при пассивации электрически активных примесей атомарным водородом. Наблюдалось [4] отрицательное дифференциальное сопротивление в условиях прыжковой проводимости для p-Si. В [5] зарегистрированы инжекционные токи в кремниевых резистивных структурах при блокировании прыжковой проводимости по водородоподобным примесям вблизи омических контактов. Однако концентрация прыгающих по примесям электронов (дырок) в названных исследованиях не определялась и не оценивалась.

Цель данной работы – показать, что управление прыжковой электропроводностью возможно в полуограниченном кристаллическом полупроводниковом образце в направлении, перпендикулярном внешнему электростатическому полю.

Рассмотрим однородно легированный полупроводник n-типа, занимающий полупространство $x>0$, при прыжковой проводимости по неподвижным водородоподобным донорам в зарядовых состояниях (0), (+1) с концентрацией $N=N_0+N_{+1}$. Условие электронейтральности имеет вид: $N_{+1}–N_{-1}$, где N_{-1} – концентрация акцепторов в зарядовом состоянии (–1); $0<K<1$ – степень компенсации доноров акцепторами. Объемная концентрация прыгающих по донорам электронов согласно [6–10] равна $N_h=N_0N_{+1}/N=$ $=K(1-K)N$. Экранирование внешнего электростатического поля обусловлено перераспределением прыгающих между донорами в зарядовых состояниях (0) и (+1) электронов, т. е. миграцией по кристаллу зарядовых состояний неподвижных доноров. Акцепторы полностью находятся в зарядовом состоянии (–1) и напрямую в экранировании не участвуют. Электростатический потенциал $\varphi(x)$ в точке с координатой x удовлетворяет уравнению Пуассона [11]:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=-\frac{\rho(\varphi)}{\varepsilon}=-\frac{e}{\varepsilon}\left[N_{+1}(x)-N_{+1}\right], \qquad (1)$$

где $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ – статическая диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки полупроводника, ε_0 – электрическая постоянная, e – модуль заряда электрона, $\rho(\varphi)$ – объемная плотность индуцированного внешним полем заряда.

В однородном полупроводнике отношение концентраций ионизованных $N_{+1}(x)$ и нейтральных $N_0(x)$ доноров зависит от координаты x только через $\varphi(x)$ в виде [11]:

$$\frac{N_{+1}(x)}{N_0(x)} = \frac{K}{1-K}\exp\left(-\frac{e\varphi(x)}{k_B T}\right).$$

Принимая во внимание, что $N_0(x) + N_{+1}(x) = N_0 + N_{+1} = N$, получим

$$N_{+1}(x) = N\left[1 + \frac{1-K}{K}\exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T}\right)\right]^{-1}, \qquad (2)$$

где $k_B T$ – тепловая энергия.

Интегрируя (1) по φ с учетом (2), находим выражение для напряженности поля в полупроводнике:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = \pm\left\{\frac{2k_B T}{\varepsilon}N\left[\ln\left((1-K)\exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T}\right)+K\right)-(1-K)\frac{e\varphi}{k_B T}\right]\right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

где для $\varphi > 0$ следует брать знак "+", а для $\varphi < 0$ – знак "–".

При $e|\varphi_b| \ll k_B T$, т. е. в приближении Дебая – Хюккеля, из (3) с учетом граничных условий $\varphi(0) = \varphi_b$; $\varphi(\infty)=0$ для $x \geq 0$ получаем: $\varphi(x)=\varphi_b\exp(-x/\Lambda_s)$, где Λ_s – длина экранирования электростатического поля [9, 12] – равна

$$\Lambda_s = \sqrt{-\varepsilon\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^{-1}_{\varphi=0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\, k_B T}{e^2 K(1-K)N}}. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что $K(1-K)N = N_h$ можно трактовать как концентрацию экранирующих зарядов – прыгающих по донорам электронов [6–9].

В приближении Дебая – Хюккеля полный индуцированный заряд, отнесенный к единице площади поверхности полупроводника, запишется $Q_s = \int_0^\infty \rho_s(x)\,dx = \rho_s(\varphi_b)\Lambda_s$, где $\rho_s(x) = -\varepsilon\Lambda_s^{-2}\varphi(x)$. Это означает, что длина экранирования Λ_s равна толщине слоя пространственного заряда, в котором полный индуцированный заряд Q_s распределен равномерно с плотностью $\rho_s(\varphi_b)$.

При $e|\varphi_b| \gg k_B T$, т. е. в приближении Шоттки – Мотта, из (3) для $0 \leq x \leq \Lambda_d$ с учетом граничных условий $\varphi(0)=\varphi_b$; $(d\varphi/dx)_{x=\Lambda_d} = 0$ получаем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{eNK}{2\varepsilon}(\Lambda_d - x)^2, & \text{при } \varphi_b > 0; \\ -\dfrac{eN(1-K)}{2\varepsilon}(\Lambda_d - x)^2, & \text{при } \varphi_b < 0, \end{cases}$$

где толщина области Λ_d, в которой все доноры ионизованы (при $\varphi_b<0$) или нейтральны (при $\varphi_b>0$), имеет вид:

$$\Lambda_d = \begin{cases} \Lambda_s\sqrt{2(1-K)\dfrac{e\varphi_b}{k_B T}}, & \text{для } e\varphi_b \gg k_B T; \\ \Lambda_s\sqrt{-2K\dfrac{e\varphi_b}{k_B T}}, & \text{для } -e\varphi_b \gg k_B T. \end{cases}$$

В приближении Шоттки – Мотта полный индуцированный заряд на единицу площади поверхности полупроводника есть

$$Q_d = \int_0^{\Lambda_d} \rho_d(x)\,dx = \rho_d(\varphi_b)\,\Lambda_d,\ \text{где}\ \rho_d(x) = \rho_d(\varphi_b) =$$

$$= \begin{cases} -eNK, & \text{для } 0 < x < \Lambda_d \quad \text{при } \varphi_b > 0; \\ eN(1-K), & \text{для } 0 < x < \Lambda_d \quad \text{при } \varphi_b < 0. \end{cases}$$

Таким образом, в приближении как Дебая – Хюккеля, так и Шоттки – Мотта длина экранирования может быть выражена через толщину слоя пространственного заряда, в котором сосредоточен весь наведенный заряд, распределенный по глубине равномерно с плотностью $\rho(\varphi_b)$, соответствующей плотности пространственного заряда при максимальном значении потенциала $\varphi(0)=\varphi_b$. На это обстоятельство обращено внимание в работе [13] при рассмотрении экранирования внешнего поля в полупроводниках с чисто зонной монополярной электропроводностью.

В общем случае индуцированный заряд, отнесенный к единице площади поверхности полупроводника, имеет вид:

$$Q = \int_0^{\infty} \rho(x)\,dx = \int_{\varphi_b}^{0} \rho(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-1} d\varphi = \varepsilon \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}, \qquad (5)$$

где согласно уравнению (1) $\rho(\varphi) = -\varepsilon \dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)$.

Характерная толщина Λ области, в которой под действием внешнего электростатического поля происходит полное опустошение или заполнение доноров электронами, равна $\Lambda = Q/\rho(\varphi_b)$. Тогда, учитывая (5) и (1)–(3), имеем:

$$\Lambda = \frac{Q}{\rho(\varphi_b)} = \frac{\varepsilon}{\rho(\varphi_b)} \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} \approx \begin{cases} \Lambda_s & \text{при } e|\varphi_b| \ll k_B T; \\ \Lambda_d & \text{при } e|\varphi_b| \gg k_B T, \end{cases}$$

где $\rho(\varphi_b)$ – плотность заряда на поверхности полупроводника ($x = 0$).

На рис. 1 *а* представлены рассчитанные по уравнению (3) и в приближении Дебая – Хюккеля (штриховая линия) зависимости потенциалов $\varphi(x)$ от координаты x при $e\varphi_b = \pm 100 k_B T$.

На рис. 1 *б* показано распределение локальной концентрации прыгающих по донорам электронов $N_h(x) = N_0(x)N_{+1}(x)/N$ вдоль внешнего электростатического поля; в отсутствие поля $N_h – K(1-K)N$. Видно, что концентрация прыгающих электронов $N_h(x)$ для K=0,99 при $\varphi_b>0$ и для K=0,01 при $\varphi_b<0$ имеет ярко выраженный максимум (кривые *1'*, *3*). Например, для K=0,99 при $\varphi_b = 100 k_B T/e$ прыжковая проводимость в направлении, перпендикулярном внешнему полю, наблюдается на расстоянии $x_h \approx 3\Lambda_s$ от поверхности (x=0). Отметим, что концентрация прыгающих электронов $N_h(x_h)$ (кривая *3*) более чем на порядок превосходит $N_h = K(1-K)N$ при φ_b=0. При возрастании в этом случае $|\varphi_b|$ на поверхности полупроводника координата x_h максимума концентрации прыгающих электронов смещается в глубь полупроводника: $x_h \propto \sqrt{|\varphi_b|}$, в то время как для K=0,5 в этой области концентрация прыгающих электронов близка к нулю и выходит на уровень, соответствующий φ_b=0, при $x>10\,\Lambda_s$ (кривые *2*, *2'*).

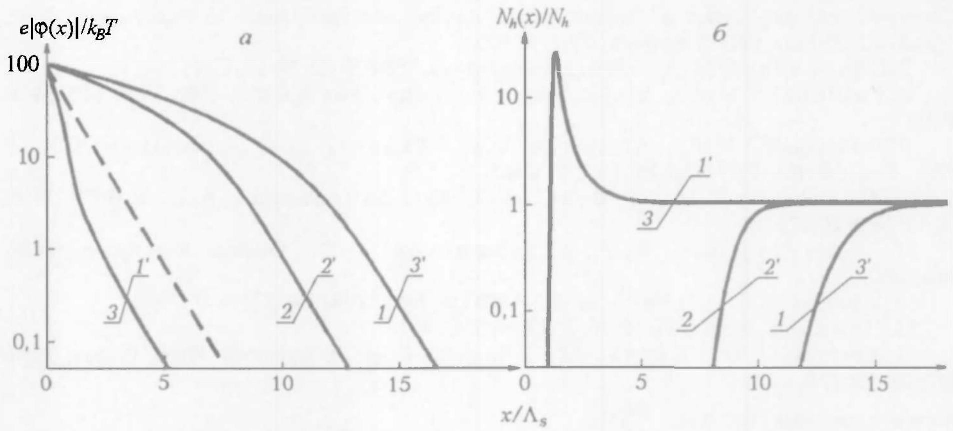


Рис. 1. *а*) Модуль электростатического потенциала $|\varphi(x)|$ в единицах k_BT/e на расстоянии x (в единицах Λ_s) от поверхности полупроводника при $e\varphi_b/k_BT=100$ (кривые *1–3*) и $e\varphi_b/k_BT=-100$ (кривые *1'–3'*) для различных K: *1*, *1'* – 0,01; *2*, *2'* – 0,5; *3*, *3'* – 0,99. Штриховая линия соответствует $|\varphi_b|\exp(-x/\Lambda_s)$. *б*) Локальная концентрация прыгающих по донорам электронов $N_h(x)=N_0(x)N_{+1}(x)/N$ в единицах $K(1-K)N$

Прыжковую электропроводность на постоянном токе по [10] можно представить в виде $\sigma_h=eN_h\mathrm{M}_h$, где M_h – прыжковая подвижность. Согласно [14] энергия термической активации ε_3 прыжковой электропроводности имеет минимум при $K\sim0{,}5$, т. е. прыжковая подвижность $\mathrm{M}_h\propto\exp(-\varepsilon_3/k_BT)$ при этом имеет максимум. На некотором расстоянии x_h от поверхности достигается максимум концентрации прыгающих электронов $N_h(x_h)\sim N/4$, что соответствует локальной степени компенсации $K(x_h)=N_{+1}(x_h)/N=0{,}5$. Таким образом, локальная прыжковая электропроводность в слое, параллельном поверхности полупроводника, находящемся на расстоянии x_h от нее, $\sigma_h(x_h)\sim eN_h(x_h)\mathrm{M}_h(x_h)$ имеет еще более выраженный максимум, чем концентрация прыгающих электронов $N_h(x_h)$.

Итак, вдоль слоя с координатой x_h достигается максимум произведения числа пустых (ионизованных) и заполненных электронами доноров, а следовательно, и максимум прыжковой электропроводности для степени компенсации $K<0{,}5$ при $\varphi_b<0$ и для $K>0{,}5$ при $\varphi_b>0$. При этом подразумевается, что средняя длина прыжка электрона между донорами значительно меньше длины экранирования Λ_s.

Отмеченные выше особенности в пространственной зависимости концентрации $N_h(x)$ прыгающих по водородоподобным донорам электронов относятся и к полупроводникам *p*-типа с прыжковым переносом дырок по водородоподобным акцепторам. Для перехода к описанию полупроводника *p*-типа необходимо в формулах $+\varphi_b$ заменить на $-\varphi_b$ при той же степени компенсации основных примесных атомов (акцепторов) неосновными (донорами).

1. Звягин И.П. // ДАН СССР. 1977. Т. 237. № 1. С. 75.
2. Веденеев А.С., Гайворонский А.Г., Ждан А.Г., Моделли А., Рыльков В.В., Ткач Ю.Я. // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. № 10. С. 641.
3. Болотов В.В., Камаев Г.Н., Феофанов Г.Н., Эмексузян В.М. // ФТП. 1990. Т. 24. № 10. С. 1697.
4. Супрунчик В.В. // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. № 6 (12). С. 2127.
5. Есаев Д.Г., Синица С.П. // ФТП. 2000. Т. 34. № 10. С. 1270.
6. Poklonski N.A., Siaglo A.I., Vyrko S.A., Mitianok V.V. // Physics,

Chemistry and Application of Nanostructures: Review and Short Notes to Nanomeeting-2001, Minsk, 22–25 May 2001. Singapore, 2001. P. 106.

7. Поклонский Н.А. // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27. № 11. С. 41.

8. Poklonski N.A., Stelmakh V.F. // Phys. Stat. Sol. (b). 1983. Vol. 117. № 1. P. 93.

9. Poklonski N.A., Stelmakh V.F., Tkachev V.D., Voitikov S.V. // Phys. Stat. Sol. (b). 1978. Vol. 88. № 2. P. K165.

10. Поклонский Н.А., Лопатин С.Ю., Забродский А.Г. // ФТТ. 2000. Т. 42. № 3. С. 432.

11. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. М., 1990.

12. Узаков А.А., Эфрос А.Л. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 5 (11). С. 1940.

13. Пении Н.А. // ФТП. 1983. Т. 17. № 3. С. 431.

14. Fritzsche H., Cuevas M. // Proc. Int. Conf. on Semicond. Phys., Prague, 1960. Prague, 1961. P. 222.

Поступила в редакцию 24.01.2002.

Сергей Александрович Вырко – аспирант кафедры физики полупроводников. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент Н.А. Поклонский.

Математика и информатика

УДК 681.3

М.К. БУЗА, Е.Н. ЛИВАК

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ

• The identification of computer programs for defending of authorities rights is based on supplying the program with code by reticent information about controling rights and is based on classical and specially deviced methods of cryptography and computer's steganography.

Защита программного продукта от несанкционированного воспроизведения, использования и/или модификации направлена прежде всего на поддержку авторских прав его создателя.

Для защиты программного обеспечения (ПО) используются, как правило, программные, аппаратные и программно-аппаратные средства. Традиционно они основаны на противодействии либо незаконному копированию программ, либо попыткам запуска и/или исполнения нелицензионных копий продукта, включая и меры предотвращения попыток нарушителя исследовать логику работы программы. Как показывает практика, такие методы в различной степени затрудняют нелегальное распространение и использование ПО, но не решают проблему.

Альтернативой традиционным подходам к защите авторских прав в области ПО является сопровождение программного кода (каждой копии программы) скрытой информацией об управлении правами, подтверждающей авторство на программу.

Основные понятия и определения

Информация об управлении правами – это информация, которая сопровождает программный продукт и идентифицирует его автора. Данное понятие определено Законом Республики Беларусь «Об авторском праве и смежных правах» [1, ст. 4]. Заметим также, что устранение или изменение любой электронной информации об управлении правами без разрешения правообладателя является нарушением авторского права [1, ст. 39, п. 5].

Внедрение в программы скрытой информации об управлении правами и ее сопровождение назовем *идентификацией программ*, а коды, в которых представлена скрытая информация об управлении правами, – *идентификационными метками*.

Аутентификация программы – это установление экспертом того факта, что программа, вероятно, не модифицирована и принадлежит данному автору.

Надежность идентификационных меток будем связывать с мощностью механизма их защиты от несанкционированной модификации или удаления. *Мощность механизма защиты* – это его способность противостоять прямым атакам злоумышленника. Используются следующие градации мощности защиты: *базовая, средняя и высокая*, определенные в существующих стандартах по оценке безопасности информационных технологий.

Теоретические основы системы идентификации программ

В качестве практического средства идентификации программ предлагается автоматизированная система, предназначенная для создания и внедрения идентификационных меток в защищаемые программные продукты, а также для аутентификации программ. Автоматизированная система базируется на специально разработанной ***технологии идентификации программ***, в основе которой лежат классические и оригинальные методы криптографии и компьютерной стеганографии, алгоритмы теории кодирования. Объектом защиты является исполняемый файл программы.

Наряду с решением основной задачи (сопровождение объекта защиты информацией об управлении правами) технология идентификации обеспечивает надежность как самой системы идентификации программ, так и, в частности, идентификационных меток, т. е. гарантирует конфиденциальность, целостность и доступность информации об управлении правами.

Проблема стойкости идентификационных меток к попыткам их обнаружения и удаления (модификации) нарушителем решается с помощью методов и механизмов, используемых для создания и внедрения меток.

Отметим некоторые существенные особенности технологии идентификации программ.

1. В программный код внедряются идентификационные метки различного типа, количество которых определяется в соответствии с параметрами защищаемого объекта и авторской информации.
2. Идентификационные метки кодируются классическими и специально разработанными криптографическими алгоритмами.
3. Для внедрения идентификационных меток применяются как традиционные, так и оригинальные стеганографические методы.
4. Используется специфический психологический подход к защите идентификационных меток, базирующийся на индивидуальном психологическом барьере злоумышленника и его квалификации.
5. Идентификационные метки закодированы так, что позволяют обнаруживать факт их модификации неавторизованными лицами, а также (по желанию пользователя системы) способны самовосстанавливаться.

Структура автоматизированной системы идентификации программ

Система идентификации программных продуктов состоит из обеспечивающей и функциональной подсистем.

Обеспечивающая подсистема (рис. 1) идентифицирует объект защиты и выполняет следующие функции:

- создание идентификационных меток на основе авторской информации об управлении правами и других параметров;
- сохранение эталонной информации на отчуждаемый носитель;
- внедрение в защищаемый объект скрытой информации об управлении правами;
- внедрение в защищаемый объект специального модуля, обнаруживающего модификацию (удаление) меток и восстанавливающего их.

Функциональная подсистема производит аутентификацию программ и позволяет:

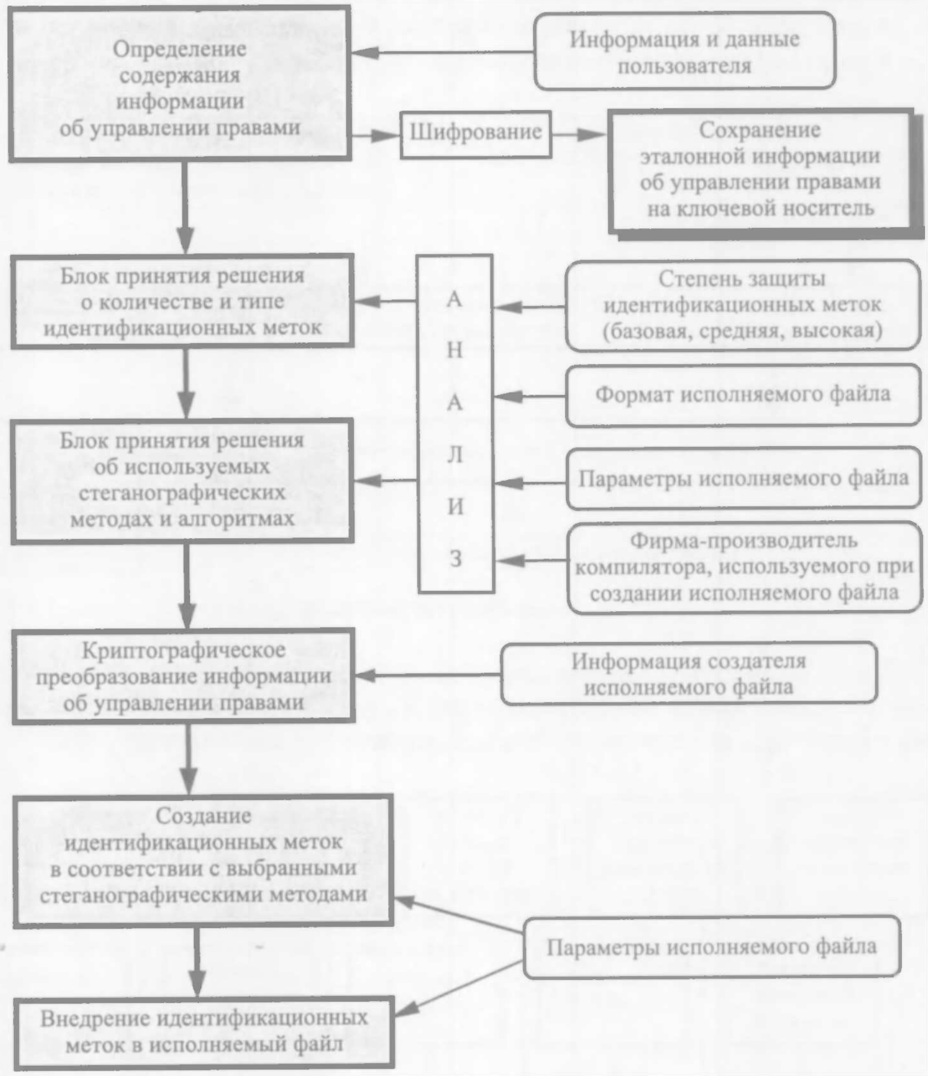


Рис. 1. Структура обеспечивающей подсистемы

- считывать информацию об управлении правами, сопровождающую защищенный объект;
- устанавливать факт авторства посредством сравнения с предъявляемой эталонной информацией об управлении правами.

На основе определения содержания информации об управлении правами на защищаемый программный продукт строится идентификатор программы – уникальный цифровой код (рис. 2), который записывается на специальный отчуждаемый ключевой носитель и хранится у автора. В качестве ключевого носителя в рассматриваемой версии системы используется гибкий магнитный диск. Заметим, что в случае дополнения системы аппаратными средствами любое современное устройство, предназначенное для хранения персональной информации (магнитная карта, электронный ключ, жетон и т. п.), может быть использовано как ключевой носитель.

Основной компонентой данной системы является блок «Анализ», который принимает следующие решения:

- об используемых типах идентификационных меток;

- о количестве таких меток, внедряемых в исполняемый файл;
- о применяемых стеганографических методах и алгоритмах.

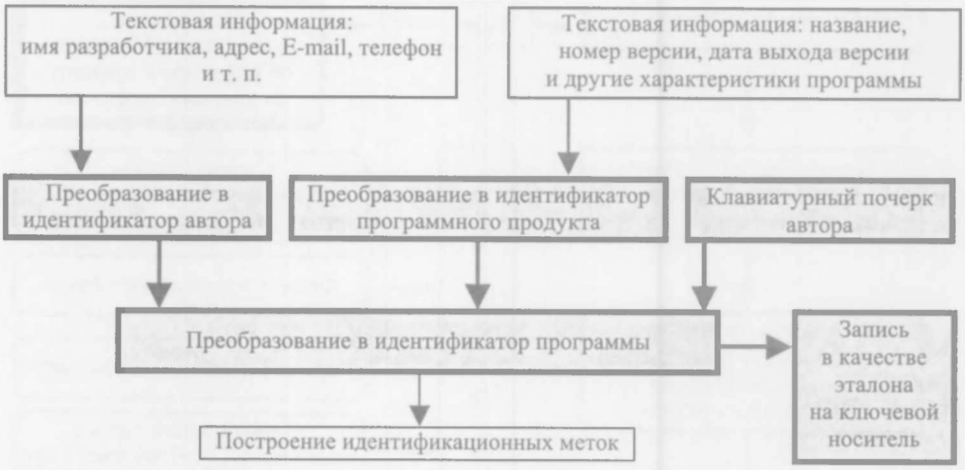


Рис. 2. Построение идентификатора программы

Часть подсистемы, производящая анализ параметров исполняемого файла, – одна из наиболее ответственных. На рис. 3 изображены анализируемые структуры исполняемого файла в формате Portable Executable (PE).

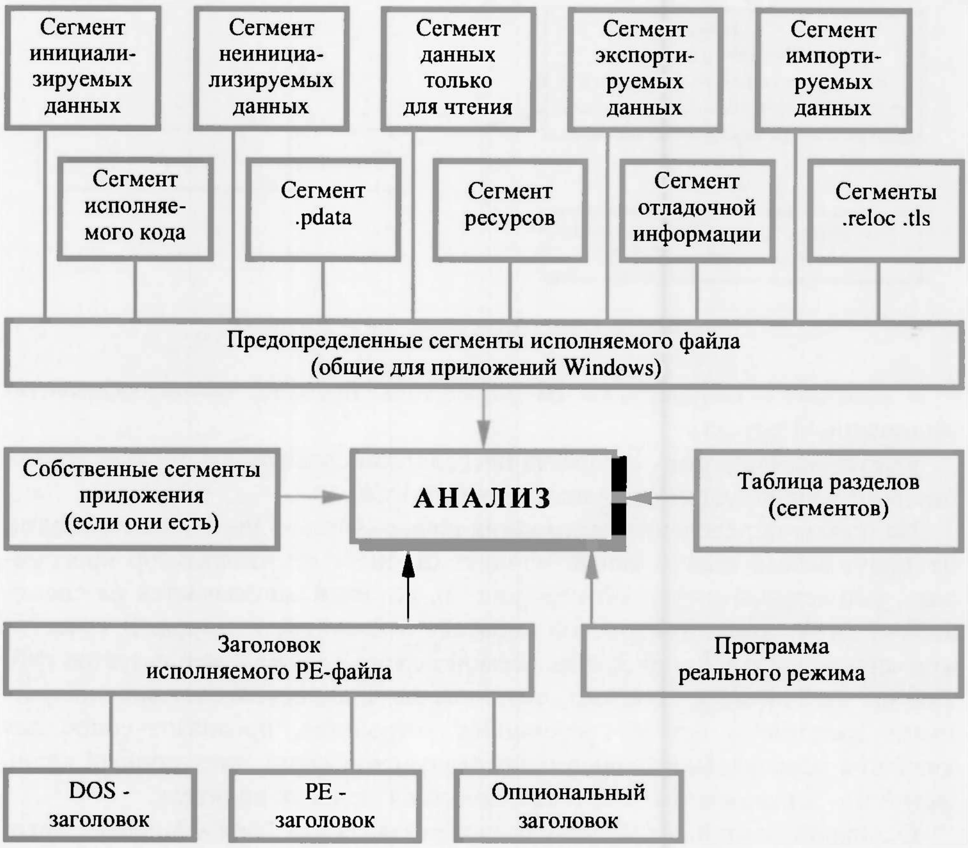


Рис. 3. Анализируемые параметры исполняемого PE-файла

В процессе анализа определяются общее количество байт, смещения и размер отдельных участков файла, доступных для внедрения меток.

Принципы создания и внедрения идентификационных меток

Технология идентификации программ предполагает внедрение идентификационных меток нескольких типов.

Построение и внедрение идентификационных меток первого типа

Они предназначены для обеспечения **базовой** мощности механизма защиты идентификационных меток и представляют собой зашифрованный с помощью одного из криптоалгоритмов идентификатор программы с последующим сжатием. В качестве ключа шифрования используется идентификатор автора.

Для внедрения идентификационных меток первого типа применяются стеганографические методы, основанные на наличии неиспользуемых (зарезервированных) полей заголовков файлов в форматах EXE (DOS) и PE (Windows, UNIX). Исследование форматов исполняемых файлов (DOS и Windows) показало, что общий размер зарезервированных полей является достаточным для внедрения некоторого количества идентификационных меток первого типа.

Построение и внедрение идентификационных меток второго типа

Данный тип меток предназначен для обеспечения **средней** мощности механизма защиты идентификационных меток.

Пусть идентификатор программы – последовательность десятичных цифр длины d: $\alpha = (\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_d)$, где $\alpha_j \in \{0..9\}$.

Каждую десятичную цифру в данной последовательности запишем соответствующей двоичной тетрадой. Получаем последовательность длины $4d$ в двоичном алфавите:

$$\varphi = (\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_j \ldots \varphi_{4d}),\ \text{где}\ \varphi_j \in \{0, 1\}.$$

Идентификационная метка второго типа строится на основе идентификатора программы φ с помощью функции V_i (i – номер метки), осуществляющей выбор n символов (где n кратно 3) из последовательности φ по заданному правилу, и первоначально представляет собой последовательность символов длины n в двоичном алфавите:

$$V_i(\varphi) = (\gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_j \ldots \gamma_n) = \gamma_i,\ \text{где}\ \gamma_j \in \{0, 1\},\ n < 4d. \quad (1)$$

Затем n-битный блок γ_i подвергается операциям:

1) перестановки $P_i(\gamma_i)$,

2) поблочной подстановки $S(P_i(\gamma_i))$,

3) сложению по модулю 2 с определенными операцией W_i битами результата операции подстановки, примененной для двоичной последовательности φ .

Таким образом, идентификационная метка второго типа с номером i строится с помощью функции F_i , где

$$F_i(\varphi) = S\,(P_i\,(V_i\,(\varphi))) \oplus W_i\,(S\,(\varphi)).$$

Для внедрения идентификационных меток второго типа используются стеганографические методы, которые условно можно разделить на две группы:

1) методы, основанные на наличии полей заголовков файлов в форматах EXE и PE, изменение значений которых не влияет на корректную работу программы;

2) методы и алгоритмы, использующие принципы технологий внедрения вирусов в исполняемые файлы в форматах EXE и PE.

Построение и внедрение идентификационных меток третьего типа

Этот тип меток (самовосстанавливающиеся) предназначен для обеспечения **высокой** мощности механизма защиты идентификационных меток.

Самовосстанавливающиеся метки строятся на основе последовательности γ символов длины n в двоичном алфавите (1) следующим образом.

Последовательность γ разбивается на три части. Представим ее в виде:

$$\gamma = (\xi_1\xi_2 ... \xi_k\psi_1\psi_2 ... \psi_k\eta_1\eta_2 ... \eta_k), \text{ где } k = n/3.$$

Обозначим $\xi = (\xi_1\xi_2 ... \xi_k)$; $\psi = (\psi_1\psi_2 ... \psi_k)$; $\eta = (\eta_1\eta_2 ... \eta_k)$. Каждый из наборов ξ, ψ, η в отдельности подвергается дальнейшему кодированию:

$$\xi \to \chi_\xi; \quad \psi \to \chi_\psi; \quad \eta \to \chi_\eta.$$

Рассмотрим алгоритм кодирования на примере набора ξ.

Критическим участком исполняемого файла назовем такую последовательность байт, в которой каждый бит существенно влияет на работоспособность файла, т. е. при изменении хотя бы одного бита в данной последовательности исполняемый файл либо не работает, либо работает некорректно.

По определенному правилу из некоторого критического участка исполняемого файла выбирается последовательность k байт

$$\beta_i = (\beta_{i1}\beta_{i2} ... \beta_{ij} ... \beta_{i8}), \ i = [1..k]. \quad (2)$$

К каждому набору β_i применяется функция Y_m, которая удаляет символ с заданным номером m, выбираемый на основе идентификатора автора:

$$\beta_i' = Y_m(\beta_i) = (\beta_{i1} ... \beta_{i\,m-1}\beta_{i\,m+1} ... \beta_{i8}), \quad m \in [1..8]. \quad (3)$$

К каждому набору β_i' применяется функция I_j, которая для заданного j, выбираемого на основе идентификатора автора, преобразует бит β_{ij} по следующему правилу:

$$\beta_{ij} = 0, \text{ если } \beta_{ij} = \xi_i,$$
$$\beta_{ij} = 1, \text{ если } \beta_{ij} \neq \xi_i, \quad (4)$$

где $\xi_i \in \xi$.

Получаем $I_j(\beta_i') = \beta_i''$, $i = [1..k]$, $j \in [1..7]$. Заметим, что в результате применения функции I_j наборы β_i' и β_i'' могут различаться только в символе с номером j. Длина набора β_i'' равна 7.

Далее для каждого β_i'' строится код Хемминга: последовательность β_i'' кодируется набором

$$\chi_i = (\chi_{i1}\chi_{i2}\beta_{i1}\chi_{i3}\beta_{i2}\beta_{i3}\beta_{i4}\chi_{i4}\beta_{i5}\beta_{i6}\beta_{i7}), \quad (5)$$

где $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \chi_{i3}, \chi_{i4}$ – контрольные биты; $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \beta_{i4}, \beta_{i5}, \beta_{i6}, \beta_{i7}$ – биты последовательности β_i''.

Так как значения информационных битов последовательности χ_i известны (в силу выбора набора β_i), то для кодирования набора $\xi = (\xi_1\xi_2 ... \xi_k)$ будем использовать последовательность, состоящую только из контрольных битов кода Хемминга, построенного для каждого ξ_i:

$$\xi \to \chi_\xi = (\chi_{11}\chi_{12}\chi_{13}\chi_{14} ... \chi_{i1}\chi_{i2}\chi_{i3}\chi_{i4} ... \chi_{k1}\chi_{k2}\chi_{k3}\chi_{k4}). \quad (6)$$

Таким образом, каждая тетрада последовательности χ_ξ контролирует соответствующий бит идентификационной метки. Заметим, что длина кода χ_ξ составляет $4k$ битов.

Утверждение. Код, построенный в соответствии с правилами (2)–(6), является самокорректирующимся.

Доказательство утверждения следует из построения кода. Действительно, из построения β_i'' следует, что при изменении значения бита ξ_i в представлении метки в последовательности β_i'' может измениться только один бит, а код Хемминга, построенный для такой последовательности, позволяет обнаруживать и исправлять ошибку.

Идентификационные метки, внедряемые в исполняемый файл программы, строятся на основе наборов ξ. ψ. η, χ_ξ, χ_ψ, χ_η и могут быть представлены в следующем виде:

$$M_1 = (\xi\ \chi_\psi\ \chi_\eta);\ M_2 = (\chi_\xi\ \psi\ \chi_\eta);\ M_3 = (\chi_\xi\ \chi_\psi\ \eta).$$

Длина каждой метки составляет $9k$ битов.

Для внедрения самовосстанавливающихся меток используются оригинальные стеганографические методы включения информации в исполняемые файлы.

Применение автоматизированной системы идентификации программ

Предлагаемая система может быть использована, во-первых, в качестве практического средства для предварительной защиты авторских прав разработчиков программного обеспечения и, во-вторых, в качестве программного средства эксперта-криминалиста, специализирующегося по делам о компьютерных преступлениях и, в частности, связанным с нарушениями авторских прав создателей программного обеспечения.

1. Об авторском праве и смежных правах: Закон Республики Беларусь от 16 мая 1996 г. № 370-XIII // Ведомости Верховного Совета Республики Беларусь. 1996. № 20. С. 366; Ведомости Национального Собрания Республики Беларусь. 1998. № 31–32. С. 472; Изменения и дополнения: Закон от 11 августа 1998 г. № 194-З // Ведомости Национального Собрания Республики Беларусь. 1998. № 31–32. С. 472.

2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., 1979.

Поступила в редакцию 06.04.2001.

Михаил Константинович Буза – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения ЭВМ.

Елена Николаевна Ливак – старший преподаватель кафедры информатики и вычислительной техники ГрГУ им. Я. Купалы.

УДК 519.10

Г.В. МАТВЕЕВ, В.М. ШИРЯЕВ

ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧИСЛА НЕРАВЕНСТВ

Some new results on the number of unequatityes for arbitrary systems are obtained. Our approach is based on the arithmetical theory of quadratic forms.

При изучении подмножеств, свободных от сумм в абелевых группах [1], возникает следующая задача комбинаторного характера. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – упорядоченная система элементов конечного множества. Под неравенством в этой системе будем понимать бинарное соотношение $a_i \neq a_j$. При этом неравенства $a_i \neq a_j$ и $a_j \neq a_i$ не различаются. Систему $a_1, a_2, \ldots, a_m$ разобьем на классы одинаковых элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t$. Положим $|X_i| = x_i$, $i=1, 2, \ldots, t$. Очевидно $x_1+x_2+ \ldots +x_t=m$. Обозначим через n количество неравенств в системе.

Задача состоит в описании условий, при которых тройка натуральных чисел выступает в качестве системы параметров m, n, t.

Необходимым и достаточным условием реализуемости является разрешимость в целых положительных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_t = m, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{t-1}x_t = n. \end{cases} \qquad (1)$$

Попутно отметим, что понятие неравенства в буквальном смысле возникает и в других ситуациях и приводит к постановкам содержательных задач. Так, В.И. Сарванов сформулировал задачу о нахождении решения системы линейных неравенств, т. е. предлагается найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе $a_{i1}x_1+a_{i2}x_{i2}+\ldots+a_{in}x_{in}\neq b_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, где коэффициенты соотношений берутся из произвольного поля.

Теорема 1. Если система (1) разрешима в целых числах, то

$$t > \frac{m^2}{m^2 - 2n}. \qquad (2)$$

Доказательство. Система (1) очевидно эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_t = m, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_t^2 = m^2 - 2n. \end{cases} \qquad (3)$$

Если система (3) разрешима, то гиперплоскость в t-мерном пространстве, заданная уравнением $x_1+x_2+\ldots+x_t=m$, пересекает сферу радиуса $R = \sqrt{m^2 - 2n}$. Это означает, что расстояние d от начала координат до гиперплоскости удовлетворяет условию $d<R$, т. е. $d^2<m^2-2n$. Вычислим d. Вектор нормали из начала к гиперплоскости имеет вид $\left(\frac{m}{t}, \frac{m}{t}, \ldots, \frac{m}{t}\right)$.

Поэтому $d^2 = \frac{m^2}{t^2} + \frac{m^2}{t^2} + \ldots + \frac{m^2}{t^2} = \frac{m^2}{t}$. Следовательно,

$$d^2 \leq R^2 \Rightarrow \frac{m^2}{t} \leq m^2 - 2n \Rightarrow t \geq \frac{m^2}{m^2 - 2n}.$$

Используя арифметическую теорию квадратичных форм, можно сформулировать ряд необходимых условий модулярного типа [2]. Например, если $t=2$, то m^2-2n может содержать простой делитель вида $p=4k+3$ лишь в нечетной степени, если $t=3$, то $m^2-2n\not\equiv 7 \pmod 8$, и ряд других. Более того, при $t=2$ нетрудно найти необходимое и достаточное условие разрешимости. Оно состоит в том, чтобы m^2-4n было точным квадратом. Случай $t=3$ значительно сложнее. Перейдем к его рассмотрению.

Пусть m, n – натуральные числа. Будем исследовать разрешимость диофантовой системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = m, \\ xy + yz + zx = n. \end{cases} \qquad (4)$$

Множество всех решений системы обозначим через $\mathcal{L}$, а положительных решений – через $\mathcal{L}_+$. Введем также определение: натуральное число M назовем допустимым, если любой его простой делитель, больший трех, входящий в каноническое разложение этого числа в нечетной степени, сравним с 1 по модулю 3. Рассмотрим следующие условия:

1) $n\geq m\geq 3$;

2) $m^2\geq 3n$;

3) $4n>m^2$;

4) число m^2-3n является квадратом, и, если m^2–$4n$, то m кратно 3;

5) для некоторого делителя g числа n и некоторого натурального числа c выполняются условия:

$$\frac{3n}{m}<g;\quad \frac{g^2}{gm-n}<c<\frac{mg}{n};\quad mc\equiv g\ (\mathrm{mod}\ \frac{n}{g});$$

$$\frac{2g\left(m-\sqrt{m^2-3n}\right)}{3n}<c<\frac{2g\left(m+\sqrt{m^2-3n}\right)}{3n};$$

если $m^2>4n$, то либо $c<\frac{g\left(m-\sqrt{m^2-4n}\right)}{2n}$, либо $c>\frac{g\left(m+\sqrt{m^2-4n}\right)}{2n}$; число $\frac{(mc-g)g}{n}$ является допустимым; число $\frac{4g(mc-g)}{n}-3c^2$ есть квадрат, не равный нулю;

6) число m^2-3n является допустимым.

Теорема 2. Для того чтобы система (4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 2) и 6).

Теорема 3. Для того чтобы система (4) имела положительное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 2) и либо условие 4), либо условие 5).

Следствие 1. Для существования положительного решения системы (5) достаточно выполнения условий 1) – 4).

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\mathcal{L}\neq 0$. Неравенство 2) следует из неравенства (2) при $t=3$; т. е. $3>\frac{m^2}{m^2-2n}$, откуда $3m^2-6n\geq m^2$ и $m^2>3n$, т. е. 2) выполняется.

Докажем выполнение условия 6). Пусть $m^2>3n$ и $(x, y, z)\in\mathcal{L}$. Надо доказать допустимость числа m^2-3n. Для этого, полагая $u=y+z-2x$, $v=z+y$ и используя равенства (4), получим цепочку равенств:

$$u^2+3v^2=(y+z-2x)^2+3(z-y)^2=y^2+z^2+4x^2+2yz-4yx-4zx+3z^2-6xy+3y^2=$$
$$=4x^2+4y^2+4z^2-4yx-4zx-4xy=4(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)-12(xy+yz+zx)=4m^2-12n.$$

Поэтому число $M_1=4m^2-12n=u^2+3v^2$ является значением квадратичной формы u^2+3v^2 при данных значениях u и v. Дискриминант этой формы [3] равен -3, поэтому для существования решения уравнения (6) относительно u и v необходимо и достаточно выполнение сравнения $b^2\equiv-3\ (\mathrm{mod}\ M_1)$ для некоторого $b\in Z$.

Предположим, что M_1 имеет вид $M_1=d^2 2^\alpha 3^\beta M$, где $d, M\in N$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ и M – нечетное число, не делящееся на 3. Очевидно, сравнение $b^2\equiv-3$ $(\mathrm{mod}\ 2^\alpha 3^\beta)$ имеет решение, поэтому вопрос сводится к разрешимости сравнения $b^2\equiv-3\ (\mathrm{mod}\ M)$.

Пусть $M=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение числа M. Ввиду того что $M_1=d^2 2^\alpha 3^\beta M$, можно считать, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=1$, и тогда сравнение (11) сводится к системе сравнений

$$b^2\equiv-3\ (\mathrm{mod}\ p_1),\ \ldots,\ b^2\equiv-3\ (\mathrm{mod}\ p_r). \qquad (5)$$

Так как все простые числа p_i больше 3, то сравнения (5) разрешимы только в случае, когда $p_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, и только в том случае [4].

Достаточность. Предположим, что условия 2), 6) выполняются. Допустим, что $m^2=3n$. Тогда $3|m$, и положим $x=y=z=\frac{m}{3}$.

Тогда $x+t+z=m$ и $xy+yz+zx+\frac{3m^2}{9}=n$. Поэтому $(x, y, z)\in \mathcal{L}_+$.

Теперь рассмотрим случай

$$M_1=4m^2-12n>0. \qquad (6)$$

Согласно условию 6) число M_1 допустимо, поэтому существуют числа α, r, $M\in N$ такие, что

$$M_1=d^2rM, \qquad (7)$$

где $r|6$ и всякий простой делитель M сравним с 1 по модулю 3. Положим

$$M_2=rM. \qquad (8)$$

Согласно приведенным рассуждениям сравнение $b^2\equiv-3 \pmod{M_2}$ разрешимо, поэтому существует $c\in Z$ такое, что $b^2-M_2c=-3$. Это означает, что дискриминант квадратичной формы $M_2u^2+2buv+cv^2$ равен -3, откуда следует ее эквивалентность приведенной по Гауссу [3] форме. Следовательно, для некоторых $u_1,v_1\in Z$ выполняется равенство

$$u_1^2+3v_1^2=M_2. \qquad (9)$$

Теперь, полагая $u_0=du_1$, $v_0=dv_1$, получим, используя (6)–(9), равенства $4m^2-12n=M_1=d^2M_2=u_0^2+3v_0^2$.

Из этого, в частности, следуют сравнения $u_0^2\equiv m^2 \pmod 3$ и $u_0=v_0 \pmod 2$, поэтому u_0 можно подобрать так, что все числа из тройки $\left(\frac{m-u_0}{3}; \frac{2m+u_0-3v_0}{6}; \frac{2m+u_0+3v_0}{6}\right)$ являются целыми и нетрудно проверить, что эта тройка является решением системы (4). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Пусть $M_2\in N$. Для того чтобы уравнение (9) относительно целых переменных u_1 и v_1 имело решение, необходимо и достаточно, чтобы число M_2 было допустимым.

Доказательство теоремы 3 проводится с использованием тех же технических приемов, что и теоремы 2.

Доказательство следствия 1. Предположим, что выполняются условия 1)–4). Если $m^2-3n=0$, то, как было сказано ранее, положительное решение существует.

Пусть теперь $m^2>3n$. Согласно теореме 2 существует решение $(x, y, z)\in \mathcal{L}$. Предположим, что $x\leq 0$, и придем к противоречию. Согласно доказательству теоремы 2 существует пара чисел $(n, v)\in N_0\times N_0$ такая, что $4m^2-12n=u^2+3v^2$ и $m=3x+u$. Но из $x\leq 0$ следует, что $u\geq m$, а тогда $4m^2-12n=u^2+3v^2>m^2+3v^2$, откуда $3m^2-12n>3v^2$ и $m^2-4n>0$, что противоречит 3). Итак, при наличии этого условия система уравнений (4) может иметь только положительные решения.

Замечание. В случае, когда n – простое число, условие 5) состоит в существовании числа c, удовлетворяющего условиям:

$$3\leq c<m;\ \frac{n}{m-1}<c;\ \frac{2}{3}(m-\sqrt{m^2-3n})<c<\frac{2}{3}(m+\sqrt{m^2-3n});$$

если $m>4n$, то либо $c<\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}$, либо $c<\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}$; число $mc-n$ является допустимым; число $4mc-4n-3c^2$ есть полный квадрат, не равный нулю.

1. Mann H. B. Addition theorems. New York, 1965.
2. Касселс Д. Рациональные квадратичные формы. М., 1982.

3. Арнольд И.В. Теория чисел. М., 1939.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., 1981.

Поступила в редакцию 04.04.2001.

Геннадий Васильевич Матвеев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

УДК 517.948.32:517.544

Т.И. ГАТАЛЬСКАЯ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

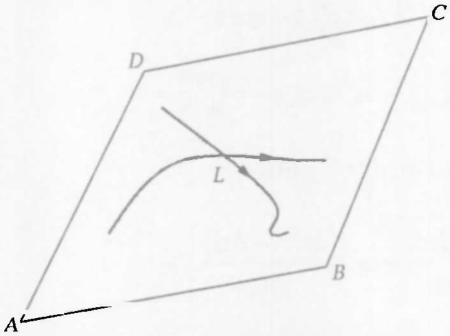
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

It is obtained the solution to the problem of the linear association (Riemann′s) for biperiodic functions.

Решение задачи линейного сопряжения (Римана) на замкнутой римановой поверхности рода h дано в работе [1]. Полученные результаты, разумеется, применимы и к случаю тора (т. е. при h=1). Если же тор реализовать в виде $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – двоякопериодическая решетка, $\Gamma=\{2m\omega+2m'\omega' | m, m'\in\mathbb{Z}\}$, то решение из [1] можно существенно упростить, используя аналитический аппарат теории эллиптических функций [2]. Это и является целью настоящей работы. Фиксируя основные периоды 2ω и $2\omega'$, где $\operatorname{Im}\dfrac{\omega'}{\omega}>0$, все вычисления будем проводить в одном (основном) параллелограмме периодов (рисунок):

$$\Pi:=\{2\omega t+2\omega' t' \mid 0\le t<1,\ 0\le t'<1\}, \tag{1}$$

отождествляя между собой каждую пару t, τ точек его края $\partial\Pi=ABCDA$, связанных хотя бы одним из равенств: $\tau=t+2\omega$, $\tau=t+2\omega'$. Для удобства вычислений введем на Π (комплексные) координаты, полагая A=0, $B=2\omega$, $C=2(\omega+\omega')$, $D=2\omega'$. Будем использовать обозначения из [1]. Пусть $L\subset\Pi$ – сложный кусочно-гладкий ориентированный контур (граф), $\Lambda\subset L$ – множество его узлов, J – дивизор порядка $m=\operatorname{ord} J$, составленный из точек множества Λ, D – дивизор порядка $n=\operatorname{ord} D$, составленный из точек множества $\Pi\backslash L$. Пусть задана кусочно-H-непрерывная функция $G(t)$, $T\in L\backslash\Lambda$, которая нигде не обращается в нуль, включая ее предельные значения в точках множества Λ. Рассмотрим сначала однородную задачу Римана:



Фундаментальный параллелограмм и контур

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ J^{-1}D^{-1}|(\Phi),\ t\in L. \tag{2}$$

Эта запись означает, что требуется найти все двоякопериодические (с основными периодами 2ω и $2\omega'$) функции Φ, мероморфные на $\Pi\backslash L$, кратные там дивизору D^{-1}, H-непрерывно продолжимые на $L\backslash\Lambda$, где их предельные значения слева (Φ^{+}) и справа (Φ^{-})

связаны равенством (2). В окрестности узлов задается асимптотика: $J^{-1}|(\Phi)$, которая означает, что функции Φ должны быть кратными дивизору J^{-1}.

Общее решение задачи (2) найдено в [1]. Желая приспособить его к рассматриваемому здесь случаю, следует прежде всего положить h=1, а вместо используемого в [1] *разрывного аналога ядра Коши* использовать выражение $\zeta(\tau-t)d\tau$, где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Вейерштрасса [2], построенная по основным периодам 2ω и $2\omega'$. Используя также введенные выше обозначения, можно утверждать, что общее решение задачи (2) при $z\in\Pi\backslash L$ содержится в формуле:

$$\Phi(z)=\varphi(z)\exp\left\{(2\pi i)^{-1}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\tilde z}\zeta(\tau-z)d\tau-m\int_0^{2\omega}\zeta(\tau-z)d\tau-m'\int_0^{2\omega'}\zeta(\tau-z)d\tau\right\}, \tag{3}$$

где под $\ln G(\tau)$ понимается произвольно зафиксированная непрерывная на $L\backslash\Lambda$, ветвь, а все остальное в правой части (3) вычисляется в зависимости от нее. Чтобы провести эти вычисления, используем известные [2] тождества:

$$\zeta(\tau-t-2\omega)=\zeta(\tau-t)-2\zeta(\omega),\ t\in[A,D],$$
$$\zeta(\tau-t-2\omega')=\zeta(\tau-t)-2\zeta(\omega'),\ t\in[A,B]$$

и запишем условие двоякой периодичности экспоненты в правой части (3):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)d\tau=\tilde z+2m\omega+2m'\omega'. \tag{4}$$

Из этого уравнения легко найти числа m, $m'\in\mathbb{Z}$ и точку $\tilde z\in[0,2\omega)\times[0,2\omega')$.

Учитывая, что числа ω и ω' линейно независимы над $\mathbb{R}$, представим левую часть (4) в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)d\tau=2\alpha\omega+2\alpha'\omega',\quad \text{где}\ \alpha,\ \alpha'\in\mathbb{R}.$$

Сравнивая это с (4), находим: $m=[\alpha]$, $m'=[\alpha']$, $\tilde z=2\{\alpha\}\omega+2\{\alpha'\}\omega'$, где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ означают целую и дробную части соответственно.

С учетом того, что $d\zeta(z)=d\ln\sigma(z)$, где $\sigma(\cdot)$ – сигма-функция Вейерштрасса, можно упростить правую часть (3):

$$\Phi(z)=\varphi(z)\exp\left\{(2\pi i)^{-1}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{\tilde z}-m\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{2\omega}-m'\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{2\omega'}\right\}=$$
$$=\varphi(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{\sigma(z-\tilde z)}{\sigma(z)}-m\ln\frac{\sigma(z-2\omega)}{\sigma(z)}-m'\ln\frac{\sigma(z-2\omega')}{\sigma(z)}\right\}=$$
$$=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde z)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-2m\zeta(\omega)z-2m'\zeta(\omega')z\right\}=$$
$$=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde z)}e^{-2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\}.$$

Дальнейшее упрощение здесь возможно, например, в случае, когда функция G – кусочно-постоянная. Если этого не предполагать, то общее решение задачи (4) приводится к виду:

$$\Phi(z)=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde{z})}\times$$
$$\times e^{-2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\},\tag{5}$$

где φ_1 – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}F^{-1}$, где дивизоры J и D заданы в (2), $F=(0)(\tilde{z})^{-1}$, ord $F=0$, а дивизор E порядка æ находится из асимптотики последнего множителя в правой части (5) в окрестности точек множества $\Lambda\subset L$.

Наряду с задачей (2) рассматривается так называемая *союзная* к ней задача

$$\Psi^-(t)=G(t)\Psi^+(t),\quad JD\,\|\,(\Psi),\quad t\in L.\tag{6}$$

Ее общее решение имеет такой вид:

$$\Psi(z)=\psi_1(z)\frac{\sigma(z-\tilde{z})}{\sigma(z)}\times$$
$$\times e^{2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\},\tag{7}$$

где $\psi_1(z)$ – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору $JDEF$, а все остальные символы в (7) – те же, что и в (5).

Пусть l и l' – размерности над полем $\mathbb{C}$ пространств решений задач (2) и (6) соответственно. Они связаны следующим равенством: $l-l'=æ+m+n$, вытекающим из теоремы Римана – Роха [3]. В случае $æ+m+n\neq0$ одно из чисел l, l' равно нулю. Если же $æ+m+n=0$, то возможны два случая: $l=l'=0$ либо $l=l'=1$. Последний случай реализуется, если и только если корнем уравнения (4) является точка $\tilde{z}=0$. В этом случае формулы (5) и (7) упрощаются за счет того, что в их правых частях второй множитель вырождается в константу.

Задавая H-непрерывную функцию $g: L\setminus\Lambda\to\mathbb{C}$, подчиненную асимптотике $J^{-1}\,|\,(g)$, рассмотрим неоднородную задачу сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad J^{-1}D^{-1}\,|'\,(\Phi),\quad t\in L,\tag{8}$$

где $|'$ означает псевдократность [1]. Критерием разрешимости задачи (8) является известное [1] равенство

$$\int_L g(t)\Psi^+(t)dt=0,\tag{9}$$

где Ψ – общее решение задачи (6). Значит, при $l'=0$ задача (8) разрешима безусловно, а при $l'\geq1$ – при выполнении l' линейно независимых условий (9).

Для построения частного решения задачи (8) следует факторизовать коэффициент G, что можно осуществить с помощью функции (5) при $l\geq1$ и с помощью (7) при $l'\geq1$. Если же $l=l'=0$, факторизацию можно осуществить с помощью правой части равенства (5), положив там $\varphi_1(z)\equiv1$, или, что то же самое, с помощью правой части (7), положив там $\psi_1(z)=1$. Итак, пусть

$l = æ + m + n \geq 1$, а Φ_0 – частное решение однородной задачи (2), содержащееся в формуле (5). Пользуясь произволом в расположении нулей решения (5), выберем Φ_0 так, чтобы точки целого дивизора $(\Phi_0)JD$ не попадали на контур L. Это можно сделать при $l > 1$. В случае $l = 1$ не исключено, что $a \in L$, и тогда рассуждения придется несколько видоизменить. Пусть $a \in \Pi \setminus L$ – одна из этих точек. Зафиксируем еще одну точку $b \in \Pi \setminus L$ так, чтобы было $a \neq b$. Построим мероморфный аналог ядра Коши [4], принимая $(a)(b)^{-1}$ за его характеристический дивизор:

$$\omega(z,\tau)d\tau = \frac{\sigma(\tau - z + a - b)}{\sigma(a-b)} \frac{\sigma(z-b)\sigma(\tau-a)}{\sigma(\tau-b)\sigma(z-a)} \frac{d\tau}{\sigma(\tau - z)}. \qquad (10)$$

Факторизуя с помощью решения Φ_0 коэффициент G, сведем задачу (8) к задаче о “скачке”:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Phi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Phi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)}, \quad t \in L, \qquad (11)$$

где новая неизвестная функция допускает полюс в точке a. Задача (11) разрешима безусловно, а ее решение можно найти в виде интеграла типа Коши с ядром (10). Таким образом, частное решение задачи (9) можно вычислить по формуле:

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\Phi_0^+(\tau)} \omega(z,\tau)d\tau, \qquad (12)$$

где ω – ядро (10).

Пусть теперь $l' \geq 1$, а Ψ_0 – частное решение союзной задачи (6), содержащееся в формуле (7). Факторизуя с его помощью коэффициент G, сведем задачу (8) к такой задаче о “скачке”:

$$\Phi^+(t)\Psi_0^+(t) - \Phi^-(t)\Psi_0^-(t) = g(t)\Psi_0^+(t), \quad t \in L. \qquad (13)$$

При выполнении условия (9) решение задачи (13) находится в виде интеграла типа Коши с ядром $\zeta(\tau - z)d\tau$. Отсюда можно найти частное решение неоднородной задачи (8)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\Psi_0(z)} \left[C + \frac{1}{2\pi i} \int_L g(\tau)\Psi_0^+(\tau)\zeta(\tau - z)d\tau \right], \qquad (14)$$

где постоянную C можно найти из того условия, чтобы выражение в квадратных скобках из (14) было кратным дивизору $(\Psi_0)J^{-1}D^{-1}$. И наконец, в случае $l = l' = 0$ факторизовать G следует с помощью правой части (5) при $\varphi_1(z) \equiv 1$. Неоднородная задача (8) в этом случае однозначно и безусловно разрешима, а ее решение находится по формуле, аналогичной (12), где ω – мероморфный аналог ядра Коши с характеристическим дивизором $JDEF$.

1. Зверович Э.И. // УМН. 1971. Т. XXVI. Вып. 1 (157). С. 113.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
3. Форстер О. Римановы поверхности. М., 1980.
4. Дегтяренко Н.А. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8 (447). С. 11.

Поступила в редакцию 27.11.2001.

Татьяна Ивановна Гатальская – лаборант кафедры теории функций.
Эдмунд Иванович Зверович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.

УДК 517.51: 517.53

А.П. СТАРОВОЙТОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

For a fixed sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers strictly decreasing to zero a absolutely continuous 2π-periodic function f is constructed such that $R_n^T(f) = a_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, where the $R_n^T(f)$ are the best approximations of *f* in the uniform norm by rational trigonometric functions of degree at most *n*.

Обозначим через $C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}^*$) банахово пространство действительных (комплекснозначных) 2π-периодических непрерывных функций, а $C^*(E)$ – банахово пространство непрерывных на компакте $E\subset \mathbf{R}$ комплекснозначных функций. Пусть $R_n^T(f)$ ($R_n^{*,T}(f)$) – наилучшие приближения функции $f\in C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}^*$) тригонометрическими рациональными функциями с действительными (комплексными) коэффициентами степени не выше $n=0, 1, 2, \ldots$. Аналогично $R_n^*(f, E)$ – наилучшие приближения алгебраическими рациональными функциями с комплексными коэффициентами.

Е.П. Долженко [1] установил, что, если для $f\in C^*(E)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n^*(f, E)<+\infty \Rightarrow f$ – абсолютно непрерывна на E.

Им же показано, что наилучшие рациональные приближения $R_n^*(f, E)$ абсолютно непрерывной функции f могут стремиться к нулю сколь угодно медленно (см. [2]), т. е. обратное утверждение не имеет места. Позже А.А. Пекарский обнаружил [3], что теорема Е.П. Долженко справедлива и в $C_{2\pi}^*$: если $f\in C_{2\pi}^*$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n^{*,T}(f, E)<+\infty \Rightarrow f$ – абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

В данной работе получено существенное продвижение в решении следующей проблемы (подробнее см. [4, 5]): какой должна быть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ действительных чисел, чтобы существовала такая абсолютно непрерывная функция $f\in C_{2\pi}$, для которой

$$R_n^T(f) = a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ? \qquad (1)$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что для любой $f\in C_{2\pi}$ $R_0^T(f) \geq R_1^T(f) \geq R_2^T(f) \geq \ldots \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^T(f)=0$. Следовательно, для справедливости (1) необходимо, чтобы последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастала и сходилась к нулю.

Теорема. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

$$1)\ a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > 0,\quad 2)\ \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty .$$

Тогда существует такая нечетная абсолютно непрерывная функция $g\in C_{2\pi}$, что

$$R_n^T(g) = a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_0=1$. Положим при $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n,\ \ \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1,\ \Delta a_2,\ \ldots,\ \Delta a_n\},$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_1}{5},\ \frac{\varepsilon_2}{5},\ \ldots,\ \frac{\varepsilon_n}{5},\ \ c_k = \frac{1-\beta_k^2}{1+\beta_k^2},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Введем в рассмотрение синус-дроби Чебышева – Маркова [7]

$$\nu_n(x) = \sin\varphi_{2n}(x) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1-c_k x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами.

В банаховом пространстве c_0 последовательностей $t=(t_0, t_1, t_2, \ldots)$, сходящихся к нулю, с нормой $\|t\|=\sup\{|t_n|:n=0, 1, 2, \ldots\}$ определим выпуклое компактное множество

$$K = \{t : 0 \le t_k \le \varepsilon_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \}.$$

Если $t\in K$, то, полагая $\Delta t_k=t_{k-1}-t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\ \sin\theta\,\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\cos\theta)}. \tag{2}$$

Ряд (2) равномерно сходится, поэтому функция $f_t\in C_{2\pi}$ и является нечетной.

При выполнении условий теоремы в [5] установлено, что отображение $\Pi : c_0 \to c_0$, $\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n^T(f_t)\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывно отображает K в себя. Поэтому по теореме Шаудера существует $t^* = (t_0^*,\ t_1^*,\ t_2^*,\ \ldots)\in K$, для которой $\Pi(t^*)=t^*$, т. е.

$$R_n^T(f_{t^*}) = a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Покажем, что функция $g = f_{t^*} \in C_{2\pi}$ является искомой. Для этого осталось доказать, что в условиях теоремы g является абсолютно непрерывной. Сделаем это методом, отличным от предложенного в [1], опираясь лишь на свойства дробей Чебышева – Маркова.

Лемма 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\ \ \Delta a_k < +\infty .$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{k=1}^{n} k\ \ \Delta a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n .$$

Отсюда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\ [\nu_n(\cos\ \theta)]'\right|\ d\theta = 4n .$$

Доказательство. Учитывая, что (см. [7]) $\varphi_{2n}'(x)\le 0$, $x\in[-1, 1]$, получаем:

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\ \varphi_{2n}(\cos\theta)\varphi_{2n}'(\cos\theta)\sin\theta\right| d\theta\ =\ 2\int_{0}^{\pi}\left|\cos\varphi_{2n}(\cos\theta)\right| d\varphi_{2n}(\cos\theta) =$$

$$= -2\int_{-1}^{1}\left|\cos\varphi_{2n}(x)\right| d\varphi_{2n}(x).$$

Так как функция $\varphi_{2n}(x)$ монотонно убывает на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\varphi_{2n}(-1)=2n\pi,\ \varphi_{2n}(1)\ n\pi,$$

то отрезок $[-1, 1]$ можно разбить на n отрезков $[a_k, b_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, пересекающихся только своими концами, каждый из которых отображается $\varphi_{2n}(x)$ биективно на отрезок, длина которого равна π. Поэтому

$$I_n = -2n\int_{a_k}^{b_k}\left|\cos\varphi_{2n}(x)\right|\ d\varphi_{2n}(x) = 2n\int_0^{\pi}\left|\cos t\right|\ dt = 4n.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, составленный из функций $f_k \in C_{2\pi}$ абсолютно непрерывных на [–1, 1], сходится в некоторой точке $\xi \in [-\pi, \pi]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(x)\right|dx < +\infty, \tag{3}$$

то этот ряд равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции $f \in C_{2\pi}$.

Доказательство. В силу теоремы Лебега [8] из (3) следует сходимость почти всюду ряда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k'(x)\right|$, следовательно, и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$. Функция $S(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|S(x)\right|dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(x)\right|dx < +\infty,$$

и почти всюду на $[-\pi, \pi]$ $\left|\sum_{k=1}^{m} f_k'(x)\right| \le S(x)$ при любом m. Поэтому (теорема Лебега) законен предельный переход под знаком интеграла:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\{f_k(\xi) + \int_{\xi}^{x} f_k'(t)dt\} = f(\xi) + \int_{\xi}^{x}\{\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\}dt.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность функции f. Лемма доказана.

Положим теперь

$$f_k(\theta) = (\Delta a_k + \Delta t_k)\sin\theta\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1 - c_j\cos\theta)}.$$

Так как при $t \in K\,|\Delta t_k| < \Delta a_k$, то в силу условий теоремы и леммы 1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(\theta)\right|d\theta \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta a_k\int_{-\pi}^{\pi}\left|[\nu_n(\cos\theta)]'\right|d\theta = 8\sum_{k=1}^{\infty}k\Delta a_k < +\infty.$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму 3.

С одной стороны, полученные в теореме достаточные условия на последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не совпадают с минимальными необходимыми условиями. С другой стороны, как было отмечено, наилучшие рациональные приближения абсолютно непрерывной функции могут стремиться к нулю сколь угодно медленно. В этой связи вполне вероятно, что условие 2) в теореме можно ослабить до необходимого условия $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Результаты данной статьи анонсированы в материалах [9–10].

1. Долженко Е.П. // Мат. сб. 1962. Т. 56 (98). С. 403.
2. Гончар А.А. // Труды Международного конгресса математиков. М., 1966. С. 329.
3. Пекарский А.А. // Мат. сб. 1982. Т. 117 (159). С. 114.
4. Долженко Е.П. // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313.
5. Старовойтов А.П. // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
7. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
8. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.
9. Старовойтов А.П. // Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж, 2001. С. 41.
10. Он же. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. конф. Мн., 2001. С. 156.

Поступила в редакцию 17.05.2001.

Александр Павлович Старовойтов – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 517.955

Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The existence and uniqueness theorems of strong solutions of the Cauchy problems for hyperbolic factorized even-order differential equations with variable domains of smooth operator coefficients are proved. The formula of their strong solutions $u = M_1^{-1} \cdots M_m^{-1}\Im$ is obtained for the first time.

Докажем корректную сильную разрешимость задач Коши (ЗК) для гиперболических факторизованных дифференциальных уравнений четных порядков с переменными областями определения операторных коэффициентов. Случай постоянных областей определения исследован в работе [1]. В настоящей работе доказательства проводятся функциональным методом, родственным методу из [1]. В отличие от [1] вывод априорных оценок обобщен на случай переменных областей определения и дополнен новыми интерполяционными неравенствами (11), приведено новое доказательство разрещимости, и впервые получена формула сильных решений (14).

Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (•,•) и нормой |•| рассматриваются задачи Кощи :

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv \left(d^2/dt^2 + A_m(t)\right)\cdots\left(d^2/dt^2 + A_1(t)\right)u = f,\ t \in \left]0,\ T\right[, \qquad (1)$$

$$\ell_j u = d^j u/dt^j\big|_{t=0} = \varphi_j \in H,\ 0 \le j \le 2m-1,\ m = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (2)$$

где u, f – функции t со значениями в H, $A_k(t)$ – самосопряженные положительные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

1. Операторы $A_k(t)$ $t \in [0,\ T]$, являются сужениями на $D(A_k(t))$ линейных операторов $\tilde{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\tilde{A}_k)$.

2. Их обратные $A_k^{-1}(t) \in L_\infty(]0,\ T[, \mathscr{L}(H))$ при почти всех t в H имеют сильную производную $dA_k^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,\ T[, \mathscr{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$-\left((dA_k^{-1}(t)/dt)g,\ g\right) \le c_k^{(1)}\left(A_k^{-1}(t)g,\ g\right)\ \forall g \in H. \qquad (3)$$

3. Операторы $dA_k^{-1}(t)/dt$ при почти всех t в H имеют сильную производную $d^2A_k^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,\ T[, \mathscr{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам

$$\left|\left((d^2A_k^{-1}(t)/dt^2)g,\ v\right)\right| \le c_k^{(2)}|g|\left(A_k^{-1}(t)v,\ v\right)^{1/2}\ \forall g,\ v \in H. \qquad (4)$$

4. Области определения $D(A_k^m(t))$ степеней $A_k^m(t)$ плотны в H для всех $1 \le k \le m$; для $\forall t \in [0,\ T]$ эквивалентны нормы:

$|A_s(t)u| \sim |A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u|$ $\forall u \in D(A_k(t))$, $1 \le s \ne k \le m$; и при $\alpha \le 2m-4$

$$\left|A_s(t)A_k(t)v - A_k(t)A_s(t)v\right|_{\alpha(t)} \le c_{s,k}|v|_{(\alpha+3)(t)}\quad \forall v \in W^{\alpha+4}(t),\ t \in [0,T],\ s \ne k, \qquad (5)$$

где гильбертовы пространства $W^\beta(t)$ – области определения $D(A_1^{\beta/2}(t))$ степеней $A_1^{\beta/2}(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{\beta(t)} = \left|A_1^{\beta/2}(t)v\right|$, $\beta \le 2m$.

5. Существуют не зависящие от t банаховы пространства V^{2i}, $0 \le i \le m$, такие, что

$$V^0 = H;\ V^2 = D(\tilde{A}_k);\ V^{2j} \subset V^{2i},\ j > i;\ W^{2i}(t) \subset V^{2i}\ \forall t \in [0, T],\ 0 \le i \le m;$$

и существуют сильные производные

$$d^i \tilde{A}_k(t)/dt^i \in L_\infty(]0, T[, \mathscr{L}(V^{2[j/2]+2}, V^{2[j/2]})),\ 0 \le j \le 2m-2-i,\ 0 \le i \le 2m-2,$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Постоянные $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $c_{s,k} \ge 0$ не зависят от g, v и t.

Однозначность и устойчивость. Обозначим через $\mathscr{H}^\alpha$ гильбертовы пространства $L_2(]0, T[, W^\alpha(t))$ с эрмитовыми нормами $\|\bullet\|_\alpha$, $\alpha < 2m$. Пусть банаховы пространства E^m – пополнения множеств

$$D(L_m) = \{u \in D(\tilde{L}_m) : d^s u/dt^s \in \mathscr{H}^{2m-2[(s+1)/2]},\ 0 \le s \le 2m-1\},$$

где $D(\tilde{L}_m) = \{u \in \mathscr{H}^0 : d^s u/dt^s \in L_2\left(]0, T[, V^{2m-2[(s+1)/2]}\right),\ 0 < s < 2m;\ \dfrac{d^{2m-2}u}{dt^{2m-2}},$

$$\frac{d^{\alpha_1}\tilde{A}_{k_1}(t)}{dt^{\alpha_1}} \cdots \frac{d^{\alpha_p}\tilde{A}_{k_p}(t)}{dt^{\alpha_p}} \frac{d^{2m-2-2p-|\alpha(p)|}u}{dt^{2m-2-2p-|\alpha(p)|}} \in \mathscr{H}^2,\quad 0 \le |\alpha(p)| \le 2m-2-2p,\quad 1 \le p \le m-1,$$

$1 \le k_1, \ldots, k_p \le m$, $k_i \ne k_j\}$, $\alpha(p) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ и $|\alpha(p)| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$, по нормам $|||u|||_m = \left\{ \sup\limits_{0<t<T} \sum\limits_{i=0}^{2m-1} \left| \dfrac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^2_{(2m-1-i)(t)} \right\}^{1/2}$. Пусть $F^m = \mathscr{H}^0 \times W^{2m-1}(0) \times \cdots \times W^1(0) \times H$ – гильбертовы пространства элементов $\mathfrak{I} = \{f, \varphi_0, \ldots, \varphi_{2m-1}\} \in F^m$ с нормами

$$\langle\|\mathfrak{I}\|\rangle_m = \left(\|f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{2m-1} |\varphi_j|^2_{(2m-1-j)(0)} \right)^{1/2}.$$

ЗК (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m = \{\mathcal{L}_m(t), \ell_0, \ldots, \ell_{2m-1}\} : E^m \supset D(L_m) \to F^m$. Стандартным образом доказывается, что если выполняются условия 1, 2, 4 и 5, то они допускают замыкания $\overline{L_m} : E^m \supset D(\overline{L_m}) \to F^m$. Решения операторных уравнений $\overline{L_m}\, u = \mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} \in F^m$, $m = 1, 2, \ldots$, называются сильными решениями ЗК (1), (2). Выведем априорные оценки этих решений.

Теорема 1. *Если выполняются условия 1, 2, 4 и 5, сильная производная* $dA_1^{-m}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathscr{L}(H, W^{2m-1}(t)))$ *при* $m>1$ *и* $D(L_m)$ *плотны в* $\mathscr{H}^0$, *то*

$$|||u|||_m^2 \le c_0(m) \langle\|\overline{L_m} u\|\rangle_m^2 \quad \forall u \in D(\overline{L_m}),\ c_0(m) > 0,\ m = 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{M}_k(t) = d^2/dt^2 + A_k(t)$, $\mathcal{L}_k^{(s,n)}(t) = \mathcal{M}_n(t) \cdots \mathcal{M}_{k+1}(t)\mathcal{M}_{k-1}(t) \cdots \mathcal{M}_s(t)$, $1 \le s \le k \le n \le m$, и запишем $\mathcal{L}_m(t) = \mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t) + \mathcal{P}_{k,m}(t)$, где в силу неравенств (5)

$$|\mathcal{P}_{k,m}(t)\, u|^2 \le \tilde{c}_k \sum_{i=0}^{2m-3} \left| d^i u/dt^i \right|^2_{(2m-1-i)(t)} \quad \forall u \in D(L_m),\ \tilde{c}_k \ge 0. \qquad (7)$$

Операторы сглаживания $A_{k,\varepsilon}^{-1}(t) = (I + \varepsilon A_k(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, имеют свойства [2]:

1) при $\forall\, t \in [0, T]$ норма $\left| A_{k,\varepsilon}^{-1}(t)v - v \right| \to 0$ $\forall v \in H$, если $\varepsilon \to 0$;

2) существует сильная производная по t в H $dA^{-1}_{k,\varepsilon}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$.

Интегрируя один раз по частям, получаем для $\forall u \in D(\tilde{L}_m)$ равенства

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)\Big|_{t=\tau} = 2\operatorname{Re}\int_0^\tau (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u, A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\frac{d}{dt}\times$$

$$\times\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)dt + \int_0^\tau (\frac{d(A_k(t)A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t))}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\,,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)dt +$$

$$+(A_k(t)\;\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\,,\;A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\;)\Big|_{t=0}.$$

Здесь во втором интеграле воспользуемся формулами из работы [2]

$$d\left(A_k(t)A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\right)/dt = -A_k(t)A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\left(dA_k^{-1}(t)/dt\right)A_k(t)A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t),$$

неравенствами (3) и придем к неравенствам

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)\Big|_{t=\tau} \le 2\operatorname{Re}\int_0^\tau (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u,$$

$$A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)dt + c_k^{(1)}\int_0^\tau (A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, A^{-1}_{k,\,\varepsilon}(t)A_k(t)\,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u)dt +$$

$$+(A_k(t)\;\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u,\;A^{-1}_{k,\varepsilon}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\;)\Big|_{t=0}.$$

В этих неравенствах устремим ε к нулю и согласно свойству 1) будем иметь

$$(A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, \mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)\Big|_{t=\tau} < 2\operatorname{Re}\int_0^\tau (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u,\;\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)\,u)dt +$$

$$+\;c_k^{(1)}\int_0^\tau (\,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u,\;A_k(t)\,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u)dt + (A_k(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\,,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\;)\Big|_{t=0}. \quad (8)$$

Интегрируя один раз по частям, имеем для $\forall u \in D(\tilde{L}_m)$ равенства

$$\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\right|^2\Big|_{t=\tau} = 2\operatorname{Re}\int_0^\tau (\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u)dt +$$

$$+\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\right|^2\Big|_{t=0}.$$

Сложив эти равенства с неравенствами (8), получаем неравенства

$$[\,|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u|^2 + |A_k^{1/2}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u|^2\,]\Big|_{t=\tau} \le 2\operatorname{Re}\int_0^\tau (\,\mathcal{L}_m(t)u,$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\big)dt \;+\int_0^\tau \Phi_k(u,u)dt +$$

$$+\Big[\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\right|^2 + \left|A_k^{1/2}(t)\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u\right|^2\Big]\Big|_{t=0}\;\forall u \in D(\tilde{L}_m), \quad (9)$$

где

$$\Phi_k(u,u) = c_k^{(1)}(\,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u, A_k(t)\,\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u) - 2\operatorname{Re}(\mathcal{P}_{k,\,m}(t)u, \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,\,m)}(t)u).$$

Из условий 1, 4 и 5 вытекают неравенства (см. [1])

$$|A_s(t)u - A_k(t)u|_{\alpha(t)} \ge \tilde{c}_{s,k}|u|_{(\alpha+2)(t)}\;\forall u \in W^{\alpha+2}(t),\; t \in [0,\;T],$$

$$\alpha < 2m-2,\;1 \le s < k < m,$$

где $\tilde{c}_{s,k} > 0$, и аналогично лемме 1 из [1] для $\forall u \in D(L_m)$, $\forall t \in [0, T]$ – неравенства

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2 + \left|\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t)u\right|^2_{1(t)}\right) \geq c_1\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)} - c_2\sum_{i=0}^{2m-3}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}, \quad (10)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$. Можно доказать интерполяционные неравенства

$$\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}\Bigg|_{t=\tau} \leq c_3\int_0^\tau\left|\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\right|^2_{(2m-1-(i+1))(t)}dt + c_3(1+2\mathcal{M}_{(2m-2-i)/2m})\times$$

$$\times\int_0^\tau\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)}dt + \left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-2-i)(t)}\Bigg|_{t=0} \quad \forall u \in D(L_m),\ 0 \leq i \leq 2m-2, \quad (11)$$

где $c_3 = \sup\limits_{0<t<T}\left\|A^{-1}(t)\right\|^{1/2}$ и $\mathcal{M}_\gamma = \frac{1}{3}\sup\limits_{0<t<T}\left\|A_1^{m-1/2}(t)(dA^{-m}(t)/dt)\right\|\int_0^\infty\frac{\sigma^\gamma}{(1+\sigma)^2}d\sigma$.

Просуммируем (9) по k, $1 \leq k \leq m$, применим оценки (7), (10) и (11) и найдем

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)}\Bigg|_{t=\tau} \leq c_4\int_0^\tau\sum_{i=0}^{2m-1}\left|\frac{d^iu}{dt^i}\right|^2_{(2m-1-i)(t)}dt +$$

$$+ c_5\int_0^\tau\left|\mathcal{L}_m(t)u\right|^2 dt + c_6\sum_{j=0}^{2m-1}\left|\ell_ju\right|^2_{(2m-1-j)(0)} \quad \forall u \in D(L_m),$$

где постоянные c_4, c_5, $c_6 > 0$. Наконец, здесь воспользуемся леммой Гронуолла [1], возьмем верхнюю грань по τ и получим неравенства (6) для $\forall u \in D(L_m)$. Затем неравенства (6) распространяются предельным переходом на $\forall u \in D(\overline{L_m})$.

Разрешимость. Из теоремы 1 вытекают однозначность и устойчивость сильных решений ЗК (1), (2). Их разрешимость дает

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1 *и условие* 3, *то для* $\forall f \in \mathcal{H}^0$ *и* $\forall \varphi_j \in W^{2m-1-j}(0)$, $0 \leq j \leq 2m-1$, *существует сильное решение* $u \in E^m$ ЗК (1), (2).

Доказательство осуществим индукцией по m. При $m=1$ уравнение $\overline{L_1}u = \mathfrak{F}$ в силу неравенств (3) и (4) разрешимо при $\forall \mathfrak{F} \in F^1$ [2]. Сделаем индуктивное предположение о разрешимости уравнений $\overline{L_{m-1}}u = \mathfrak{F}$ при $\forall \mathfrak{F} \in F^{m-1}$, $m = 2, \ldots$, и любом составе и порядке различных множителей $\mathcal{M}_k(t)$ в $\mathcal{L}_{m-1}(t)$ и докажем разрешимость уравнений $\overline{L_m}u = \mathfrak{F}$ в E^m при $\forall \mathfrak{F} \in F^m$, $m = 2, \ldots$.

Возьмем линейные операторы

$$L_k^{(1,m)} \equiv \{\mathcal{L}_k^{(1,m)}(t), \ell_0, \ldots, \ell_{2m-3}\}: E^{m-1} \supset D(L_{m-1}) \to F^{m-1}$$

в других пространствах $L_k^{(1,m)}: E^m \supset D(L_m) \to E^{1,m} = E^1 \times W^{2m-2}(0) \times \cdots \times W^1(0)$ – банаховы пространства с нормами $\|u\|_{1,m} = \left(\|u\|_1^2 + \sum\limits_{j=0}^{2m-3}\left|\ell_ju\right|^2_{(2m-2-j)(0)}\right)^{1/2}$. Их замыканиями являются сужения замыканий $\overline{L_k^{(1,m)}}$ на E^m. Рассмотрим линейные операторы $M_k = \{\mathcal{M}_k(t),\ A_1^{-1/2}(0),\ ...,\ A_1^{-1/2}(0),\ \ell_0,\ \ell_1\}$: $E^{1,m} \supset D(L_1) \times \times W^{2m-2}(0) \times \cdots \times W^1(0) \to F^m$, замыкания которых $\overline{M_k}$ согласно [2] имеют ограниченные обратные $\overline{M_k}^{-1} : F^m \to E^{1,m}$. В силу (7) решения уравнений $\overline{L_m} u = \Im$ при $\Im \in F^m$ одновременно являются решениями уравнений $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} u = \Im_k$ при каких-то $\Im_k \in F^m$, $1 \leq k \leq m$. Применяя лемму 5 из [3] к операторам $S_1 = L_k^{(1,m)}$ и $T_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m, F_1 = E^{1,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} \subset \overline{M_k}\,\overline{L_k^{(1,m)}}$. Отсюда заключаем, что уравнения $\overline{M_k L_k^{(1,m)}} u = \Im_k$ для $\forall u \in D(\overline{L_m})$ можно записать в виде $\overline{M_k}\,\overline{L_k^{(1,m)}} = \Im_k$. Благодаря [2] вторые уравнения для $\forall \Im_k \in F^m$ имеют решения $\overline{L_k^{(1,m)}} u = \overline{M_k}^{-1} \Im_k \in E^{1,m}$, а по индуктивному предположению последние уравнения имеют решения $u = \overline{L_k^{(1,m)}}^{-1}\,\overline{M_k}^{-1} \Im_k \in E^{m-1}$, где $\overline{L_k^{(1,m)}}^{-1}$ – обратные операторов $\overline{L_k^{(1,m)}}$. Докажем, что $u \in E^m$.

В силу (7) решения $u \in E^{m-1}$ уравнений $\overline{L_k^{(1,m)}} u = \Phi_k \in F^{m-1}$ являются решениями уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k} u = \widetilde{\Psi}_k$ при каких-то $L_{m-2}^{(k)}$ и $\widetilde{\Phi}_k \in F^{m-1}$, $1<k<m$.

Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}^{2,2}$ – множество $D(L_1)$ с эрмитовой нормой $\|u\|_{2.2} = \left(\|d^2u/dt^2\|_0^2 + \|du/dt\|_0^2 + \|u\|_2^2\right)^{1/2}$. Если $v \in E^{m-1}$ – решение уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)} M_k} v = \widetilde{\Psi}_k$ при $\widetilde{\Phi}_k \in F^{2,m} = \mathcal{H}^{2,2} \times W^{2m-1}(0) \times \cdots \times W^2(0)$, то $M_k \overline{L_{m-2}^{(k)} M_k} v = M_k \widetilde{\Phi}_k \in F^m$, где операторы $M_k \equiv \{\mathcal{M}_k(t), I, \ldots, I, \ell_0, \ell_1\} : F^{2,m} \to F^m$ ограничены. Применяя аналог леммы 6 из [3] к операторам $T_1 = L_{m-2}^{(k)} M_k$ и $S_1 = M_k$ в пространствах $E_1 = E^m$, $F_1 = F^{2,m}$ и $G_1 = F^m$, получаем вложения

$$M_k \overline{L_{m-2}^{(k)} M_k} \subset \overline{M_k \left(L_{m-2}^{(k)} M_k\right)}. \tag{12}$$

Применение леммы 5 из [3] к операторам $S_1 = M_k \equiv \{\mathcal{M}_k(t),\ \ell_0,\ \ell_1\} : E^m \supset D(L_m) \to E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0)$ и $T_1 = M_k L_{m-2}^{(k)} \equiv \{\mathcal{L}_{m-1}^{(k)}(t),\ A_1^{-1/2}(0),\ A_1^{-1/2}(0),\ \ell_0,\ ...,\ \ell_{2m-3}\} : E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \times \times W^{2m-3}(0) \supset D(L_{m-1}) \times W^{2m-2}(0) \times W^{2m-3}(0) \to F^m$ приводит к вложениям

$$\overline{\left(M_k L_{m-2}^{(k)}\right) M_k} \subset \overline{M_k L_{m-2}^{(k)}}\,\overline{M_k}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) имеем уравнения $\overline{M_k L_{m-2}^{(k)} M_k} v = M_k \widetilde{\Phi}_k$, которые по предположению индукции имеют решения $\mathcal{M}_k(t) v \in E^{m-1}$, $1 \leq k \leq m$. Для $\forall v \in D(L_m)$ выводятся неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{2m-3} \left| d^i \mathcal{M}_k(t) v / dt^i \right|_{(2m-3-i)(t)}^2 \geq$$

$$\geq c_7 \sum_{i=0}^{2m-1} \left| \frac{d^i v}{dt^i} \right|_{(2m-1-i)(t)}^2 - c_8 \sum_{i=0}^{2m-3} \left| \frac{d^i v}{dt^i} \right|_{(2m-2-i)(t)}^2, \quad c_7 > 0,$$

из которых предельным переходом убеждаемся в том, что $v \in E^{m}$. так как уже $v \in E^{m-1}$. Используя этот факт, неравенства (7), (10) и (11) и лемму Гронуолла, можно вывести неравенства

$$c_9 \|u\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \left\| \overline{L_k^{(1,m)}} u \right\|_{1,m}^2 \quad \forall u \in E^m, \ c_9 > 0,$$

которые означают, что решение $u \in E^m$. Попутно индукцией по m находим, что

$$u = \overline{L_m}^{-1} \Im = \overline{M_1}^{-1} \cdots \overline{M_m}^{-1} \Im \in E^m \quad \forall \Im \in F^m, \ m = 1, 2, \ldots . \qquad (14)$$

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{2m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} = f, \ t \in \left]0, T\right[, \ m = 1, 2, \ldots,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(\left]0, T\right[, \mathscr{L}(W^{2m-1-k}(t), H))$, $0 < k \leq 2m-1$.

1. Радыно Я.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 2. С. 331.
2. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.
3. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

Федор Егорович Ломовцев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

УДК 517.926.4

Л.А. АЛЬСЕВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫМИ ОТРАЖАЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

A class of linear differential systems with reflecting matrices of block-diagonal structure is formed and investigated by the Mironenko's method of the reflecting function. Two points boundary-value problems are investigated for the above class of systems. The necessary and sufficient conditions are given for the existence of solutions of mentioned problems.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \ t \in R, x \in R^{2n}, \qquad (1)$$

где $P(t)$ – непрерывная матрица.

Известно [1, с. 30], что отражающая функция системы (1) является линейной, т. е. имеет вид $F(t)x$, где $F(t)$ – отражающая матрица данной системы. Известно также [2, 3], что существуют линейные дифференциальные системы вида (1) с распадающимися отображениями за период. В частности, этот случай имеет место, когда отражающая матрица системы является блочно-диагональной.

Лемма. Для существования у системы (1) отражающей матрицы $F(t)$ вида

$$F(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & 0 \\ 0 & C_2(t) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$, 0 – $n\times n$-матрицы, причем $C_1(t)$, $C_2(t)$ – непрерывно-дифференцируемые матрицы, $C_1(0)=C_2(0)=E$ – единичная матрица, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы

$$P(t)=\begin{pmatrix} T(t) & R(t) \\ S(t) & Q(t) \end{pmatrix}$$

выполнялись условия

$$\begin{aligned} &C_1'(t)+C_1(t)T(t)+T(-t)C_1(t)\equiv 0, \quad C_1(t)R(t)+R(-t)C_2(t)\equiv 0, \\ &C_2(t)S(t)+S(-t)C_1(t)\equiv 0, \quad C_2'(t)+C_2(t)Q(t)+Q(-t)C_2(t)\equiv 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $T(t)$, $R(t)$, $S(t)$, $Q(t)$ – непрерывные $n\times n$-матрицы.

Доказательство леммы следует из основного соотношения [1, с. 30] (см. также [4])

$$F'(t)+F(t)P(t)+P(-t)F(t)=0,\ F(0)=E$$

(E – единичная $2n\times 2n$-матрица), которое является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица $F(t)$ была отражающей матрицей системы (1).

Рассмотрим теперь линейную дифференциальную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}=(A+M(t))x+R(t)y, \\ \dot{y}=S(t)x+(B+N(t))y, \ t\in R, \ x, \ y\in R^n, \end{cases} \tag{4}$$

где A и B – постоянные, $M(t)$, $R(t)$, $S(t)$, $N(t)$ – непрерывные $n\times n$-матрицы.

Теорема 1. Для существования у системы (4) отражающей матрицы вида (2), где $C_1(t)=e^{-2At}$. $C_2(t)=e^{-2Bt}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M(t)=e^{At}L(t)e^{-At},\ R(t)=e^{At}G(t)e^{-Bt},\ S(t)=e^{Bt}H(t)e^{-At},\ N(t)=e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt},$$

где $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $N(t)$ – непрерывные нечетные $n\times n$-матрицы, а $M(0)=R(0)=$ $=S(0)=N(0)=0$, так что $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=P(0)$.

Доказательство теоремы 1 состоит в проверке выполнимости соотношений (3) при условии, что

$$C_1(t)=e^{-2At},\ C_2(t)=e^{-2Bt},\ T(t)=A+e^{At}L(t)e^{-At},$$
$$R(t)=e^{At}G(t)e^{-Bt},\ S(t)=e^{Bt}H(t)e^{-At},\ Q(t)=B+e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt}.$$

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{x}=(A+e^{At}L(t)e^{-At})x+e^{At}G(t)e^{-Bt}y, \\ \dot{y}=e^{Bt}H(t)e^{-At}x+(B+e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt})y, \ t\in R, \ x, \ y\in R^n. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть 2ω-периодическая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=P(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ P(0)=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},\ P(t+2\omega)=P(t)$$

имеет вид (5), где матрицы $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $\Phi(t)$ непрерывны, нечетны. Тогда система (5) устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, если стационарные системы

$$\dot{x}=Ax, \tag{6}$$
$$\dot{y}=By \tag{7}$$

одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы).

Отображение за период $[-\omega, \omega]$ для этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} e^{2\omega A} & 0 \\ 0 & e^{2\omega B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2 основано на том, что система (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ \dot{y} = By \end{cases} \tag{9}$$

в смысле совпадения отражающих матриц [1, с. 21], а отражающая матрица системы (9) имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{-2At} & 0 \\ 0 & e^{-2Bt} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что характер устойчивости систем (6), (7) совпадает с характером устойчивости системы (9). А тогда на основании [5] характеры устойчивости системы (5) и систем (6), (7) совпадают. Отображение за период $[-\omega, \omega]$ для 2ω-периодической системы (1) с отражающей матрицей $F(t)$ [1, с. 12] определяется по формуле $T(x)=F(-\omega)x$. Отсюда и следует соотношение (8).

Следствие. Пусть 2ω-периодическая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = P(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad P(t+2\omega) = P(t)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + e^{At}L(t)e^{-At})x + e^{At}G(t)e^{-At}y, \\ \dot{y} = e^{At}H(t)e^{-At}x + (A + e^{At}\Phi(t)e^{-At})y, \quad x,\ y \in R^n, \end{cases} \tag{10}$$

где $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $\Phi(t)$ – непрерывные нечетные матрицы. Тогда система (10) устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, если устойчива (асимптотически устойчива) стационарная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n.$$

Пусть система (1) имеет отражающую матрицу $F(t)$. Рассмотрим задачу отыскания решений $x(t)$ системы (1), удовлетворяющих условию

$$\Psi(x(\alpha), x(-\alpha))=0. \tag{11}$$

Известно [6], что знание отражающей матрицы системы (1) позволяет решать краевую задачу (1), (11). Действительно, используя свойство отражающей матрицы $x(-t)=F(t)x(t)$, условие (11) можно записать в виде

$$\Psi(x(\alpha), F(\alpha)x(\alpha))=0, \tag{12}$$

следовательно, решение задачи (1), (11) свелось к решению системы (12). При этом решение $\varphi(t{:}\ \alpha, x_0)$ будет решением краевой задачи (1), (11) тогда и только тогда, когда

$$\Psi(x_0, F(\alpha)x_0)=0, \tag{13}$$

где $\varphi(t;\ t_0, x_0)$ – общее решение системы (1) в форме Коши.

Если в качестве краевого условия (11) рассмотреть линейное краевое условие

$$\Lambda_1 x(\alpha)+\Lambda_2 x(-\alpha)=0, \tag{14}$$

где Λ_1, Λ_2 – заданные $2n\times2n$-матрицы, то соотношение (13) примет вид

$$(\Lambda_1+\Lambda_2 F(\alpha))x(\alpha)=0,$$

а решение $\varphi(t{:}\ \alpha, x_0)$ будет решением краевой задачи (1), (14) тогда и только тогда, когда x_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы

$$(\Lambda_1+\Lambda_2 F(\alpha))z=0.$$

Из этих рассуждений следуют

Теорема 3. Решение $\varphi(t;\ \alpha,\ v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (11) тогда и только тогда, когда $\Psi(v_0,\ w_0)=0$, где $v_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $w_0=\begin{pmatrix} e^{-2\alpha A}x_0 \\ e^{-2\alpha B}y_0 \end{pmatrix}$.

Теорема 4. Решение $\varphi(t:\ \alpha,\ v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (14) тогда и только тогда, когда v_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы $(\Lambda_1+\Lambda_2F(\alpha))v_0=0$, где $F(\alpha)=\begin{pmatrix} e^{-2\alpha A} & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha B} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=P(t)x,\ \ t\in R,\ \ x\in R^n \tag{15}$$

с отражающей матрицей $F(t)$. Известно, что если система

$$\dot{y}=Q(t)y \tag{16}$$

получена из системы (15) с помощью преобразования $y=S(t)x$, $\det S(t)\neq 0$, то отражающая матрица $\Phi(t)$ системы (16) имеет вид $\Phi(t)=S(-t)F(t)S^{-1}(t)$.

Теорема 5. Из разрешимости краевой задачи (15), (11) следует разрешимость краевой задачи для системы (16) с условием $\Psi(y(\alpha),\ y(-\alpha))=0$, где $y(\alpha)=x(\alpha)$, $y(-\alpha)=x(-\alpha)$.

Действительно, так как $y(-\alpha)=\Phi(\alpha)y(\alpha)=S(-\alpha)F(\alpha)S^{-1}(\alpha)x(\alpha)=F(\alpha)x(\alpha)$, то все сводится к разрешимости системы (12).

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.
2. Мироненко В.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 36.
3. Альсевич Л.А. // Там же. № 3. С. 69.
4. Альсевич Л.А. // Там же. 1982. № 3. С. 50.
5. Альсевич Л.А. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 27. № 1. С. 5.
6. Мироненко В.И. // Там же. 1996. Т. 32. № 6. С. 774.

Поступила в редакцию 05.04.2001.

Лариса Алексеевна Альсевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

A problem guaranteed optimal control with short-term forecast of perturbations is considered. Method of building of approximate solution by means of big quantity of vectors of auxiliary set Q is described.

1. Пусть $T=[t_*,\ t^*]$, $h=(t^*-t_*)/N$, $t_*<t^*<\infty$. Функция $u=u(t)$, $t\in T$, – дискретное управление, если $u(t)=u(t_*+kh)$, $t\in[t_*+kh,\ t_*+(k+1)h[$, $k=\overline{0,N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим задачу

$$c'x(t^*)\to\max,$$

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u+d(t)w;\ x(t_*)=x_0;\ x(t^*)\in X^*=\{x\in \mathrm{R}^n\colon Hx\leq g\}; \tag{1}$$

$$w(t)\in W=\{w\in \mathrm{R}\colon |w|\leq w^*\};\ u(t)\in U=\{u\in \mathrm{R}\colon |u|\leq 1\},\ t\in T.$$

Здесь $x=x(t)\in R^n$, $u=u(t)$, $w=w(t)\in R$; $A(t)\in R^{n\times n}$, $b(t)$, $d(t)\in R^n$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные функции; $H\in R^{m\times n}$, $g\in R^m$.

Предполагается аналогично [1], что: 1) в процессе управления могут реализоваться любые кусочно-непрерывные функции $w(t)\in W$, $t\in T$; 2) в каждый момент замыкания t^i из

$$T^p=\{t^i\in T_h=\{t_*,\ t_*+h,\ \ldots,\ t^*-h\},\ i=\overline{0,p}\},\ t_*=t^0<t^1<\ldots<t^p<t^*,\quad (2)$$

сообщается возмущение $w^*(\cdot)=(w^*(t)\in W,\ t\in T^{(i)}=[t^i,\ t^{i+1}[)$.

Требуется построить управление, которое с гарантией переводит систему (1) на терминальное множество и обеспечивает максимум гарантированному значению критерия качества.

Положим $t^{p+1}=t^*$, $X^{p+1}=X^*$. Построим по (2) множества

$$X^p,\ X^{p-1},\ldots,\ X^1,\ X^0. \quad (3)$$

Множество X^i построим по множеству X^{i+1}: $z\in X^i$ в том и только в том случае, когда для каждого возможного возмущения $w_i(\cdot)$ найдется такое доступное управление $u_i(\cdot)=(u(t\,|\,t^i,\ z,\ w_i(\cdot))\in U,\ \ t\in T^{(i)})$, что траектория системы (1), соответствующая начальному условию $x(t^i)=z$, возмущению $w_i(\cdot)$, управлению $u_i(\cdot)$, попадает в момент t^{i+1} на X^{i+1}.

Задача (1) имеет допустимые программные управления $u(\cdot)=(u_i(t\,|\,w_i(\cdot))$, $t\in T^{(i)}$, $i=\overline{0,p}$) тогда и только тогда, когда $x_0\in X^0\neq\varnothing$.

Чтобы определить оптимальное априорное решение задачи (1), используя моменты (2), по аналогии с (3) введем множества $X^{i,\ \alpha}$, $i=\overline{p,\ 0}$, начиная с

$$X^{p+1,\ \alpha}=X^*\bigcap\{x\in R^n:c'x\geq\alpha\}.$$

Максимальное значение α^0, при котором $x_0\in\partial X^{0,\ \alpha^0}$ (∂X – граница множества X), назовем оптимальным априорным гарантированным значением критерия качества задачи (1). Ему соответствует оптимальное априорное управление $u^0(\cdot)=(u_i^0(\cdot),\ \ t\in T^{(i)},\ \ i=\overline{0,\ p})$, которое доставляет критерию качества задачи (1) значение α^0 при реализации наихудшего возмущения $w^0(t)$, $t\in T$.

2. В терминах множеств

$$X_w(z)=\{x\in R^n:\ x=F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)z+ $$
$$+\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau,\ w_i(t)\in W,\ t\in T^{(i)}\},$$

$$X_u=\{x\in R^n:\ x=y-\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau,\ u(t)\in U,\ t\in T^{(i)},\ y\in X^{i+1}\},$$

условие $z\in X^{i,\ \alpha}$ принимает вид

$$X_w(z)\subset X_u. \quad (4)$$

Известно, что включение (4) справедливо тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\max\limits_{x\in X_w(z)} q'x\leq\max\limits_{x\in X_u}q'x$, $\forall q\in Q=\{q\in R^n:\|q\|=1\}$.

Запишем это условие в следующей форме:

$$q'F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)z+\max_{w_i(\cdot)}q'\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau\leq$$

$$< \max_{y\in X^{i+1,\alpha}} q'y - \min_{u_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Обозначим:

$$h_i'(q) = q\,F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)\,;\ \gamma^{i,\ \alpha}(q) = \max_{y\in X^{i+1,\alpha}} q'y - \beta_i\,, \qquad (5)$$

где

$$\beta_i = \min_{u_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau + \max_{w_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau =$$

$$= -\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left|q'F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)\right|d\tau + w^* \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left|q'F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)\right|d\tau .$$

Тогда

$$X^{i,\ \alpha} = \{z\in \mathrm{R}: h_i'(q)z \le \gamma^{i,\ \alpha}(q),\ \forall q\in Q\},\ i = \overline{p,\ 0}. \qquad (6)$$

3. Для конструктивного решения исходной задачи рассмотрим естественные аппроксимации множеств (6). Введем конечную систему векторов $Q_l = \{\, q_j \in \mathrm{R}^n\colon \|q_j\| = 1,\ \ j = \overline{1,\ l}\,\}$ и построим аппроксимацию множества $X^{p,\ \alpha} : \bar{X}^{p,\ \alpha} = \{\, h_p'(q)z \le \bar{\gamma}^{p,\ \alpha}(q)\,,\ q\in Q_l\,\}$, где $h_p'(q)$, $\bar{\gamma}^{p,\ \alpha}(q) = \gamma^{p,\ \alpha}(q)$ рассчитываются по формулам (5).

По множеству $\bar{X}^{p,\alpha}$ построим $X^{p-1,\ \alpha} : \bar{X}^{p-1,\ \alpha} = \{\, h_{p-1}'(q)z \le \bar{\gamma}^{p-1,\ \alpha}(q)$, $q\in Q_l\,\}$, где $\bar{\gamma}^{p-1,\ \alpha}(q) = \max\limits_{y\in \bar{X}^{p,\ \alpha}} q'y - \beta_{p-1}$. Продолжая процесс, построим множества $\bar{X}^{i,\ \alpha} = \{\, h_i'(q)z \le \bar{\gamma}^{i,\ \alpha}(q)\,,\ q\in Q_l\,\}$, $i = \overline{p-2,\ 0}$.

По $\bar{X}^{i,\ \alpha}$, $i = \overline{p,\ 0}$, методом дихотомии вычислим $\bar{\alpha}^0$ как максимальное α, при котором выполняется:

$$x_0 \in \partial \bar{X}^{0,\ \bar{\alpha}^0}\,. \qquad (7)$$

Вектор $q_{j^0} \in Q_l$, для которого $h_0'(q_{j^0})x_0 = \gamma^{0,\ \bar{\alpha}^0}(q_{j^0})$, назовем активным.

Зная $\gamma^{0,\ \bar{\alpha}^0}(q_{j^0})$, построим x_1^*, $\bar{u}_0^{\,0}(\cdot)$, $\bar{w}_0^{\,0}(\cdot)$, удовлетворяющие соответственно условиям:

$$q_{j^0}' x_1^* = \max q_{j^0}' y,\ h_i'(q)y < \gamma^{1,\ \bar{\alpha}^0}(q),\ q\in Q_l\,;$$

$$q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_0^{\,0}(\tau)d\tau = \max_{u_0(\cdot)} q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau\,;$$

$$q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_0^{\,0}(\tau)d\tau = \max_{w_0(\cdot)} q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau\,.$$

Точку $x_{j^0}^0$, вычисленную по формуле:

$$x_{j^0}^0 = F(t^0)F^{-1}(t^1)\,x_1^* - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_0^{\,0}(\tau)d\tau - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_0^{\,0}(\tau)d\tau\,,$$

назовем активной точкой множества $\bar{X}^{0,\ \bar{\alpha}^0}$ по вектору q_{j^0}. Активная точка обладает следующим свойством: $x_{j^0}^0 \in \partial X^{0,\bar{\alpha}^0} \wedge x_{j^0}^0 \in \partial \bar{X}^{0,\ \bar{\alpha}^0}$, т. е. $x_{j^0}^0$ принадлежит как множеству $X^{0,\ \bar{\alpha}^0}$, так и его аппроксимации – множеству

$\bar{X}^{0,\,\alpha^0}$, точнее, принадлежит j^0-й грани $\bar{X}^{0,\,\alpha^0}$. Заметим, что начальная точка x_0, удовлетворяющая условию (7), необязательно принадлежит $\bar{X}^{0,\,\alpha^0}$. Поэтому точность и правдоподобность вычислений функций $\bar{u}_0^{\,0}(\cdot)$ и $\bar{w}_0^{\,0}(\cdot)$ зависит от расстояния между начальной и активной точками: $\varepsilon = \left| x_0 - \bar{x}^0_{j^0} \right|$.

По состоянию x^*_1 найдем векторы $q_{j^1_k}$, $x^*_{2,\,k}$ и функции $\bar{u}_{1,\,k}^{\,0}(\cdot)$, $\bar{w}_{1,\,k}^{\,0}(\cdot)$, $k = \overline{1,\ n}$, из условий:

$$h_1'(q_{j^1_k})x^*_1 = \bar{\gamma}^{1,\,\bar{\alpha}^0}(q_{j^1_k});$$

$$q'_{j^1_k} x^*_{2,\,k} = \max q'_{j^1_k}\, y,\ h'_2(q)y \le \gamma^{-,\,\alpha^0}(q),\ q \in Q_l;$$

$$q'_{j^1_k} \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}^{\,0}_{1,\,k}(\tau)d\tau = \min_{u_1(\cdot)} q'_{j^1_k} \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau;$$

$$q'_{j^1_k} \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_{1,\,k}^{\,0}(\tau)d\tau = \max_{w_1(\cdot)} q'_{j^1_k} \int_{t^1}^{t^2} F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau.$$

Построим активные точки $\bar{x}^1_{j^1_k}$, $k = \overline{1,\ n}$, множества $\bar{X}^{1,\,\alpha^0}$ по векторам $q_{j^1_k}$ следующим образом:

$$\bar{x}^1_{j^1_k} = F(t^1)F^{-1}(t^2)\ x^*_{2,\,k} - \int_{t^1}^{t^2} F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}^{\,0}_{1,\,k}(\tau)d\tau -$$

$$- \int_{t^1}^{t^2} F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}^{0}_{1,\,k}(\tau)d\tau,\ \ k = \overline{1,\ n}.$$

Найдем индекс $k^*: \left| x^*_1 - \bar{x}^1_{j^1_{k^*}} \right| = \min_{k=1,\ n} \left| x^*_1 - \bar{x}^1_{j^1_k} \right|$. Тогда $q_{j^1} = q_{j^1_{k^*}}$, $x^*_2 = x^*_{2,\,k^*}$, $\bar{u}_1^{\,0}(\cdot) = \bar{u}^{\,0}_{1,\,k^*}(\cdot)$, $\bar{w}_1^{\,0}(\cdot) = \bar{w}^{\,0}_{1,\,k^*}(\cdot)$.

Далее действуем по аналогии.

Построенные таким образом функции $\bar{u}^0(\cdot) = (\bar{u}_i^{\,0}(\cdot),\ i = \overline{0,\ p})$, $\bar{w}^0(\cdot) = (\bar{w}_i^{\,0}(\cdot),\ i = \overline{0,\ p})$ назовем априорно экстремальным управлением и априорно наихудшим возмущением, векторы x_0, x^*_1, …, x^*_{l+1} – экстремальными точками. Функцию $\bar{u}^0(\cdot)$ принимаем за приближенное решение задачи (1). Это решение будет тем ближе к оптимальному априорному управлению $u^0(\cdot)$, чем больше l.

Другой метод решения задачи (1) путем коррекции приближенного решения, построенного для небольшого значения l, будет изложен в следующей работе.

4. В качестве примера рассмотрим задачу управления осциллятором, на который действует ограниченное возмущение. Требуется в момент времени t^*=2,2π с гарантией перевести осциллятор из начального состояния $x_1(0)$=–4, $x_2(0)$=2,5 в положение x_1(2,2π)=0, обеспечив минимальную по модулю скорость.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$|x_2(2{,}2\pi)| \to \min,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \tag{8}$$

$$x_1(0)=-4,\ x_2(0)=2{,}5,\ \ x_1(2{,}2\pi)=0,$$

$$w(t)\in W=\{w\in \mathrm{R}: |w|\le 0{,}5\};\ u(t)\in U=\{u\in \mathrm{R}: |u|\le 1\},\ t\in T=[0;\ 2{,}2\pi].$$

При решении задачи использовалась ее эквивалентная форма:

$$\alpha \to \min,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + w,$$

$$x_1(0)=-4,\ x_2(0)=2{,}5,$$

$$x_1(2{,}2\pi)=0,\ -\alpha\le x_2(2{,}2\pi)\le\alpha,\ w(t)\in W:\ u(t)\in U,\ t\in T.$$

В классе дискретных функций был выбран период квантования $h=2{,}2\pi/120$.

Векторы из Q строились по формулам:

$$q_1=(0,\ 1),\ q_j=(q_{1j-1}\cos(2\pi/l)+q_{2j-1}\sin(2\pi/l),$$

$$-q_{1j-1}\sin(2\pi/l)+q_{2j-1}\times\cos(2\pi/l)),\ \ j=\overline{2,\ l}.$$

В таблице приведены результаты вычислений оптимального априорного гарантированного значения критерия качества $\overline{\alpha}^0$ для различных p и l.

p	l			
	16	32	64	128
1	3,23315345	3,27689223	3,29749369	3,30215274
2	3,19954998	3,25023558	3,29515204	3,30193205
3	3,02241951	3,25398196	3,29271857	3,30266266
4	2,94100705	3,28709181	3,29165285	3,30173364
5	3,15461558	3,25158448	3,28670580	3,30123858

На рис. 1 изображены множества замыкания, экстремальные точки и экстремальная траектория, полученная под действием управления $\overline{u}^0(\cdot)$ и возмущения $\overline{w}^0(\cdot)$. На рис. 2 показаны терминальные состояния $x(t^*)$-системы для различных l (точка A соответствует $l=8$, B–$l=16$, C–$l=64$, D–$l=128$).

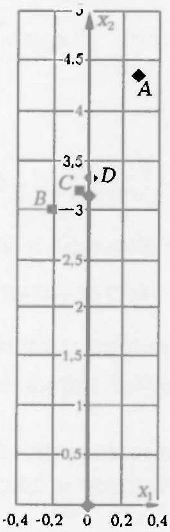


Рис. 1. Результаты решения задачи (8) для $l=128$, $p=1$

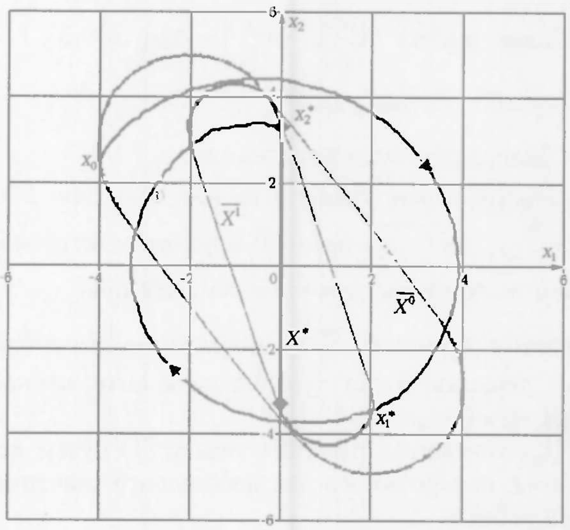


Рис. 2. Сравнение результатов задачи (8) при различных значениях l

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 121; № 8. С. 90.

Поступила в редакцию 20.02.2001.

Жанна Михайловна Кравченко – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 519.6

А.В. АКИНФИН, В.П. КИРЛИЦА, Е.А. ЧЕРКАС

НЕПРЕРЫВНЫЕ *D*-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЙ РЕГРЕССИИ С ЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ДИСПЕРСИИ НАБЛЮДЕНИЙ

D-optimal continuous design of experiments for quadratic regression under linear variance of observations has been constructed. Stability of *D*-optimal design of experiments for homoscedastical observations respect linear variance of observations was investigated.

Рассмотрим следующую модель наблюдений:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 x_i^2 + \xi(x_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \dots, \tag{1}$$

где y_i – наблюдаемые значения, x_i – контролируемые переменные, $x_i \in [-1;\ 1]$; $\theta = (\theta_0,\ \theta_1\ \theta_2)^T$ – подлежащий оцениванию вектор параметров модели (1); $\xi(x_i)$ – некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\xi(x)\} = d(x) = a_0 + a_1 x > 0,\ x \in [-1;1],\ a_0 > 0,\ |a_1| < a_0. \tag{2}$$

Для равноточных наблюдений (a_1=0) модели (1), (2) непрерывный *D*-оптимальный план экспериментов имеет вид [1]:

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} -1; & 0; & 1 \\ \frac{1}{3}; & \frac{1}{3}; & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

где –1, 0, 1 – точки спектра плана, в которых нужно проводить наблюдения, а $\frac{1}{3}$ – мера, или вес, наблюдений в этих точках.

Однако для неравноточных наблюдений ($a_1 \neq 0$) с линейным изменением дисперсии (2) для модели (1), (2) непрерывные *D*-оптимальные планы экспериментов до сих пор не были построены.

В данной статье приводится правило построения таких планов экспериментов и рассматривается робастность, устойчивость классических *D*-оптимальных планов экспериментов (3) с равноточными наблюдениями относительно линейного изменения дисперсии наблюдений.

Проблема построения оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями исследовалась в статьях [2–4].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для модели неравноточных наблюдений* (1), (2) *непрерывный D-оптимальный план экспериментов имеет вид:*

$$\varepsilon^0(k) = \begin{Bmatrix} -1; & \dfrac{-2+\sqrt{4-3k^2}}{3k}; & 1 \\ \frac{1}{3}; & \frac{1}{3}; & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

где $k = \dfrac{a_1}{a_0}$, $|k| < 1$.

Доказательство. Для равноточных наблюдений (k=0) план экспериментов (4) обращается в классический план (3) для равноточных наблюдений.

Поскольку функция отклика для модели наблюдений (1) является полиномом второй степени относительно контролируемой переменной x, то в соответствии с теорией построения непрерывных D-оптимальных планов для полиномиальной одномерной регрессии [1] непрерывный D-оптимальный план для модели наблюдений (1) сосредоточен в трех точках, если дисперсия наблюдений является полиномом степени не выше четвертой. А так как дисперсия наблюдений (2) является полиномом первой степени относительно контролируемой переменной x, то для модели (1), (2) непрерывный D-оптимальный план экспериментов следует искать среди планов, сосредоточенных в трех различных точках. Далее, так как число точек спектра непрерывного D-оптимального плана для модели наблюдений (1), (2) совпадает с числом неизвестных параметров θ_0, θ_1 θ_2 в (1), то вес наблюдений такого плана должен быть равным $\frac{1}{3}$. Итак, непрерывный D-оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (1), (2) должен иметь вид:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} x_1; & x_2; & x_3 \\ \frac{1}{3}; & \frac{1}{3}; & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\}, \tag{5}$$

где x_1, x_2, x_3 – точки спектра плана, выбираемые на отрезке [–1; 1], $x_1<x_2<x_3$.

Следовательно, чтобы построить непрерывный D-оптимальный план для модели наблюдений (1), (2), необходимо указать точки спектра x_1, x_2, x_3 в плане (5), для которых определитель информационной матрицы плана (5) был бы максимальным.

Численные расчеты с использованием ЭВМ показали, что максимальное значение определителя информационной матрицы плана (5) достигается при $x_1=-1$, $x_3=1$. Поэтому непрерывный D-оптимальный план экспериментов для модели наблюдений (1), (2) должен находиться среди планов

$$\varepsilon(x_2) = \left\{ \begin{matrix} -1; & x_2; & 1 \\ \frac{1}{3}; & \frac{1}{3}; & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\}. \tag{6}$$

Определитель информационной матрицы $M(\varepsilon(x_2))$ плана (6) для модели наблюдений (1), (2) равен

$$M\left(\varepsilon\left(x_2\right)\right) = f\left(x_2, k\right) = \frac{4}{27} \frac{\left(x_2^2-1\right)^2}{1+kx_2}. \tag{7}$$

Задача поиска непрерывного плана, «подозрительного» на D-оптимальность, свелась к нахождению точек максимума по x_2, $-1< x_2<1$, функции (7). Для того чтобы найти максимум функции $f(x_2, k)$ по x_2, $-1<x_2<1$, поступим стандартным образом: найдем точки, в которых производная этой функции обращается в ноль. В результате придем к уравнению $\left(x_2^2-1\right)\left(3k^2x_2^2+4x_2+k\right)=0$. Корни $x_2=\pm1$ этого уравнения являются граничными точками отрезка [–1; 1], и в этих точках определитель (7) информационной матрицы плана (6) обращается в ноль, т. е. эти точки не могут доставлять максимальное значение функции $f(x_2, k)$, $x_2\in(-1, 1)$. Две другие точки, в которых производная функции $f(x_2, k)$ может обращаться в ноль, находятся как корни квадратного уравнения $3k^2x_2^2+4x_2+k=0$:

$$x_{21}(k)=\frac{-2-\sqrt{4-3k^2}}{3k},\quad x_{22}(k)=\frac{-2+\sqrt{4-3k^2}}{3k}.$$

Очевидно, что для $-1<k<1$ корень $x_{21}(k)$ по модулю больше 1, а $x_{22}(k)\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ и $f(x_{22}(k), k)>0$. Итак, значение $x_2=x_{22}(k)$ доставляет максимум функции $f(x_2, k)$, $x_2\in(-1, 1)$, и при таком значении x_2 план экспериментов (6) обращается в план (4).

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось показать, что план экспериментов (4), построенный таким полуинтуитивным способом, действительно является D-оптимальным, т. е. выполняется критерий D-оптимальности Кифера – Вольфовитца [1]: дисперсия поверхности отклика $d(x, \varepsilon^0(k))<3$ для $x\in[-1, 1]$, $k\in(-1, 1)$, и в точках спектра плана $\varepsilon^0(k)$ это неравенство обращается в равенство. Здесь $d(x, \varepsilon^0(k))$ – дисперсия поверхности отклика:

$$d\left(x,\ \varepsilon^0(k)\right)=\frac{1}{d(x)}\left(1,\ x,\ x^2\right)M^{-1}\left(\varepsilon^0(k)\right)\ \left(1,\ x,\ x^2\right)^T.$$

Функция $d(x, \varepsilon^0(k))$ как функция аргумента x является отношением полинома четвертой степени к полиному первой степени. Коэффициенты полинома четвертой степени зависят от k и имеют сложные, громоздкие выражения, что не позволяет строго аналитически проверить выполнимость критерия D-оптимальности Кифера – Вольфовитца. Поэтому вместо проверки данного критерия оптимальности для всех $x\in[-1, 1]$, $k\in(-1, 1)$ проверялось его выполнение в узлах достаточно мелкой сетки с шагом h=0,01 по оси изменения x и по оси изменения k. При этом для всех значений k узел $(s^0(k), k)$ включался в сетку. Численные расчеты на ЭВМ подтвердили выполнение критерия D-оптимальности непрерывного плана (4), что и завершает доказательство теоремы.

Для практических расчетов D-оптимальный план (4) применим только тогда, когда коэффициенты a_0, a_1 дисперсии наблюдений (2) заданы. Однако обычная ситуация, с которой сталкивается исследователь, состоит в том, что он знает только лишь качественный характер изменения дисперсии (линейная зависимость), но не знает точных количественных характеристик этой зависимости, поскольку дисперсия выражается через моменты второго порядка наблюдаемых значений. Но даже моменты первого порядка (функция отклика) ему точно неизвестны. Какой же выход из подобной ситуации?

В этом случае можно использовать непрерывный D-оптимальный план (3) для равноточных наблюдений, априори зная, что дисперсия наблюдений изменяется линейно, при этом нужно оценить относительную величину ошибки γ определителя информационной матрицы плана (3):

$$\frac{\left|\,\left|M\left(\varepsilon^0(k)\right)\right|-\left|M\left(\varepsilon^0\right)\right|\,\right|}{\left|M\left(\varepsilon^0\right)\right|}<\gamma,\quad \gamma>0. \qquad (8)$$

Исходя из неравенства (8), можно решать и обратную задачу. При заданном уровне искажения γ величины определителя информационной матрицы плана экспериментов – определить, в каких пределах должен изменяться уровень искажения k равноточных наблюдений, чтобы вместо плана $\varepsilon^0(k)$ можно было бы использовать план экспериментов ε^0.

Например, при уровне искажения величины определителя информационной матрицы в 10 % (γ=0,1) вместо плана $\varepsilon^0(k)$ можно использовать план ε^0, если уровень искажения k постоянного значения дисперсии будет принадлежать интервалу [–0,8023; 0,8023]. Данные расчеты были проведены с использованием ЭВМ и неравенства (8).

1. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М., 1968.
2. Кирлица В. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1990. № 2. С. 36.
3. Кирлица В. П. // Там же. 1995. № 1. С. 42.
4. Kirlitsa V. P. // Computer data analysis and modeling. Minsk, 1995. Vol. 1. P. 64.

Поступила в редакцию 01.02.2001.

Андрей Владимирович Акинфин – научный сотрудник НИЛ СТАМ.

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных.

Евгения Анатольевна Черкас – студентка 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 519.1

О.И. МЕЛЬНИКОВ, В.Н. КОСОЛАПОВ

РАСПОЗНАВАНИЕ P_4-СТРУКТУРЫ ГУСЕНИЦЫ

An $O(n)$ time-bounded algorithm to decide whether a given 4-uniform hypergraph represents the P_4-structure of a caterpillar is proposed.

Реализацией гиперграфа $H(V, \mathcal{E})$ [1] называется такой граф $G(V, E)$, каждое ребро которого принадлежит некоторому ребру гиперграфа, и каждый подграф, порожденный вершинами любого гиперребра $\boldsymbol{e}$ гиперграфа H, связен. Этот подграф называется реализацией гиперребра $\boldsymbol{e}$.

Пусть задано некоторое множество графов $\{S\}$. *S-реализацией гиперграфа H* называется такой граф $G(V, E)$, каждый подграф которого, порожденный вершинами любого гиперребра, принадлежит S, и любой порожденный подграф графа G, принадлежащий S, определяет некоторое гиперребро гиперграфа H.

Для заданного графа G рассмотрим гиперграф H, гиперребра которого образуются всеми порожденными P_4-цепями графа. С одной стороны, гиперграф H называется *P_4-структурой* графа G. С другой – граф G является *P_4-реализацией* гиперграфа H.

Изучение P_4-структур графов представляет интерес, поскольку доказано [2], что два графа, имеющие одинаковую P_4-структуру, оба или совершенны, или несовершенны.

В [3] построен линейный алгоритм распознавания P_4-структуры дерева.

В настоящей работе приведен алгоритм распознавания, является ли 4-униформный гиперграф P_4-структурой некоторой гусеницы. Трудоемкость алгоритма – $O(|\mathcal{E}|)$.

Гусеницей называется дерево, которое после удаления всех висячих вершин превращается в цепь.

Теорема 1. *Пусть T – гусеница, диаметр которой не меньше 6, H – ее P_4-структура. Тогда T – единственная P_4-реализация гиперграфа H гусеницей.*

Доказательство. Пусть $L(v_1, v_2, ..., v_l)$ – диаметральная цепь гусеницы T ($l \geq 7$); (v_1, v_2, v_3, v_4), (v_2, v_3, v_4, v_5), ..., $(v_{l-3}, v_{l-2}, v_{l-1}, v_l)$ – цепи P_4, определяющие гиперребра P_4-структуры H. Покажем сначала, что в любой P_4-реализации гиперграфа H гусеницей существует цепь $L_1 = (v_3, v_4, \ldots, v_{l-2})$.

Предположим, что в некоторой P_4-реализации отсутствует ребро (v_i, v_{i+1}), $i=\{3, 4, \ldots, l-3\}$. Тогда реализацией гиперребер $(v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$ и $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3})$ являются (v_i, v_{i+1})-цепи. Объединение этих цепей дает цикл, который не может быть в гусенице. Поэтому в любой P_4-реализации гиперграфа H гусеницей обязательно существуют ребра (v_i, v_{i+1}), $i=\{3, 4, \ldots, l-3\}$.

Далее докажем обязательность существования ребра (v_2, v_3). Рассмотрим реализацию гиперребра (v_2, v_3, v_4, v_5). Наличие в ней ребер (v_3, v_4) и (v_4, v_5) доказано ранее, поэтому вершина v_2 может быть смежна или с вершиной v_3, или с вершиной v_5. Если вершина v_2 будет смежна с вершиной v_5, то при любой реализации гиперребра (v_1, v_2, v_3, v_4) цепью в реализации гиперграфа появится цикл. Поэтому в P_4-реализации гиперграфа H обязательно существует ребро (v_2, v_3). Аналогично доказывается и обязательность существования ребра (v_{l-2}, v_{l-1}).

Теперь покажем существование ребра (v_1, v_2). Так как существование ребер (v_2, v_3) и (v_3, v_4) доказано, то вершина v_1 может быть смежна, кроме вершины v_2, только с вершиной v_4. В последнем случае вершина v_1 будет входить еще в одну P_4-цепь: (v_1, v_4, v_5, v_6). Если это индуцированная цепь, то P_4-структуры гусеницы T и построенной реализации не совпадают. Если названные вершины не индуцируют P_4, то в построенной реализации будет существовать цикл. Аналогично доказывается существование ребра (v_{l-1}, v_l) в любой P_4-реализации гиперграфа H гусеницей.

Пусть вершина $a \notin L$ смежна в гусенице T с вершиной v_i ($i \in \overline{3,\ l-2}$). В этом случае она принадлежит ровно двум гиперребрам $(a, v_i, v_{i+1}, v_{i+2})$ и (v_2, v_{i-1}, v_i, a), содержащим еще только вершины диаметральной цепи. Наличие в любой P_4-реализации ребер (v_{i-2}, v_{i-1}), (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2}) доказано ранее. Поэтому отсутствие в некоторой P_4-реализации ребра (a, v_i) приведет к существованию в ней ребер (a, v_{i-2}) и (a, v_{i+2}) и, следовательно, цикла. Поэтому в любой P_4-реализации гиперграфа H есть ребро (a, v_i) ($i \in \overline{3,\ l-2}$).

Существование в любой P_4-реализации гиперграфа H ребер (a, v_2), (a, v_{l-1}), где $a \notin L$, доказывается так же, как и существование ребра (v_1, v_2).

Теорема доказана.

Для гусениц, диаметр которых не превосходит 5, теорема не верна. На рис. 1 изображены две различные гусеницы, имеющие одинаковую P_4-структуру.

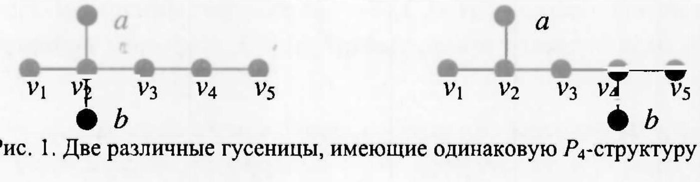


Рис. 1. Две различные гусеницы, имеющие одинаковую P_4-структуру

Теорема 2. *Пусть T – цепь, диаметр которой не меньше 6, H – ее P_4-структура. Тогда T – единственная реализация гиперграфа H цепью.*

Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1.

Для цепей, диаметр которых не превосходит 5, теорема не верна. На рис. 2 изображены две цепи, которые являются реализацией гиперграфа $H(V, \mathcal{E})$, $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $\mathcal{E}=\{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}\}$:

Рис. 2. Две различные цепи, которые являются реализацией одного гиперграфа

Пусть $H(V, \mathcal{E})$ – 4-униформный гиперграф, каждое гиперребро которого содержит ровно 4 вершины.

Отнесем вершины гиперграфа к следующим четырем типам в зависимости от их свойств.

Пусть вершина v принадлежит нескольким гиперребрам. Вершина v относится к типу **1**, если эти гиперребра пересекаются по одной вершине, к типу **2**, если они пересекаются по двум вершинам; к типу **3**, если они пересекаются по **3** вершинам. Вершина относится к типу **4**, если она принадлежит ровно одному гиперребру.

Пусть гиперграф $H(V, \mathcal{E})$ задан списком гиперребер $\mathcal{E}=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, где $e_i=\{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4}\}$, $|V|=n$, $|\mathcal{E}|=m$. За $O(m)$ операций построим список $\bar{V}=\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$, где $\bar{v}_j=\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$ – список гиперребер, содержащих вершину v_j. Число гиперребер, содержащих вершину v_j, называется *степенью вершины* и обозначается d_j.

Разобьем вершины гиперграфа по типам. Так как каждое гиперребро содержит ровно 4 вершины, то $\bigcap\limits_{e_j \in \bar{v}_j} e_j$ находится за $O(d_j)$ операций. Определение типов всех вершин происходит за $O(d_1+d_2+\ldots+d_n)$ операций. Так как для гиперграфа выполняется соотношение $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j = \sum\limits_{i=1}^{m} |e_i| = 4m$, то определение типов вершин можно выполнить за $O(m)$ операций.

Пусть T – P_4-реализация гиперграфа H, $d(T)>12$, $L=(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ – диаметральная цепь гусеницы. Тогда вершина v_1 может быть вершиной *типа* **4** *или* **3**. Если вершина v_1 относится к типу **4**, то v_2 – к типу **3**, v_3 – к типу **2**. Если вершина v_1 относится к типу **3**, то v_2 – к типу **2**, v_3 – к типу **1**. То же можно сказать и о вершинах v_k, v_{k-1}, v_{k-2} соответственно. Остальные вершины диаметральной цепи относятся к типу **1**. Вершины, не принадлежащие к диаметральной цепи, могут относиться к типам **2**, **3**, **4**.

Рассмотрим вопрос существования и построения P_4-реализации гиперграфа гусеницей диаметром не меньше 12. В этом случае из ранее сказанного следует, что гиперграф должен содержать не менее 7 вершин типа **1**. Пусть V_1 – множество вершин типа **1**, $\mathcal{E}_1$ – множество гиперребер гиперграфа H, все вершины которых принадлежат типу **1**. Породим гиперграф гиперребрами $\mathcal{E}_1$.

К гиперграфу H_2 отнесем гиперребра, содержащие одну вершину типа **2** и **3** вершины типа **1**; к гиперграфу H_3 – гиперребра, содержащие по две вершины типа **2** и **1**.

Остальные гиперребра отнесем к гиперграфу H_4.

Поскольку каждое гиперребро содержит 4 вершины, то построение гиперграфов H_1, H_2, H_3 и H_4 требует $O(m)$ операций.

Строящуюся реализацию гусеницей T будем задавать списком смежности. Процесс построения разобьем на этапы.

1. ***Построение P_4-реализации гиперграфа H_1 цепью.*** Проверить возможность существования такой реализации и построить ее в случае существования можно за $O(n+m)$ операций [4]. Если реализация не существует, то P_4-реализация гиперграфа гусеницей невозможна. Если она существует, то из теорем 1 и 2 следует, что она единственная.

2. ***Построение P_4-реализации гиперграфа $H_1 \bigcup H_2$ гусеницей.*** Каждое гиперребро из H_2 содержит одну вершину (a) типа **2** и три вершины типа **1**. Вершина a может принадлежать или ровно одному, или ровно двум гиперребрам. Если a принадлежит одному гиперребру, то это должно быть гиперребро вида (a, v_0, v_2, v_3), где v_0 – концевая или смежная с ней вершина цепи L и вершины (v_0, v_2, v_3) порождают цепь P_3. Если вершина a принадлежит двум гиперребрам $(a,\ v_0,\ \bar{u}_1,\ \tilde{u}_2)$ и $(a,\ v_0,\ \bar{u}_3,\ \tilde{u}_4)$, то объединение вершин $(v_0,\ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3,\ \bar{u}_4)$ должно быть реализовано цепью P_5, в которой вершина v_0 является центральной, а справа от нее должны находиться вершины одного гиперребра, слева – другого. В случае выполнения этих условий для каждой вершины $a \in H_2$, $a \notin L$, вершина a соединяется ребром с вершиной v_0, в случае невыполнения – построение P_4-реализации гусеницей невозможно.

3. ***Построение P_4-реализации гиперграфа $H_1 \bigcup H_2 \bigcup H_3$ гусеницей.*** Каждое гиперребро из $\boldsymbol{H_3}$ имеет вид (a, b, v_i, v_j), где вершины a и b являются вершинами типа **2**, а вершины v_i и v_j – вершинами типа **1**. В построенной реализации гиперграфа $H_1 \bigcup H_2$ вершины v_i и v_j должны быть смежными. Проверка выполнения условий происходит при последовательном добавлении каждого гиперребра к реализации. В случае невыполнения условий нужная реализация не существует.

4. ***Построение P_4-реализации гиперграфа $H_1 \bigcup H_2 \bigcup H_3 \bigcup H_4$ гусеницей.*** Необходимым условием существования нужной реализации является наличие ровно двух связных компонент графа H_4. Определение этих компонент можно провести за $O(m)$ операций с помощью специализированного поиска в ширину в гиперграфе H_4. Пусть гиперграф H_4 содержит ровно две связные компоненты H_4' и H_4''. Если в гиперграфе есть вершина u_0 типа **4**, то она должна принадлежать гиперребру (u_0, u_1, v_2, v_1), где вершина u_1 является вершиной типа **3**, u_2 – типа **2**, а v_1 – концевой вершиной цепи L. В этом случае цепь L удлиняется до цепи L_1=(u_0, u_1, u_2, v_1, …).

Если в гиперграфе нет вершины типа **4**, то в случае возможности построения реализации должно найтись гиперребро (u_0, u_1, v_1, a), где вершина u_0 является вершиной типа **3**, вершины u_1 и a – типа **2**, а v_1 – концевой вершиной цепи L (т. е. уже должна быть соединена ребром с вершиной v_1 при построении реализации гиперграфа $H_1 \bigcup H_4$). В этом случае цепь L увеличивается до цепи (u_0, u_1, v_1, …). Построение реализаций остальных гиперребер компоненты, содержащей v_0, происходит, как на этапах 2 и 3.

Если требуемые условия при добавлении гиперребер не выполняются, то реализации гиперграфа H гусеницей не существует.

Теоремы 1 и 2 об однозначности позволяют использовать построения реализации меньших гиперграфов для построения реализации больших. Трудоемкости каждого из этапов 1, 2, 3, 4 равны $O(m)$. Поэтому трудоемкость построения всей реализации (если она существует) – $O(m)$.

Итак, построена реализация гиперграфа H, в которой любое гиперребро реализовано цепью P_4. Для утверждения того, что это P_4-реализация, необходимо доказать, что любая цепь P_4 в гусенице соответствует некоторому гиперребру гиперграфа H.

Занумеруем вершины гусеницы следующим образом: вершины диаметральной цепи нумеруются в порядке прохождения их в цепи $(1, 2, ..., l)$, вершины, не принадлежащие диаметральной цепи и смежные с вершиной i, нумеруются $i(1)$, $i(2)$, … . Список смежности для диаметральной вершины организуем так: $(i+1, i(1), i(2), \ldots)$.

Специальный поиск в глубину проводим из каждой вершины гусеницы. Если в результате пройдено только одно ребро, то для продолжения поиска выбирается лишь диаметральная вершина гусеницы, если пройдены два ребра, то рассматриваются все вершины, смежные с той, в которой оказались в результате поиска. Поиск для вершины v заканчивается, когда построены все цепи P_4, начинающиеся в вершине v, вершины которых занумерованы в порядке неубывания. Для построения каждой цепи P_4 нужно сделать три шага. Структура списков смежности позволяет строить каждую цепь P_4 ровно один раз.

Если в гусенице окажется ровно m цепей P_4, то гиперграф H является P_4-структурой гусеницы. Если будет построена $(m+1)$ цепь, то гиперграф не является нужной P_4-структурой. Процесс построения цепей оканчивается.

Так как в результате проверки строится не более $(m+1)$ цепей, то трудоемкость проверки – $O(m)$.

Таким образом, производится распознавание, является ли 4-униформный гиперграф P_4-структурой некоторой гусеницы диаметром не менее 12, и в случае положительного ответа построение этой гусеницы можно выполнить за $O(m)$ операций.

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.
2. Reed B. // J. Comb. Theory (B). 1987. Vol. 43. P. 223.
3. Brandstadt A., Le V.B., Olariw S. Linear-time recognition of the P_4-structure of trees. Rutcor Research Report RRR 19-96 Rutgers University. Rostok, 1996.
4. Vancleemput W.M. // IEEE Transaction on Circuits and System. 1976. Vol. CAS.-23. № 12. P. 759.

Поступила в редакцию 21.05.2001.

Олег Исидорович Мельников – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

Вадим Николаевич Косолапов – студент 5-го курса механико-математического факультета.

Краткие сообщения

УДК 512.74+512.552

Д.Ф. БАЗЫЛЕВ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НУЛЕВОГО РАНГА

The method of calculation of rational points on the elliptic curves of zero rank is described.

Проблема нахождения ранга эллиптических кривых в общем случае является достаточно сложной. В данной статье мы предлагаем подход к доказательству того, что эллиптическая кривая имеет нулевой ранг. В этом случае группа рациональных точек эллиптической кривой $E(\mathbf{Q})$ совпадает с ее подгруппой кручения, которая, как известно, является конечной, и, следовательно, группа $E(\mathbf{Q})$ может быть описана явно, т. е. посредством перечисления элементов, а также с точки зрения абстрактной структуры.

Напомним, что всякая эллиптическая кривая над $\mathbf{Q}$ может быть задана в форме Вейерштрасса E: $y^2=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$.

В зависимости от типа разложения многочлена $f(x)$ над $\mathbf{Q}$ обычно различают три случая: неразложимый, полуразложимый и разложимый, каждый из которых рассмотрим отдельно.

1. Пусть $f(x)$ неприводим над $\mathbf{Q}$ и $P_0(x_0, y_0)\in E(\mathbf{Q})$. Положим $t=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, $x\neq x_0$. Тогда $(y_0+t(x-x_0))^2=f(x)$, причем $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\times$ $\times(a(x^2+xx_0+x_0^2)+b(x+x_0)+c)$, $y_0^2=f(x_0)$.

Следовательно,

$$ax^2+(ax_0+b-t^2)x+ax_0^2+bx_0+c-2ty_0+t^2x_0=0. \qquad (1)$$

Так как $x\in\mathbf{Q}$, то дискриминант уравнения (1) является полным квадратом, т. е.

$$(ax_0+b-t^2)^2-4a(ax_0^2+bx_0+c-2ty_0+t^2x_0)=D^2, \qquad (2)$$

где $D\in\mathbf{Q}$.

Пусть $t=\dfrac{m}{n}$, $(m, n)=1$. Перепишем (2) в виде

$$a_1m^4+b_1m^2n^2+c_1n^4+d_1mn^3=k^2, \qquad (3)$$

где a_1, b_1, c_1, d_1, $k\in\mathbf{Z}$. Далее к уравнению (3) применяем метод бесконечного спуска.

2. Пусть E:$y^2=f(x)=(x-x_0)(ax^2+bx+c)$, где $g(x)=ax^2+bx+c-$ неразложимый многочлен над $\mathbf{Q}$, $x_0\in\mathbf{Q}$. Заметим, что $(x_0, y_0)\in E(\mathbf{Q})$, где $y_0=0$. Из ра-

венств (2), (3) получаем уравнение $a_1m^4+b_1m^2n^2+c_1n^4=k^2$, к которому применяем метод бесконечного спуска.

3. Пусть E: $y^2=f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, где a, x_1, x_2, $x_3\in\mathbf{Q}$. Положим $t=x-x_1$. Тогда $y^2=t(at^2+bt+c)$, где многочлен $g(t)=at^2+bt+c$ разложим над $\mathbf{Q}$. Можно считать, что a, b, $c\in\mathbf{Z}$. В противном случае рассмотрим кривую, заданную уравнением $y^2=t(ad^2t^2+bd^4t+cd^6)$, изоморфную кривой E с целочисленными коэффициентами для достаточно большого значения d.

Пусть $t=\dfrac{m}{n}$, $(m,\ n)=1$. Тогда $mn(am^2+bmn+cn^2)=k^2$, где $k=n^2y$. Если $M=(m,\ am^2+bmn+cn^2)$, $N=(n,\ am^2+bmn+cn^2)$, то M делит c, N делит a. С учетом $(m,\ n)=1$ получаем $a=Na_1$, $c=Mc_1$, $m=Mm_1$, $n=Nn_1$, $am^2+bmn+cn^2=MNL$, где a_1, c_1, m_1, n_1, $L\in\mathbf{Z}$.

Далее имеем $M^2N^2m_1n_1L=k^2$, причем m_1n_1L попарно взаимно просты. Следовательно, $m_1=u^2$, $n_1=v^2$, $L=w^2$ для некоторых целых u, v, w. Тогда $a_1Mu^4+bu^2v^2+c_1Nv^4=w^2$, причем многочлен $g(t)$ разложим над $\mathbf{Q}$. Следовательно, $(p_1u^2+q_1v^2)\times(p_2u^2+q_2v^2)=w^2$ для некоторых целых p_1, p_2, q_1, q_2. Так как $(m,\ n)=1$, то $(u,v)=1$ и $h=(p_1u^2+q)(p_1u^2+q_1v^2,\ p_2u^2+q_2v^2)$ делит $p_1\,q_2-p_2\,q_1$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} p_1u^2+q_1v^2=hw_1^2, \\ p_2u^2+q_2v^2+hw_2^2, \end{cases}$$

к которой снова используем метод бесконечного спуска.

Рассмотрим теперь описанную процедуру применительно к некоторым классам эллиптических кривых.

Теорема 1. Пусть задано семейство эллиптических кривых $\{E_t\}_{t\in\mathbf{Q}}$, где $E_t: y^2=x^3-(3t+2)x^2+(3t^2+4t-1)x-t^3-2t^2+t$.

Тогда для любого рационального значения t имеет место следующий изоморфизм $E_t(\mathbf{Q})\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, причем $E_t(\mathbf{Q})=\{O,\ (t,\ 0)\}$.

Доказательство. Пусть $z=x-t$. Тогда E_t: $y^2=z^3-2z^2-z$. Если $z\neq0$, $z=\dfrac{m}{n}$, $(m,\ n)=1$, то $mn(m^2-2mn-n^2)=k^2$, где $k=n^2y$.

Так как m, n, $m^2-2mn-n^2$ попарно взаимно просты, то

$$\left[\begin{array}{l} m=a^2,\quad n=b^2,\quad m^2-2mn-n^2=c^2, \\ m=a^2,\ n=-b^2,\ m^2-2mn-n^2=-c^2. \end{array}\right.$$

В первом случае имеем

$$a^4-2a^2b^2-b^4=c^2, \tag{4}$$

где a, b, $c\in\mathbf{Z}$, $b\neq0$. Предположим, что $a\neq0$. Так как $(m,\ n)=1$, то $(a,\ b)=1$. Имеем

$$(a^2-b^2-c)(a^2-b^2+c)=2b^4. \tag{5}$$

Рассматривая уравнение (4) по (mod 4), заключаем, что $a\equiv1$ (mod 2), $b\equiv0$ (mod 2). Так как разность и произведение чисел a^2-b^2+c, a^2-b^2-c четны, то четны и они сами.

Поскольку $2(a^2-b^2)$, делясь на 2, не делится на 4, то из (5) следует, что $a^2-b^2-c=\pm2u^4$, $a^2-b^2+c=\pm16v^4$, где $b=2uv$, $(u,\ v)=1$. Действительно, если нечетное простое число p делит $a^2-b^2 \pm c$, то p делит a^2-b^2. причем из равенства (5) вытекает, что p делит b. Следовательно, p делит $(a, b)=1$, что невозможно. Таким образом, $a^2-b^2=\pm(u^4+8v^4)$, $a^2=\pm(u^4 \pm 4u^2v^2+8v^4)$. Так как $-(u^4-4u^2v^2+8v^4)<0$, то $a^2=u^4+4u^2v^2+8v^4$.

Поскольку a=1 (mod 2), то u≡1 (mod 2), ибо $u^4 \equiv a^2 \equiv 1$ (mod 4). Ввиду u=1 (mod 2), $(u, v)=1$ имеем $(u^2+2v^2, 2v^2)=1$. Таким образом, u^2+2v^2, $2v^2$, a образуют примитивную пифагорову тройку. Следовательно, $u^2+2v^2=q^2-r^2$, $2v^2=qr$, где $(q, r)=1$, q=1 (mod 2), r≡0 (mod 2). Так как $qr=v^2$, $(q, r)=1$, то $q=g^2$, $r=h^2$, $u^2=g^4-2g^2h^2-h^4$, причем $|b|>|h|$, и мы оказываемся в рамках применения бесконечного спуска.

Аналогично показывается, что уравнение $-a^4-2a^2b^2+b^4=c^2$ имеет решение лишь при a=0. Итак, a=0, m=0, z=0, $x=t$, y=0, т. е. $E_t(\mathbf{Q})=\{O,(t,0)\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, что и требовалось доказать.

Можно привести ряд других семейств эллиптических кривых, для которых указанная процедура позволяет полностью описать их группы рациональных точек. Так, например, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть задано семейство эллиптических кривых $\{E_t\}_{t\in\mathbf{Q}}$, где $E_t: y^2=2x^3-(6t-5)x^2+(6t^2-10t+2)x-t(t-2)(2t-1)$.

Тогда для любого рационального значения t имеет место следующий изоморфизм $E_t(\mathbf{Q})\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, причем

$$E_t(\mathbf{Q})=\left\{O,(t,0),(t-2,0),(t-\frac{1}{2},0),(t+1,\pm 3),(t-1,\pm 1)\right\}.$$

1. Husemoller D. Elliptic curves. New York, 1986.
2. Silverman I. The arithmetic of elliptic curves. New York, 1985.
3. Stoll M. / J. reine angew. Math. 1998. **501.** S. 171.

Поступила в редакцию 20.11.2000.

Дмитрий Федорович Базылев – аспирант Института математики НАН Беларуси. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики В.И. Янчевский.

УДК 517.977

Л.И. ЛАВРИНОВИЧ

К МЕТОДАМ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

The method of construction of extreme closable program controls for a problem of guaranteed optimization of dynamic systems based on external approximation of closure sets of is described. Is shown, that with increase of number of vectors of approximation the extreme control converges to optimal closable control.

1. Пусть $T=[t_*, t^*]$, $h=(t^*-t_*)/N$, $T_h=\{t_*, t_*+h, ..., t^*-h\}$. Функция $u(t)$, $t\in T$, – дискретное управление, если $u(t)=u(t_*+kh)$, $t\in[t_*+kh, t_*+(k+1)h[$, $k=\overline{0, N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим задачу

$$c'x(t^*)\to\max,\ \dot{x}=A(t)x+b(t)u+w(t),\ x(t_*)=x_0,\ u(t)\in U=\{u\in R:|u|\le 1\},$$

$$x(t^*)\in X^*=\{x\in R^n: g_* \le Hx \le g^*\},\ w(t)\in W=\{w\in R^n: w_* \le w \le w^*\},\ t\in T. \quad (1)$$

Здесь $H\in R^{m\times n}$, g_*, $g^*\in R^m$, $A(t)$, $b(t)$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные функции.

Будем предполагать, что: 1) в процессе управления может реализоваться любое кусочно-непрерывное возмущение $w(t)\in W$, $t\in T$; 2) в текущие моменты $\tau\in T_h$ известно состояние $x(\tau)$; 3) до начала процесса известно, что в моменты замыкания $T^p=\{t^q,\ q=\overline{1,\ p}\}$, $t_*<t^1<t^2<\ldots<t^p<t^*$, будут известны состояния $x(t^q)$, $q=\overline{1,\ p}$.

Требуется построить управление, чтобы: 1) система в момент t^* попала на множество X^* независимо от реализовавшегося возмущения; 2) гарантированное значение критерия качества задачи (1) было наибольшим.

2. По $t^0=t_*$ и множеству T^p определим множества замыкания

$$X^p,\ X^{p-1},\ \ldots,\ X^1,\ X^0. \quad (2)$$

Положим $X^{p+1}=X^*$, множество X^q из (2) определим по множеству X^{q+1}: $z\in X^q$ тогда и только тогда, когда система с помощью допустимого управления $u(t)\in U$, $t\in[t^q,\ t^{q+1}[$, из состояния $x(t^q)=z$ переводится в момент t^{q+1} на множество X^{q+1} при любом реализовавшемся возмущении $w(t)\in W$, $t\in[t^q,\ t^{q+1}[$. Задача (1) имеет допустимые управления в том и только в том случае, если $x_0\in X^0$.

3. Положим $X^{p+1,\ \alpha}=X^{*,\ \alpha}=\{x\in R^n: g_*\le Hx\le g^*,\ c'x\ge\alpha\}$, $\alpha\in[\alpha_*,\ \alpha^*]$. Множество $X^{q-1,\alpha}$ построим по $X^{q,\ \alpha}$ по тем же правилам, что и множества (2). Пусть $\tau\in T_h$ – произвольный момент времени из промежутка $[t^{q-1},\ t^q-h]$, $x(\tau)$ – состояние системы в этот момент. Обозначим X_τ^α – множество тех и только тех состояний $x(\tau)$ системы, из которых ее можно с гарантией перевести на $X^{q,\ \alpha}$ при помощи допустимых управлений; $\alpha(\tau)$ – такое число, что при $\alpha>\alpha(\tau)$ или $x(\tau)\notin X_\tau^\alpha$, или $X_\tau^\alpha=\varnothing$, но $x(\tau)\in X_\tau^{\alpha(\tau)}$; $u_q^0(t\,|\,\tau,\ z)$, $t\in[\tau,\ t^q[$, $z\in X_\tau^{\alpha(\tau)}$, – оптимальное управление на $[\tau,\ t^q[$, которое с гарантией переводит систему из состояния $x(\tau)=z$ на $X^{q,\ \alpha(\tau)}$; функция

$$u_q^0(\tau,\ z)=u_q^0(\tau\,|\,\tau,\ z),\ z\in X_\tau^{\alpha(\tau)},\ \tau\in T_h\cap[t^{q-1},\ t^q[, \quad (3)$$

– оптимальная замыкаемая обратная связь на промежутке $[t^{q-1},\ t^q[$.

Построить функцию (3) в явном виде для задачи (1) невозможно. Следуя [1], обойдем эту трудность, вычисляя в режиме реального времени значения $u_q^*(\tau)=u_q^0(\tau,\ x^*(\tau))$, $\tau\in T_h\cap[t^{q-1},\ t^q[$, $q=\overline{1,\ p+1}$, реализации оптимальной замыкаемой обратной связи (3) вдоль траектории $x^*(t)$, $t\in T$, замкнутой системы.

4. Заменим множества (2) на их аппроксимации. Введем конечный набор единичных n-векторов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_s$. Для простоты обозначений предполагаем, что векторы $\pm h_{(i)}$, $i=\overline{1,\ m}$, ($h_{(i)}$ – i-я строка матрицы H) и векторы $\pm c$ содержатся в этом наборе. Аппроксимации множеств замыкания построим рекуррентно. Положим $\overline{X}^{p+1,\ \alpha}=X^{p+1,\ \alpha}$. Пусть

$\overline{X}^{q+1,\,\alpha}=\{x\in R^n: f_i'x\le\beta_i^{q+1,\,\alpha},\ i=\overline{1,\ s}\}$ построено, т. е. вычислены $\beta_i^{q+1,\,\alpha}$, $i=\overline{1,\ s}$. Определим $X^{q+1,\,\alpha}=\{x\in R^n: f_i'x<\beta_i^{q+1,\,\alpha}-\max\limits_{w(\cdot)\in W}\int\limits_{t^q}^{t^{q+1}} f_i' F(t^{q+1})\times$ $\times F^{-1}(\tau)w(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,\ s}\}$ и подсчитаем

$$\beta_i^{q,\,\alpha}=\max_{x\in X^{q,\,\alpha}} f_i'x=\max_{x\in \overline{X}^{q+1,\,\alpha}} f_i'F(t^q)F^{-1}(t^{q+1})x-$$

$$-\min_{u(\cdot)}\int\limits_{t^q}^{t^{q+1}} f_i'F(t^q)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,\ s},\ \dot{F}=A(t)F,\ F(t_*)=E, \qquad (4)$$

которые определяют множество $\overline{X}^{q,\,\alpha}=\{x\in R^n: f_i'x\le\beta_i^{q,\,\alpha},\ i=\overline{1,\ s}\}$, называемое верхней (внешней) аппроксимацией множества $X^{q,\,\alpha}$ ($X^{q,\,\alpha}\subset\overline{X}^{q,\,\alpha}$). При решении задачи (4) для каждого вектора f_i, $i=\overline{1,\ s}$, определим x_i^{q+1} и активные индексы $j_i^*(t^{q+1}): f_i'F(t^q)F^{-1}(t^{q+1})x_i^{q+1}=\max\limits_{x\in \overline{X}^{q+1,\,\alpha}} f_i'F(t^q)F^{-1}(t^{q+1})x$, $f'_{j_i^*(t^{q+1})}x_i^{q+1}=\beta^{q+1}_{j_i^*(t^{q+1})}$.

5. Построим экстремальное программное управление на промежутке $[\tau,\ t^{q+1}[$. Для этого, используя внешние аппроксимации множеств замыкания, вычислим $\alpha(\tau)$, например, по методу дихотомии. По $\alpha(\tau)$ построим множества $\overline{X}^{i,\alpha(\tau)}$, $i=\overline{q+1, p+1}$. Будем рассматривать только ситуацию, когда $x(\tau)=\partial\,\overline{X}^{0,\,\alpha(\tau)}$ (∂X – граница множества X). При этих условиях $f'_{i(\tau)}x_0=\beta^{0,\,\alpha(\tau)}_{i(\tau)}$ для некоторого $i(\tau)\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Экстремальное программное управление на промежутке $[\tau,\ t^{q+1}[$ равно:

$$u^0(\tau+kh)=-\mathrm{sign}\int\limits_{\tau+kh}^{\tau+(k+1)h} f'_{j_{i(\tau)}(t^{q+1})}F(t^q)F^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ \tau+kh<t^{q+1}, \qquad (5)$$

где $j_{i(\tau)}(t^{q+1})$ – активный индекс, соответствующий вектору $f_{i(\tau)}$.

Рис. 1. Траектории системы, реализующиеся при различных значениях s

Значение $u^0(\tau)$, определяемое согласно (5), назовем реализацией экстремального управления типа замыкаемой обратной связи. Построенное управление примем за приближенное решение задачи (1). Оно тем ближе к оптимальному управлению, чем больше s. Другой метод построения оптимальных программного и позиционного управлений с помощью коррекции экстремальных управлений, соответствующих небольшому значению s, будет проанализирован в следующей статье.

6. В качестве примера рассмотрим задачу $|x_2(5)| \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$,

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u + w,\ x_1(0) = 5,\ x_2(0) = 5,$$
$$|x_1(5)| \le 2,\ |u(t)| \le 1,\ |w(t)| \le 0{,}5,\ t \in [0,5].$$

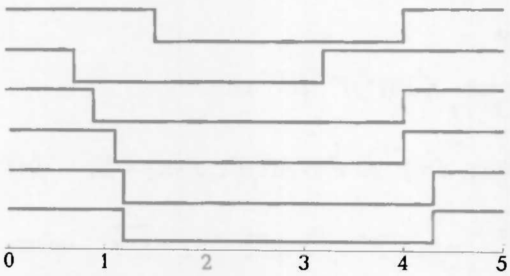


Рис. 2. Реализация управления для различных значений s

В качестве точки замыкания была взята точка t^1=2,5. Период квантования 0,05. На рис. 1, 2 показаны реализации экстремальных обратных связей, построенные для s=4, 8, 12, 16, 20, 24 при наихудшей реализации возмущения, и фазовые траектории системы, соответствующие этим управлениям. Видно, что с ростом s траектории достаточно быстро сходятся к программному решению задачи (1).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 121; № 8. С. 90.

Поступила в редакцию 27.02.2001.

Леонид Иванович Лавринович – ассистент кафедры методов оптимального управления.

УДК 519.10

Ю.В. СТЕПАНИШИНА

РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ МАЖОРИТАРНО ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ

Formula for stability radius of a majority efficient solution of a linear trajectorial problem has been obtained.

Пусть $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m > 1$, $A = [a_{ij}]_{n\times m} \in \mathbf{R}^{nm}$. $n > 1$. На множестве траекторий $T \subset 2^E \backslash \varnothing$, $|T| > 1$, зададим векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A),\ f_2(t, A),\ \ldots, f_n(t, A))$$

с линейными частными критериями

$$f_i(t,\ A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \to \min_{t \in T},\ i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N(t) = \{\, j \in N_n : e_j \in t\}$.

Под n-критериальной траекторной задачей $Z^n(A)$, n>1, будем понимать задачу нахождения множества мажоритарно эффективных траекторий [1, 2]

$$M^n(A) = \{t \in T : \mu(t) = \varnothing\},$$

где $\mu(t) = \{t' \in T : [t, t', A]_+ > [t, t', A]_-\}$, $[t, t', A]_+ = |\{\, i \in N_n : \tau_i(t, t', A) > 0\}|$,
$[t, t', A]_- = |\{\, i \in N_n : \tau_i(t, t', A) < 0\}|$, $\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A)$.

Легко видеть, что всякая мажоритарно эффективная траектория является эффективной, т. е. оптимальной по Парето.

Траекторию $t \in M^n(A)$ назовем устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $t \in M^n(A+B)$ $\forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$, где $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\|_\infty < \varepsilon\}$, $\|B\|_\infty = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$, $B = [b_{ij}]_{n\times m}$. Радиусом устойчивости такой траектории $\rho^n_M(t, A)$ назовем максимальное значение числа ε.

В работе [2] получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости мажоритарно эффективной траектории. В данной статье выводится формула для его вычисления.

Введем обозначения

$$\gamma_i(t, t', A) = -\frac{\tau_i(t,\ t',\ A)}{\Delta(t,\ t')},\ i \in N_n,\ \ \Delta(t, t') = |(t \setminus t') \cup (t' \setminus t)|.$$

Очевидно, что $\Delta(t, t') > 0$ при $t \neq t'$.

Лемма [3]. Если $\gamma_i(t, t', A) > 0$, то для всякого числа φ такого, что $0 < \varphi \leq \gamma_i(t, t', A)$, выполняются неравенства

$$\forall B \in \Re(\varepsilon)\ (\tau_i(t, t', A+B) < 0).$$

Пусть $t \in M^n(A)$, $t' \neq t$, $t' \in T$. Все числа $\gamma_i(t, t', A)$, $i \in N_n$, упорядочим следующим образом:

$$\gamma_{s_1}(t,\ t',\ A) \geq \gamma_{s_2}(t,\ t',\ A) \geq \ldots \geq \gamma_{s_n}(t,\ t',\ A). \tag{1}$$

Положим

$$\varphi^n(t,\ A) = \min_{t' \in T\setminus\{t\}} \gamma_{s_k}(t,\ t',\ A),$$

где $k = \left| \frac{n+1}{2} \right|$ – целая часть числа $\frac{n+1}{2}$. Очевидно, что $k \geq 1$ и справедливы неравенства

$$n - k \leq k \leq n - k + 1. \tag{2}$$

Теорема. Радиус устойчивости всякой мажоритарно эффективной траектории задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, выражается формулой:

$$\rho_M^n(t, A) = \varphi^n(t, A).$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\varphi^n(t, A) \geq 0$. В противном случае нашлась бы такая траектория $t' \neq t$, что $\forall i \in \{k,\ k+1,\ \ldots,\ n\}$ выполнялось бы неравенство $\tau_{s_i}(t,\ t',\ A) < 0$ и, следовательно, $\tau_{s_i}(t,\ t',\ A) > 0$, т. е. $[t, t', A]_+ \geq n-k+1$. А отсюда с учетом (2) и очевидного неравенства $[t, t', A]_- \leq k-1$ получаем $[t, t', A]_+ > [t, t', A]_-$, что противоречит условию $t \in M^n(A)$.

Теперь докажем справедливость неравенства

$$\rho_M^n(t,\ A) \geq \varphi^n(t,\ A). \tag{3}$$

В случае $\varphi^n(t, A) = 0$ это неравенство очевидно. Пусть $\varphi := \varphi^n(t, A) > 0$. Тогда для любой траектории $t' \neq t$ выполняется неравенство $\gamma_{s_k}(t,\ t',\ A) \geq \varphi$ и в силу упорядоченности (1) – неравенства $\gamma_{s_i}(t, t', A) \geq \varphi > 0$, $i \in N_k$. Поэтому согласно лемме имеем $\tau_{s_i}(t, t', A+B) < 0$ $\forall B \in \Re(\varphi)$ $\forall i \in N_k$, откуда с учетом (2) и неравенства $[t, t', A+B]_+ \leq n-k$ выводим $[t, t', A+B]_- \geq k > n-k \geq [t, t', A+B]_+$. Таким образом, $t \in M^n(A+B)$ $\forall B \in \Re(\varphi)$, т. е. выполняется неравенство (3).

Наконец, докажем, что справедливо неравенство

$$\rho_M^n(t, A) \leq \varphi^n(t, A). \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon > \beta > \varphi > 0$. Тогда в соответствии с определением числа φ найдется такая траектория $t' \neq t$, что

$$\beta > \gamma_{s_i}(t,\ t',\ A)\quad \forall i \in \{k, k+1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Построим возмущающую матрицу $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } i \in N_n,\ j \in N(t \setminus t'), \\ -\beta, & \text{если } i \in N_n,\ j \in N(t' \setminus t), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда с учетом линейности функций $\tau_i(t, t', A)$ и неравенств (5) получаем, что для любого индекса $i \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ верны соотношения

$$\tau_{s_i}(t, t', A+B) = \tau_{s_i}(t, t', A) + \tau_{s_i}(t, t', B) = -\gamma_{s_i}(t, t', A)\Delta(t, t') + \beta\Delta(t, t') =$$
$$= (\beta - \gamma_{s_i}(t, t', A))\Delta(t, t') > 0.$$

Поэтому в силу (2) и очевидного неравенства $[t, t', A+B]_- \le k-1$ имеем $[t, t', A+B]_+ > [t, t', A+B]_-$, т. е. $t \notin M^n(A+B)$. Следовательно, верно неравенство (4), которое вместе с неравенством (3) доказывает теорему.

1. Шоломов Л.А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М., 1989.

2. Emelichev V.A., Stepanishyna Yu.V. // Computer science Journal of Moldova. 1999. Vol. 7. № 3 (21). P. 291.

3. Емеличев В.А., Гирлих Э., Подкопаев Д.П. // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1996. № 3. С. 5.

Поступила в редакцию 05.03.2001.

Юлия Всеволодовна Степанишина – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.А. Емеличев.

УДК 517.983.34

В.В. КАШЕВСКИЙ

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА С ЛОГАРИФМОМ В ЯДРЕ

The singular operator is studied, which one extends transform of the Hilbert. The representation of an operator as product of two more simple operators is obtained.

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера на действительной оси и $f(\infty)=0$. Рассмотрим преобразование Гильберта

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)dt}{t-x}, \tag{1}$$

свойства которого хорошо изучены [1, 2].

Будем называть обобщенным преобразованием типа Гильберта каждый из двух следующих операторов

$$H_1 f(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln\left|\dfrac{t-x}{x}\right|}{t-x}dt, \tag{2}$$

$$\tilde{H}_1 f(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}dt. \tag{3}$$

Исследование свойств операторов (2), (3) является открытой проблемой [3, 4]. Введем оператор

$$Af(x) = \left(\ln|x|\right)f(x) - Rf(x) + \frac{\pi i}{2}\left(H^+f(x) - H^-f(x)\right),$$

где

$$Rf(x) = \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{x-t}dt, \quad H^{\pm}f(x) = \pm\frac{1}{\pi i}\int_0^{\pm\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt.$$

Теорема. Справедливые следующие операторные равенства

$$H_1 = \frac{\pi i}{2}\left(H^+H - H^-H\right) - RH\,, \tag{4}$$

$$\tilde{H}_1 f = AHf\,. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим

$$f^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)dt}{t-x} \tag{6}$$

и

$$I^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f^{\pm}(t)\ln|t-x|}{t-x}dt\,.$$

Кроме того,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}dt\,. \tag{7}$$

Пусть замкнутый контур L^+ состоит из полуокружностей $\Gamma_R = \{z : |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\gamma_\varepsilon = \{z : |z-x| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и двух отрезков $[-R,\ x-\varepsilon]$, $[x+\varepsilon,\ R]$. Далее нам понадобится непрерывная ветвь логарифма $\ln^+(t-x)$, где t находится в верхней полуплоскости и $\arg(t-x) \in [0,\ \pi]$. Аналогично вводится ветвь логарифма $\ln^-(t-x)$, где t принадлежит нижней полуплоскости и $\arg(t-x) \in [-\pi,\ 0]$.

Очевидно, что, с одной стороны,

$$\int_{L^+}\frac{f^+(t)\ln^+(t-x)}{t-x}dt = 0\,. \tag{8}$$

С другой – на отрезке $[-R,\ x-\varepsilon]$ справедливо равенство $\ln^+(t-x) = \ln|t-x| + \pi i$, а на отрезке $[x+\varepsilon,\ R]$ выполняется соотношение $\ln^+(t-x) = \ln|t-x|$.

Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\pi i\int_{-R}^{x-\varepsilon}\frac{f^+(t)dt}{t-x} + \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f^+(t)\ln^+(t-x)}{t-x}dt\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\pi i\int_{-R}^{x-\varepsilon}\frac{f^+(t)dt}{t-x} + \pi i\int_{x+\varepsilon}^{x+1}\frac{f^+(x)dt}{t-x} + i\ln\varepsilon\int_0^{\pi}\left(f^+(x) - f^+(x+\varepsilon e^{i\varphi})\right)d\varphi\right) -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{\pi}\left(f^+(x) - f^+(x+\varepsilon e^{i\varphi})\right)\varphi d\varphi - \frac{\pi^2}{2}f^+(x)\right) =$$

$$= \pi i\int_R^{x+1}\frac{f^+(t)dt}{t-x} - \pi i\int_x^{x+1}\frac{f^+(t)-f^+(x)}{t-x}dt + \frac{\pi^2}{2}f^+(x)\,.$$

Если учесть найденный предел, то при $R\to\infty$ из равенства (8) получим соотношение

$$I^+ = -\pi i\int_{-\infty}^{x+1}\frac{f^+(t)dt}{t-x} + \pi i\int_x^{x+1}\frac{f^+(t)-f^+(x)}{t-x}dt - \frac{\pi^2}{2}f^+(x)\,. \tag{9}$$

Аналогично можно показать, что

$$I^- = \pi i\int_{-\infty}^{x+1}\frac{f^-(t)dt}{t-x} - \pi i\int_x^{x+1}\frac{f^-(t)-f^-(x)}{t-x}dt - \frac{\pi^2}{2}f^-(x)\,. \tag{10}$$

Из равенств (1), (6), (7), (8), (10) получаем формулу

$$I=-\pi i\int\limits_{-\infty}^{x+1}\frac{(Hf)(t)dt}{t-x}+\pi i\int\limits_{x}^{x+1}\frac{(Hf)(t)-(Hf)(x)}{t-x}dt-\frac{\pi^2}{2}f(x)$$

или

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}dt=-\int\limits_{-\infty}^{x+1}\frac{(Hf)(t)dt}{t-x}+ \int\limits_{x}^{x+1}\frac{(Hf)(t)-(Hf)(x)}{t-x}dt+\frac{\pi i}{2}f(x). \tag{11}$$

Формулу (11) можно записать в симметричном виде. Заметим вначале, что она эквивалентна двум следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}dt=-\frac{\pi i}{2}f(x)+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(Hf)(t)dt}{t-x}+ \int\limits_{x}^{0}\frac{(Hf)(t)-(Hf)(x)}{t-x}dt+(\ln|x|)Hf(x), \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}dt=\frac{\pi i}{2}f(x)-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(Hf)(t)dt}{t-x}+ \int\limits_{x}^{0}\frac{(Hf)(t)-(Hf)(x)}{t-x}dt+(\ln|x|)Hf(x). \tag{13}$$

Учитывая равенства (12) и (13), получим, что

$$\tilde{H}_1 f(x)=(\ln|x|)Hf(x)+\frac{\pi i}{2}\left(H^{+}Hf(x)-H^{-}Hf(x)\right)-RHf(x). \tag{14}$$

Из формулы (14) следуют равенства (4) и (5). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф00-205).

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 3 т. М., 1970. Т. 2.
3. Кашевский В.В. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2.
4. Килбас А.А. // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. Мн., 1985.

Поступила в редакцию 26.05.2001.

Витольд Васильевич Кашевский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 512.546

А.А. ШИШКЕВИЧ

КОНЕЧНО ПРЕДСТАВИМЫЕ ПОЧТИ СВОБОДНЫЕ АСФЕРИЧЕСКИЕ ПРО-*p*-ГРУППЫ

In this paper the classification of the virtually freely aspherical pro-*p*-groups is announced.

Про-p-группа G называется *асферической*, если для некоторого ее свободного копредставления $1\to N\to F\to G\to 1$ модуль соотношений $\overline{N}$ является пермутационным G-модулем, т. е. свободной в смысле работы [1] абелевой группой экспоненты p над некоторым пунктированным проконечным G-пространством.

Класс конечно представимых почти свободных асферических про-p-групп описывает следующая

Теорема. *Конечно представимая асферическая про-p-группа G содержит открытую свободную подгруппу в том и только в том случае, когда G изоморфна свободному про-p-произведению конечного числа конечных циклических p-групп и некоторой свободной про-p-группы конечного ранга.*

Доказательство данной теоремы сводится к применению некоторых технических результатов, связанных функтором сопряжения D_G, определенным ниже. Этот функтор последовательно применяется к известной последовательности модуля соотношений группы G.

Обозначим $\mathrm{Mod}_L(G)$ и $\mathrm{Mod}_R(G)$ категорию соответственно левых и правых проконечных конечно порожденных $F_p[[G]]$-модулей.

Определение. *Функтором сопряжения* называется контравариантный функтор $D_G:\mathrm{Mod}_L(G)\to\mathrm{Mod}_R(G)$ такой, что модулю M ставится в соответствие сопряженный к нему (в смысле определения 1 § 4 главы II книги [2]) правый модуль $D_G(M)=\mathrm{Hom}_G(M, F_p[[G]])$, снабженный компактно открытой топологией.

Доказательство теоремы основано на использовании следующих свойств функтора сопряжения.

Лемма 1. *Функтор сопряжения точен справа и аддитивен.* Это вытекает из известных свойств функтора Hom.

Лемма 2. *Пусть* $H\leq G$, $|H|<\infty$. *Тогда* $D_G F_p[[G/H]]\cong F_p[[H/G]]$, *причем образующему* $H1$ *модуля* $F_p[[H\backslash G]]$ *соответствует морфизм* $\eta\in D_G(F_p[[G/H]])$, $\eta(1H)=\sum_{h\in H}h$.

Лемма 3. *Ограничение функтора* $D_G^2:\mathrm{Mod}_L(G)\to\mathrm{Mod}_L(G)$ *на полную подкатегорию конечно порожденных пермутационных G-модулей с конечными стабилизаторами изоморфно тождественному функтору данной подкатегории.*

Функтор сопряжения перестановочен с функтором Res ограничения действия на открытую подгруппу.

Лемма 4. *Пусть* $H\leq G$, $[G:H]<\infty$. *Тогда имеет место изоморфизм функторов* $\mathrm{Res}_H^G D_G$ *и* $D_H\mathrm{Res}_H^G$ *из категории* $\mathrm{Mod}_L(G)$ *в категорию* $\mathrm{Mod}_R(H)$.

1. Gildenhuys D., Lim C.-K. // Math. Z. 1972. Bd. 125. № 1. S. 233.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.

Поступила в редакцию 18.10.2001.

Алексей Алексеевич Шишкевич – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор О.В. Мельников.

УДК 519.2

Ю.В. МЕЛЕНЕЦ, Е.Н. ОРЛОВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА БИНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

The problem of estimating parameters of Gaussian processes is considered.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\{U_t\in R;\ t=\overline{1,\ N}\}$, который порождает бинарную случайную последовательность $\{X_t;\ t=\overline{1,\ N}\}$ таким образом:

$$P\{X_t = 1 | U_t\} = F_t(U_t), \quad (1)$$

$$P\{X_t = 0 | U_t\} = 1 - F_t(U_t), \quad (2)$$

где $F_t : R \to [0,\ 1]$ и $F_t(U_t)$ – монотонно неубывающие функции.

Пусть случайные величины $\{U_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ независимы и распределены при каждом t по гауссовскому закону с параметрами μ и σ^2, а $F_t(\cdot)$ – функция распределения нормального закона с параметрами a_t и b, которые известны.

Задача состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых методом максимального правдоподобия можно оценить параметры μ и σ и построить эти оценки.

Введем в рассмотрение множества $C(0) =]-\infty,\ 0[$ и $C(1) = [0,\ +\infty[$. Для построения функции правдоподобия воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1 [1]. Пусть бинарная последовательность $\{X_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ порождена случайным процессом $\{U_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ при помощи соотношений (1) и (2), $\{Y_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ – последовательность попарно независимых случайных величин с функциями распределения $F_t(\cdot)$, и для любых $t = \overline{1,\ N}$ и $\tau = \overline{1,\ N}$ случайные величины Y_t и X_τ независимы. Тогда для любого набора чисел $\{x_t;\ x_t \in \{0,\ 1\};\ t = \overline{1,\ N}\}$ справедливо:

$$P\{X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \ldots, X_N = x_N\} = P\{V_1 \in C(x_1),\ V_2 \in C(x_2), \ldots, V_N \in C(x_N)\},$$

где $V_t = U_t - Y_t$.

Очевидно, что $\{V_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных при каждом t по нормальному закону с параметрами $\mu - a_t$, $\sqrt{b^2 + \sigma^2}$. Случайные величины $\{X_t;\ t = \overline{1,\ N}\}$ также независимы и имеют распределение

$$P\{X_t = x_t\} = p_t^{x_t}(1 - p_t)^{1 - x_t},$$

где $p_t = P\{V_t \in C(1)\} = P\{V_t \geq 0\} = 1 - \Phi\left(\frac{a_t - \mu}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}\right)$, а $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Тогда логарифм функции правдоподобия $l(\mu,\ \sigma)$ оцениваемых параметров μ и σ имеет вид

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{t=1}^{N} \left(x_t \ln(1 - \Phi(z_t)) + (1 - x_t) \ln \Phi(z_t)\right), \quad (3)$$

где $z_t = \frac{a_t - \mu}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}$.

Исследуя функционал (3) на максимум, приходим к равенствам:

$$\frac{dl(\mu, \sigma)}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}} \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{x_t}{1 - \Phi(z_t)} - \frac{1 - x_t}{\Phi(z_t)}\right) \varphi(z_t),$$

$$\frac{dl(\mu,\sigma)}{d\sigma}=\frac{\sigma}{b^2+\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}-\frac{1-x_t}{\Phi(z_t)}\right)z_t\cdot\varphi(z_t),$$

$$\frac{d^2l(\mu,\sigma)}{d\mu^2}=\frac{1}{b^2+\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}-\frac{1-x_t}{\Phi(z_t)}\right)z_t\cdot\varphi(z_t)-$$

$$-\frac{1}{b^2+\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}+\frac{1-x_t}{\Phi(z_t)}\right)\varphi(z_t),$$

$$\frac{d^2l(\mu,\sigma)}{d\mu d\sigma}=-\frac{\sigma}{\sqrt{(b^2+\sigma^2)^3}}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{(1-\Phi(z_t))^2}+\frac{1-x_t}{\Phi^2(z_t)}\right)z_t\cdot\varphi^2(z_t)+$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{(b^2+\sigma^2)^3}}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}-\frac{1-x_t}{\Phi(z_t)}\right)\left(z_t^2-1\right)\varphi(z_t),$$

$$\frac{d^2l(\mu,\sigma)}{d\sigma^2}=-\frac{\sigma^2}{(b^2+\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{(1-\Phi(z_t))^2}+\frac{1-x_t}{\Phi^2(z_t)}\right)z_t^2\cdot\varphi^2(z_t)+$$

$$+\frac{1}{(b^2+\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}-\frac{1-x_t}{\Phi^2(z_t)}\right)\left(\sigma^2 z_t+b^2-2\sigma^2\right)z_t\cdot\varphi^2(z_t),$$

где $\varphi(z)=\Phi'(z)$ – функция плотности распределения вероятности стандартного нормального закона.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2. Если для любого значения t $(t=\overline{1,\ N})$ $a_t=a=\text{const}$, то каждая точка $(a,\ \sigma)$ линии

$$\frac{\mu-a}{\sqrt{b^2+\sigma^2}}=\Phi^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t\right)$$

является стационарной точкой.

Доказательство. При $a_t\equiv a=\text{const}$ система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dl(\mu,\ \sigma)}{d\mu}=0,\\[2mm] \dfrac{dl(\mu,\ \sigma)}{d\sigma}=0\end{cases}$$

вырождается в одно уравнение

$$\sum_{t=1}^{N}\left(\frac{x_t}{1-\Phi(z_t)}-\frac{1-x_t}{\Phi(z_t)}\right)=0,$$

которое приводится к виду

$$\Phi\left(\frac{\mu-a}{\sqrt{b^2+\sigma^2}}\right)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если параметры $\left\{a_t;\ t=\overline{1,N}\right\}$ являются постоянными величинами, то не существует единственной оценки максимального правдоподобия $(\hat{\mu},\ \sigma)$ параметров $(\mu,\ \sigma)$.

Лемма 3. Для любых значений параметров μ и σ справедливы неравенства

$$\frac{d^2 l(\mu,\sigma)}{d\mu^2} < 0, \quad \frac{d^2 l(\mu,\sigma)}{d\sigma^2} < 0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2 l(\mu,\sigma)}{d\mu^2}\frac{d^2 l(\mu,\sigma)}{d\sigma^2} - \left(\frac{dl(\mu,\sigma)}{d\mu d\sigma}\right)^2 < 0. \tag{5}$$

Доказательство неравенств (4), (5) проводится непосредственными выкладками. Для доказательства неравенства (5) используется неравенство Коши – Буняковского для рядов.

Будем предполагать, не ограничивая общности, что значения параметров $\left\{a_t;\ t=\overline{1,\ N}\right\}$ упорядочены по неубыванию, т. е.

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{N-1} \le a_N,$$

причем не существует такого значения a=const, что $\sum_{t=1}^{N}(a_t - a)^2 = 0$.

Теорема. Функция $l(\mu,\ \sigma)$, определенная соотношением (3), имеет единственный максимум тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t=1}^{N} a_t \sum_{t=1}^{N} x_t > N\sum_{t=1}^{N} a_t x_t.$$

Доказательство необходимости проводится с использованием следующего неравенства [2]:

$$\sum_{t=1}^{M} s_t \sum_{t=1}^{M} r_t > M\sum_{t=1}^{M} s_t r_t, \tag{6}$$

которое выполняется при всех $s_1 < s_2 \le \ldots \le s_M$ и $r_1 < r_2 \le \ldots \le r_M$. Неравенство (6) является противоположным, если в одной из последовательностей $\left\{s_t;\ t=\overline{1,\ M}\right\}$ или $\left\{r_t;\ t=\overline{1,\ M}\right\}$ неравенства противоположны. Доказательство достаточности проводится методом от противного.

1. Keenan D. // Journal of the ISA. 1982. № 77. P. 816.
2. Харди Г. Неравенства. М., 1956.

Поступила в редакцию 20.02.2002.

Юрий Викторович Меленец – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Елена Николаевна Орлова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных.

Наши юбиляры

СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ЧЕРЕНКЕВИЧ

Исполнилось 60 лет заведующему кафедрой биофизики физического факультета, доктору биологических наук, профессору Сергею Николаевичу Черенкевичу.

С.Н. Черенкевич родился 20 апреля 1942 г. в семье рабочего-железнодорожника. После окончания в 1959 г. Столовичской средней школы Барановичского района поступил на физический факультет БГУ. Дипломная работа, выполненная им на кафедре ядерной физики под руководством профессора А.Н. Писаревского, была посвящена применению одноэлектронных фотоумножителей для регистрации слабых световых потоков, излучаемых биологическими объектами. После окончания в 1964 г. учебы и службы в рядах Советской Армии он поступает в аспирантуру БГУ, а затем работает ассистентом кафедры ядерной физики. В 1969 г. С.Н. Черенкевич защищает кандидатскую диссертацию на тему «Люминесцентные свойства нуклеиновых кислот и нуклеопротеидов». С 1970 г. работает доцентом кафедры ядерной физики, а после образования в 1973 г. на физическом факультете кафедры биофизики – доцентом этой кафедры, в 1980 г. он избирается ее заведующим. С этого времени педагогическая, научная и организаторская работа С.Н. Черенкевича связана с кафедрой биофизики. В 1990 г. Сергей Николаевич защищает докторскую диссертацию на тему «Физико-химические реакции клеток на стимулирующие и экстремальные воздействия». В 1991 г. ему было присвоено ученое звание профессора.

Большое внимание профессор С.Н. Черенкевич уделяет педагогической деятельности: руководит курсовыми и дипломными работами студентов, работой магистрантов и аспирантов, разрабатывает новые курсы и учебные программы; читает лекции по общему и специальным курсам «Физика биосистем», «Биофизика клетки», «Биофизика сложных систем», «Физика человека», «Молекулярная и клеточная патология» для студентов и магистрантов, а также лекции «Генная терапия» и «Современные проблемы молекулярной медицины» для преподавателей мединститутов республики в Белорусской медицинской академии последипломного образования. Сергей Николаевич неоднократно выступал с докладами в университетах ФРГ (Западный Берлин), Японии (Иокогама), США (Филадельфия), ПНР (Люблин). Им подготовлены 24 кандидата и один доктор биологических наук.

С.Н. Черенкевич активно занимается научной работой. Он внес значительный вклад в развитие молекулярной и клеточной биофизики. Совместно со своими учениками открыл новые структуры, активирующие молекулярный кислород в клетках иммунной системы, описал свыше десяти новых явлений в клетках крови, установил механизмы стимулирования редокс-систем клеток крови на начальных стадиях их активации и роль в этих процессах высокореактивных внутриклеточных интермедиатов. В настоящее время на кафедре, возглавляемой профессором С.Н. Черенкевичем, проводятся эффективные исследования по биофизике мембран и клеток, фототерапии рака, клеточной сигнализации, медицинской биофизике, создаются новые типы биосенсоров, нейросенсоров и биофизического оборудования. С.Н. Черенкевич – автор около 500 научных трудов, в том числе трех монографий. При его активном участии сделаны 14 научно-прикладных разработок (приборов, устройств, методик диагностики и др.), которые были представлены на выставках различного уровня, в том числе на международных – в Ганновере и Дрездене. Им получены 23 авторских свидетельства на изобретения. В настоящее время под руководством С.Н. Черенкевича разрабатываются принципы создания новых вычислительных устройств на основе использования ансамблей живых нейронов и полупроводниковых электронных систем, а также компьютеризованные клеточные биореакторы.

Весьма разнообразна и общественная деятельность С.Н. Черенкевича. В настоящее время он является членом Президиума научно-методического совета Министерства образования Республики Беларусь, членом секции биологических наук совета по координации фундаментальных исследований Государственного комитета по науке и технологиям Беларуси, входит в состав научно-методического совета «Экология» министерства образования, Ученого совета физического факультета, специализированных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, редколлегии журнала «Вестник БГУ» (серия 1) и редакционного совета журнала «Весці медыка-біялагічных навук» НАН Беларуси, является сопредседателем Белорусского общественного объединения фотобиологов и биофизиков.

Большая научная и педагогическая деятельность С.Н. Черенкевича получила высокую оценку. Он награжден Почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь, Почетными грамотами ректората БГУ, знаками «Изобретатель СССР» и «Отличник образования Республики Беларусь». В 2000 г. С.Н. Черенкевич с коллективом удостоен Государственной премии Республики Беларусь за создание научной щколы биофизики и клеточной биологии и большой личный вклад в развитие новых научных направлений в физико-химической биологии.

Сергей Николаевич Черенкевич – ученый и педагог широкой эрудиции и большого организаторского таланта, пример человеческой мудрости, доброты и тактичности. Он полон новых идей и замыслов, творческих сил и энергии.

Коллеги и студенты физического факультета сердечно поздравляют Сергея Николаевича с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, дальнейшей плодотворной научной и педагогической деятельности, оптимизма и творческого долголетия на благо родной Беларуси.

НИКОЛАЙ ИОСИФОВИЧ ЮРЧУК

Исполнилось 60 лет известному белорусскому ученому, декану механико-математического факультета БГУ, заведующему кафедрой уравнений математической физики, заслуженному деятелю науки Республики Беларусь, доктору физико-математических наук, профессору Николаю Иосифовичу Юрчуку.

Н.И. Юрчук родился 27 мая 1942 г. в д. Дубенец Столинского района Брестской области в крестьянской семье. В 1966 г. окончил математический факультет БГУ и поступил в аспирантуру при кафедре дифференциальных уравнений. После окончания учебы в аспирантуре с января 1969 г. он работает сначала ассистентом кафедры дифференциальных уравнений, затем старшим преподавателем и доцентом кафедры уравнений математической физики. В 1970 г. Николай Иосифович защищает кандидатскую диссертацию, в 1982 г. – докторскую. В 1974 г. ему присваивается ученое звание доцента, а в 1983 г. – ученое звание профессора. В 1982 г. Н.И. Юрчук был избран на должность заведующего кафедрой уравнений математической физики. С 1983 по 1985 г. работает деканом механико-математического факультета, с 1985 по 1988 г. – секретарем парткома университета, а с 1996 г. снова возглавляет механико-математический факультет.

Основные научные интересы Н.И. Юрчука сформировались в области уравнений с частными производными, уравнений математической физики и дифференциально-операторных уравнений благодаря влиянию доцента Н.И. Бриша – ученика академика И.Г. Петровского. Под его непосредственным руководством Н.И. Юрчук выполнил цикл работ по исследованию методом энергетических неравенств корректной разрешимости граничных задач для уравнений с частными производными с двумерным временем. По итогам полученных результатов была защищена кандидатская диссертация “Задача Гурса и смешанная задача с условиями Гурса для некоторых линейных уравнений с двумя временными переменными” в Институте математики АН БССР.

В последующем Н.И. Юрчук развил метод энергетических неравенств для исследования граничных задач для более широкого круга дифференциально-операторных уравнений, в том числе и высших порядков. Наряду с установлением корректности граничных задач в смысле Адамара – Петровского этот метод впервые позволил доказать непрерывную зависимость решений от операторных коэффициентов уравнений и на этом свойстве построить приближенный метод их решения. Результаты исследований были обобщены Николаем Иосифовичем в докторской диссертации "Метод энергетических неравенств в исследовании дифференциально-операторных уравнений", которую он защитил в Математическом институте им. В.А. Стеклова в Москве.

В дальнейшем полученные результаты были распространены, во-первых, на случаи, когда области определения операторных коэффициентов являются переменными (зависят от времени t) или могут быть неплотными. Переменность областей определения впервые вывела Н.И. Юрчука на изучение уравнений с частными производными переменного порядка, а неплотность областей определения – на важные в приложении задачи с интегральными условиями. Во-вторых, априорные энергетические неравенства удалось применить в некорректных в смысле Адамара – Петровского задачах для установления сходимости методов регуляризации.

В 1996 г. Н.И. Юрчуку вместе с В.И. Корзюком и Я.В. Радыно была присуждена Государственная премия Республики Беларусь в области науки и техники за цикл работ "Операторные методы в дифференциальных уравнениях". В том же году ему было присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки Республики Беларусь".

Одна из последних серий работ Н.И. Юрчука посвящена разработке операционного метода для решения смешанных задач для параболических уравнений и парных интегральных уравнений, применению метода парных уравнений для решения нестационарных задач математической физики и использованию полученных результатов для построения физико-математических моделей задач теории неразрушающего контроля.

Н.И. Юрчук опубликовал свыше 120 научных и научно-методических работ. С его научными исследованиями теснейшим образом связана научно-педагогическая деятельность, которую он начал 35 лет назад на кафедре дифференциальных уравнений еще аспирантом. Лекции Николая Иосифовича отличаются глубиной, доступностью и ясностью изложения.

Большой вклад Н.И. Юрчук вносит в подготовку высококвалифицированных научных кадров. С 1983 г. он неизменно является председателем совета по защитам кандидатских и докторских диссертаций БГУ по специальностям 01.01.01 – математический анализ и 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Им подготовлены один доктор наук и 15 кандидатов, пять из которых работают в вузах Алжира, Германии, Иордании и Йемена.

Н.И. Юрчук активно участвует в общественной жизни. Он был членом оргкомитетов четырех конференций математиков Беларуси (1982, 1992, 1997, 2000 гг.) и оргкомитетов двух международных конференций "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (1993 и 2001 гг.), проводившихся БГУ совместно с Институтом математики НАН Беларуси. В настоящее время является членом Президиума ВАК Беларуси, координатором Межвузовской программы фундаментальных исследований "Анализ и динамические системы", членом редколлегии журнала "Вестник БГУ" (серия 1). Большую работу Н.И. Юрчук проводит как ученый секретарь Ученого совета БГУ.

Николай Иосифович – человек разносторонних интересов и эрудиции. Он живо интересуется вопросами литературы, истории, любит спорт и музыку, хороший шахматист, прекрасно играет на гитаре. Широкий кругозор, прекрасная научная интуиция и преданность избранному делу создают вокруг него доброжелательную и творческую атмосферу.

Сердечно поздравляем Николая Иосифовича Юрчука с 60-летием и желаем ему крепкого здоровья, большого счастья и дальнейших успехов в его активной научной, педагогической и общественной деятельности.

А.В. Козулин, В.Н. Абрашин, В.В. Амелькин, И.В. Гайшун, В.И. Громак, А.А. Дезин, Н.А. Изобов, А.А. Килбас, В.П. Козлов, Н.И. Козловский, В.И. Корзюк, Л.Д. Кудрявцев, Ф.Е. Ломовцев, Н.А. Лукашевич, П.А. Маидрик, Д.Г. Медведев, Е.И. Моисеев, С.М. Никольский, С.И. Похожаев, Я.В. Радыно, В.И. Чесалин, Л.А. Янович

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.317.1:778.38

Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. **Минимизация искажений голографического изображения томографической системы с оптическим восстановлением** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

На основе приближенной дифракционной теории аберраций голографического изображения, установленной авторами ранее, определяются оптимальные условия голографирования сложных объектов применительно к системам голографической томографии с восстановлением изображения в оптическом диапазоне.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 621.373

Гулис И. М., Саечников К.А. **ВКР-преобразователь на $LiIO_3$ с синхронной накачкой** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Проведено сопоставление схем и параметров генерации стоксовых ВКР-импульсов в ВКР-лазерах на кристаллах $LiIO_3$, синхронно накачиваемых пикосекундными импульсами АИГ:Nd^{3+} лазера с пассивной синхронизацией мод в режимах внутри- и внерезонаторной накачки. Проанализированы зависимости профилей импульсов накачки и ВКР от рассогласования длин резонаторов, показана возможность существенного сокращения длительности ВКР-импульсов в сравнении с импульсами накачки. Обсуждается механизм формирования профиля ВКР-импульса.

Библиогр. 4 назв., ил. 3.

УДК 534

Новицкий А.В., Барковский Л.М., Фурс А.Н. **Особенности тензорных геометрооптических рядов в стратифицированных средах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 2002. № 2.

Рассмотрены тензорные геометрооптические ряды в анизотропных одномерно неоднородных средах. Получены тензорное уравнение эйконала, геометрооптическое решение уравнений Максвелла и уравнения переноса. Выполнены вычисления в частном случае изотропной стратифицированной среды, исследована возможность совпадения геометрооптического решения с точным решением уравнений Максвелла.

Библиогр. 9 назв.

УДК 539.12

Стражев В.И., Ционенко Д.А. **О калибровочной теории поля Дирака – Кэлера в искривленном пространстве-времени** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Показано, что в искривленном пространстве-времени, когда преобразования группы Лоренца локализованы, соответствие в описании частиц со спином 1/2 посредством уравнений Дирака и Дирака – Кэлера возможно только в случае, когда преобразования группы внутренней симметрии также локализованы. Построена классическая теория поля Дирака – Кэлера, взаимодействующего с неабелевым калибровочным полем в искривленном пространстве-времени.

Библиогр. 12 назв.

УДК 530.12

Гринчук А.В., Ушаков Е.А. **Приближенное вычисление интеграла по путям для частицы со спином** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Предлагается метод приближенного вычисления интегралов по путям для частицы со спином. Используемый подход основан на применении методов, разработанных в квантовой теории поля, и разложении в ряд лагранжиана и оператора параллельного переноса. Точность предлагаемого разложения проверяется сравнением с известным точным результатом – пропагатором свободной частицы на псевдосфере.

Библиогр. 11 назв.

УДК 537. 311

Леонтьев А.В. **Модернизация TRIM-алгоритма метода Монте-Карло** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Рассмотрены проблемы, связанные с расширением функциональных возможностей широко известного TRIM-алгоритма реализации метода Монте-Карло.

Обсуждаются возможности расширения работы TRIM-алгоритма реализации метода Монте-Карло с различными потенциалами ион-атомного взаимодействия. Разработанная программа позволяет использовать практически любой потенциал для расчета угла рассеяния в системе центра масс с хорошей точностью и приемлимым быстродействием.

Библиогр. 4 назв., ил. 3.

УДК 535.34+543.424+547.963

Герман А.Е. **Резонансное отражение и поглощение света гранулярными серебряными пленками** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Представлены спектры резонансного поглощения и зеркального отражения света гранулярными серебряными пленками. Полученные результаты рассматриваются в области применения описанных пленок как субстратов для спектроскопии вторичного излучения адсорбатов, усиленного поверхностью.

Библиогр. 8 назв., ил. 4.

УДК 541.423

Червяковский К.И. **Изучение механизма поступления примесей в плазму дуги переменного тока из корольков серебра малой массы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Получены и объяснены кривые испарения ряда примесей из корольков серебра малой массы. Обнаружено влияние скорости эрозии серебра на вид данных кривых.

Библиогр. 18 назв., табл. 1, ил. 3.

УДК 621.315.592

Ермолаев О.П., Микульчик Т.Ю. **Изотермический отжиг радиационных дефектов в германии, облученном большими флюенсами надкадмиевых нейтронов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Исследована низкотемпературная (до ~1,6 К) электропроводность германия n-типа, облученного большими флюенсами надкадмиевых нейтронов и подвергнутого изотермическому отжигу (при 400 °С). Делается вывод о том, что в германии, легированном надкадмиевыми нейтронами, образуются устойчивые к длительному высокотемпературному отжигу радиационные дефекты, в состав которых не входят легирующие примеси (Sb).

Библиогр. 13 назв., ил. 2.

УДК 621.315.542

Скрипка Д.А., Лукашевич М.Г. **Электрический эффект в магнитосопротивлении арсенида галлия** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Исследовано влияние электрического поля на величину и характер магниторезистивного эффекта в n-GaAs в температурном интервале 1,5–300 К и постоянном магнитном поле до 1,5 Тл. Обнаружены увеличение магниторезистивного эффекта и линеаризация его магнитополевой зависимости в электрическом поле при 300 и 77 К в случае сублинейной вольт-амперной характеристики. Показано, что, несмотря на хорошее совпадение измеренных и рассчитанных в рамках одножидкостной модели вольт-амперных характеристик, расчет зависимости магниторезистивного эффекта от электрического поля даже в приближении двухжидкостной модели дает лишь качественное совпадение с результатами измерений. При температуре жидкого гелия обнаружено уменьшение отрицательного и переход в область положительного магнитосопротивления на суперлинейном участке вольт-амперной характеристики, что связано с нагревом образца протекающим током и, как следствие, увеличением положительной компоненты магнитосопротивления из-за увеличения подвижности носителей заряда.

Библиогр. 17 назв., ил. 3.

УДК 517.955

Ломовцев Ф.Е. **Задачи Коши для гиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения** // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Функциональным методом доказаны теоремы существования и единственности сильных решений задач Коши

$$(d^2/dt^2+A_m(t)) \cdots (d^2/dt^2+A_1(t))u=f,\quad t\in]0,T[,\quad d^j u/dt^j\,|_{t=0}=\varphi_j\in H,\quad 0\leq j\leq 2m-1,\quad m=1,2,\ldots,$$

где $A_k(t)$ – самосопряженные положительно определенные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения. Их обратные $A_k^{-1}(t)$ имеют сильные производные по t $\left(A_k^{-1}(t)\right)^{(i)}$, $i=1, 2$, такие, что

$$-((A_k^{-1}(t))^{(1)}g,g)_H\leq c_1(A_k^{-1}(t)g,g)_H\ \forall g\in H,\quad |((A_k^{-1}(t))^{(2)}g,v)_H|\leq c_2|g|_H(A_k^{-1}(t)v,v)_H^{1/2}\ \forall g,v\in H.$$

Получена формула $u=\overline{M}_1^{-1}\cdots\overline{M}_m^{-1}\mathfrak{F}$ сильных решений этих задач Коши.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.926.4

Альсевич Л.А. **Устойчивость решений линейных систем с блочно-диагональными отражающими матрицами** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

С помощью метода отражающей функции В.И. Мироненко построен и изучен класс линейных дифференциальных систем, обладающих блочно-диагональными отражающими матрицами. Изучены двухточечные краевые задачи для построенного класса систем. Даны необходимые и достаточные условия существования решений двухточечных краевых задач для этих систем.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.977

Кравченко Ж.М. **Гарантированная оптимизация систем управления с использованием краткосрочных прогнозов возмущений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Рассмотрена задача гарантированной оптимизации с краткосрочными прогнозами возмущений. Приводится метод построения приближенного априорно оптимального решения.

Библиогр. 1 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 519.6

Акинфин А.В., Кирлица В.П., Черкас Е.А. **Непрерывные *D*-оптимальные планы экспериментов для квадратичной регрессии с линейным изменением дисперсии наблюдений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Построен непрерывный *D*-оптимальный план экспериментов для квадратичной регрессии с линейным изменением дисперсии наблюдений. Исследуется устойчивость *D*-оптимального плана экспериментов для равноточных наблюдений в случае линейного изменения дисперсии наблюдений.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1

Мельников О.И., Косолапов В.Н. **Распознавание P_4-структуры гусеницы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Приводится алгоритм распознавания, является ли 4-униформный гиперграф $H(V,\mathcal{E})$ P_4-структурой некоторой гусеницы. Трудоемкость алгоритма – $O\left(\left|\tilde{\mathcal{E}}\right|\right)$.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 512.74+512.552

Базылев Д. Ф. **Рациональные точки эллиптических кривых нулевого ранга** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Изучаются рациональные точки эллиптических кривых в форме Вейерштрасса нулевого ранга. Описывается метод построения групп рациональных точек эллиптических кривых в неразложимом, разложимом и полуразложимом случаях. Приведены семейства эллиптических кривых, для которых соответствующие группы вычислены явно.

Библиогр. 3 назв.

УДК 546.28:621.315.592

Бринкевич Д.И., Просолович В.С., Янковский Ю.Н. **Эпитаксиальные слои кремния, легированные германием и лютецием** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Исследованы возможности использования в базовой КМОП-технологии кремния, легированного Ge и редкоземельным элементом Lu. Легирование эпитаксиальных слоев (ЭС) указанными примесями позволило понизить величину токов утечки и увеличить пробивные напряжения структур. Полученные результаты объяснены с учетом того, что легирование ЭС Ge представляет возможность уменьшить степень несоответствия параметров решеток подложки и эпислоя, а также снизить плотность дислокаций несоответствия на границе раздела подложка – ЭС. Оптимальное согласование решеток достигается при N_{Ge}~$5{,}0 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Показано, что использование пластин кремния, легированных Ge и Lu, в качестве подложек для эпитаксиальных слоев позволяет повысить устойчивость $p-n$-переходов и МОП-структур к воздействию облучения.

Библиогр. 2 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 537.311.33

Вырко С.А. **Экранирование электростатического поля в кристаллах с прыжковой миграцией электронов по примесям** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Получены выражения для длины экранирования внешнего электростатического поля в кристаллическом полупроводнике по Дебаю – Хюккелю и Шоттки – Мотту при прыжковой миграции электронов (дырок) по водородоподобным донорам (акцепторам). Предсказано существование “скрытого” проводящего слоя в режиме прыжковой проводимости для полупроводников с малой и большой степенью компенсации.

Библиогр. 14 назв., ил. 1.

УДК 681.3

Буза М.К., Ливак Е.П. **Идентификация компьютерных программ** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Идентификация компьютерных программ для защиты прав автора основана на сопровождении программного кода скрытой информацией об управлении правами и базируется на классических и специально разработанных методах криптографии и компьютерной стеганографии.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 519.10

Матвеев Г.В., Ширяев В.М. **Оценки для числа неравенств** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

С целью получения оценок для числа неравенств в произвольных системах изучается некоторая диофантова система с использованием арифметической теории квадратичных форм.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Гатальская Т.И., Зверович Э.И. **Задача линейного сопряжения для двоякопериодических функций** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Общее решение рассматриваемой задачи выражено в квадратурах через коэффициенты ее краевого условия и эллиптические функции.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 517.51: 517.53

Старовойтов А.П. **Существование абсолютно непрерывных функций с заданной последовательностью наилучших рациональных приближений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

По заданной последовательности действительных чисел построена нечетная периодическая абсолютно непрерывная функция, наилучшие рациональные тригонометрические приближения которой совпадают с этой последовательностью.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517.955

Л о м о в ц е в Ф. Е. **Задачи Коши для гиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Функциональным методом доказаны теоремы существования и единственности сильных решений задач Коши

$$(d^2/dt^2+A_m(t)) \cdots (d^2/dt^2+A_1(t))u=f, \quad t\in]0, T[, \quad d^j u/dt^j\,|_{t=0}=\varphi_j\in H, \quad 0\leq j\leq 2m-1, \quad m=1, 2, \ldots,$$

где $A_k(t)$ – самосопряженные положительно определенные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения. Их обратные $A_k^{-1}(t)$ имеют сильные производные по t $\left(A_k^{-1}(t)\right)^{(i)}$, $i=1, 2$, такие, что

$$-((A_k^{-1}(t))^{(1)}g, g)_H\leq c_1(A_k^{-1}(t)g, g)_H \ \forall g \in H, \quad |((A_k^{-1}(t))^{(2)}g, v)_H|\leq c_2|g|_H\left(A_k^{-1}(t)v, v\right)_H^{1/2} \ \forall g, v\in H.$$

Получена формула $u = M \cdots M$ сильных решений этих задач Коши.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.926.4

А л ь с е в и ч Л. А. **Устойчивость решений линейных систем с блочно-диагональными отражающими матрицами** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

С помощью метода отражающей функции В.И. Мироненко построен и изучен класс линейных дифференциальных систем, обладающих блочно-диагональными отражающими матрицами. Изучены двухточечные краевые задачи для построенного класса систем. Даны необходимые и достаточные условия существования решений двухточечных краевых задач для этих систем.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.977

К р а в ч е н к о Ж. М. **Гарантированная оптимизация систем управления с использованием краткосрочных прогнозов возмущений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Рассмотрена задача гарантированной оптимизации с краткосрочными прогнозами возмущений. Приводится метод построения приближенного априорно оптимального решения.

Библиогр. 1 назв., табл. 1, ил. 2.

УДК 519.6

А к и н ф и н А. В., К и р л и ц а В. П., Ч е р к а с Е. А. **Непрерывные *D*-оптимальные планы экспериментов для квадратичной регрессии с линейным изменением дисперсии наблюдений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Построен непрерывный *D*-оптимальный план экспериментов для квадратичной регрессии с линейным изменением дисперсии наблюдений. Исследуется устойчивость *D*-оптимального плана экспериментов для равноточных наблюдений в случае линейного изменения дисперсии наблюдений.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1

М е л ь н и к о в О. И., К о с о л а п о в В. Н. **Распознавание P_4-структуры гусеницы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Приводится алгоритм распознавания, является ли 4-униформный гиперграф $H(V, \mathcal{E})$ P_4-структурой некоторой гусеницы. Трудоемкость алгоритма – $O\left(|\tilde{\varepsilon}|\right)$.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 512.74+512.552

Б а з ы л е в Д. Ф. **Рациональные точки эллиптических кривых нулевого ранга** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Изучаются рациональные точки эллиптических кривых в форме Вейерштрасса нулевого ранга. Описывается метод построения групп рациональных точек эллиптических кривых в неразложимом, разложимом и полуразложимом случаях. Приведены семейства эллиптических кривых, для которых соответствующие группы вычислены явно.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977
Лавринович Л.И. **К методам гарантированной оптимизации систем управления** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Описан метод построения экстремальных замыкаемых программных управлений для задачи гарантированной оптимизации динамических систем, основанный на внешней аппроксимации множеств замыкания. Показано, что с ростом числа векторов аппроксимации экстремальное управление сходится к оптимальному замыкаемому управлению.

Библиогр. 1 назв., ил. 2.

УДК 519.10
Степанишина Ю.В. **Радиус устойчивости мажоритарно эффективного решения многокритериальной линейной траекторной задачи** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Рассматривается n-критериальная задача на системе подмножеств конечного множества с линейными частными критериями. Получена формула для радиуса устойчивости мажоритарно эффективной траектории в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.983.34
Кашевский В.В. **Обобщенное преобразование типа Гильберта с логарифмом в ядре** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Изучается сингулярный оператор на действительной оси, который содержит дополнительную логарифмическую особенность, а его плотность является гельдеровской функцией. Получено представление указанного оператора в виде композиции двух более простых операторов, один из которых является оператором Гильберта.

Библиогр. 4 назв.

УДК 512.546
Шишкевич А.А. **Конечно представимые почти свободные асферические про-*p*-группы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Сформулирована классификационная теорема для класса почти свободных конечно представимых асферических про-p-групп. Приведены определение и некоторые свойства функтора сопряжения конечно порожденных G-модулей.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.2
Меленец Ю.В., Орлова Е.Н. **Об одной задаче статистического анализа бинарных случайных последовательностей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

Рассматривается задача оценивания параметров гауссовских случайных процессов по реализации соответствующих бинарных последовательностей.

Библиогр. 2 назв.

ПРАВИЛА
оформления статей

1. В редакцию представляется оригинал статьи, набранный на компьютере через 1,5 интервала на бумаге формата А4 (210×297 мм) с полями с левой стороны не менее 40 мм в редакторе Word (размер шрифта – 12 кегль, гарнитура – Times New Roman, интервал 1,5), и дискета 3,5" с ее файлом (название файла – по фамилии автора). Объем статьи не должен превышать 8 страниц текста (включая таблицы, литературу, не более 3 рисунков или фотографий); для кратких сообщений – 3 страницы текста (2 рисунка).

2. Простые формулы и буквенные обозначения величин нужно вставлять, используя Symbol (например, Σ, A^1, β_{κ}, °C...). Сложные формулы набираются при помощи редактора формул (Equation) и по ширине не должны превышать 127 мм.

3. Следует различать буквы О (прописную), о (строчную); 0 (нуль) и размечать соответственно: $\underline{\underline{O}}\ \overline{\overline{o}}\ \underline{0}$; а также латинские *l* (эль), *I* (и), *j* (йот), для чего букву *I* пишут, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками и волнистой чертой снизу. Векторы подчеркивают одной чертой снизу (стрелку над буквой не ставят). Математические символы, символы химических элементов, а также русские буквы в индексах отмечают квадратной скобкой снизу (cos, H_2O, $P_{кр}$). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечают дугами A^{2} (для верхнего) и A_{2} (для нижнего индекса).

4. Рисунки (графики, схемы), фотографии, таблицы, отсканированные или подготовленные в дополнениях Windows, представляются в одном экземпляре как на бумаге (твердая копия), так и в виде отдельных файлов на дискете в форматах, совместимых с Winword 98. Их размеры не должны быть более 120×220 мм. Следует избегать повторения данных, содержащихся в таблицах и графиках, а также представления численных результатов одновременно в виде таблиц и графиков.

5. Таблицы (обязательно с заголовками) и подписи к рисункам необходимо печатать на отдельных страницах. Места для таблиц и рисунков указываются на полях рукописи. Кривые на рисунках нумеруются арабскими цифрами, которые расшифровываются в подрисуночных подписях.

6. Ссылки на литературные источники даются в порядке цитирования (упоминания) – порядковый номер сноски пишется в квадратных скобках. Список использованной литературы прилагается в конце статьи и должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг – фамилия и инициалы авторов, полное название книги, место и год издания, страница;

б) для журнальных статей (коллективных сборников и др.) – фамилия и инициалы автора (авторов) после двух «косяков» – принятое сокращенное название издания, год, том, номер выпуска, страница.

7. К статье прилагаются: рекомендация кафедры, сведения об авторе (фамилия, имя и отчество полностью, место работы, ученая степень, звание, адрес, номер служебного и домашнего телефона). Для аспирантов дополнительно – фамилия и инициалы, ученая степень, звание научного руководителя.

8. К статьям прилагаются резюме, фамилия и инициалы автора (авторов), название статьи на английском языке, реферат на языке статьи (не более половины страницы), указывается УДК (индекс по универсальной десятичной классификации).

9. Корректура статьи должна быть возвращена в редакцию не позднее чем через три дня после получения ее автором. В корректуре допускается только исправление фактических ошибок.

10. Статьи, оформленные с нарушением приведенных правил, редакцией не принимаются.

1727 р. Индекс 74851

CONTENTS

PHYSICS

Kuharchik P.D., Serdyuk V.M., Titovitsky I.A. Holographic image distortions minimization of optically reconstructing tomographic system ... 3
Gulis I.M., Saechnikov K.A. Synchronously pumped $LiIO_3$-based SRS-converter ... 5
Novitsky A.V., Barkovsky L.M., Furs A.N. Features of the geometrical optics tensor series in stratified media ... 9
Strazhew V.I., Tsionenko D.A. On a gauge theory of Dirac – Kaehler field in a curved space-time ... 15
Grinchuk A.V., Ushakov E.A. Approximate calculation of path integrals for a particle with spin ... 22
Leontyev A.V. Modernization of TRIM- algorithm of Monte-Carlo method ... 27
German A.E. Resonant reflection and absorption of light by granular silver films ... 32
Chervyakowsky K.I. A study into the mechanism of impurity introduction into the alternate current arc plasma of small-weight silver reguli ... 37
Ermolaev O.P., Mickulchik T.Y. The isothermal annealing of radiation defects in germanium irradiated with the large fluences of epicadmium neutrons ... 43
Skripka D.A., Lukashevich M.G. The electric field effect in magnetoresistance of gallium arsenide ... 46
Brinkevich D.I., Prosolovich V.S., Yankovski Yu.N. Silicon epitaxial layers doped by germanium and lutecium ... 53
Vyrko S.A. Electrostatic field screening in the crystals with hopping migration of electrons over impurities ... 55

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Bouza M., Livak Ye. The identification of computer programs ... 61
Matsveyev G.V., Shiriaev V.M. Bounds for number of unequalityes ... 67
Gatalskaja T.I., Zverovich E. I. Problem of the linear association for biperiodic functions 71
Starovoitov A.P. About existence of absolutely continuous functions with the given sequence of the best rational approximations ... 75
Lomovtsev F.E. Cauchy problems for hyperbolic factorized even-order differential-operator equations with variable domains ... 78
Alsevich L.A. The stability of solutions of linear systems block-diagonal reflecting matrices ... 83
Kravchenko J.M. Guaranteed optimization of control system with short-term forecast of perturbations ... 86
Akinfin A.V., Kirlitsa V.P., Cherkas Y.A. *D*-optimal continuous designs of experiments for quadratic regression under linear variation of dispersions of observations ... 91
Melnikov O.I., Kosolapov V.N. Linear-time recognition of the P_4-structure of caterpillar.... 94

BRIEF COMMUNICATIONS

Bazylev D.F. Rational points on the elliptic curves of zero rank ... 99
Lavrinovich L.I. About methods of guaranteed optimization of control systems ... 101
Stepanishyna Yu.V. Stability radius of a majority efficient solution of a multicriteria hnear trajectorial problem ... 104
Kashevskii V.V. Generalized Hilbert's transform with a log in a kernel ... 106
Shishkevich A.A. Finitely presented virtually freely aspherical pro-*p*-groups ... 108
Melenetc Yu.V., Orlova E.N. One problem of statistic analysis of binary random sequences ... 109

OUR JUBILEE

Sergeiy Nikolaevich Cherenkevich ... 113
Nikolay losifovich Yurchuk ... 114

Summary ... 116