

# ВЕСТНИК

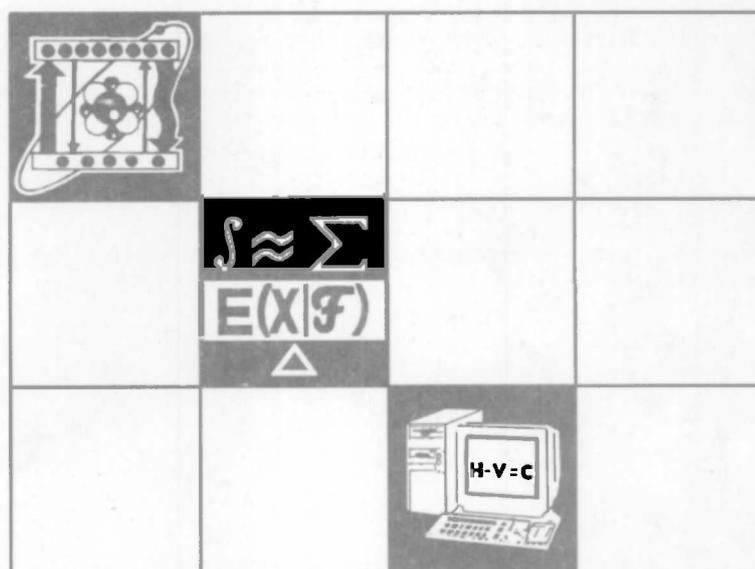
Белорусского государственного  
университета

---

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Информатика

2/2001



## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

<i>Зажогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И., Маслова Г.Т.</i> Количественный экспресс-анализ некоторых биоэлементов крови.....	3
<i>Шаршунов Д.В., Соловьев В.С.</i> Изучение формы импульсов фотопроводимости в алмазе типа Па.....	7
<i>Мулярчик С.Г., Шевкун И.М., Зиневич А.А.</i> Учет трехмерных эффектов при расчете сопротивления пассивной области базы биполярного планарного транзистора.....	11
<i>Демидчик В.И., Корнев Р.В.</i> Антенная модель киральных рассеивателей.....	14
<i>Борздов В.М., Галенчик В.О.</i> Моделирование методом частиц переноса электронов в субмикронном МОП-транзисторе с учетом ударной ионизации.....	16
<i>Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А.</i> Аппроксимация начального участка ВАХ высоколегированного МОП-ПТ.....	19
<i>Белоус А.И., Ефименко С.А., Понарядов В.В., Прибыльский А.В.</i> Сравнительный анализ быстродействия биполярного и МОП-транзисторов.....	22
<i>Пилипенко В.А., Анищук В.М., Пономарь В.Н., Пилипенко И.В.</i> Электрофизические и механические свойства дисилицида титана, полученного с применением быстрой термообработки.....	29
<i>Добрянский В.М., Малишевский В.Ф., Францкевич Н.Б., Яруничев В.П.</i> Физические свойства оксидов и купратов, синтезированных на основе соединений $ZrV_2$ и $Nb_3Sn$ .....	34
<i>Саечников В.А., Чернявская Э.А., Янукович Т.П.</i> Численное моделирование рассеяния Бриллюэна в оптическом волокне при синусоидальной модуляции сигнала.....	36
<i>Бирзгал Е.А.</i> Исключение дифференциальной нелинейности времяизмерительного тракта при обработке данных по наблюдению осциллирующей спина позитрония.....	44

### МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Мартыненко М.Д., Босяков С.М.</i> Поверхности слабых и сильных разрывов в вязкоупругих жидких средах.....	48
<i>Прохорова Р.А., Шевцов И.Л.</i> Об ограниченных решениях слабо нелинейных систем с $L^1$ -дихотомичным линейным приближением.....	52
<i>Чичурин А.В.</i> О специальной линейной системе Шази.....	56
<i>Репников В.И.</i> О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами.....	60
<i>Емельяненко В.И., Батурина Л.Н.</i> Подходы к решению задачи оценки научно-технической деятельности.....	65
<i>Зиневич Д.В.</i> Об устойчивости прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии ошибок в задании параметров.....	69
<i>Соболева Т.В.</i> Вычисление первых двух моментов расширенной периодограммы дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса.....	72
<i>Труш Н.Н., Цеховая Т.В.</i> Асимптотическое поведение семинвариантов высших порядков оценки вариограммы.....	74
<i>Марковская Н.В.</i> Предельное распределение оценок смешанных моментов высших порядков.....	77
<i>Жук Е.Е., Храмова Е.В.</i> Кластер-анализ многомерных случайных наблюдений по гистограммной оценке плотности распределения вероятностей.....	80

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Размыслович Г.П.</i> К проблеме аналитического представления решений сингулярных дифференциальных систем.....	87
<i>Пашкевич А.В.</i> К условиям эффективности векторной оценки многокритериальной дискретной задачи.....	89

### ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<b>Александр Михайлович Бельский</b> .....	92
Рефераты.....	93

---

# **ВЕСТНИК**

**Белорусского государственного  
университета**

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года  
один раз в четыре месяца

---

**СЕРИЯ 1**

**Физика  
Математика  
Информатика**

**2/2001**

**Май**

МИНСК  
БГУ

**Главный редактор В.Г. РУДЬ**

Редакционная коллегия серии:

В.М. АНИЩИК (*ответственный редактор*),  
Л.М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*), В.Г. БАРЫ-  
ШЕВСКИЙ, **А.М. ВЕЛЬСКИЙ** (*ответственный секретарь*),  
В.В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), Е.С. ВОРОПАЙ,  
М.А. ЖУРАВКОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, А.И. КАЛИНИН, Ф.Ф. КОМАРОВ,  
А.И. КОМЯК, В.И. КОРЗЮК, П.Д. КУХАРЧИК, П.А. МАНДРИК,  
В.И. МИРОНЕНКО, С.Г. МУЛЯРЧИК, И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ,  
Ю.С. ХАРИН, С.М. ЧЕРЕНКЕВИЧ, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

Регистрационный № 805

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2001. № 2

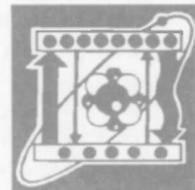
Адрес редакции: 220050, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 209-54-00.  
E-mail [vestnik\\_bsu@research.bsu.unibel.by](mailto:vestnik_bsu@research.bsu.unibel.by)

Редактор *И.А. Лешкевич*  
Корректор *Л.А. Меркуль*  
Технический редактор *Ю.И. Денисов*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Р.Е. Овсянниковым* и *Ю.И. Денисовым*

Подписано в печать 25.05.01. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.  
Усл.печ. л. 8,75. Усл. кр.-отт. 8,92. Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 460 экз. Заказ 306.  
Цена 1013 р.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в Издательском центре БГУ.  
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.  
ЛП № 284 от 21.05.98.



УДК 541.423

*А.П. ЗАЖОГИН, К.И. ЧЕРВЯКОВСКИЙ, Ж.И. БУЛОЙЧИК, Г.Т. МАСЛОВА*

## **КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ БИОЭЛЕМЕНТОВ КРОВИ**

An express-technique for the quantitative determination of vitally important macro- and microelements in human and animal blood has been developed using the atomic emission method of multichannel spectrometry.

Важную роль в жизнедеятельности организма играют различные микро- и макроэлементы. Количество их в организме во многом определяется окружающей средой и ее состоянием. Отклонения их количества как в одну, так и в другую сторону от нормы может вызывать различные тяжелые заболевания человека. Система мероприятий по охране здоровья населения включает в себя разработку, создание и постоянное развитие научно обоснованных методов контроля содержания различных элементов как в окружающей среде, так и в организме человека. Имеющие в настоящее время большую распространенность в биохимических и клинических лабораториях фотометрические методы определения металлов требуют сложной химической подготовки проб, больших затрат времени и дают возможность проводить анализ лишь ограниченного числа элементов.

Эмиссионный спектральный анализ позволяет с достаточной чувствительностью и точностью определять элементный состав различных биологических объектов (кровь, моча, волосы, ногти и т. д.) при простоте и доступности метода. Экспериментальная установка для спектроаналитических исследований состоит из трех основных частей: источника возбуждения спектра, спектрального прибора и регистрирующей части, состоящей из оптического многоканального анализатора (ОМА) и ПЭВМ. Время регистрации спектров и выдачи информации при наличии соответствующих методик составляет 1–3 мин.

Разработка методик для количественного экспресс-анализа состава такого рода объектов является актуальной научной проблемой. Разработка методики включает подбор аналитических спектральных линий для элементов, создание эталонов с известной концентрацией исследуемых элементов, определение оптимальных условий регистрации спектров (т. е. силы тока дуги, времени регистрации, ширины щели) и построение градуировочного графика.

Данная работа посвящена созданию методики определения в крови магния, кальция, алюминия, меди, железа, цинка и бериллия.

Эталоны (стандартные растворы определяемых элементов) готовились на основе водного раствора, содержащего 0,23 %  $K^+$  и 0,24 %  $Na^+$ . В нем растворяли соли определяемых элементов:  $Mg(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ ,  $ZnCl_2$ ,  $CaCl_2$ ,  $Be(NO_3)_2 \cdot 3H_2O$ ,  $FeCl_3 \cdot 6H_2O$ ,  $AlCl_3$ ,  $CuCl_2$ . Для отработки методики количественного анализа и построения градуировочных графиков было приготовлено пять стандартных водных растворов, содержащих определяемые элементы в следующих концентрациях: Fe, Mg и Ca ( $10^{-1}$ – $10^{-3}$  %), Zn ( $10^{-2}$ – $10^{-4}$  %), Al, Cu и Be ( $10^{-3}$ – $10^{-5}$  %). Выбор данных концентраций на фоне калия и натрия обусловлен сохранением соответствующих физиологичности соотношений между содержанием металлов в стандартном растворе и в крови человека, а также наличием в ней приведенных концентраций калия и натрия [1].

Регистрация спектров проводилась в диапазоне 306,487–340,645 нм, выбор данного диапазона обусловлен наличием в нем неперекрываемых, достаточно интенсивных линий для всех определяемых элементов. Аналитические линии, их интенсивность и порядок появления в спектре по [2] представлены в табл. 1.

Таблица 1

Длина волны и характеристики аналитических линий элементов

Элемент	Длина волны, нм	Интенсивность, отн. ед.	Чувствительность
Al	308,216	800	$U_4$
Mg	309,690	150	
Be	313,042	200	$V_1$
Ca	315,887	100	$V_4$
Fe	321,404	400	
Cu	327,396	3000	$U_2$
Zn	334,502	800	$U_2$

Примечание. В таблице приняты следующие обозначения:  $U$  – линия принадлежит нейтральному атому;  $V$  – линия принадлежит однократно ионизированному иону. Цифры, стоящие возле символов  $U$  и  $V$ , показывают последовательность изменения интенсивности линий данного элемента. Так, линия нейтрального атома  $U_1$  является более интенсивной, чем  $U_2$ , а последняя – более интенсивной, чем  $U_3$ .

Изменения интенсивности выбранных линий данных элементов от времени и силы тока. Интенсивность линий регистрировалась через каждые 0,60–0,65 с в течение минуты при различных силах переменного тока дуги. Число регистраций – три. Ширина щели и зазора между угольными электродами оставались постоянными – 50 мкм и 2 мм соответственно. Для исследований был взят стандартный раствор с наименьшей концентрацией определяемых элементов, а следовательно, и минимальной интенсивностью спектральных линий.

Для уменьшения влияния случайных ошибок, вызванных возможными изменениями условий возбуждения и регистрации спектра, характерными для атомно-эмиссионного метода, и получения достаточной статистической точности результатов использовали следующую методику их обработки. Полученные в течение опыта 90 значений интенсивности были разделены

В работе использовались угольные электроды диаметром 6 мм, причем нижний электрод имел вогнутую сферическую поверхность в верхней части, а нижний электрод – конусообразную поверхность в нижней части. Пробы готовили следующим образом: на верхнюю часть поверхности нижних электродов с помощью микропипетки наносили 25 мкл раствора (стандартного или образца крови) и выдерживали под электрической лампой мощностью 60 Вт до полного высыхания жидкости.

Оптимальные условия проведения экспресс-анализа подбирались следующим образом.

Для определения оптимальной силы тока и времени регистрации спектров были изучены зависимости из-

на 9 одинаковых суммарных промежутков времени, т. е. по 10 съемов в серии. Просуммировав интенсивности в каждой серии, полученные величины разделили на суммарную интенсивность за все время регистрации. Это отношение обозначили как параметр  $r$ , отражающий вклад в суммарную интенсивность интенсивности за первые 6,0–6,5 с горения дуги, вторые, третьи и т. д.

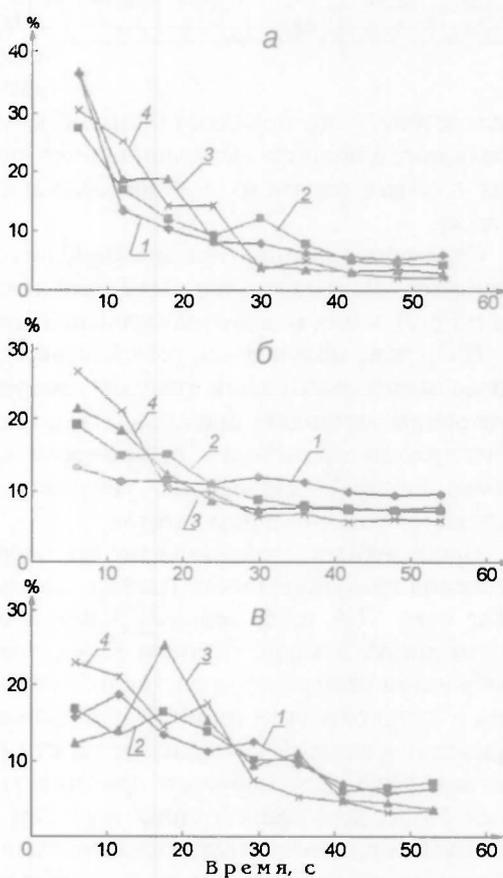
Зависимость параметра  $r$  от времени отражает относительное изменение интенсивности линии и тем самым поступление элемента в плазму дуги переменного тока. Достоверность этого поступления зависит от чувствительности линии, по которой определяется элемент. Для слабоинтенсивных линий необходимо учитывать наличие шума и его вклад в абсолютную суммарную интенсивность. Анализ зависимостей параметра  $r$  дает возможность предполагать степень выгорания элементов во время регистрации и на основании этого выбирать время регистрации.

На рисунке в качестве примера представлены зависимости изменения параметра  $r$  с течением времени от силы тока для аналитических линий алюминия, железа и бериллия.

Из рисунка видно: для линии алюминия (308,216 нм) параметр  $r$  наибольший в первой точке кривой и с течением времени падает. При силах тока 10 и 12 А основной вклад в суммарную интенсивность происходит в течение первых 25 с (более 80 %). При силах тока 6 и 8 А такой вклад в суммарную интенсивность достигается через 35–40 с.

Зависимость изменения параметра  $r$  линии железа (321,404 нм) от времени и силы тока имеет ярко выраженный характер. Чем выше сила тока, тем более быстрое падение значений  $r$  наблюдается за первые 25 с и тем выше суммарный вклад интенсивности за этот промежуток времени. При силе тока 10 и 12 А он составляет более 61 и 65 % соответственно. В дальнейшем  $r$  остается практически постоянной.

Что касается значений  $r$  для ионной линии бериллия (313,042 нм), то они с течением времени имеют тенденцию к уменьшению с небольшими флуктуациями при силе тока 6, 8 и 12 А. При силе тока 10 А первые 20 с значение  $r$  растет, достигая максимума в третьей точке, а затем уменьшается. При этом сохраняется закономерность: чем выше сила тока, тем выше суммарный вклад интенсивности за первые 25 с. Максимум достигается при силе тока 12 А – более 75 %, при силе тока 10 А – более 67 %.



Изменение параметров Al (а), Fe (б) и Be (в) при силах тока: 1 – 6 А, 2 – 8, 3 – 10, 4 – 12 А в зависимости от времени

Значения суммарного вклада интенсивности за первые 25 с для всех элементов при различных силах тока представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Значения суммарного вклада интенсивности за первые 25 с в интенсивность аналитических линий определяемых элементов при различных силах тока**

Элемент	Суммарный вклад в интенсивность, %			
	6 А	8 А	10 А	12 А
Al	68,6	65,6	82,8	84,1
Mg	52,7	65,3	67,3	72,3
Be	59,1	60,5	67,2	76,4
Ca	63,4	64,2	70,8	72,4
Fe	47,4	60,5	61,5	68,6
Cu	83,4	73,7	84,2	81,9
Zn	43,5	40,4	58,8	56,7

Следует отметить, что разница в несколько процентов между полученными значениями при разных силах тока для одного элемента не имеет принципиального значения. Таким образом, можно считать, что наибольший вклад в суммарную интенсивность за первые 25 с происходит при силе тока 12 А и превышает 70 % для всех элементов, кроме Fe и Zn. Результат для Fe близок к 70 % и его не стоит обсуждать. Малое значение для Zn легко объясняется большой скоростью его испарения и слабой интенсивностью линии 334,502 нм.

Вследствие этого довольно большой вклад в общую суммарную интенсивность после полного выгорания цинка вносит шум. Как указано выше, в таких случаях параметр  $r$  недостоверно отражает поступление элемента в плазму.

Суммарное абсолютное значение интенсивности за 25 с, как показывает эксперимент, максимально при силе тока 12 А для всех элементов, кроме Be и Fe. Для них максимум интенсивности достигается при 10 А.

На основе полученных результатов можно сделать заключение, что наиболее оптимальные силы тока для экспресс-анализа – 12 и 10 А, а время регистрации составляет около 25 с. Так как при данных силах тока и времени регистрации происходит практически полное выгорание элементов (для цинка полное), дальнейшее увеличение времени регистрации приведет только к искажению результатов.

Проведенные эксперименты по определению ширины щели для построения градуировочного графика показали невозможность ее подбора при силе тока 12 А из-за сильной разницы в чувствительности аналитических линий цинка и меди. Ширина 15 мкм не позволяла регистрировать цинк в выбранном стандартном растворе, в то же время происходило перенасыщение в интенсивности линии меди. Дальнейшее уменьшение ширины щели приводит к плохой воспроизводимости результатов для всех элементов. В связи с этим целесообразно при регистрации спектров использовать силу тока 10 А. Для данной силы тока нам удалось подобрать ширину щели (25 мкм), при которой удовлетворительно регистрировались интенсивности элементов во всех стандартных растворах. На основании этого время регистрации было выбрано равным 25 с.

Разработанная методика апробирована при определении содержания названных элементов в 22 образцах крови людей и 60 образцах крови кроликов. Выбор объектов исследования обусловлен тем, что элементные составы крови человека и кролика схожи и определяемые концентрации элементов крови попадают в интервал концентраций для стандартных растворов. В экспериментах использовался метод анализа сухих остатков разбавленных растворов крови на торце электрода без предварительного их озоления. Было установлено, что органические вещества, входящие в состав исследуемых образцов, при высокой температуре электродов (1500–2000 °С) во

время горения дуги полностью озоляются и практически не влияют на определение элементов. Указанный факт является одним из важных преимуществ примененного метода перед методом предварительного озоления. В последнем случае, как показывают исследования [4, 5], при проведении процесса озоления на стадии обугливания вместе с выделяющимися дымом и газами возможны потери микроэлементов в виде металлоорганических комплексов. На величину потерь большее влияние оказывает не столько сама температура, сколько скорость ее увеличения, с которой непосредственно связано озоление проб, в связи с чем полный процесс озоления занимает большой промежуток времени (5–10 ч). Кроме этого, необходимо иметь и большой объем крови. В нашем случае полный расход образца крови составляет не более 100 мкл. Средняя ошибка определения лежит в пределах 5–15 %.

Приведенные результаты могут служить основой для разработки методики по определению микро- и макроэлементов в других биообъектах, а также по расширению спектра определяемых элементов.

1. Трахтенберг И.М., Колесников В.С., Луковенко В.П. Тяжелые металлы во внешней среде. Мн., 1994.
2. Коломийцева М.Г., Габович Р.Д. Микроэлементы в медицине. М., 1970.
3. Зайдель А.Н., Прокофьев В.К., Райский С.М., Шрейдер Е.Я. Таблицы спектральных линий. М., 1962.
4. Орлова В.А., Шерстнякова С.А., Карпов Ю.А. // Завод. лаб. 1993. Т. 59. № 9. С. 1.
5. Юделевич И.Г., Буянова Л.М., Шелпакова И.Р. Химико-спектральный анализ веществ высокой чистоты. Новосибирск, 1980.

Поступила в редакцию 28.12.2000.

*Зажогин Анатолий Павлович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии БГУ.

*Червяковский Климентий Иванович* – аспирант кафедры лазерной физики и спектроскопии БГУ. Научный руководитель А.П. Зажогин.

*Булойчик Жанна Игнатьевна* – кандидат химических наук, старший научный сотрудник кафедры физической оптики БГУ.

*Маслова Галина Трофимовна* – кандидат биологических наук, доцент кафедры физиологии человека и животных.

УДК 537.311

*Д.В. ШАРШУНОВ, В.С. СОЛОВЬЕВ*

### **ИЗУЧЕНИЕ ФОРМЫ ИМПУЛЬСОВ ФОТОПРОВОДИМОСТИ В АЛМАЗЕ ТИПА IIa**

This paper is devoted to own and impurity photoconductivity pulse form modeling in type IIa diamond. Cases of different relations between exciting pulse length and own photocarriers lifetime were considered. Main factors defining pulse form in each case were found.

С целью изучения влияния процессов, индуцированных в алмазе оптическим излучением, проведено моделирование формы импульсов фотопроводимости.

Моделирование проводилось с помощью изучения динамики концентрации неравновесных носителей заряда во времени, генерированных светом при комнатной температуре. В качестве источника возбуждения рассматривался лазер, для которого зависимость амплитуды импульса излучения от времени имеет вид [1]:  $I(t) = I_{\max} \sin^2(\pi t / \tau)$ , где  $I_{\max}$  – максимальная амплитуда,  $t$  – время,  $\tau$  – длительность импульса.

В качестве основной примеси принимались *A*-центры (пара атомов азота в соседних узлах кристаллической решетки), образующие глубокие донорные уровни в запрещенной зоне алмаза [2]. Освещенность образца по поверхности полагалась равномерной, толщина – малой (чтобы диффузией носителей можно было пренебречь). Рассматривался режим линейных люкс-амперных характеристик для образцов алмаза в форме параллелепипеда размерами 3×1×1 мм<sup>3</sup>.

Введем обозначения величин:  $E_i = E_c - 4,05$  эВ – энергия примесного уровня (*A*-центра), отсчитанная от дна зоны проводимости,  $S_p$  и  $S_n$  – сечения захвата *A*-центром ловушки дырки и электрона соответственно,  $N_i$  – концентрация *A*-центров,  $n$  – концентрация электронов в зоне проводимости,  $p$  – концентрация дырок в валентной зоне,  $v_p$  и  $v_n$  – тепловые скорости дырок и электронов.

Рассмотрим процессы, в результате которых происходят изменения концентраций носителей заряда в зонах разрешенных энергий и на примесном уровне. Во-первых, это межзонная генерация носителей заряда светом, скорость которой равна  $g(t) = q\alpha(h\nu)I(t)/h\nu$ ,  $q$  – квантовая эффективность,  $\alpha(h\nu)$  – коэффициент поглощения фотонов с энергией  $h\nu$ . Во-вторых, захват электрона на *A*-центр с последующим захватом дырки. Скорости указанных процессов равны  $T_{ni} = n(N_i - n_i)v_n S_n$ , где  $n_i$  – концентрация захваченных электронов (т. е. нейтральных *A*-центров),  $T_{pi} = pn_i v_p S_p$ . В-третьих, межзонная рекомбинация, скорость которой  $R_n = R_p = \gamma np$ , где  $\gamma$  – коэффициент межзонной рекомбинации носителей заряда.

Таким образом, в случае собственной фотопроводимости имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = g(t) - T_{ni} - R_n, \\ \frac{dp}{dt} = g(t) - T_{pi} - R_p, \\ \frac{dn_i}{dt} = T_{ni} - T_{pi}, \\ p + (N_i - n_i) = n. \end{cases} \quad (1)$$

В случае примесной фотопроводимости с учетом того, что концентрация нейтральных *A*-центров  $n_i$  и концентрация электронов в *c*-зоне  $n$  удовлетворяют соотношению  $N_i = n_i + n$ . имеем:

$$\frac{dn}{dt} = g_i(t) - n[N_i - n_i]v_n S_n = g_i(t) - n^2 v_n S_n, \quad (2)$$

где  $g_i(t)$  – скорость генерации электронов проводимости при подсветке примесь-зона.

Для расчета значений коэффициентов поглощения  $\alpha(h\nu)$  использовались кривая поглощения (собственная фотопроводимость) [3] и соотношение между величиной коэффициента поглощения *A*-центров и их концентрацией [2].

Результаты моделирования приводятся ниже (рис. 1, 2).

### 1. Собственная фотопроводимость

Для изучения формы импульсов собственной фотопроводимости было проведено моделирование поглощения излучения эксимерного KrCl-лазера,

энергия кванта излучения которого ( $h\nu = 5,58$  эВ) примерно равна ширине запрещенной зоны алмаза (5,5 эВ). Поскольку длительность импульса возбуждения ( $\tau \approx 8$  нс) в данном случае превышает время жизни носителей заряда, измеренное на образцах типа Па [4] (580 пс) и не связанное с примесью, то форма импульса тока во внешней цепи должна повторять импульс излучения [5], т. е. быть пропорциональной  $\sin^2(\pi t/\tau)$ , где  $\tau$  – длительность импульса возбуждения. Так как энергетический уровень А-центров находится далеко от дна зоны проводимости, то в начальный момент времени его можно считать полностью заполненным электронами. Вследствие этого захват электрона А-центром возможен только после предварительного захвата дырки. Отсюда следует, что сигнал фотопроводимости при подсветке зона–зона определяется дырочной компонентой тока.

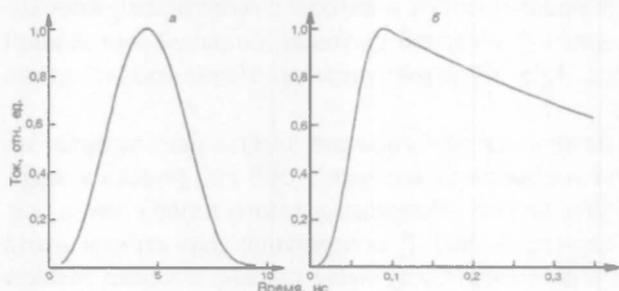


Рис. 1. Форма импульса собственной проводимости: а –  $\tau$  больше времени жизни носителей; б –  $\tau$  меньше времени жизни носителей

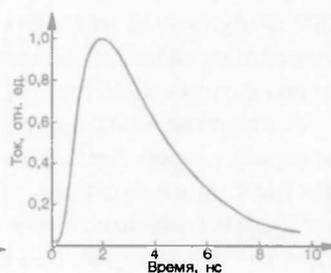


Рис. 2. Форма импульса примесной проводимости для длительности импульса возбуждения 8 нс

Концентрация А-центров в моделируемых образцах принималась равной  $N_t = 10^{17}$  см<sup>-3</sup>; сечения захвата электрона  $S_n$  и дырки  $S_p$  на А-центр брались из [6].

Полученные в результате моделирования по формулам (1) формы импульсов тока собственной фотопроводимости представлены на рис. 1, а ( $\tau$  больше времени жизни носителей) и рис. 1, б ( $\tau$  меньше времени жизни носителей).

Из рис. 1 видно, что сделанный выше вывод о повторении формы фототока формой импульса возбуждения  $g(t) \sim \sin^2(\pi t/\tau)$  полностью подтверждается. Моделирование зависимостей концентраций неравновесных носителей от времени подтвердило предположение, что форма сигнала проводимости (фототока) определяется дырочной компонентой. Этот факт можно объяснить тем, что указанная компонента является более долгоживущей вследствие меньшей величины сечения захвата дырки по сравнению с сечением захвата электрона. Смещение максимума импульса от середины импульса возбуждения обусловлено влиянием процессов рекомбинации неравновесных носителей, о чем свидетельствует величина смещения максимума, равная времени жизни неравновесных носителей заряда  $\tau_{n(p)} = \left( \frac{S_{n(p)} N_t \nu_{n(p)}}{S_{n(p)} + S_{p(p)}} \right)^{-1}$ , введенному в качестве параметра модели.

Для изучения формы импульсов собственной проводимости в случае, когда длительность импульса возбуждения короче времени жизни носителей, было проведено моделирование для тех же образцов, той же мощности лазера и энергии фотона, однако длительность импульса  $\tau$  бралась равной 100 пс. В данном случае следует ожидать появления экспоненциального

“хвоста” после окончания импульса возбуждения, обусловленного рекомбинацией неравновесных носителей. Из рис. 1, б видно, что проявляются две характерные зависимости фототока от времени: 1) участок, соответствующий экспоненциальному спаду, обусловленный рекомбинацией, не связанной с примесным уровнем; 2) смещение максимума кривой от середины импульса генерации, аналогичное рассмотренному ранее (ср. рис. 1, а и 1, б). Определенное по участку экспоненциального спада время жизни неравновесных носителей (дырок) совпадает со временем жизни неравновесных носителей, заданным выше в качестве характеристики процессов указанной рекомбинации, что подтверждает вывод о малости вклада захвата носителей для концентрации примеси  $N_i = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

## 2. Примесная фотопроводимость

Для изучения примесной проводимости в алмазе с А-центрами необходим импульсный источник света с энергией фотонов, большей или равной энергии ионизации А-центра 4,05 эВ (этой энергии соответствует длина волны фотона  $\approx 306 \text{ нм}$ ) [3].

В качестве модельного источника возбуждения алмаза был выбран эксимерный лазер ХеС1, длина волны света которого (308 нм) близка к энергии ионизации А-центра. Длительность импульса данного лазера равна, как и в рассмотренном выше случае, 8 нс [7]; содержание пар атомов азота ( $N_i = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ) то же, что и в рассмотренном выше случае; сечение захвата электрона на А-центр  $S_n = 10^{-13} \text{ см}^2$ . Результат моделирования по формуле (2) при примесной подсветке см. на рис. 2.

Для примесной проводимости время жизни неравновесных носителей нельзя рассчитать по формуле  $\tau_{\text{eff}} = (S_{n(p)} / N_i V_{n(p)})^{-1}$ , где  $S_{n(p)}$ ,  $V_{n(p)}$  – сечение захвата и тепловая скорость носителей заряда,  $N_i$  – концентрация А-центров, поскольку концентрация А-центров в нейтральном зарядовом состоянии  $n_i(t) = N_i - n(t)$  зависит от времени. Поэтому для примесной фотопроводимости невозможно выделить аналогично тому, как это сделано для собственной проводимости, случаи с разным соотношением между временем жизни носителей заряда и длительностью импульса.

Из рис. 2 следует, что участок, соответствующий спаду импульса проводимости, искажен по сравнению с импульсом возбуждения. Участок, соответствующий спаду, не является экспоненциальным или пропорциональным  $\sin^2(\pi t/\tau)$ , что обусловлено, во-первых, одновременным протеканием равнозначимых процессов генерации и захвата носителей, во-вторых, переменной величиной коэффициента поглощения.

Для данных условий наблюдается, как и в случае собственной поглощения, “запаздывание” максимума импульса фототока от центра импульса возбуждения. Далее наблюдается участок спада, аналогичный рассмотренному в пункте 1.

Таким образом, для собственной фотопроводимости в случае, если длительность импульса возбуждения больше времени жизни неравновесных носителей (см. рис. 1, а), форма сигнала повторяет импульс возбуждения, при этом происходит смещение (запаздывание) пика сигнала на величину, примерно равную времени жизни неравновесных носителей. В противоположном случае (время жизни неравновесных носителей больше длительности импульса возбуждения, см. рис. 1, б) помимо смещения наблюдается участок экспоненциального спада, постоянная которого равна времени жизни неравновесных носителей, не связанному с влиянием примесей. Для

примесной фотопроводимости (см. рис. 2) характерно искажение формы участка спада.

1. Аут И., Генцов Д., Герман К. Фотоэлектрические явления. М., 1980.
2. Data in Semiconductor Science and Technology: Semiconductors: group IV elements and III-V compounds / Ed. O. Madelung. Berlin; Heidelberg, 1991.
3. Природные алмазы России / Под ред. В.Б. Кваскова. М., 1997.
4. Pan L.S., Kania D.R., Pianetta P., Landen O.L. // Appl. Phys. Lett. 1990. Vol. 57. № 6. P. 623.
5. Lee C.H., Mathur V.K. // IEEE J. Quant. Electron. 1981. Vol. QE-17. № 10. P. 2098.
6. Шаршунов Д. В. Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 1. С. 143.
7. Квасков В. Б. // Алмаз в электронике. М., 1990. С. 92.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

*Шаршунов Дмитрий Вячеславович* – ассистент кафедры вычислительной техники и информатики БГСХА.

*Соловьев Валерий Сергеевич* – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией НИИ ПФП БГУ.

УДК 621.382.82.001

*С.Г. МУЛЯРЧИК, И.М. ШЕВКУН, А.А. ЗИНЕВИЧ*

### УЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПАССИВНОЙ ОБЛАСТИ БАЗЫ БИПОЛЯРНОГО ПЛАНАРНОГО ТРАНЗИСТОРА

The base resistance which results from the base current bending at the base contact and at the edge of the emitter perimeter is computed (at low currents and low frequencies) using a three-dimensional numerical solution. It is compared with a two-dimensional model.

Сопротивление пассивной области базы биполярного планарного транзистора -- параметр, в значительной степени определяющий электрические характеристики прибора. Этим объясняется интерес к проблеме его расчета [1–4]. Среди известных методов моделирования [1–4] универсальностью обладает только численный метод, однако и его область применения ограничена, если привлекается двумерное приближение [3, 5]. В [4] сделана попытка перейти к решению трехмерной задачи на основе послойного объединения двумерных цепей, моделирующих пассивную область базы транзистора. Эту задачу можно решить численно, распространив подход, предложенный в [5], на трехмерную модель. В соответствии с [4] будем считать, что сопротивление пассивной области базы ( $R_{бп}$ ) определяется током, текущим от базового контакта биполярного транзистора к границе между пассивной и активной областями базы (эта граница в рассматриваемом приближении является вторым омическим контактом полупроводникового резистора). Положим потенциал одного из контактов резистора ( $K_E$ ) равным нулю, а потенциал другого ( $K_B$ ) –  $V_B$ . Определив ток, текущий через любой контакт, найдем искомое сопротивление. Для этого рассчитаем распределение электростатического потенциала в области пассивной базы, решив следующую краевую задачу:

$$\nabla [\sigma(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z)] = 0, \quad (x, y, z) \in B;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in K_E;$$

$$\varphi(x, y, z) = V_B, \quad (x, y, z) \in K_B;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_B,$$

где  $\sigma(x, y, z)$  – удельная проводимость пассивной области базы;  $\varphi(x, y, z)$  – искомое распределение потенциала,  $\eta$  – вектор единичной нормали к границе  $\Gamma_B$  пассивной области базы,  $B$  – область пассивной базы.

Сопротивление пассивной области базы вычисляется в этом случае следующим образом:

$$R_{\text{он}} = -V_B / \int_S \sigma(x, y, z) (\nabla \varphi(x, y, z), \nu) ds,$$

где  $S$  – площадь базового контакта,  $\nu$  – внешняя нормаль к нему.

Такой подход позволяет использовать высокоэффективные численные методы решения краевой задачи.

Перепишем дифференциальное уравнение краевой задачи в интегральной форме

$$\oint_S \sigma(x, y, z) (\nabla \varphi(x, y, z), \lambda) ds = 0, \quad (x, y, z) \in B,$$

где  $S$  – поверхность произвольной односвязной области, по которой ведется интегрирование,  $\lambda$  – нормаль к ней.

Дискретизацию задачи выполним аналогично [5], построив в области базы основную и вспомогательную трехмерные разностные сетки. Плоскости обеих сеток перпендикулярны осям координат. Вспомогательная сетка сдвинута на полшага относительно основной сетки по всем координатным осям. Три пары смежных разностных плоскостей основной сетки образуют ее ячейку, три пары смежных плоскостей вспомогательной сетки образуют ячейку алгебраизации. Использование интегральной формы дифференциального уравнения позволяет, во-первых, построить консервативную разностную схему и, во-вторых, сформировать разностный аналог уравнения Пуассона и граничных условий в рамках единого алгоритма обработки восьми сегментов ячейки алгебраизации [6]. В свою очередь консервативная разностная схема порождает систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой действительная, симметрическая, положительно определенная [6]. Перечисленные свойства позволяют использовать эффективный итерационный метод сопряженных градиентов с переобуславливанием на основе неполной факторизации (ПФСГ-метод) [6].

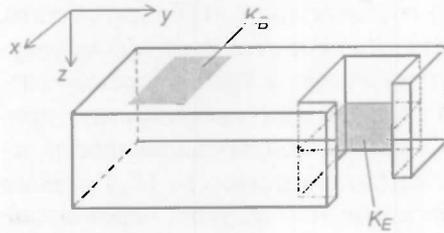


Рис. 1. Конструкция пассивной части базы планарного транзистора

Для проверки влияния трехмерности на результаты расчета сопротивления пассивной области базы разработана программа, в основе которой лежит численное решение краевой задачи. Конструкция базы транзистора приведена на рис. 1. База представляет собой прямоугольный параллелепипед. Эмиттер имеет аналогичную форму меньших размеров. Под эмиттером, расположенным внутри базы, находится ее активная часть. По периметру активной части базы расположен один из контактов к ее пассивной части ( $K_E$ ). Второй контакт ( $K_B$ ) имеет форму прямоугольника и расположен сверху. На рисунке сделан вырез в области эмиттера для того, чтобы показать один из контактов к пассивной части базы (это фактически

граница между активной и пассивной частями). Глубина базы 0,5 мкм для первого варианта и 5 мкм для второго, глубина эмиттера 0,3 мкм и 3 мкм соответственно. Остальные размеры (в микронах) приведены на рис. 2.

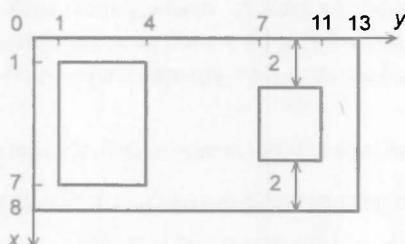


Рис. 2. Топология базы планарного транзистора

Расчеты проводились на кусочно-постоянной сетке, задаваемой пользователем. Для сохранения регулярной семидиагональной структуры матрицы разностной системы линейных алгебраических уравнений используется метод фиктивных узлов [6]. С целью оценки влияния трехмерности растекания тока в базе на результаты расчетов выполнялся двумерный расчет пассивного сопротивления базы с помощью программы, упомянутой в [5]. Во всех расчетах предполагалось, что удельная проводимость зависит только от  $z$ . Удельная поверхностная проводимость в этом случае равна

$$\sigma_S = \left[ \int_0^{z_j} \sigma(z) dz \right]^{-1},$$

где  $z_j$  – глубина залегания перехода база – коллектор.

Таблица 2

Сопротивление пассивной области базы при разных перепадах проводимости

$N$	$\Delta_\sigma$	$R_1^{(3)}, \text{ Ом}$	$R_1^{(2)}, \text{ Ом}$	$\Delta, \%$	$R_2^{(3)}, \text{ Ом}$	$R_2^{(2)}, \text{ Ом}$	$\Delta, \%$
1	10	579,56	529,14	9,5	108,29	52,98	104,4
2	100	832,55	726,24	14,6	194,75	72,62	168,2
3	250	933,10	794,01	17,5	245,61	79,39	209,4
4	1000	1091,90	887,53	23,0	352,19	88,75	296,8

Примечание. Здесь  $\Delta_\sigma$  – перепад проводимости (проводимость у поверхности 0,004 См),  $R$  – сопротивление пассивной части базы, верхний индекс указывает размерность модели, нижний – номер варианта транзистора,  $\Delta$  – поправка, которую обеспечивает трехмерный расчет в сравнении с двумерным.

Обратимся к результатам вычислительных экспериментов. В табл. 1 приведены результаты расчета сопротивления пассивной базы первого варианта транзистора на разных сетках, позволяющие оценить влияние густоты сетки на результаты расчетов. Проводимость  $\sigma(z)$  уменьшается с глубиной по гауссовому закону. Ее величина в максимуме 0,004 См, в точке  $z=z_j$  в десять раз меньше.

Таблица 1  
Влияние густоты сетки на точность расчетов первого прибора

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$N$	$M$	$R, \text{ Ом}$	$\Delta, \%$
6	6	3	108	99	438,73	24,30
12	14	6	1008	440	518,97	10,45
14	19	8	2128	496	535,23	7,65
15	23	10	3450	563	542,75	6,35
20	27	11	5940	691	551,07	4,92
21	29	12	7308	692	552,98	4,59
22	32	13	9152	741	557,71	3,77
23	36	15	12 420	841	561,77	3,07
29	41	16	19 024	875	567,71	2,04
30	45	18	24 300	1004	570,79	1,51
38	58	23	50 692	1263	579,56	–

Примечание. Здесь  $n_x, n_y, n_z$  – число узлов сетки по осям,  $N$  – полное число узлов сетки,  $M$  – число итераций НФСГ-метода (относительная погрешность решения  $10^{-4}$ ),  $R$  – искомая величина,  $\Delta$  – относительная ошибка расчета  $R_{\text{бп}}$  (в качестве точного значения использована величина  $R_{\text{бп}}$  на самой густой сетке).

Все дальнейшие расчеты проведены на сетке последнего варианта ( $n_x = 38$ ,  $n_y = 58$ ,  $n_z = 23$ ). В табл. 2 приведены результаты расчетов при разной глубине базы и перепадах проводимости.

Приведенные результаты показывают необходимость проведения трехмерных расчетов, хотя в случае малой глубины базы (0,5 мкм для рассматриваемого варианта) двумерные расчеты обеспечивают приемлемую точность (максимальная погрешность 23 %).

1. Кремниевые планарные транзисторы / В.Г. Колесников, В.И. Никишин, В.Ф. Сыдоров и др.; Под ред. Я.А. Федотова. М., 1973.

2. Ферри Д., Эйкерс Л., Гринич Э. Электроника ультрабольших интегральных схем. М., 1991.

3. Hebert F., Roulston D.J. // Sol. St. Electronics. 1988. Vol. 31. № 2. P. 283.

4. Idem. // Sol. St. Electronics. 1988. Vol. 31. № 8. P. 1235.

5. Мулярчик С.Г., Шевкун И.М., Зиневич А.А. // Радиофизика и электроника: Сб. науч. тр. Мн., 2000. Вып. 4. С. 181.

6. Мулярчик С.Г. Численное моделирование микроэлектронных структур. Мн., 1989.

Поступила в редакцию 22.01.2001.

*Мулярчик Степан Григорьевич* – доктор технических наук, профессор, декан факультета радиофизики и электроники БГУ.

*Шевкун Игорь Михайлович* – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики БГУ.

*Зиневич Александр Александрович* – студент 5-го курса факультета радиофизики и электроники БГУ.

УДК 621.396.67

В.И. ДЕМИДЧИК, Р.В. КОРНЕВ

## АНТЕННАЯ МОДЕЛЬ КИРАЛЬНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

The scattering properties of a chiral particle in the form of a helix loop with attached rectilinear conductors were analyzed using the method of integral equations.

В настоящее время все большее внимание уделяется проблеме изучения искусственных изотропных и анизотропных сред, обладающих двойным круговым лучепреломлением в микроволновом диапазоне (так называемые киральные среды), что связано прежде всего со специфическими свойствами рассеяния электромагнитных волн на объектах с киральными включениями. Киральные среды перспективны для создания различных устройств СВЧ, радиопоглощающих материалов и покрытий.

Для синтеза киральных сред чаще всего используют маленькие металлические или керамические спирали, хаотично распределенные в диэлектрике. Определение материальных параметров таких сред базируется на известных микроволновых характеристиках отдельных киральных элементов.

Цель работы – моделирование характеристик рассеяния одиночного элемента в виде витка спирали с подключенными прямолинейными проводниками и определение зависимости этих характеристик от геометрических параметров элемента.

Рассмотрим находящийся в однородном и изотропном пространстве рассеиватель, который облучается плоской электромагнитной волной (рис. 1). Волна распространяется вдоль луча, определяемого углами  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  сферической системы координат, а вектор электрического поля волны задается углом  $\gamma_0$  относительно плоскости, проходящей через ось  $Z$  и вектор направления распространения:

$$E^{ct} = E_0^{ct} \cdot l^{i \cdot k \cdot r} e_E,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = x \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \theta,$$

$$e_E = (-\cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \gamma - \sin \varphi \cdot \sin \gamma; \sin \gamma \cdot \cos \varphi - \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \gamma; \sin \theta \cdot \cos \gamma).$$

Внешнее поле  $E^{ct}$  возбуждает на поверхности частицы токи, которые создают рассеянное поле  $E^{sc}$ .

Расчет рассеянного поля проводился методом моментов на основе интегрального уравнения Поклингтона по методике, описанной в [1]. На основании информации об амплитудно-фазовом распределении тока определялось поле излучения киральной частицы и ее эффективный поперечник рассеяния (ЭПР) [2]:

$$\sigma(\theta_0, \varphi_0) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{|E^{рас}(\theta_0, \varphi_0)|^2}{|E_0^{ct}|^2}.$$

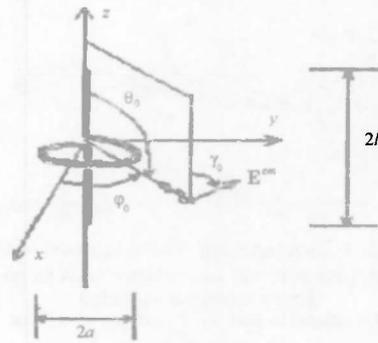


Рис. 1. Геометрия кирального рассеивателя

Значение ЭПР в зависимости от геометрических параметров киральной частицы позволяет судить об ее отражательных свойствах.

Исследовалась частотная зависимость ЭПР для основной и деполаризованной компонент при различных геометрических параметрах частицы и различных углах падения возбуждающей электромагнитной волны.

На рис. 2 показана зависимость ЭПР от длины вибраторных плеч частицы при  $\theta_0=90^\circ$ ;  $\varphi_0=0^\circ$ ;  $\gamma_0=90^\circ$ . Радиус спирали  $a=5$  мм, толщина провода  $2r_0=0,2$  мм. Вектор  $E^{ct}$  перпендикулярен прямолинейным отрезкам проводника частицы, а виток спирали функционирует как приемник, обеспечивающий возбуждение частицы. В итоге вибраторные плечи частицы служат источником, создающим электрическое поле, параллельное оси Z. Рассеивающая реакция частицы определяется полной энергией, обусловленной токами в участках витка спирали и прямолинейного провода.

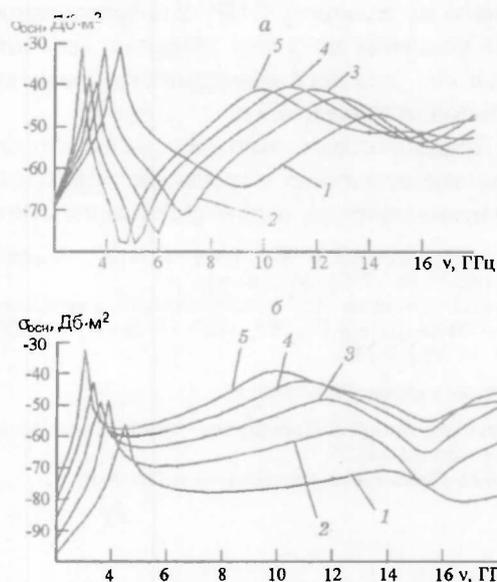


Рис. 2. Зависимость ЭПР основной и деполаризованной компонент поля от длины вибраторных плеч частицы:

1 -  $l=0$ ; 2 -  $l=2$  мм; 3 -  $l=4$  мм; 4 -  $l=6$  мм; 5 -  $l=8$  мм

Из рис. 2, а видно, что при увеличении длины вибраторных плеч ЭПР основной компоненты поля изменяется незначительно. Это связано с тем, что вибраторные плечи перпендикулярны основной компоненте поля и не вносят вклад в его формирование. В то же время значение деполаризованной компоненты поля (рис. 2, б) заметно возрастает при увеличении длины вибраторов.

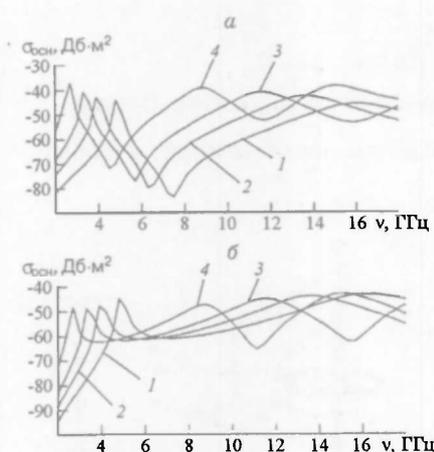


Рис. 3. Зависимость ЭПР основной и деполаризованной компонент поля от радиуса спирали частицы:  
1 –  $a=3$  мм; 2 –  $a=4$  мм; 3 –  $a=5$  мм; 4 –  $a=7$  мм

На рис. 3 показана аналогичная зависимость для различных радиусов спирали при  $l=5$  мм,  $r=0,1$  мм и тех же величинах  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$ . Как видно из рисунка, увеличение радиуса спирали приводит к возрастанию ЭПР основной компоненты поля (рис. 3, а) и почти не влияет на ЭПР деполаризованной компоненты (рис. 3, б).

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2, 3, показывают также, что зависимость  $\sigma$  от частоты носит колебательный характер, что обусловлено резонансными явлениями, когда общая длина проводника рассеивателя приблизительно кратна целому числу полуволн. Эмпирические данные и данные других авторов [3] подтверждают подобный характер частотной зависимости ЭПР для киральных элементов в виде маловитковых спиралей.

В целом результаты численного эксперимента показывают, что изменение длины вибраторов или радиуса витка спирали позволяет существенно влиять на величину ЭПР деполаризованной компоненты и при определенных условиях получать значения, сравнимые с ЭПР волны основной поляризации. Это дает возможность управлять поляризацией рассеянного киральной частицей поля.

Предполагаемая методика позволяет анализировать рассеивающие свойства как отдельных киральных элементов, таких как маловитковые металлические спирали, омега-частицы и их модификации, так и их систем.

Предполагаемая методика позволяет анализировать рассеивающие свойства как отдельных киральных элементов, таких как маловитковые металлические спирали, омега-частицы и их модификации, так и их систем.

1. Демидчик В.И., Рунов А.В., Калашников Н.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 3. С. 82.

2. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М., 1987.

3. Marriotte F., Tretjakov S. A. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1996. Vol. 38. № 2. P. 22.

Поступила в редакцию 11.01.2001.

*Демидчик Валерий Иосифович* – кандидат технических наук, доцент кафедры радиофизики и электроники БГУ.

*Корнев Руслан Владимирович* – магистрант.

УДК 621.382.323-416

В.М. БОРЗДОВ, В.О. ГАЛЕНЧИК

### МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ В СУБМИКРОННОМ МОП-ТРАНЗИСТОРЕ С УЧЕТОМ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ

The numerical model of the electron transport in submicron MOSFET was developed. The influence of impact ionization on mean energy and drift velocity in the device channel was studied using this model.

Дальнейший прогресс в развитии современной микроэлектроники невозможен без широкого использования численных методов моделирования интегральных схем (ИС) на этапе их разработки и проектирования. В то же

время непрерывно продолжающаяся миниатюризация ИС и переход к субмикронным размерам их элементов порождает новые проблемы, связанные с построением физико-математических моделей переноса заряда в таких элементах. Это в полной мере относится и к моделям субмикронных  $n$ -канальных МОП-транзисторов, существенной особенностью расчета электрофизических свойств которых является необходимость учета ряда важных физических эффектов, связанных с наличием сильных электрических полей в канале [1–4].

Одним из наиболее эффективных методов моделирования МОП-транзисторов с субмикронными размерами является метод частиц, представляющий собой процедуру кинетического моделирования электронного переноса в приборной структуре методом Монте-Карло с одновременным самосогласованным расчетом электрических полей, в которых этот перенос происходит [5]. Несомненным достоинством метода частиц является то, что он позволяет адекватно учесть влияние процесса ударной ионизации на кинетические параметры, характеризующие перенос носителей заряда в приборе [6].

В настоящее время при моделировании ударной ионизации методом Монте-Карло в кремниевых МОП-структурах очень часто используют модель Келдыша [7], согласно которой вероятность данного процесса выражается простой формулой:

$$W(E) = AW_{ph}(E) \left( \frac{E - E_{th}}{E} \right)^2 u(E - E_{th}),$$

где  $E$  – кинетическая энергия электрона,  $A$  – константа,  $W_{ph}(E)$  – суммарная интенсивность фононного рассеяния,  $E$  – энергия электрона,  $E_{th}$  – пороговая энергия ударной ионизации,  $u$  – единичная ступенчатая функция. При этом различают две разновидности модели Келдыша: модель мягкого порога, для которой  $E_{th} = 1,2$  эВ, а  $A = 0,38$ , и модель жесткого порога, для которой  $E_{th} = 1,8$  эВ, а  $A = 100$ . Необходимо отметить, что, хотя физические предпосылки и условия, для которых получены каждая из этих моделей, хорошо известны, вопрос об использовании той или другой из них для расчета различных кинетических параметров, характеризующих перенос электронов в канале субмикронного МОП-транзистора в условиях приложенных к его электродам реальных рабочих напряжений, остается все еще до конца не выясненным. В этой связи следует указать на работу [6], в которой было проведено сравнение этих двух моделей при расчете ВАХ короткоканального транзистора с длиной канала 0,2 мкм.

В данной статье в рамках метода частиц исследовано влияние мягкого и жесткого приближений в модели Келдыша [7] непосредственно на величину средней дрейфовой скорости и энергии электронов и зависимость средних значений этих параметров от координаты вдоль канала. Разработанный с этой целью алгоритм включал три блока: 1 – моделирования переноса носителей заряда, 2 – расчета распределения концентрации электронов в моделируемой области прибора и 3 – решения уравнения Пуассона. Работу этого алгоритма кратко можно описать следующим образом. Для определения координат и волновых векторов электронов в любой текущий момент времени осуществлялось моделирование методом Монте-Карло их переноса в координатном и импульсном пространствах за малый промежуток времени  $\Delta t$ . При этом наряду с ударной ионизацией учитывались механизмы рассеяния на акустических и оптических фононах, а также на ионизирован-

ной примеси [8, 9]. Затем для решения уравнения Пуассона каждому носителю заряда ставилась в соответствие так называемая "частица" – заряженный стержень длиной, равной ширине канала, и с равномерно распределенным в нем зарядом величиной  $q=Q/N$ , где  $Q$  – полный заряд электронов, находящихся в моделируемой области прибора, а  $N$  – число крупных частиц [5]. Выбор формы частицы в виде стержня с равномерной линейной плотностью заряда был обусловлен тем, что ширина канала намного больше его длины, и потому краевыми эффектами в рассматриваемом МОП-транзисторе можно пренебречь.

Для оценки заряда  $Q$  в области неперекрытого канала использовалась известная формула для короткоканальных приборов [1]. В области отсечки заряд  $Q$  оценивался с учетом условия непрерывности потока носителей заряда для любого участка канала. Определение плотности заряда в приборе проводилось по схеме, получившей название "облако в ячейке" (СIC) [5]. Применение этой схемы позволяет избежать нежелательных эффектов, связанных с устойчивостью решения уравнения Пуассона, являющегося в нашем случае нелинейным. Данное решение было получено с помощью методов Ньютона и последовательной верхней релаксации с чебышевским ускорением. В настоящей работе рассматривался прибор с длиной канала 0,25 мкм, время моделирования выбиралось на основании условия установления стационарного состояния и составляло 3+5 пс. Во избежание потери устойчивости алгоритма интервал времени  $\Delta t$  был взят равным 5 фс.

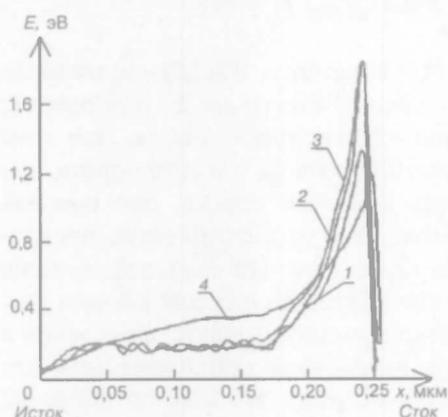


Рис. 1. Зависимость средней кинетической энергии электронов  $E$  от координаты вдоль канала  $x$ :  
1 – мягкий порог; 2 – жесткий порог; 3 – без ударной ионизации; 4 – результаты [10]

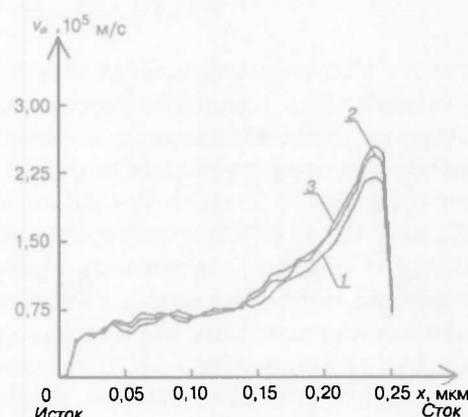


Рис. 2. Зависимость средней дрейфовой скорости электронов  $v_{dr}$  от координаты вдоль канала  $x$ :  
1 – мягкий порог; 2 – жесткий порог; 3 – без ударной ионизации

На рис. 1 приведены результаты расчета зависимости средней кинетической энергии электронов от координаты вдоль канала при приложенных относительно истока напряжениях на стоке и затворе, равных 2,5 В для различных случаев учета ударной ионизации (кривая 1 – мягкий порог, 2 – жесткий порог, 3 – без учета ударной ионизации). Для сравнения на этом же рисунке приведены результаты аналогичных расчетов, взятые из работы [10] (кривая 4).

Рассчитанные зависимости дрейфовой скорости от координаты вдоль канала приведены на рис. 2, где кривая 1 соответствует модели мягкого порога, 2 – жесткого порога и 3 – без учета ударной ионизации.

Как видно из рис. 1 и 2, ударная ионизация оказывает заметное влияние на кинетические параметры электронов лишь в непосредственной близости от стока, где имеет место значительный разогрев носителей заряда. При этом влияние ударной ионизации по модели мягкого порога является более ощутимым по сравнению с влиянием по модели жесткого порога. Полученный результат становится понятным, если обратиться к кривой 3 на рис. 1.

Из поведения данной кривой непосредственно следует, что при рассмотренных значениях длины канала и напряжений на электродах прибора средняя кинетическая энергия электронов без включения ударной ионизации даже у стока оказалась ниже энергии жесткого порога, равного, как уже указывалось, 1,8 эВ. Вследствие этого ударная ионизация, протекающая по данному механизму, является достаточно редким событием, не оказывающим существенного влияния на среднюю энергию и дрейфовую скорость носителей заряда в канале.

Таким образом, проведенное моделирование показало, что использование мягкого или жесткого приближений в модели Келдыша заметным образом влияет на результаты расчета параметров, характеризующих перенос электронов в конкретном субмикронном МОП-транзисторе с заданной длиной канала и определенными напряжениями на его электродах. Очевидно, это обстоятельство необходимо учитывать при разработке кинетических моделей для расчета электрических свойств таких приборов.

1. Маллер Р., Кейминс Т. Элементы интегральных схем. М., 1989.
2. Venturi F., Sangiorgi E., Brunetti R. et al. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1991. Vol. ED-10. № 10. P. 1276.
3. Fischetti M., Laux S.E., Crabbe E. // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 78. № 2. P. 1058.
4. Борздов В.М., Жевняк О.Г., Комаров Ф.Ф. // ФТП. 1995. Т. 29. Вып. 2. С. 193.
5. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М., 1987.
6. Баннов Н.А., Казьмин О.И. // Микроэлектроника. 1989. Т. 18. Вып. 2. С. 112.
7. Келдыш Л.В. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. № 6. С. 1692.
8. Price P.J. Monte Carlo calculation of electron transport in solids // Semiconductors and semimetals / Ed. by R.K. Willandson, A. Beer. New York, 1979. P. 249.
9. Конуэлл Э. Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях. М., 1970.
10. Fischetti M., Laux S. // Phys. Rev. 1988. Vol. B 38. № 14. P. 9721.

Поступила в редакцию 08.01.2001.

**Борздов Владимир Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники БГУ.

**Галенчик Вадим Освальдович** – младший научный сотрудник кафедры физической электроники БГУ.

УДК 621.382.323-416

А.Д. АНДРЕЕВ, А.М. БЕЛЬСКИЙ, А.А. ВАЛИЕВ

### АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА ВАХ ВЫСОКОЛЕГИРОВАННОГО МОП-ПТ

The approximation of the high-dopant MOS FET current-voltage characteristic before saturation in a drain voltage range  $0-2\phi_f$  is offered. This method allows to calculate drain current, drain current saturation voltage in the case when constructive-technological parameters of the device and gate voltage are given. It is shown that account of the drain voltage dependence of effective mobility is not necessary in this approximation.

При проектировании МОП-ПТ ток стока можно определить, используя выражение, полученное с учетом переменного заряда ионизированных примесных атомов в обедненной области подложки и наличия инверсионного слоя по всей длине проводящего канала [1, 2]:

$$I_d = \mu C_0 \frac{W}{L} \left\{ \left( V_g - 2\varphi_f - V_{FB} - \frac{V_d}{2} \right) V_d - \frac{2}{3} \left( \frac{2\epsilon_s e N_a}{C_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( 2\varphi_f + V_b + V_d \right)^{\frac{3}{2}} - \left( 2\varphi_f + V_b \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – подвижность электронов в инверсионном слое,  $C_0$  – удельная емкость окисла,  $W, L$  – ширина и длина канала,  $\varphi_f$  – потенциал в нейтральном объеме подложки,  $V_{FB}$  – напряжение плоских зон,  $\epsilon_s, N_a$  – диэлектрическая постоянная и концентрация примеси в подложке соответственно. При заданном напряжении на затворе  $V_g$  и заземленном истоке увеличение потенциалов стока  $V_d$  и подложки  $v_i$  ведет к частичному подавлению инверсной проводимости вблизи стокового перехода и соответственно увеличению поверхностной плотности заряда ионизированных примесных атомов. С уменьшением длины канала и увеличением уровня легирования подложки транзистора возрастает крутизна начального участка вольт-амперной характеристики  $(dI_d/dV_d)_{V_d \rightarrow 0}$ , и напряжение насыщения тока  $V_d = V_{ds} < V_g - V_i$  смещается в область более низких стоковых напряжений. При этом канал остается неперекрытым, что дает возможность использовать (1) не только на линейном участке ВАХ, но и при переходе к насыщению [3]. В этом случае на достаточно большом интервале изменения напряжения  $V_d$  может выполняться условие  $V_d < 2\varphi_f + V_b$ , что позволяет произвести разложение в ряд выражения в квадратных скобках (1). Ограничиваясь слагаемыми ряда

$$\frac{3V_d}{2(2\varphi_f + V_b)} + \frac{V_d^2}{(2\varphi_f + V_b)^{\frac{3}{2}}}, \text{ получим:}$$

$$I_d = \mu C_0 \frac{W}{L} \left[ (V_g - V_i) V_d - b_0 V_d^2 \right], \quad (2)$$

где  $V_i = 2\varphi_f + V_{FB} + \left[ 2\epsilon_s e N_a (2\varphi_f + V_b) \right]^{\frac{1}{2}} / C_0$ ,

$$b_0 = \frac{1}{2} + \frac{a_0 f}{3(2\varphi_f + V_b)^{\frac{3}{2}}}, \quad a_0 = (2\epsilon_s e N_a)^{\frac{1}{2}} / C_0.$$

Эффекты короткого канала учитывались с помощью коэффициента [1, 4]:  $f = 1 - \frac{x_j}{L} \left( \sqrt{1 + \frac{2x_{dm}}{x_j}} - 1 \right)$ , где  $x_j$  – глубина перехода стока. Подвижность электронов  $\mu$  предполагается постоянной по длине канала и не зависящей от  $V_d$ . Для того чтобы проверить это предположение для рассматриваемого случая, определим эффективную подвижность для заданного напряжения затвора из выражения для тока стока в начале линейного участка ВАХ [2]:

$$\mu_{эфф} = \frac{(dI_d/dV_d)_{V_d \rightarrow 0}}{\frac{W}{L} C_0 (V_g - V_t)}$$

Отношение  $\mu_{эфф}$  к подвижности  $\mu$  на всем начальном участке ВАХ, выраженной из (2), имеет вид:

$$\frac{\mu_{эфф}}{\mu} = \frac{I_{d0}}{I_d} \left( 1 - b_0 \frac{V_d}{V_g - V_t} \right),$$

где  $I_{d0} = (dI_d/dV_d)_{V_d \rightarrow 0} \cdot V_d$ .

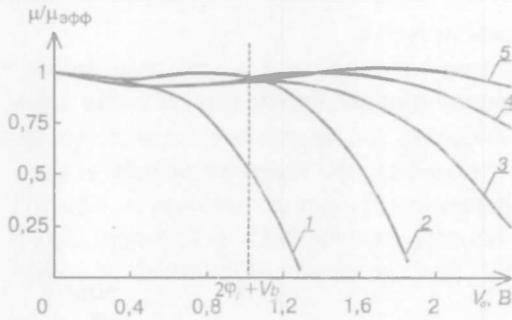


Рис. 1. Зависимость отношения подвижности при  $V_d \rightarrow 0$  к подвижности при  $V_d < 2\phi_f + V_b$  от  $V_d$ .  $N_a = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ,  $L = 3 \text{ мкм}$ ,  $t_{ox} = 0,35 \text{ мкм}$ ,  $V_t = 90 \text{ В}$ ,  $V_g = 110, 120, 130, 140, 150 \text{ В}$  для кривых 1–5 соответственно

величина  $\mu_{эфф}/\mu$  убывает с ростом  $V_d$ , однако физического смысла это явление не имеет, так как в данном диапазоне изменения стокового напряжения выражение (2) не применимо. В соответствии с (2) ток стока увеличивается с ростом стокового напряжения до максимального значения  $I_{d,max}$ , после чего кривая  $I_d = f(V_d)$  выходит на нисходящий участок, который является физически нереализуемым [1]. Дифференцируя (2) по напряжению  $V_d$ , получим соотношение, которое характеризует наблюдаемое на опыте уменьшение напряжения насыщения тока стока с ростом  $N_a$ .

$$V_{ds} = \frac{V_g - V_t}{2b_0}. \quad (3)$$

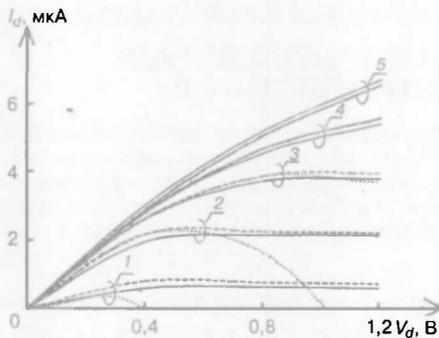


Рис. 2. Расчетные и экспериментальные ВАХ МОП-ПТ.  $N_a = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ,  $L = 3 \text{ мкм}$ ,  $t_{ox} = 0,35 \text{ мкм}$ ,  $V_t = 90 \text{ В}$ ,  $V_g = 110, 120, 130, 140, 150 \text{ В}$  для кривых 1–5 соответственно

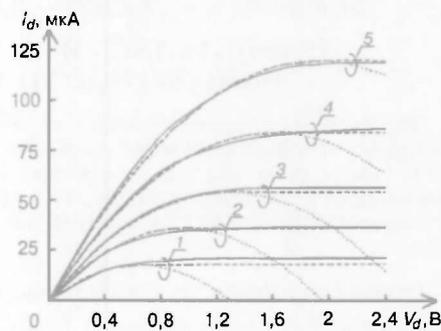


Рис. 3. Расчетные и экспериментальные ВАХ МОП-ПТ [5].  $N_a = 5 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ,  $L = 0,2 \text{ мкм}$ ,  $t_{ox} = 2,5 \text{ нм}$ ,  $x_f = 0,12 \text{ мкм}$ ,  $V_t = 0,4 \text{ В}$ ,  $V_g = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 \text{ В}$  для наборов кривых 1–5 соответственно

На рис. 2 и 3 приведены экспериментальные (сплошные линии) и рассчитанные по (2) (пунктирные линии) выходные ВАХ полевых транзисторов. При стоковых напряжениях больших  $V_{ds}$  для заданного затворного напряжения  $V_g$  ток стока полагался постоянным и равным  $I_{dmax}$  (прерывистые линии) [3]. Тестовый транзистор (рис. 2) изготовлен на кремниевой подложке  $p$ -типа, ориентированной в направлении (111), глубина  $n^+$ -областей истока и стока  $\approx 0,5$  мкм, электрод затвора из алюминия. Как видно из рис. 2, 3, напряжение насыщения тока стока совмещается с напряжением, рассчитанным по формуле (3) при заданных конструктивно-технологических параметрах прибора и напряжении затвора  $V_g$ . Рассчитанные по (3) и полученные из эксперимента зависимости  $V_{ds}$  от затворного напряжения близки к линейным и хорошо согласуются между собой.

Таким образом, полученные экспериментальные и расчетные данные показывают, что подвижность электронов в проводящем канале слабо зависит от напряжения на стоке при  $v_d < v_{ds} < 2\phi_f$  для заданного затворного напряжения и ее изменение можно не учитывать при идентификации начального участка ВАХ. Предлагаемая формула (2) дает возможность оценить величину тока и напряжение на начальном участке ВАХ и при переходе в режим насыщения у транзисторов, для которых выполнено условие  $V_d < 2\phi_f + V_b$ .

1. Маллер Р., Кейминс Г. Элементы интегральных схем. М., 1989.
2. Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. // Вестн. Белорус. ун-та Сер. 1. 1996. № 1. С. 26.
3. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 1. С. 26.
4. Vanna M. // Int. J. Electron. 1994. Vol. 77. № 1. P. 49.
5. Toriumi Akira, Iwase Masao, Yoshimi Makoto // IEEE Trans. electron dev. 1988. Vol. 35. № 7. P. 999.

Поступила в редакцию 28.12.2000.

*Андреев Альберт Данилович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники БГУ.

*Бельский Александр Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической оптики БГУ.

*Валиев Александр Анатольевич* – программист РОУДП «Торговый Дом Горизонт».

УДК 621.382.33-185.4: 621.382.323-085.4

*А.И. БЕЛОУС, С.А. ЕФИМЕНКО, В.В. ПОНАРЯДОВ, А.В. ПРИБЫЛЬСКИЙ*

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ БИПОЛЯРНОГО И МОП-ТРАНЗИСТОРОВ

The article is dedicated to investigation of key characteristics of bipolar and MOS-transistors, determining their high speed as parts of Bi-CMOS LSIC. Fly-over time spaces through active structure in "source-drain" and "emitter-collector" are compared, slope, current density and geometrical dimensions of  $n$ - $p$ - $n$ - and  $n$ -MOS-transistors are defined. Demands to boundary frequency of bipolar transistor in Bi-CMOS LSIC are specified. The results of experimental investigation are provided.

Целью данного исследования явился сопоставительный анализ основных характеристик биполярного и МОП-транзисторов, определяющих их быстродействие в составе БиКМОП БИС. Совершенствование технологии КМОП, выразившееся, в частности, в уменьшении длины канала, привело к тому, что эта технология в применении к СБИС успешно вытесняет биполярные технологии. В этой связи представляет практический интерес во-

прос о нахождении тех режимов работы биполярных транзисторов, при которых можно наиболее полно использовать их преимущества при проектировании БиКМОП СБИС.

1. *Оценка времени пролета носителями заряда участков структуры «исток–сток» и «эмиттер–коллектор»*

Минимальное время задержки переключения МОП- и биполярного транзистора определяется временем пролета участков структуры соответственно «исток–сток» и «эмиттер–коллектор». В биполярном *n-p-n*-транзисторе при высоких уровнях инжекции неосновных носителей время пролета ими базы есть [1]:

$$\tau_B = \frac{W_B^2}{4D_n}, \quad (1)$$

где  $W_B$  – ширина активной квазиоднородной базы,  $D_n = 34,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$  – коэффициент диффузии электронов в базе *n-p-n*-транзистора при комнатной температуре.

В канале *n*-МОП-транзистора, т. е. в промежутке активной структуры между истоком и стоком, электроны движутся за счет дрейфа. В этом случае время пролета участка «исток–сток» электронами вычисляется по формуле [2]:

$$\tau_n = \frac{L_{eff}^2}{\mu_n V_D}, \quad (2)$$

где  $L_{eff}$  – эффективная длина канала,  $\mu_n \approx 600 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  – подвижность электронов в поверхностной области кремния при суммарной концентрации примесей в кармане  $\sim 3 \cdot 10^{19}$  [1, 2],  $V_D = 5 \text{ В}$  – типичное напряжение на стоке.

Приравняв  $\tau_B$  и  $\tau_n$  из выражений (1) и (2), получаем:

$$W_B = \frac{L_{eff}}{4,655}. \quad (3)$$

Из формул (1–3) следует, например, что *n*-МОП-транзистор с  $L_{eff} = 1,5 \text{ мкм}$  обеспечивает такое же быстродействие, что и биполярный транзистор с шириной базы  $W_B = 0,32 \text{ мкм}$ . Следует отметить, что этот вывод получен на основании упрощенного подхода, не учитывающего величин паразитных емкостей и сопротивлений элементов.

2. *Зависимость граничной частоты биполярного транзистора от длины канала МОП-транзистора в БиКМОП БИС*

Известно, что основным параметром, характеризующим быстродействие биполярного транзистора, является его граничная частота  $f_T$ . Быстродействие МОП-транзистора определяется главным образом длиной канала  $L_{eff}$ . В работе [1] показано, что для того, чтобы БиКМОП-технология обеспечивала более высокое быстродействие по сравнению с КМОП, необходимо, чтобы биполярный транзистор имел граничную частоту  $f_T$ , значительно превышающую предельную  $f_{TL}$ , определяемую по формуле [2]:

$$f_{TL} = \frac{3}{32\pi} \cdot \frac{\mu_n (V_D - V_T)}{(I_{cs} + 3I_{cv}) L_{cs}}, \quad (4)$$

где  $V_T$  – порог МОП-транзистора,  $L_{OV}$  – величина перекрытия затвором областей стока и истока.

Известно, что подвижность электронов и дырок в кремнии зависит от напряженности электрического поля и при больших полях имеет тенден-

цию к насыщению. В частности, зависимость подвижности электронов от напряженности поля определяется выражением [1, 2]:

$$\mu_n = \frac{\mu_{OS}}{\left[1 + \left|\frac{E}{E_{cm}}\right|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (5)$$

где  $\mu_{OS}$  – подвижность при малых электрических полях,  $E_{cm}$  – критическое поле,  $\alpha$  – подгоночный параметр.

Расчет предельной частоты биполярного транзистора  $f_{TL}$  по формулам (4), (5) произведем для двух вариантов, определяющих типичные границы технологического разброса параметров для современных БиКМОП и МОП-процессов [1, 2]:

$$1) \alpha=1, \mu_{OS} = 650 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}, E_{cm} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м},$$

$$2) \alpha=2, \mu_{OS} = 710 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}, E_{cm} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Общие данные для обоих вариантов:  $L_{OV}=0,13 L_{eff}$ ,  $V_D=5 \text{ В}$ ,  $V_T=0,8 \text{ В}$ .

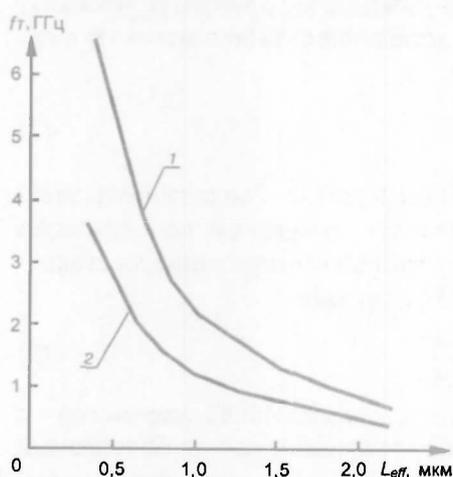


Рис. 1. Зависимость граничной частоты биполярного транзистора  $f_T$  от длины канала МОП-транзистора  $L_{eff}$ : 1 – вариант 1 параметров, 2 – вариант 2 параметров

Расчет граничной частоты биполярного транзистора, быстродействие которого равно быстродействию МОП-транзистора, представлен на рис. 1. Видно, что для того, чтобы биполярный транзистор имел преимущество в быстродействии перед  $n$ -МОП-транзистором, длина канала которого равна 1 мкм, его граничная частота  $f_T$  должна превышать 1,5–3 ГГц. При длине канала МОП-транзистора 0,5 мкм граничная частота биполярного транзистора должна превышать 3–5 ГГц. Для биполярных транзисторов с комбинированной изоляцией, имеющих базу, ограниченную стенками окисла, предельно достижимое значение  $f_T$  составляет 7–10 ГГц [3–5].

### 3. Сравнение крутизны вольт-амперной характеристики биполярного и МОП-транзисторов БиКМОП БИС

Основной тенденцией современных БИС и СБИС является уменьшение геометрических размеров элементов. Это позволяет уменьшить паразитные емкости, увеличить быстродействие, уменьшить размеры кристалла. Выходные каскады интерфейсных БИС должны выдерживать большие токовые нагрузки, поскольку они заряжают большие емкости. Следовательно, представляет интерес сравнение биполярного и МОП-транзисторов с точки зрения геометрических размеров, при которых они будут иметь одинаковую крутизну  $g_m$  вольт-амперной характеристики.

Крутизна биполярного транзистора вычисляется по формуле [1]:

$$g_{mbip} = \frac{I_c}{\Phi_T}, \quad (6)$$

где  $I_c$  – ток коллектора,  $\Phi_T \sim 0,026$  В – температурный потенциал при  $t = +20$  °С.

Кругизна МОП-транзистора [1, 6]:

$$g_{mMOS} = \mu_n C_{OX} \frac{W}{L} V_D, \quad (7)$$

где  $C_{OX}$  – удельная емкость подзатворного диэлектрика (для толщины окисла  $d = 0,03$  мкм,  $C_{OX} = 1,18 \cdot 10^{-3}$  Ф/м<sup>2</sup>),  $\bar{w}$  – ширина МОП-транзистора.

Приравняв  $g_{mbip}$  и  $g_{mMOS}$  из выражений (6) и (7), получим величину площади затвора:

$$S_g = \left( \frac{W}{L} \right) L^2 = \frac{I_c L^2}{\mu_n C_{OX} V_D \Phi_T}. \quad (8)$$

Выходные токи современных интерфейсных БИС при заряде–разряде емкости нагрузки могут достигать 100 мА и более. Результаты расчета для двух граничных вариантов значений параметров приведены в табл. 1.

Площадь эмиттера биполярного транзистора можно рассчитать по формуле:

$$S_E = \frac{I_c + I_B}{i_E}, \quad (9)$$

где  $i_E = 30\text{--}50$  мкА/мкм<sup>2</sup> – плотность тока эмиттера, при котором возникают высокие уровни инжекции неосновных носителей заряда в базе транзистора (значения определены экспериментально по зависимости коэффициента усиления  $n\text{-}p\text{-}n$ -транзистора  $\beta$  от тока эмиттера). При данной плотности тока численные значения площади эмиттера  $S_E$  будут находиться в диапазоне 2000–3333 мкм<sup>2</sup>.

Таблица 1

Расчеты по формуле (8) площади затвора  $n$ -МОП-транзистора, имеющего кругизну, равную кругизне биполярного транзистора

Параметр	Вариант	Эффективная длина канала МОП-транзистора, $L_{eff}$ , мкм		
		2	1	0,5
Подвижность, $\mu_n$ , м <sup>2</sup> /В·с	1	464,3	382,4	242,8
	2	479,8	329,4	152,5
Отношение, $W/L_{eff} (\times 10^4)$	1	2,82	3,43	5,4
	2	2,73	3,98	8,6
Площадь затвора, $S_g$ , мкм <sup>2</sup> ( $\times 10^3$ )	1	56,4	34,26	13,5
	2	54,6	39,8	21,5

Расчеты по формулам (8), (9) показывают, что площадь затвора  $S_g$  полевого транзистора, имеющего кругизну  $g_{mMOS}$ , равную кругизне  $g_{mbip}$  биполярного транзистора, примерно на порядок превышает площадь эмиттера  $S_E$  последнего при длине канала  $L$ , лежащей в диапазоне 0,5–2,0 мкм.

#### 4. Сравнение биполярного и МОП-транзисторов по плотности тока

Скорость переключения транзистора зависит от паразитных емкостей прибора, а величины емкостей – от размеров элементов. Необходимо отметить, что выходные каскады интерфейсных БИС управляют большими емкостными нагрузками. Следовательно, представляет интерес сравнение биполярного и полевого транзисторов по плотности выходного тока и определение длины канала МОП-транзистора, при которой плотность тока полевого транзистора равна плотности тока биполярного транзистора.

Ток коллектора биполярного транзистора определяется выражением [1]:

$$I_C = -I_{CS} \left[ \exp \left( \frac{U_{BC}}{\Phi_T} \right) - 1 \right] + \alpha_f I_{ES} \left[ \exp \left( \frac{U_{BE}}{\Phi_T} \right) - 1 \right], \quad (10)$$

где  $I_{CS}, I_{ES}$  – обратные токи насыщения переходов «база – коллектор», «база–эмиттер» соответственно;  $U_{BC}, U_{BE}$  – напряжение на переходах «база–коллектор», «база–эмиттер» соответственно;  $\alpha_f$  – коэффициент усиления по току в схеме с общей базой ( $\alpha_f = 0,99$ ).

При  $U_{BC} = 0$  и учитывая, что  $\exp\left(\frac{U_{BE}}{\Phi_T}\right) \gg 1$ , из (10) получаем выражение для плотности тока коллектора в виде:

$$i_C = \frac{I_C}{S_E} = \alpha_f i_{ES} \exp\left(\frac{U_{BE}}{\Phi_T}\right). \quad (11)$$

,  $v_{Dsat}$ , [1]:

$$i_D = I_D/S_g = \mu_n C_{OX} \frac{W}{L_{eff} S_g} \left[ (V_g - V_T) V_{DS} - V_{DS}^2/2 \right], \quad (12)$$

где  $V_{DS}$  – напряжение «сток–исток»,  $V_g$  – напряжение на затворе.

Из выражений (11) и (12) с учетом (5) для  $\alpha = 1$  получим:

$$L_{eff}^2 + \frac{V_{DS}}{E_{cm}} L_{eff} - \frac{K_4 \mu_{OS}}{K_3} = 0, \quad (13)$$

где  $K_3 = \alpha_f i_{ES} \exp\left(\frac{U_{BE}}{\Phi_T}\right)$ ,  $K_4 = C_{OX} \left[ (V_g - V_T) V_{DS} - V_{DS}^2/2 \right]$ .

Положительный корень уравнения (13) есть:

$$L_{eff} = -\frac{V_{DS}}{2E} + \frac{1}{2} \left( \frac{V_{DS}^2}{E_{cm}^2} + \frac{4K_4 \mu_{OS}}{K_3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Из выражений (11) и (12) с учетом (5) для  $\alpha = 2$  получим:

$$L_{eff}^4 + \left( \frac{v_{DS}}{E_{cm}} L_{eff} \right)^2 - \left( \frac{K_4 \mu_{OS}}{K_3} \right) = 0. \quad (15)$$

Положительный корень уравнения (15) есть:

$$L_{eff} = \left[ -\frac{V_{DS}^2}{2E_{cm}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{V_{DS}^4}{E_{cm}^4} + \frac{4K_4^2 \mu_{OS}^2}{K_3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Расчет по формулам (14), (16) приведен в табл. 2 при двух вариантах параметров и при  $C_{OX} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/м}^2$ ,  $V_{DS} = 2,5 \text{ В}$ ,  $V_T = 0,8 \text{ В}$ ,  $V_g = 5 \text{ В}$ ,  $\alpha_f = 0,99$ ,  $i_{ES} = 5,9 \cdot 10^{-17} \text{ А/м}^2$ . Из таблицы видно, что плотности токов биполярного и полевого транзисторов сравниваются для эффективной длины канала последнего в диапазоне значений  $L_{eff} = 0,3\text{--}4,3 \text{ мкм}$  при напряжениях  $U_{BE} = 0,79\text{--}0,70 \text{ В}$ . Это значит, что площадь затвора МОП-транзистора, рассчитанного на номинальный ток, будет равна площади эмиттера биполярного транзистора. Для  $U_{BE} = 0,76 \text{ В}$  биполярный и полевой транзисторы будут сравнимы по размерам при  $L_{eff} = 0,88\text{--}1,04 \text{ мкм}$ .

## 5. Экспериментальное исследование биполярного и МОП-транзисторов

Таблица 2  
Расчеты эффективной длины канала  $n$ -МОП-транзистора, при которой его плотность тока равна плотности тока биполярного транзистора

Напряжение $U_{гс}$ , В	Длина канала МОП-транзистора, $L_{эф}$ , мкм	
	Формула (14), вариант 1 параметров	Формула (16), вариант 2 параметров
0,7	4,04	9,37
0,74	1,68	1,644
0,76	1,04	0,877
0,79	0,472	0,294

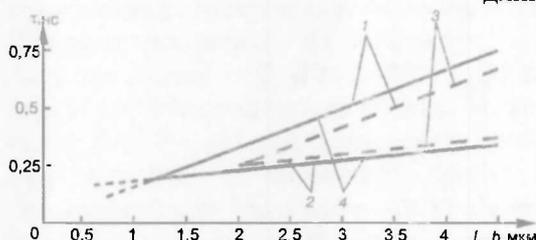


Рис. 2. Зависимость времени задержки переключения  $n$ -МОП- и  $n$ - $p$ - $n$ -транзисторов от длины канала  $L$  и ширины эмиттера  $b$  соответственно:  
1 -  $n$ -МОП-транзистор; 2 -  $n$ - $p$ - $n$ -транзистор; 3 - топологические размеры элементов; 4 - размеры элементов с учетом технологических уходов

лярного  $n$ - $p$ - $n$ - и полевого  $n$ -МОП-транзисторов становятся равными при эффективной длине канала последнего  $\sim 1,18$  мкм.

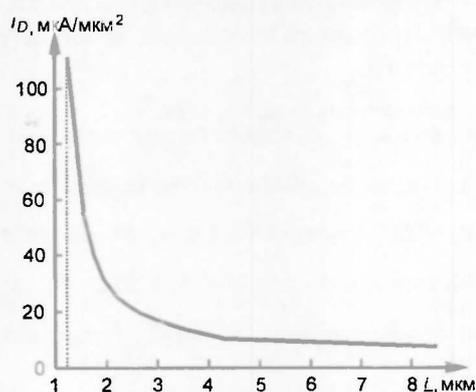


Рис. 3. Зависимость плотности тока  $i_D$   $n$ -МОП-транзистора от длины канала  $L$

С целью проверки правильности расчетов была разработана тестовая матрица, в которой были заложены конструкции  $n$ -МОП- и  $n$ - $p$ - $n$ -транзисторов и кольцевых генераторов на их основе. Тестовая матрица изготавливалась по БиКМОП-технологии. Длина канала МОП-транзисторов изменялась в пределах 1,6–16 мкм, что соответствует эффективной длине канала 1,18–15,58 мкм. Топологические ширина и длина эмиттера биполярного транзистора были равны ширине и длине затвора МОП-транзистора.

На рис. 2 приведена зависимость задержки переключения  $\tau$  транзисторов от длины канала МОП-транзистора  $L$  и ширины эмиттера  $b$   $n$ - $p$ - $n$ -транзистора при токе 1 мА на один каскад кольцевого генератора. Величина тока выбрана произвольно. Относительная картина сделанных ниже выводов не изменяется в диапазоне токов 0,4–1,5 мА на каскад. Как видно из рис. 2, задержки переключения бипо-

На рис. 3 приведена зависимость плотности тока  $i_D$   $n$ -МОП-транзистора от длины канала  $L$  при  $V_g=5$  В. Поскольку плотность тока  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора с площадью эмиттера  $2 \times 4$  мкм<sup>2</sup> при токе эмиттера 1 мА равна 125 мкА/мкм<sup>2</sup>, то можно сделать вывод, что размеры активной области  $n$ -МОП- и  $n$ - $p$ - $n$ -транзисторов, рассчитанных на номинальный ток, становятся равными при  $L_{эф} < 1,2$  мкм.

\*\*\*

1. Время пролета «эмиттер – коллектор» биполярного транзистора равно времени пролета «исток–сток» полевого транзистора при ширине базы  $W_B=L_{эф}/4,655$ .

Практически это означает, например, что  $n$ -МОП-транзистор с  $L_{эф}=1,5$  мкм обеспечивает такое же быстродействие (без учета паразитных

емкостей и сопротивлений), что и биполярный транзистор с шириной базы  $W_B=0,32$  мкм.

2. Для того чтобы биполярный транзистор имел преимущество в быстродействии перед МОП-транзистором с длиной канала  $L_{eff}=1$  мкм, его граничная частота  $f_T$  должна превышать 1,5–3 ГГц. При длине канала МОП-транзистора 0,5 мкм граничная частота биполярного транзистора должна превышать 3–5 ГГц. Только в этом случае достигаются преимущества цифровых БиКМОП БИС перед КМОП. Экспериментально определено, что быстродействие биполярного  $n-p-n$ -транзистора становится равным быстродействию  $n$ -МОП-транзистора при эффективной длине канала последнего 1,18 мкм.

3. Площадь затвора полевого транзистора с крутизной, равной крутизне биполярного транзистора, примерно на порядок превышает площадь эмиттера последнего при длине канала от 0,5 до 2,0 мкм.

4. Плотности токов биполярного и полевого транзисторов сравниваются для эффективной длины канала последнего в диапазоне значений  $L_{eff}=0,3-4,3$  мкм при напряжениях  $U_{BE}=0,79-0,70$  В. Это значит, что площадь затвора МОП-транзистора, рассчитанного на номинальный ток, будет равна площади эмиттера биполярного транзистора. Для  $U_{BE}=0,76$  В биполярный и полевой транзисторы будут сравнимы по размерам при  $L_{eff}=0,88-1,04$  мкм. Также экспериментально определено, что размеры активных областей  $n$ -МОП- и  $n-p-n$ -транзисторов, рассчитанных на номинальный ток, сравнимы при значении длины затвора  $n$ -МОП-транзистора  $L_{eff} < 1,2$  мкм.

Таким образом, биполярные  $n-p-n$ -транзисторы имеют явные преимущества по быстродействию перед  $n$ -МОП-транзисторами при  $L_{eff} > 1,2$  мкм. При длине канала  $n$ -МОП-транзистора, лежащей в диапазоне  $L_{eff} 0,4-1,2$  мкм, к граничной частоте и геометрическим размерам биполярных транзисторов должны быть предъявлены жесткие требования. При длине канала  $n$ -МОП-транзистора  $L_{eff} < 0,4$  мкм преимущество в быстродействии биполярного транзистора с комбинированной изоляцией, имеющего базу, ограниченную стенками окисла, теряется.

1. Маллер Р., Кейминс Т. Элементы интегральных схем. М., 1989.
2. Rothermel A., Hosticka B. // IEEE Proceeding. G. Circuits Devices and Systems 1989. Vol. 136. № 2. P. 49.
3. Аваев Н. А., Наумов Ю. Е. Элементы сверхбольших интегральных схем. М., 1986.
4. Kuroda T., Sakata Y., Matsuo K. // IEEE Journal of Solid States Circuits. 1994. Vol. 29. № 5. P. 564.
5. Yamaguchi T., Archer T.M., Johnston R.E., Lee J.S. // IEEE Transactions on electron devices. 1994. Vol. 41. № 6. P. 1019.
6. Тилл У., Лаксон Д. Интегральные схемы: материалы, приборы, изготовление. М., 1985.

Поступила в редакцию 19.02.2001.

**Белоус Анатолий Иванович** – доктор технических наук, заместитель директора УП «Белмикросистемы» НПО «Интеграл».

**Ефименко Сергей Афанасьевич** – начальник сектора УП «Белмикросистемы» НПО «Интеграл».

**Понарядов Владимир Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель проректора БГУ по научной работе.

**Прибыльский Александр Владимирович** – кандидат технических наук, главный инженер УП «Белмикросистемы» НПО «Интеграл».

### ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСИЛИЦИДА ТИТАНА, ПОЛУЧЕННОГО С ПРИМЕНЕНИЕМ БЫСТРОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ

In this article we consider electrophysical and mechanical properties of  $\text{TiSi}_2$ , which is produced by rapid thermal annealing.

Важной задачей как в области физики тонких пленок, физики твердого тела, так и в микроэлектронике является исследование процесса образования дисилицида титана с применением быстрой термообработки (БТО). Актуальность проблемы объясняется широким применением силицидов в технологии изготовления сверхбольших интегральных схем (СБИС) вследствие простоты их формирования и обработки, стабильности механических и электрических свойств материала, обладающего низким сопротивлением. Поскольку структура и фазовый состав дисилицида титана, полученного с применением БТО, были описаны ранее в нашей работе [1], то здесь мы рассмотрим электрофизические и механические свойства данной системы.

Анализ зависимости изменения толщины силицида титана от температуры БТО показал, что с увеличением температуры на начальном этапе происходит практически линейный рост толщины силицида, а затем начинается отклонение от линейной зависимости и переход ее в параболическую. Этот переход обусловлен увеличением диффузионного пути реагирующих компонент через образовавшуюся пленку силицида к непрореагировавшему металлу. Следует отметить, что, как и в случае традиционной термообработки, толщина сформированного дисилицида титана значительно превышает толщину напыленной пленки титана. Это объясняется тем, что при формировании силицида путем реакции между пленкой металла и кремнием количество кремния, потребляемого формирующимся силицидом, значительно выше, чем самого металла.

В нашем случае из 50 нм титана образовалось 96 нм дисилицида титана. Данный факт связан с тем, что при проведении БТО в азотной атмосфере происходит азотирование титана с образованием на его поверхности нитрида титана. Поскольку около 25 % только что осажденного титана используется на образование нитрида титана при температуре 700 °С [2], то толщина образующегося дисилицида титана должна составлять 95 нм. Данный результат полностью согласуется с толщиной дисилицида титана, полученного в нашем случае. При этом пленки дисилицида титана достаточно равномерны по толщине, что подтверждает ранее сказанное о равномерности фронта диффузии при силицидообразовании.

Тонкая пленка, нанесенная на кремниевую пластину, всегда находится в напряженном состоянии, при этом напряжения могут носить как растягивающий, так и сжимающий характер. Причиной их возникновения являются различные факторы, такие как несоответствие решеток, различия линейных коэффициентов термического расширения материалов пленки и подложки, внутренние напряжения, связанные со структурой и свойствами пленки. Образование силицида вследствие взаимодействия металл–кремний приводит к значительному уменьшению объема, что могло бы приводить к возникновению напряжений необычайно высокого уровня. Например, 25 % уменьшение объема при формировании дисилицида титана [3] соответству-

ет возникновению растягивающих напряжений в данной пленке, равных 63 ГПа. Однако для всех силицидов, образующихся при взаимодействии металла с кремнием, измеренная при комнатной температуре величина напряжений составляет лишь 1–2 ГПа. Поэтому напряжения, существующие в силицидах при комнатной температуре, вызваны, по-видимому, не эффектами сжатия. Напряжения, связанные с уменьшением объема силицидов, скорее всего релаксируют в процессе высокотемпературной обработки. Поскольку термические коэффициенты линейного расширения дисилицида титана и кремния отличаются в 4 раза, т. е. у силицида титана он существенно выше, то это различие, как показывают данные литературы [4], и обуславливает наблюдаемые напряжения в дисилициде титана, сформированного с использованием длительной термообработки. Следует также отметить, что вклад структурных дефектов в полную величину напряжений в пленках силицидов, сформированных с использованием длительной термообработки, является незначительным.

Исследование зависимости напряжений при комнатной температуре от температуры БТО пленки титана показало, что напряжения носят растягивающий характер и практически линейно увеличиваются с увеличением температуры от 0,15 до 1,00 ГПа (рис. 1). Такая величина напряжений почти полностью соответствует термическим напряжениям, возникающим в системе дисилицид титана–кремний за счет разницы в коэффициентах термического расширения данных материалов. Простейший расчет данных напряжений в такой системе при температуре 720 °С, являющейся температурой формирования дисилицида, показал, что они имеют величину ~0,8 ГПа, т. е. хорошо совпадают с величиной, замеренной экспериментально.

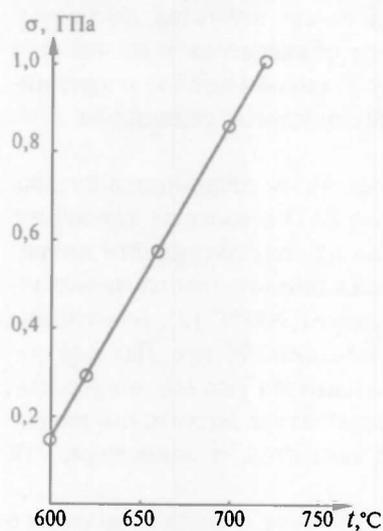


Рис. 1. Зависимость напряжений, измеренных при комнатной температуре, от температуры БТО титана на кремнии в течение 5 с

Таким образом, возникающие напряжения в дисилициде титана, полученного с применением БТО, имеют такую же величину и знак, как и при формировании дисилицида титана с применением длительной термообработки, и в основном определяются разницей в коэффициентах термического расширения дисилицида и кремния.

Одним из основных требований, предъявляемых к тонкопленочным системам металлизации, является их высокая устойчивость к механическим повреждениям, а основной характеристикой, отражающей данное свойство формируемых тонкопленочных систем, – их микротвердость. Последнее характеризует материал пленки и с точки зрения его пластичности и прочности, которые связаны с действием различных микроскопических механизмов пластической деформации, относительная

роль каждого из которых определяется внешними условиями: температурой, нагрузкой, скоростью деформирования. К микроскопическим механизмам относятся самодиффузионная и диффузионная, краудсионная и дислокационная пластичность кристаллов. Кроме того, в реальных кристаллах

имеются различные дефекты (точечные дефекты, примесные атомы, дислокации, частицы других фаз), и сопротивление скольжению зависит от их взаимодействия с движущимися дислокациями [5].

В поликристаллических пленках, что имеет место в случае дисилицида титана, действие указанных механизмов пластической деформации внутри зерен осложнено взаимодействием между зернами. Деформация поликристалла есть суммарный результат деформации во многих различно ориентированных относительно нагрузок и находящихся в разных условиях зерен. Увеличение пластичности материала пленки обычно связано с совершенствованием структуры пленок и уменьшением в них названных дефектов. Это в свою очередь вызывает уменьшение микротвердости формируемых пленок.

Исследование микротвердости пленок силицида титана, формируемых с применением БТО, показало, что данная величина с увеличением температуры обработки системы титан – кремний монотонно уменьшается и достигает постоянного значения при температуре выше 720 °С (рис. 2) [1]. Эта закономерность полностью объясняется фазовыми переходами, имеющими место в системе титан–кремний при такой обработке. Так, переход от  $Ti_5Si_3$  к  $TiSi_2$  сопровождается уменьшением микротвердости формируемого силицида от 1080  $кг/мм^2$  до 965  $кг/мм^2$ . Данное уменьшение полностью объясняется увеличением пластичности при переходе от многофазной системы силицида, имеющей место в температурном диапазоне 620–720 °С, к однофазной – дисилициду титана при  $t > 720$  °С. Это объясняется тем, что уменьшение содержания различных силицидных фаз титана в формируемой пленке дисилицида титана с увеличением температуры обработки приводит к уменьшению сопротивления скольжению, т. е. к увеличению пластичности, а следовательно, уменьшению микротвердости.

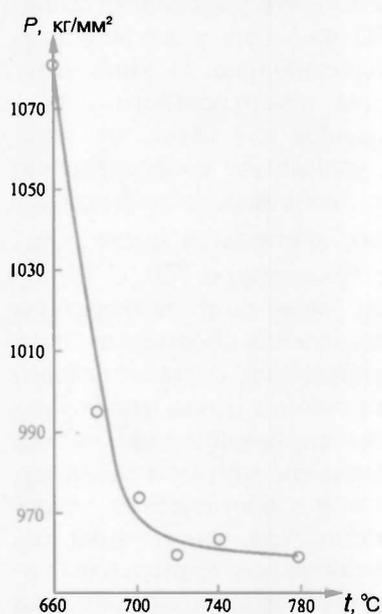


Рис. 2. Зависимость микротвердости силицида титана от температуры БТО системы титан – кремний

Сопоставление микротвердости дисилицида титана, полученного при длительной термообработке, величина которой составляет 1070  $кг/мм^2$ , с аналогичной величиной, полученной при БТО, показывает, что она на 105  $кг/мм^2$  меньше. Это обусловлено тем, что при БТО формируется более совершенная равнозернистая структура без зерен с искаженной конфигурацией. Кроме того, структура таких пленок дисилицида титана имеет значительно меньше дефектов типа точечных и включений других фаз. Это приводит к тому, что пластичность таких пленок выше, а микротвердость меньше, чем у пленок дисилицида титана, сформированных с применением двухстадийной длительной термообработки.

Уменьшение пластичности за счет дефектов типа точечных, частиц других фаз и дислокаций объясняется тем, что в результате их взаимодействия друг с другом дислокации тормозятся и останавливаются.

Для продолжения протекания деформации с постоянной скоростью требу-

ется непрерывное рождение новых дислокаций, т. е. увеличение внешней нагрузки. Это приводит к постоянному увеличению плотности дислокаций, а следовательно, растет их взаимное сопротивление скольжению, т. е. происходит деформационное упрочнение кристаллической решетки материала. В случае поликристаллических пленок металлов межзеренные границы препятствуют распространению дислокаций и, как правило, также упрочняют кристаллическую решетку. Последний эффект в наибольшей степени проявляется для структур, имеющих искаженную конфигурацию зерен.

Таким образом, микротвердость силицида титана, формируемого с применением БТО, уменьшается с увеличением температуры обработки до 720 °С из-за фазовых переходов в системе титан–кремний при таких температурах. Дальнейшее увеличение температуры не вызывает изменения микротвердости из-за отсутствия фазовых переходов и завершения формирования низкоомной фазы дисилицида титана с гранецентрированной структурой. Меньшее значение микротвердости дисилицида титана, сформированного с применением БТО, обуславливается его более совершенной структурой и низкой дефектностью по сравнению с аналогичными пленками, полученными с применением двухстадийной длительной термообработки.

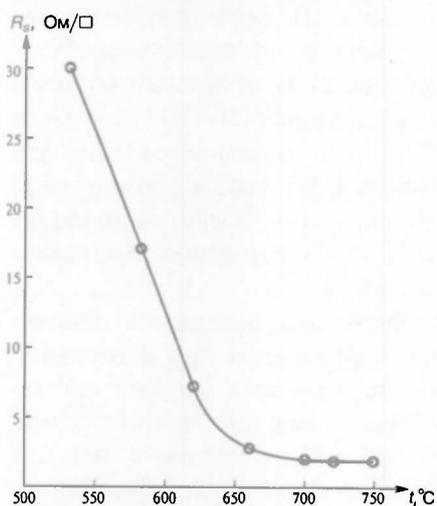


Рис. 3. Зависимость поверхностного сопротивления силицида титана от температуры БТО при длительности импульса 5 с

Поверхностное (или удельное) сопротивление токопроводящей пленки является одной из ее важнейших электрофизических характеристик. Оно определяет быстродействие прибора, потерю мощности тока, нагревание прибора и т. д. Исследование изменения поверхностного сопротивления силицидных слоев от температуры обработки показало, что увеличение температуры БТО приводит к его монотонному уменьшению (рис. 3). Минимальное значение поверхностного сопротивления, равное 1,75 Ом/кв, что соответствует удельному сопротивлению 16 мкОм·см (толщина дисилицида титана 95 нм), достигается после обработки при температуре 720 °С [6, 7]. Дальнейшее увеличение температуры

не приводит к изменению поверхностного сопротивления сформированного дисилицида титана, что свидетельствует о достижении системой своего равновесного состояния. Такой ход зависимости говорит о том, что формирование силицида титана с высоким удельным сопротивлением при низких температурах БТО обусловлено, о чем уже говорилось, синтезом силицида, представляющего собой смесь фаз силицидов титана, обогащенных металлом и имеющих более высокое удельное сопротивление, чем силицид, состоящий из фазы, обогащенной кремнием. С увеличением температуры начинает превалировать синтез обогащенного кремнием силицида титана, что приводит к уменьшению поверхностного сопротивления. После формирования при 720 °С силицида, представляющего собой лишь одну, обогащенную кремнием фазу силицида титана, а именно, дисилицид титана, поверхностное сопротивление достигает своего минимума. Дальнейшее увеличе-

ние температуры не приводит к изменению фазового состава получаемого силицида, а следовательно, не изменит его поверхностное сопротивление. Данный факт, по-видимому, можно объяснить тем, что удельное сопротивление силицида будет определяться своего рода  $d$ -,  $s$ -,  $p$ -гибридизацией с участием  $d$ -электронов титана (переходного металла) и  $s$ -,  $p$ -электронов кремния. Это означает, что при наличии обогащенной металлом фазы силицида основную роль в удельном сопротивлении будут играть  $d$ -электроны металла, увеличение которых, как установлено в [3], приводит к увеличению удельного сопротивления формируемого силицида. Следовательно, при низких температурах, когда в основном образуется обогащенная металлом фаза силицида титана, формируемый силицид будет иметь более высокое удельное сопротивление, что и наблюдается в нашем случае. При более высоких температурах происходит формирование обогащенного кремнием силицида титана, в котором основную роль в удельном сопротивлении играют  $s$ - и  $p$ -электроны кремния, т. е. такой силицид должен иметь минимальное удельное сопротивление, что и подтверждается результатами исследования.

Одним из важнейших условий применения дисилицида титана, полученного с применением БТО для создания СБИС, является воспроизводимость его поверхностного сопротивления по всей поверхности пластины. Анализ данной величины по поверхности пластины в двух взаимно перпендикулярных направлениях показал, что по краям пластины поверхностное сопротивление силицидных слоев возрастает примерно на 15 %. Такое повышение сопротивления вызвано уменьшением силицидного слоя по краю пластины из-за более низкой температуры по ее периметру. Такое уменьшение температуры обусловлено повышенной теплоотдачей с края пластины в окружающую среду при БТО.

Опробование разработанного процесса одностадийного формирования дисилицида титана показало, что синтезируемый слой имеет контактное сопротивление к высоколегированным  $n^+$ -областям  $(3-5) \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{см}^2$ .

Таким образом, при низких температурах, когда в основном образуется обогащенная металлом фаза силицида титана и основную роль в удельном сопротивлении играют  $d$ -электроны металла, увеличение которых приводит к тому, что формируемый силицид будет иметь более высокое удельное сопротивление. При более высоких температурах происходит формирование обогащенного кремнием силицида титана, в котором основную роль в удельном сопротивлении играют  $s$ -,  $p$ -электроны кремния, т. е. такой силицид имеет минимальное удельное сопротивление.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Установлена закономерность изменения толщины формирования силицида титана от температуры БТО и показано, что данная закономерность имеет такой же характер, как и в случае длительной термообработки.
2. Напряжения в дисилициде титана, полученном с применением БТО, имеют такую же величину и знак, как и при формировании дисилицида титана с применением длительной термообработки, и в основном определяются разницей в коэффициентах термического расширения дисилицида и кремния.
3. Микротвердость силицида титана, формируемого с применением БТО, уменьшается с увеличением температуры обработки (до 720 °С) из-за протекания в нем фазовых переходов и остается постоянной при дальнейшем увеличении температуры из-за завершения формирования конечной фазы

дисилицида титана с гранецентрированной структурой. Меньшее значение его микротвердости обуславливается более совершенной структурой и низкой дефектностью данных пленок по сравнению с пленками, полученными с применением длительной термообработки.

4. При температурах БТО ниже 720 °С, когда в основном образуется обогащенная металлом фаза силицида титана и основную роль в удельном сопротивлении играют *d*-электроны металла, формируемый силицид имеет более высокое удельное сопротивление. При температуре 720 °С и выше происходит формирование обогащенного кремнием силицида титана, в котором основную роль в удельном сопротивлении играют *s*-, *p*-электроны кремния, что обуславливает минимальное значение его удельного сопротивления.

1. Анищик В.М., Горушко В.А., Пилипенко В.А. и др. Физические основы быстрой термообработки и оборудование. Создание многоуровневой металлизации. Мн., 2000.

2. Технология СБИС / Под ред. С. Зи. М., 1986. Т. 2.

3. Мьюрарка Ш. Силициды для БИС. М., 1986.

4. Таруи Я. Основы технологии СБИС. М., 1985.

5. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов: Пер. с англ. М., 1972.

6. Пилипенко В.А., Пилипенко И.В., Пономарь В.Н., Горушко В.А. // Вакуумная техника и технология. 2000. Т. 10. № 1. С. 21.

7. Пономарь В.Н., Пилипенко В.А., Горушко В.А., Пилипенко И.В. // Актуальные проблемы твердотельной электроники и микроэлектроники: Тр. VII Междунар. науч.-техн. конф. Таганрог, 2000. С. 100.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

*Пилипенко Владимир Александрович* – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, заместитель директора ГЦ «Белмикроанализ».

*Анищик Виктор Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела БГУ.

*Пономарь Владимир Николаевич* – кандидат физико-математических наук, директор ГЦ «Белмикроанализ».

*Пилипенко Ирина Владимировна* – аспирант кафедры физики твердого тела БГУ. Научные руководители В.М. Анищик, В.Н. Пономарь.

УДК 537.612

*В.М. ДОБРЯНСКИЙ, В.Ф. МАЛИШЕВСКИЙ, Н.Б. ФРАНЦКЕВИЧ, В.П. ЯРУНИЧЕВ*

### **ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОКСИДОВ И КУПРАТОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ НА ОСНОВЕ СОЕДИНЕНИЙ $ZrV_2$ И $Nb_3Sn$**

Oxides and kourates are synthesized on the basis of extraconducting  $ZrV_2$  and  $Nb_3Sn$ . Their temperature dependences of conductivity, of dielectric permeability and of tangent of the corner of dielectric losses temperatures to room ones are taken.

$ZrV_2$  и  $Nb_3Sn$  обладают самыми высокими  $T_k$  в своем классе сверхпроводников [1]. Представляет интерес установление характера температурной зависимости сопротивления соединений, имеющих формулы, сходные с формулами ВТСП-материалов, в состав которых входили бы металлы из названных интерметаллических соединений. С этой целью на основе данных соединений были приготовлены окислы и купраты и исследованы их физические свойства. Исходными реактивами для приготовления образцов служили:  $ZrO_2$  “ч”,  $V_2O_5$  “чда”,  $Nb_2O_5$  “осч”,  $SnO$  “чда”,  $CuO$  “осч”. Смеси окислов, взятых в соотношениях, необходимых для образования предполагаемых соединений  $ZrV_2O_x$ ,  $ZrV_2CuO_x$ ,  $ZrV_2Cu_2O_x$ ,  $ZrV_2Cu_3O_x$ ,  $Nb_3SnO_y$ ,  $Nb_3SnCuO_y$ ,  $Nb_3SnCu_2O_y$ ,  $Nb_3SnCu_3O_y$ , смешивали в яшмовой ступке с добавлением этилового спирта. Синтез образцов проводили по обычной кера-

мической технологии двукратным обжигом с промежуточным перетиранием и перепрессовыванием давлением 2,0 кбар [2]. Первый обжиг проводили в течение 16 ч при температуре 600–840 °С в зависимости от состава. Температура второго обжига составляла 640–770 °С для цирконийсодержащих и 990–1300 °С для ниобийсодержащих составов. Время обжига 1 ч. Для определения оптимальных режимов получения исследуемых соединений проводился дифференциально-термический анализ на дериватографе «Derivatograph-c».

Полноту реакций образования соединений контролировали по виду рентгенограмм, снимаемых на рентгеновском аппарате ДРОН-1 в  $\text{CuK}\alpha$ -излучении.

В качестве образцов для измерений физических свойств использовали диски диаметром 12 мм и толщиной 1 мм и параллелепипеды размером 20x2x2 мм<sup>3</sup>. Индиевые электроды на образцы наносили ультразвуковым паяльником. Сопротивление образцов измеряли по четырехзондовой схеме. Проводимость, диэлектрическую проницаемость и тангенс угла потерь измеряли на частоте  $f=1$  МГц цифровым мостом Е7-12.

Полученные образцы обладали высоким удельным сопротивлением  $\rho = 10^1\text{--}10^8$  Ом·м и не переходили в сверхпроводящее состояние вплоть до гелиевых температур. Более высокое удельное сопротивление при комнатной температуре среди полученных материалов имели ниобийсодержащие соединения –  $\rho \sim 10^6$  Ом·м. Увеличение содержания меди в исследуемых ма-

териалах приводило к понижению их удельного сопротивления, доходившего в ряде случаев до нескольких порядков.

При низких температурах сопротивление исследуемых образцов остается достаточно высоким. Они обладают свойствами, характерными для диэлектриков. Измерения диэлектрической проницаемости ( $\epsilon$ ), тангенса угла потерь ( $\text{tg } \delta$ ) и проводимости ( $\sigma$ ) показали, что с увеличением температуры (рис. 1, 2) вплоть до комнатной отмечается резкий рост их величины. При этом в исследуемых соединениях наблюдается полупроводниковый характер зависимости сопротивления от температуры. Следует отметить, что наибольший рост измеряемых величин характеризуется для соединений  $\text{Nb}_3\text{SnCu}_2\text{O}_y$  и

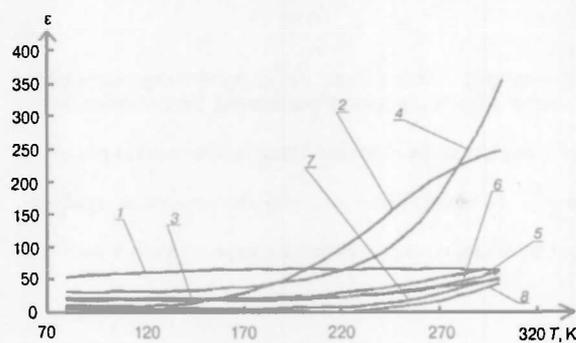


Рис. 1. Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры:

1 –  $\text{Nb}_3\text{SnO}_y$ ; 2 –  $\text{ZrV}_2\text{CuO}_y$ ; 3 –  $\text{Nb}_3\text{SnCuO}_y$ ; 4 –  $\text{Nb}_3\text{SnCu}_2\text{O}_y$ ;  
5 –  $\text{Nb}_3\text{SnCu}_3\text{O}_y$ ; 6 –  $\text{ZrV}_2\text{O}_y$ ; 7 –  $\text{ZrV}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ ; 8 –  $\text{ZrV}_2\text{Cu}_2\text{O}_y$

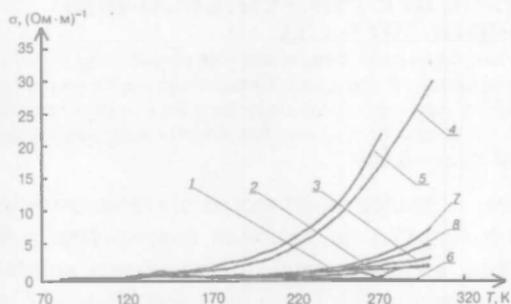


Рис. 2. Зависимость удельной проводимости от температуры:

1 –  $\text{ZrV}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ ; 2 –  $\text{Nb}_3\text{SnCuO}_y$ ; 3 –  $\text{Nb}_3\text{SnCu}_3\text{O}_y$ ; 4 –  $\text{Nb}_3\text{SnCu}_2\text{O}_y$ ;  
5 –  $\text{ZrV}_2\text{CuO}_y$ ; 6 –  $\text{Nb}_3\text{SnO}_y$ ; 7 –  $\text{ZrV}_2\text{O}_y$ ; 8 –  $\text{ZrV}_2\text{Cu}_2\text{O}_y$

$ZrV_2CuO_x$ , в то время как у соединения  $Nb_3SnO_y$  эти изменения незначительны.

Аналогичный ход имела и зависимость удельного сопротивления от температуры  $\rho=f(T)$ , полученная на основе измерений сопротивления четырехзондовым методом. Кроме того, у образцов соединения  $ZrV_2Cu_3O_x$  в области температур 80–220 К наблюдался слабовыраженный широкий минимум (рис. 3), а измерения, проведенные индуктивным методом, показали наличие в этих образцах скачка сопротивления при 78,7 К.

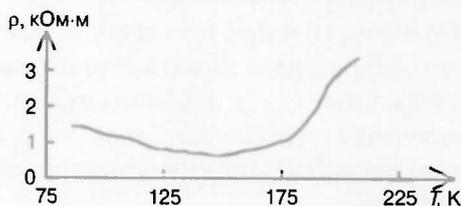


Рис. 3. Температурная зависимость электросопротивления  $ZrV_2Cu_3O_x$

Таким образом, исследования показали, что полученные соединения при комнатной температуре являются полупроводниками с широким диапазоном ширины запрещенной зоны и удельным сопротивлением  $10^1-10^8$  Ом·м. При понижении температуры вплоть до гелиевых они не переходят в сверхпроводящее состояние и лишь в соединении  $ZrV_2Cu_3O_x$  в области температур 80–220 К наблюдается слабовыраженный широкий минимум сопротивления.

1. Вонсовский С.В., Изюмов Ю.А., Курмаев Э.З. Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений. М., 1977.

2. Луцевич А.Б., Яруничев В.П., Исупов В.А. и др. // Изв. АН СССР. Сер. неорг. мат. 1988. Т. 24. № 12. С. 2040.

Поступила в редакцию 15.12.2000.

*Добрянский Валерий Михайлович* – доктор технических наук, профессор, начальник главного управления высшего образования Министерства образования Республики Беларусь.

*Малишевский Виктор Феликсович* – кандидат физико-математических наук, проректор (БАТУ).

*Францкевич Наталья Викторовна* – инженер НИЛ оптико-электронного приборостроения БГПА.

*Яруничев Виктор Павлович* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИФТТ и ПП НАН Беларуси).

УДК 621.327.8:535.41

В.А. САЕЧНИКОВ, Э.А. ЧЕРНЯВСКАЯ, Т.П. ЯНУКОВИЧ

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ БРИЛЛЮЭНА В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОЙ МОДУЛЯЦИИ СИГНАЛА

The Brillouin scattering in combination with frequency-domain analysis as a sensing technique for distributed measurement of strain and temperature is discussed. Comprehensive theoretical examination of two- and three-wave model of interaction is held. An expression for complex baseband transfer function is obtained. The numerical simulation of response function for single-mode optical fiber with higher temperature and strained regions is held.

В последнее время разработано большое количество оптоволоконных сенсорных систем для измерения различных физических параметров, в частности температуры и деформации. Использование оптического волокна большой длины позволяет создавать распределенные сенсоры. Первым методом для измерений от распределенного источника была рефлектометрия оптического временного домена [1] с использованием обратного релеевского рассеяния для измерения оптических потерь в волокне. Одним их наиболее

лее эффективных оказалось применение метода оптического временного домена для стимулированного рассеяния Бриллюэна (РБ) в одномодовом волокне при введении с противоположных концов его непрерывного узкополосного излучения лазера накачки и модулированного излучения пробного лазера [2]. При помощи анализа проходящего через волокно излучения лазера накачки как функции времени определяется распределение температуры и деформации вдоль волокна [3–6].

С учетом достаточно низкой точности метода был предложен альтернативный метод анализа бриллюэновского оптического частотного домена (АБОЧД), в котором с противоположных концов волокна вводятся непрерывное излучение узкополосных лазеров накачки и излучение пробного лазера. Частота последнего сдвинута в низкочастотную область по сравнению с частотой лазера накачки на величину характеристической бриллюэновской частоты  $f_B$  волокна [7], которая зависит от температуры и степени деформации волокна. Излучение пробного лазера порождает в волокне волну Стокса, которая распространяется противоположно волне накачки. Анализ потерь проходящей по волокну волны накачки позволяет получить распределение температуры и деформации в волокне.

Данная работа посвящена математическому описанию рассеяния Бриллюэна в оптическом волокне.

#### Описание метода анализа бриллюэновского оптического частотного домена

С левого конца волокна вводится непрерывное излучение лазера накачки, а с правого – излучение пробного лазера (рис. 1). С помощью акустооптического модулятора (АОМ) излучение пробного лазера будет модулироваться синусоидально. Установленная разность частот  $f_{D,0}$  между двумя лазерами является зависимой от температуры и деформации характеристической бриллюэновской частотой на определенном отрезке волокна

$$f_B = f_{B,0} + \varepsilon \frac{\partial f_B}{\partial \varepsilon} + (T - 23 \text{ }^\circ\text{C}) \frac{\partial f_B}{\partial T}, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial f_B}{\partial T} = 1,2 \text{ МГц}/^\circ\text{C}$  – температурный коэффициент и  $\frac{\partial f_B}{\partial \varepsilon} = 500 \text{ МГц}$  – коэффициент деформации характеристической частоты бриллюэновского рассеяния [2].

На этом отрезке непрерывное излучение лазера накачки будет взаимодействовать с модулированным стоксовым излучением. Таким образом, интенсивность излучения лазера накачки тоже будет модулирована. Это излучение достигнет левого конца волокна. Мощность модулированного излучения пробного лазера и лазера накачки детектируют с помощью фотодиодов FD. Затем с помощью процессора получаем дискретную модуляционную передаточную функцию  $H_L(\omega_m, f_{D,0})$ , которая зависит от частоты модуляции и от разности частот обоих лазеров. После обратного Фурье-преобразования этой функции получаем зависимый от времени и разности импульсный отклик системы. Зависимость от координаты позволяет определить пространственное расположение участка линии с измеренной температурой или место приложения деформационного воздействия.

В правом конце волокна мощность регистрируемого излучения пробного лазера будет выглядеть следующим образом:

$$P_s(t, \varpi_m) \Big|_{z=L} = \bar{P}_s + P_s(\omega_m) \cos[\omega_m t + \phi_s(\omega_m)] = \bar{P}_s + \hat{P}_s(\omega_m), \quad (2)$$

где  $\omega_m = m\Delta\omega$  для  $m=0, 1, 2, \dots, M-1$  – значение круговой частоты модуляции модулированной интенсивности,  $\hat{P}_s(\omega_m)$  – амплитуда,  $\phi_s(\omega_m)$  – фаза, а  $\bar{P}_s$  – постоянная составляющая сигнала, регистрируемого при  $z=L$ . В идеальном случае измерения начинаются при частоте  $f_0 = \omega_0/2\pi = 0$  Гц, но в реальном случае постоянный сигнал нельзя анализировать.

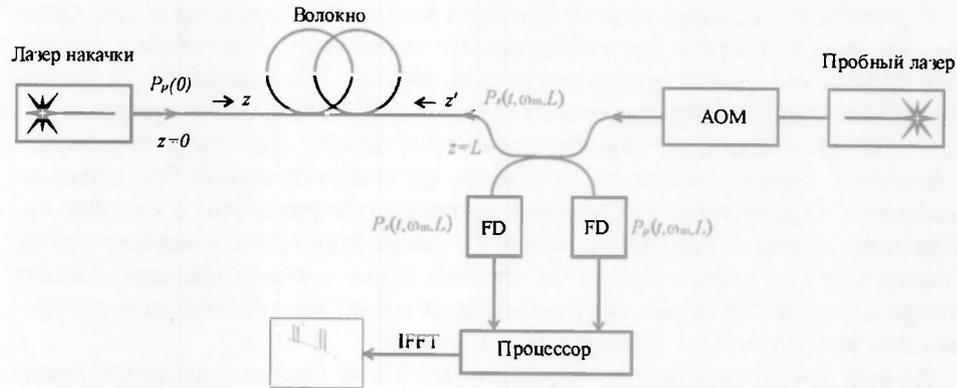


Рис. 1. Схема установки для измерений методом АБОЧД

В результате взаимодействия двух волн в правом конце волокна мощность волны накачки будет иметь вид

$$P_p(t, \omega_m, f_{D,0})|_{z=L} = \bar{P}_p(\omega_m, f_{D,0}) + \hat{P}_p(\omega_m, f_{D,0}) \cos[\omega_m t + \phi_p(\omega_m, f_{D,0})] = \bar{P}_p(\omega_m, f_{D,0}) + \tilde{P}_p(\omega_m, f_{D,0}), \quad (3)$$

где  $\bar{P}_p(\omega_m, f_{D,0})$  – постоянная составляющая и  $\tilde{P}_p(\omega_m, f_{D,0})$  – переменная составляющая с амплитудой  $\hat{P}_p(\omega_m, f_{D,0})$  и фазой  $\phi_p(\omega_m, f_{D,0})$ . Модуляция сигнала происходит на разных отрезках волокна и регистрируется на правом конце волокна. Различный временной пробег сигналов с разной модуляцией обладает при регистрации различной фазой. Из этого следует, что результирующий сигнал имеет фазу  $\phi_p(\omega_m, f_{D,0})$ , обусловленную различным пробегом, и амплитуду, которая при определенной частоте модуляции будет минимальна. Фаза  $\phi_p(\omega_m, f_{D,0})$  в любом случае сильно зависит от частоты модуляции. Эта зависимость служит мерой фазовой скорости распространения модулированной компоненты мощности волны накачки по волокну. Таким образом, амплитуда и мощность модулированной компоненты прошедшей мощности волны накачки зависят от распределения температуры и деформации по волокну.

Дискретная модуляционная передаточная функция будет записываться следующим образом:

$$H_L(\omega_m, f_{D,0}) = \frac{\hat{P}_p(\omega_m, f_{D,0})}{\hat{P}_s(\omega_m)} \exp[j\phi_p(\omega_m, f_{D,0}) - j\phi_s(\omega_m)]. \quad (4)$$

Эта функция получается при последовательном измерении фазы и амплитуды мощности при равноизменяющихся частотах модуляции  $\omega_m$ .

Чтобы получить временное распределение, производится дискретное преобразование Фурье. Таким образом, получается импульсный отклик системы:

$$h_L(t_q, f_{D,0}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H_L(\omega_m, f_{D,0}) \exp[j\omega_m t_q], \quad (5)$$

где дискретные отрезки времени  $t_q = q\Delta t$ ,  $q=0, 1, 2, \dots, M-1$  – временной шаг. Используя соотношение  $\omega_M = \omega_m |_{m=M} = M\Delta\omega$ , получим зависимость

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{2\pi}{M\Delta\omega}. \quad (6)$$

Используя выражение для скорости распространения света в среде  $c/n_{gr}$ , можно ввести замену  $t_q = 2z_q n_{gr}/c$ , где каждому моменту времени  $t_q$  соответствует координата  $z_q$ ,  $c$  – скорость распространения света в вакууме,  $n_{gr}$  – групповой коэффициент преломления. Используя данную замену в уравнении (5), получим действительную часть комплексной передаточной функции

$$s(z'_q, f_{D,0}) = \text{Re}\{h_L(2z'_q n_{gr}/c, f_{D,0})\} = \frac{H_L(0, f_{D,0})}{2M}, \quad (7)$$

где  $H_L(0, f_{D,0})$  – значение функции  $H_L(m\Delta\omega, f_{D,0})$  при  $m=0$ , координата определяется  $z'_q = q\Delta z$ ,  $\Delta z$  – отрезок постоянной длины.

Такую функцию можно получить для разных разностей частот. Тогда разность частот между двумя лазерами будет изменяться согласно закону  $f_{D,0} + r\Delta f_D$ , где  $r=0, 1, 2, \dots, R-1$ ,  $R$  – целое число,  $\Delta f_D$  – постоянный сдвиг частоты. Таким образом, функция  $s(z'_q, f_{D,r})$  является двумерной. Зависимость от координаты позволяет определить пространственное положение измененной температуры или приложенной деформации, а зависимость от частоты позволяет определить максимум бриллюэновского взаимодействия и найти значение этого изменения.

#### Модели бриллюэновского взаимодействия в оптическом волокне

Рассеяние Бриллюэна можно описать как трехволновое взаимодействие [8] волны лазера накачки, стоксовой волны и акустической волны. Такая модель может быть записана с помощью трех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{n} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{c}{n} \alpha \right] E_p &= j \frac{n^2 p_{12} \pi c}{\lambda \rho_0} \rho E_s, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{n} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{c}{n} \alpha \right] E_s &= j \frac{n^2 p_{12} \pi c}{\lambda \rho_0} \rho^* E_p, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + c_s \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_s \right] \rho &= j \frac{\epsilon_0 n^5 p_{12} \pi}{2\lambda c_s} E_p E_s^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $E_p$  – комплексная амплитуда электрической составляющей волны накачки;  $E_s$  – комплексная амплитуда электрической составляющей стоксовой волны;  $\rho$  – комплексная амплитуда волны плотности;  $\rho_0$  – средняя плотность;  $p_{12}$  – безразмерный продольный коэффициент упругости;  $n$  – коэффициент преломления волны в сердцевине волокна;  $\alpha$  – коэффициент ослабления электромагнитной волны;  $\gamma_s$  – коэффициент ослабления акустической волны;  $c_s$  – скорость распространения звука в материале волокна;  $\lambda$  – длина волны в вакууме;  $z$  – координата (сенсор расположен по оси  $z$ ).

Ось  $z$  выбрана таким образом, что  $z=0$  в том конце волокна, в который направлено излучение накачки. Первое уравнение описывает ослабление волны накачки при взаимодействии стоксовой волны и акустической волны. Второе уравнение системы (8) описывает усиление стоксовой волны при взаимодействии волны накачки и акустической волны. Третье уравнение системы (8) описывает возбуждение акустической волны при противоположном распространении по волокну волны накачки и стоксовой волны.

Двухволновая модель рассеяния Бриллюэна получается из (8) при условии  $t \gg \tau_s^{-1} = 6,4$  нс [8]. Для этого производные по времени и координате от  $\rho$  определяются из третьего уравнения системы (8). Затем производится подстановка  $\rho$  в первое и второе уравнение. Переходя от величин  $E_p$  и  $E_s$  к интенсивностям  $I_p$  и  $I_s$ , получим два дифференциальных уравнения для интенсивности волны накачки и стоксовой волны. В результате получается следующая система уравнений для двухволновой модели [9]:

$$\begin{cases} \left[ \frac{n}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \right] I_p = (-2\alpha - g_B I_s) I_p, \\ \left[ \frac{n}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \right] I_s = (-2\alpha + g_B I_p) I_s, \end{cases} \quad (9)$$

где  $g_B$  – коэффициент бриллюэновского усиления. Максимальный коэффициент усиления выведен в [8]:

$$\hat{g}_B \gamma = \gamma \frac{2\pi^2 n^7 p_{12}^2}{c \lambda^2 \rho_0 c_s \gamma_s} = \gamma \frac{2\pi n^7 p_{12}^2}{c \lambda^2 \rho_0 c_s \Delta f_B} = \gamma \frac{4\pi n^8 p_{12}^2}{c \lambda^3 \rho_0 f_B \Delta f_B}. \quad (10)$$

Связь между шириной полосы бриллюэновского усиления  $\Delta f_B$  и коэффициентом ослабления акустической волны  $\gamma_s$  записывается [8]:

$$\gamma_s = \Delta f_B \pi. \quad (11)$$

Интенсивности волны накачки и стоксовой волны выражаются через амплитуды:

$$\begin{cases} I_p = \frac{n}{2\mu_0 c} |E_p|^2 = \frac{n\epsilon_0 c}{2} |E_p|^2, \\ I_s = \frac{n}{2\mu_0 c} |E_s|^2 = \frac{n\epsilon_0 c}{2} |E_s|^2. \end{cases} \quad (12)$$

Связь мощности и интенсивности волны накачки и стоксовой волны выражаются соответственно:

$$\begin{cases} I_p = \frac{P_p}{A_{eff}}, \\ I_s = \frac{P_s}{A_{eff}}. \end{cases} \quad (13)$$

Как трехволновая, так и двухволновая модели будут выполняться при условии, что распределение мощности в волокне изменяется незначительно, т. е. когда потери волны накачки в волокне отсутствуют.

#### Вычисление волны накачки в трехволновой модели

Решение системы (8) для модулированной интенсивности прошедшей волны накачки при  $z=L$  будет иметь вид

$$I_p(t, L) = I_{p0} \exp\{-2\alpha L - \Gamma_{p0} + \exp(-2\alpha L) \times$$

$$\times [\Gamma_{p0} + 2\alpha L X_{p0}] - \Gamma_{p,t} \cos[2\omega_E t - 2k_E L + \varphi_{p,t}]\} \quad (14)$$

с амплитудой

$$\Gamma_{p,t} = \sqrt{(\Gamma_{p4} \cos(\varphi_{p4}) + \Gamma_{p5} \cos(\varphi_{p5}) + \Gamma_{p6} \cos(\varphi_{p6}))^2 + (\Gamma_{p4} \sin(\varphi_{p4}) + \Gamma_{p5} \sin(\varphi_{p5}) + \Gamma_{p6} \sin(\varphi_{p6}))^2} \quad (15)$$

и фазой

$$\varphi_{p,t} = \arctg \left( \frac{\Gamma_{p4} \sin(\varphi_{p4}) + \Gamma_{p5} \sin(\varphi_{p5}) + \Gamma_{p6} \sin(\varphi_{p6})}{\Gamma_{p4} \cos(\varphi_{p4}) + \Gamma_{p5} \cos(\varphi_{p5}) + \Gamma_{p6} \cos(\varphi_{p6})} \right). \quad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Gamma_{p0} = \left( \frac{g_B(\omega_E) I_{s0}}{4\alpha \sqrt{1 + (\omega_E/\gamma_s)^2}} + \frac{g_B^2(\omega_E) I_{s0} I_{p0}}{16\alpha^2} \right),$$

$$\Gamma_{p4} = -\frac{g_B^2(\omega_E) I_{s0} I_{p0}}{8\alpha \sqrt{1 + (2k_E/\alpha)^2}} L \exp(-2\alpha L),$$

$$\Gamma_{p5} = \frac{g_B^2(\omega_E) I_{s0} I_{p0}}{8\alpha^2 (1 + (2k_E/\alpha)^2)} \exp(-\alpha L) \sqrt{\sinh^2(\alpha L) + \sin^2(2k_E L)},$$

$$\Gamma_{p6} = \frac{g_B^2(\omega_E) I_{s0} \exp(-\alpha L)}{2\alpha \sqrt{1 + (2k_E/\alpha)^2}} \sqrt{\sinh^2(\alpha L) + \sin^2(2k_E L)},$$

$$\varphi_{p4} = -2k_E L - 2\arctg(\omega_E/\gamma_s) - \arctg(2k_E/\alpha),$$

$$\varphi_{p5} = -2\arctg(\omega_E/\gamma_s) - \arctg(4k_E\alpha/(\alpha^2 - 4k_E^2)) + \arctg(\operatorname{tg}(2k_E L) \operatorname{ctgh}(\alpha L)),$$

$$\varphi_{p6} = -\arctg(\omega_E/\gamma_s) - \arctg(2k_E/\alpha) + \arctg(\operatorname{tg}(2k_E L) \operatorname{ctgh}(\alpha L)).$$

Предполагая, что существует модуляция волны накачки с небольшой глубиной, можно записать основную волну модулированной интенсивности излучения накачки в правом конце волокна, т. е. при  $z=L$ , из выражения (13).

$$\tilde{I}_p(t, L, \omega_E) = \hat{I}_p(\omega_E t) \cos[2\omega_E t + \varphi_p(\omega_E)]. \quad (18)$$

Амплитуда записывается как

$$\hat{I}_p(\omega_E) = I_{p0} \Gamma_{p,t}(\omega_E) \exp\{-2\alpha L - \Gamma_{p0}(\omega_E) + \exp(-2\alpha L) [\Gamma_{p0}(\omega_E) + 2\alpha L X_{p0}(\omega_E)]\}, \quad (19)$$

а фаза

$$\varphi_p(\omega_E) = \pi - 2k_E L + \varphi_{p,t}(\omega_E). \quad (20)$$

Из (14) можно получить выражение для среднего значения интенсивности прошедшей волны накачки при  $z=L$ .

$$\bar{I}_p(L) = \bar{I}_{p0} \exp\{-2\alpha L - \Gamma_{p0} + \exp(-2\alpha L) [\Gamma_{p0} + 2\alpha L X_{p0}]\}. \quad (21)$$

#### Приближенное решение для случая малой глубины модуляции

Ранее рассматривалось бриллюэновское взаимодействие с точки зрения трехволновой модели, в которой учитывается колебание акустической волны. В результате появляется модуляция волны накачки с некоторой глубиной

ной. При высоких частотах модуляции происходит затухание амплитуды и сдвиг фазы. При малых частотах модуляции колебаниями волны плотности со временем по сравнению с изменением мощности оптического излучения можно пренебречь. В таком случае можно применить двухволновую модель и для описания бриллюэновского взаимодействия в таком приближении решать систему (9). При решении этой системы будут использованы результаты, полученные для интенсивностей в трехволновой модели в предположении, что частота модуляции  $f_E < \frac{\gamma}{10\pi} \sim 5$  МГц.

В таком случае интенсивность прошедшей волны накачки при  $z=L$  будет иметь вид

$$I_p(t, L) = I_{p0} \exp \left\{ -2\alpha L - \gamma \hat{g}_B \frac{I_{s0}}{\delta} e^{\delta L/2} \operatorname{sh} \left( \frac{\delta L}{2} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\gamma \hat{g}_B I_{s0}}{\sqrt{\delta^2 + (4k_E)^2}} e^{\delta L/2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{\delta L}{2} \right) + \sin^2(2k_E L)} \cos(2\omega_E t + \varphi(\omega_E)) \right\}, \quad (22)$$

где фаза

$$\varphi(\omega_E) = \pi - 2k_E L + \operatorname{arctg} \left( \frac{4k_E}{\delta} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}(2k_E L)}{\operatorname{tgh}(\delta L/2)} \right). \quad (23)$$

Предполагая, что глубина модуляции мала, можно записать основную волну модулированной интенсивности излучения накачки при  $z=L$

$$\tilde{I}_p(t, L, \omega_E) = \hat{I}_p(\omega_E) \cos(2\omega_E t + \varphi_p(\omega_E)) \quad (24)$$

с амплитудой

$$\hat{I}_p(\omega_E) = I_{p0} \exp \left\{ -2\alpha L - \gamma \hat{g}_I \frac{I_{s0}}{\delta} e^{\delta L/2} \operatorname{sh} \left( \frac{\delta L}{2} \right) \right\} \times \\ \times \frac{\gamma \hat{g}_B I_{s0}}{\sqrt{\delta^2 + (4k_E)^2}} e^{\delta L/2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{\delta L}{2} \right) + \sin^2(2k_E L)} \quad (25)$$

Из (22) получаем выражение для интенсивности прошедшей волны накачки при  $z=L$ :

$$\bar{I}_p(L) = I_{p0} \exp \left\{ -2\alpha L - \gamma \hat{g}_B \frac{I_{s0}}{\delta} e^{\delta L/2} \operatorname{sh} \left( \frac{\delta L}{2} \right) \right\}. \quad (26)$$

### Симуляция измерений методом АБОЧД

При проведении численного моделирования рассматривалось одномодовое волокно длиной 1000 м. Рассмотрены две области (длиной 70 и 2 м) повышенной температуры (78 °С) по сравнению с ненагретым волокном (26 °С) и две деформированные области (длиной 50 и 3 м,  $\varepsilon = 0,1\%$ ). Для каждой части волокна интенсивность рассчитывается по формуле (22) с учетом индивидуальных бриллюэновских коэффициентов усиления для разных областей волокна. Последовательными итерациями вычисляются постоянные компоненты входного излучения накачки и стоксовой волны. Ненагретые и недеформированные области имеют характеристическую бриллюэновскую частоту 12,8 ГГц. Характеристическая бриллюэновская частота нагретой и деформированной областей составляет 12,86 и 12,85 ГГц

соответственно. Разность частот  $\Delta f$  варьировалась в пределах 12,8–12,88 ГГц. Мощность непрерывного излучения накачки составляла 10 мВт, мощность пробного лазера имела максимальную амплитуду 0,1 мВт и глубину модуляции 100 %. Частота модуляции изменялась от 30 кГц до 70 МГц с инкрементом 34 кГц. В этой модели были приняты максимальный бриллюэновский коэффициент усиления  $\hat{g}_B = 1,2 \cdot 10^{-11}$  м/Вт и  $\Delta f_B = 70$  МГц. Импульсный отклик  $s(z', \Delta f)$  изображен на рис. 2.

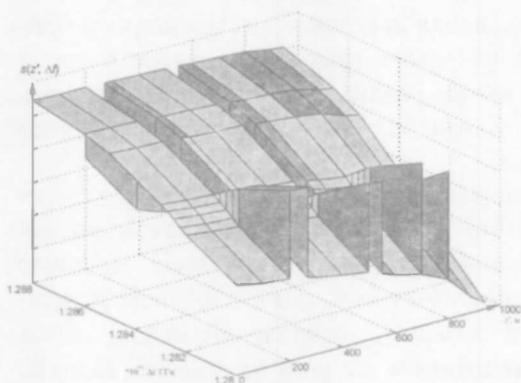


Рис. 2. Зависимость функции отклика системы от разности частот и координаты

Бриллюэновское взаимодействие и потери будут наблюдаться только в ненагретых и недеформированных областях, если разность частот составляет около 12,8 ГГц. Однако эти потери будут значительно меньше в нагретых и деформированных областях. Таким образом, локализируются нагретые и деформированные участки. С увеличением разности частот бриллюэновский коэффициент усиления будет уменьшаться согласно закону распределения Лоренца в областях, не подверженных внешнему воздействию, а в нагретых и деформированных соответственно увеличиваться. Значение температуры и деформации определяется величиной разности частот, на которой происходит максимальное взаимодействие, т. е. импульсный отклик на данной длине будет минимален. Максимальное взаимодействие достигается при разности частот 12,85 и 12,86 ГГц. Величина соответствующей температуры и деформации определяется по формуле (1).

Таким образом, результаты численного моделирования показывают возможность проведения измерений методом АБОЧД и позволяют оценить пределы изменения измеряемых характеристик.

Таким образом, результаты численного моделирования показывают возможность проведения измерений методом АБОЧД и позволяют оценить пределы изменения измеряемых характеристик.

1. Barnowski M.K., Jensen S.M. // Appl. Opt. 1976. Vol. 15. № 9. P. 2112.
2. Horigochi T., Tateda M. // J. Light. Technol. 1989. Vol. 7. № 8. P. 1170.
3. Саечников В.А., Чернявская Э.А., Янукович Т.П. Квантовая электроника: Тез. докл. науч. конф. Мн., 1998. С. 23.
4. Saetchnikov V.A., Chernyavskaja E.A., Yanukovich T.P. EOS/SPIE Symposium on Applied Photonics. Glasgow, 2000. P. 8.
5. Saetchnikov V., Chernyavskaya E., Yanukovich T. Smart Structures and Materials. Newport Beach, 2000. P. 4.
6. Саечников В.А., Чернявская Э.А., Янукович Т.П. // ПС. 1999. Т. 66. № 5. С. 718.
7. Garus D., Gogolla T., Krebber K., Schliep F. // J. Light. Technol. 1997. Vol. 15. № 4. P. 654.
8. Gogolla T., Krebber K. // Proc. SPIE. 1997. Vol. 3105. P. 168.
9. Bar-Joseph I., Friesem A.A., Lichtman E., Waarts R.G. // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol. 2. № 10. P. 1606.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

*Саечников Владимир Алексеевич* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики БГУ.

*Чернявская Элина Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ядерной физики БГУ.

*Янукович Татьяна Петровна* – инженер-программист кафедры физики БГУ.

### ИСКЛЮЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ВРЕМЯИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ТРАКТА ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО НАБЛЮДЕНИЮ ОСЦИЛЛЯЦИЙ СПИНА ПОЗИТРОНИЯ

A new method of differential nonlinearity calculation in data processing of positronium spin rotation experiment is proposed.

В современной физике для исследования свойств вещества широко применяются позитронные методы, в их числе изменение скорости счета  $3\gamma$ -совпадений, измерение времени жизни позитронов, исследование угловых корреляций аннигиляционных  $\gamma$ -квантов, измерение энергетического спектра аннигиляционного излучения.

Три первых метода базируются на применении схем совпадений для регистрации соответственно: совпадений между тремя аннигиляционными квантами; запаздывающих совпадений между регистрацией ядерного  $\gamma$ -кванта, сопровождающего испускание позитрона, и последующей регистрацией одного из аннигиляционных  $\gamma$ -квантов; совпадений между двумя аннигиляционными  $\gamma$ -квантами в зависимости от угла их разлета. Однако ни один из названных методов наблюдения аннигиляции позитронов не позволяет определять ориентацию спина ортопозитрония в момент аннигиляции. Между тем знание динамики вектора поляризации атома позитрония в веществе позволило бы получать информацию о сверхтонких взаимодействиях атома позитрония в веществе, как это делается в экспериментах по мюонному спиновому вращению [1].

В 1976 г. профессором В.Г. Барышевским была предложена идея нового метода исследования вещества с помощью позитронов, позволяющего получать такую информацию [2]. Идея метода позитрониевого спинового вращения заключается в следующем. Спин ортопозитрония прецессирует во внешнем магнитном поле, что проявляется ввиду анизотропного углового распределения квантов распада относительно спина позитрония в осцилляциях скорости счета при измерении времени его жизни.

Эти осцилляции были обнаружены в эксперименте белорусскими учеными [3] и учеными из Гонконга [4]. Вплоть до настоящего момента все эксперименты проводились в силикагеле, где время жизни ортопозитрония почти не отличается от времени его жизни в вакууме. В настоящее время ведется подготовка к эксперименту по обнаружению осцилляций в конденсированной среде, в которой время жизни ортопозитрония менее 10 нс, однако дифференциальная нелинейность оборудования и высокий фон, обусловленный  $2\gamma$ -аннигиляцией позитронов (позитрония), делают это затруднительным.

В представленной работе развита методика исключения дифференциальной нелинейности при обработке экспериментальных спектров.

Следует отметить, что основной вклад в дифференциальную нелинейность вносится электроникой амплитудного цифрового преобразователя (АЦП). В настоящее время существует аппаратура, обладающая низкой (<0,1 %) дифференциальной нелинейностью, но она дорогая.

Рассмотрим типичный спектр  $3\gamma$ -аннигиляции (рис. 1). Пик обусловлен аннигиляцией свободных позитронов и парапозитрония. Время жизни сво-

бодных позитронов и парапозитрония намного меньше временного разрешения аппаратуры. Поэтому пик имеет гауссову форму с шириной, равной временному разрешению аппаратуры. Центр пика находится в 38 канале (см. рис. 1), которому мы ставим в соответствие момент термализации позитронов в веществе и образования позитрония.

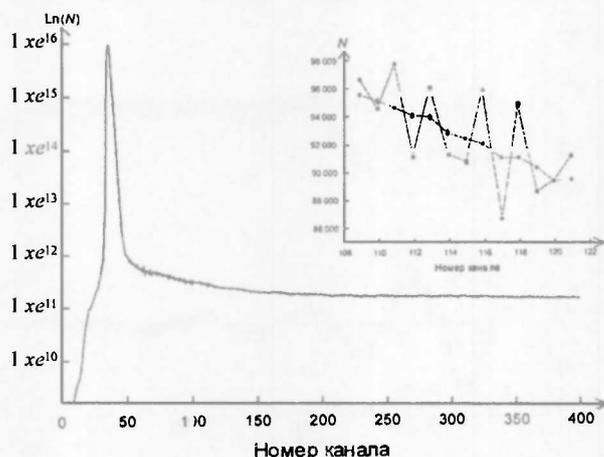


Рис. 1. Временной спектр, полученный при регистрации актов аннигиляции позитронов в веществе в магнитном поле (нижний график в логарифмическом масштабе). Сглаживание дифференциальной нелинейности методом скользящего среднего (верхний график). Один канал соответствует 2,2 нс.  $N$  – число отсчетов

На нижнем графике рис. 1, начиная с 48-го канала, четко видны изломы (см. также верхний график), амплитуда которых существенно превышает статистическую ошибку. Эти изломы являются следствием дифференциальной нелинейности времяизмерительного тракта, которая ведет к различной ширине каналов амплитудного анализатора. Обычно различие в ширине четных и нечетных каналов составляет 1–2%. “Хвост” этого спектра содержит также временные осцилляции,

однако их не видно из-за большой дифференциальной нелинейности.

Дифференциальная нелинейность почти не влияет на интегральные характеристики спектра, т. е. на время его жизни, но обычно уменьшает возможность наблюдения временных осцилляций, особенно в веществе с относительно коротким временем жизни. Это происходит вследствие того, что порядок величины амплитуды осцилляций ввиду вращения спина ортопозитрония может совпадать с разностью в скорости счета из-за дифференциальной нелинейности.

Для уменьшения влияния дифференциальной нелинейности, т. е. для улучшения наблюдения осцилляций, в настоящей работе было проведено сглаживание экспериментальных данных перед их обработкой по методу скользящего среднего, который заключается в следующем. Значения в каждой точке спектра пересчитываются (сглаживаются) по формуле (1), т. е. используется значение не только в одной точке, но и в соседних:

$$N'_i = 1/7 \sum_{i-3}^{i+3} N_i, \quad (1)$$

где  $N_i$  – число отсчетов в  $i$ -м канале анализатора, при этом статистическая ошибка должна быть пересчитана по формуле:

$$\sigma_i'^2 = 1/7 \sum_{i-3}^{i+3} \sigma_i^2. \quad (2)$$

Усредненный участок временного спектра изображен на верхнем графике на рис. 1.

В настоящей работе используются спектры, полученные экспериментально [5], содержащие осцилляции спина  $P_s$  в магнитном поле. Для каждо-

го спектра с фазой осцилляций 0 отнять соответствующий спектр с фазой осцилляций  $\pi$  с совпадающими параметрами. После применения метода скользящего среднего было произведено вычитание спектров с разной фазой осцилляции. При этом экспоненциальные части спектра сокращаются, и разностный спектр будет содержать только осцилляции (рис. 2).

Для исследования дифференциальной нелинейности вычтем усредненный спектр из спектра, содержащего дифференциальную нелинейность. Данная процедура проводилась для различных наборов экспериментальных данных, полученных при изменении величины магнитного поля. Построенные графики отражают зависимость дифференциальной нелинейности от номера канала. Но ее величина не зависит от напряженности магнитного поля. Была построена гистограмма (рис. 3), содержащая статистическое распределение дифференциальной нелинейности. На рис. 3, а приведено число каналов, в котором была зафиксирована дифференциальная нелинейность заданной величины.

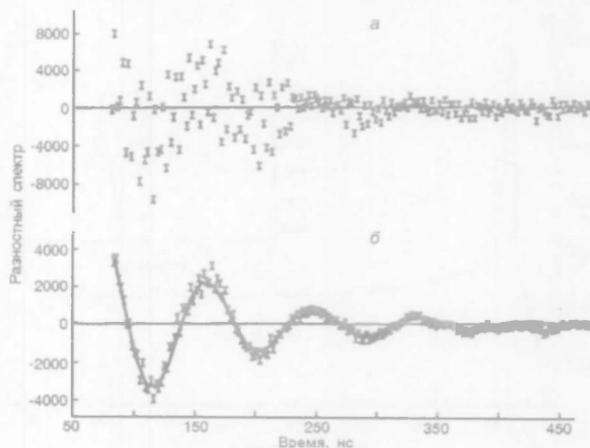


Рис. 2. Спектр, полученный после вычитания двух экспериментальных спектров, которые отличаются фазой осцилляции без (а) и с (б) предварительной обработкой методом скользящего среднего.

Сплошная линия (б) описывает теоретический спектр

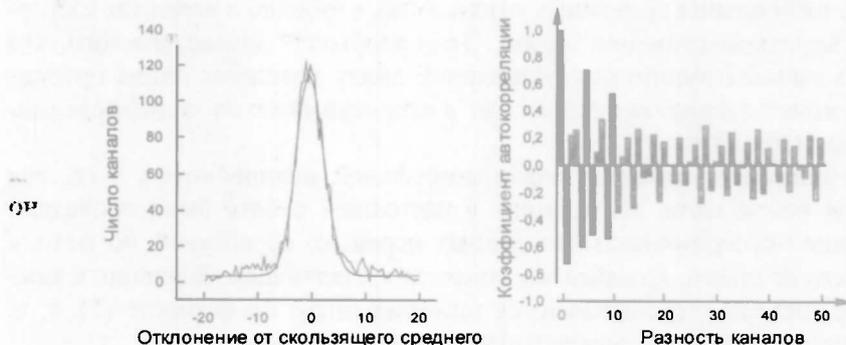


Рис. 3. Гистограмма статистического распределения отклонения полученных на эксперименте распределений от скользящего среднего и автокорреляционная функция

На рис. 3, б отражен коэффициент корреляции между дифференциальной нелинейностью в различных каналах. Коэффициент не стремится к нулю, как обычно при увеличении расстояния между каналами. Это свидетельствует о сильной связи между значениями дифференциальной нелинейности в различных, даже далеко отстоящих друг от друга, каналах. А также о том, что процедура усреднения позволила исключить только наиболее быстро меняющуюся часть дифференциальной нелинейности.

При наличии только статистической ошибки нормализованный на корень из числа отсчетов в канале график должен представлять собой распределение Гаусса с единичной полушириной на полувывоте  $\sigma=1$ . Нами получена кривая гауссовой формы (что свидетельствует о стохастической природе дифференциальной нелинейности), но со значением  $\sigma=2,3$  (см. рис. 3). Дифференциальная нелинейность пропорциональна разности между  $\sigma$ , полученной нами при фитировании, и единицей, которая должна оставаться в отсутствие дифференциальной нелинейности. Таким образом, систематическая ошибка, вызванная дифференциальной нелинейностью, превышает в 1,3 раза статистическую ошибку эксперимента.

\* \* \*

Предложенный метод позволяет исключить дифференциальную нелинейность непосредственно в процессе обработки данных. Отметим, что прямое измерение дифференциальной нелинейности в данном эксперименте невозможно, так как ее величина существенным образом зависит от загрузки времяизмерительного тракта и может меняться в ходе эксперимента.

Уменьшить дифференциальную нелинейность можно также суммированием данных в соседних каналах. Однако этот способ приводит к существенному увеличению шага дискретизации и тем самым к меньшей точности.

Автор выражает благодарность А.В. Берестову за предоставленные экспериментальные спектры, А.А. Хрущинскому за идею исключения дифференциальной нелинейности, О.Н. Метелице и В.В. Понарядову за обсуждения и поддержку работы.

1. Baryshevsky V.G. // Phys. Stat. Sol. 1984. (b) 124. 619.
2. Andrukhovich S.K., Baryshevsky V.G., Berestov A.V. et al. // Phys. Lett. 1989. A 136. 2835.
3. Fan S., Beling C.D., Fung S. // 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Positron Annihilation. Beijing, 1994.
4. Baryshevsky V.G., Metelitsa O.N., Tichomirov V.V. // J. Phys. B: At. Mol. Phys. 1989. 22. P. 2835.
5. Baranov V.V., Berestov A.V., Martinkevich B.A. et al. // Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk, seriya fiziceskaya. 1994. Vol. 58. № 4. P. 137.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

**Бирзал Екатерина Александровна** – аспирант кафедры физики твердого тела БГУ. Научные руководители – кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Понарядов, кандидат физико-математических наук О.Н. Метелица.

# Математика и информатика



УДК 532.135

М.Д. МАРТЫНЕНКО, С.М. БОСЯКОВ

## ПОВЕРХНОСТИ СЛАБЫХ И СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКИХ СРЕДАХ

The equations of surfaces of weak and strong discontinuities in ideal and viscous liquids are obtained.

Исследование разрывных классов движений сплошных сред имеет как теоретическое, так и практическое значение [1, 2]. Ниже предлагается анализ соответствующих задач на основе общей теории характеристик. Полная система уравнений движения для жидких сред (считаем, что движения происходят с малыми скоростями) [2, 3] имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, \quad p = f(\rho), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v = (v_1, v_2, v_3)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность среды,  $X_i$  – массовые силы. Для идеальной жидкости  $\sigma_{ii} = -p$  ( $p$  – давление), для вязкой жидкости

$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\lambda, \mu$  – объемная и сдвиговая вязкости.

Система (1) в случае идеальной жидкости имеет первый порядок, в случае вязкой жидкости – второй. Будем считать, что решение системы уравнений первого порядка имеет на поверхности  $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = \text{const}$  слабый разрыв, если при переходе через эту поверхность функции  $v_i, i = \overline{1,3}, \rho$  остаются непрерывными, а некоторые производные первого порядка претерпевают на этой поверхности разрыв первого рода. Если же имеем разрыв первого рода для первых производных в уравнениях второго порядка, то такой разрыв является сильным [4].

Пусть на поверхности  $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = \text{const}$  производные  $\frac{\partial v_m}{\partial x_n}, \frac{\partial v_m}{\partial t}$ ,

$\frac{\partial \rho}{\partial x_n}, \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $m, n = \overline{1,3}$  непрерывны с каждой из сторон поверхности вплоть

до ее точек. Этот факт совместно с непрерывностью составляющих вектора

скорости  $v$  и плотности  $\rho$  позволяет показать, что при переходе через поверхность  $\varphi$  остаются непрерывными выражения вида [4, 5]:

$$\begin{aligned} p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= M_{ki}, \quad k, i = \overline{1,3}, \\ p_k \frac{\partial \rho}{\partial t} - p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_k} &= M_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_{ki}, M_k$  – непрерывные функции,  $p_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ ,  $i, k = \overline{1,3}$ .

Кроме того, при распространении поверхности разрыва остаются справедливыми уравнения (1) в областях, ограниченных этой поверхностью, т. е. являются непрерывными выражения вида:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= M_{4i}, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= M_{44}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_{4i}, M_{44}$  также непрерывные функции.

Соотношения (2), (3) можно рассматривать как шестнадцать линейных алгебраических уравнений относительно производных  $\frac{\partial v_m}{\partial x_n}, \frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x_n}$ ,

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $m, n = \overline{1,3}$ . Если система уравнений (2), (3) разрешима, то первые частные производные выразятся через непрерывные функции и сами останутся непрерывными, поэтому поверхность разрыва  $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \text{const}$  определится из условия неразрешимости системы уравнений (2), (3) относительно упомянутых выше частных производных [4, 5]. Прежде чем записать условие неразрешимости этой системы, целесообразно сократить число уравнений. Прделаем это отдельно для идеальной и вязкой несжимаемой жидкости.

В первом случае из (3) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= M_{4i}, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= M_{44}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножим оба уравнения (4) на  $p_0$  и заменим получающиеся произведения  $p_0 \frac{\partial v_m}{\partial x_n}, p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_n}$ ,  $m, n = \overline{1,3}$  левыми частями следующих равенств:

$$p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - M_{ki} = p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad p_k \frac{\partial \rho}{\partial t} - M_k = p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_k}.$$

Будем иметь четыре уравнения относительно частных производных  $\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $m = \overline{1,3}$ :

$$-p_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \dots = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

$$p_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 p_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \dots = 0.$$
(5)

Тогда условие неразрешимости системы (5) принимает вид:

$$g^2 \left( p_0^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho^2 \right) = 0,$$

где  $g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ . Отсюда вытекают следующие уравнения распространения поверхностей разрыва:

$$g^2 = 0, \quad (6)$$

$$p_0^2 - g^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} = 0. \quad (7)$$

Из (7) можем определить скорость распространения поверхности слабого разрыва [4]:

$$V = -\frac{p_n}{g} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}.$$

Уравнение (6) соответствует случаю стационарного разрыва.

Для вязкой несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) динамические условия совместности (3) принимают вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \bar{M}_{4i}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = M_{44}.$$
(8)

Для того чтобы привести систему уравнений (2), (8) к более простому виду (с учетом того, что  $\rho = \text{const}$ ), уравнения (2) перепишем в виде:

$$p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - \bar{M}_{ki} = p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (9)$$

$$p_k \frac{\partial p}{\partial t} - M_k = p_0 \frac{\partial p}{\partial x_k}. \quad (10)$$

Продифференцируем выражение (9) по  $x_l$ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial p_k}{\partial x_l} + \dots = p_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_k}. \quad (11)$$

Теперь умножим обе части соотношений (8) на  $p_0$  и заменим произведения  $p_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n \partial x_m}$ ,  $p_0 \frac{\partial p}{\partial x_n}$ ,  $i, m, n = \overline{1,3}$  левыми частями равенств (10) и (11).

В результате получим систему уравнений относительно  $\frac{\partial v_m}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial t}$ ,  $m = \overline{1,3}$ :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \left( \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} - \rho p_0 \right) - p_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \dots = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{k=1}^3 p_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \dots = 0.$$
(12)

Как и ранее, уравнение распространения сильных разрывов получим из условия неразрешимости системы (12) относительно  $\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}, m = \overline{1,3}$ :

$$\det \|\omega_{ij}\| = 0,$$

где  $\omega_{ii} = \mu\Delta\varphi - \rho p_0$ ,  $\omega_{14} = \omega_{41} = p_k$ ,  $\omega_{ij} = 0, i \neq j = \overline{1,3}$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Раскрывая определитель, получим:

$$g^2 (\mu\Delta\varphi - \rho p_0) = 0. \quad (13)$$

Выражение (13) дает уравнение сильных разрывов

$$\mu\Delta\varphi - \rho p_0 = 0. \quad (14)$$

Кроме того, из (13) следует существование поверхности стационарного разрыва.

Отметим, что уравнение сильных разрывов может использоваться при получении уравнения поверхности ударной волны, расчета скоростей распространения различных типов волн путем соответствующих подстановок в уравнение (14). Так, используя представление плоских гармонических волн в виде  $u = u_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{kr}))$ , из (14) получаем известное дисперсионное уравнение для поперечных волн в вязкой жидкости:

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}} (1 + i).$$

Здесь  $k$  – волновое число,  $\omega$  – частота,  $i$  – мнимая единица. Комплекснозначность  $k(\omega)$  означает то, что действительная часть  $\text{Re} k(\omega) = \pm \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}$  характеризует фазовую скорость распространения сильных разрывов  $v = \frac{\omega}{\text{Re} k(\omega)}$  [6], а мнимая часть  $\text{Im} k(\omega) = \pm \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}$  представляет собой зависимость коэффициента затухания от частоты [6].

Также заметим, что уравнение (7) слабых разрывов и уравнение (14) сильных разрывов в точности совпадает с уравнениями характеристик системы (1) для идеальной и вязкой несжимаемой жидкости [4, 7].

1. Эриксен Д. Исследования по механике сплошных сред. М., 1977.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1989.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1970.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1981. Т. 4. Ч. 2.
5. Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.
6. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1990.
7. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. // Вестн НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. науки. 2000. № 2. С. 141.

Поступила в редакцию 25.09.2000.

*Мартыненко Михаил Дмитриевич* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики БГУ.

*Босяков Сергей Михайлович* – ассистент кафедры теоретической механики БрГУ.

### ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С $L^p$ -ДИХОТОМИЧНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

For the systems in the title sufficient conditions of the existence and uniqueness of bounded solutions are established.

Рассматриваем линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1)$$

где  $A(\cdot): R \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$  – непрерывная матрица.

*Определение 1.* Будем говорить [1], что система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$ ,  $0 < p < +\infty$ , и обозначать это включением  $A \in L^p D$ , если существуют пара взаимно дополнительных проекторов  $P_1$  и  $P_2$  и положительная постоянная  $C_p$  такие, что в случае  $0 < p < +\infty$  для фундаментальной матрицы  $X(t)$  системы (1),  $X(0) = E$ , выполнено условие

$$\int_{-\infty}^t \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p d\tau + \int_t^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p d\tau \leq C_p, \quad t \in R,$$

а при  $p = +\infty$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| &\leq C_\infty, \quad \tau \leq t, \\ \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| &\leq C_\infty, \quad \tau > t, \quad \tau, t \in R. \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение решений  $L^p$ -дихотомичной системы (1) описывают следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$  с числом  $p > 0$ . Тогда

1) любое нетривиальное решение системы (1) такое, что  $x(0) \in B_1 = P_1R^n$ , удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = +\infty; \quad (2)$$

2) любое нетривиальное решение  $x(t)$  системы (1) с  $x(0) \in B_2 = P_2R^n$  удовлетворяет предельным соотношениям

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = 0. \quad (3)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству известных лемм В. Коппеля [2], проведенных им на  $R_+$  с числом  $p = 1$ .

*Следствие 1.* Если  $A \in L^p D$  при  $p > 0$ , то

1) любое решение  $x(t)$  с  $x(0) \in R^n \setminus B_1$  удовлетворяет первому предельному соотношению в (3);

2) любое решение  $x(t)$  с  $x(0) \in R^n \setminus B_2$  удовлетворяет второму предельному соотношению в (2).

*Следствие 2.* Если линейная система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$  с числом  $p > 0$ , то она имеет единственное ограниченное на  $R$  решение  $x \equiv 0$ .

Рассмотрим также линейную неоднородную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (4)$$

где вектор-функция  $f(t)$  принадлежит пространству  $L_q(R)$ ,  $1 < q < \infty$  (для единообразия будем обозначать  $L_\infty(R) = C(R)$ ).

**Лемма 2.** Если линейная система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией,  $1 < p < \infty$ , то при любой вектор-функции  $f(t)$ , принадлежащей пространству  $L_q(R)$ ,  $q > \frac{p}{(p-1)}$ , линейная неоднородная система (4) имеет, и притом единственное, ограниченное на  $R$  решение. Это решение определяется по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $G(t, \tau)$  – функция Грина системы (1), определяемая по формуле

$$G(t, \tau) = \begin{cases} X(t)P_1X^{-1}(\tau), & t > \tau \\ -X(t)P_2X^{-1}(\tau), & t < \tau \end{cases}, \quad \tau, t \in R.$$

Доказательство леммы следует из свойства включения  $L^{p+\varepsilon}D \subset L^pD$ , установленного в [3, 4] для любых  $p, \varepsilon > 0$ , следствия 1 и теорем В. Коппеля [2,  $p = 1$ ] и Р. Конти [1,  $p > 1$ ].

Рассмотрим теперь нелинейную систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) + \mu\varphi(t, y), \quad (6)$$

где  $\varphi(t, y)$  – непрерывная вектор-функция, определенная в цилиндре  $D_r = \{(t, y) : t \in R, \|y\| < r\}$ ,  $r > 0$ ,  $\mu$  – скалярный параметр.

В случае, если  $A(t) = A$ , достаточные признаки существования и единственности ограниченного на  $R$  решения системы (6) получены Б.П. Демидовичем [5]. Этот результат усилен В. Коппелем [2] для системы (6) с  $L^1$ -дихотомичным линейным приближением (1), следовательно, и для системы (6) с экспоненциально дихотомичным приближением (1).

Цель настоящей работы – построить достаточные признаки существования и единственности ограниченного на  $R$  решения системы (6) с  $L^p$ -дихотомичным линейным приближением (1) при  $p > 1$ .

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t, y). \quad (7)$$

Справедлива

**Теорема 1.** Если

1) система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $K$  с числом  $1 < p < +\infty$ ;

2)  $\varphi(t, 0) \in L_q(R)$ ,  $q \geq \frac{p}{(p-1)}$ ;

3) вектор-функция  $\varphi(t, y)$  удовлетворяет в цилиндре  $D_r$  условию Липшица по второй переменной

$$\|\varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad L = L(r) > 0, \quad (8)$$

то существует такое положительное  $\bar{\mu}$ , что система (7) при  $|\mu| < \bar{\mu}$  имеет, и притом единственное, ограниченное на  $R$  решение, расположенное в цилиндре  $D_r$ .

Доказательство. При  $p=1$  этот результат установлен в [2].

Пусть  $A \in L^p D$  с числом  $p > 1$ . Из свойства включения [4]  $L^{p+\varepsilon} D \subset L^p D$ ,  $p, \varepsilon > 0$ , следует, что  $A \in L^{p_1} D$ , если  $1 \leq p_1 \leq p$ , и тогда для любого  $q$ ,  $\frac{p}{p-1} \leq q < \infty$ , существует такое  $\bar{p}$ ,  $1 \leq \bar{p} \leq p$ , что  $\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{p}} = 1$ , а система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$ .

Рассмотрим полное метрическое пространство  $C_r(R)$  непрерывных и ограниченных на  $R$  вектор-функций  $y(t)$ ,  $\|y(t)\| \leq r$ ,  $t \in R$ , с метрикой  $\rho(y_1(t), y_2(t)) = \sup_{t \in R} \|y_1(t) - y_2(t)\|$ .

В  $C_r(R)$  рассмотрим оператор  $T: y(t) \rightarrow Ty(t)$ , где

$$Ty(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) \varphi(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Покажем, что при  $|\mu| < \bar{\mu} = r \left( LC_1 r + C_{\bar{p}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|\varphi(t, 0)\|_{L_q} \right)^{-1}$  оператор  $T$  переводит  $\bar{C}_r(R)$  в  $C_r(R)$ . Действительно, в силу условия Липшица (8), определения  $L^p$ -дихотомии и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \|Ty(t)\| &\leq |\mu| \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq |\mu| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y(\tau)) - \varphi(\tau, 0)\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, 0)\| d\tau \right) \leq |\mu| L \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|y(\tau)\| d\tau + |\mu| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ &\quad \times \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(\tau, 0)\|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \leq |\mu| \left( LC_1 r + C_{\bar{p}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|\varphi(t, 0)\|_{L_q} \right) \leq r, \quad t \in R. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует корректность интеграла (9), ограниченность вектор-функции  $Ty(t)$ , а ее непрерывность – из свойств интеграла.

Покажем, что оператор  $T$  является сжимаемым при  $|\mu| < \min(\bar{\mu}, \frac{1}{LC_1}) = \bar{\mu}$ .

Действительно, для любых  $y_1$  и  $y_2$  из  $C_r(R)$  в силу неравенства (8) и включения  $A \in L^1 D$  имеем

$$\begin{aligned} \|Ty_1(t) - Ty_2(t)\| &\leq |\mu| \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y_1(\tau)) - \varphi(\tau, y_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq |\mu| L \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| d\tau \leq |\mu| LC_1 \rho(y_1, y_2) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\rho(Ty_1, Ty_2) \leq \lambda \rho(y_1, y_2), \quad \lambda = |\mu| LC_1 < 1.$$

Как и в [2], рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = Ty(t). \quad (10)$$

В силу сжимаемости оператора  $T$  уравнение (10) имеет единственное в  $C_r(R)$  решение, которое, очевидно, является и решением дифференциальной системы (7).

Наоборот, если  $y(t)$  – решение системы (7) такое, что  $\|y(t)\| \leq r$ ,  $t \in R$ , то  $x(t) = y(t) - Ty(t)$  есть ограниченное решение системы (1), и, следовательно, в силу следствия 1 имеем  $x \equiv 0$ . Данный факт завершает доказательство теоремы.

**Теорема 2.** Пусть

- 1) система (1) обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$  с числом  $p > 1$ ;
- 2) вектор-функция  $f(t)$  принадлежит пространству  $L_{q_1}(R)$  при  $q_1 \geq \frac{p}{(p-1)}$ ;
- 3) вектор-функция  $\varphi(t, y)$  определена и непрерывна в области  $G = \{(t, y) : t \in R, y \in R^n\}$  и удовлетворяет в  $G$  условию Липшица по  $y$  (8) с постоянной  $L > 0$ ;
- 4)  $\varphi(t, 0)$  принадлежит пространству  $L_{q_2}(R)$  при  $q_2 \geq \frac{p}{(p-1)}$ .

Тогда существует такое положительное число  $\bar{\mu}$ , что система (6) при  $|\mu| < \bar{\mu}$  имеет, и притом единственное, ограниченное на  $R$  решение.

**Доказательство.** При  $p=1$  этот результат следует из теоремы В. Копеля [2].

Пусть  $p > 1$ . Проводя соответствующие, как и в теореме 1, построения в пространстве  $C(R)$  непрерывных и ограниченных вектор-функций  $y(t)$  с нормой  $\|y(t)\|_C = \sup_{t \in R} \|y(t)\|$  для интегрального уравнения

$$y(t) = x(t) + Ty(t),$$

где  $x(t)$  – единственное ограниченное решение (5) системы (4), а оператор  $T$  определяется по формуле (9), устанавливаем, как и ранее, взаимно однозначное соответствие между ограниченными на  $R$  решениями систем (4) и (6), если  $|\mu| < \bar{\mu} \equiv \frac{1}{LC_1}$ , что и завершает доказательство теоремы.

1. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9. № 1. P. 23.
2. Coppel W.A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath. Math. Monographs. Boston, 1965.
3. Прохорова Р. А. // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2090.
4. Прохорова Р. А. // Там же. 1994. Т. 30. № 6. С. 1095.
5. Демидович Б. П. // Мат. сборник. 1956. 40(82). № 1. С. 73.

Поступила в редакцию 28.06.2000.

**Прохорова Римма Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений БГУ.

**Шевцов Игорь Леонидович** – магистрант.

## О СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ШАЗИ

Solution of the linear system of the six order is found. This system is necessary condition of nonlinear differential equation of third order belonging to  $P$ -type.

Известно ([1]), что необходимые и достаточные условия принадлежности к  $P$ -типу уравнения

$$w'' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a'_k)(w'' - a''_k) + A_k (w' - a'_k)^3 + B_k (w' - a'_k)^2 + C_k (w' - a'_k)}{w - a_k} + Dw'' + E w' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k} \quad (A)$$

представляют собой систему (S), состоящую из 31 уравнения, которые связывают 32 коэффициента уравнения (A):  $a_k, A_k, B_k, C_k, D, E, F_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ). Систему из первых девяти уравнений, связывающую функции  $a_k, A_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ), решил Н.А. Лукашевич. В работе [2] он показал, что функции  $A_k$  выражаются через функции  $a_k$  следующим образом

$$A_k = -\frac{1}{a_k} \quad (k = \overline{1,6}). \quad (1)$$

Следующая подсистема системы (S) связывает функции  $a_k, A_k, B_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ) и имеет вид ([2])

$$\begin{aligned} -\left(\frac{5}{2} A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_j = -A'_k + A_k \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \\ -3 \sum_j A_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} + \frac{3}{2} A_k \sum_{j=1}^6 a'_j A_j \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \end{aligned} \quad (2)$$

В данной работе предпринята попытка найти условия для коэффициентов  $a_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ), выполнение которых гарантирует существование решения системы (2). Неизвестными в системе (2) являются функции  $B_k$ , ( $k = \overline{1,6}$ ). При найденных коэффициентных условиях для  $a_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ) укажем вид решения системы (2). Полученный результат сформулируем в виде двух теорем.

Перепишем систему (2) в виде

$$\frac{1}{2a_k} \left[ \alpha_{kk} B_k + \sum_j (\alpha_{kj} B_j) \right] = \frac{\beta_k}{2a_k} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j), \quad (2')$$

где  $\alpha_{kk} = \sum_j \frac{a_k + a_j}{a_k - a_j}$ ,  $\alpha_{kj} = \frac{a_k + a_j}{a_k - a_j}$ ,  $\beta_k = \sum_j \frac{4a_j a'_k + (3a_k - 7a_j) a'_j}{a_j (a_k - a_j)} + \frac{2a'_k}{a_k}$ .

После преобразований  $\beta_k$  примут вид

$$\beta_k = 2 \frac{a'_k}{a_k} + 4 \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \sum_{i=1}^6 \frac{a'_i}{a_i}.$$

Так как  $a_k \neq 0$ , то умножим обе части системы (2') на  $2a_k$ . В результате получим равносильную систему вида

$$\alpha_{kk} B_k + \sum_j (\alpha_{kj} B_j) = \beta_k \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \quad (2'')$$

Система (2'') является линейной системой 6-го порядка относительно неизвестных  $B_j$  ( $j = \overline{1,6}$ ). Найдем значение главного определителя этой системы. Прежде всего заметим, что

$$\alpha_{kk} = -\sum_j \alpha_{kj} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j).$$

Поэтому если сложить все столбцы главного определителя, то получим нулевой столбец. Таким образом, на основании свойств определителей заключаем, что значение главного определителя системы (2') равно нулю.

Преобразуем коэффициенты  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,6}$ ):

$$\alpha_{kj} = \frac{a_k + a_i}{a_j - a_k} = 1 + 2 \frac{a_i}{a_j - a_k} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j); \quad (3)$$

$$\alpha_{kk} = -\sum_j \alpha_{kj} = -5 + 2 \sum_j \frac{a_k}{a_k - a_j} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \quad (4)$$

С учетом равенств (3) и (4) матрицу  $M = [a_{ij}]$  ( $i, j = \overline{1,6}$ ) запишем в виде суммы двух матриц  $M = M_1 + M_2$ , где

$$M_1 = 2 \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2 - a_1} & \frac{a_1}{a_3 - a_1} & \frac{a_1}{a_4 - a_1} & \frac{a_1}{a_5 - a_1} & \frac{a_1}{a_6 - a_1} \\ \frac{a_2}{a_1 - a_2} & \frac{a_2}{a_3 - a_2} & \frac{a_2}{a_4 - a_2} & \frac{a_2}{a_5 - a_2} & \frac{a_2}{a_6 - a_2} \\ \frac{a_3}{a_1 - a_3} & \frac{a_3}{a_2 - a_3} & \frac{a_3}{a_4 - a_3} & \frac{a_3}{a_5 - a_3} & \frac{a_3}{a_6 - a_3} \\ \frac{a_4}{a_1 - a_4} & \frac{a_4}{a_2 - a_4} & \frac{a_4}{a_3 - a_4} & \frac{a_4}{a_5 - a_4} & \frac{a_4}{a_6 - a_4} \\ \frac{a_5}{a_1 - a_5} & \frac{a_5}{a_2 - a_5} & \frac{a_5}{a_3 - a_5} & \frac{a_5}{a_4 - a_5} & \frac{a_5}{a_6 - a_5} \\ \frac{a_6}{a_1 - a_6} & \frac{a_6}{a_2 - a_6} & \frac{a_6}{a_3 - a_6} & \frac{a_6}{a_4 - a_6} & \frac{a_6}{a_5 - a_6} \end{pmatrix},$$

здесь  $\alpha_{kk} = a_k \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}$  ( $k, j = \overline{1,6}; k \neq j$ ),

$$M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2') сведем к решению двух систем линейных уравнений, которые в матричном виде запишутся следующим образом

$$M_1 \cdot B = \Psi, \quad (5)$$

$$M_2 \cdot B = \Phi, \quad (6)$$

где

$$B \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{pmatrix}, \quad \Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{pmatrix}, \quad \Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{pmatrix} \quad \text{и } \Psi_i + \Phi_i = \beta_i \quad (i = \overline{1,6}). \quad (7)$$

Начнем с решения системы (5). Для этого воспользуемся формулами Крамера.

Главный определитель системы (5) представим в виде

$$\Delta = 2^6 \sigma_6 \bar{\Delta} \quad \left( \sigma_6 = \prod_{i=1}^6 a_i \right),$$

где

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \overline{\alpha_{11}} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & a_5 - a_1 & a_6 - a_1 \\ 1 & \overline{\alpha_{22}} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 - a_2 & a_2 & a_3 - a_2 & a_4 - a_2 & a_5 - a_2 & a_6 - a_2 \\ 1 & 1 & \overline{\alpha_{33}} & 1 & 1 & 1 \\ a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & a_3 & a_4 - a_3 & a_5 - a_3 & a_6 - a_3 \\ 1 & 1 & 1 & \overline{\alpha_{44}} & 1 & 1 \\ a_1 - a_4 & a_2 - a_4 & a_3 - a_4 & a_4 & a_5 - a_4 & a_6 - a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \overline{\alpha_{55}} & 1 \\ a_1 - a_5 & a_2 - a_5 & a_3 - a_5 & a_4 - a_5 & a_5 & a_6 - a_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \overline{\alpha_{66}} \\ a_1 - a_6 & a_2 - a_6 & a_3 - a_6 & a_4 - a_6 & a_5 - a_6 & a_6 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Очевидно, что определитель (8) равен нулю. Действительно, если просуммировать все столбцы, то в результате получим нулевой столбец.

Воспользуемся теперь формулами Крамера. Для совместности системы (5) требуется, чтобы все определители  $\Delta_j (j = \overline{1,6})$ , полученные из главного определителя  $\Delta = |a_{ij}| (i, j = \overline{1,6})$  заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов  $\Psi$ , были равны нулю.

Используя свойства определителей, находим

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^6 A_{ij} \Psi_i \frac{\sigma_6}{a_i} \quad (j = \overline{1,6}), \quad (9)$$

$$\text{где } A_j = \frac{2^5 5!}{\prod_{r=1}^6 (a_r - a_j)} \quad (j = \overline{1,6}; r \neq j). \quad (10)$$

Так, например,

$$A_{12} = \frac{2^5 5!}{\prod_{i=1}^6 (a_i - a_2)} \quad (i \neq 2).$$

Согласно (9) и (10) заключаем, что все  $\Delta_j$  ( $j = \overline{1,6}$ ) равны между собой.

Таким образом, система условий  $\Delta_j = 0$  ( $j = \overline{1,6}$ ) свелась к условию

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\Psi_i}{a_i \prod_{r=1}^6 (a_r - a_i)} \quad (r, i = \overline{1,6}; r \neq i),$$

или в обозначениях Н.А. Лукашевича ([2]) имеем

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\Psi_i}{a_i \phi(a_i)} = 0 \quad (i = \overline{1,6}). \quad (11)$$

Кроме тривиальных, можно указать значения  $\Psi_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ), при которых будет иметь место условие (11).

Это:

$$\Psi_i = a_i^k \quad (i = \overline{1,6}, k=1, 2, 3, 4, 5). \quad (12)$$

Приведем еще один набор функций  $\Psi_i$ , удовлетворяющих (11):

$$\Psi_i = \lambda_i a_i \phi(a_i) \quad (i = \overline{1,6}), \text{ причем } \sum_{i=1}^6 \lambda_i = 0. \quad (13)$$

Решение системы (6) легко найти, воспользовавшись, например, методом Гаусса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = 0, \\ B_2 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_2), \\ B_3 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_3), \\ B_4 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_4), \\ B_5 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_5), \\ B_6 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_6). \end{array} \right. \quad (14)$$

Заметим, что в силу симметрии систем (5) и (6) их решения также имеют симметричный вид, т. е.  $i$ -я компонента решения будет либо функцией только от "своей" компоненты  $a_i$  (случай (12)), либо от всех  $a_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ) (случай (13)).

Учитывая соотношения (7), в случае (12) решения рассматриваемой системы  $(S)_4$  имеют вид

$$B_r = B_1 + \frac{1}{6} \left( a_1^k - a_r^k + 2 \left( \frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r} \right) + 4 \left( \sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j} \right) \right) \quad (r = \overline{2,6}), \quad (15)$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{i=1}^6 a_i^k = 8 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=2}^6 \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16 \sum_{j=1}^6 \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \quad (16)$$

Аналогично, если имеет место случай (13), то решения системы (S)<sub>4</sub> следующие:

$$B_r = B_1 + \frac{1}{6} \left( \phi(a_1) - \phi(a_r) + 2 \left( \frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r} \right) + 4 \left( \sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j} \right) \right) \quad (r = \overline{2,6}), \quad (17)$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{j=1}^6 \phi(a_j) = 8 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16 \sum_{j=1}^6 \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \quad (18)$$

Из вышесказанного следуют две теоремы.

**Теорема 1.** Если имеет место условие (16), то решение системы Шази (2') имеет вид (15).

**Теорема 2.** Если имеет место условие (18), то решение системы Шази (2') имеет вид (17).

1. Chasy J. // Acta math. 1911. Vol. 34. P. 317.

2. Лукашевич Н. А. // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 353.

Поступила в редакцию 01.02.1999.

**Чичурин Александр Вячеславович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений (БрГУ им. А.С. Пушкина).

УДК 519.62

В.И. РЕПНИКОВ

## О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

The main properties of some functionals connected with special type linear differential systems are discussed.

При конструировании численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно важным является вопрос об уровне адекватности в поведении решений исходной дифференциальной задачи и аппроксимирующей ее разностной схемы. Поэтому для повышения качества разностных схем, ориентированных на решение определенного класса задач, представляется обязательным этап аналитического изучения характеристик, связанных с решениями задач данного класса.

В предлагаемой работе объектом исследования будет задача Коши

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad (1)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (2)$$

с симметричной положительно определенной матрицей  $A$ .

Пусть  $\{\lambda_i, \xi^i\}$  – множество собственных значений и ортонормированных собственных векторов матрицы  $A$ :

$$A\xi^i = \lambda_i \xi^i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так что

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n, \quad (\xi^i, \xi^j) = \delta_i^j,$$

где  $\delta_i^j$  – символ Кронекера.

В этих обозначениях общее решение системы (1) имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^n c_i \xi^i \exp(-\lambda_i t), \quad (3)$$

где постоянные  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) определяются из начальных условий (2).

Введем в рассмотрение величины

$$\delta_k(u(t)) = \|u(t)\|_k^2 = (A^k u(t), u(t)), \quad k \in Z,$$

которые представляют собой квадрат энергетической нормы вектора  $u(t)$  в гильбертовом пространстве  $H_A$ .

В развитие [1] рассмотрим функционал вида

$$J_l^k(u(t)) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_k(u(t)) & \delta_{k+1}(u(t)) & \dots & \delta_{k+l}(u(t)) \\ \delta_{k+1}(u(t)) & \delta_{k+2}(u(t)) & \dots & \delta_{k+l+1}(u(t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l-1}(u(t)) & \delta_{k+l}(u(t)) & \dots & \delta_{k+2l-1}(u(t)) \\ \delta_{k+l+1}(u(t)) & \delta_{k+l+2}(u(t)) & \dots & \delta_{k+2l+1}(u(t)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_k(u(t)) & \delta_{k+1}(u(t)) & \dots & \delta_{k+l}(u(t)) \\ \delta_{k+1}(u(t)) & \delta_{k+2}(u(t)) & \dots & \delta_{k+l+1}(u(t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l-1}(u(t)) & \delta_{k+l}(u(t)) & \dots & \delta_{k+2l-1}(u(t)) \\ \delta_{k+l}(u(t)) & \delta_{k+l+1}(u(t)) & \dots & \delta_{k+2l}(u(t)) \end{vmatrix}}, \quad k \in Z, \quad 0 \leq l \leq n-1, \quad (4)$$

и исследуем его поведение на решениях системы (1).

Имеет место

**Лемма 1.** На решениях системы (1) справедливо соотношение (для сокращения записи аргумент  $t$  будем опускать)

$$\frac{d}{dt} J_l^k(u) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l-1}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \dots & \delta_{k+l}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l-1}(u) & \dots & \delta_{k+2l-2}(u) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l+1}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+2}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l+1}(u) & \dots & \delta_{k+2l+2}(u) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+1}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u) \end{vmatrix}^2}. \quad (5)$$

Доказательство. Перепишем (4) в виде  $J_i^k(u) = \frac{\Delta_i}{\Delta_3}$  с естественным смыслом обозначений. Тогда

$$\frac{d}{dt} J_i^k(u) = \frac{\frac{d}{dt} \Delta_i \cdot \Delta_3 - \Delta_i \cdot \frac{d}{dt} \Delta_3}{\Delta_3^2}. \quad (6)$$

Поскольку для решений системы (1) выполняется соотношение

$$\dot{\delta}_k(u) = \frac{d}{dt} (A^k u, u) = (A^k \dot{u}, u) + (A^k u, \dot{u}) = -2(A^{k+1} u, u) = -2\delta_{k+1}(u),$$

то, используя правило дифференцирования определителя, получим:

$$\frac{d}{dt} \Delta_3 = \sum_{i=0}^l \begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+i}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+i-1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i-1}(u) \\ \dot{\delta}_{k+i}(u) & \dots & \dot{\delta}_{k+l+i}(u) \\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u) \end{vmatrix} = -2 \sum_{i=0}^l \begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+i}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+i-1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i-1}(u) \\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u) \\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u) \end{vmatrix} = -2\Delta_{\dot{q}}. \quad (7)$$

Аналогично, применяя формулу Фробениуса [2, с. 34], найдем:

$$\frac{d}{dt} \Delta_{\dot{q}} = -2 \begin{vmatrix} \delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l-1}(u) & \delta_{k+l+1}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+l-1}(u) & \dots & \delta_{k+2l-2}(u) & \delta_{k+2l}(u) \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u) & \delta_{k+2l+2}(u) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (6) и используя детерминантное тождество Сильвестра [2, с. 32], получим требуемое.

Заметим, что определители, входящие в (4), (5), являются определителями Грама для соответствующим образом подобранных систем векторов. Поэтому непосредственным следствием доказанной леммы является

**Теорема 1.** Пусть в представлении (3) отличны от нуля  $p > l+1$  коэффициентов  $c_i$ . Тогда

1) если  $p = l+1$ , то функционал (4) постоянен при любых  $k \in Z$  и  $t$  на решениях системы (1);

2) если  $p > l+1$ , то при любых  $k \in Z$  функционал (4) монотонно убывает по  $t$  на решениях системы (1).

Используя детерминантное тождество Сильвестра, несложно показать также, что при любом  $k \in Z$  и  $p > l+1$  для функционала (4) выполняется соотношение  $J_i^k(u) < J_i^{k+1}(u)$ , из которого в свою очередь следует более общее неравенство

$$J_i^i(u) < J_i^j(u), \quad i, j \in Z, \quad i < j. \quad (9)$$

Покажем теперь, что на решениях системы (1) функционал (4) ограничен. При этом будем предполагать, что все собственные значения матрицы  $A$  различны.

Так как  $\tilde{O}_i(t) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^k \exp(-2\lambda_i t)$ , то, воспользовавшись свойством  $n$ -линейности определителя [2, с. 11], получим:

$$\Delta_n = \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \prod_{j=0}^l \left( c_{i_j}^2 \lambda_{i_j}^k \exp(-2\lambda_{i_j} t) \right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{i_0} & \dots & \lambda_{i_0}^l \\ \lambda_{i_0} & \lambda_{i_0}^2 & \dots & \lambda_{i_0}^{l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_0}^{l-1} & \lambda_{i_0}^l & \dots & \lambda_{i_0}^{2l-1} \\ \lambda_{i_0}^{l+1} & \lambda_{i_0}^{l+1} & \dots & \lambda_{i_0}^{2l+1} \end{vmatrix}.$$

Пусть  $C_n^{l+1}(1, 2, \dots, n)$  – множество всех упорядоченных сочетаний из первых  $n$  чисел натурального ряда по  $l+1$ . Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$\Delta_n = \sum_{\pi_{l+1} \in C_n^{l+1}(1, 2, \dots, n)} S(\pi_{l+1}), \quad (10)$$

где

$$S(\pi_{l+1}) = \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_l) \in \pi_{l+1}} \prod_{j=0}^l \left( c_{i_j}^2 \lambda_{i_j}^k \exp(-2\lambda_{i_j} t) \right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{i_0} & \dots & \lambda_{i_0}^l \\ \lambda_{i_0} & \lambda_{i_0}^2 & \dots & \lambda_{i_0}^{l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_0}^{l-1} & \lambda_{i_0}^l & \dots & \lambda_{i_0}^{2l-1} \\ \lambda_{i_0}^{l+1} & \lambda_{i_0}^{l+1} & \dots & \lambda_{i_0}^{2l+1} \end{vmatrix},$$

а суммирование в последней формуле распространяется на все перестановки данного сочетания  $\pi_{l+1} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ .

Поскольку произведение, стоящее под знаком суммы, для данной перестановки является величиной постоянной, то

$$S(\pi_{l+1}) = \prod_{j=0}^l \left( c_{\alpha_j}^2 \lambda_{\alpha_j}^k \exp(-2\lambda_{\alpha_j} t) \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1} \\ \lambda_{\alpha_0}^l & \lambda_{\alpha_1}^l & \dots & \lambda_{\alpha_l}^l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1} \\ \lambda_{\alpha_0}^{l+1} & \lambda_{\alpha_1}^{l+1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l+1} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Выполнив аналогичные преобразования над знаменателем, найдем

$$\Delta_n = \sum_{\pi_{l+1} \in C_n^{l+1}(1, 2, \dots, n)} S_1(\pi_{l+1}), \quad (12)$$

где

$$S_1(\pi_{l+1}) = \prod_{j=0}^l \left( c_{\alpha_j}^2 \lambda_{\alpha_j}^k \exp(-2\lambda_{\alpha_j} t) \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1} \\ \lambda_{\alpha_0}^l & \lambda_{\alpha_1}^l & \dots & \lambda_{\alpha_l}^l \end{vmatrix}^2. \quad (13)$$

Пусть  $m \geq 1$  – произвольное натуральное число и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  – произвольный набор различных вещественных чисел,  $\sigma_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) – элементарные симметрические функции. Введем обозначение

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{j-1} & \beta_2^{j-1} & \dots & \beta_m^{j-1} \\ \beta_1^{j+1} & \beta_2^{j+1} & \dots & \beta_m^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^m & \beta_2^m & \dots & \beta_m^m \end{vmatrix}, \quad 0 < j < m.$$

Тогда справедлива

**Лемма 2.**  $\Delta_j = \sigma_{m-j} \Delta_m$ .

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_m^n & \lambda^n \end{vmatrix}.$$

Очевидно,  $\Delta(\lambda)$  – многочлен степени  $m$ , корнями которого будут числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ . Разлагая  $\Delta(\lambda)$  по элементам последнего столбца, можем записать:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_n \left( \lambda^m - \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \frac{\Delta_0}{\Delta_m} \right).$$

Отсюда с учетом теоремы Виета следует утверждение леммы.

На основании леммы 2 из формул (11), (13) имеем:

$$\frac{S(\pi_{l+1})}{S_1(\pi_{l+1})} = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \dots + \lambda_{\alpha_l}. \quad (14)$$

Следовательно, для любого сочетания  $\pi_{l+1} \in C_n^{l+1}(1, 2, \dots, n)$  справедлива оценка

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{l+1} \leq \frac{S(\pi_{l+1})}{S_1(\pi_{l+1})} \leq \lambda_{n-l} + \lambda_{n-l+1} + \dots + \lambda_n,$$

а так как  $S(\pi_{l+1}) > 0$  и  $S_1(\pi_{l+1}) > 0$  для любого  $\pi_{l+1}$ , то точно такая же оценка будет иметь место и для функционала  $J_l^k(u)$ , что и означает его ограниченность.

Кроме того, из (10)–(13) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_l^k(u(t)) = \frac{S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l)}{S_1(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l)} = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \dots + \lambda_{\alpha_l}, \quad (15)$$

где  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l$  – наименьшие значения индексов коэффициентов разложения (3), отличных от нуля.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Пусть все собственные значения матрицы  $A$  различны и в разложении (3) отличны от нуля  $p > l + 1$  коэффициентов  $c_i$ . Тогда

1) для функционала (4) выполняется неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{l+1} \leq J_l^k(u) < \lambda_{n-l} + \lambda_{n-l+1} + \dots + \lambda_n; \quad (16)$$

2) при  $p = l + 1$  функционал (4) постоянен для любого  $t$  и

$$J_l^k(u) = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \dots + \lambda_{\alpha_l}, \quad (17)$$

где  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l$  – индексы коэффициентов (3), отличных от нуля;

3) при  $p > l + 1$  функционал (4) монотонно убывает по  $t$  и для него справедливо соотношение (15).

В заключение заметим, что если среди собственных чисел матрицы  $A$  имеются одинаковые, то все полученные результаты остаются верными с некоторыми изменениями в формулировках, касающимися нумерации спектра.

1. Бобков В.В., Мандрик П.А., Репников В.И. Деп. в БелНИИТИ 12.03.84. № 864Бе – Д84.

2. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск, 1986.

Поступила в редакцию 03.10.2000.

*Репников Василий Иванович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики БГУ.

УДК 612.821:007

В.И. ЕМЕЛЬЯНЕНКОВ, Л.Н. БАТУРИНА

## ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

The methodological approaches to the decision of a task of a rating of results of scientific researches and development of innovative processes, and also revealing of priority directions of scientific activity are investigated. For structuation of the decision of a task the dynamic model of growth in conditions of the transitive period of economy is used.

Крайне актуальной является задача форсирования темпов развития экономики на основе широкомасштабного использования достижений научно-технического прогресса в производстве. В частности, многие авторы предлагают опереться на модель Солоу в ее современных модификациях, которые обосновывают возможность интенсификации процесса инновационного накопления капитала в результате сокращения уровня текущего потребления.

Существование оптимально быстрой траектории еще не означает автоматически ее практическую осуществимость, поскольку выводы оптимизационных моделей должны проверяться оценками ресурсных возможностей, которые далеко не всегда могут вводиться в них непосредственно в виде ограничений. Поэтому в предлагаемой работе исследуется регламент оценки режимов допустимого накопления капитала, дополняющий задачу анализа и прогнозирования параметров переходной экономики моделями расширяющейся экономики.

В неоклассическом варианте, например в работе [1], изучены условия равновесного роста при следующих предположениях:

$$y_t/N_t = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} / N_t = (K_t/N_t)^\alpha, \quad (1)$$

где  $y_t$  – общественный доход;  $N_t$  – численность работающих;  $K_t$  – объем капитала;  $\alpha$  – коэффициент производственной функции. При этом

$$y_t = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad (\alpha < 1). \quad (2)$$

Обозначив  $y_t/N_t = q_t$ ,  $K_t/N_t = \varphi_t$ , а также выразив приращения капитала  $I_t = dK/dt = S_y y_t$  путем накопления  $S_y$ , при заданном коэффициенте темпов прироста населения  $n$  в конечном итоге можно получить уравнение следующего вида

$$d\varphi_t/dt = S_y q_t - n\varphi_t. \quad (3)$$

Устойчивый рост в соответствии с данной моделью обеспечивается при условии  $S_y q_t - n\varphi_t = 0$ , что отображается диаграммой (рис. 1) в точке  $A_0$  на кривых  $S_y q$  и  $(1-S_y)q$ . Здесь же показано, что в случае воздействия на темп равновесного роста посредством увеличения нормы сбережений с  $S_y$  на  $S'_y$  путем перераспределения доли общественного дохода в пользу приращения капитала можно реализовать переход системы из состояния  $A_0$  в  $A'_0$ , получив при этом эффект возрастания производительности труда ( $\varphi_0 \rightarrow \varphi'_0$ ), и в конечном итоге добиться повышения общественного дохода ( $q_0 \rightarrow q'_0$ ) в новом состоянии  $A'_0$ .

В плане поставленных вопросов интерес вызывают форсированные трансформации экономики, обоснование которых можно найти, например, в работах [2, 3]. В частности, для экономики  $B$  это может происходить в соответствии с [2] (как представлено на рис. 1) по графикам потребления  $(1-S_y)q$ ,  $(1-S'_y)q$  и  $(1-S''_y)q$ . Здесь вместо уровня инвестиций  $S_y q$  используется значение уровня потребления  $c$ . Для сопоставления в качестве ориентира выбрана система  $A$ , на рубежи которой по истечении планового времени выходит догоняющая система  $B$ . При сложившихся для системы  $B$  показателях  $c_0^B$  и  $\varphi_0^B$  в зафиксированный период времени  $T$  она находится в состоянии равновесия  $B_0$ . По состоянию на этот же период  $T$  система  $A$  в состоянии  $A_0$  имеет показатели соответственно  $c_0^A$  и  $\varphi_0^A$ . За планируемое время  $\Delta T$  система  $A$  перейдет в состояние  $A'_0$ , которое отличается более высокими показателями производительности и потребления. Чтобы реализовать стратегию выравнивания системе  $B$  следует выбрать оптимальный маршрут из множества допустимых траекторий. Среди этого множества может быть траектория типа  $B_0 \rightarrow B'_0 \rightarrow B''_0 \rightarrow A'_0$ , которая является более быстрой по сравнению с траекторией  $A_0 \rightarrow A'_0$  системы  $A$ .

Однако здесь важно понять, что ценой движения по участкам маршрута  $B_0 B'_0$ ,  $B_0 B''_0$  и  $B_0 A'_0$  является не только снижение уровня потребления в случае повышенных темпов прироста капитала. Ставится вопрос о его структурной перестройке путем полного замещения старых производственных технологий, которые выводятся из обращения. Поэтому и является актуальной проблема ресурсов реального обеспечения параметров форсированного перехода.

В качестве исследуемых факторов для системы  $B$  выделим компоненты общей величины инвестиций для образования капитала за переходный период  $\Delta T$  в виде объемов поставок со стороны внешнего окружения  $A$  и размеров самостоятельного технологического оснащения путем освоения научно-технических достижений.

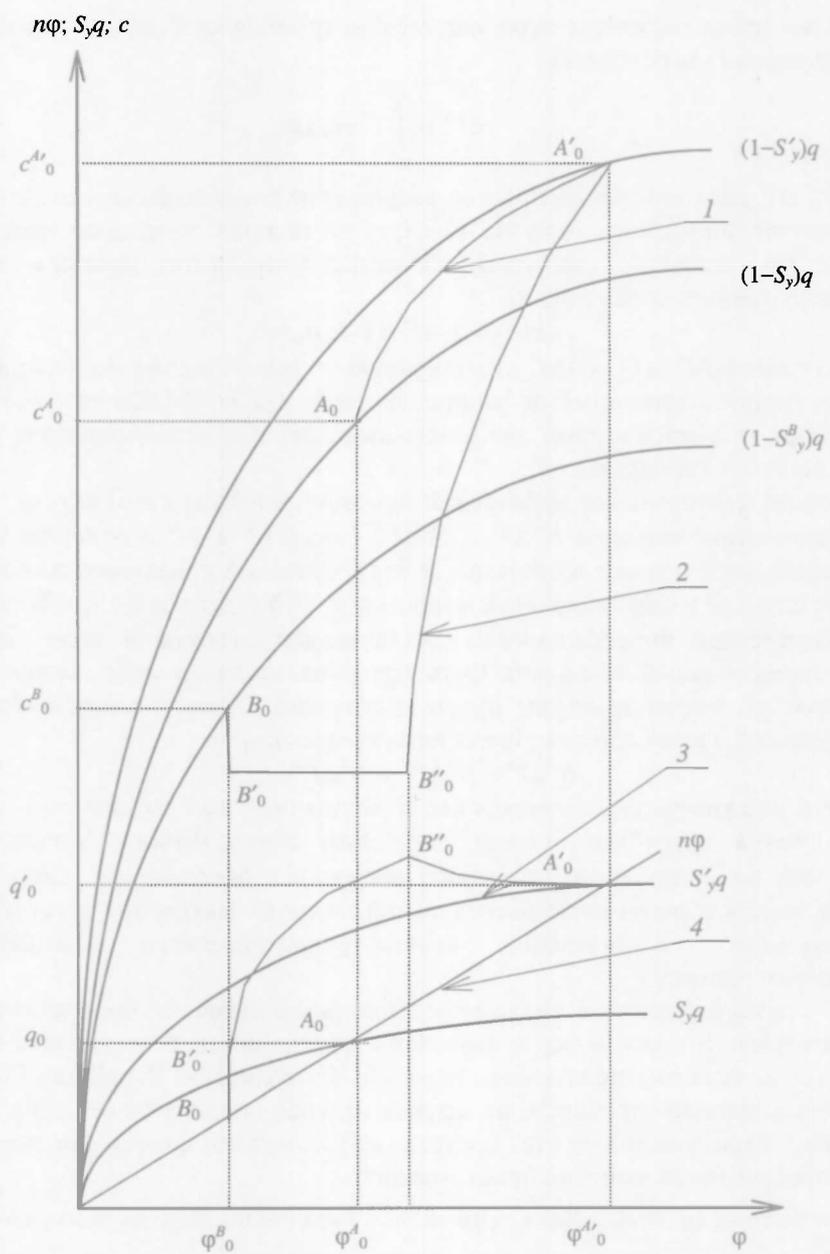


Рис. 1. Диаграмма перехода системы в новое состояние при изменении инвестиций:  
 $1 - c^A(\varphi), 2 - c^B(\varphi), 3 - I^B(\varphi), 4 - I^A(\varphi)$

Параметры инвестиций для оценки необходимого прироста капитала в системе  $B$  могут быть определены по заданным функциям дохода  $a^B(\varphi)$  и потребления  $c^B(\varphi)$ . В процессе перемещения по траектории  $B_0 B'_0 B''_0 A'_0$  система  $B$  образует кривую инвестиций  $I^B(\varphi)$  на участке  $(\varphi_0^B, \varphi_0^{A'})$  оси  $\varphi$ . Общая потребность в приросте инвестиций на одного работающего может быть рассчитана по формуле

$$\Delta I^B = \int_{\varphi_0^B}^{\varphi_0^{A'}} I^B(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_0^B}^{\varphi_0^{A'}} (q(\varphi) - c^B(\varphi)) d\varphi. \quad (4)$$

В то же время система  $A$  перемещается по траектории  $I^A(\varphi)$  и имеет следующий прирост инвестиций

$$\Delta I^A = \int_{\varphi_0^*}^{\varphi_0^*} I^A(\varphi) d\varphi. \quad (5)$$

Часть его расходуется на простое расширение производства, поскольку технологический уровень системы  $A$  не требует полного замещения капитала. Поэтому в качестве приближенной оценки допустимого уровня поставок можно принять соотношение

$$\Delta I^{AB} = k_1 k_2 \Delta I^A + (1 - k_1) k_3 \Delta I^A, \quad (6)$$

где величины  $k_1 \Delta I^A$  и  $(1 - k_1) \Delta I^A$  характеризуют соответственно инновационный и воспроизводственный потенциал системы  $A$ , а коэффициенты  $k_2$  и  $k_3$  определяют те доли, которые она может выделить в качестве поставок новой технологии для системы  $B$ .

Внешний фактор может эффективно проявиться только в том случае, когда сопоставимы значения  $N^B \Delta I^B$  и  $N^A \Delta I^{AB}$  (здесь  $N^B$  и  $N^A$  соответственно численность работающих в системах  $B$  и  $A$ ). Однако в подавляющем большинстве случаев в связи с крайней малостью коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  доля  $N^B \Delta I^B$  внутренней инвестиционной составляющей системы  $B$  может оказаться определяющей и должна быть материализована в ряде сегментов общественной инфраструктуры путем достаточно сложной самостоятельной эволюции. Таким образом, имеет место равенство

$$N^B \Delta I^B = N^B \Delta I^{AB} + N^A \Delta I^{AB}, \quad (7)$$

которое и должно рассматриваться как ограничение в том смысле, что снижение уровня потребления сверх величины, обусловленной значением  $N^B \Delta I^B$ , уже не будет иметь должного ресурсного обеспечения. Поэтому важным шагом в регламенте исследований является факторное раскрытие рассмотренных составляющих научно-технологического оснащения переходного процесса.

Это – принципиальный подход к оценке результатов научно-технической деятельности в целом через параметры инновационной активности как комплексной системы показателей научной деятельности. В работах [4–6] эта система прошла апробацию на задачах целевой поддержки ведущих направлений исследований за счет средств госбюджетного финансирования в форме программных имитационных моделей.

1. Гребенников П.И., Леусский А.И., Тарасевич Л.С. Макроэкономика. СПб., 1997.

2. Дмитрук Н.М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 1.

3. Занг В.Б. Синергическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. М., 1999.

4. Батурина Л.Н., Емельяненко В.И., Горячкин В.В. Комплексная отработка методов проведения анализа НТД вузов Минобразования РБ. Деп. отчет о НИР. № ГР 19963483. 1997.

5. Батурина Л.Н., Емельяненко В.И., Горячкин В.В. // Каталог фонда программных средств. Мн., 1998. № Рег Н-050. С. 12.

6. Они же // Каталог фонда программных средств. Мн., 1999. № Рег 0063. С. 13.

Поступила в редакцию 08.09.2000.

**Емельяненко Вадим Иванович** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств БГУ.

**Батурина Людмила Никифоровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств БГУ.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК В ЗАДАНИИ ПАРАМЕТРОВ

This paper is devoted to evaluation of robustness of forecasting by autoregressive model in the case of misspecification of model parameters. Dependence of mean square risk on specification error is evaluated.

Прогнозирование временных рядов с использованием модели авторегрессии широко применяется в экономических, технических, медицинских и других приложениях. Классический вариант данной модели исследован достаточно полно [1]. На практике редко выполняются классические модельные предположения – модель искажается из-за наличия выбросов, пропусков, аддитивных искажений, неточного определения параметров модели [2]. В данной работе исследуется влияние последнего фактора на устойчивость традиционных авторегрессионных прогнозов.

### 1. Математическая модель и постановка задачи

Пусть наблюдается временной ряд  $\{x_t\}, t=1, \dots, T$ , описываемый моделью авторегрессии  $AR(p)$ :

$$x_t = \mathbf{X}'_{t-1} \boldsymbol{\theta}^0 + \xi_t, \quad t=1, \dots, T, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\theta}^0 \in \mathbb{R}^p$  – неизвестное истинное значение вектора коэффициентов авторегрессии,  $p$  – порядок авторегрессии,  $\mathbf{X}_{t-1} = (x_{t-1}, \dots, x_{t-p})' \in \mathbb{R}^p$ , «'» – знак транспонирования,  $\{\xi_t\} \sim N(0, \sigma^2)$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, начальные значения  $\mathbf{X}_0 = (x_0, \dots, x_{1-p})' \in \mathbb{R}^p$  заданы.

На практике гипотетическая модель (1) обычно неизвестна, поэтому для прогнозирования этого ряда на глубину  $\tau \geq 1$  используют рекуррентную процедуру [1]:

$$\hat{x}_{T+j} = \hat{\mathbf{X}}'_{T+j-1} \boldsymbol{\theta}, \quad j = \overline{1, \tau}, \quad (2)$$

где  $\hat{x}_{T+j}$  – прогноз в момент времени  $T+j$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$  – используемый при прогнозировании вектор коэффициентов,  $\hat{\mathbf{X}}_{t-1} = (\hat{x}_{t-1}, \dots, \hat{x}_{t-p})' \in \mathbb{R}^p$ ,  $\hat{x}_t = x_t$  для  $t \leq T$ . При несовпадении векторов  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\boldsymbol{\theta}^0$  имеем параметрические искажения. В связи с этим важно исследовать устойчивость прогнозов (2) в зависимости от величины параметрического искажения [2, 3]. Для характеристики устойчивости определим матрицу рисков прогнозирования  $R(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\theta}; \tau) = E\{(\hat{\mathbf{X}}_{T,\tau} - \bar{\mathbf{X}}_{T,\tau})(\hat{\mathbf{X}}_{T,\tau} - \bar{\mathbf{X}}_{T,\tau})'\}$  и ее (1,1)-элемент  $r(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\theta}; \tau) = R_{11}(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\theta}; \tau) = E\{(\hat{x}_{T,\tau} - x_{T,\tau})^2\}$ . Отметим, что величину  $r(\cdot)$  в литературе часто называют среднеквадратическим риском прогнозирования.

### 2. Влияние параметрического отклонения

Определим  $p$ -вектор  $\mathbf{U}_t = (\xi_t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$  и  $(p \times p)$ -матрицы:

$$B_0 = \begin{pmatrix} \theta_1^0 & \dots & \theta_p^0 & \theta^0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_p & \theta \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Пусть наблюдается временной ряд, удовлетворяющий авторегрессионной модели (1), и для прогнозирования его значений применяется процедура (2). Тогда матрица рисков прогнозирования имеет вид

$$R(\theta^0, \theta; \tau) = F_\tau + (B^\tau - B_0^\tau) C_T (B^\tau - B_0^\tau)', \quad (3)$$

где  $D = \text{diag}(\sigma^2, 0, \dots, 0)$ ,  $F_k = \sigma^2 \sum_{l=0}^{k-1} B_0^l D (B_0^l)'$ ,  $C_k = F_k + B_0^k \mathbf{X}_0 (B_0^k \mathbf{X}_0)'$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы основано на соотношениях  $\mathbf{X}_t = \sum_{i=0}^{t-1} B_0^i \mathbf{U}_{t-i} + B_0^t \mathbf{X}_0$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{T+\tau} = B^\tau \mathbf{X}_T$  и определении риска. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Минимальный по  $\theta$  риск достигается при  $\theta = \theta^0$ :

$$r_{\min}(\theta^0; \tau) = r(\theta^0, \theta^0; \tau).$$

**Доказательство.** Матрицы  $D$ ,  $S_k$ ,  $C_k$  неотрицательно определены, значит,  $((B^\tau - B_0^\tau) C_T (B^\tau - B_0^\tau)')_{11} \geq 0$ . Тогда из теоремы 1 следует доказываемое.

Определим  $(p \times p)$ -матрицу  $\beta(\tau) = (\sum_{i=0}^{\tau-1} (R_0^i)_{11} R_0^{\tau-1-i}) \times (\sum_{j=0}^{\tau-1} (R_0^j)_{11} R_0^{\tau-1-j})'$ , параметрическое искажение  $\alpha = \theta - \theta^0 \in \mathbb{R}^p$ , уровень искажений  $\varepsilon = |\theta - \theta^0| > 0$ ,  $\mathbf{1}_{p \times p}$  -  $(p \times p)$ -матрица, все элементы которой равны единице.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  риск прогнозирования удовлетворяет следующему асимптотическому разложению:

$$r(\theta^0, \theta; \tau) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + \alpha' \beta(\tau) \alpha + O(\varepsilon^3). \quad (4)$$

**Доказательство.** Определим  $(p \times p)$ -матрицу  $\Delta = (\alpha, \theta_p, \dots, \theta_p)'$ , где  $\theta_p$  - нулевой  $p$ -вектор. Используя равенство  $B = B_0 + \Delta$ , имеем:

$$\begin{aligned} R(\theta^0, \theta; \tau) &= F_\tau + ((B_0 + \Delta)^\tau - B_0^\tau) C_T ((B_0 + \Delta)^\tau - B_0^\tau)' = \\ &= R(\theta^0, \theta; \tau) + \sum_{i,j=0}^{\tau-1} B_0^i \Delta B_0^{\tau-1-i} C_T (B_0^{\tau-1-j})' \Delta' (B_0^j)' + O(\varepsilon^3) \mathbf{1}_{p \times p}. \end{aligned}$$

Пусть  $Q^{(ij)} = B_0^{\tau-1-i} C_T (B_0^{\tau-1-j})'$  при  $i, j = 0, \tau-1$ . Тогда

$$B_0^i \Delta Q^{(ij)} \Delta' (B_0^j)' = B_0^i \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p (\sum_{l=1}^p q_{lk}^{(ij)} \alpha_l) \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{p \times p} (B_0^j)'$$

Следовательно,

$$r(\theta^0, \theta; \tau) = (F_\tau)_{11} + \sum_{i,j=0}^{\tau-1} (\sum_{k,l=1}^p q_{lk}^{(ij)} (B_0^i)_{11} (B_0^j)_{11} \alpha_l \alpha_k) + O(\varepsilon^3). \quad (5)$$

Из (5) и равенства  $\sum_{i,j=0}^{\tau-1} q_{lk}^{(ij)} (B_0^i)_{11} (B_0^j)_{11} = \hat{p}_{lk}(\tau)$  получаем (4). Теорема доказана.

Определим гарантированный риск прогнозирования при известном уровне искажений  $\varepsilon > 0$ :  $r_+(\theta^0; \tau; \varepsilon) = \sup_{|\alpha| < \varepsilon} r(\theta^0, \theta^0 + \alpha; \tau)$ . Будем говорить, что для заданного уровня приращения риска  $\delta > 0$  параметрическое отклонение  $\theta - \theta^0$  является  $\delta$ -допустимым, если  $r(\theta^0, \theta; \tau) \leq (1 + \delta) r_{\min}(\theta^0; \tau)$ .

Вследствие симметричности и неотрицательной определенности  $\beta(\tau)$  существует ортогональная матрица  $V$  такая, что  $\beta(\tau) = V' \Lambda V$ , где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = \overline{1, p}$  – собственные значения матрицы  $\beta(\tau)$ ,  $\lambda_{\max}$  – максимальное из них.

*Следствие 2.* В условиях теоремы 1 для любого  $\delta > 0$  и уровня искажений  $\varepsilon \rightarrow 0$  верны утверждения: 1)  $r_\tau(\theta^0; \tau; \varepsilon) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + \lambda_{\max} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ ; 2) при использовании главного члена разложения (4) множество  $\delta$ -допустимых отклонений  $\alpha$  образуют эллипсоид в  $\mathbb{R}^p$ :  $\sum_{i=1}^p \lambda_i ((V\alpha)_i)^2 \leq r_{\min}(\theta^0; \tau)$ .

*Доказательство.* Отбросив остаток в формуле (4), имеем:

$$r(\theta^0, \theta; \tau) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + (V\alpha)' \Lambda V\alpha = r_{\min}(\theta^0; \tau) + \sum_{i=1}^p \lambda_i ((V\alpha)_i)^2. \quad (6)$$

Тогда из неравенства  $\sum_{i=1}^p \lambda_i ((V\alpha)_i)^2 \leq \lambda_{\max} \varepsilon^2$  следует первое утверждение. Второе утверждение следует из (6). Следствие доказано.

### 3. Безусловный риск прогнозирования

Предположим, что параметрическое искажение  $\alpha = \theta - \theta^0$  есть случайный вектор. Такая ситуация может возникнуть, например, когда вектор  $\theta^0$  оценивается по статистическим данным со случайной погрешностью  $\alpha$ . Тогда имеет смысл исследовать безусловный риск прогнозирования:  $r(\theta^0; \tau) = E\{r(\theta^0, \theta; \tau)\}$ , где усреднение проводится по распределению параметра  $\theta$ .

**Теорема 3.** Пусть параметрическое искажение  $\alpha$  есть случайный вектор с ковариационной матрицей  $\Sigma$  и ограниченными моментами 3-го порядка, причем  $\varepsilon_+ = (\max_{i,j,k} E\{|\alpha_i \alpha_j \alpha_k|\})^{1/3} \rightarrow 0$ . Тогда безусловный риск прогнозирования удовлетворяет асимптотическому разложению:

$$r(\theta^0; \tau) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + tr(\beta(\tau)\Sigma) + O(\varepsilon_+^3).$$

*Доказательство.* Согласно теореме 1 при фиксированных  $\theta^0, X_0, \sigma^2, \tau$  риск есть полином конечной степени от  $\theta_i, i = \overline{1, p}$ . Следовательно, все производные от функции риска существуют и ограничены в конечных областях, т. е. справедливо применение формулы Тейлора:

$$r(\theta, \theta^0; \tau) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + \alpha' \beta(\tau) \alpha + \sum_{i,j,l=1}^p k_{ijl} r'''(\theta^0, \theta^0 + \zeta_{ijl}; \tau) \alpha_i \alpha_j \alpha_l,$$

где  $p$ -векторы  $\{\zeta_{ijl}\}$  лежат в  $p$ -мерном параллелепипеде  $[0, \alpha_1] \times \dots \times [0, \alpha_p]$  и справедливо  $|\eta(\alpha)| = \left| \sum_{i,j,l=1}^p k_{ijl} r'''(\theta^0, \theta^0 + \zeta_{ijl}; \tau) \alpha_i \alpha_j \alpha_l \right| \leq \sum_{i,j,l=1}^p K_1 K_2 |\alpha_i \alpha_j \alpha_l|$ , где  $K_1, K_2$  – константы такие, что  $K_1 = \max_{i,j,l} |k_{ijl}|$ ,  $|r'''(\cdot)| \leq K_2 < \infty$ . Осталось заметить, что  $E\{\eta(\alpha)\} \leq K_1 K_2 \sum_{i,j,l=1}^p E\{|\alpha_i \alpha_j \alpha_l|\} \leq K_1 K_2 p^3 \max_{i,j,l} E\{|\alpha_i \alpha_j \alpha_l|\} = O(\varepsilon_+^3)$  и  $E\{\alpha' \beta(\tau) \alpha\} = tr(\beta(\tau)\Sigma)$ . Теорема доказана.

Пусть по некоторой реализации  $\{x_t\}$  временного ряда (1) длины  $T_0$  построена ОМП-оценка вектора  $\theta^0$ , а по независимой от  $\{x_t\}$  реализации  $\{\bar{x}_t\}$  ведется прогнозирование. При этом если для любого заданного  $\delta > 0$  спра-

ведливо неравенство  $r(\theta^0; \tau) < (1+\delta) r_{\min}(\theta^0; \tau)$ , то величину  $T_0 = \bar{T}_0(\delta)$  назовем  $\delta$ -допустимой длительностью наблюдения. Обозначим  $F = \sum_{i=0}^{\infty} B_0^i D (B_0^i)'$ .

*Следствие 3.* Пусть по некоторой реализации  $\{x_t\}$  временного ряда (1) длины  $T_0$  построена ОМП-оценка вектора  $\theta^0$ , а прогнозирование ведется по независимой от  $\{x_t\}$  реализации  $\{\bar{x}_t\}$ . Если собственные значения матрицы  $B_0$  находятся в единичном круге, то справедливо асимптотическое разложение безусловного риска прогнозирования:

$$r(\theta^0; \tau) = r_{\min}(\theta^0; \tau) + \text{tr}(\beta(\tau)F^{-1})/T_0 + O(T_0^{-3/2}).$$

При этом с точностью до  $O(T_0^{-2/2})$  минимальная  $\delta$ -допустимая длительность наблюдения составляет  $\bar{T}_0(\delta) = \text{tr}(\beta(\tau)F^{-1})/(\delta \cdot r_{\min}(\theta^0; \tau))$ .

*Доказательство.* Этот результат есть следствие теоремы 5.5.1 из [1] и теоремы 3. Следствие доказано.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.

2. Kharin Yu.S., Zenevich D.V. // Computer data analysis and modeling. Minsk, 1998. Vol. 1. P. 120.

3. Dahlhaus R., Wefelmeyer W. // Ann. Stat. 1996. Vol. 24. № 3. P. 952.

Поступила в редакцию 24.03.2000.

*Зеневич Дмитрий Владимирович* – аспирант кафедры математического моделирования и анализа данных. Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор Ю.С. Харин.

УДК 519.24

Т.В. СОБОЛЕВА

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ДВУХ МОМЕНТОВ РАСШИРЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ ДИСКРЕТНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

In this article an enlarged periodogram of the discrete real stable stationary random process is being considered, mathematical expectancy and dispersion being calculated for it.

Рассмотрим дискретный действительный устойчивый стационарный случайный процесс  $X(t)$ ,  $t \in Z$ , с показателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ , спектральное представление которого имеет следующий вид:

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) d\xi(\lambda), \quad (1)$$

где  $\xi(\lambda)$  – действительный устойчивый с независимыми приращениями процесс с показателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ , такой, что

$$\left\{ E |d\xi(\lambda)|^p \right\}^{\alpha/p} = C(p, \alpha) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

для всех  $0 < p < \alpha$ , где  $C(p, \alpha)$  – зависит от  $\alpha$ ,  $p$  и не зависит от  $\xi(\lambda)$ , а  $\varphi(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  – неотрицательная функция, которую по аналогии с [1, 2] будем называть спектральной плотностью процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$ .

По наблюдениям за процессом  $X(t)$ ,  $t \in [-T, T]$ , введем в рассмотрение статистику, являющуюся аналогом расширенного преобразования Фурье для обычных процессов (см. [4]):

$$d_T(\lambda) = Q(\lambda) A_T \sum_{t=-T}^T h\left(\frac{t}{T}\right) X(t) \cos(\lambda t), \quad (3)$$

где

$$Q(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-\frac{1}{\alpha}}, & \lambda \neq 0 \\ 1, & \lambda = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

$h(x)$  – непрерывная, ограниченная, четная функция, называемая сглаживающей функцией, или окном просмотра данных, которая принимает максимальное значение, равное 1 в точке  $x=0$ , монотонно убывает к 0 при  $|x| \rightarrow 1$  и  $h(x)=0$  при  $|x|>1$ .

**Определение 1.** Будем называть расширенной периодограммой дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$ , статистику

$$I_T(\lambda) = k(p, \alpha) |d_T(\lambda)|^p, \quad (5)$$

$0 < p < \alpha < 2$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , где

$$k(p, \alpha) = \frac{D(p)}{F(p, \alpha) c_\alpha^{p/\alpha}}, \quad (6)$$

$$F(p, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{-|u|^\alpha\}}{|u|^{1+p}} du, \quad (7)$$

$$D(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{|u|^{1+p}} du, \quad c_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos v|^\alpha dv,$$

а

$$d_T(\lambda) = \frac{1}{2} Q(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} |H_T(\lambda - u) + H_T(\lambda + u)|^\alpha d\xi(u). \quad (8)$$

Здесь  $H_T(\lambda)$  – неотрицательная,  $2\pi$  – периодическая функция,  $H_T(\lambda) = A_T H^{(T)}(\lambda)$ ,  $H^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=-T}^T h\left(\frac{t}{T}\right) \cos(\lambda t)$ ,  $A_T = \left[\frac{1}{B_\alpha^{(T)}}\right]^{1/\alpha}$ ,  $B_\alpha^{(T)} = \int_{-\pi}^{\pi} |H^{(T)}(\lambda)|^\alpha d\lambda$  и  $Q(\lambda)$ ,  $\xi(u)$  определены соотношениями (4), (2) соответственно.

**Теорема 1.** Математическое ожидание и дисперсия расширенной периодограммы  $I_T(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , определенной соотношением (5), имеют вид:

$$EI_T(\lambda) = [\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha}, \quad (9)$$

$p \in (0, \alpha)$ .

$$DI_T(\lambda) = \left( \frac{k^2(p, \alpha)}{k(2p, \alpha)} - 1 \right) [\gamma_T(\lambda)]^{2p/\alpha}, \quad (10)$$

$p \in (0, \alpha/2)$ , где

$$\gamma_T(\lambda) = \left( \frac{1}{2} Q(\lambda) \right)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} |H_T(\lambda - u) + H_T(\lambda + u)|^\alpha \varphi(u) du, \quad (11)$$

$k(p, \alpha)$  задано соотношением (6).

**Доказательство.** Используя свойства математического ожидания, получим:

$$EI_T(\lambda) = k(p, \alpha) E |d_T(\lambda)|^p.$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$|x|^p = D^{-1}(p) \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{iux\}}{|u|^{1+p}} du \right] = D^{-1}(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(xu)}{|u|^{1+p}} du, \quad (12)$$

где  $0 < p < \alpha < 2$ , тогда:

$$|d_T(\lambda)|^p = D^{-1}(p) \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{iud_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}} du \right].$$

Учитывая соотношение  $E\{iud_T(\lambda)\} = \exp\{-c_\alpha |u|^\alpha \gamma_T(\lambda)\}$ , приведенное в статье [3], получим:

$$EI_T(\lambda) = \frac{1}{F(p, \alpha) c_\alpha^{p/\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{-c_\alpha |u|^\alpha \gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}} du. \quad (13)$$

Произведем в интеграле правой части (13) замену переменной интегрирования  $u = \frac{x}{[c_\alpha \gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}}$ . С учетом (7) получим:

$$\begin{aligned} EI_T(\lambda) &= \frac{1}{F(p, \alpha) c_\alpha^{p/\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\left\{-c_\alpha \frac{|x|^\alpha}{c_\alpha \gamma_T(\lambda)} \gamma_T(\lambda)\right\}}{|x|^{1+p}} \frac{1}{[c_\alpha \gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}} dx = \\ &= \frac{1}{F(p, \alpha) c_\alpha^{p/\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{-|x|^\alpha\}}{|x|^{1+p}} dx = [c_\alpha \gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Соотношение (10) доказывается аналогично. Теорема доказана.

1. Masry E., Cambanis S. // Stochastic Processes and Their Applications. 1984. Vol. 18. P. 1.

2. Cambanis S. Complex symmetric stable variables and processes // Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson. 1983. P. 63.

3. Соболева Т. В. Статистические свойства преобразования Фурье наблюдений устойчивого стационарного случайного процесса. Д 20009 от 21.02.2000.

4. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 15.09.2000.

*Соболева Татьяна Валентиновна* – инженер-программист учебной лаборатории БГУ.

УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Т.В. ЦЕХОВАЯ

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЕМИИНВАРИАНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОЦЕНКИ ВАРИОГРАММЫ

The estimate of the variogram of stationary stochastic process with discrete time is constructed. Higher order semi-invariants of examined estimate are found, their asymptotic behavior is considered.

Рассмотрим случайный процесс  $Y(s) = \mu + \delta(s)$ ,  $s \in Z$ , где  $\mu = MY(s)$ . Предположим, что  $\delta(s)$ ,  $s \in Z$  – стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, неизвестной вариограммой [1]

$$v(h) = M(\delta(s+h) - \delta(s))^2; \quad s, h \in Z.$$

Пусть в результате некоторого эксперимента получено  $n$  последовательных наблюдений  $Y(1), Y(2), \dots, Y(n)$  за процессом  $Y(s), s \in Z$ . В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику:

$$\hat{v}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (Y(s+h) - Y(s))^2, \quad (1)$$

где  $h = \overline{0, n-1}$ . Положим также,  $\hat{v}(-h) = \hat{v}(h)$ ,  $h = \overline{0, n-1}$  и  $\hat{v}(h) = 0$  для  $|h| \geq n$ .

Рассмотрим асимптотическое поведение семинвариантов высших порядков оценки вариограммы, заданной соотношением (1).

**Теорема 1.** Если имеет место соотношение

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{p-1}=-\infty}^{\infty} |c_p(t_1, \dots, t_{p-1})| < \infty, \quad (2)$$

где  $c_p(t_1, \dots, t_{p-1})$ ,  $t_j \in Z$ ,  $j = \overline{1, p-1}$ ,  $p > 2$  – смешанный семинвариант порядка  $p$  случайного процесса  $\delta(s), s \in Z$ , то для оценки  $\hat{v}(h)$ ,  $h = \overline{0, n-1}$ , задаваемой равенством (1),

$$\text{cum} \left\{ \hat{v}(h_1), \hat{v}(h_2), \dots, \hat{v}(h_p) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3)$$

$$h_j = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, p}, \quad p > 2.$$

Доказательство. Обозначим  $m_i = \begin{cases} 1, & i_j = 0, 2, \\ -2, & i_j = 1, \end{cases} \quad j = \overline{1, p}$ . Применяя

приведенные в [2] свойства смешанных семинвариантов, будем иметь

$$\text{cum} \left\{ \hat{v}(h_1), \hat{v}(h_2), \dots, \hat{v}(h_p) \right\} = \left[ \prod_{j=1}^p (n-h_j) \right]^{-1} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^2 m_{i_1} \dots m_{i_p} \times$$

$$\times \text{cum} \left\{ \delta(s_1 + \left[ \frac{i_1}{2} \right] h_1) \delta(s_1 + \left[ \frac{i_1+1}{2} \right] h_1), \dots, \delta(s_p + \left[ \frac{i_p}{2} \right] h_p) \delta(s_p + \left[ \frac{i_p+1}{2} \right] h_p) \right\}, \quad (4)$$

где  $\left[ \frac{i}{2} \right]$  означает целую часть числа  $\frac{i}{2}$ .

На основании леммы 2.5 [2] правую часть равенства (4) перепишем в виде

$$\left[ \prod_{j=1}^p (n-h_j) \right]^{-1} \sum_{q=1}^L \sum_{\substack{D_q = D \\ |D_q|=q}} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^2 m_{i_1} \dots m_{i_p} \times$$

$$\times \prod_{q=1}^L \text{cum} \left\{ \delta(s_r + \left[ \frac{i_r - 1 + r}{2} \right] h_r); (t, r) \in D_q \right\}, \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям множества  $D = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), \dots, (p,1), (p,2)\}$ ,  $D_1, \dots, D_L$  – неупорядоченные непустые множества, такие, что  $\bigcup_{q=1}^L D_q = D$ ,  $D_i \cap D_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq 2p$ , а

$\text{cum} \left\{ \delta(s_r + \left[ \frac{i_r - 1 + r}{2} \right] h_r); (t, r) \in D_q \right\}$  означает смешанный семинвариант

наблюдений случайного процесса  $\delta(s_i + \left\lfloor \frac{i-1+r}{2} \right\rfloor h_i)$  с индексами  $(t,r) \in D_q$ ,  $q=1, L$ .

В силу (2) при больших  $n$  из всех слагаемых соотношения (5) наибольший вклад в величину семиинварианта оценки вариограммы будут вносить слагаемые, являющиеся произведением  $p$  семиинвариантов второго порядка случайного процесса  $\delta(s)$ ,  $s \in Z$ . Рассмотрим неразложимое разбиение множества  $D$ , которое соответствует одному из слагаемых такого типа:  $D_1 = \{(1,1), (2,2)\}$ ,  $D_2 = \{(2,1), (3,2)\}$ , ...,  $D_{p-1} = \{(p-1,1), (p,2)\}$ ,  $D_p = \{(p,1), (1,2)\}$ .

Обозначим это слагаемое  $I$ , тогда, используя свойства смешанных семиинвариантов и определение ковариационной функции  $\sigma(h)$ ,  $h \in Z$ , будем иметь

$$\left[ \prod_{j=1}^p (n-h_j) \right]^{-1} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} \sigma(s_1-s_2) \times \dots \times \sigma(s_{p-1}-s_p) \sigma(s_p-s_1). \quad (6)$$

Для преобразования выражения сделаем замену переменных суммирования:  $r_1=s_1$ ,  $r_i=s_{i-1}-s_i$ ,  $i=2, p$ , а затем изменим порядок суммирования. Тогда получим

$$\frac{(2\pi)^{p-1} (n - \max_{i=1, p} h_i)}{(n-h_1)(n-h_2)\dots(n-h_p)} \times$$

$$\times \sum_{r_2=1-n+h_2}^{n-h_1-1} \sum_{r_3=1-n+h_3}^{n-h_2-1} \dots \sum_{r_p=1-n+h_p}^{n-h_{p-1}-1} \left( 1 + \frac{m(r_2, \dots, r_p)}{n - \max_{i=1, p} h_i} \right) \sigma(-r_2 - \dots - r_p) \prod_{j=2}^p \sigma(r_j),$$

где функция  $m(r_2, \dots, r_p)$  такая, что  $\left| \frac{m(r_2, \dots, r_p)}{n - \max_{i=1, p} h_i} \right| < 1$ . Учитывая (2), получим

требуемый результат.

**Теорема 2.** Пусть случайный процесс  $\delta(s)$ ,  $s \in Z$ , таков, что семиинвариантные спектральные плотности  $f_s(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1})$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1} \in \Pi = [-\pi, \pi]$ ,  $s=2, p$ ,  $p$  – произвольное натуральное число,  $p > 2$ , определенные в работе [2], непрерывны на области определения. Тогда для оценки  $\hat{v}(h)$ ,  $h=0, n-1$ , задаваемой равенством (1), имеет место (3).

Доказательство. Рассмотрим (6). Подставляя вместо ковариационных функций их выражения через спектральные плотности, а затем преобразуя полученное соотношение, получаем

$$\frac{(2\pi)^{p-1} (n - \max_{i=1, p} h_i)}{(n-h_1)(n-h_2)\dots(n-h_p)} \int_{\Pi^{p-1}} g(y_2, \dots, y_p) \Phi_{1 \dots p}^n(y_2, \dots, y_p) dy_2 \dots dy_p,$$

где  $g(y_2, \dots, y_p) = \int_{\Pi} f(y_1) f(y_1+y_2) \dots f(y_1+\dots+y_p) e^{i \sum_{j=2}^p y_j \frac{(h_1-h_j)}{2}} dy_1$ , ядро

$$\Phi_{h_1, \dots, h_p}^n(y_2, \dots, y_p) = \frac{(2\pi)^{1-p}}{(n - \max_{i=1, p} h_i)} \frac{\sin \frac{(n-h_1)(-y_2 - \dots - y_p)}{2}}{\sin \frac{(-y_2 - \dots - y_p)}{2}} \prod_{j=2}^p \frac{\sin \frac{(n-h_j)y_j}{2}}{\sin \frac{y_j}{2}}.$$

В силу свойств ядерной функции очевидно, что  $I \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Таким образом, теорема доказана.

Между вариограммой  $v(h)$ ,  $h \in Z$ , и ковариационной функцией  $\sigma(h)$ ,  $h \in Z$ , существует связывающее их соотношение [1]. Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки ковариационной функции рассматривалось, например, в работе [3].

1. Cressie N., Grondona M.O. A comparison of variogram estimation with covariogram estimation // The Art of Statistical Science. 1992. С. 191.

2. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

3. Труш Н.Н., Шабуневич Т.В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. тр. междунар. науч. конф. Брест, 1997. С. 49.

Поступила в редакцию 27.09.2000.

*Труш Николай Николаевич* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики БГУ.

*Цеховая Татьяна Вячеславовна* – инженер-программист ФПК по ПМ и ЭВМ БГУ.

УДК 519.24

Н.В. МАРКОВСКАЯ

### ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК СМЕШАННЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

In this article limit distribution of estimates of mixed moments of higher orders of stationary stochastic processes is found under limitation on mixed cumulants.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс  $x(t)$ ,  $t \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$ . Предположим, что  $Mx(t) = 0$ ,  $t \in Z$ . Обозначим  $m_n(t_1, \dots, t_{n-1})$  – смешанный момент  $n$ -го порядка,  $c_n(t_1, \dots, t_{n-1})$  – смешанный семиинвариант  $n$ -го порядка,  $f_n(t_1, \dots, t_{n-1})$  – семиинвариантную спектральную плотность  $n$ -го порядка,  $t_j \in Z$ ,  $x_j \in \Pi$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $n \geq 2$ ,  $f_2(x) - f_1(x)$ ,  $x \in \Pi$ .

Пусть смешанный момент  $n$ -го порядка неизвестен и требуется по  $T$  последовательным через равные промежутки наблюдениям

$$x(0), x(1), \dots, x(T-1)$$

за процессом  $x(t)$ ,  $t \in Z$ , построить его оценку и исследовать ее статистические свойства.

Для смешанного момента  $n$ -го порядка построим оценку вида

$$\hat{m}_n(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t_1+t)x(t_2+t) \dots x(t_{n-1}+t)x(t), \quad (1)$$

$t, t_j \in Z$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $n \geq 2$ .

В работе [3] показано, что построенная оценка смешанного момента  $n$ -го порядка (1) является несмещенной оценкой для смешанного момента  $n$ -го порядка и состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Статистические свойства оценки  $\hat{m}_2(t)$  достаточно полно исследованы в работах [2–9], так как

$$\hat{m}_2(t) = \hat{R}(t),$$

где  $t \in Z$ ,  $\hat{R}(t)$  – оценка ковариационной функции стационарного случайного процесса  $x(t)$ ,  $t \in Z$ .

Статистические свойства оценок  $\hat{m}_3(i, j)$  и  $\hat{m}_4(i, j, k)$ ,  $i, j, k \in Z$ , исследованы в работе [3].

Используя семиинвариантный подход, найдем предельное распределение исследуемой оценки смешанного момента  $n$ -го порядка (1).

Определение неразложимых разбиений можно найти в работе [1].

**Теорема 1.** [1] *Рассмотрим набор случайных величин  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, J_i$ ,  $j = 1, \dots, I$ . Введем  $I$  случайных величин*

$$Y_i = \prod_{j=1}^{J_i} x_{ij}, i = 1, \dots, I.$$

Тогда совместный кумулянт  $\text{cum}(Y_1, \dots, Y_I)$  задается формулой

$$\sum_v \text{cum}(x_{ij}; (i, j) \in v_1) \dots \text{cum}(x_{ij}; (i, j) \in v_p),$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям  $v = v_1 \cup \dots \cup v_p$ .

**Теорема 2.** *Если выполняется соотношение*

$$\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{m-1}=-\infty}^{\infty} |\text{cum}\{x(u_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_s\}| < \infty, \quad (2)$$

$s = 1, \dots, p$ ,  $v = v_1 \cup \dots \cup v_p$  – неразложимое разбиение, то

$$\text{cum}\{\hat{m}_{n_1}(\overline{l_1}, \dots, \overline{l_{n_1-1}}), \dots, \hat{m}_{n_m}(\overline{k_1^m}, \dots, \overline{k_{n_m-1}^m})\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (3)$$

для  $m > 2$ , где  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n_i}$ ,  $l = \overline{1, m}$ .

Доказательство. Используя свойства семиинвариантов, приведенные в работе [1], можно записать, что

$$\begin{aligned} & \text{cum}\{\hat{m}_{n_1}(\overline{k_1^1}, \dots, \overline{k_{n_1-1}^1}), \dots, \hat{m}_{n_m}(\overline{k_1^m}, \dots, \overline{k_{n_m-1}^m})\} = \\ & = \frac{1}{T^m} \sum_{t_1=0}^{T-1} \dots \sum_{t_m=0}^{T-1} \text{cum}\{x(t_1 + k_1^1) \dots x(t_1 + k_{n_1-1}^1) x(t_1), \dots, x(t_m + k_1^m) \dots x(t_m + k_{n_m-1}^m) x(t_m)\}. \end{aligned}$$

Обозначим  $\text{cum}\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_s\}$  – совместный кумулянт наблюдений случайного процесса  $x(t_i + \tau_{ij})$  с индексами  $(i, j) \in v_s$ ,  $s = 1, \dots, p$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,

$j = \overline{1, n_i}$ ,  $l = \overline{1, m}$ , а  $Y_i = \prod_{j=1}^{n_i} x(t_i + \tau_{ij})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $\tau_{ij} = k_j^i$ ,  $j = \overline{1, n_i - 1}$ ,

$i = \overline{1, m}$ ,  $v_{i, n_i} = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тогда согласно теореме 1

$$\begin{aligned} & \text{cum}\{x(t_1 + k_1^1) \dots x(t_1 + k_{n_1-1}^1) x(t_1), \dots, x(t_m + k_1^m) \dots x(t_m + k_{n_m-1}^m) x(t_m)\} = \\ & = \sum_{v = \bigcup_{i=1}^m v_i} \text{cum}\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_1\} \times \dots \times \text{cum}\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_p\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям  $v = v_1 \cup \dots \cup v_p$ . Значит,

$$\begin{aligned} & \text{cum}\{\hat{m}_{n_1}(k_1^1, \dots, k_{n_1-1}^1), \dots, \hat{m}_{n_m}(k_1^m, \dots, k_{n_m-1}^m)\} = \\ & = \frac{1}{T^m} \sum_{t_1=0}^{T-1} \dots \sum_{t_m=0}^{T-1} \sum_{v=\bigcup_{i=1}^p v_i} \text{cum}\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_1\} \times \dots \times \text{cum}\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_p\}. \end{aligned}$$

Введем новые индексы суммирования:  $t = t_m$ ,  $u_j = t_j - t_m$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ ,  $u_m = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} & \text{cum}\{\hat{m}_{n_1}(k_1^1, \dots, k_{n_1-1}^1), \dots, \hat{m}_{n_m}(k_1^m, \dots, k_{n_m-1}^m)\} = \frac{1}{T^m} \sum_{u_1=-(T-1)}^{T-1} \dots \sum_{u_{m-1}=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} \times \\ & \times \sum_{v=\bigcup_{i=1}^p v_i} \text{cum}\{x(u_i + t + \tau_{ij}); (i, j) \in v_1\} \times \dots \times \text{cum}\{x(u_i + t + \tau_{ij}); (i, j) \in v_p\}. \end{aligned}$$

Используя стационарность процесса  $x(t)$ , запишем:

$$\begin{aligned} & \text{cum}\{\hat{m}_{n_1}(k_1^1, \dots, k_{n_1-1}^1), \dots, \hat{m}_{n_m}(k_1^m, \dots, k_{n_m-1}^m)\} = \frac{1}{T^{m-1}} \sum_{u_1=-(T-1)}^{T-1} \dots \sum_{u_{m-1}=-(T-1)}^{T-1} \times \\ & \times \sum_{v=\bigcup_{i=1}^p v_i} \text{cum}\{x(u_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_1\} \times \dots \times \text{cum}\{x(u_i + \tau_{ij}); (i, j) \in v_p\}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям.

Используя условие теоремы, правая часть стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$ . Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 3.** Если выполняется соотношение (2), то оценка смешанного момента  $n$ -го порядка  $\hat{m}_n(k_1, \dots, k_{n-1})$  имеет асимптотическое нормальное распределение с математическим ожиданием  $m_n(k_1, \dots, k_{n-1})$  и асимптотической ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению (10) из работы [3].

Доказательство следует из теоремы 4 работы [3], теоремы 2 данной работы и леммы Д4.5 из работы [1].

1. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980.
2. Марковская Н.В. // Тр. науч. конф. «Актуальные проблемы информатики», Минск, 14–18 мая 1996 г. Мн., 1996. С. 154.
3. Марковская Н.В. Статистические свойства оценок смешанных моментов высших порядков // 56-я научная конференция студентов и аспирантов: Материалы конф. Мн., 1999.
4. Она же. Статистические свойства оценки взаимной ковариационной функции. Мн., 1999. 35 с. Деп. в БелИСА 18.11.1999 г. № Д1999116.
5. Груш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
6. Груш Н.Н., Марковская Н.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 2. С. 45.
7. Груш Н.Н., Марковская Н.В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. науч. тр. Брест, 1997. С. 16.
8. Груш Н.Н., Марковская Н.В. // Вещи НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 33.
9. Fonollosa J. A. R. // IEEE Transactions on signal processing. Vol. 43. № 4. P. 967.

Поступила в редакцию 12.10.2000.

**Марковская Наталья Вацлавовна** – преподаватель кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики (ГрГУ им. Я. Купалы).

### КЛАСТЕР-АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПО ГИСТОГРАММНОЙ ОЦЕНКЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

The problem of nonparametric cluster analysis of multivariate observations is considered. The new clustering procedure based on histogram as estimator of mixture probability density function is proposed and analytically and experimentally investigated.

Пусть в пространстве  $R^N$  регистрируются независимые в совокупности случайные вектора-наблюдения  $x_1, \dots, x_n$  из  $L > 2$  классов  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$ . Наблюдение  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) принадлежит к классу со случайным ненаблюдаемым номером  $d_i^0 \in S$ ,  $S = \{1, \dots, L\}$ :

$$P\{d_i^0 = i\} = \pi_i > 0, \quad i \in S, \quad (1)$$

где  $\{\pi_i\}_{i \in S}$  – так называемые априорные вероятности классов  $\{\Omega_i\}_{i \in S}$  [1, 2]:  $\pi_1 + \dots + \pi_L = 1$ . При фиксированном номере класса  $d_i^0 = i$  наблюдение  $x_i$  описывается условной плотностью распределения вероятностей

$$q_i(x) > 0, \quad x \in R^N : \int_{R^N} q_i(x) dx = 1, \quad i \in S. \quad (2)$$

Таким образом, классы  $\{\Omega_i\}_{i \in S}$  однозначно определяются своими характеристиками  $\{\pi_i, q_i(\cdot)\}_{i \in S}$ , которые на практике обычно неизвестны [1–3].

Задача кластер-анализа состоит в классификации выборки  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  объема  $n$ , т. е. в построении статистической оценки  $\hat{D} = \hat{D}(X) = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n)^T \in S^n$  для неизвестного (ненаблюдаемого) вектора истинной классификации  $D^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)^T \in S^n$  (здесь  $T$  – символ транспонирования). В отличие от традиционного подхода к задаче кластер-анализа [1, 2] число классов  $L$  считается неизвестным наряду с характеристиками классов  $\{\pi_i, q_i(\cdot)\}_{i \in S}$ .

Предположим, что области концентрации наблюдений в  $R^N$  (кластеры [1]), соответствующие классам  $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ , “сформированы” в  $R^N$  вокруг локальных мод [4, 5] безусловной плотности-смеси:

$$q(x) = \sum_{i \in S} \pi_i q_i(x), \quad x \in R^N, \quad (3)$$

описывающей наблюдения из выборки  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ .

**Определение 1.** Точка  $\mu_i \in R^N$  называется локальной модой (ЛМ) для  $q(\cdot)$ , если  $\mu_i$  – локальный максимум  $q(x)$  по  $x \in R^N$ .

**Определение 2.** Локальная мода  $\mu_i$  называется изолированной, если  $\exists \varepsilon > 0$ , что окрестность  $M_i^\varepsilon = \{x: |x - \mu_i| < \varepsilon\}$  не содержит других ло-

кальных мод, отличных от  $\mu_i$  ( $\|v\| = \sqrt{v^T v}$  – евклидова норма вектора  $v \in R^N$ ).

Везде далее будем предполагать, что плотность-смесь (3) имеет  $L$  локальных мод  $\{\mu_i\}_{i \in S}$ , и все они изолированные.

*Определение 3. Теоретическим кластером (ТК) для изолированной ЛМ  $\mu_i \in R^N$  назовем такое односвязное множество  $V_i$  из  $R^N$  ( $V_i \subset R^N$ ), для которого выполняется:*

$$\forall x, y \in V_i : \begin{cases} (x - \mu_i)^T (y - \mu_i) = |x - \mu_i| |y - \mu_i| (\overline{\mu_i x} \uparrow \uparrow \overline{\mu_i y}), \\ |x - \mu_i| < |y - \mu_i| \end{cases} \Rightarrow q(x) > q(y). \quad (4)$$

Множество  $V_0 = R^N \setminus \bigcup_{i \in S} V_i$  (необязательно односвязное) назовем “фоновым” ТК [4] для плотности-смеси (3).

Таким образом, задача кластер-анализа выборки  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  сводится к построению оценок для  $\{\mu_i, v_i\}_{i \in S}$  по  $X$  объема  $n$  при неизвестном числе классов  $L$ .

Воспользуемся непараметрической гистограммной оценкой [5, 6] для безусловной плотности-смеси  $q(\cdot)$ , построенной по неклассифицированной выборке  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  объема  $n$ :

$$\hat{q}_n(x) = \frac{1}{n \prod_{j=1}^N h_j} \sum_{i=1}^n I_{\Gamma(x, h)}(x_i), \quad x \in R^N, \quad (5)$$

где  $I_A(x) = \{1, \text{ если } x \in A; 0, \text{ если } x \notin A\}$  – индикатор множества  $A$ ;  $\Gamma(x, h)$  – ячейка “объема”  $\prod_{j=1}^N h_j$  гистограммы  $\hat{q}_n(x)$ , в которую попала точка  $x = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)^T \in R^N$ :

$$\Gamma(x, h) = \times_{j=1}^N \left[ \left[ \frac{\tilde{x}_j}{h_j} \right] h_j, \left( \left[ \frac{\tilde{x}_j}{h_j} \right] + 1 \right) h_j \right),$$

здесь  $[z]$  – целая часть числа  $z \in R$ , а  $h_j$  – коэффициент “размытости” [5, 6] по  $j$ -й компоненте  $N$ -вектора  $x \in R^N$ .

Оценку  $\hat{q}_n(\cdot)$  из (5) можно переписать в виде:

$$\hat{q}_n(x) = \frac{1}{n \prod_{j=1}^N h_j} \sum_{j_1, \dots, j_N} I_{\Gamma_{j_1, \dots, j_N}}(x) v_{j_1, \dots, j_N}, \quad (6)$$

где  $v_{j_1, \dots, j_N} = v_{j_1, \dots, j_N}(X) = \sum_{i=1}^n I_{\Gamma_{j_1, \dots, j_N}}(x_i)$  – число наблюдений из выборки

$X = \{x_i\}_{i=1}^n$ , попавших в ячейку  $\Gamma_{j_1, \dots, j_N} = \times_{l=1}^N [j_l h_l, (j_l + 1) h_l)$  с “номером”  $(j_1, \dots, j_N)$  ( $j_l \in Z$ ,  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $l = \overline{1, N}$ ).

Представление (6) и определения 1–3 позволяют построить алгоритм оценивания  $L$  и  $\{\mu_i, v_i\}_{i \in S}$ , основанный на методе полного перебора:

- 1) по выборке  $X$  объема  $n$  строим многомерную гистограмму (6);
- 2) просматриваем все ячейки  $\Gamma_{j_1, \dots, j_N}$  гистограммы, которые непусты:  $v_{j_1, \dots, j_N} \neq 0$ , и помечаем те из них  $\Gamma_{l_1, \dots, l_N}$ , все соседние к которым ниже:

$$v_{l_1, \dots, l_N} > v_{j_1, \dots, j_N} \text{ при } \sum_{s=1}^N \delta_{|j_s - l_s|, 1} \neq 0,$$

где  $\delta_{k,p} = \{1, \text{ если } k = p; 0, \text{ если } k \neq p\}$  – символ Кронекера. Помеченным ячейкам  $\{\Gamma_{l_1, \dots, l_N}\}$  присваиваем номера от 1 до  $\bar{L}$ , где  $\bar{L}$  – число помеченных ячеек (оценка числа классов  $L$ );

- 3) для каждой  $i$ -й помеченной на предыдущем этапе ячейки  $\hat{\Gamma}_i$  ( $i = \overline{1, \bar{L}}$ ) формируем оценку кластера  $\hat{V}_i$ :

а) полагаем  $\hat{V}_i := \hat{\Gamma}_i$ ;

б) к  $\hat{V}_i$  присоединяем те ячейки, не принадлежащие к  $\hat{V}_i$ , которые являются “соседями” каких-либо ячеек из  $\hat{V}_i$  и ниже своих “соседей” из  $\hat{V}_i$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока  $\hat{V}_i$  можно пополнить.

Отметим, что оценки  $\{\hat{V}_i\}_{i \in \hat{S}}$ ,  $\hat{S} = \{1, \dots, \bar{L}\}$ , для ТК  $\{V_i\}_{i \in S}$  не покрывают  $R^N$ , т. е. множество  $\hat{V}_0 = R^N \setminus \bigcup_{i \in \hat{S}} \hat{V}_i$ , являющееся оценкой для “фонового” кластера  $V_0$ , вообще говоря, непусто. Поэтому классификацию выборки  $X$  необходимо производить в  $\bar{L}+1$  класс, т. е. строить  $\hat{D} = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{\bar{L}}) \in \hat{S}_0^n$ ,  $\hat{S}_0 = \{0\} \cup \hat{S}$ :

$$\hat{d}_t = \sum_{i \in \hat{S}} i \cdot I_{\hat{V}_i}(x_t), \quad t = \overline{1, n}. \quad (7)$$

При этом наблюдения  $x_t$ , не попавшие в основные кластеры  $\{\hat{V}_i\}_{i \in \hat{S}}$ , относятся к “фоновому” кластеру  $\hat{V}_0$  ( $\hat{d}_t = 0$ ) и при необходимости могут быть переклассифицированы в основные кластеры, например, при помощи следующего правила:

$$\hat{d}_t = \arg \min_{i \in \hat{S}} \rho(x_t, \hat{\mu}_i), \quad (8)$$

где  $\rho(x, y) \geq 0$  – какая-либо метрика в  $R^N$  ( $x, y \in R^N$ ), в частности евклидова:  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Однако недостатком алгоритма 1)–3) является то, что он не позволяет однозначно определить оценки  $\{\hat{\mu}_i\}_{i \in \hat{S}}$  для ЛМ  $\{\mu_i\}_{i \in S} : \mu_i \in \hat{\Gamma}_i, i \in \hat{S}$ . В качестве  $\hat{\mu}_i \in \hat{\Gamma}_i$  можно выбрать, например, “центр” ячейки  $\hat{\Gamma}_i$ :

$$\hat{\mu}_i = \left( (l_1 + \frac{1}{2}) \cdot h_1, \dots, (l_N + \frac{1}{2}) \cdot h_N \right)^T \in \hat{\Gamma}_i, \quad \hat{\Gamma}_i := \Gamma_{l_1, \dots, l_N}, \quad i \in \hat{S}. \quad (9)$$

Исследуем статистические свойства предложенной выше процедуры кластер-анализа, состоящей из процесса 1)–3) оценивания неизвестных характеристик классов по многомерной гистограмме (6) и непосредственно процедуры принятия решений (классификации) (7)–(9).

**Теорема.** Если плотность  $q(\cdot)$  непрерывна и ограничена на всем  $R^N$  и имеет место асимптотика:

$$h_j = h_j(n) \rightarrow 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad \prod_{j=1}^N h_j \cdot n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

то гистограммная оценка плотности  $\hat{q}_n(\cdot)$  является состоятельной:

$$\sup_{x \in R^N} |\hat{q}_n(x) - q(x)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

*Замечание.* Результат теоремы останется верным, если вместо непрерывности и ограниченности плотности-смеси  $q(\cdot)$  из (3) потребовать, чтобы условные плотности  $\{q_i(\cdot)\}_{i \in S}$ , образующие смесь (3), были непрерывны и ограничены на  $R^N$ .

**Доказательство.** В условиях теоремы для доказательства справедливости (11) достаточно показать, что

$$\forall x \in R^N : \hat{q}_n(x) \xrightarrow{P} q(x), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Для доказательства (12) воспользуемся законом больших чисел для серий [7]. Пусть серия независимых случайных величин  $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$ , распределения вероятностей которых зависят от  $n$ , удовлетворяет условиям:

- 1)  $E\{\xi_{t,n}\} = 0, \quad t = \overline{1, n};$
- 2)  $F_n(\tau) = \sum_{t=1}^n E\{|\xi_{t,n}| : |\xi_{t,n}| > \tau\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall \tau;$
- 3)  $\sum_{t=1}^n E\{|\xi_{t,n}|\} < c < +\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$

тогда

$$\eta_n = \sum_{t=1}^n \xi_{t,n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

В нашем случае, исходя из (3), положим:

$$\xi_{t,n} = (I_{\Gamma(x,h)}(x_t) - \gamma(x,h)) / (\prod_{j=1}^N h_j \cdot n),$$

где  $\gamma(x,h) = \int_{\Gamma(x,h)} q(y) dy$  – вероятность попадания наблюдения  $x_t$  в ячейку

$\Gamma(x,h)$ , а коэффициенты “размытости”  $\{h_j\}_{j=1}^N$  зависят от  $n$ :  $h_j = h_j(n)$ ,

$j = \overline{1, N}$ . Случайная величина  $\eta_n$  примет вид:  $\eta_n = \hat{q}_n(x) - \gamma(x,h) / \prod_{j=1}^N h_j$ . Но

по теореме о среднем в асимптотике (10):  $\gamma(x,h) / \prod_{j=1}^N h_j \rightarrow q(x)$ , поэтому

для доказательства (12) необходимо лишь проверить условия 1)–3). Очевидно, что условие 1) выполняется:  $E\{\xi_{t,n}\} = 0, \quad t = \overline{1, n}$ , поскольку

$E\{I_{\Gamma(x,h)}(x_t)\} = P\{x_t \in \Gamma(x,h)\} = \gamma(x,h)$ . Проверим выполнение условий 2) и

3). Отметим, что случайные величины  $\{\xi_{i,n}\}_{i=1}^n$ , одинаково распределены по построению, поэтому

$$\sum_{i=1}^n E\{|\xi_{i,n}|\} = n E\{|\xi_{1,n}|\} = \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} E\left\{\left|I_{\Gamma(x,h)}(x_1) - \gamma(x,h)\right|\right\} \leq \frac{2\gamma(x,h)}{\prod_{j=1}^N h_j}.$$

В силу теоремы о среднем:  $\sum_{i=1}^n E\{|\xi_{i,n}|\} \leq 2q(z) < +\infty$  ( $z \in \Gamma(x,h)$ ), и условие 3) выполняется. Проверим условие 2):

$$\begin{aligned} F_n(\tau) &= \sum_{i=1}^n E\{|\xi_{i,n}| : |\xi_{i,n}| > \tau\} = n E\{|\xi_{1,n}| : |\xi_{1,n}| > \tau\} = \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} \int_{|I_{\Gamma(x,h)}(y) - \gamma(x,h)| > \prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau} |I_{\Gamma(x,h)}(y) - \gamma(x,h)| q(y) dy, \end{aligned}$$

расширив область интегрирования и оценив подынтегральное выражение сверху, получим:

$$\begin{aligned} F_n(\tau) &< \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} \int_{I_{\Gamma(x,h)}(y) + \gamma(x,h) > \prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau} (1 + \gamma(x,h)) q(y) dy < \\ &\leq \frac{2}{\prod_{j=1}^N h_j} P\left\{I_{\Gamma(x,h)}(x_1) > -\gamma(x,h) + \prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau\right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Чебышева [7] и в асимптотике (10) будем иметь:

$$\begin{aligned} P\left\{I_{\Gamma(x,h)}(x_1) > -\gamma(x,h) + \prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau\right\} &\leq \frac{\gamma(x,h)}{-\gamma(x,h) + \prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau}; \\ F_n(\tau) &< \frac{2\gamma(x,h)}{\prod_{j=1}^N h_j \left(\prod_{j=1}^N h_j \cdot n\tau - \gamma(x,h)\right)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall \tau, \end{aligned}$$

что совпадает с 3). Теорема доказана.

*Следствие.* Пусть в условиях теоремы в области  $V \subset R^n$  единственная точка максимума  $\mu = \arg \max_{x \in V} q(x)$ , тогда  $\forall \hat{\mu} \in \left\{ \arg \max_{x \in V} \hat{q}_n(x) \right\}$ , где  $\hat{q}_n(\cdot)$  – гистограммная оценка (5) плотности  $q(\cdot)$ , выполняется:

$$\hat{\mu} \xrightarrow{P} \mu, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство непосредственно следует из (11) и известной теоремы непрерывности [6], применяемой с учетом соотношения:

$$\begin{aligned} |\hat{q}_n(\hat{\mu}) - q(\mu)| &= \left| \max_{x \in V} \hat{q}_n(x) - \max_{y \in V} q(y) \right| < \\ &\leq \max_{x \in V} |\hat{q}_n(x) - q(x)| \leq \sup_{x \in R^n} |\hat{q}_n(x) - q(x)| \xrightarrow{P} 0, \\ &n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Следствие к теореме позволяет установить в условиях асимптотики (10) состоятельность статистических оценок  $\{\hat{\mu}_i\}_{i \in \hat{S}}$  для ЛМ  $\{\mu_i\}_{i \in S}$  (ЛМ, по нашему предположению, изолированные), полученных по алгоритму 1)–3):

$$\hat{\mu}_i \xrightarrow{P} \mu_i, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (13)$$

что говорит о достаточной точности кластер-процедуры, на них основанной. Более того, для классификации можно использовать не (7)–(9), а классифицировать все  $n$  наблюдений из выборки  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  по близости к оценкам ЛМ  $\{\hat{\mu}_i\}_{i \in \hat{S}}$ , т. е. применять (8), (9) ко всем наблюдениям, не строя при этом оценок  $\{\hat{V}_i\}_{i \in \hat{S}}$  для ТК  $\{V_i\}_{i \in S}$  и избегая образования  $(\bar{L} + 1)$ -го “фонового” кластера.

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим часто используемую на практике модель смеси многомерных нормальных (гауссовских) распределений (модель Фишера [1]), когда условные плотности  $\{q_i(\cdot)\}_{i \in S}$  из (2) многомерные гауссовские:

$$q_i(\cdot) \equiv n_N(\cdot | \mu_i^0, \Sigma), \quad i \in S; \quad (14)$$

$$n_N(x | \mu_i^0, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_i^0)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_i^0)\right),$$

где  $\mu_i^0 \in K^N$  – вектор математического ожидания для наблюдений из класса  $\Omega_i$  (“центр”  $i$ -го класса), а  $\Sigma$  – общая для всех классов невырожденная ковариационная  $(N \times N)$ -матрица ( $\det(\Sigma) \neq 0$ ). В качестве метрики в (8) в данном случае целесообразно использовать “расстояние Махаланобиса” [1]:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^T \Sigma^{-1} (x - y)}, \quad x, y \in R^N, \quad (15)$$

заменяя неизвестную ковариационную матрицу  $\Sigma$  на какую-либо статистическую оценку [1–3, 6] по классифицируемой выборке  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ .

С целью экспериментального исследования эффективности кластер-процедуры 1)–3), (7)–(9) проведен вычислительный эксперимент. В модели Фишера (1), (14), (15) рассмотрен случай двух ( $L = 2$ ) равновероятных ( $\pi_1 = \pi_2 = 0,5$ ) классов  $\{\Omega_1, \Omega_2\}$  в пространстве наблюдений размерности  $N = 2$  с межклассовым расстоянием Махаланобиса  $\Delta = \rho(\mu_1^0, \mu_2^0) = 2,56$ , которому соответствует минимально возможное (байесовское) значение вероятности ошибочной классификации [1]  $r_0 = \Phi\left(-\frac{\Delta}{2}\right) = 0,1$ , где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения вероятностей нормального закона с плотностью  $n_1(\cdot | 0, 1)$ .

Методом Монте-Карло были смоделированы  $m=10$  выборок объемом  $n=20$  каждая и проведена их классификация. Использовались две модификации описанного выше метода, основанного на гистограммном подходе. При 1-й модификации классификация проводилась с помощью (7)–(9), в то время как при 2-й модификации применялись сразу (8), (9) ко всем наблюдениям. Для сравнительного анализа был реализован также хорошо известный метод “L-средних” [1, 2], основанный на итерационном повторе (8) при

известном числе классов  $L$  и начальном задании приближений для “центров” классов  $\{\mu_i^{(0)}\}_{i \in S}$ .

В качестве характеристики эффективности использовалась доля ошибочных решений [3]:

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 - \delta_{\hat{a}_i, a_i^0} \right). \quad (16)$$

Вычислялась также средняя доля ошибочных решений по всем выборкам:

$$\bar{\gamma}_n = \frac{1}{\sum_{l=1}^m \delta_{L, L}} \sum_{l=1}^m \delta_{\hat{L}^{(l)}, L} \cdot \gamma_n^{(l)}, \quad (17)$$

где  $\gamma_n^{(l)}$  – показатель (16), вычисленный для  $l$ -й выборки, если число классов определено верно (при гистограммном подходе:  $m^* = m - \sum_{l=1}^m \delta_{\hat{L}^{(l)}, L}$  – число выборок, для которых число классов определено неверно) или задано априори ( $\hat{L}^{(l)} := L, l = 1, m$ , – в методе “ $L$ -средних”).

В результате численного эксперимента метод, основанный на гистограммном подходе, ошибся при определении числа классов лишь для трех выборок из десяти ( $m^* = 3$ ), при этом средняя доля ошибочных решений (17) для 1-й модификации метода составила:  $\gamma_n = 0,06$ , а для 2-й:  $\gamma_n = 0,00$ . Средняя доля ошибочных решений в методе “ $L$ -средних”:  $\gamma_n = 0,00$ , оказалась меньше, чем в методе, основанном на гистограммном подходе. Однако следует учесть, что метод “ $L$ -средних” требует задания дополнительной априорной информации: должны быть заданы количество классов и начальные приближения для их “центров”. В методе, основанном на гистограммном подходе, эта информация не требуется: классификация производится только с использованием экспериментальных статистических данных.

Таким образом, разработанный алгоритм близок по точности классификации к известному методу “ $L$ -средних”, однако область его практического применения значительно шире.

1. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М., 1989.

2. Миленький А.В. Классификация сигналов в условия неопределенности. М., 1975.

3. Жук Е.Е., Харин Ю.С. Устойчивость в кластер-анализе многомерных наблюдений. Мн., 1998.

4. Коваленко А.П. // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 100.

5. Жук Е.Е. // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Материалы V Межгос. науч. конф. Мн., 1996. С. 95.

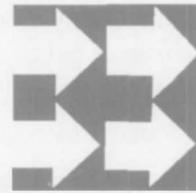
6. Боровков А.А. Математическая статистика. М., 1984.

7. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., 1986.

Поступила в редакцию 19.10.2000.

**Жук Евгений Евгеньевич** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных БГУ.

**Храмова Елизавета Владимировна** – студентка 4-го курса ФПМИ БГУ.



УДК 517.929

Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ

## К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The criterion for existence of the solutions of linear singular differential systems is proved. Analytic representation of these solutions is obtained.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему уравнений вида

$$Ax(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $x \in R^n$ ;  $A$  – постоянная  $n \times n$ -матрица;  $f(t)$  – кусочно-непрерывная  $n$ -вектор-функция;  $x_0$  – заданный  $n$ -вектор.

Считаем, что  $A \neq 0$  и  $\det A = 0$ . Требуется в аналитической форме записать решение системы (1), (2). В отличие от многих других работ, посвященных решению этой проблемы, никаких дополнительных ограничений на параметры системы (1), (2) не накладывается (для более полного обзора см., например, [1]).

Функцию  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , назовем допустимой для системы (1), если система (1) для заданной  $f(t)$  имеет хотя бы одно решение  $x(t)$ ,  $t > 0$ , такое, что  $x(0) = x_0$ .

Систему (1), (2) назовем совместной, если для каждой допустимой функции  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , она имеет в точности одно решение.

Для решения указанной выше проблемы введем некоторые определения и укажем некоторые, связанные с ней результаты.

Пусть  $P$  – некоторое числовое поле и  $A \in P_{n,n}$ . Матрицу  $X \in P_{n,n}$  назовем полуобратной для матрицы  $A \in P_{n,n}$  и обозначим ее через  $A^-$ , если она удовлетворяет матричному уравнению  $AXA = A$ . Известно, что для любой матрицы  $A$  матричное уравнение  $AXA = A$  разрешимо относительно  $X$  и это решение определяется неоднозначным образом. Если матрица  $A$  является невырожденной, то  $A^- = A^{-1}$ .

Следуя [2], докажем следующие утверждения.

**Теорема 1.** Кусочно-непрерывная функция  $f(t)$ ,  $t > 0$ , является допустимой для системы (1) тогда и только тогда, когда для любого  $t$ ,  $t > 0$ , выполняется равенство

$$(E_n - AA^-)f(t) = 0, \quad (3)$$

где  $E_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция  $f(t)$  является допустимой, которой соответствует решение  $\varphi(t)$ . Тогда для любого  $t, t \geq 0$ , выполняется равенство

$$A\varphi(t) = f(t).$$

Умножим это равенство слева на матрицу  $(E_n - AA^-)$ . Учитывая, что  $AA^-A = A$ , получаем равенство (3).

Достаточность. Пусть для любого  $t, t \geq 0$ , выполняется равенство (3). Тогда  $\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau) d\tau$  является решением задачи (1), (2). Действительно, используя (3), имеем

$$A\dot{\bar{x}}(t) = AA^- f(t) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Итак, теорема доказана.

**Теорема 2.** Если функция  $f(t), t \geq 0$ , является допустимой, то общее решение задачи (1), (2) описывается формулой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau) d\tau + \int_0^t (E_n - A^- A) u(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $u(t), t \geq 0$  – произвольная кусочно-непрерывная на промежутке  $[0, +\infty)$   $n$ -вектор-функция.

Доказательство. Нетрудно видеть, что  $x(0) = x_0$ , и с учетом (3) видим, что  $x(t), t \geq 0$ , определяемая формулой (4), является решением задачи (1), (2).

Пусть  $\psi(t), t \geq 0$ , есть произвольное решение задачи (1), (2), т. е.  $A\dot{\psi}(t) = f(t), \psi(0) = x_0$ . Тогда его можно получить из формулы (4), полагая  $u(t) = \psi(t), t \geq 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t A^- f(\tau) d\tau + \int_0^t (E_n - A^- A) \dot{\psi}(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \dot{\psi}(\tau) d\tau - \int_0^t A^- f(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t \dot{\psi}(\tau) d\tau = x_0 + \psi(t) \Big|_0^t = \\ &= x_0 + \psi(t) - \psi(0) = \psi(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

*Замечания.*

1. Если матрица  $A$  является невырожденной, то любая кусочно-непрерывная  $n$ -вектор-функция  $f(t), t \geq 0$ , является допустимой и решение системы (1), (2) описывается известной формулой  $x(t) = x_0 + \int_0^t A^{-1} f(\tau) d\tau$ .

2. В общем случае результаты теорем 1, 2 не зависят от выбора полуобратной матрицы  $A^-$ , и задача Коши (1), (2) имеет неединственное решение.

1. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Асмыкович И.К. Дескрипторные системы управления. Мн., 1988.

2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.

3. Размыслович Г.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 2. С. 76.

Поступила в редакцию 15.09.2000.

*Размыслович Григорий Прокофьевич* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГУ.

### К УСЛОВИЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕКТОРНОЙ ОЦЕНКИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ

A multicriteria problem with a finite set of vector evaluations belonging to  $R^n$  is considered. Necessary and sufficient conditions of pareto-optimality of a vector evaluation are obtained in term of the sum of exponential functions for the case when all the vector evaluation components either positive or negative.

Известно, что проблема поиска всех эффективных (парето-оптимальных) решений многокритериальной (векторной) задачи оптимизации не разрешима с помощью приема линейной свертки частных критериев (см., например, [1]). Однако в случае дискретной задачи, т. е. задачи с конечным множеством векторных оценок, удалось показать [2], что линейная свертка показательных функций от частных критериев позволяет решить эту проблему. Тем самым получены необходимые и достаточные условия эффективности решений указанной векторной задачи. В этом контексте возникает вопрос: могут ли условия эффективности решения дискретной задачи быть сформулированы в терминах простейшей линейной свертки – суммы показательных функций от частных критериев? В данной статье дается положительный ответ на этот вопрос для некоторых классов многокритериальных дискретных задач.

Отметим, что аналогичный результат в терминах суммы положительных степеней критериев получен в [3].

Математическая постановка векторной задачи оптимизации предполагает задание на множестве решений  $X$  векторного критерия

$$y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) : X \rightarrow R^n, \quad n \geq 2,$$

компоненты которого, (частные) критерии, не исключая общности, будем считать минимизируемыми

$$y_i(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Через  $Y$  обозначим множество векторных оценок, т. е. образ множества  $X$  в критериальном пространстве  $R^n$

$$Y = \{y = y(x) : x \in X\} \subseteq R^n.$$

Далее предполагаем, что  $Y$  – конечное множество, содержащее  $|Y| \geq 2$  элементов. Будем рассматривать векторные задачи вне зависимости от специфики векторного критерия  $y$ . Поэтому перейдем к векторной задаче

$$y \rightarrow \min_{y \in Y},$$

которую с учетом предположения о конечности множества  $Y$  естественно называть дискретной.

Множество эффективных векторных оценок (множество Парето) зададим следующим образом:

$$P(Y) = \{y \in Y : \pi(y) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned} \pi(y) &= \{y' \in Y : I(y, y') \cup J(y, y') = N_n, \quad I(y, y') \neq \emptyset\}, \\ I(y, y') &= \{i \in N_n : y_i > y'_i\}, \\ J(y, y') &= \{i \in N_n : y_i = y'_i\}. \end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^n, |Y| < \infty$ . Предположим, что для вектора  $\bar{y} \in Y$  выполняется одно из условий:  $\bar{y}_i < 0$  для всех  $i \in N_n$  или  $\bar{y}_i > 0$  для всех  $i \in N_n$ . Векторная оценка  $\bar{y}$  является эффективной тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $k_i > 1, i \in N_n$ , что для любого вектора  $\mathbf{y} \in Y$  справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n k_i^{y_i} \geq \sum_{i=1}^n k_i^{\bar{y}_i}. \quad (1)$$

Для эффективной векторной оценки  $\bar{y}$  в качестве вектора  $\mathbf{k}$  можно принять любой вектор  $\bar{\mathbf{k}}$  с компонентами

$$\bar{k}_i = \alpha^{\beta_i}, i \in N_n, \quad (2)$$

где

$$\alpha \geq n^\gamma, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\max\{|\bar{y}_i| : i \in N_n\}}{\min\{y_i - y'_i > 0 : \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y, i \in N_n\}},$$

$$\beta_i = \frac{1}{|\bar{y}_i|}, \quad (4)$$

и тогда

$$\min\left\{\sum_{i=1}^n \bar{k}_i^{y_i} : \mathbf{y} \in Y\right\} = \begin{cases} n\alpha, & \text{если } \bar{y}_i > 0, \\ n/\alpha, & \text{если } \bar{y}_i < 0. \end{cases} \quad (5)$$

**Доказательство.** Достаточность легко доказать методом от противного, принимая во внимание, что  $k_i > 1, i \in N_n$ .

**Необходимость.** Пусть  $\mathbf{y} \in P(Y)$  и  $\mathbf{k}$  – некоторый вектор с компонентами, определяемыми формулой (2). Нетрудно видеть, что при выполнении любого из двух условий теоремы справедливы неравенства  $k_i > 1, i \in N_n$ , поскольку числа  $\gamma$  и  $\beta_i, i \in N_n$ , и в том и другом случаях строго положительны.

Теперь докажем, что при  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$  неравенство (1) верно для любого вектора  $\mathbf{y} \in Y$ . Для этого разобьем множество  $Y$  на два непересекающихся подмножества

$$Y_1 = \{\mathbf{y} \in Y : I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) \cup J(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = N_n\},$$

$$Y_2 = \{\mathbf{y} \in Y : I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) \cup J(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) \neq N_n\}.$$

Ясно, что для всякого вектора  $\mathbf{y} \in Y_1$  имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \bar{k}_i^{y_i} \geq \sum_{i=1}^n \bar{k}_i^{\bar{y}_i}. \quad (6)$$

Далее покажем, что это неравенство верно для любого  $\mathbf{y} \in Y_2$ .

Пусть  $\mathbf{y} \in Y_2$ . Тогда из включения  $\mathbf{y} \in P(Y)$  следует, что множества  $I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})$  и  $I(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$  непусты. Поэтому для любых индексов  $i \in I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})$  и  $j \in I(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$  из равенств

$$\bar{k}_i^{\bar{y}_i} = \alpha^{\text{sign } \bar{y}_i} = \bar{k}_j^{y_j}, i, j \in N_n, \quad (7)$$

справедливых в силу (2) и (4), выводим

$$k_i^{y_i} > \bar{k}_i^{y_i} = \bar{k}_j^{y_j} > \bar{k}_j^{y_j}. \quad (8)$$

Учитывая (3) и левое неравенство в (8), находим, что

$$\alpha > n^\delta,$$

где  $\delta = \max\{|\bar{y}_i| : i \in N_n\}/(y_i - \bar{y}_i)$ , т. е.  $\bar{\kappa}_i^{y_i} \geq n\bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i}$ . Отсюда, принимая во внимание правое неравенство в (8), получим

$$\bar{\kappa}_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} \geq (n-1)(\bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j} - \bar{\kappa}_j^{y_j}),$$

откуда следует, что

$$\min\{\kappa_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} : i \in I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})\} > (n-1) \max\{\kappa_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{y_j} : j \in I(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\}.$$

Поэтому для любого вектора  $\mathbf{y} \in Y_2$  верно неравенство (6), поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{y_i} - \sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} &= \sum_{i \in I(\mathbf{y}, \mathbf{y})} (\kappa_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i}) - \sum_{j \in I(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})} (\kappa_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{y_j}) \geq \\ &\geq \min\{\kappa_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} : i \in I(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})\} - (n-1) \max\{\kappa_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{y_j} : j \in I(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\} \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6) справедливо для любого вектора  $\mathbf{y} \in Y$ , а следовательно, согласно (7) верно равенство (5).

Теорема 1 доказана.

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

2. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. // Дискретная математика. 1997. Вып. 9. № 3. С. 154.

3. Емеличев В.А., Пашкевич А.В., Янушкевич О.А. // Там же. 1999. Т. 11. Вып. 1. С. 140.

Поступила в редакцию 09.11.2000.

**Пашкевич Андрей Васильевич** – аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор В.А. Емеличев.

---

# Памяти ученого

---

## АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ БЕЛЬСКИЙ



17 марта 2001 г. безвременно ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической оптики, член-корреспондент Общественного объединения «Белорусская академия образования» Александр Михайлович Бельский.

А.М. Бельский родился 17 декабря 1944 г. в д. Ячонка Столбцовского района Минской области в семье крестьянина. В 1961 г., окончив 10 классов Засульской средней школы, поступил на физический факультет БГУ. После окончания в 1961 г. университета приступил к работе на кафедре физической оптики в должности стажера-исследователя. В это время А.М. Бельский начал свои исследования по дифракции лазерных пучков. С 1969 по 1972 г. Александр Михайлович – в аспирантуре БГУ им. В.И. Ленина. После окончания учебы в аспирантуре с февраля 1972 г. работал преподавателем кафедры физической оптики, с 1979 г. – доцентом, а с января 1998 г. – профессором.

В 1974 г. А.М. Бельский защитил кандидатскую диссертацию на тему «Дифракция лазерного излучения на поверхностях раздела оптически однородных сред», а в 1996 г. – докторскую диссертацию на тему «Структура когерентных световых пучков и ее преобразование плоскостойкими диэлектрическими средами».

Основные научные интересы профессора А.М. Бельского находились в области оптики когерентных световых пучков. Здесь им получен ряд важных результатов: разработан общий метод решения задачи дифракции произвольного когерентного пучка на слоистых средах, определены условия наблюдения и величины эффектов поперечного и продольного сдвигов пучка при отражении, предсказан эффект неравенства угла отражения пучка углу падения (незеркальный эффект), определены все структуры, обладающие свойством самоизображения при освещении их когерентным пучком. Ряд исследований А.М. Бельского посвящен истории развития естествознания в Великом княжестве Литовском.

На протяжении работы в БГУ А.М. Бельский зарекомендовал себя как один из лучших преподавателей физического факультета. Под его руководством создана структурно-логическая схема спецкурсов для специализации физическая оптика, им разработаны программы и читался ряд важнейших спецкурсов «Электромагнитная теория света», «Кристаллооптика», «Физика лазеров» для оптических специализаций университета. В 2000 г. вышло в свет учебное пособие «Оптика когерентных световых пучков». Александр Михайлович является автором более 60 научных работ, соавтором монографий «Квантовая электроника и лазерная спектроскопия» (1974), «Пространственная структура лазерного излучения» (1982), «Вялікае мастацтва артылеры: Казімір Семяновіч» (1992).

Многие годы А.М. Бельский был членом методической комиссии физического факультета и членом его ученого совета. С 2000 г. он являлся членом ученого совета университета по защите докторских диссертаций. Более 15 лет он являлся бессменным ответственным секретарем серии I журнала «Вестник БГУ».

Александр Михайлович отличался исключительной добротой и отзывчивостью, высокой культурой и обширнейшей эрудицией, простотой общения и высокой принципиальностью.

Светлая память об Александре Михайловиче навсегда сохранится в памяти всех его соратников, преподавателей, сотрудников и студентов физического факультета и университета и всех, кому приходилось с ним общаться.

От имени коллег, преподавателей и сотрудников физического факультета  
профессора Е.С. Воропай, А.А. Минько

## РЕФЕРАТЫ

*УДК 541.423*

Загогин А.П., Червяковский К.И., Булойчик Ж.И., Маслова Г.Т. **Количественный экспресс-анализ некоторых биоэлементов крови** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Разработана экспресс-методика количественного определения жизненно важных макро- и микроэлементов в крови людей и животных методом атомно-эмиссионной многоканальной спектрометрии.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

*УДК 537.311*

Шаршунов Д.В., Соловьев В.С. **Изучение формы импульсов фотопроводимости в алмазе типа Па** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Проведено моделирование формы импульсов собственной и примесной фотопроводимости в алмазе типа Па. Рассмотрены случаи различных соотношений между длительностью импульса возбуждения и собственным временем жизни фотоносителей. В каждом из указанных случаев выделены основные факторы, определяющие форму импульсов.

Библиогр. 7 назв., ил. 2.

*УДК 621.382.82.001*

Мулярчик С.Г., Шевкун И.М., Зиневич А.А. **Учет трехмерных эффектов при расчете сопротивления пассивной области базы биполярного планарного транзистора** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Приведены методика расчета сопротивления пассивной области базы биполярного планарного транзистора на основе решения краевой задачи для уравнения Пуассона и результаты трехмерного численного моделирования сопротивления пассивной области базы биполярного планарного транзистора. Дано сравнение с двумерным расчетом. Показано влияние характера распределения примеси в базе и глубин залегания эмиттерного и коллекторного переходов транзистора на точность двумерного расчета.

Библиогр. 6 назв., табл. 2, ил. 2.

*УДК 621.396.67*

Демидчик В.И., Корнев Р.В. **Антенная модель киральных рассеивателей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Методом интегральных уравнений проанализированы рассеивающие свойства киральной частицы в виде витка спирали с подключенными к нему прямолинейными проводниками.

Библиогр. 3 назв., ил. 3.

*УДК 621.382.323-416*

Борздов В.М., Галенчик В.О. **Моделирование методом частиц переноса электронов в субмикронном МОП-транзисторе с учетом ударной ионизации** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Разработана численная модель переноса электронов в субмикронном МОП-транзисторе, с помощью которой исследовано влияние процесса ударной ионизации на дрейфовую скорость и кинетическую энергию электронов в канале прибора.

Библиогр. 10 назв., ил. 2.

*УДК 621.382.323-416*

Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. **Аппроксимация начального участка ВАХ высоколегированного МОП-ПТ** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Предлагается методика аппроксимации начального участка ВАХ высоколегированного МОП-ПТ в диапазоне изменения стокового напряжения, меньшего удвоенного потенциала в нейтральном объеме, которая позволяет рассчитать ток стока, напряжение насыщения тока стока при заданных конструктивно-технологических параметрах прибора и напряжении затвора. Расчетные ВАХ согласуются с измерениями.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.382.33-185.4: 621.382.323-085.4

Белоус А.И., Ефименко С.А., Понарядов В.В., Прибыльский А.В. Сравнительный анализ быстродействия биполярного и МОП-транзисторов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Дается сопоставительный анализ основных характеристик биполярного и МОП-транзисторов, определяющих их быстродействие в составе БикМОП БИС. Приведено сравнение времени пролета через активную структуру «исток–сток» и «эмиттер–коллектор», крутизны, плотности тока и геометрических размеров *n-p-n*- и *n*-МОП-транзисторов. Сформулированы требования к граничной частоте биполярного транзистора в БикМОП БИС. Приведены результаты экспериментальных исследований.

Библиогр. 6 назв., табл. 2, ил. 3.

УДК 539.2116.2

Пилипенко В.А., Анищик В.М., Пономарь В.Н., Пилипенко И.В. Электрофизические и механические свойства дисилицида титана, полученного с применением быстрой термообработки // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2001. № 2.

Установлено, что напряжения в дисилициде титана, полученном с применением БТО, имеют такую же величину и знак, как и при формировании дисилицида титана с применением длительной термообработки, и в основном определяются разницей в коэффициентах термического расширения дисилицида и кремния. Показано, что с увеличением температуры БТО системы титан–кремний микротвердость формируемого силицида уменьшается вплоть до образования его конечной фазы – дисилицида титана. Меньшее значение микротвердости дисилицида титана обуславливается более совершенной структурой и низкой дефектностью данных пленок по сравнению с пленками, полученными с применением длительной термообработки. Установлено, что при температуре БТО ниже 720 °С формируется высокоомная фаза силицида титана, обогащенная металлом, где основную роль в удельном сопротивлении играют *d*-электроны металла. При температуре 720 °С и выше формируется низкоомная обогащенная кремнием фаза силицида титана, где основную роль в удельном сопротивлении играют *s*-, *p*-электроны кремния.

Библиогр. 7 назв., ил. 3.

УДК 537.612

Добрянский В.М., Малишевский В.Ф., Францкевич Н.Б., Яруничев В.П. Физические свойства оксидов и купратов, синтезированных на основе соединений  $ZrV_2$  и  $Nb_3Sn$  // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Синтезированы оксиды и купраты на основе сверхпроводящих соединений  $ZrV_2$  и  $Nb_3Sn$ . Измерены их температурные зависимости электропроводности, диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь в диапазоне от азотных до компактных температур.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 621.327.8:535.41

Саечников В.А., Чернявская Э.А., Янукович Т.П. Численное моделирование рассеяния Бриллюэна в оптическом волокне при синусоидальной модуляции сигнала // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Рассмотрен метод измерения температуры и деформации от распределенного источника с помощью оптоволоконных сенсоров, с использованием рассеяния Бриллюэна в комбинации с анализом частотного домена. Проведено теоретическое исследование метода в рамках трех- и двухволновой модели взаимодействия. Получено выражение для комплексной передаточной функции. Проведено численное моделирование функции отклика одномодового оптического волокна с областями повышенной температуры и деформированными областями.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 539.12.124.6

Бирзгал Е.А. Исключение дифференциальной нелинейности времяизмерительного тракта при обработке данных по наблюдению осцилляций спина позитрония // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Предложен новый метод нахождения дифференциальной нелинейности по позитрониевому спиновому вращению, который позволяет исключить ее непосредственно в процессе обработки данных. Прямое измерение дифференциальной нелинейности в данном эксперименте невозможно, так как ее величина существенным образом зависит от загрузки время-измерительного тракта и может меняться в ходе эксперимента. Установлено, что систематическая ошибка, вызванная дифференциальной нелинейностью, превышает в 1,3 раза статистическую ошибку эксперимента.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 532.135

Мартыненко М.Д., Босьяков С.М. **Поверхности слабых и сильных разрывов в вязкоупругих жидких средах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

С позиции общей теории характеристик рассматривается существование сильных и слабых разрывов в жидких средах. Получены скорости распространения волн и дисперсионные соотношения для идеальной и вязкой несжимаемой жидкостей.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.926.4

Прохорова Р.А., Шевцов И.Л. **Об ограниченных решениях слабо нелинейных систем с  $L^p$ -дихотомичным линейным приближением** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Рассмотрены слабо нелинейные системы  $\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) + \mu\varphi(t, y)$ , где  $A(\cdot): R \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$  – непрерывная матрица, вектор-функция  $\varphi(t, y)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в  $R^{n+1}$ ,  $f(t) \in L_q(K)$ ,  $q > 1$ .

В случае, если линейная часть системы обладает  $L^p$ -дихотомией на  $R$ ,  $p > 1$ , получены достаточные признаки существования и единственности ограниченного на  $R$  решения системы.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.925

Чичурин А.В. **О специальной линейной системе Шази** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

При указанных коэффициентных условиях для  $a_k (k=1, 6)$  найдено решение системы линейных уравнений шестого порядка. Эта система представляет собой необходимое условие принадлежности нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками  $P$ -типу.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.62

Репников В.И. **О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Изучаются свойства функционалов, связанных с решениями линейных дифференциальных систем специального вида и являющихся обобщением известного отношения Рэлея. Показано, что эти функционалы имеют непосредственное отношение к спектру матрицы рассматриваемой системы, что позволяет эффективно использовать их при изучении качественных характеристик последней.

Библиогр. 2 назв.

УДК 612.821:007

Емельяненко В.И., Батурина Л.Н. **Подходы к решению задачи оценки научно-технической деятельности** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2001. № 2.

Исследуются методологические подходы к решению задачи оценки результатов научных исследований и развития инновационных процессов, а также выявления приоритетных направлений научной деятельности. Для структурирования решения задачи используется динамическая модель роста в условиях переходного периода экономики.

Библиогр. 6 назв., ил. 1.

УДК 519.2

Зеневич Д.В. **Об устойчивости прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии ошибок в задании параметров** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Исследуется устойчивость прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии ошибок в задании коэффициентов авторегрессии. Вычислен риск прогнозирования, получено его асимптотическое разложение, найдена точная верхняя граница риска, оценен максимальный уровень  $\delta$ -допустимых искажений, исследован безусловный риск прогнозирования, оценена минимальная длительность наблюдения временного ряда, необходимая для построения  $\delta$ -допустимой ОМП-оценки вектора коэффициентов авторегрессии.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.24

Соболева Т.В. **Вычисление первых двух моментов расширенной периодограммы дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Определяется расширенная периодограмма дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса и для нее вычисляются математическое ожидание и дисперсия.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.24

Труш Н.Н., Цеховая Т.В. **Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки вариограммы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Построена оценка вариограммы стационарного случайного процесса с дискретным временем. Найдены выражения для смешанных семиинвариантов высших порядков построенной оценки, рассмотрено их асимптотическое поведение.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.24

Марковская Н.В. **Предельное распределение оценок смешанных моментов высших порядков** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2001. № 2.

В статье находится предельное распределение оценок смешанных моментов высших порядков стационарных случайных процессов при ограничениях на смешанные семиинварианты.

Библиогр. 9 назв.

УДК 519.2

Жук Е.Е., Храмова Е.В. **Кластер-анализ многомерных случайных наблюдений по гистограммной оценке плотности распределения вероятностей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Рассматривается проблема непараметрического кластер-анализа многомерных наблюдений. Предложена новая кластер-процедура, основанная на гистограммной оценке плотности-смеси вероятностных распределений, описывающих классы, и проведено ее аналитическое и экспериментальное исследование.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.929

Размыслович Г.П. **К проблеме аналитического представления решений сингулярных дифференциальных систем** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Для простейшей неоднородной сингулярной дифференциальной системы рассматривается задача Коши в самых общих предположениях на параметры системы. Указываются необходимые и достаточные условия ее разрешимости, а также приводится формула, описывающая все ее решения.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.10

Пашкевич А.В. **К условиям эффективности векторной оценки многокритериальной дискретной задачи** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 2.

Рассматривается многокритериальная задача оптимизации с конечным множеством векторных оценок, принадлежащих  $R^n$ . Получены необходимые и достаточные условия парето-оптимальности векторной оценки в терминах суммы показательных функций от критериев в случае, когда все компоненты векторной оценки либо положительны, либо отрицательны.

Библиогр. 3 назв.

## CONTENTS

### PHYSICS

<i>Zazhigin A. P., Chervyakowsky K. I., Buloichik J. I., Maslova G. T.</i> Quantitative express-analysis of some bioelements in blood.....	3
<i>Sharshunov D.V., Solov'yev V.S.</i> Studying of photoconductivity pulse form in type IIa diamond.....	7
<i>Mulyarchik S.G., Shevkun I.M., Zinevich A.A.</i> Computation of the base resistance of bipolar transistors including three-dimensional effects.....	11
<i>Demidchik V.I., Kornev R.V.</i> Antenna model of chiral scatterers.....	14
<i>Borz dov V.M., Galenchik V.O.</i> Simulation of the electron transport in submicron MOSFET with account of impact ionization using particles.....	16
<i>Andreev A.D., Belsky A.M., Valiev A.A.</i> The approximation of the initial region of high-dopant MOS FET current-voltage characteristic.....	19
<i>Belous A.I., Efimenko S.A., Ponaryadov V.V., Pribylski A.V.</i> Comparison of high speed analysis of bipolar and MOS-transistors.....	22
<i>Pilipenko V.A., Anishchik V.M., Ponomar V.N., Pilipenko I.V.</i> Electrophysical and mechanical properties of titanium disilicide obtained using rapid heat treatment.....	29
<i>Dobryanski V.M., Malishevski V.F., Franzkevich N.V., Yarunichev V.P.</i> Physical properties of oxides and kourprates are synthesised on the basis of the overconducting combinations $ZrV_2$ and $Nb_3Sn$ .....	34
<i>Saetchnikov V.A., Chernyavskaya E.A., Yanukovich T.P.</i> Numeric modelling brillouin scattering in optical fiber in the case of signal sinusoidal modulation.....	36
<i>Birzgal E.</i> Elimination of differential nonlinearity of time-measuring tract in data processing of positronium spin rotation experiments.....	44

### MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Martynenko M.D., Bociakov S.M.</i> Surfaces of weak and strong discontinuities in viscous liquid medium.....	48
<i>Prokhorova R.A., Shevtsov I.L.</i> On bounded solutions of weakly nonlinear systems with $L^p$ -dichotomous linear approximation.....	52
<i>Chichurin A.V.</i> On the special linear system of J. Chazy.....	56
<i>Repnikov V.I.</i> About properties of some functionals connected with differential systems....	60
<i>Emelyanenkov V.I., Baturina L.N.</i> The approaches to the decision of a task of a rating of scientific and technical activity.....	65
<i>Zenevich D.V.</i> On robustness of forecasting under misspecified autoregressive time series model.....	69
<i>Soboleva T.V.</i> The first two momenta calculation of a enlarged periodogram of the discrete real stable stationary random process.....	72
<i>Troush N.N., Tsekhovaya T.V.</i> Asymptotic behavior of higher order semi-invariants of the variogram estimate.....	74
<i>Markovskaya N. V.</i> Limit distribution of estimates of mixed moments of higher orders.....	77
<i>Zhuk E.E., Khramova E.V.</i> Cluster analysis of random multivariate observations based on histogram as estimator of probability density function.....	80

### BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Razmyslovich G.P.</i> On the problem of analytic representation of the solutions of singular differential systems.....	87
<i>Pashkevich A.V.</i> On efficiency conditions of a vector evaluation of a multicriteria discrete problem.....	89

### TO THE MEMORY OF SCIENTIST

Alexander Mikhailovich Belski.....	92
Summary.....	93

1013 p.

Индекс 74851