ISSN 0321-0367

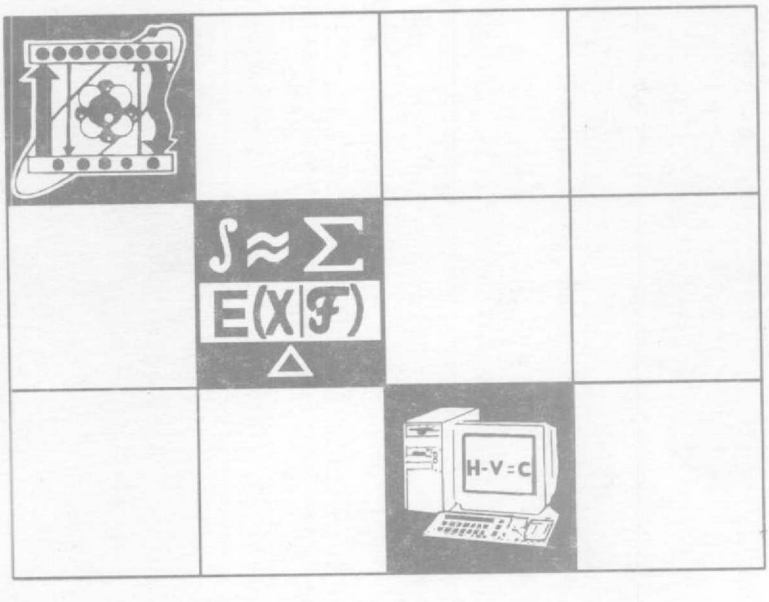
ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

3/2000



ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

3/2000

Сентябрь

МИНСК
БГУ

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Регистрационный №805

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2000. № 3

Редактор *И.А. Лешкевич*

Корректор *Л.А. Меркуль*

Технический редактор *Ю.И. Денисов*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Р.Е. Овсянниковым и Ю.И. Денисовым*

Подписано в печать 20.09.2000. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.
Усл.печ. л. 8,4.Усл. кр.-отт. 8,92. Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 400 экз. Заказ 728.
Цена 630 р.

Адрес редакции: 220080, Минск, ул. Бобруйская, 7, к. 412, 413. Тел. 206-64-52.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в Издательском центре БГУ.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.

Физика

УДК 530.12

А.В. ГРИНЧУК, Е.А. УШАКОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУТЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ де СИТТЕРА

Propagator in de Sitter space is calculated on the base of path integrals. The method of evaluation of path integrals for particles with spin is proposed. The calculations are compared with that in quantum mechanics.

Пространство де Ситтера в общей теории относительности играет особую роль: во-первых, оно является искривленным, и, во-вторых, обладает максимальной группой симметрии. В связи с этим существует возможность исследовать влияние гравитации на квантовые процессы, опираясь на точные аналитические выражения.

Одной из важнейших величин, используемой квантовой теорией поля, является пропагатор, посредством которого выражаются вакуумное среднее значение тензора энергии-импульса, интенсивность рождения пар и т. д. Более того, пропагатор играет центральную роль в процедуре перенормировки в искривленном пространстве-времени [1].

В данной работе для вычисления пропагатора предлагается использовать фейнмановские интегралы по путям. Такой подход приводит к достаточно наглядной и простой интерпретации процесса взаимодействия квантовой частицы с внешним гравитационным полем. В работе [2] использовались методы теории возмущений, однако в симметричных пространствах можно надеяться на получение точного решения. Действительно, развитие теории интегрирования по путям привело к появлению методов, решающих эту проблему для скалярной частицы [3].

Фейнмановский интеграл для частицы со спином включает в себя дополнительно еще оператор параллельного переноса, что значительно усложняет вычисление пропагатора. В работах [4, 5] был предложен метод расчета, пригодный для двумерных пространств. В этом случае параллельный перенос выражается через фазовый множитель, так как группа вращений локального пространства в двумерном случае абелева. Непосредственно использовать эти методы в пространствах более высокой размерности не удается. Более того, не удается напрямую использовать формализм, разработанный в [3, 7], поскольку ОТО имеет дело с более широким классом многообразий, чем нерелятивистская квантовая механика.

В итоге задача о вычислении пропагатора для частиц со спином в пространстве де Ситтера требует решения целого ряда вспомогательных задач, начиная с простейшей из них – вычисления пропагатора скалярной частицы в двумерном пространстве.

1. Скалярная частица в двумерном пространстве де Ситтера

Метрика в горициклических координатах имеет вид:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{t^2}\left(dt^2 - dx^2\right). \quad (1)$$

Тогда оператор Лапласа можно записать как:

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad (2)$$

или в терминах "операторов импульса" $p_\mu = \frac{1}{i}\frac{1}{g^{1/4}}\partial_\mu g^{1/4}$ (см. [6, 7]):

$$\Delta = -\frac{t}{\alpha}\left(p_t{}^2 - p_x{}^2\right)\frac{t}{\alpha}. \quad (3)$$

Согласно общей теории [6], пропагатор выражается посредством континуального интеграла:

$$G(x'', x') = \left\langle x''\right|\frac{1}{\Delta + m^2}\left|x'\right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty ds\, e^{-im^2 s/2}\int Dx(s)\, Dp(s) \exp\left\{i\int\left(p\,dx - H(p,x)ds\right)\right\} =$$

$$= \int_0^\infty ds\, e^{-im^2 s/2}\int Dx(s)\exp\left\{i\int\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu ds + \Delta V_{QP}(x)ds\right)\right\}, \quad (4)$$

где ΔV_{QP} – квантовый потенциал [6, 7], а эффективный гамильтониан системы H пропорционален оператору Лапласа

$$H = -\frac{1}{2}\Delta = -\frac{1}{2}\frac{1}{g^{1/2}}\partial_\mu g^{\mu\nu}\sqrt{g}\,\partial_\nu = \frac{1}{2}\frac{1}{g^{1/4}}p_\mu g^{1/4}g^{\mu\nu}g^{1/4}p_\nu\frac{1}{g^{1/4}}. \quad (5)$$

В частности, в двумерном пространстве де Ситтера гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2}\frac{t}{\alpha}\left(p_t^2 - p_x^2\right)\frac{t}{\alpha}, \quad (6)$$

а пропагатор

$$G(t'', x''; t', x') = \left\langle t'', x''\right|\frac{1}{\Delta + m^2}\left|t', x'\right\rangle =$$

$$= \left\langle t'', x''\right|\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{t}{\alpha}\left(p_t^2 - p_x^2\right)\frac{t}{\alpha} - \frac{m^2}{2}}\left|t', x'\right\rangle =$$

$$= \left\langle t'', x''\right|\frac{\alpha}{t}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(p_t^2 - p_x^2\right) - \frac{m^2\alpha^2}{2t^2}}\frac{\alpha}{t}\left|t', x'\right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha^2}{t't''}\int_0^\infty ds\int Dx(s)\, Dt(s)\exp\left\{i\int\left(\frac{\dot{t}^2 - \dot{x}^2}{2} + \frac{m^2\alpha^2}{2t^2}\right)ds\right\}. \quad (7)$$

В последнем интеграле переменные t и x входят в подынтегральное выражение независимо, поэтому разделение переменных не вызывает затруднений. Для переменной x задача сводится к задаче о свободной нерелятивистской частице, в нашем случае результат удобнее записать в виде фурье-разложения.

$$\int Dx(s)\ \exp\left\{-i\int\frac{\dot{x}^2}{2}ds\right\}=\int\frac{d\,p_x}{2\pi}\exp\left(i\,p_x\,(x''-x')+i\frac{p_x^2}{2}\right), \tag{8}$$

после чего для интеграла по t получим:

$$\int Dt(s)\exp\left\{i\int\left(\frac{\dot{t}^2}{2}+\frac{m^2\alpha^2}{2t^2}\right)ds\right\}. \tag{9}$$

В работах [3, 7] подробно изучены интегралы вида (9). Они возникают при исследовании задачи о свободной частице в полярных координатах. Пропагатор может быть представлен в виде разложения по функциям Бесселя:

$$G(t'',t';s)=\int p_t\,dp_t\sqrt{t't''}J_\nu(p_t\,t'')\,J_\nu(p_t t')\,e^{-i\,p^2\,s/2}, \tag{10}$$

где $\nu=\sqrt{1/4-m^2\alpha^2}$.

2. Частица со спином в двумерном пространстве де Ситтера

Связность Γ_μ в двумерном пространстве выражается через единственный оператор группы вращения [5]:

$$\Gamma_x=-\frac{1}{t}\Sigma_{tx}. \tag{11}$$

В изотропном базисе вычисление оператора параллельного переноса сводится к вычислению фазового множителя, а в эффективном лагранжиане появляется дополнительное слагаемое:

$$L_{eff}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{t^2}\left(\dot{t}^2-\dot{x}^2\right)+i\frac{\sigma}{t}\dot{x}\right), \tag{12}$$

где σ – спиновый вес [5]. Задача сводится к квантовомеханической с гамильтонианом вида:

$$H=\frac{p_t^2-p_x^2}{2}-i\frac{p_x}{t}\sigma+\frac{\sigma^2-m^2\alpha^2}{2t^2}.$$

При интегрировании по t (с учетом $p_x=\mathrm{const}$) мы имеем дело с радиальной кулоновской проблемой. Ее решение методами континуального интегрирования можно найти в [8]. Пропагатор получен в виде разложения по собственным функциям:

$$G(t'',x'';t',x')=\int p\,dp\,e^{i\,p(x''-x')}\psi(p,t'')\psi^*(p,t'), \tag{13}$$

где

$$\psi(p,t)=i^{6\nu}(2k)^\sigma\frac{\Gamma(\sigma+\nu)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\nu)}M_{\sigma,\nu}(2i\,pt),$$

$\nu=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\sigma^2-m^2\alpha^2+1/4}$, $M_{\sigma,\nu}(x)$ – функция Уиттекера.

3. Учет граничных условий

Использованные разложения пропагатора (10), (13) были получены при решении квантовомеханических проблем в полярных координатах. При этом неявно действует ограничение: радиальная координата изменяется в пределах $(0,\infty)$. Это приводит к использованию принципа зеркального отражения (см. обсуждение граничных условий в [3, 7]):

$$\psi(r)\to\psi(r)-\psi(-r).$$

В пространстве де Ситтера соответствующая координата t изменяется от $t=-\infty$ до $t=\infty$, поэтому необходимо отбросить отраженную часть волны.

Проще всего это сделать, исследуя асимптотику собственных функций, так как при $t \to \infty$ эффективный потенциал $\left(-i \frac{p_x}{t} \sigma + \frac{\sigma^2 - m^2 \alpha^2}{2t^2} \right)$ стремится к нулю, а собственные функции – к $\exp(\pm i\, p_t\, t)$. Для скалярной частицы было получено разложение по функциям Бесселя с асимптотикой

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{1}{2i} \left(e^{i(x - n\pi/2 + \pi/4)} - e^{i(x - n\pi/2 + \pi/4)} \right).$$

Необходимой асимптотикой обладают функции Ганкеля:

$$H_n^{(1)}(p\,x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i\,p\,x}, \quad H_n^{(2)}(p\,x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-i\,p\,x},$$

функция Бесселя представляет собой их линейную комбинацию. Тогда для временной части пропагатора получим разложение

$$G(t'', t'; s) = \int p_t\, dp_t \sqrt{t' t''} H_\nu^{(2)}(p_t\, t'') H_\nu^{(2)}(p_t t') e^{-i p^2 s/2},$$

$$\nu = \sqrt{1/4 - m^2 \alpha^2}\,. \tag{14}$$

Аналогично для частицы со спином мы должны перейти от функции Уиттекера первого рода $M_{k,\nu}(x)$ к функции Уиттекера второго рода $W_{k,\nu}(x)$:

$$W_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2 - m - k)} x^{m+1/2} e^{-x/2}\; {}_1F_1(m + 1/2 - k;\, 2m + 1; x) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(1/2 + m - k)} x^{-m+1/2} e^{-x/2}\; {}_1F_1(-m + 1/2 - k;\, -2m + 1; x)\,, \tag{15}$$

обладающей необходимой асимптотикой:

$$W_{k,m}(x) \sim x^k e^{-x/2},\ x \to \pm\infty\,.$$

Функции $M_{k,\nu}(x)$ являются линейной комбинацией $W_{k,\nu}(x)$ и $W_{-k,\nu}(-x)$.

4. Четырехмерное пространство де Ситтера

В данном случае:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{t^2}(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = \frac{\alpha^2}{t^2}(dt^2 - (dx^i)^2),$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 = \frac{t}{\alpha}\left(p_t^2 - (p_i)^2 + \frac{2 - m^2\alpha^2}{t^2} + \frac{2i\alpha^2}{t} p_i \Sigma_{0j} \eta^{ij} \right)\frac{t}{\alpha} -$$

$$- \frac{1}{\alpha^2} \Sigma_{0i} \Sigma_{0j} \eta^{ij} = H_0 + W\,, \tag{16}$$

где $\Sigma_{\mu\nu} = \Sigma_{[\mu\nu]}$ – генераторы группы Лоренца, $W = -\frac{1}{\alpha^2} \Sigma_{0i} \Sigma_{0j} \eta^{ij}$, $\eta^{\alpha\beta}$ – тензор Минковского, латинские индексы принимают значение от 1 до 3. При этом в изотропном базисе

$$\mathbf{l} = \frac{\alpha}{t}\left(\frac{dt + dx}{\sqrt{2}} \right),\ \mathbf{n} = \frac{\alpha}{t}\left(\frac{dt - dx}{\sqrt{2}} \right),\ \mathbf{m} = \frac{\alpha}{t}\left(\frac{dy + i\,dz}{\sqrt{2}} \right),\ \mathbf{m}^* = \frac{\alpha}{t}\left(\frac{dy - i\,dz}{\sqrt{2}} \right)$$

последнее слагаемое в (16) уже не диагонализируется. Например, для векторных полей

$$\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Без данного слагаемого оператор имеет практически такой же вид, как и в двумерном пространстве. Если выбрать ось X по направлению пространственной части импульса ($p_\mu=(p_t,p,0,0)$), то первое слагаемое может быть записано как

$$\frac{t}{\alpha}\left(p_t^2-(p_i)^2+\frac{2-m^2\alpha^2}{t^2}+\frac{2i\alpha^2}{t}p\,\sigma\right)\frac{t}{\alpha},$$

где σ=1 для l^α, σ=–1 для n^α, σ=0 для m^α, $m^{\alpha *}$, после чего вычисление пропагатора сводится к вычислению континуальных интегралов для различных σ. Результат снова может быть представлен в виде разложения по собственным функциям:

$$G(t'',t';p)=\int dk\begin{pmatrix}\ldots & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{e}_\mu\otimes\mathbf{e}_\mu\ {}_\sigma\psi_{k,p}(t'')\ {}_\sigma\psi^*_{k,p}(t') & 0\\ 0 & 0 & \ldots\end{pmatrix},$$

$${}_\sigma\psi_{k,p}(t)=i^{6\nu}\frac{\Gamma(1/2+\nu-\sigma)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\nu+1)}W_{\sigma,\nu}(2ikt),$$

$$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{-m^2\alpha^2+\sigma^2+17/4}.$$

5. Векторная частица в пространстве де Ситтера

Для вычисления пропагатора частицы со спином необходимо учесть отброшенный ранее член $-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}$. В четырехмерном пространстве не существует единой простой формулы для полей различного спина, как в двумерном, так как явный вид матрицы $-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}$ существенно зависит от конкретного представления группы Лоренца (скалярное, спинорное и т. д.). Однако можно предложить общий метод вычислений, используя тот факт, что $-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}$ – постоянная матрица, не зависящая от координат и импульсов. Тогда для бесконечно малого шага по собственному времени ε:

$$e^{-i\varepsilon(H_0+W)}\approx e^{-i\varepsilon H_0}e^{-i\varepsilon W},$$

а разложение $e^{-i\varepsilon H_0}$ по собственным функциям уже было нами рассмотрено. Пропагатор будет представлять собой бесконечное произведение множителей вида:

$$\int dk\begin{pmatrix}\ldots & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i\ {}_\sigma\psi_{k,p}(t'')\ {}_\sigma\psi^*_{k,p}(t')e^{-im^2\varepsilon} & 0\\ 0 & 0 & \ldots\end{pmatrix}e^{i\varepsilon\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}/\alpha^2}. \quad (17)$$

Решение ищем в виде разложения по линейным комбинациям функций Уиттекера, при этом асимптотические выражения для $W_{\sigma,\nu}(2ikt)$ подставляются в (17). Пропагатор векторной частицы получим в виде:

$$G = \frac{\alpha^2}{t''t'}\int d^3k\exp(ik_i(x''^i - x'^i))\sum_{i=1}^{4}\psi_i(k,t'')\otimes\psi_i^*(k,t'), \qquad (18)$$

$$\psi_1(t,k) = \frac{1}{\sqrt{k}}(\mathbf{l}((-\frac{1}{4}+\nu^2)W_{-1,\nu}(2ikt) - W_{0,\nu}(2ikt)) +$$

$$+\mathbf{n}(W_{1,\nu}(2ikt) - W_{0,\nu}(2ikt))), \qquad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{21/4 - m^2\alpha^2};$$

$$\psi_2(t,k) = -\frac{1}{\sqrt{k}}(\mathbf{l}((-\frac{1}{4}+\nu^2)W_{-1,\nu}(2ikt) + W_{0,\nu}(2ikt)) +$$

$$+\mathbf{n}(W_{1,\nu}(2ikt) + W_{0,\nu}(2ikt))), \qquad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{13/4 - m^2\alpha^2};$$

$$\psi_3(t,k) = \mathbf{m}\sqrt{t}H_\nu^{(1)}(-kt), \qquad \psi_4(t,k) = \mathbf{m}^*\sqrt{t}H_\nu^{(1)}(-kt),$$

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{13/4 - m^2\alpha^2}. \qquad (19)$$

* * *

Интеграл по путям для частиц со спином включает в себя дополнительный элемент – оператор параллельного переноса. Его учет требует разработки новых методов вычисления континуальных интегралов. В данной работе использовался следующий подход: интеграл по путям в четырехмерном пространстве де Ситтера схож с интегралом по путям в двумерном пространстве. Различие заключается в постоянной недиагональной матрице в экспоненте. На первом шаге вычисления ведутся без данной матрицы, затем ее вклад можно учесть, например, с использованием теории возмущений. При этом нужно соблюдать осторожность в применении методов квантовой механики: возникающие задачи напоминают нерелятивистские радиальные задачи, однако "радиус" (в нашем случае – временная координата t) изменяется в более широких пределах $(-\infty, \infty)$.

В работе приведен результат расчета только для векторных частиц, однако вычисление интегралов по путям для частиц с другим спином не вызывает принципиальных затруднений, достаточно вычислить явный вид матрицы $-\frac{1}{\alpha^2}\Sigma_{0i}\Sigma_{0j}\eta^{ij}$.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф99–178).

1. Биррелл Н., Девис П. Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984.
2. Bekenstein J. D., Parker L. // Physical Review. 1981. Vol. 23D. P. 2850.
3. Grosche C., Steiner F. // J. of Mathematical Physics. 1995. Vol. 36. P. 2354.
4. Гринчук А.В. // Гравитация и электромагнетизм. 1998. Вып. 6. С. 63.
5. Grinchuk A.V., Ushakov E.A. // Gravitation and Cosmology. 1999. Vol. 5. P. 173.
6. DeWitt B.S. // Rev. Mod. Phys. 1957. Vol. 29. P. 377.
7. Grosche C., Steiner F. Handbook of Feynman Path Integrals. Berlin, 1998.
8. Steiner F. // Physical Letters. 1984. A 109. P. 363.

Поступила в редакцию 29.06.2000.

УДК 535.37

И.М. ГУЛИС, В.В. КИСЛЫЙ, В.А. ЦВИРКО

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ СЛОЖНЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ В МАТРИЦЕ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТА

The temperature dependences of luminescence spectra for triglycine sulfate crystals doped by organic molecules are interpreted based on changes of the spontaneous polarization determining the spectral shifts due to orientational interactions.

Применение сегнетоэлектриков в устройствах детектирования оптических сигналов и обработки информации базируется на способности этих материалов претерпевать фазовые переходы с изменением состояния спонтанной поляризации в зависимости от температуры, а также структурные перестройки под действием электрических полей, приводящие к изменению коэффициентов преломления либо характеристик светорассеяния материала [1]. Принципиально возможен и другой подход к использованию сегнетоэлектрических материалов, основанный на управлении оптическими (спектроскопическими) характеристиками примесей, в частности молекулярных, внедренных в сегнетоэлектрические материалы, путем индуцируемых внешними воздействиями структурных перестроек матрицы-хозяина [2]. Исследованию спектроскопических характеристик сложных органических молекул, внедренных в неорганические кристаллы, посвящено весьма ограниченное число работ (см. [3–6], а также приведенный в них обзор более ранних публикаций). В них раскрывается возможность синтеза ряда допированных органическими красителями ионных кристаллов, в том числе и некоторых сегнетоэлектрических, приведены спектры поглощения и люминесценции для некоторых систем, показана возможность получения стимулированного излучения при лазерной накачке. Как следует из упомянутых работ, вопрос о характере внедрения молекул красителя в матрицу неорганического кристалла изучен явно недостаточно; в связи со сложностью системы поиск молекул-активаторов, которые могут быть упорядоченно внедрены в матрицу в достаточно высокой концентрации, носит эмпирический характер, причем учитываются возможности замещения определенных структурных единиц кристалла ионами красителя.

В работе [7] предпринята попытка детектирования фазовых переходов в кристаллах дигидрофосфата калия и триглицинсульфата путем анализа временных характеристик люминесценции внедренных в кристалл молекул триптофана. В областях фазовых переходов наблюдаются слабо выраженные особенности кинетических характеристик, однако интерпретация результатов оказывается неоднозначной.

В настоящей работе приводятся результаты исследования спектрально-люминесцентных характеристик сложных органических молекул профлавина (ПФ) и лазерного красителя кумарина-25 (К-25) в матрице триглицинсульфата (ТГС). Целью работы является установление спектроскопических проявлений структурных перестроек кристалла при изменении температуры и выяснение особенностей механизмов формирования спектральных сдвигов за счет взаимодействия полярной молекулы активатора с локальным полем сегнетоэлектрической матрицы. Вопрос представляет фундаментальный интерес в плане возможностей использования допирующих молекул в качестве спектроскопических зондов микроокружения, а также актуален в связи с обсуждавшейся в [2] перспективой создания новых материалов с управляемыми спектроскопическими характеристиками для применения в устройствах оптической обработки и отображения информации.

Выбор объектов и методов исследования определялся следующими соображениями.

1. Полярные молекулы сложных органических соединений типа красителей обладают электронными спектрами поглощения и испускания, положение которых в полярном окружении существенно зависит от структуры и динамики окружения [8]. Спектральные сдвиги при переводе молекулы из газовой фазы (или неполярного растворителя) в полярную среду составляют сотни (и тысячи) обратных сантиметров, что сопоставимо с шириной колебательно-уширенных полос электронных переходов. Сечения оптических переходов велики (10^{-16}–10^{-17} см^2), что позволяет получать достаточно высокую оптическую плотность и интенсивность люминесценции в геометрически тонких слоях при невысоких уровнях допирования (10^{-6} и менее весовых частей).

2. Изучение спектров люминесценции предпочтительно как по соображениям чисто методическим (чувствительность, возможность работы с рассеивающими образцами), так и в плане их более высокой информативности при исследовании эффектов, обусловленных взаимодействием молекул с окружением [8].

3. ТГС является достаточно хорошо изученным сегнетоэлектриком [1, 9], водорастворимым (что упрощает процедуру получения допированного сложными молекулами материала), имеющим температуру Кюри фазового перехода второго рода в удобной для эксперимента области (T_c = 49 °С). (Отметим, что в процессе подбора объектов проводились эксперименты с другим сегнетоэлектриком – нитритом калия, привлекательным для модельных исследований вследствие простой структуры ячейки и возможности наглядного представления ее изменений при фазовом переходе [1]; однако выяснилось, что люминесценция исследованных красителей в кристалле сильно потушена, что, вероятнее всего, обусловлено индуцированием нитритными группами интеркомбинационных безызлучательных переходов.)

4. Выбор органических соединений-активаторов в отсутствие обоснованных представлений о механизмах внедрения сложных молекул в полярную кристаллическую матрицу проводился путем скрининга по достаточно широкому набору (более двадцати) водорастворимых органических красителей, обладающих высоким квантовым выходом люминесценции, как катионных, так и анионных. Можно ожидать, что катионные красители должны замещать глициновые группы ТГС, а анионные – сульфатные группы. Предварительными критериями нахождения "удачного" активатора являлись следующие: получение активированных кристаллов с достаточно высокой концентрацией красителя внутри кристалла (адсорбция красителя на дефектах поверхности контролировалась путем удаления поверхностного слоя); интенсивная люминесценция; отсутствие особенностей в спектрах люминесценции в виде дополнительных концентрационно-зависимых полос, свидетельствующих об агрегации красителей; подобие наблюдающейся в водном растворе формы контура спектра.

Методика приготовления образцов ТГС, активированных красителями, включала введение в насыщенный раствор ТГС при T=49 °С малого объема водного раствора красителя, обеспечивающего конечную концентрацию на уровне 10^{-3} моль/л; медленное (1 ч) охлаждение раствора до комнатной температуры с последующей выдержкой в течение 10–15 ч; многократную отмывку выпавших кристаллов (размеры порядка 2–5 мм) ацетоном. Концентрация красителя в полученных кристаллах составляла примерно 10^{-6} моль/л.

Измерения спектров люминесценции проводились на установке, включающей два монохроматора МДР-6У (на возбуждении и регистрации люминесценции). Регистрация осуществлялась ФЭУ-79 в режиме счета фотонов с накоплением информации в компьютере, который также управлял разверткой спектров.

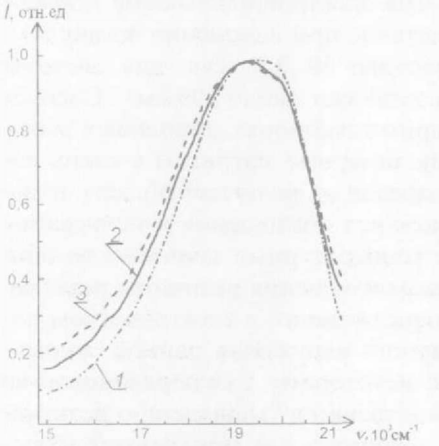


Рис. 1. Спектры люминесценции профлавина в ТГС. Длина волны возбуждения 420 (*1*), 450 (*2*), 460 нм (*3*)

На рис. 1 приведены спектры люминесценции кристаллов ТГС, активированных профлавином (ПФ) при различных длинах волн возбуждения, лежащих в пределах длинноволновой полосы поглощения красителя; следует обратить внимание на зависимость положения спектров от длины волны возбуждения, свидетельствующую о спектральной, а следовательно, и структурной гетерогенности образца, т. е. о реализации внедрения молекул ПФ в области кристалла с различными локальными полями. Существенным является то, что для другого красителя – К-25 – зависимость спектра испускания от частоты возбуждения практически отсутствует, что может рассматриваться как свидетельство в основном однотипного внедрения молекулярного активатора в матрицу ТГС.

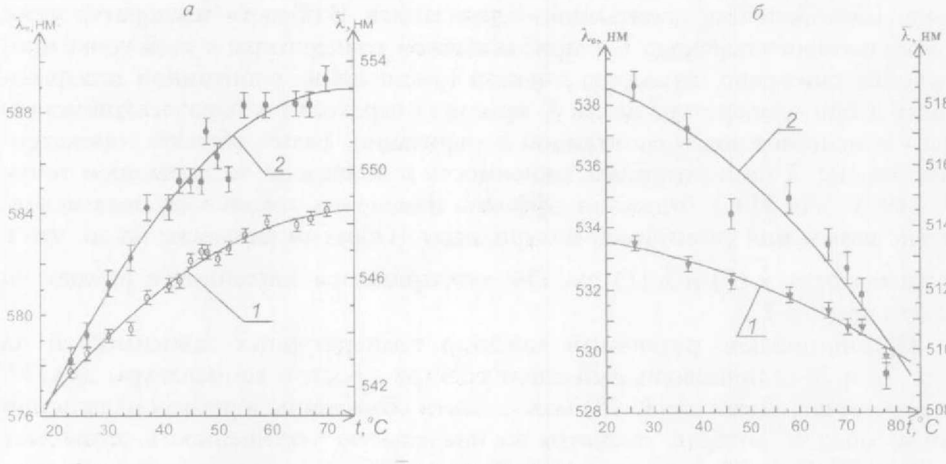


Рис. 2. Температурные зависимости $\bar{\lambda}(T)$ (*1*) и $\lambda_e(T)$ (*2*) для систем ТГС – профлавин (*а*) и ТГС – кумарин-25 (*б*)

Рис. 2 иллюстрирует зависимость положения спектров люминесценции кристаллов ТГС, активированных ПФ (рис. 2*а*) и К-25 (рис. 2*б*), от температуры при возбуждении длинами волн вблизи максимумов спектров поглощения (возбуждения флуоресценции). Результаты представлены в виде зависимости от температуры "центра тяжести" спектра $\bar{\lambda} = \int \lambda I(\lambda) d\lambda / \int I(\lambda) d\lambda$ (см. рис. 2*а, б,* кривые *1*), а также положения точки λ_e на длинноволновом склоне полосы испускания, отвечающей интенсивности 0,5 от максимума (см. рис. 2*а, б,* кривые *2*). Приведенные в таком виде результаты позволяют получить представление об изменении ширины контура спектра с температурой: с ростом T в случае ПФ длинноволновый сдвиг спектра сопровождается уширением, сдвиг длинноволнового края спектра превышает сдвиг коротковолнового края и центра тяжести. В противоположность этому для К-25 имеют место коротковолновый сдвиг и сужение спектра с ростом температуры.

При анализе полученных температурных зависимостей обращают внимание аномально большие величины сдвигов спектров испускания примесных молекул в сегнетоэлектрическом кристалле при изменении температуры в относительно малом диапазоне (порядка 50 °С). Так, для системы ТГС – ПФ сдвиг центра тяжести спектра составляет около 200 $см^{-1}$. Следует отметить, что в "обычных" твердых полярных растворах дипольных молекул (стеклующиеся полярные растворы, полимерные матрицы) в таких небольших диапазонах температур (если диапазон не включает область плавления матрицы) температурные сдвиги спектров поглощения и испускания оказываются весьма малыми [8]. Слабые температурные зависимости объясняются тем, что в твердых растворах малы изменения величины реактивного поля, действующего со стороны поляризованного в электрическом поле дипольной молекулы активатора полярного окружения данной молекулы: повышение температуры приводит к некоторому разупорядочиванию ориентаций молекул диэлектрика и соответственно к уменьшению реактивного поля, но для малого спектрального диапазона, как показывают теоретические оценки и экспериментальные результаты, эффект мал.

Совершенно иная ситуация складывается в случае сегнетоэлектрика. В сегнетоэлектрической фазе наличие спонтанной поляризации должно приводить к тому, что доминирующим фактором, определяющим задаваемые состоянием микроокружения сдвиги частот перехода, является локальное поле, обусловленное спонтанной поляризацией. В области температур ниже точки фазового перехода T_c с приближением температуры к этой точке происходит снижение параметра порядка (уменьшение спонтанной поляризации), а при температуре выше T_c кристалл переходит в параэлектрическую фазу с исчезновением спонтанной поляризации. Таким образом, приведенные на рис. 2 температурные зависимости в диапазоне, включающем точку T_c (49 °С для ТГС), отражают эффекты изменения локального поля вследствие изменения спонтанной поляризации. (Обратим внимание на то, что в зависимостях $\overline{\lambda}(T)$ и $\lambda_e(T)$ для ПФ усматривается тенденция к выходу на плато при $T > T_c$.)

Принципиально различный характер температурных зависимостей на рис. 2*а* и 2*б* (длинноволновый сдвиг спектра с ростом температуры для ПФ и коротковолновый для К-25) может найти объяснение в рамках излагаемой ниже модели, которая, несмотря на предельную упрощенность, позволяет получить общее качественное представление о возможных спектроскопических проявлениях состояния спонтанной поляризации в допированных полярными молекулами сегнетоэлектриках.

Пусть μ_g и μ_e – дипольные моменты молекулы активатора в основном и возбужденном состояниях. Будем полагать, что $\mu_e > \mu_g$ (что чаще всего имеет место), а также для упрощения будем считать, что векторы μ_g и μ_e параллельны. (Для основного и первого возбужденного состояний сложных молекул чаще всего угол между μ_g и μ_e действительно мал [8].) Рассмотрим случай, когда молекула внедряется в матрицу таким образом, что $\mu_{e(g)}$ параллельны ориентации поля спонтанной поляризации E_s. Такое внедрение, которое в дальнейшем будем называть ориентационно-упорядоченным, доставляет системе минимум энергии ориентационного взаимодействия. Соответственно понижение уровня энергии основного (возбужденного) состояния за счет данного взаимодействия составит $\Delta U_{g(e)} = -\mu_{g(e)} E_s$, что приведет к сдвигу частоты перехода в длинноволновую область на величину $\Delta\nu = -\Delta\mu E_s$, где $\Delta\mu = \mu_e - \mu_g$. Очевидно, что уменьшение значения E_s с ростом температуры должно приводить к уменьшению определяемого ориентационными взаимодействиями сдвига $\Delta\nu$, т. е. к коротковолновому сдвигу спектра. Именно такая ситуация может иметь место в системе ТГС– К-25 (рис. 2*б*). Здесь же уместно обратить внимание на упоминавшуюся слабую зависимость спектров люминесценции системы ТГС – К-25 от частоты возбуждения, указывающую на преимущественно упорядоченное внедрение активатора. Можно было бы, однако, ожидать, что с достижением T_c после перехода кристалла в параэлектрическую фазу зависимость $\bar{\lambda}(T)$ выйдет на плато. Причиной отсутствия этого плато (см. рис. 2*б*) может служить известный эффект повышения температуры фазового перехода за счет закрепления структуры на примесных центрах [1].

Рассмотренный случай ориентационно-упорядоченного внедрения не является единственно возможным, так как структура кристалла и характер внедрения примеси определяются не только ориентационными взаимодействиями, но и стерическими факторами, которые могут привести к внедрению дипольной молекулы таким образом, что векторы дипольного момента $\mu_{e(g)}$ не будут совпадать с направлением E_s. Для наглядности уместно рассмотреть предельный случай "ориентационно-напряженного" внедрения, при котором $\mu_{e(g)}$ и E_s антипараллельны. Нетрудно убедиться, что в этом случае ориентационные взаимодействия дают коротковолновый вклад в спектральный сдвиг $\Delta\nu = +\Delta\mu E_s$, который должен уменьшаться по мере снижения E_s с ростом температуры, что проявится в виде длинноволнового сдвига спектра. Можно полагать, что такая ситуация приближенно отражает поведение системы ТГС – ПФ (рис. 2*а*). Разумеется, в реальной системе следует принимать во внимание возможности различных ориентаций примесных молекул, различную степень закрепления структуры на дефектах. С учетом этих (а также других, детально не анализируемых здесь) осложняющих факторов объяснима как спектральная гетерогенность системы, так и отсутствие четко выраженного перегиба в зависимости $\bar{\lambda}(T)$ в области точки Кюри.

Приведенные результаты могут служить основой для работ по поиску новых допированных сегнетоэлектрических материалов, спектроскопические характеристики которых чувствительны к температуре и внешним электрическим полям.

1. Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М., 1981.
2. Гулис И.М., Цвирко В.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 1. С. 3.
3. Kahr B., Sei-Hum Jang, Subramony J.A. et.al. // Adv. Mater. 1996. Vol. 8. № 11. P. 941.
4. Sedarous S., Subramony J.A., Kahr B. // Ferroelectric. 1997. Vol. 191. P. 301.
5. Subramony J.A., Sei-Hum Jang, Kahr B. // Ibid. P. 293.
6. Kelley M.P., Janssens B., Kahr B., Vetter W.M. // J. Am. Chem. Soc. 1994. Vol. 116. № 12. P. 5519.
7. Sedarous S. // Ferroelectric Lett. 1998. Vol. 23. P. 107.
8. Бахшиев Н.Г. Спектроскопия межмолекулярных взаимодействий. Л., 1972.
9. Цедрик М.С. Физические свойства кристаллов семейства триглицинсульфата. Мн., 1986.

Поступила в редакцию 29.06.2000.

УДК 535.317.1

Ю.В. ГРИЦАЙ, В.В. МОГИЛЬНЫЙ

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОТОИНДУЦИРОВАННЫХ ДЕФЕКТОВ НА ДИНАМИКУ ФАЗОВЫХ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕТОК В АНТРАЦЕНСОДЕРЖАЩИХ ПОЛИМЕРНЫХ СЛОЯХ

Influence of recording beam intensity on diffraction efficiency kinetics of phase holographic gratings in anthracene-containing polymer is investigated. An enhancement of the gratings without an inversion of their phase contrast is explained by interactions of photoinduced defects, leading to captured solvent molecules releasing. The calculating model including this process is in qualitative agreement with experimental data.

Дифракционная эффективность (ДЭ) фазовых голограмм в полимерных слоях, включающих производные антрацена, определяется как фотодимеризацией антраценовых молекул, так и вызываемой ею диффузией подвижных низкомолекулярных примесей [1, 2]. Это позволяет вести голографическую запись в режимах, обеспечивающих получение высококачественных объемных голограмм (низкая ДЭ в процессе экспонирования и постэкспозиционное усиление [3]). Естественно, выбор оптимальных условий записи облегчается наличием модели, учитывающей основные фотоиндуцированные процессы, вносящие вклад в изменение оптических свойств среды.

В настоящей работе рассматриваются особенности кинетики ДЭ фазовых голографических решеток (ФГР) в антраценсодержащих полимерных слоях, возникающие при увеличении интенсивности записывающих пучков.

При умеренных интенсивностях (освещенность оптически тонкого слоя в максимумах интерференционной картины <10 мВт/см^2) распределение показателя преломления в среде на основе полиметилметакрилата, содержащей 10 мол. % 9-антральдегида (9-АА) и до 10 мол. % остаточного растворителя – хлороформа, описывается выражениями [1]:

$$\Delta n = \frac{(n^2+2)^2}{6n} k\left[\frac{R_S\delta}{\gamma}\left(1-\exp(-\gamma t)\right) + (2R_M - R_D - R_S\delta)t\right],\ t < t_e, \qquad (1)$$

$$\Delta n = \frac{(n^2+2)^2}{6n} k\Big[R_S\delta\big(t_e - \gamma^{-1}\exp(-\gamma t)(\exp(\gamma t_e)-1)\big) - (2R_M - R_D)t_e\Big],\quad t \ge t_e, \qquad (2)$$

где Δn – амплитуда модуляции показателя преломления n, R_M, R_D и R_S – молярные рефракции 9-АА, его фотодимера и хлороформа соответственно, δ – коэффициент захвата молекул хлороформа образующимися при фотодимеризации в полимерной среде структурными дефектами. Параметры k и γ задаются выражениями:

$$k = I_0\varepsilon\varphi c\ln 10/(h\nu N_A),\ \gamma = 4\pi^2 D/\Lambda^2,$$

в которых I_0 – амплитуда модуляции интенсивности, ε – коэффициент экстинкции 9-АА на частоте ν, φ – квантовая эффективность его фотодимеризации, c – начальная концентрация 9-АА, N_A – число Авогадро, D – коэффициент диффузии хлороформа, Λ – период световой решетки.

Пропускающие голографические решетки записывались излучением аргонового лазера (длина волны λ=488 нм) по схеме с симметричным падением пучков в слоях толщиной h=50–80 мкм. В соответствии с (1), (2) и выражениями для ДЭ объемных (3) и плоских (4) фазовых голографических решеток [4]:

$$ДЭ=\sin^2(\pi h\Delta n/\Lambda\cos\Theta), \qquad (3)$$

$$ДЭ= J_1^2(\pi h\Delta n/\Lambda\cos\Theta), \qquad (4)$$

где h – толщина слоя, Θ – половина угла схождения записывающих пучков, J_1 – функция Бесселя первого порядка, экспериментально регистрируются кинетики ДЭ, примеры которых приведены на рис. 1. Их характерной особенностью является переход ДЭ через нулевое значение либо в течение времени экспонирования, либо в постэкспозиционный период (в зависимости от соотношения скоростей поглощения света и диффузии хлороформа [1]). Эта особенность – следствие инверсии решетки n, т. е. изменения ее фазы на π. Необходимо отметить, что соответствие экспериментальных кривых выражениям (1), (2) достигается при использовании жесткого покровного слоя для предотвращения релаксации фотоиндуцированных дефектов – центров захвата подвижных молекул, образуемых фотодимерами [3]. Тогда коэффициент δ может считаться постоянной величиной в течение всего процесса формирования ФГР.

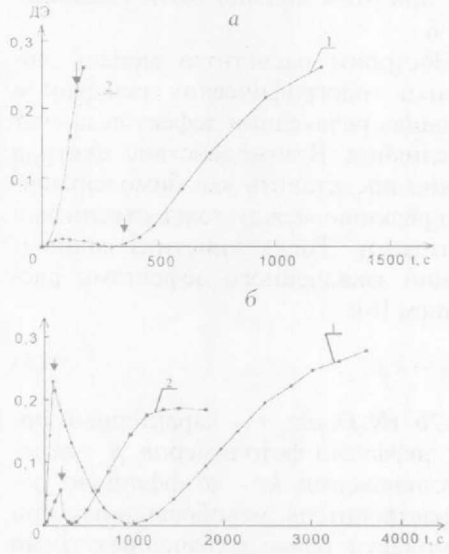


Рис. 1. Зависимость дифракционной эффективности от времени для голограмм с пространственным периодом 6,7 (*а*), 37 мкм (*б*) при температуре 315 (1*а*), 341 (2*а*), 335 (1*б*), 348 К (2*б*).

Стрелками отмечены моменты прекращения экспонирования

В рассматриваемой среде качественные отклонения наблюдаемой экспериментально кинетики ДЭ ФГР от теоретической (выражения (1), (2)) были обнаружены нами и при наличии покровного слоя. На рис. 2*а* приведены кинетические кривые, полученные в идентичных условиях, но при различных значениях I_0. Экспериментальная кривая *1* соответствует (1), (2), о чем свидетельствует ее совпадение с расчетной кривой *1* (γ=0,0032 c^{-1}, δ=1,92; k=$7{,}6 \cdot 10^{-7}$ моль·см$^{-3}$·с$^{-1}$). После трехкратного увеличения интенсивности записывающего излучения возникают качественные отклонения от кинетики, описываемой (1), (2) (кривая *2*). Как и следовало ожидать, в этом эксперименте благодаря более высокой скорости фотодимеризации вначале преобладает вклад этого процесса в изменение Δn, так как диффузия хлороформа не успевает его компенсировать. В целом Δn<0, т. е. в более освещенных местах показатель преломления ниже, а решетка имеет отрицательный фазовый контраст. В противоречие с моделью последний сохраняется в течение всего времени экспонирования (ДЭ не достигает 0), а после его прекращения решетка усиливается. Такую кинетику можно объяснить, если предположить, что с течением времени коэффициент захвата δ уменьшается, ослабляя вклад диффузионного процесса в Δn, в результате чего ДЭ начинает возрастать, не достигнув нулевого значения. Тогда дальнейшее возрастание ДЭ после прекращения экспонирования будет обусловлено диффузионными потоками хлороформа, «освобожденного» дефектами в результате уменьшения δ.

Введем величину δ_{eff} как решение относительно δ уравнения (3) с учетом (1), (2) и левой частью, определяемой экспериментальными кривыми (см. рис. 2*а*). Зависимости δ_{eff} от времени, рассчитанные при указанных значениях параметров γ и k, приведены на рис. 2*б*. Уменьшение δ_{eff} (кривая *2*) при более высокой интенсивности можно рассматривать в случае отрицательных значений Δn как свидетельство падения δ согласно (1), (2).

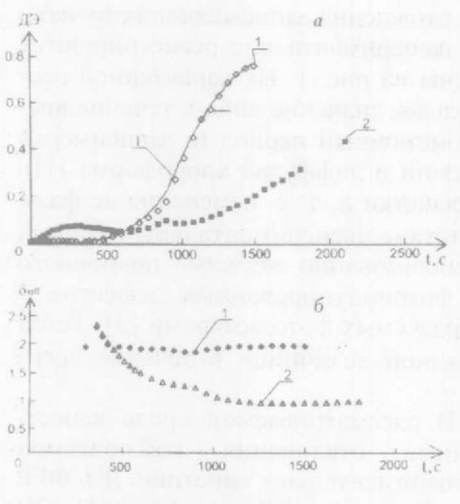


Рис. 2. Экспериментальные (*1, 2*) и рассчитанная (*1*) по формулам (1), (2) зависимости дифракционной эффективности (*а*), а также δ_{eff} (*б*) от времени при различной интенсивности записывающих пучков.

Температура 293 К, время экспонирования t_e=900 с, $I_2=3I_1$, I_1=5 мВт·см$^{-2}$, Λ=3,8 мкм

В кристаллических твердых телах известен эффект слияния дефектов [5], понижающий их общую энергию. Можно предположить, что в результате диффузии происходит слияние фотоиндуцированных дефектов и в стеклообразных полимерах. Этот процесс можно представить как диффузионное сближение фотодимеров и взаимодействие их полимерного окружения с понижением избыточной энергии механических напряжений последнего. Естественным результатом при этом должно быть уменьшение δ.

Построим расчетную модель динамики голографических решеток в условиях релаксации дефектов за счет их слияния. Взаимодействие центров можно представить как бимолекулярную реакцию между тождественными частицами. Тогда кинетика концентрации захваченного дефектами растворителя c_{S0} будет определяться уравнением [6]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_{S0} = \delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_D - k_3 c_{S0}^2, \qquad (5)$$

где c_D – концентрация фотодимеров, $k_3=2\delta^{-1}rN_A D_D p k_4$, r – характерный радиус взаимодействия, D_D – коэффициент диффузии фотодимеров, p – вероятность взаимодействия дефектов при столкновении, k_4 – коэффициент освобождения (отношение числа молекул растворителя, освобожденных при взаимодействии двух дефектов, к числу молекул, ранее захваченных этими же дефектами). Решение (5) из-за нелинейности правой части не будет строго синусоидальным. Будем рассматривать динамику амплитуды модуляции n гармонического распределения с основной пространственной частотой. Для близкого к синусоидальному периодического распределения вклад основной частоты намного превышает вклад кратных частот. Например, при диффузионной модификации даже прямоугольного распределения вклад неосновных гармоник не превышает 10 % [7]. Поэтому для качественного анализа можно перейти к уравнению для амплитуды основной гармоники:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta c_{S0} = \begin{cases} k\delta - k_3(\Delta c_{S0})^2, & t < t_e, \\ -k_3(\Delta c_{S0})^2, & t \ge t_e \end{cases} \qquad (6)$$

Уравнение для амплитуды модуляции концентрации подвижного (незахваченного) растворителя Δc_{S1} имеет вид [1]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta c_{S1} = -\gamma\Delta c_{S1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta c_{S0}. \qquad (7)$$

Кинетика амплитуды модуляции концентрации антраценового компонента и фотодимера описывается выражениями, приведенными в [1].

Решения (6), (7) при начальном условии $\Delta c_{S0}(0)=\Delta c_{S1}(0)=0$ и условии сшивания при $t=t_e$ имеют вид:

$$\Delta c_{S0} = \frac{a(\exp(bt)-1)}{\exp(bt)+1}, \quad t < t_e, \qquad (8)$$

$$\Delta c_{S0} = \left(k_3 (t - t_e) + \frac{\exp(bt) + 1}{a(\exp(bt) - 1)} \right)^{-1}, \quad t \ge t_e, \tag{9}$$

$$\Delta c_{S1} = -\exp(-\gamma t) \int_0^t \frac{4k\delta \exp((b+\gamma)\tau)}{(\exp(bt) + 1)^2} d\tau, \quad t < t_e, \tag{10}$$

$$\Delta c_{S1} = \exp(-\gamma(t - t_e)) \left(\Delta c_{S1}(t_e) + \int_{t_e}^{t} \frac{k_3 \exp(\gamma(\tau - t_e))}{(k_3 \tau + c)^2} d\tau, \quad t \ge t_e, \right. \tag{11}$$

где введены следующие обозначения:

$$a = \sqrt{\frac{k\delta}{k_3}}; \qquad b = 2\sqrt{kk_3\delta}; \qquad c = \frac{\exp(bt_e) + 1}{a(\exp(bt_e) - 1)} - k_3 t_e.$$

Модельные кривые рассчитывались с использованием формулы Лорентц – Лоренца, записанной в форме [1]:

$$\Delta n = \frac{(n^2 + 2)^2}{6n} \sum_i R_i \Delta c_i, \tag{12}$$

где R_i и Δc_i – рефракция и амплитуда модуляции концентрации i-го компонента с учетом (8)–(11), при этом интегрирование проводилось численно по методу Симпсона. Анализ модельных кривых показал, что в некотором диапазоне параметров при изменении интенсивности (параметра k) происходит качественная трансформация зависимости $\Delta n(t)$ (рис. 3). При k=3,8·10^{-7} моль·см$^{-3}$·с$^{-1}$ кривая *1* соответствует экспериментальной кривой *1* на рис. 2*а*. Пятикратное увеличение k (кривая *2*) приводит к тому, что отрицательный фазовый контраст сохраняется на всем протяжении эксперимента, при этом модельная кривая демонстрирует все характерные элементы экспериментальной: увеличение амплитуды модуляции показателя преломления на начальном участке, уменьшение, затем снова увеличение перед прекращением экспонирования. После прекращения экспонирования следуют незначительный спад и дальнейшее увеличение с сохранением отрицательного фазового контраста.

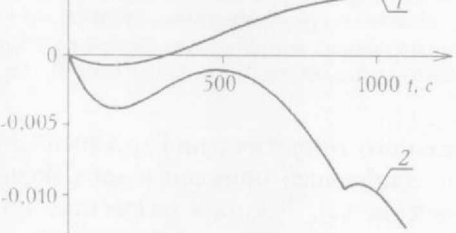


Рис. 3. Зависимость Δn от t, рассчитанная согласно (8)–(12) при следующих значениях параметров:
γ=0,0032 с$^{-1}$, δ=1,92, t_e=900 с, k=3,8·10^{-7} (1), 1,9·10^{-6} моль·см$^{-3}$·с$^{-1}$ (2)

Модельные кривые на рис. 3 рассчитывались по реально измеренным параметрам γ, δ, R_S, R_D, R_M, значения параметра k_3, при которых наблюдалась такая трансформация кривых с увеличением интенсивности, лежали в пределах k_3=2–3 см^3·моль$^{-1}$·с$^{-1}$. Считая вероятность взаимодействия p=1, коэффициент освобождения k_4=1 (полное освобождение захваченных молекул при взаимодействии дефектов) и характерный радиус взаимодействия примерно равным диаметру молекулы (r~10^{-9} м), получим значение коэффициента диффузии фотодимеров D_D≈10^{-20} м^2·с$^{-2}$, что согласуется с данными по коэффициентам диффузии антраценоподобных молекул в полиметилметакрилате [8]. Малое значение коэффициента диффузии и обычно небольшие степени фотопревращения являются причиной того, что в обычных условиях диффузионным взаимодействием дефектов можно пренебречь. Режим записи с релаксацией дефектов можно также наблюдать, по-видимому, при сильно отличающихся по интенсивности записывающих пучках [9], когда постоянная составляющая интенсивности создает необходимую концентрацию фотодимеров.

Таким образом, при больших степенях фотопревращения наблюдаются отклонения эволюции фазовых голограмм от модели со стабильными центрами захвата. В этом случае возможно усиление без инверсии фазового контраста. Наиболее вероятной причиной отклонений является взаимодействие дефектов, приводящее к освобождению ранее захваченных фотонейтральных молекул (растворителя). Построенная с учетом этого обстоятельства расчетная модель качественно согласуется с экспериментом.

Исследования проводились при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Могильный В.В., Грицай Ю.В. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т. 83. № 5. С. 832.
2. Mogilny V.V., Gritsai Y.V. // Proceed. SPIE. 1996. Vol. 2896. P. 125.
3. Mogilny V.V., Gritsai Y.V // Ibid. 1998. Vol. 3402. P. 100.
4. Шварц К.К. Физика оптической записи в диэлектриках и полупроводниках. Рига, 1986.
5. Ковтуненко П.В. Физическая химия твердого тела. Кристаллы с дефектами. М., 1993.
6. Денисов Е.Т. Кинетика гомогенных химических реакций. М., 1988.
7. Райченко А.И. Математическая теория диффузии в приложениях. Киев, 1981.
8. Вениаминов А.В., Лашков Г.И., Ратнер О.Б. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 60. № 1. С. 142.
9. Могильный В.В., Сидоренко М.М., Станкевич А.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1991. № 2. С. 21.

Поступила в редакцию 26.04.2000.

УДК 621.315.592

П.И. ГАЙДУК, Ю.В. ЧЕРНЯВСКАЯ, А.Н. ЛАРСЕН (Дания), В.С. ТИШКОВ, Ф.Ф. КОМАРОВ

КОНЦЕНТРАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОДВИЖНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА И УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ИМПЛАНТИРОВАННЫХ СПЛАВАХ $Si_{1-x}Ge_x$

Carrier mobility and resistivity of epitaxially grown $Si_{1-x}Ge_x$ layers are investigated by differential Hall measurements. The layers of $Si_{1-x}Ge_x$ alloy were epitaxially grown by MBE on Si wafers. Implantation of As ($8\cdot10^{15}$ cm^{-2}) as well as rapid thermal annealing were applied for alloy doping. The dependence of carrier mobility and resistivity are obtained as a function of $Si_{1-x}Ge_x$ composition.

Зависимости подвижности (μ_s) и удельного сопротивления (ρ_s) имплантированных слоев от концентрации (n) легирующей примеси имеют большое фундаментальное и прикладное значение [1]. Так, при разработке новых приборов и интегральных схем важным является прогнозирование их параметров, например пробивных напряжений, токов утечки *p-n*-переходов, которые напрямую связаны с концентрацией легирующей примеси. Для контроля уровня легирования непосредственно в техпроцессе обычно используют неразрушающие методы, например, холловские измерения слоевого сопротивления и подвижности носителей заряда [2]. Измерения подвижности носителей также позволяют проводить оценки структурного качества имплантированных слоев [3, 4]. В кремниевой технологии зависимости μ_s и ρ_s от концентрации носителей исследованы достаточно подробно [2–6]. В последние годы особый интерес связан с развитием технологий на основе SiGe-сплавов, перспективных для создания нового поколения полупроводниковых приборов [7]. Электрофизические свойства имплантационных слоев $Si_{1-x}Ge_x$-сплавов исследованы недостаточно. Это в первую очередь касается концентрационных зависимостей подвижности и удельного сопротивления. В настоящей работе такие исследования проведены на примере гетероэпитаксиальных структур $Si_{1-x}Ge_x/Si$, имплантированных ионами мышьяка после быстрого термического отжига (БТО).

Материал и методика

Исследования выполнялись на слоях эпитаксиальных $Si_{1-x}Ge_x$-сплавов с композиционным составом x=0,2÷0,5. Слои выращивались методом молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ) на подложках (001) Si с использованием технологии композиционного варьирования. Процедура эпитаксии включала последовательный рост буферного слоя Si до толщины 0,1 мкм, композиционно-изменяемого буфера $Si_{1-x}Ge_x$ с градиентом изменения состава сплава 10 ат. % Ge на 1 мкм толщины и, наконец, финальный слой сплава необходимого стехиометрического состава до толщины 2 мкм. В каждом образце во время эпитаксиального роста проводилось фоновое легирование атомами бора до концентрации $3\cdot10^{15}$ см$^{-3}$. Температура подложек во время МЛЭ составляла 800 °С. Композиционный состав каждого образца контролировался с помощью метода резерфордовского обратного рассеяния. По данным просвечивающей электронной микроскопии выращенные слои содержали остаточные (ростовые) дислокации в концентрации менее 10^6 см$^{-2}$. Имплантация ионов As^+ проводилась при комнатной температуре до дозы $8\cdot10^{15}$ см$^{-2}$. В зависимости от композиционного состава $Si_{1-x}Ge_x$-сплава энергия имплантации выбиралась таким образом, чтобы концентрационный пик имплантированного As составлял $9\cdot10^{20}$ см$^{-3}$ при одинаковом значении среднего проецированного пробега Rp=100 нм и страгглинга ΔRp=30 нм в каждом образце. После имплантации образцы отжигались в атмосфере аргона при температуре 900–1000 °С в течение 15 с. Для исследования электрофизических характеристик легированных слоев применялся метод измерения эффекта Холла и проводимости в сочетании с прецизионным послойным стравливанием.

Результаты и их обсуждение

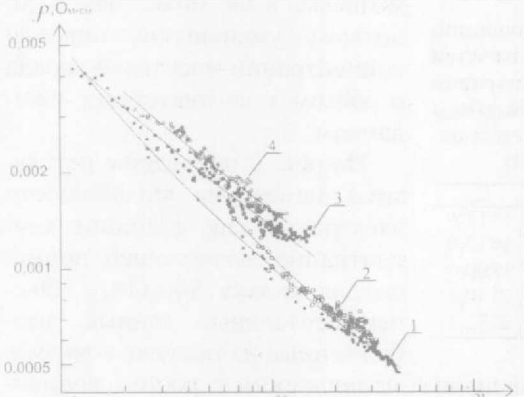


Рис. 1. Зависимость удельного сопротивления от концентрации носителей заряда:
1 – Si, *2* – $Si_{0,85}Ge_{0,15}$, *3* – $Si_{0,55}Ge_{0,45}$, *4* – $Si_{0,5}Ge_{0,5}$

В результате проведенных исследований электрофизических свойств гетероэпитаксиальных слоев сплавов $Si_{1-x}Ge_x$ для композиционного интервала $0<x<0{,}5$ установлено, что как удельное сопротивление слоев, так и подвижность носителей заряда (электронов) существенным образом зависят от концентрации легирующей примеси, а также от стехиометрического состава сплавов. Величина удельного (слоевого) сопротивления является одной из наиболее критичных характеристик при контроле технологических процессов [8], используемой, например, для оценки концентрации легирующей примеси. Поэтому важным является установление зависимости удельного сопротивления от концентрации легирующей примеси для различных значений композиционного состава сплава. На рис. 1 приведены

Таблица 1

Подгоночные параметры для интерполяции экспериментальных результатов зависимостей удельного сопротивления от их концентрации для Si и сплавов $Si_{0,85}Ge_{0,15}$, $Si_{0,55}Ge_{0,45}$, $Si_{0,5}Ge_{0,5}$, имплантированных ионами As^+ ($8\cdot10^{15}$ $см^{-2}$) после быстрого термического отжига (БТО)

Стехиометрический состав	*a*	*b*	*c*	*d*
Si	0,043	6,1 *e*-18	-1,59	2,30
$Si_{0,85}Ge_{0,15}$	1,300	3,9*e*-19	-23,63	0,10
$Si_{0,55}Ge_{0,45}$	1,900	2,3*e*-16	-54,60	0,09
$Si_{0,5}Ge_{0,5}$	20,300	1,2*e*-15	-52,10	0,10

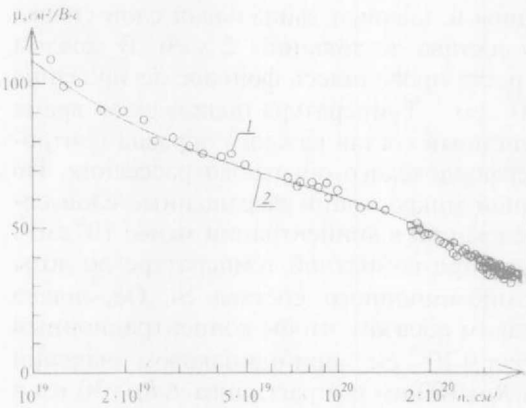


Рис. 2. Зависимость подвижности носителей заряда от концентрации легирующей примеси для сплава $Si_{0,75}Ge_{0,25}$:

1 – экспериментальные результаты, *2* – кривая экстраполяции

Таблица 2

Подгоночные параметры для интерполяции экспериментальных результатов зависимостей подвижности электронов от их концентрации для Si и сплавов $Si_{0,75}Ge_{0,25}$, $Si_{0,55}Ge_{0,45}$, $Si_{0,5}Ge_{0,5}$, имплантированных ионами As^+ ($8\cdot10^{15}$ $см^{-2}$) после быстрого термического отжига (БТО)

Стехиометрический состав	μ_i	μ_0	μ_{max}
Si (по данным литературы)	43,40	52,20	1417,0
Si	44,09	49,40	1415,0
$Si_{0,75}Ge_{0,25}$	44,09	43,40	1800,0
$Si_{0,55}Ge_{0,45}$	41,30	34,80	2140,4
$Si_{0,5}Ge_{0,5}$	40,30	31,20	2242,1

результаты таких измерений для концентрационного диапазона 10^{19}–$4\cdot10^{20}$ $см^{-3}$, который соответствует высоколегированным слоям, используемым, например, при создании областей истока и стока в полевых транзисторах или эмиттерных областей в биполярных транзисторах [8]. Из приведенных результатов следует: удельное сопротивление имплантированных сплавов растет с увеличением атомных фракций Ge, что хорошо согласуется с аналогичными зависимостями подвижности. На рис. 1 даны также результаты компьютерной интерполяции с использованием известного выражения [5]:

$$\log\rho = a(\log(bn_e)^c)^d,$$

подгоночные параметры которого (a, b, c, d) сведены в табл. 1. Полученные результаты иллюстрируют также уменьшение максимальной концентрации активированной примеси в $Si_{1-x}Ge_x$-сплавах с ростом x. В соответствии с данными [9] при равной температуре отжига предельная растворимость мышьяка в Ge ниже, чем в Si, поэтому уменьшение пиковой концентрации носителей заряда с ростом x соответствует ожиданиям.

На рис. 2 приведены результаты измерения подвижности электронов как функции концентрации легирующей примеси для сплава $Si_{0,75}Ge_{0,25}$. Экспериментальные данные, изображенные на рисунке точками, демонстрируют тенденцию к уменьшению подвижности с ростом концентрации легирующей примеси. Здесь же приведена кривая, полученная путем компьютерной интерполяции экспериментальных данных с помощью известного соотношения [5]:

$$\mu_e = \mu_0 + (\mu_{max} - \mu_0)/(1 + (n_e/9{,}7\cdot10^{16})^{0,7}) - \mu_i/(1 + (3{,}4\cdot10^{20}/n_e)^2,$$

где μ_0, μ_{max}, μ_i – подгоночные параметры для определения подвижности. Подобная интерполяция проведена и для других сплавов, а также в качестве сравнения для кремния. Полученные подгоночные параметры приведены в табл. 2. Отметим также, что подгоночные параметры для случая чистых кристаллов кремния хорошо коррелируют с результатами, полученными ранее в других работах [5, 6]. Зависимость интерполированных кривых подвижности от концентрации легирующей примеси для сплавов $Si_{1-x}Ge_x$ различного композиционного состава изображена на рис. 3*а*. Отметим три основные особенности поведения кривых. Во-первых, во всех сплавах подвижность электронов монотонно уменьшается с ростом легирующей примеси. Во-вторых, в области концентраций порядка $7\cdot10^{19}$–$2\cdot10^{20}$ см$^{-3}$ существует излом на зависимостях $\mu=\mu(n_e)$, что характерно также для Si [5]. Третьей особенностью кривых является непрерывное уменьшение подвижности с увеличением концентрации Ge в сплавах. Особенно хорошо эта тенденция видна на рис. 3*б*, где приведена зависимость подвижности от стехиометрического состава сплава, полученная для одного и того же значения концентрации легирующей примеси (10^{20} см$^{-3}$). Учитывая одинаковые условия холловских измерений (температура, плотность тока, конфигурация холловских структур, профиль и концентрация легирующей примеси), мы можем предположить, что уменьшение подвижности носителей заряда с ростом концентрации атомов Ge в $Si_{1-x}Ge_x$-сплавах свидетельствует о существенной роли дополнительного механизма рассеяния. Такой механизм рассеяния носителей на сплаве характерен для материалов, содержащих атомы различного сорта в сопоставимых концентрациях (так называемое alloy scattering [7]).

* * *

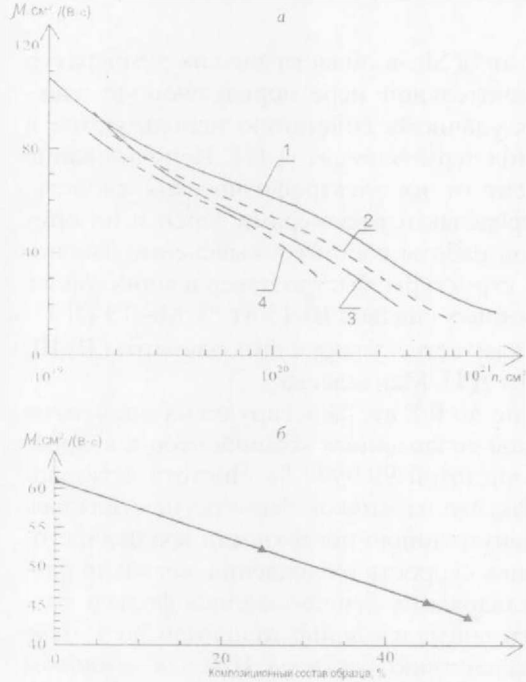


Рис. 3. Зависимость подвижности носителей заряда от их концентрации (а) и от процентного содержания атомов германия в сплаве (*б*):
1 – Si, *2* – $Si_{0,75}Ge_{0,25}$, *3* – $Si_{0,55}Ge_{0,45}$, *4* – $Si_{0,5}Ge_{0,5}$. Зависимость (*б*) получена для сплавов, легированных до концентрации 10^{20} As/см^2

В работе с использованием дифференциальных измерений эффекта Холла исследованы зависимости удельного сопротивления и подвижности носителей заряда гетероэпитаксиальных слоев сплавов $Si_{1-x}Ge_x$ ($0,2<x<0,5$) от концентрации легирующей примеси и композиционного состава сплавов. Установлено, что во всех сплавах подвижность электронов монотонно уменьшается с ростом легирующей примеси. Непрерывное уменьшение подвижности с ростом концентрации атомов Ge в сплавах происходит благодаря включению дополнительного механизма рассеяния носителей на сплаве. В свою очередь удельное сопротивление имплантированных сплавов растет с увеличением концентрации Ge в $Si_{1-x}Ge_x$-сплавах. Методами компьютерной интерполяции установлены подгоночные параметры для вычисления подвижности носителей в исследуемых сплавах. Приведенные зависимости $\rho=\rho(n_e)$ могут быть использованы для контроля концентрации носителей и измерений удельного сопротивления.

1. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М., 1984. Т. 1.
2. Beadle W.E., Tsai J.C.C., Plummer R.D. Quick reference manual for silicon integrated circuit technology. New York, 1983.
3. Мейер Дж., Эриксон Л., Дэвис Дж. Ионное легирование полупроводников. М., 1973.
4. Риссел Х., Руге И. Ионная имплантация. М., 1983.
5. Masetti G., Severi M., Solmi S. // J.IEEE Trans. on Electron Devices. 1983. Vol. ED-30. № 7. P. 764.
6. Thurber W.R., Mattis R.L., Liu Y.M., Filliben J.J. // J.Electrochem. Soc. 1980. Vol. 127. № 8. P. 1807.
7. Advanced silicon and semiconducting silicon-alloy based materials and devices / Ed. by J.F.A.Nijs. London, 1994.
8. Технология СБИС / Под ред. С. Зи. М., 1986.
9. Trumbore F.A. // B.S.T.J. 1960. P. 205.
Поступила в редакцию 17.12.99.

УДК 669.76:5373

В.Г. ШЕПЕЛЕВИЧ, Э.Е. ГРЕЧАННИКОВ

ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ НА ЗЕРЕННУЮ СТРУКТУРУ БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВА Bi-15 ат. % Sb

Quickly quenched foils of Bi-15 at.% Sb alloy have small size of grains and texture $(10\bar{1}2)$. Doping with aluminium, gallium, germanium indium, sulphur, zinc and tin reduces size of grains and does not change texture.

Сплавы Bi-Sb, содержащие 5–20 ат.% Sb, в области низких температур имеют запрещенную зону [1], в значительной мере определяющую электрические свойства, и благодаря их удачному сочетанию используются в качестве материалов для изготовления термоэлементов [2]. Использование поликристаллических сплавов зависит от их электрофизических свойств, которые в значительной степени определяются размерами зерен и их ориентацией. В связи с этим цель данной работы состоит в выяснении закономерностей формирования зеренной структуры быстрозатвердевших фольг бинарного сплава Bi-15 ат.% Sb и тройных сплавов Bi-15 ат. % Sb-ЛЭ (ЛЭ – легирующий элемент), содержащих в качестве легирующих элементы II, III, IV и VI групп периодической системы Д.И. Менделеева.

Сплавы Bi-15 ат.% Sb, содержащие до 0,8 ат. % легирующих элементов Al, In, Ga, Ge, Sn, S, Zn, приготовлены сплавлением компонентов в кварцевой ампуле. Использованы Bi и Sb чистотой 99,9999 %. Чистота легирующих элементов не хуже 99,999 %. Закалка из жидкой фазы осуществлялась выплескиванием капли расплава на внутреннюю поверхность вращающегося медного цилиндра. В таких условиях скорость охлаждения, согласно расчету [3], достигала 10^6 К/с. Для исследования использовались фольги толщиной 20–50 мкм. С их поверхности снимался шлиф толщиной до 1 мкм, затем поверхность подвергалась воздействию раствора HNO_3 в этиловом спирте (в соотношении 1:1) в течение 20–30 с. Зеренная структура быстрозатвердевших фольг исследовалась с помощью металлографического микроскопа "Neophot-21". Размеры зерен определялись по диаметру их сечений [4]. Погрешность определения средних диаметров зерен составляла 10–20 %. Исследовались две поверхности быстрозатвердевших фольг: контактная, формирующаяся при контакте расплава и медного цилиндра, и свободная, образующаяся при контакте с атмосферой. Для изучения структуры поперечных и продольных сечений из 100–120 быстрозатвердевших фольг склеивались брикеты. Исследование текстуры осуществлялось на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении. Полюсная плотность дифракционных линий $10\bar{1}4, 11\bar{2}0, 10\bar{1}5, 20\bar{2}0, 20\bar{2}2, 10\bar{1}7, 20\bar{2}5, 21\bar{3}0, 21\bar{3}2$ и 0009 рассчитывалась по методу Харриса [5].

Быстрозатвердевшие фольги исследуемых сплавов имеют мелкозернистую структуру. В таблице приводятся значения средних диаметров зерен.

Средний диаметр зерна фольг сплава Bi-15 ат. % Sb составляет 5,0 мкм. Легирование сплава вызывает уменьшение размеров зерен, что связано с увеличением количества возможных центров зарождения твердой фазы при кристаллизации расплава. Так, введение в сплав Bi-15 ат. % Sb алюминия и серы уменьшает средний диаметр зерен в два и более раза, в то время как легирование цинком, малым количеством олова и германия незначительно влияет на размеры зерен.

Таблица

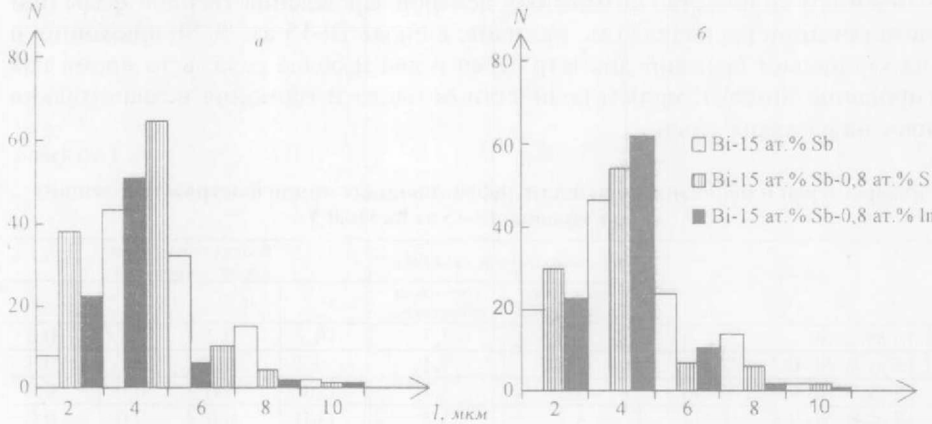
Размеры зерен и полюсные плотности дифракционных линий быстрозатвердевших фольг сплавов Bi-15 ат.% Sb-ЛЭ

Сплав	Средний диаметр зерна, мкм		Полюсная плотность дифракционных линий			
	Контактная поверхность	Свободная поверхность	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}4$	$11\bar{2}0$	$20\bar{2}0$
Bi-15 ат.% Sb	5,0	4,7	10,7	0,2	0,1	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,2 ат.% Ge	4,6	4,4	9,7	0,1	0,1	0,3
Bi-15 ат.% Sb-0,4 ат.% Ge	3,6	3,7	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% Ge	3,7	3,7	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат. % Sb-0,4 ат.% Ga	2,9	3,6	9,6	0,2	0,2	0,3
Bi-15 ат. % Sb-0,8 ат.% Ga	2,5	3,4	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,4 ат.% S	2,5	2,8	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% S	2,6	2,8	10,6	0,2	0,1	0,1
Bi-15 ат.% Sb-0,25 ат.% Sn	3,6	3,6	9,9	0,2	0,1	0,1
Bi-15 ат.% Sb-2 ат.% Sn	2,7	3,0	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% Al	1,9	2,7	10,2	0,1	0,1	0,5
Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% In	3,1	2,8	11,0	0,0	0,0	0,0
Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% Zn	3,9	4,2	11,0	0,0	0,0	0,0

Металлографический анализ поперечных и продольных сечений показал, что в быстрозатвердевших фольгах нелегированного сплава Bi-15 ат. % Sb, а также сплава, содержащего 0,2 ат. % Ge и 0,25 ат. % Sn, образуются столбчатые зерна, оси которых перпендикулярны поверхности фольги или незначительно отклоняются от этого направления. В быстрозатвердевших фольгах сплава Bi-15 ат. % Sb, содержащего 0,4 и 0,8 ат. % Ge, Ga, Al, In, S, образуются в основном равноосные зерна. Доля столбчатых зерен в быстрозатвердевших фольгах этих сплавов не превышает 6–10 %.

На основе анализа микрофотографий зеренной структуры быстрозатвердевших фольг сплавов Bi-15 ат.% Sb-ЛЭ построены распределения N максимальной хорды l сечений зерен, некоторые из них приведены на рисунке. Наблюдается асимметричность распределений со смещением моды в сторону малых размеров, что характерно для логарифмически нормально распределенных диаметров зерен [4].

Быстрозатвердевшие фольги исследуемого сплава имеют четко выраженную текстуру $(10\bar{1}2)$. На долю данной ориентации приходится 90–100 % объема фольги. Наблюдаются также слабые линии $10\bar{1}4, 11\bar{2}0$ и $20\bar{2}0$. Как следует из таблицы, легирование сплава не вызывает заметного изменения текстуры. Полюсные плотности дифракционных линий, не указанных в таблице, не превышают 0,1. Формирование данной текстуры обусловлено ориентацией ковалентных связей на межфазной границе кристалл – жидкость. Каждый атом связан с другими ближайшими атомами ковалентными связями. Две из них расположены в плоскостях $(01\bar{1}2)$, $(\bar{1}012)$ и $(1\bar{1}02)$, а третья связывает два атома соседних плоскостей. На межфазной границе кристалл – жидкость, совпадающей с указанными плоскостями, образуется высокая плотность активных центров в виде ненасыщенных ковалентных связей. К ним легко присоединяются атомы из расплава, вызывая быстрый рост кристаллитов с указанной ориентацией.



Распределения N максимальной хорды l сечений зерен быстрозатвердевших фольг:
а – на контактной поверхности; *б* – на свободной поверхности для сплавов Bi-15 ат.% Sb, Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% S и Bi-15 ат.% Sb-0,8 ат.% In

Таким образом, в быстрозатвердевших фольгах сплава Bi-15 ат.% Sb образуются мелкозернистая структура и четко выраженная текстура $(10\bar{1}2)$. Легирование сплава элементами II, III, IV и VI групп вызывает уменьшение размеров зерен и не оказывает существенного влияния на текстуру.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф98-054).

1. Гицу Д.В., Голбан Т.М., Канцер В.Г., Мунтяну Ф.Н. Явления переноса в висмуте и его сплавах. Кишинев, 1983.
2. Иорданишвили Е.К. Термоэлектрические источники питания. М., 1968.
3. Мирошниченко И.С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
4. Чернявский К.С. Стереология в металловедении. М., 1987.
5. Шепелевич В.Г. // Кристаллография. 1991. Т. 36. № 1. С. 238.

Поступила в редакцию 22.05.2000.

УДК 621.315.592

П.И. ГАЙДУК

ВЛИЯНИЕ МИКРОПУЗЫРЕЙ В ПОДЛОЖКЕ КРЕМНИЯ НА ЭПИТАКСИАЛЬНЫЙ РОСТ SiGe-СПЛАВОВ

The effect of hydrogen-induced micro-cavities in Si substrate on heteroepitaxial growth of $Si_{0.85}Ge_{0.15}$ alloy is investigated by TEM. The micro-cavities in Si substrate were formed by hydrogen implantation followed by thermal treatment. It is found that the strain relaxation in SiGe/Si layers is more enhanced in the case of growth at void-containing substrates. A good share of threading arms runs into the substrate and in this way the reduction of threading dislocations in the surface layer can be explained.

Гетероэпитаксиальные структуры на основе Si- и SiGe-сплавов являются перспективными для разработки нового поколения полупроводниковых приборов, основанных на подходах зонной инженерии [1, 2]. В таких структурах кристаллическое качество является определяющим для достижения высоких значений подвижности носителей заряда [2, 3]. В последнее время разработан ряд методов эпитаксиального роста, позволяющих уменьшать плотность дислокаций в гетероэпитаксиальных структурах вплоть до 10^5–10^6 см$^{-2}$ [4–10]. Наиболее успешные подходы используют буферные слои с линейным или ступенчатым изменением композиционного состава [3–6]. Сообщалось также об обнадеживающих результатах применения высокотемпературных [7] и низкотемпературных [8] условий роста буферных слоев.

Другой интересный подход [9] предполагает использование легкодеформируемых подложек: тонких слоев монокристаллического кремния на SiO_2, полученных, например, по SIMOX-технологии. В таких структурах химические связи на границе раздела Si/SiO_2 достаточно ослаблены, так что поверхностный слой Si может рассматриваться как квазисвободная мембрана. Ожидалось [9], что при малой толщине поверхностного слоя (менее критической) релаксация упругодеформированного слоя SiGe будет происходить путем проникновения дислокаций в подложку. Несмотря на первую успешную демонстрацию эпитаксиального роста слоев SiGe на $Si/SiO_2/Si$-подложке [9], указанный подход не получил развития из-за трудностей, связанных с получением тонких (около 10 нм), однородных по толщине, *бездефектных* поверхностных слоев Si.

В настоящей работе для формирования тонких псевдомембран предлагается использовать скрытые слои Si, содержащие водородно-индуцированные микропузыри. Предполагается, что в слое Si, содержащем микропузыри, происходит ослабление связей Si–Si и таким образом улучшаются условия зарождения, мультипликации и распространения дислокаций [10–12]. В дополнение к этому, имплантация водорода в кремний интересна в силу его существенного пассивирующего действия на глубокие и мелкие уровни [13]. Гетерирующее действие микропузырей [14] также является аргументом в пользу их использования в гетероструктурах.

В качестве подложек в настоящей работе использовали кристаллы кремния (001)-ориентации. Для предотвращения неконтролируемого загрязнения поверхности непосредственно перед имплантацией водорода пластины покрывали слоем SiO_2 толщиной 330 нм с использованием методов газофазного осаждения. Имплантацию ионов водорода с энергией 40 или 60 кэВ проводили при комнатной температуре до доз $1{,}5\cdot10^{16}$ или $2{,}8\cdot10^{16}$ см$^{-2}$ соответственно. По оценкам TRIM [15], такие условия имплантации позволяют получать концентрационные пики атомов водорода между $8{,}1\cdot10^{20}$ см$^{-3}$ и $1{,}6\cdot10^{21}$ см$^{-3}$, локализованные в подложке кремния на глубине 130 нм (40 кэВ) или 290 нм (60 кэВ) от границы раздела $Si/\ SiO_2$. Для формирования водородно-индуцированных пузырей и удаления избыточного водорода из подложки [12–14] образцы постимплантационно отжигались в атмосфере сухого N_2 при 850 °C в течение 30 мин. Непосредственно перед эпитаксиальным ростом слоев SiGe образцы сначала травились в 5%-м растворе HF для удаления слоя SiO_2, после чего проводилась дополнительная очистка поверхности в водных растворах NH_3+H_2O_2 и HCl+H_2O_2 при 80 °C. Эпитаксиальный рост слоев $Si_{0,85}Ge_{0,15}$ со скоростью роста 0,28 нм/с проводился на установке молекулярно-лучевой эпитаксии VG Semicon V80. На всех образцах сначала выращивали буферный слой кремния толщиной 0,1 мкм, после чего осаждали слой $Si_{0,85}Ge_{0,15}$ толщиной 1 мкм при температуре 570–700 °C. Композиционный состав слоев контролировался методом резерфордовского обратного рассеяния. Состояние поверхности исследовалось методом атомной силовой микроскопии (АСМ) с использованием установки Rasterscope 3000. Анализ дислокационной структуры проводился методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) на образцах, препарированных в виде планарных или поперечных сечений. Для ПЭМ-исследований использовался прибор Phillips CM20, работающий при ускоряющем напряжении 200 кВ. Измерение низких плотностей дислокаций в поверхностных областях $Si_{0,85}Ge_{0,15}$-слоев проводили как методами ПЭМ-регистрации с панорамным сканированием больших областей (~ 0,1–1 мм^2), так и методами селективного химического травления в сочетании с АСМ.

Влияние предварительной имплантации водорода на структурное состояние слоев $Si_{0,85}Ge_{0,15}$-сплавов, эпитаксиально выращенных на Si-подложках, хорошо видно из рис.1, на котором демонстрируются типичные светопольные ПЭМ-изображения поперечных сечений образцов в области границы раздела $Si_{0,85}Ge_{0,15}$/Si. Так, в случае МЛЭ-роста на Si-подложках, предварительно не имплантированных водородом, слои содержат ярко выраженные полосы скольжения с повышенной концентрацией дислокаций, распространяющиеся в Si-подложку на большую глубину (рис.1*а*). На светлопольных ПЭМ-микрофотографиях, полученных как поперечные сечения, скопления дислокаций видны как суперпозиция черных, прямолинейных участков, состоящих из дислокаций, перпендикулярных плоскости изображения, и простирающихся в [110]-направлении. Детальный ПЭМ-анализ показывает [16], что входящие в состав скоплений дислокации являются 60°-ми, имеют одинаковые векторы Бюргерса и локализованы в параллельных, близко расположенных {111}-плоскостях скольжения. Такая структура границы раздела SiGe/Si характерна для мультипликации дислокаций несоответствия по модифицирован-

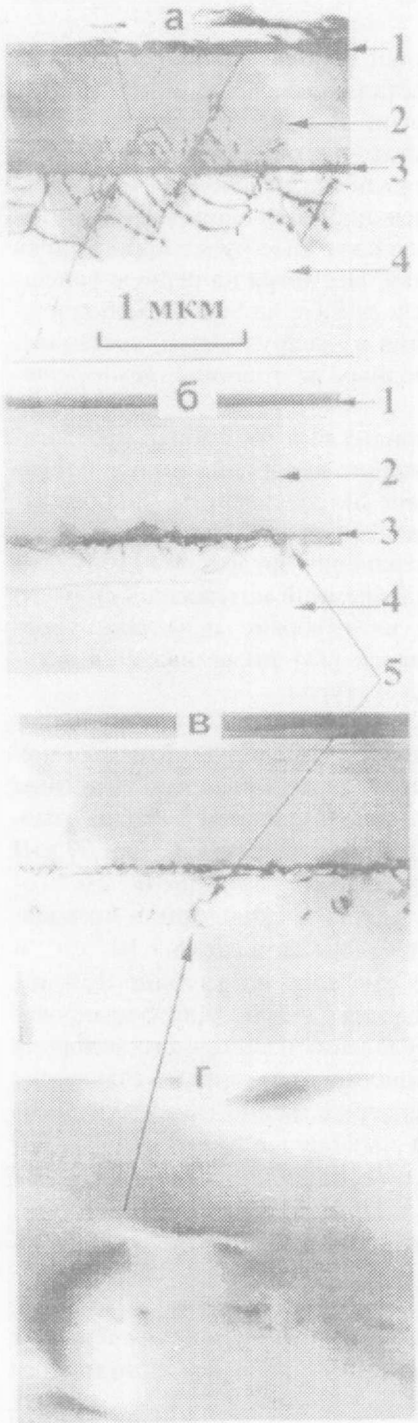
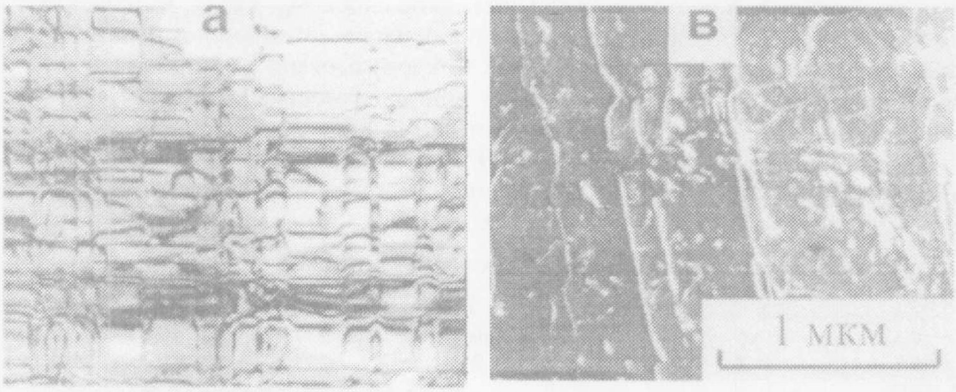


Рис.1. Светлопольные ПЭМ-изображения поперечных сечений образцов $Si_{0,85}Ge_{0,15}$-сплавов, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии на подложках (001) кремния:

а – без использования буферного слоя; *б*, *в*, *г* – буферные слои содержат микропузыри, сформированные имплантацией водорода при энергии: *б* – 40 кэВ и *в*, *г* – 60 кэВ с дозой 1,5x10^{16} см$^{-2}$. Увеличенное изображение *г* иллюстрирует водородно-индуцированные микропузыри, локализованные вблизи границы раздела гетероструктуры Si/буферный слой/ $Si_{0,85}Ge_{0,15}$. 1 – поверхность образцов, 2 – слой эпитаксиального $Si_{0,85}Ge_{0,15}$-сплава, 3 – границы раздела $Si/Si_{0,85}Ge_{0,15}$, 4 – подложка Si, 5 – слой водородных микропузырей ному механизму Франка–Рида (МФР) – [17, 18] или по механизму самосогласованной генерации дислокаций несоответствия [19, 20]. Наиболее важные отличия в структуре SiGe-сплавов, выращенных на подложках с водородно-индуцированными микропузырями, состоят в следующем. Во-первых, дислокационные скопления описанного типа или отсутствуют, или имеют значительно меньшую концентрацию дислокаций, что указывает на сравнительно малое число актов мультипликации дислокаций на один источник МФР. Во-вторых, плотность центров мультипликации дислокаций несоответствия (источников МФР) существенно увеличивается по сравнению с ростом на подложке, не содержащей микропузыри. Таким образом, из сравнения микрофотографий, приведенных на рис. 1, можно, по-видимому, сделать вывод, что скрытый слой Si, содержащий водородно-индуцированные микропузыри, увеличивает плотность центров зарождения и мультипликации дислокаций несоответствия (источников МФР) и, следовательно, уменьшает количество дислокаций, приходящихся на одно скопление. Известно [3], что такие скопления эффективно блокируют перемещение дислокаций и тем самым увеличивают плотность пронизывающих дислокаций (ПД) в эпитаксиальном SiGe-слое.



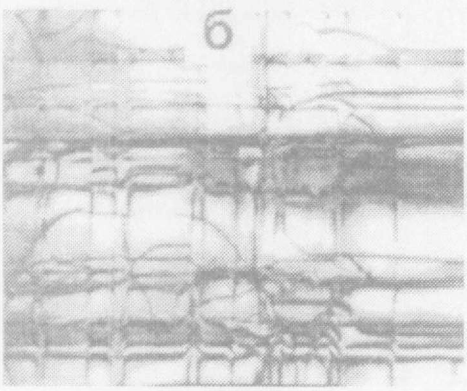


Рис. 2. ПЭМ-изображения структуры границ раздела SiGe/Si-образцов, выращенных на Si без буферного слоя *б* или с использованием слоя микропузырей *а* и *в*; *а*, *б* – дислокационная сетка несоответствия на границе раздела SiGe/Si. Микрофотография *в* получена на образце *а* после прецизионного удаления слоя SiGe и тонкого приграничного слоя Si. Видны дислокационные сегменты, взаимодействующие с водородными микропузырями

Сравнение рис. 1*б* и 1*в* иллюстрирует влияние энергии имплантации водорода на структуру границы раздела SiGe/Si. Видно, что формирование дислокационных скоплений на границе раздела SiGe/Si более выражено в слоях, имплантированных водородом с E=40 кэВ (средний проецированный пробег (R_p) составляет ~130 нм). В этом случае зарегистрирована также значительно меньшая плотность водородно-индуцированных пузырей при их меньшем среднем размере по сравнению с имплантацией при 60 кэВ (R_p=290 нм). В этой связи необходимо отметить два основных момента. Во-первых, с учетом одинаковой дозы имплантированного водорода для ионов обеих энергий, различия в размере и плотности микропузырей могут быть объяснены разной скоростью процессов дегазации [12, 13], которые непосредственно связаны с диффузией водорода к поверхности и его испарением при проведении постимплантационного термического отжига. По-видимому, в случае имплантации с меньшей энергией большая часть водорода испаряется из подложки. Во-вторых, большая плотность микропузырей увеличивает вероятность релаксации упругих деформаций в гетероэпитаксиальных слоях путем продвижения дислокаций в подложку и их взаимодействия со слоем пузырей. Этот вывод следует из сравнения соответствующих ПЭМ-микрофотографий структуры, приведенных на рис. 1*б, в* и рис. 2*а, б*. Более высокая плотность дислокаций несоответствия, локализованных на границе раздела, означает большую степень релаксации SiGe/Si-структуры (ср. *а* и *б* на рис. 2). При этом важной особенностью релаксации деформаций в структуре, содержащей микропузыри, является резкое возрастание количества дислокаций, проникающих в подложку и локализованных в слое микропузырей (рис. 2*в*). Взаимодействие дислокаций с пузырями увеличивает эффективность релаксации SiGe-слоев, что также хорошо согласуется с результатами более ранних исследований [10–12].

Таким образом, в работе исследовано влияние водородно-индуцированных микропузырей на структурное состояние слоев $Si_{0,85}Ge_{0,15}$, выращенных на Si-подложках. Обнаружено, что большое количество дислокаций проникает в подложку и взаимодействует с микропузырями, что приводит к сокращению плотности дислокаций в приповерхностных эпитаксиальных слоях и ускоряет процесс релаксации структур SiGe/Si.

Автор выражает благодарность А.Н. Ларсену за обсуждения результатов исследований, а также Дж.Л. Хансену за помощь при выращивании эпитаксиальных SiGe-сплавов методом МЛЭ.

1. Advanced Silicon and Semiconducting Silicon-Alloy-Based Materials and Devices // Ed. By J.F.A.Nijs. London, 1994.
2. Schaffler F. // Semicond. Sci. Technol. 1997. Vol. 12. P. 1515.
3. Mooney P.M. // Mat. Sci. and Engineering. 1996. Vol. R17. P. 105.
4. LeGoues F.K., Meyerson B.S., Morar J.F. // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66. P. 2903.
5. Hohnisch M., Herzog H.J., Schaffler F. // J. Cryst. Growth. 1995. Vol. 157. P. 126.
6. Fitzgerald E.A., Xie Y.H., Monroe D. et al. // J. Vac. Sci. Technol. 1992. Vol. B10. P. 1807.
7. Kissinger G., Morgenstern T., Morgenstern G., Richter H. // Appl. Phys. Lett. 1995. Vol. 66. P. 2083.
8. Linder K.K., Zhang F.C., Rieh J.S et al. // Appl. Phys. Lett. 1997. Vol. 70. P. 3224.
9. Powell A.R., Iyer S.S., LeGoues F.R. // Appl. Phys. Lett. 1994. Vol. 64. P. 1856.
10. Follstaedt D.M., Myers S.M., Lee S.R. // Ibid. 1996. Vol. 69. P. 2059.
11. Hollander B., Mantl S., Liedtke R. et al. // Nucl. Instrum. and Meth. In Phys. Res. 1999. Vol. B148. P. 200.
12. Follstaedt D.M., Myers S.M., Floro J.A., Lee S.R. // Nucl. Instrum. and Meth. In Phys. Res. 1997. Vol. B127/128. P. 375.
13. Perton S.R., Corbett J.W., Shi T.S. // Appl. Phys. 1987. Vol. A43. P. 153.
14. Kinomura A., Williams J.S., Wong-Leung J., Petravic M. // Nucl.Instrum. and Meth. In Phys. Res. 1997. Vol. B127/128. P. 297.
15. Biersack J.P., Ziegler J.F. // The stopping and Ranges of Ions in Matter. 1985. Vol. 1.
16. Shiryaev S.Yu., Jensen F., Wulff Petersen J. // Appl. Phys. Lett. 1994. Vol. 64. P. 3305.
17. LeGoues F.K., Meyerson B.S., Morar J.F., Kirchner P.D. // J. Appl. Phys. 1992. Vol. 71. P. 4230.
18. LeGoues F.K. // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 72. P. 876.
19. Shiryaev S.Yu. // Phil. Mag. Lett. 1993. Vol. 68. P. 195.
20. Shiryaev S.Yu., Lundsgaard Hansen J., Nylandsted Larsen A. et al. // Phys. Rev. 1995. Vol. B52. P. 15881.

Поступила в редакцию 17.12.99.

УДК 621.396. 67

В.И. ДЕМИДЧИК

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТОНКИХ ПРОВОДНИКОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ

The generalization of Pocklington's integral equation for thin-wire structures of arbitrary geometry with dielectric coating is offered in the paper. The deduction of integral equation is given. The examples of comparison of calculation results with the known experimental data are given.

Тонкопроволочные структуры с диэлектрическим покрытием находят широкое применение в антенной технике. Покрытие может использоваться для улучшения параметров антенн, решения вопросов, связанных с электрической прочностью, для изоляции, когда недопустим контакт проводников с окружающей средой. Задача изучения влияния диэлектрического покрытия на электродинамические свойства характерна также для сеточных рефлекторов.

Одним из методов анализа подобных структур является использование интегральных или интегродифференциальных уравнений для тока в проводниках. К примеру, в [1] рассмотрено решение задачи возбуждения тонкопроволочных антенн с диэлектрическим покрытием на основе интегрального уравнения типа Харрингтона, в [2] – на основе уравнения Халлена для прямолинейных проводников.

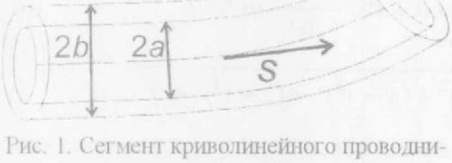


Рис. 1. Сегмент криволинейного проводника в диэлектрической оболочке

Рассмотрим решение данной задачи для тонких проводников с плавно меняющейся криволинейной геометрией на основе интегрального уравнения (ИУ) Поклингтона в рамках квазистатического приближения. При выводе ИУ удобно пользоваться криволинейной цилиндрической системой координат (рис.1).

Криволинейный проводник радиуса a длиной L покрыт слоем диэлектрика толщиной b-a с диэлектрической проницаемостью ε_a.

Напряженность поля, создаваемого проводником, будет определяться как $E=E_1+E_2$, где E_1 – поле, определяемое поверхностными токами и зарядами проводника, E_2 – поле, обусловленное поляризационными токами и зарядами диэлектрического покрытия.

Введя упрощающее предположение $a<<\lambda$, где λ – длина волны электромагнитного поля, можно пренебречь азимутальной составляющей поверхностного тока и считать ток распределенным по оси проводника. При таком допущении получим известное выражение касательной составляющей поля E_1 на поверхности проводника [1]:

$$E_{1\tau} = \frac{1}{i\bar{\omega}\varepsilon_0}\int_L I(s')\left[k^2 ss' - \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'}\right]G(s,s')ds', \qquad (1)$$

$$G(s,s') = e^{-ikr}/4\pi r, \quad r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+a^2}\,,$$

где s, s' – единичные векторы точек источника и наблюдения, x, y, z, x', y', z' – их координаты, k – волновое число.

Напряженность поля E_2 определяется как

$$E_2 = -i\bar{\omega}A_2 - \nabla\Phi_2\,, \qquad (2)$$

где A_2 и Φ_2 – векторный и скалярный потенциалы, обусловленные поляризационными токами и зарядами.

Ток поляризации простым образом связан с нормальной компонентой электрического поля на поверхности проводника, т. е. с зарядом. В свою очередь продольная составляющая электрического тока связана с зарядом уравнением непрерывности. В итоге в рамках квазистатического приближения ток поляризации определится как

$$J_p = -\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_a 2\pi a}\frac{\partial I(s')}{\partial s'}. \tag{3}$$

Следовательно, $\boldsymbol{A}_2$ будет иметь вид:

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_a - \varepsilon_0)(b-a)\int_L G(s,s')\frac{\partial I(s')}{\partial s'}\boldsymbol{n}\, ds', \tag{4}$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности проводника.

Выражение (4) получено из предположения, что поляризационный ток не меняется в направлении, перпендикулярном поверхности проводника.

Скалярный потенциал Φ_2 определяется поверхностной плотностью поляризационных зарядов σ_{p1} и σ_{p2} на границах диэлектрика $r=a$ и $r=b$. Величины σ_{p1} и σ_{p2} связаны с нормальной составляющей вектора поляризации и, следовательно, можно показать, что

$$\sigma_{p1} = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{i\bar{\omega}\varepsilon_a 2\pi a}\frac{\partial I(s)}{\partial s},\ \sigma_{p2} = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{i\bar{\omega}\varepsilon_a 2\pi b}\frac{\partial I(s)}{\partial s}. \tag{5}$$

Используя (5), получим выражение для Φ_2:

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{i\bar{\omega}\varepsilon_a\varepsilon_0}\int_L (G(s,s') - \breve{G}(s,s'))\frac{\partial I(s')}{\partial s'}ds', \tag{6}$$

$$\breve{G}(s,s') = \frac{e^{-ik\breve{r}}}{4\pi\breve{r}},\quad \breve{r} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + b^2}.$$

Тангенциальная составляющая поля $\boldsymbol{E}_2$ на поверхности проводника определится как

$$E_{2\tau} = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{s} = -i\bar{\omega}\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{s} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial s} = \frac{k^2(\varepsilon_a - \varepsilon_0)}{i\bar{\omega}\varepsilon_0\varepsilon_a}(b-a)\int_L G(s,s')\frac{\partial I(s')}{\partial s'}\boldsymbol{n}\boldsymbol{s}'\, ds' +$$
$$+\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{i\bar{\omega}\varepsilon_0\varepsilon_a}\int_L I(s')\frac{\partial^2\left(G(s,s') - \breve{G}(s,s')\right)}{\partial s\,\partial s'}ds'. \tag{7}$$

Выражение, описывающее тангенциальную составляющую суммарного поля, будет иметь вид:

$$E_\tau = \frac{1}{i\bar{\omega}\varepsilon_0}\int_L I(s')\left[k^2 ss' - \frac{\partial^2}{\partial s\partial s'}\right]G(s,s')ds' + \frac{k^2(\varepsilon_a - \varepsilon_0)(b-a)}{i\bar{\omega}\varepsilon_0\varepsilon_a}\int_L G(s,s')\frac{\partial I(s')}{\partial s'}\boldsymbol{n}\boldsymbol{s}'\,ds' +$$
$$+\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{i\bar{\omega}\varepsilon_0\varepsilon_a}\int_L I(s')\frac{\partial^2\left(G(s,s') - \breve{G}(s,s')\right)}{\partial s\,\partial s'}ds'. \tag{8}$$

Анализ показывает, что влияние второго слагаемого в (8) несущественно и им можно пренебречь. С учетом этого, воспользовавшись граничным условием на поверхности идеального проводника, получим ИУ типа уравнения Поклингтона:

$$E_\tau^i = -\frac{1}{i\bar{\omega}\varepsilon_0}\int_L\left[k^2 G(s,s')ss' - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{\partial^2 G(s,s')}{\partial s\partial s'} - \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_a}\frac{\partial^2\breve{G}(s,s')}{\partial s\partial s'}\right]I(s')\,ds', \tag{9}$$

где E_τ^i – касательная составляющая поля источника возбуждения.

Решение уравнения (9) проводилось по методике, изложенной в [4] с выбором кусочно-постоянных в качестве базисных и δ-функций в качестве весовых. Как источник возбуждения может быть использовано поле падающей плоской волны (задача рассеяния) либо поле раскрыва коаксиальной линии, либо поле источника в виде δ-функции. По известному токораспределению рассчитывались характеристики излучения и рассеяния в дальней зоне.

Тестирование проводилось путем сравнения результатов расчета входной проводимости вибратора с диэлектрическим покрытием с аналогичными экспериментальными данными [5]. На рис. 2 показана зависимость активной G и реактивной B частей входной проводимости от отношения длины плеча вибратора к длине волны l/λ. Радиус вибратора $a/\lambda=0{,}006$, толщина покрытия $d=b-a=0{,}006\lambda$. Кривые *1* и *2* соответствуют расчетным и экспериментальным значениям G, кривые *3* и *4* – расчетным и экспериментальным значениям B. На рис. 2*а* приведены данные для вибратора, относительная диэлектрическая проницаемость покрытия которого $\varepsilon_r=9$, на рис. 2*б* – для случая $\varepsilon_r=3{,}2$. Полученные данные подтверждают известный результат: наличие диэлектрического покрытия приводит к смещению кривых входных характеристик в область низких частот.

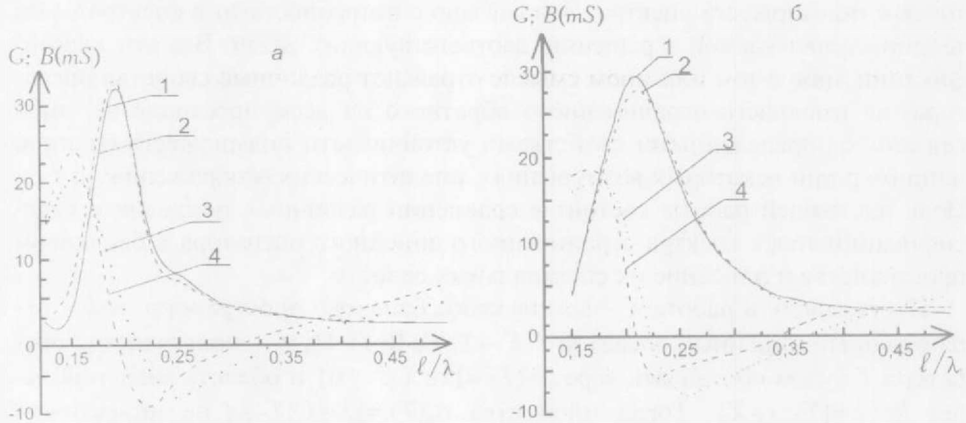


Рис. 2. Расчетная и экспериментальная входная проводимость вибраторной антенны с диэлектрическим покрытием

В целом результаты расчета характеристик излучения и рассеяния тонкопроволочных структур с диэлектрическим покрытием по предложенной методике хорошо совпадают с экспериментальными данными для толщины покрытия, сравнимой с радиусом проводника и относительной диэлектрической проницаемостью, отличающейся от единицы не более чем на порядок.

1. Mei K.K. // IEEE Trans. 1965. AP-13. № 5. P. 374.
2. Popovic B.D., Djordjevic A.R., Kircanski N.M. // The Radio and Elektronic Engineer. Vol. 51. № 3. P. 141.
3. Моторин А.В. // Электромагнитные волны @ электронные системы. 1997. Т. 2. № 2. С. 38.
4. Демидчик В.И., Рунов А.В., Калашников Н.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 3. С. 82.
5. Lamensdorf D. // IEEE Trans. 1967. AP-15. № 6. P. 767.

Поступила в редакцию 18.09.2000.

Математика и информатика

УДК 517.984

В.А. ЕРОВЕНКО

О РАЗЛИЧНЫХ КЛАССИФИКАЦИЯХ ТОЧЕК СПЕКТРА ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The aim of this paper is to indicate how states of linear operators in Banach space may be used for some relations between various classifications of subsets of the spectrum.

В математической литературе встречаются различные классификации точек и подмножеств спектра. Это связано с потребностями в спектральной теории, привлекаемой к решению соответствующих задач. Все эти классификации либо в том или ином смысле отражают различные свойства оператора, не имеющего ограниченного обратного на всем пространстве, либо связаны с определенными свойствами устойчивости подмножеств спектра, например при некоторых возмущениях, аналитических отображениях и т. д. Цель настоящей работы состоит в сравнении различных подходов к классификации точек спектра ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве и описание их спектральных свойств.

Пусть всюду в работе X – комплексное банахово пространство и T – ограниченный линейный оператор $T{:}X\to X$, $T\in\mathbf{B}(X)$. Нуль – пространство оператора T будем обозначать через $N(T){:=}\{x\in X{:}\,Tx=0\}$ и область значений через $R(T){:=}\{Tx{:}\,x\in X\}$. Тогда множества $\sigma_p(T){:=}\{\lambda\in\mathbf{C}{:}\,T-\lambda I$ не инъективен, т. е. $N(T-\lambda I)\neq\{0\}\}$, $\sigma_c(T){:=}\{\lambda\in\mathbf{C}{:}\,T-\lambda I$ инъективен, $\overline{R(T-\lambda I)}=X$, но $R(T-\lambda I)\neq X\}$, $\sigma_r(T){:=}\{\lambda\in\mathbf{C}{:}\,T-\lambda I$ инъективен, но $\overline{R(T-\lambda I)}\neq X\}$ называются соответственно *точечный спектр*, *непрерывный спектр* и *остаточный спектр*. Понятия непрерывного и остаточного спектров были впервые введены Н. Данфордом.

Разбиение спектра $\sigma(T)$ оператора T на подмножества $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, согласно терминологии Н. Данфорда и Дж. Шварца, называют *грубой структурой спектра* [1, с. 620]. Другой, более детальный, подход в исследовании подмножеств спектра применен А.Е. Тейлором и Ч.Дж. Халбергом [2], используя понятия состояний оператора. Будем говорить, что оператор T имеет обратный T^{-1}, если из $Tx=0$ следует $x=0$, т. е. если T – взаимно однозначное отображение X на $R(T)$. Следуя работе [2], классифицируем различные возможности для $R(T)$ и T^{-1} следующим образом:

$$\mathbf{I}{:}\ R(T)=X,\quad \mathbf{II}{:}\ R(T)\neq X,\ \text{но}\ \overline{R(T)}=X,\quad \mathbf{III}{:}\ \overline{R(T)}\neq X,$$

1: $\exists\, T^{-1}$ и ограничен, **2**: $\exists\, T^{-1}$ и не ограничен, **3**: T^{-1} не существует.

Состоянием оператора T называется комбинация римских и арабских чисел этой классификации. Например, если $T\in\mathbf{I}$ и $T\in\mathbf{3}$, то это соответствует записи $T\in\mathbf{I}_3$, а $\mathbf{I}_3(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\in\mathbf{I}_3\}$. Вообще говоря, для пары операторов (T, T), где T – банаховый сопряженный a priori, возможно любое из 81 состояния. Однако из общих теорем следует, что, на самом деле, если пространство X – банахово, то число возможных состояний пар равно 9, а именно: $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_1)$, $(\mathbf{I}_3, \mathbf{III}_1)$, $(\mathbf{II}_2, \mathbf{II}_2)$, $(\mathbf{III}_1, \mathbf{I}_3)$, $(\mathbf{II}_3, \mathbf{III}_2)$, $(\mathbf{III}_2, \mathbf{II}_3)$, $(\mathbf{III}_3, \mathbf{III}_3)$ и $(\mathbf{II}_2, \mathbf{III}_2)$, $(\mathbf{III}_2, \mathbf{III}_3)$, кроме того, если пространство X – рефлексивное, то это число уменьшается до 7 без последних двух [2–4].

Резольвентное множество $\rho(T)$ оператора T есть подмножество $\mathbf{I}_1(T):=$ $=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\in\mathbf{I}_1\}$. Спектр $\sigma(T)$ содержит объединение шести спектральных подмножеств, описывающих *тонкую структуру спектра*, связанную с первичной классификацией точек спектра следующим образом: точечный спектр $\sigma_p(T)=\mathbf{I}_3(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_3(T)=\mathbf{3}(T)$, непрерывный спектр $\sigma_c(T)=\mathbf{II}_2(T)$, остаточный спектр $\sigma_r(T)=\mathbf{III}_1(T)\cup\mathbf{III}_2(T)$.

Определение 1. Подмножество спектра $\sigma_d(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}\colon\ \overline{R(T-\lambda I)}\neq X\ \}=$ $=\mathbf{III}(T)$ называется *дефектным спектром* оператора T.

В частности, для остаточного спектра выполняется равенство $\sigma_r(T)=$ $=\sigma_d\ (T)\ \setminus\ \sigma_p(T)$. Следуя [5], обозначим через $\sigma_f\ (T)=\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup$ $\cup\mathbf{III}_3(T)$ спектральное подмножество, которое называется *каркасом спектра*. Известно, что спектральные подмножества $\mathbf{I}_3(T)$ и $\mathbf{III}_1(T)$ являются открытыми множествами [5]. Кроме того, $\sigma_f\ (T)$ – непустое компактное подмножество спектра $\sigma(T)$, содержащее границу спектра, т. е. $\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_f(T)$ или $\partial\,\sigma(T)\subseteq\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\notin\mathbf{1}$ и $T-\lambda I\notin\mathbf{I}\}$.

В классификацию точек спектра, предложенную П. Халмошем [6, с. 45], входят точечный спектр σ_p, дефектный спектр σ_d (*спектр сжатия*) и аппроксимативно-точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ (*предельный спектр*).

Определение 2. Множество $\sigma_{ap}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}$: существует последовательность (x_n) такая, что $\|x_n\|=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|(T-\lambda I)x_n\|=0$ $\}$ называется *аппроксимативно-точечным спектром* оператора T. Множество $\sigma_{ad}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I$ – не сюръективен, т. е. $R(T-\lambda I)\neq X\}$ называется *аппроксимативно-дефектным спектром* оператора T [7].

Заметим, что $\lambda\notin\sigma_{ap}(T)$ тогда и только тогда, когда $\exists\ C>0$ такая, что $\|(T-\lambda I)x\|\geq C\|x\|$ для всех $x\in X$, т. е. оператор $T-\lambda I$ ограничен снизу, поэтому $\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:inf\{\ \|(T-\lambda I)x\|:\|x\|=1\ \}=0\}$.

В терминах состояний оператора аппроксимативные спектры $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{ad}(T)$ можно записать в виде:

$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\colon T-\lambda I\notin\mathbf{1}\}\text{ и }\sigma_{ad}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\colon T-\lambda I\notin\mathbf{I}\}.$$

Лемма 1. Для спектра оператора T справедливы равенства $\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup$ $\cup\sigma_d(T)$ и $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_{ad}(T)$, где пересечение множеств $\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_d(T)$ и $\sigma_p(T)\cap\sigma_{ad}(T)$, вообще говоря, непусто.

Утверждение леммы можно непосредственно получить из представления этих спектров в виде спектральных подмножеств:

$$\sigma_d(T)=\mathbf{III}(T),\ \sigma_p(T)=\mathbf{3}(T),$$
$$\sigma_{ap}(T)=\mathbf{I}_3(T)\cup\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup\mathbf{III}_3(T),$$
$$\sigma_{ad}(T)=\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_1(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup\mathbf{III}_3(T).$$

Отметим, что из этих представлений непосредственно следуют равенства:

$$\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_r(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_{ad}(T),\quad \sigma_p(T)=\sigma_{ap}(T)\setminus\{\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)\},$$

$$\sigma_c(T)=\sigma_{ap}(T)\setminus\{\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\} \text{ и } \sigma_c(T)=\sigma_{ad}(T)\setminus\{\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\}.$$

Лемма 2. Для аппроксимативных спектров оператора Т и его банахово сопряженного T' верны соотношения: $\sigma_{ap}(T)=\sigma_{ad}(T')$ и $\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)$.

Теорема 1. Справедливы следующие равенства для спектра и включения для границы спектра оператора T:

$$\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_{ad}(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)\cup\sigma_{ad}(T'),$$

$$\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ad}(T)=\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)\cap\sigma_{ad}(T').$$

Кроме того, аппроксимативно-точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ и аппроксимативно-дефектный спектр $\sigma_{ad}(T)$ – непустые замкнутые подмножества спектра $\sigma(T)$ такие, что

$$\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T) \text{ и } \sigma_c(T)\cup\sigma_d(T)\cup\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ad}(T).$$

Замкнутость $\sigma_{ap}(T)$ следует из того, что если $\lambda_0\in\mathbf{C}\setminus\sigma_{ap}(T)$, то найдется $C>0$ такое, что $\|(T-\lambda_0 I)x\|\geq C$ для всех $x\in X$ таких, что $\|x\|=1$. Следовательно, если $\|x\|=1$ и $|\lambda-\lambda_0|<C/2$, то $\|Tx-\lambda x\|\geq\|Tx-\lambda_0 x\|-|\lambda_0-\lambda|\geq C/2$, так что $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\sigma_{ap}(T)$. Из замкнутости $\sigma_{ap}(T)$ в силу соотношений двойственности (лемма 2) следует замкнутость аппроксимативного спектра. Непустота аппроксимативных спектров вытекает из включения $\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ad}(T)$.

Следствие 1. Если для граничной точки спектра $\lambda\in\partial\,\sigma(T)$ оператор $T-\lambda I$ инъективен, $N(T-\lambda I)=\{0\}$, то область значений $R(T-\lambda I)$ не замкнута.

Банахово пространство $\mathbf{B}(X)$ является также банаховой алгеброй с тождественным оператором I в качестве единицы, так как $\|AT\|\leq\|A\|\,\|T\|$ для $A,T\in\mathbf{B}(X)$ и $\|I\|=1$. Рассмотрим некоторые понятия для элементов банаховой алгебры и покажем, как в терминах алгебраических свойств можно охарактеризовать состояния линейных ограниченных операторов и, следовательно, соответствующие спектральные подмножества.

Определение 3. Оператор T называется *левым* (*правым*) *регулярным*, если найдется оператор A такой, что $AT=I$ ($TA=I$), а оператор A называется левым (правым) обратным оператора T. Множество всех левых (правых) регулярных элементов обозначается R_l (R_r). Оператор T называется *левым* (*правым*) *делителем нуля*, если найдется оператор $A\in\mathbf{B}(X)$, $A\neq0$, такой, что $TA=0$ ($AT=0$). Множество всех левых (правых) делителей нуля обозначается через D_l (соответственно D_r). Оператор T называется *левым* (*правым*) *топологическим делителем нуля*, если найдется последовательность операторов $(A_n)\subset\mathbf{B}(X)$ такая, что $\|A_n\|=1$ и $TA_n\to0$ ($A_nT\to0$), т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|TA_n\|=0$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nT\|=0$). Множество всех левых (правых) топологических делителей нуля будем обозначать через $Z_l(Z_r)$.

Лемма 3. Оператор T – левый регулярный в $\mathbf{B}(X)$, $T\in R_l$, тогда и только тогда, когда $N(T)=0$ и $R(T)$ – дополняемое подпространство в X. Оператор T – правый регулярный в $\mathbf{B}(X)$, $T\in R_r$, тогда и только тогда, когда $R(T)=X$ и $N(T)$ – дополняемое подпространство в X.

Напомним, что подпространство X_1 банахова пространства X называют дополняемым, если X_1 замкнуто и найдется замкнутое подпространство X_2 такое, что X разлагается в прямую сумму $X=X_1\oplus X_2$, т. е. $X=X_1+X_2$ и $X_1\cap X_2=\{0\}$. Подпространство X_1 банахова пространства X дополняемо тогда и только тогда, когда существует оператор $P\in\mathbf{B}(X)$ такой, что $P^2=P$ и $R(P)=X_1$. В условиях леммы 3 $P=TA$ – проектор на $R(T)$, если $T\in R_l$, и $P=I-AT$ – проектор на $N(T)$, если $T\in R_r$.

Заметим, что $R_l \subseteq \mathbf{1}$ и $R_r \subseteq \mathbf{I}$. Действительно, если $AT=I$, то $x=ATx$ и $\|x\| \le \|A\|\,\|Tx\|$, а если $TA=I$, то тогда для любого $x \in X$ имеем $x=T(Ax)$, т. е. $R(T)=X$. Так как $T \in \mathbf{I}_1 \Leftrightarrow T \in R_l \cap R_r$, то резольвентное множество $\rho(T)$ можно записать в следующем виде: $\rho(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}: T-\lambda I \in R_l \cap R_r\}$.

В частности, для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве для множества регулярных элементов $R_l=\mathbf{1}$ и $R_r=\mathbf{I}$.

Лемма 4. Оператор T – левый (правый) делитель нуля в $\mathbf{B}(X)$, $T \in D_l(D_r)$, тогда и только тогда, когда T – не взаимно однозначное отображение (область значений $R(T)$ не плотна в X), т. е. $D_l=\mathbf{3}$ ($D_r=\mathbf{III}$). Оператор T – левый (правый) топологический делитель нуля в $\mathbf{B}(X)$, $T \in Z_l(Z_r)$, тогда и только тогда, когда T не ограничен снизу (не сюръективен), т. е. для операторов, не принадлежащих классу $Z_l(Z_r)$, которые обозначим через $CZ_l(CZ_r)$, имеем: $CZ_l=\mathbf{1}(CZ_r=\mathbf{I})$.

Доказательство утверждений лемм 3 и 4 содержится в монографиях [4, 9]. Нетрудно видеть, что из этих лемм следуют включения для элементов банаховой алгебры $\mathbf{B}(X)$ следующего вида: $D_l \subset Z_l \subset CR_l$ и $D_r \subset Z_r \subset CR_r$.

Теорема 2. Для спектра оператора T как элемента банаховой алгебры $\mathbf{B}(X)$ выполняется равенство: $\sigma(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}: T-\lambda I \in Z_l \cup Z_r\}$. А для точечного и дефектного спектров, а также их аппроксимативных аналогов справедливы равенства:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in D_l\},\quad \sigma_d(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in D_r\},$$
$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in Z_l\},\quad \sigma_{ad}(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in Z_r\}.$$

Заметим, что для состояний ограниченных линейных операторов в банаховой алгебре $\mathbf{B}(X)$ справедливы равенства вида:

$$\mathbf{I}_1=R_l \cap R_r=C(Z_l \cup Z_r),\quad \mathbf{I}_2 \text{ – невозможно},\quad \mathbf{I}_3=D_l \cap CZ_r,$$
$$\mathbf{II}_1 \text{ – невозможно},\quad \mathbf{II}_2=Z_l \cap Z_r \cap C(D_l \cup D_r),\quad \mathbf{II}_3=D_l \cap Z_r \cap CD_r,$$
$$\mathbf{III}_1=D_r \cap CZ_l,\quad \mathbf{III}_2=D_r \cap Z_l \cap CD_l,\quad \mathbf{III}_3=D_l \cap D_r.$$

Отметим, в частности, что для состояний оператора **2** и **II** справедливы также равенства: $\mathbf{2}=Z_l \cap CD_l$ и $\mathbf{II}=Z_r \cap CD_r$.

Лемма 5. Для состояний ограниченных линейных операторов из $\mathbf{B}(H)$, где H – гильбертово пространство, выполняются равенства: $\mathbf{I}_3=D_l \cap R_r$ и $\mathbf{III}_1=D_r \cap R_l$. В частности, оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ – левый (правый) регулярный тогда и только тогда, когда T не является левым (правым) топологическим делителем нуля в $\mathbf{B}(H)$, т. е. $R_l=CZ_l=\mathbf{1}$ и $R_r=CZ_r=\mathbf{I}$.

Заметим, что для операторов, определенных на банаховом пространстве X, выполняется равенство $D_r \cap R_l=\{T \in \mathbf{B}(X): T \in \mathbf{III}_1$ и T^{-1} может быть непрерывно продолжен на все $X\}$. Поэтому для операторов T, определенных на гильбертовом пространстве H, выполняется соотношение $\mathbf{III}_1=D_r \cap R_l$. Пользуясь диаграммой состояний Тейлора – Халберга [2] и свойством сопряженного от произведения ограниченных операторов $(AT)^*=T^*A^*$, из предыдущего равенства находим, что $\mathbf{I}_3=D_l \cap R_r$.

Следствие 2. Пусть $T \in \mathbf{B}(H)$, где H – комплексное гильбертово пространство. Тогда для аппроксимативных спектров справедливы равенства:

$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in CR_l\},\quad \sigma_{ad}(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in CR_r\}.$$

Заметим также, что множества R_l и R_r открыты, а множества Z_l и Z_r замкнуты в банаховой алгебре $\mathbf{B}(X)$, кроме того, для точечного $\sigma_p(T)$, остаточного $\sigma_r(T)$ и непрерывного $\sigma_c(T)$ спектров оператора T выполняются равенства:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in D_l\},\ \sigma_r(T)=\{\lambda \in \mathbf{C}:\ T-\lambda I \in D_r \setminus D_l\},$$

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}: T-\lambda I\notin D_l\cup D_r,\ T-\lambda I\in Z_l\cup Z_r\}.$$

Обозначим через $\mathbf{A}(T)$ семейство всех функций комплексной переменной, кусочно-аналитических на спектре $\sigma(T)$ оператора $T\in\mathbf{B}(X)$. По поводу *функционального исчисления* Рисса – Данфорда для ограниченных линейных операторов на комплексном банаховом пространстве X, $T\in\mathbf{B}(X)$, устанавливаемого с помощью соответствия $f\leftrightarrow f(T)$, которое осуществляет алгебраический изоморфизм между алгеброй $\mathbf{A}(T)$ и некоторой коммутативной алгеброй операторов, содержащихся в $\mathbf{B}(X)$, см.[1, с. 608–610]. Н. Данфорд [3] доказал теорему об отображении спектра, т. е. равенство для спектра функции от ограниченного оператора $f(T)$, где $f\in\mathbf{A}(T)$, а именно, что $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$, где $f(\sigma(T)):=\{f(\lambda): \lambda\in\sigma(T)\}$.

При отображениях, осуществляемых аналитическими функциями класса $\mathbf{A}(T)$, сохраняются и более тонкие структурные свойства спектра оператора T. В функциональном исчислении Рисса – Данфорда непересекающиеся части спектра $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$, вообще говоря, не отображаются в соответствующие части спектра оператора $f(T)$. Однако такое отображение может перевести некоторые подмножества спектра в такие же подмножества, если рассмотреть другое разбиение спектра, а именно на подмножества $\sigma_p(T)$, $\sigma_d(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{ad}(T)$ (для первых трех спектров см. соответствующее утверждение в [10]).

Теорема 3. Пусть $f\in\mathbf{A}(T)$. Тогда справедливы включения:

$$f(\sigma_p(T))\subseteq\sigma_p(f(T)),\ f(\sigma_d(T))\subseteq\sigma_d(f(T)),\ f(\sigma_{ap}(T))\subseteq\sigma_{ap}(f(T)),\ f(\sigma_{ad}(T))\subseteq\sigma_{ad}(f(T)).$$

Если $\mu\in\sigma_p(f(T))$ (соответственно $\sigma_d(f(T))$, $\sigma_{ap}(f(T))$, $\sigma_{ad}(f(T))$) и $f(\lambda)\neq\mu$ ни на одной компоненте спектра $\sigma(T)$, то существует $\alpha\in\sigma(T)$ такое, что $f(\alpha)=\mu$ и $\alpha\in\sigma_p(T)$ (соответственно $\sigma_d(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{ad}(T)$), т. е. в этом случае верны обратные включения.

Дополнительное условие на функцию $f\in\mathbf{A}(T)$ из второй половины теоремы 3 существенно. Например, пусть $X=l^p$, $1\leq p\leq\infty$, и $T:=S_p$ – оператор одностороннего правого сдвига, т. е. $S_p(x_1, x_2, x_3,\ldots)=(0, x_1, x_2, x_3,\ldots)$. Тогда $\sigma_p(T)=\varnothing$, однако для $f(\lambda)=0$ имеем $\sigma_p(f(T))=\{0\}\neq\varnothing$.

Следствие 3. Если f – рациональная функция с полюсами вне спектра $\sigma(T)$ или $f\in\mathbf{A}(T)$ и непостоянна ни на одной из компонент множества $\sigma(T)$, то тогда справедливы равенства:

$$f(\sigma_p(T))=\sigma_p(f(T)),\ f(\sigma_d(T))=\sigma_d(f(T)),\ f(\sigma_{ap}(T))=\sigma_{ap}(f(T)),\ f(\sigma_{ad}(T))=\sigma_{ad}(f(T)).$$

Рассмотрим некоторые свойства подмножеств спектра расширения ограниченного линейного оператора T, определенного на подпространстве $D(T)$ банахова пространства X (см. также [10]). Пусть $T:D(T)\to X$ и $\tilde{T}:D(\tilde{T})\to X$ – линейные операторы в X. Оператор $\tilde{T}$ называется *расширением* оператора T, если $D(T)\subset D(\tilde{T})$ и $\tilde{T}x=Tx$ для $x\in D(T)$.

Теорема 4. Если ограниченный оператор $\tilde{T}$ – расширение ограниченного оператора T, $T\subset\tilde{T}$, то для их резольвентных множеств справедливо соотношение $\rho(\tilde{T})\subseteq\rho(T)\cup\sigma_r(T)$, а для подмножеств спектра операторов T и $\tilde{T}$ выполняются включения:

$$\sigma_p(T)\subseteq\sigma_p(\tilde{T}),\ \sigma_c(T)\subseteq\sigma_c(\tilde{T})\cup\sigma_p(\tilde{T}),\ \sigma_r(\tilde{T})\subseteq\sigma_r(T),$$
$$\sigma_d(\tilde{T})\subseteq\sigma_d(T),\ \sigma_{ap}(T)\subseteq\sigma_{ap}(\tilde{T}),\ \sigma_{ad}(\tilde{T})\subseteq\sigma_{ad}(T).$$

Говорят, что замкнутые подпространства $X_1, X_2\subset X$ приводят оператор T, если $X=X_1\oplus X_2$ (т. е. $X=X_1+X_2$ и $X_1\cap X_2=\{0\}$) и X_1, X_2 инвариантны относительно T. Тогда оператор T разлагается в прямую сумму $T=T|X_1\oplus T|X_2$.

Лемма 6. Для оператора T и его сужений $T|X_1$ и $T|X_2$ справедливы следующие утверждения в терминах состояний операторов:

$$T\in\mathrm{I} \Leftrightarrow T|X_1\in\mathrm{I} \text{ и } T|X_2\in\mathrm{I},\quad T\in\mathbf{1} \Leftrightarrow T|X_1\in\mathbf{1} \text{ и } T|X_2\in\mathbf{1},$$

$$T\in\mathrm{III} \Leftrightarrow T|X_1\in\mathrm{III} \text{ и } T|X_2\in\mathrm{III},\quad T\in\mathbf{3} \Leftrightarrow T|X_1\in\mathbf{3} \text{ и } T|X_2\in\mathbf{3}.$$

Лемма 7. Пусть замкнутые подпространства X_1 и X_2 комплексного банахова пространства X приводят оператор T. Предположим, что L, M, N принимают значения из множества состояний {I, II, III}, а α, β, γ – из множества состояний {**1**, **2**, **3**}. Тогда если λ принадлежит резольвентным или спектральным подмножествам $L_\alpha(T|X_1):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ (T-\lambda I)|X_1\in L_\alpha\}$ и $M_\beta(T|X_2):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ (T-\lambda I)|X_2\in M_\beta\}$, то λ принадлежит резольвентному или спектральному подмножеству $N_\gamma(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in N_\gamma\}$, где $N:=\max\{L,M\}$ и $\gamma:=\max\{\alpha,\beta\}$.

Утверждение частично следует из леммы 6 (см. также [5]).

Теорема 5. Пусть замкнутые подпространства X_1, $X_2\subset X$ комплексного банахова пространства X приводят оператор T. Тогда для спектра оператора $T=T|X_1\oplus T|X_2$ имеем $\sigma(T)=\sigma(T|X_1)\cup\sigma(T|X_2)$ и, кроме того, выполняются спектральные равенства:

$$\sigma_p(T)=\sigma_p(T|X_1)\cup\sigma_p(T|X_2),\quad \sigma_d(T)=\sigma_d(T|X_1)\cup\sigma_d(T|X_2),$$

$$\sigma_{ap}(T)=\sigma_{ap}(T|X_1)\cup\sigma_{ap}(T|X_2),\quad \sigma_{ad}(T)=\sigma_{ad}(T|X_1)\cup\sigma_{ad}(T|X_2).$$

Заметим, что, пользуясь леммой 7, можно получить различные соотношения для тонкой структуры спектра оператора T и его сужений на инвариантные подпространства.

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. Тейлор А.Е., Халберг Ч.Дж.А. // Математика: Сб. переводов. 1959. Т. 3. № 1. С. 69.
3. Taylor A.E. Introduction to functional analysis. New York, 1958.
4. Goldberg S. Unbounded linear operators. Theory and applications. New York, 1966.
5. Halberg Ch.Y.A., Samuelsson A. // Math. Scand. 1971. Vol. 29. № 1. P. 37.
6. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.
7. Davis C., Rosenthal P. // Canad. J. Math. 1974. Vol. 26. P. 1384.
8. Dowson H.R. Spectral theory of linear operators. London, 1978.
9. Caradus S.R., Pfaffenberger W.E., Yood B. Calkin algebras of operator on Banach spaces. New York, 1974.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила в редакцию 21.05 2000.

УДК 517.968.23

А.П. ШИЛИН

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ УГЛА

Some new singular integral equation is solved in quadratures.

Пусть n – некоторое натуральное число, $n\geq 2$, k – одно из чисел 0, 1, …, $n-1$, $\varepsilon_k=\exp(2\pi ik/n)$ – комплексные корни n-й степени из единицы.

На плоскости комплексной переменной z введем обозначение D_+ для угла, характеризующегося неравенствами $0<\arg z<2\pi/n$. Обозначим L – контур, ограничивающий D_+ и состоящий из лучей $L_S=\{t\,|\,t=\varepsilon_s x,\ x\geq 0\}$,

s=0,1. Выберем на контуре L ту ориентацию, которая оставляет угол D_+ слева. Будем обозначать D_- – внешность D_+.

На контуре L зададим H-непрерывные функции $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $f(t)$. Будем искать H-непрерывную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению с интегралом в смысле главного значения

$$(a(t)+b(t))\varphi(t)+\frac{nt^k}{\pi i}\int\limits_L \frac{\tau^{n-k-1}(a(t)-b(\tau))\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n}+(M\varphi)(t)=f(t), t\in L, \quad (1)$$

где

$$(M\varphi)(t)=\begin{cases}\varepsilon_{n-k}(b(\varepsilon_1 t)-a(t))\varphi(\varepsilon_1 t), t\in L_0,\\ \varepsilon_k(b(\varepsilon_{n-1}t)-a(t))\varphi(\varepsilon_{n-1}t), t\in L_1\end{cases}$$

(при k=0 ε_n здесь и дальше заменяется на ε_0). Все функции комплекснозначны.

H-непрерывность всех функций понимается вплоть до бесконечно удаленной точки. Отсюда вытекает, что каждая из них имеет на бесконечности конечный предел, не зависящий от луча L_0 или L_1, по которому аргумент функции стремится к бесконечности. Этот предел обозначаем дальше как значение соответствующей функции на бесконечности. Будем предполагать еще, что $a(\infty)\neq 0$, $b(\infty)\neq 0$, $f(\infty)\neq 0$, а при $k\neq 0$ также $f(0)=0$. От искомой функции будем требовать $\varphi(\infty)=0$, а при $k\neq 0$ также $\varphi(0)=0$.

При n=2, k=0 уравнение (1) превращается в уравнение на действительной оси, решенное в [1].

Для $t\in L$ введем новые неизвестные функции $\Phi_+(t)=(P_+\varphi)(t)$, $\Phi_*(t)=(P_*\varphi)(t)$, $\Psi_+(t)=(P_+\psi)(t)$, $\Psi_*(t)=(P_*\psi)(t)$. При этом $\psi(t)=b(t)\varphi(t)$, а операторы P_+, P_* задаются формулами

$$(P_+\varphi)(t)=\frac{nt^k}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\tau^{n-k-1}\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n}+\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{1}{2}(L\varphi)(t),$$

$$(P_*\varphi)(t)=\frac{nt^k}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\tau^{n-k-1}\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n}-\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{1}{2}(L\varphi)(t),$$

где

$$(L\varphi)(t)=\begin{cases}\varepsilon_{n-k}\varphi(\varepsilon_1 t),\ t\in L_0,\\ \varepsilon_k\varphi(\varepsilon_{n-1}t),\ t\in L_1.\end{cases}$$

В выражениях для операторов P_+, P_* мы берем то значение k, которое задано в уравнении (1); в частности, может быть k=0. Если же в этих выражениях взять k=0 независимо от заданного значения k, то такие операторы будем в дальнейшем обозначать соответственно P_+^0, P_*^0.

Теперь легко проверить, что уравнению (1) можно придать вид задачи линейного сопряжения

$$a(t)\Phi_+(t)=\Psi_*(t)+f(t)/2,\ t\in L. \quad (2)$$

Исключая из соотношений

$$\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_*(t),\ b(t)\varphi(t)=\Psi_+(t)-\Psi_*(t) \quad (3)$$

функцию $\varphi(t)$, придем еще к одной задаче линейного сопряжения

$$\Psi_+(t)=-b(t)\Phi_*(t)+((a(t)+b(t))\Phi_+(t)-f(t)/2),\ t\in L. \quad (4)$$

Выясним характер введенных функций $\Phi_+(t)$, $\Phi_*(t)$, $t\in L$. Согласно формулам Сохоцкого,

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \text{ при } t\neq 0,$$

$$\Phi^{+}(0)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau},\ \Phi^{-}(0)=-\frac{1}{n}\varphi(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau}$$

есть предельные значения функций $\Phi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}$, аналитических соответственно в $D_{\pm}$. (При $k\neq 0$ из-за условия $\varphi(0)=0$ значения $\Phi^{\pm}(0)$ можно не выделять отдельно.) Рассмотрим функцию

$$\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon_{j_s}\Phi^{-}(\varepsilon_s t), \tag{5}$$

где $j_0=0$, $j_1=n-k$. Для $s=2, 3, \ldots, n-1$ положим $j_s=j_{s-1}-k$, если $j_{s-1}\geq k$, и $j_s=n+$ $+j_{s-1}-k$, если $j_{s-1}<k$; при этом нетрудно установить, что $j_{n-1}=k$.

Выражая слагаемые в (5) через интеграл по контуру L, функцию (5) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_{j_s}}{\tau-\varepsilon_s t}\right)\varphi(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{1}{2}(L\varphi)(t)=\Phi_*(t),$$

причем последнее равенство устанавливается после вычисления возникшей суммы простых дробей. Выбором чисел j_s, $s=0, 1, \ldots, n-1$, мы добиваемся выполнения легко проверяемого свойства

$$\Phi_*(\varepsilon_1 t)=\varepsilon_k\Phi_*(t), t\geq 0. \tag{6}$$

Совершенно аналогично получается равенство

$$\Phi^{+}(t)+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon_{j_s}\Phi^{-}(\varepsilon_s t)=\Phi_{+}(t),$$

из которого понятно, что $\Phi_{+}(t)$ есть предельное значение на контуре L функции $\Phi^{+}(z)+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon_{j_s}\Phi^{-}(\varepsilon_s z)$, аналитической, очевидно, в D_+.

Итак, функция $\Phi_+(t)$ является предельным значением функции, аналитической в D_+, а $\Phi_*(t)$ является функцией, заданной на контуре L и удовлетворяющей свойству (6). Очевидно, что обе функции H-непрерывны и исчезают на бесконечности. Вполне аналогичный характер имеют функции $\Psi_+(t)$ и $\Psi_*(t)$.

Теперь ясно, что возникшие задачи линейного сопряжения (2), (4) похожи на задачи Римана. Отличие от задач Римана состоит в том, что вместо аналитических в D_- функций ищутся функции на контуре L, обладающие свойством вида (6). Задачи (2), (4) допускают решение по схеме, аналогичной схеме Ф.Д. Гахова решения задачи Римана [2]. Отметим еще, что задачи (2), (4) можно свести также к задачам Карлемана для угла D_+, однако в конструктивном отношении нам представляется более выгодным путь решения, основанный именно на аналогии с задачей Римана.

Укажем следующие несложные свойства аналитических функций. Если функция $\Phi(z)$ аналитична в D_+, исчезает на бесконечности и имеет H-непрерывное предельное значение на L, причем при $t\geq 0$ $\Phi(\varepsilon_1 t)=\varepsilon_k\Phi(t)$, то $\Phi(z)=0$. Если в дополнение к указанным свойствам функция $\Phi(z)$ допускает полюс порядка не выше ω в точке $z_0=\exp(\pi i/n)$, то

$$\Phi(z)=\frac{c_1 z^k+c_2 z^{n+k}+\ldots+c_\omega z^{(\omega-1)n+k}}{\left(z^n+1\right)^\omega},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_\omega$ – произвольные комплексные постоянные. Эти свойства при решении задач (2), (4) играют роль аналогов обычной и обобщенной теорем Лиувилля.

Операторы P_+, P_* позволяют решать задачи (2), (4) о скачке. Например, единственное решение задачи (2) о скачке $\Phi_+(t)-\Psi_*(t)=f(t)/2$ дается формулами $\Phi_+(t)=(P_+(f/2))(t), \Psi_*(t)=(P_*(f/2))(t)$.

Дальнейшая аналогия решения задач (2), (4) с решением задачи Римана нам представляется достаточно очевидной, так что на соответствующих подробностях мы не останавливаемся. После введения некоторых обозначений сформулируем окончательный результат, получающийся последовательным решением задач (2), (4) и нахождением решения исходного уравнения по первой из формул (3).

Пусть $\alpha=-\mathrm{Ind}_L a(t)$, $\beta=\mathrm{Ind}_L b(t)$. Обозначим r – ранг линейной алгебраической системы (9), записанной впоследствии и возникающей при $\alpha>0$, $\beta<0$. Считаем $r=0$, если неравенства $\alpha>0$, $\beta<0$ одновременно не выполняются. Под логарифмами понимаются однозначные непрерывные ветви.

Теорема. *Решение уравнения* (1) *содержит* $\max(0,\alpha)+\max(0,\beta)-r$ *произвольных комплексных постоянных и находится по формуле*

$$\varphi(t)=X_+(t)(E_+(t)+P(t))-Y_*(t)(F_*(t)+Q(t)),$$

где $X_+(t)=\left(\frac{t-z_0}{t+z_0}\right)^\alpha \exp\left(\left(P_+^0\Gamma\right)(t)\right)$, $\Gamma(t)=\ln\left(\left(\frac{t+z_0}{t-z_0}\right)^\alpha \frac{1}{a(t)}\right)$, $E_+(t)=(P_+g)(t)$,

$g(t)=\frac{f(t)}{2a(t)X_+(t)}$, $P(t)\equiv 0$ *при* $\alpha\le 0$, $P(t)=\frac{a_1t^k+a_2t^{n+k}+\ldots+a_\alpha t^{(\alpha-1)n+k}}{\left(t^n+1\right)^\alpha}$ *при* $\alpha>0$, $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ – *комплексные постоянные*,

$$Y_*(t)=\exp\left(\left(P_*^0\Delta\right)(t)\right),\quad \Delta(t)=\ln\left(\left(\frac{t+z_0}{t-z_0}\right)^\beta(-b(t))\right),\quad F_*(t)=(P_*h)(t),$$

$$h(t)=\frac{(a(t)+b(t))X_+(t)(E_+(t)+P(t))}{Y_+(t)}-\frac{f(t)}{2Y_+(t)},\quad Y_+(t)=\left(\frac{t-z_0}{t+z_0}\right)^\beta \exp\left(\left(P_+^0\Delta\right)(t)\right),$$

$Q(t)\equiv 0$ *при* $\beta\le 0$, $Q(t)=\frac{b_1t^k+b_2t^{n+k}+\ldots+b_\beta t^{(\beta-1)n+k}}{\left(t^n+1\right)^\beta}$ *при* $\beta>0$, $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ – *произвольные комплексные постоянные.*

При $\alpha\ge 0,\beta\ge 0$ *уравнение* (1) *разрешимо безусловно. При* $\alpha<0,\beta\ge 0$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int_L \frac{\tau^{n-k-1}g(\tau)d\tau}{\left(\tau^n+1\right)^l}=0,\quad l=1,2,\ldots,-\alpha. \tag{7}$$

При $\alpha=0,\beta<0$ *для разрешимости уравнения* (1) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int_L \frac{\tau^{n-k-1}h(\tau)d\tau}{\left(\tau^n+1\right)^l}=0,\quad l=1,2,\ldots,-\beta. \tag{8}$$

При $\alpha<0$, $\beta<0$ *для разрешимости уравнения* (1) *необходимо и достаточно выполнение совокупности условий* (7), (8). *При* $\alpha>0$, $\beta<0$ *разрешимость уравнения* (1) *равносильна совместности системы*

$$\sum_{m=1}^{\alpha} p_{lm} a_m = q_l, \quad l = 1, 2, \ldots, -\beta, \tag{9}$$

в которой

$$p_{lm} = \int_L \frac{\tau^{nm-1}(a(\tau)+b(\tau))X_+(\tau)d\tau}{Y_+(\tau)(\tau^n+1)^{\gamma+\alpha}},$$

$$q_l = \int_L \frac{\tau^{n-k-1}(f(\tau)-2(a(\tau)+b(\tau))X_+(\tau)E_+(\tau))d\tau}{2Y_+(\tau)(\tau^n+1)^{\gamma}}.$$

В последнем случае постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ *являются общим решением системы* (9). *В случае* $\alpha>0$, $\beta\geq 0$ *эти постоянные являются произвольными.*

1. Шилин А.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.

Поступила в редакцию 01.04.99.

УДК 517.926.4

З.Н. ПРИМИЧЕВА

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КЛАССА КОНТИ – КОППЕЛЯ

The existence and uniqueness of a bounded solution is established for the differential system with a linear approximation of Conti – Coppel's class.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t):[0,+\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ – непрерывная матрица.

Будем говорить, следуя Р. Конти [1], что система (1) принадлежит классу M^pS с числом $p\geq 1$, если для ее матрицы Коши $X(t,\tau)$ выполнено условие

$$\Big(\int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \|^p d\tau\Big)^{1/p} \leq k_p \equiv \mathrm{const} < +\infty, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Для $p=+\infty$ класс $M^{\infty}S$ совпадает с множеством линейных систем, удовлетворяющих следующему условию обыкновенной дихотомии

$$\| X(t,\tau) \| \leq k_\infty \equiv \mathrm{const} < +\infty, \quad \tau \geq t \geq 0. \tag{3}$$

Пусть функция $f(t,\tau)$, определенная и непрерывная на множестве $G = \{(t,y): t\geq 0, y\in R^n\}$, удовлетворяет в G следующим условиям

$$\| f(t,0) \| \in L_q(R_+), \quad q \geq 1, \tag{4}$$

$$\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|. \tag{5}$$

Для $q=+\infty$ будем считать, что функциональное пространство $L_\infty(R_+)$ совпадает с пространством $C(R_+)$.

Рассмотрим возмущённую систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y). \tag{6}$$

Справедлива следующая

Теорема. Если система (1) принадлежит классу M^pS с числом $p \geq 1$, то для любой непрерывной в G вектор-функции $f(t, y)$, удовлетворяющей условию (4) с числом q, сопряженным с p, и неравенству Липшица (5) с достаточно малой постоянной L, система (6) имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Доказательство. Рассмотрим пространство $C(R_+)$ непрерывных и ограниченных на R_+ вектор-функций $y(t)$ с нормой $\|y\|_c = \sup\limits_{t \geq 0} \|y(t)\|$.

Следуя В. Коппелю [2, с. 36], определим в $C(R_+)$ отображение $T{:}y(t) \to$ $\to Ty(t)$, где

$$Ty(t) = -\int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{7}$$

Покажем, что функция $Ty(t)$ является непрерывной и ограниченной на R_+, и, следовательно, несобственный интеграл в (7) сходится.

Известно [4], что при любом $p > 0$ и любом $\varepsilon > 0$ справедливо условие $M^{p+\varepsilon}S \subset M^pS$, и поэтому при любом $p > 1$ имеет место включение

$$M^pS \subset M^1S. \tag{8}$$

В силу условия (4) справедлива оценка

$$\| f(t,0) \|_{L_q} \equiv h < +\infty, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Тогда

$$\| Ty(t) \| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau)[f(\tau, y(\tau)) - f(\tau,0) + f(\tau,0)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| f(\tau, y(\tau)) - f(\tau,0) \| d\tau + \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| f(\tau,0) \| d\tau.$$

Отсюда при $p > 1$ в силу неравенства Гельдера, условия Липшица (5), включения (8) и оценок (2), (9) следуют неравенства

$$\| Ty(t) \| \leq L \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| y(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \left(\int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \| f(\tau,0) \|^q d\tau \right)^{1/q} \leq Lk_1 \|y\|_C + k_p h.$$

Если $p = 1$, то оценка принимает вид

$$\| Ty(t) \| \leq Lk_1 \| y \|_C + k_1 \| f(t,0) \|_C.$$

Следовательно, функция $Ty(t)$ непрерывна и ограничена на R_+.

Покажем, что отображение T является сжимающим при условии, что постоянная Липшица удовлетворяет неравенству $L < 1/k_1$.

Действительно, в силу условия Липшица (5) и неравенства (2) справедлива оценка

$$\| Ty_1 - Ty_2 \| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau)[f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq L \| y_1 - y_2 \|_C \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| d\tau \leq Lk_1 \|y_1 - y_2\|_C = \theta \|y_1 - y_2\|_C,$$

где $0 < \theta = Lk_1 < 1$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = Ty(t). \tag{10}$$

В силу принципа сжимающих отображений уравнение (10) имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Дифференцированием устанавливается [2, с. 36], что $y(t)$ является решением дифференциальной системы (6). Покажем, что эта система имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Действительно, если $y(t)$ – любое другое ограниченное на R_+ решение системы (6), то в силу установленных оценок по интегральной формуле Коши оно допускает представление

$$y(t) = X(t,0)x(0) - \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

где интегральный член представления ограничен.

Учитывая, что первое слагаемое есть решение соответствующей однородной системы (1), которое является ограниченным тогда и только тогда, когда $x(0) = 0$, [3, с. 74], получаем требуемое.

Теорема доказана.

Следствие. Для ограниченного на R_+ решения интегрального уравнения (10) справедлива оценка

$$\| y(t) \| \le \frac{k_p h}{1 - Lk_1}.$$

Действительно, в силу принципа сжимающих отображений имеет место неравенство

$$\| y(t) \| \le \frac{\| Ty_0 \|}{1-\theta},$$

где θ – коэффициент сжатия отображения T, $\theta = Lk_1$, $y_0 = 0$ и

$$Ty_0 = -\int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau,0)d\tau.$$

Тогда в силу неравенств Гельдера, (2) и (9) имеем требуемую оценку

$$\|Ty_0\| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau,0)d\tau \right\| \le \Big(\int_t^{+\infty} \|X(t,\tau)\|^p d\tau)^{1/p} \Big(\int_t^{+\infty} \|f(\tau,0)\|^q d\tau)^{1/q} \le k_p h.$$

Замечание. Если система (1) обладает обыкновенной дихотомией на R_+, то возмущенная система (6), удовлетворяющая условиям теоремы, не всегда имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{11}$$

Уравнение обладает обыкновенной дихотомией вида (3) на R_+. Однако 1) для любой функции $f \in L_1(R_+)$ любое решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

является ограниченным на R_+;

2) существует функция $f \in L_1[1,+\infty)$ такая, что уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon(\frac{1}{t}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\ln t)y+f(t),\quad t\geq 1, \tag{12}$$

не имеет ограниченных на $[1,+\infty)$ решений.

Покажем это. Уравнение (12) удовлетворяет условиям теоремы при достаточно малой положительной постоянной ε.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon(\frac{1}{t}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\ln t)y,\quad t\geq 1. \tag{13}$$

Матрица Коши уравнения (13) имеет вид $y(t,\tau)=\exp\{\varepsilon(\sin\sqrt{t}\ln t-$ $-\sin\sqrt{\tau}\ln\tau)\}$. Поэтому, полагая

1) $t_k=(\pi/2+2\pi k)^2, \tau_k=(2\pi k)^2:\ 1\leq\tau_k\leq t_k, \forall k\in N;$

2) $t_k=(2\pi k)^2, \tau_k=(3\pi/2+2\pi k)^2:\ 1\leq t_k\leq\tau_k, \forall k\in N,$

получаем, что $\| y(t_k,\tau_k)\|\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Следовательно, уравнение (13) не обладает обыкновенной дихотомией на $[1,+\infty)$.

Тогда из теоремы Коппеля [3, с. 131] следует, что существует функция $f\in L_1[1,+\infty)$ такая, что уравнение (12) не имеет ограниченных на $[1,+\infty)$ решений, ибо в противном случае уравнение (13) обладало бы обыкновенной дихотомией на $[1,+\infty)$.

1. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9. № 1. P. 23.
2. Coppel W. A. Dichotomies in stability theory. New York, 1978.
3. Coppel W. A. Stability and asymptotic behavior of differential equations. Boston, 1965.
4. Прохорова Р. А., Изобов Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1989. № 2. С. 39.

Поступила в редакцию 13.05.99.

УДК 517.926

В.И. БУЛАТОВ

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ

The criterion for existence of the solutions of linear, regular, homogeneous differential systems is proved. Analytic representation of these solutions is obtained with a use of generalized fundamental matrix of the systems as well.

Рассмотрим стационарную систему

$$A_0\dot{x}(t)=Ax(t), \tag{1}$$

не разрешенную относительно производной. Здесь x – n-вектор; A_0 и A – вещественные $n\times n$-матрицы.

Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где x_0 – заданный n-вектор, будем подразумевать дифференцируемую n-вектор-функцию $x(t)$, $t\in[0;+\infty[$, удовлетворяющую (1), (2).

Систему (1) считаем регулярной, если найдется такое число λ_0, что

$$\det(\lambda_0 A_0-A)\neq 0. \tag{3}$$

Известно [1, с. 328–331], что если регулярная система (1) имеет решение $x(t)$, соответствующее начальному условию (2), то это решение единственно.

Целью данной работы является получение эффективно проверяемых условий существования решений регулярных систем (1), (2) и обоснование соответствующих аналитических представлений этих решений через конструктивно определяемую обобщенную фундаментальную матрицу рассматриваемых систем.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. При выполнении условия (3) для $t>0$ определена функция

$$F(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \exp((A_0 - \varepsilon A)^{-1} At), \tag{4}$$

являющаяся квазиполиномом от t и удовлетворяющая системе

$$A_0 \dot{F}(t) = AF(t), \ \ t > 0.$$

Доказательство. Из теории [1, с. 320–322] приведения регулярных пучков матриц к каноническому блочно-диагональному виду следует, что при выполнении (3) найдутся такие невырожденные $n\times n$-матрицы P и Q, что

$$\begin{cases} PA_0Q = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix}, \\ PAQ = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5}$$

где H – некоторая нильпотентная $m\times m$-матрица, S – соответствующая $(n-m)\times(n-m)$-матрица, E_{n-m} и E_m означают единичные матрицы порядков $(n-m)$ и m.

На основании (5) в силу (3) для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ получаем

$$(A_0 - \varepsilon A)^{-1} A = Q \begin{bmatrix} (H - \varepsilon E_m)^{-1} & 0 \\ 0 & (E_{n-m} - \varepsilon S)^{-1} S \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Значит [1],

$$\exp((A_0 - \varepsilon A)^{-1} At) = Q \begin{bmatrix} \exp((H - \varepsilon E_m)^{-1} t) & 0 \\ 0 & \exp((E_{n-m} - \varepsilon S)^{-1} St) \end{bmatrix} Q^{-1}. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \exp((E_{n-m} - \varepsilon S)^{-1} St) = \exp(St). \tag{7}$$

Далее из равенства $(H - \varepsilon E_m)^{-1} = \dfrac{H(H - \varepsilon E_m)^{-1} - E_m}{\varepsilon}$ следует, что

$$\exp((H - \varepsilon E_m)^{-1} t) = R_\varepsilon(t) \exp(-\frac{t}{\varepsilon}),$$

где в силу нильпотентности матрицы H имеем [1] :

$$R_\varepsilon(t) = \exp(\frac{H(H - \varepsilon E_m)^{-1}}{\varepsilon} t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{H^k (H - \varepsilon E_m)^{-k}}{k!\, \varepsilon^k} t^k.$$

Отсюда, учитывая, что при каждом фиксированном t элементами $R_\varepsilon(t)$ являются рациональные функции от ε и что при возрастании аргумента экспоненциальная функция растет быстрее любой рациональной, для $t>0$ непосредственно получаем, что

$$\exists \lim_{\varepsilon \to +0} \exp((H - \varepsilon E_m)^{-1} t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{R_\varepsilon(t)}{\exp(\frac{t}{\varepsilon})} = 0. \tag{8}$$

Из (6)–(8) для $t>0$ следует, что

$$\exists F(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\exp((A_0-\varepsilon A)^{-1}At)=Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \exp(St)\end{bmatrix}Q^{-1}. \quad (9)$$

Из (9), во-первых, получаем, что элементами $F(t)$ являются квазиполиномы от t, и, во-вторых, в силу (5) для $t>0$ имеем [1] :

$$A_0\dot{F}(t)=\left(P^{-1}\begin{bmatrix}H & 0\\ 0 & E_{n-m}\end{bmatrix}Q^{-1}\right)\left(Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S\exp(St)\end{bmatrix}Q^{-1}\right)=P^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S\exp(St)\end{bmatrix}Q^{-1}=$$

$$=\left(P^{-1}\begin{bmatrix}E_m & 0\\ 0 & S\end{bmatrix}Q^{-1}\right)\left(Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \exp(St)\end{bmatrix}Q^{-1}\right)=AF(t).$$

Замечание. Аналогично показывается, что при выполнении (3) для $t<0$ определена функция

$$G(t)=\lim_{\varepsilon\to-0}\exp((A_0-\varepsilon A)^{-1}At)=Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \exp(St)\end{bmatrix}Q^{-1},$$

являющаяся тем же самым квазиполиномом от t, что и (9), и, значит, также удовлетворяющая системе

$$A_0\dot{G}(t)=AG(t),\quad t<0.$$

Из полученных результатов следует, что функция

$$\Phi(t)=\begin{cases}F(t), \text{для } t>0\\ G(t), \text{для } t<0\end{cases},$$

доопределенная в нуле по непрерывности равенством $\Phi(0)=F(+0)=G(-0)$, будет тоже являться квазиполиномом (9) от t, удовлетворяющим системе

$$A_0\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t),\quad t\in R. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что для обыкновенной системы (1), т. е. у которой $\det A_0\neq 0$, во-первых, условие (3) выполнено, и, во-вторых, функция $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t)=\exp(A_0^{-1}At),$$

т. е. в этом случае она совпадает с фундаментальной матрицей [2] рассматриваемой системы. Поэтому и в общем случае выполнения условия (3) целесообразно называть $\Phi(t)$ обобщенной фундаментальной матрицей соответствующей регулярной системы (1). Это согласовывается также со следующими свойствами введенной функции $\Phi(t)$ регулярной системы (1), аналогичными хорошо известными свойствами фундаментальной матрицы линейных обыкновенных систем вида (1).

Теорема. Регулярная система (1) тогда и только тогда имеет решение $x(t)$, соответствующее начальному условию (2), когда

$$\Phi(0)x_0=x_0, \quad (11)$$

при этом

$$x(t)=\Phi(t)x_0, \quad (12)$$

где $\Phi(t)$ – обобщенная фундаментальная матрица рассматриваемой системы.

Доказательство. Из [3] следует, что для того, чтобы регулярная система (1) имела решение $x(t)$, соответствующее начальному условию (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$x_0=((A-\lambda_0 A_0)^{-1}A_0)^n y_0,$$

где y_0 – некоторый n-вектор. Поэтому в случае разрешимости регулярной системы (1), (2) в силу (5) имеем [1]

$$x_0 = Q((PAQ - \lambda_0 PA_0 Q)^{-1} PA_0 Q)^n Q^{-1} y_0 =$$
$$= Q\left(\begin{bmatrix} (E_m - \lambda_0 H)^{-1} & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix}\right)^n Q^{-1} y_0 =$$
$$= Q\begin{bmatrix} (E_m - \lambda_0 H)^{-n} H^n & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0.$$

Учитывая, что из нильпотентности матрицы H следует H^n=0, окончательно получим

$$x_0 = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0.$$

Отсюда на основании (9) и определения обобщенной фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ регулярной системы (1) имеем

$$\Phi(0)x_0 = F(+0)x_0 = \left(Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix} Q^{-1}\right) Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0 =$$
$$= Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0 = x_0,$$

т. е. соотношение (11) выполнено.

Далее при выполнении (11) для функции (12), во-первых, справедливо равенство (2), и, во-вторых, из (10) следует (1), т. е. формула (12) дает требуемое представление решения регулярной системы (1), (2).

Следствие. Общее решение $x(t)$ регулярной системы (1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) X_0 c,$$

где c – соответствующий вектор произвольных постоянных, $\Phi(t)$ – обобщенная фундаментальная матрица рассматриваемой системы, а X_0 – фундаментальная матрица решений линейной алгебраической однородной системы относительно n-вектора x_0

$$(\Phi(0) - E_n)x_0 = 0.$$

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
2. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. Мн., 1996.
3. Bulatov V.I. // ORAN-ALGERIE. 1988. Fascicule № 1.

Поступила в редакцию 20.10.99.

УДК 622.831; 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, О.Б. ГРИЩЕНКОВА, М.А. КОВАЛЕВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА СЕН-ВЕНАНА В ГЕОМЕХАНИКЕ

1. Теоретические основы и анализ систем разрешающих уравнений

There are described the theoretical bases of the solution of some classes of problems of applied geomechanics on the basis of use of the halfconverse Sen-Venan method main idea in the paper. Analysis of solution equations systems and influence of boundary conditions and accepted physical hypotheses on the final solutions is made.

Идея полуобратного метода Сен-Венана заключается в уменьшении числа неизвестных функций, подлежащих определению при решении задач теории упругости, путем задания некоторым из неизвестных функций определенных аналитических выражений. Если при этом оставшиеся функции (например, компоненты тензора напряжений, компоненты вектора смещений точек упругого тела) удается определить так, что уравнения равновесия и граничные условия оказываются выполненными, то задача считается решенной, так как в силу известных теорем решение задачи теории упругости единственно [1].

К сожалению, при разработке методов решения большого круга задач геомеханики для получения удобных и используемых в прикладных исследованиях способов решения и подходов к ним приходится идти на некоторый компромисс. В большинстве случаев, например, не удается в точности удовлетворить всем начальным условиям: на некотором участке поверхности, ограничивающей тело, распределение усилий оказывается отличным от заданного, на систему сил, статически эквивалентную нулю. Это обстоятельство, как правило, игнорируется, так как, согласно принципу Сен-Венана, напряжения, вызываемые системой сил, статически эквивалентной нулю и приложенной к небольшому участку поверхности тела, почти не меняют картины распределения напряжений вдали от этого участка.

В данной работе показывается, как можно использовать основную идею полуобратного метода Сен-Венана (основываясь на подходе, изложенном в [1]) для приближенного решения некоторых классов задач прикладной геомеханики.

Рассматривается механическое состояние твердой деформируемой среды, поведение которой описывается уравнениями равновесия относительно компонент перемещений в форме Ламе:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i = X_i, \qquad (1)$$

где U_i – компоненты перемещений; X_i – компоненты массовых сил; $\Theta = \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$ – объемное расширение.

Пусть выбрана некоторая система функций U_i=U_{1i} от переменных x_i, удовлетворяющая граничным условиям задачи. Подставляя эти функции в левые части уравнений Ламе (1), получим:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x_i} + \mu \Delta U_{1i} = X_{1i}. \qquad (2)$$

Объемные усилия X_{1i}, Y_1, Z_1 в (2) определяются выбором функций U=U_{1i}.

Если окажется, что в точности X=X_{1i}, то функции U_{1i} представляют точное решение соответствующей задачи теории упругости. Если же этого нет, то система функций U_{1i} отвечает решению задачи теории упругости для тех же граничных условий на поверхности тела, но с новыми компонентами массовых сил X_{1i}.

Может случиться так, что полученные компоненты X_{1i} будут незначительно отличаться от заданных. В этом случае задача считается решенной приближенно и принимается U~U_{1i}.

Соответствие полуобратному методу Сен-Венана достигается, если подбираются, например исходя из физических условий, лишь некоторые из функций U_{1i}, а оставшиеся определяются из уравнения равновесия так, чтобы при соблюдении условий на границе массовые силы X_{1i}, возможно, менее отличались от заданных. При этом число уравнений равновесия сокращается соответственно числу определенных заранее функций компонент смещения.

Задача 1.

Геомеханическая формулировка задачи состоит в следующем:

Определить перемещения в породном массиве в зоне геологического нарушения (разлома) земной поверхности. Известны перемещения на границе полупространства (земной поверхности) как некоторые функции, зависящие от координат. На первом этапе предполагаем, что по граничным поверхностям нарушения выполняются условия полного сцепления с окружающим массивом.

Замечание. Данная геомеханическая задача может использоваться для моделирования деформационных процессов в зонах нарушений породной толщи, например, на земной поверхности в особых зонах проводятся натурные исследования по изучению процессов сдвижений земной поверхности. В результате выполнения модельных аналитических и численных расчетов определяются смещения по глубине массива от движения поверхности в зоне нарушения [2].

Введем некоторые предположения, а именно:

- считаем, что ширина разлома постоянна и равна $2a$,
- разлом симметричный относительно вертикальной оси x_2,
- разлом достаточно протяженный по оси x_3, поэтому при изучении деформационных процессов в сечениях, удаленных от краевых зон в направлении оси x_3, задачу можно решать в плоской постановке (т. е. рассматривать плоские сечения разлома).

В связи со сформулированными замечаниями в качестве базовых рассматриваются уравнения Ламе (1) в двумерном случае. Кроме того, так как изучаются перемещения, только возникающие вследствие собственно нарушения (разлома) в массиве (в абсолютной системе это относительные перемещения области с нарушением при рассмотрении общих движений породных масс), то массовые силы приравниваем к нулю.

Замечание 1. Полные смещения земной поверхности в районе нарушения представляют в соответствии с такой формулировкой задачи композицию решения, получаемого при рассмотрении данной задачи, и общих смещений поверхности вследствие, например, ведения подземных горных работ.

Граничные условия задачи для относительных перемещений в области нарушения (вследствие допущения полного контакта с окружающим массивом) выписываются следующим образом:

$$x_1 = |a|, \to U = V = 0,\ x_2 = 0, \to U = f(x_1), V = g(x_1),\ x_2 = \infty, \to U = V = 0. \quad (3)$$

В выражении (3) f и g – известные функции.

В связи с введенным допущением о полном сцеплении пород по граничным контактным поверхностям является корректным допущение о малости относительных перемещений в горизонтальной плоскости, т. е. можно принять, что U=0.

В этом случае в правых частях уравнений Ламе (1) появляются массовые силы, так как деформированное состояние с перемещением U=0 можно поддержать только при наличии фиктивных массовых сил X_f, Y_f. В итоге с учетом всех указанных замечаний исходные уравнения имеют вид:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = X_f, \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2} = Y_f \,.$$

Замечание 2. Очевидно, что, имея в наличии лишь одну функцию V, нельзя удовлетворить точно обоим уравнениям системы (6). Если бы это было так, то приближенное решение U=0 оказалось бы точным.

Проинтегрировав уравнение Лапласа (6) способом разделения переменных и выполнив ряд определенных преобразований с учетом граничных условий исходной задачи, получаем выражение для функции V, которое принимает вид:

$$V = \frac{1}{a} \sum \Omega_n \exp\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \tag{5}$$

Здесь $\Omega_n = \int\limits_0^a g(x_1) \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right) d\, x_1$.

Не нарушая общности, примем, что фиктивная массовая сила Y_f равна нулю, и определим компоненту массовых сил X_f, исходя из первого уравнения системы (4). Дифференцируя уравнение (4) последовательно по x_1 и x_2 и выполнив очевидные математические преобразования, получаем следующее выражение для компоненты массовых сил X_f:

$$X_f = (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^3} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \Omega_n \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \tag{6}$$

Наличие множителя $(1/2)n$ ухудшает сходимость ряда (6). Поэтому может случиться, что, несмотря на сходимость ряда (11) для функции V, ряд для X_f при равенстве нулю второй переменной (U=0) будет расходиться. *Следовательно, решение при введенных допущениях существенным образом зависит от вида функции g.*

Например, выполним проверку решения при кусочно-постоянном значении функции g: $g(x_1) = P,\ x_1 \in \left[x_1^i, x_1^{i+1}\right]$.

Выражение для функции V в этом случае имеет следующий вид:

$$V = \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + 2n)} \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \tag{7}$$

Соответственно

$$X_f = (\lambda + \mu) \frac{2P\pi}{a^3} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n\right) (-1)^n \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right).$$

Анализируя формулу (7), можно показать, что ряд сходится абсолютно, следовательно, функция V имеет вполне определенное значение:

$$V \approx \frac{Pa\sqrt{\lambda + 2\mu}}{x_2 \pi^2 \sqrt{\mu}} \text{ при условии, что } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(1 + 2n)^2} \right| \to \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$

Аналогично показывается сходимость ряда для X_f.

Определим погрешность полученного решения. Подставив выражение для V из формулы (8) в исходные уравнения (4), получим, что первое уравнение системы (4) удовлетворяется тождественно, а относительно второго имеем:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 0\,.$$

На основании (8):

$$-(\lambda+2\mu)\frac{Pa\sqrt{\lambda+2\mu}}{x_2^{\,3}\,\pi^2\sqrt{\mu}}=0\,. \tag{9}$$

Выражение (9) будет выполнено при x_2, стремящемся к бесконечности.

Таким образом, *при введенных ограничениях и предположениях решение* сформулированной задачи, построенное путем использования полуобратного метода Сен-Венана, *имеет большую степень погрешности при малых значениях* x_2 (на малых глубинах), *уменьшающуюся с увеличением глубины*.

Задача 2.

Геомеханическая формулировка данной задачи является развитием первой задачи и состоит в следующем:

Определить перемещения в породном массиве в зоне геологического нарушения (разлома) земной поверхности. Известны перемещения на границе (земной поверхности) как некоторые функции, зависящие от координат. Однако в отличие от первой задачи, граничные условия в зонах сопряжений разлома с массивом определяются по типу «упругой заделки».

В данном случае все предположения, введенные в предыдущей задаче, остаются в силе, исходные уравнения те же, но видоизменяются граничные условия. При рассмотрении задачи в такой постановке важную роль играют касательные напряжения, возникающие в краевых зонах.

Граничные условия для задачи в компонентах относительных перемещений записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} &x_1=|a|,\to U=0, V=\alpha\tau_{12},\\ &x_2=0,\to U=f(x_1), V=g(x_1),\\ &x_2=\infty,\to U=V=0, \end{aligned} \tag{10}$$

где α – коэффициент податливости заделки, τ_{12} – касательные напряжения.

Приняв, как и в первой задаче, перемещение U=0 и выполнив ряд преобразований, получим выражение для V, которое имеет вид:

$$V=4\sum\frac{k_n\int\limits_0^a g(x_1)\cos(k_n x_1)d\,x_1}{4a\,k_n+\sin(2a\,k_n)}\exp(-m_n x_2)\cos(k_n x_1)\,. \tag{11}$$

Представление для X_f получаем, дифференцируя (11) по обеим координатам. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид представления для массовых сил X_f:

$$X_f=4(\lambda+\mu)\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\sum\frac{(k_n)^3\int\limits_0^a g(x_1)\cos(k_n x_1)dx_1}{4ak_n+\sin(2ak_n)}\exp(-m_n x_2)\sin(k_n x_1)\,.$$

Выражение для касательного напряжения, возникающего на краях заделки, принимает такой вид:

$$\tau_{12}=-4\alpha\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k_n)^2\int\limits_0^a g(x_1)\cos(k_n x_1)d_{x_1}}{4ak_n+\sin(2ak_n)}\exp(-m_n x_2)\sin(k_n x_1)\,. \tag{12}$$

Итак, получено решение задачи в общем виде: выписаны представления для компонент вертикальных перемещений V и компоненты фиктивной массовой силы X_f.

Проанализируем полученные результаты.

Исследуем касательные напряжения, возникающие в случае контактных граничных условий по схемам жесткой и упругой заделок.

Анализируя на основании (12) касательные напряжения, возникающие в случае жесткой заделки, получаем, что значения касательных напряжений на граничных поверхностях $x_1 = a;\ x_2 = 0$ обращаются в ноль.

В случае упругой заделки рассмотрим коэффициенты в разложении в ряд Фурье C_m:

$$C_m = \int_0^a g(a)\cos(k_n a)\,d_{x_1}. \tag{13}$$

Согласно (13) коэффициенты в разложении Фурье зависят только от корней трансцендентного уравнения. При n, стремящемся к бесконечности, получаем, что:

$$k_n = \pi n;\ \ C_m = \int_0^a g(a)\cos(\pi n a)\,dx_1.$$

Если принять, что a – целое, то:

$$C_m = \int_0^a g(a)(-1)^{an}\,dx_1 = a(-1)^{an}c, \tag{14}$$

где c – значение функции g в точке a (при x_2=0).

Далее:

$$\tau_{12} = -4\alpha\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n C_n \sin(k_n x_1)}{4a + \dfrac{\sin(2ak_n)}{k_n}}.$$

С учетом того, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(2xa)/x \to 0$, получаем:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\mu}{a}\sum_{n=1}^{\infty}k_n C_n \sin(k_n x_1). \tag{15}$$

Подставив значение C_m из формулы (14) в выражение (15), имеем:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\mu}{a}\sum_{n=1}^{\infty}k_n C_n \sin(k_n x_1) = \frac{-\alpha\mu}{a}\sum_{n=1}^{\infty}k_n(-1)^{na}\sin(k_n x_1). \tag{16}$$

Для реального существования и сходимости ряда (16) необходимо, чтобы синус не обращался в ноль, т. е. введенное предположение о целостности числа a верно лишь в приближении, возможном при бесконечном суммировании.

Максимальное значение касательное напряжение принимает в точке, где $k_n a = \pi/2$. В соответствии с этим:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\pi\mu c}{2a^2}.$$

Отметим, что при α=0 получаем случай жесткой заделки.

Примечание к задачам 1 и 2.

Рассмотрим, как изменяется ход решения задач, если исключить некоторые из введенных допущений.

– Если ширина разлома непостоянна, то необходимо для каждой отдельной точки по всей глубине разлома определять и напряжение, и перемещение. В этом случае функции перемещений и напряжений будут иметь дискретный характер.

– Отсутствие симметрии задачи не влияет на ход вычислений, так как линейной заменой координат можно перенести систему координат в любое место полуплоскости.

– Плоский случай рассматривался только для того, чтобы дать схему решения, так как с учетом третьей координаты задача перешла бы в пространственный класс задач, что привело бы к усложнению процесса решения и появлению специальных функций Бесселя.

Задача 3.

Геомеханическая формулировка задачи состоит в следующем:

Определить поле перемещений в породном массиве при известных перемещениях земной поверхности.

Замечание 3. Данная геомеханическая задача может использоваться для моделирования и изучения влияния сдвижений земной поверхности на деформационные процессы в породной толщи. В результате выполнения модельных расчетов определяются смещения по глубине массива.

Введем следующие предположения:

• Горизонтальные перемещения U_1 и U_2 являются функциями от вертикальных перемещений U_3, т. е.

$$U_1 = k(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}U_3(x_1, x_2, x_3),$$

$$U_2 = k(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}U_3(x_1, x_2, x_3), \tag{17}$$

$$U_3 = U_3(x_1, x_2, x_3),$$

где $k(x_3)=p^2x_3$, p – некоторая постоянная.

• Массовые силы определяются следующим образом: $X=Y=0$, $Z=\rho g$.

• Граничные условия заданы в перемещениях, т. е.

$$U_i = F_i(x_1, x_2), \text{ при } x_3=0. \tag{18}$$

Замечание 4. Граничные условия в компонентах вектора поверхностных усилий или смешанного типа никаких принципиальных трудностей не вызывают.

Для решения сформулированной задачи, как и при рассмотрении предыдущих двух, используем основные уравнения равновесия теории упругости в компонентах перемещений – уравнения Ламе.

Подставив формулы (17) в исходные уравнения Ламе и выполнив ряд математических преобразований, получаем:
в случае плоского деформированного состояния функция оседаний $U_3(x_1,x_3)$ имеет следующее представление:

$$U_3(x_1, x_3) = \frac{\rho g\, x_1^{\,2}}{\left((\lambda+\mu)_C{}^2+\mu\right)2} + U^{**}\,x_1 + U^{*}. \tag{19}$$

(U^*, U^{**} – определяются по граничным условиям.)

Проведем некоторый анализ решения (19). Подставив (19) в систему исходных уравнений и выполнив некоторые преобразования, имеем:

$$(\lambda+\mu)\frac{p^2\rho g}{\left((\lambda+\mu)p^2+\mu\right)} = 0. \tag{20}$$

Равенство (20) будет выполняться в случае, если значения λ, μ или p близки к нулю. *Физически это соответствует случаю сыпучей среды.*

В общем случае можно показать, что функция оседаний $U_3(x_1,x_3)$ является решением такого дифференциального уравнения:

$$(\Delta - k^2)U(x_1x_2)=h, \qquad (21)$$

где $k^2=-n_2/n_1$, $h=d/n_2$.

Анализ уравнения типа (21), процедуры решения граничных задач для (21) методом интегральных уравнений описаны в [4, 5].

* * *

Подводя итог выполненных исследований, можно сделать следующий вывод.

Использование полуобратного метода Сен-Венана является корректным и перспективным при решении различных задач прикладной геомеханики. Данный подход относится к группе экспериментально-аналитических методов, при использовании которых можно добиться наиболее адекватного описания реального поведения геомеханических процессов. Описанный подход позволяет не только строить легкие в реализации системы разрешающих уравнений, но и выполнять исследования на корректность начальных (граничных) условий, принятых физических гипотез и допущений, а также собственно полученного решения.

В следующей части будет приведено решение конкретных задач применительно к месторождению калийных солей в Беларуси (г. Солигорск).

1. Ишлинский А.Ю. Применение полуобратного метода Сен-Венана к приближенному решению некоторых задач теории упругости // Прикладные задачи механики. М., 1975. Т. 2. С. 33.

2. Журавков М.А., Земсков А.Н., Смычник А.Д. Влияние природных и техногенных факторов на неодинамическое состояние литосферы в районах геологических нарушений. Мн., 1997.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1987. Т. 1.

4. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. Мн., 1993.

5. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Мн., 1995.

Поступила в редакцию 07.12.99.

УДК 517.958

В.Т. БОРУХОВ, В.И. КОРЗЮК

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

The method inversion of linear dynamical system is presented to study a number of inverse problem for reconstruction of boundary date in the abstract transfer equation. Example is presented.

Задачи восстановления граничных режимов процессов переноса возникают в различных разделах науки и техники и относятся к классу обратных задач математической физики [1]. Традиционный подход к таким задачам состоит в сведении их с помощью функции Грина прямой задачи к интегральным уравнениям Вольтерра 1-го рода.

В работах [2, 3] предложен другой подход, основанный на теории обратимости линейных динамических систем в пространстве состояний [3]. Обращение динамической системы связано с задачей восстановления неизвестных входных воздействий на систему по измерениям ее выходных данных. В теории переноса искомыми воздействиями могут быть изменяющиеся во времени амплитуды источников тепла или вещества, граничные режимы процессов переноса, например граничные тепловые нагрузки, переменные во времени контактные тепловые сопротивления и т. д.

В общем случае обратные динамические системы для рассматриваемого круга задач описываются системами интегродифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями. В данной работе рассматривается случай, когда обратные динамические системы описываются дифференциальными уравнениями с неклассическими краевыми условиями.

1. Абстрактная схема построения обратной динамической системы. Абстрактная математическая модель для широкого класса процессов переноса имеет вид дифференциально-операторной системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Lw(t),\, w(0) = w_0,\, t > 0, \tag{1}$$

$$lw(t) = Bu(t), \tag{2}$$

где $L: H \to H$ – линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, $l: H \to \partial H$ – линейный оператор граничных условий, действующий из H в ∂H, $B: U \to \partial H$ – линейный оператор, характеризующий пространственное распределение граничного режима переноса. Конкретный выбор операторов L, l, B и пространств H, U зависит от детализации задачи (потенциала переноса, характеристик среды, геометрии системы и т. д.).

Естественное ограничение, выделяющее обозримый класс систем вида (1), (2), состоит в том, что сужение A оператора L на множество решений уравнения $lw = 0$ является производящим оператором сильно непрерывной в нуле полугруппы $e^{At}, t > 0$ (полугруппы класса C_0) [4]. Данное ограничение обеспечивает корректность начально-краевой задачи (1), (2) в смысле Адамара и, как правило, выполняется для математических моделей переноса.

Рассмотрим задачу восстановления функции $u: [0, \infty) \to U$ по дополнительной информации $y: [0, \infty) \to U$, определяемой соотношением

$$y(t) = Cw(t),\, t \ge 0, \tag{3}$$

где $C: H \to Y$ – линейный оператор, Y – пространство возможных значений функции $y(\cdot)$.

Уравнения (1)–(3) можно интерпретировать как описание в пространстве состояний H динамической системы (обозначим ее символом Σ) вход–состояние–выход, для которой $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ – входной и выходной сигналы соответственно, $w(t)$ – состояние системы в момент времени t.

Задача восстановления функции $u: [0, \infty) \to U$ с этой точки зрения вкладывается в задачу построения обратной динамической системы Σ^{-1}.

Для построения системы Σ^{-1} предположим, что область значений $R(B)$ оператора B замкнута, а ядро Ker$B$ тривиально (Ker$B$=0). Пусть $P: U \to U$ – проектор на область значений $R(B)$. Тогда уравнение (2) можно переписать в эквивалентной форме

$$Plw(t) = PBu(t),\, (I - P)lw = 0, \tag{4}$$

где I – тождественный оператор в пространстве U. Из условия Ker$B$=0 и замкнутости пространства $R(B)$ следует существование оператора $(PB)^{-1}: R(B) \to U$, т. е. согласно (4) $u(t) = (PB)^{-1} Plw$.

Отсюда и из (1)–(3) легко следует, что обратная система Σ^{-1} имеет вид

$$w_t = Lw(t),\, w(0) = w_0, \tag{5}$$

$$(I-P)lw(t) = 0,\, Cw(t) = y(t), \tag{6}$$

$$u(t) = (PB)^{-1} Plw(t). \tag{7}$$

Предположим далее, что сужение F оператора L на множество решений системы уравнений

$$(I-P)lw = 0,\, Cw = 0$$

является производящим оператором полугруппы класса C_0. Тогда из (5)–(7) вытекает аналитическое представление решения обратной задачи по восстановлению функции $u(\cdot)$

$$u(t) = (PB)^{-1} Pl\left(e^{Ft}w_0 + \int_0^t e^{F(t-s)} B_0 y(s)ds\right), \tag{8}$$

где B_0 – стандартизирующий оператор, обеспечивающий эквивалентность двух систем уравнений: (5)–(6) и

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Fw(t) + B_0 y(t),\, w(0) = w_0.$$

Основные трудности, возникающие при реализации данного подхода, состоят в доказательстве существования и построении полугруппы e^{Ft}. В связи с этим отметим, что в зависимости от способа измерения процесса $w(t)$ оператор C может быть точечным, дифференциальным, интегральным, типа внутренней суперпозиции и т. д. Следовательно, в общем случае система уравнений (5), (6) представляет собой начально-краевую задачу с неклассическими граничными условиями. Задачи такого вида возникают в различных областях исследований и привлекают внимание многих авторов [5–8]. В частности, в [7, 8] изучен вопрос о наиболее общих дополнительных граничных условиях, сужающих эллиптический оператор до производящего оператора сжимающей и сохраняющей положительность полугруппы класса C_0.

Отметим еще одну форму представления системы Σ^{-1}. Предположим, что существует линейный оператор $T: Y \to U$, с которым выполняется условие Ker$C$=KerPTC. Тогда равенства $Cw(t) = y(t)$, $PTCw(t) = PTy(t)$ эквивалентны. Отсюда и из свойств проекционных операторов следует, что система уравнений (6) равносильна уравнению

$$((I-P)l + PTC)w(t) = PTy(t). \tag{9}$$

Таким образом, обратная ДС Σ^{-1} может быть представлена также системой уравнений (5), (7), (9).

2. Восстановление граничных тепловых потоков по данным взвешенных измерений температуры на границе.

Пусть задана плоская неограниченная пластина, подверженная тепловому воздействию с одной стороны и теплоизолированная – с другой.

Процесс переноса тепла в пластине описывается системой уравнений

$$T_t = T_{xx} + T_{zz},\, T(x,z,0) = T_0(x,z) \quad (T = T(x,z,t)), \tag{10}$$

$$-T_z(x,1,t) = b(x)u(t),\, T_z(x,0,t) = 0. \tag{11}$$

Обратная задача состоит в восстановлении изменяющейся во времени функции $u:[0,\infty)\to\Re:=(-\infty,\infty)$ граничного теплового потока $b(x)u(t)$ по данным

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(x)T(x,1,t)dx \tag{12}$$

взвешенных (с весовой функцией $c:\Re\to\Re$) измерений температуры на поверхности $z=1$.

Система уравнений (10)–(12) описывает динамическую систему вида Σ, для которой $H=L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом в области Ω функций $f:\Omega\to\Re$, $\partial\Omega=L_2(\Re)$, $U=\Re$, $B=b(\cdot)$.

Предположим, что $b(\cdot)\in L_2(\Re)$, и для упрощения последующих формул будем считать, что норма функции $b(\cdot)$ в $L_2(\Re)$ равна единице. Тогда проектор P имеет вид

$$Pw=b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)w(s)ds\,. \tag{13}$$

Используя (13), после несложных вычислений получим Σ^{-1}

$$T_t=T_{xx}+T_{zz},\,T(x,z,0)=T_0(x,z), \tag{14}$$

$$T_z(x,0,t)=0, \tag{15}$$

$$T_z(x,1,t)-b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds=0,\ \int_{-\infty}^{\infty}c(x)T(s,1,t)ds=y(t), \tag{16}$$

$$u(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds\,. \tag{17}$$

Система уравнений (16), как нетрудно заметить, эквивалентна уравнению (аналог соотношения (9))

$$T_z(x,1,t)-b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds+b(x)\int_{-\infty}^{\infty}c(s)T(s,1,t)ds=b(x)y(t). \tag{18}$$

Таким образом, обратная динамическая система Σ^{-1} представлена уравнениями (14), (15), (17), (18). Пусть функции $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ удовлетворяют естественным с физической точки зрения условиям $b(x)\geq 0$, $c(x)\geq 0$, $\forall x\in\Re$, тогда граничные условия (15), (18) попадают в класс граничных условий, указанных в работах [7, 8]. В этом случае полугруппа e^{Ft} относится к классу C_0 и, следовательно, решение обратной задачи допускает представление в форме (8).

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. математика и кибернетика. 1995. № 1. С. 47.
2. Борухов В.Т. // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 3. С. 465.
3. Борухов В.Т. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 5. С. 28.
4. Хилле А., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
5. Самарский А.А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925.
6. Тихонов А.Н. // Мат. сб. 1950. Т. 26 (86). № 1. С. 35.
7. Feller W. // Ann. of Math. 1952. Vol. 55. P. 468.
8. Вентцель А.Д. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. Вып. 2. С. 172.

Поступила в редакцию 13.01 2000.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, Н.А. БОБКОВА

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК

A new way of constructing one step methods of the recursive type with an arbitrary high order of accuracy for an initial value problem in the case of a system of ordinary differential equations is proposed. Calculation of the improved approximation to the solution is performed with account of the main part of the defect of the preceding approximation.

Целью работы является построение последовательности локальных приближений при численном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad x = t + \xi, \quad 0 \le \xi \le \tau, \quad \tau > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(t) = y. \tag{2}$$

В качестве стартового приближения к решению задачи (1), (2) изберем, например, функцию

$$y_1(x) = y + \frac{1-\exp(-\mu\xi)}{\mu} f, \tag{3}$$

где $f = f(t, y), \mu \ge \|f_u(t, y)\|$. Привлекательной чертой такого выбора является то, что в случае $\mu = \|f_u(t, y)\|$ функция $y_1(x)$ совпадает с точным решением скалярного дифференциального уравнения вида

$$u'(x) = \lambda u(x) + a \tag{4}$$

при $u(t) = y$ и любых значениях числовых параметров a и $\lambda < 0$.

Так как $[1-\exp(-\mu\xi)]/\mu = \xi + O(\xi^2)$, то расчетная формула (3) может быть истолкована как скорректированный явный метод Эйлера для задачи (1), (2). При этом отмеченное применительно к (4) свойство этого метода положительно характеризует уровень его устойчивости и в общем случае системы (1) (о других важных свойствах метода (3) см., напр., в [1]).

Так как (см. (3))

$$y_1'(x) = \exp(-\mu\xi) f, \tag{5}$$

то посредством равенства

$$y_1'(x) + \rho_1(x) = f(x, y_1(x)) \tag{6}$$

можно определить невязку

$$\rho_1(x) = f(x, y_1(x)) - \exp(-\mu\xi) f \tag{7}$$

приближенного решения (3) на исходной системе (1). Кроме того, с учетом (1)–(3), (5) для локальной погрешности $\varepsilon_1(x) = u(x) - y_1(x)$, $\varepsilon_1(t) = 0$, метода (3) можно поставить задачу Коши

$$\varepsilon_1'(x) = f(x, y_1(x) + \varepsilon_1(x)) - \exp(-\mu\xi) f, \quad \varepsilon_1(t) = 0, \tag{8}$$

при этом дополнительно к (8), принимая во внимание (6) , можно записать:

$$\varepsilon_1'(x) = \rho_1(x) + f(x, u(x)) - f(x, y_1(x)). \tag{9}$$

Из (9) непосредственно следует равенство

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon_1^*(x) + \int_0^{\xi} \left[f(t+\gamma, u(t+\gamma)) - f(t+\gamma, y_1(t+\gamma)) \right] d\gamma,$$

где

$$\varepsilon_1^*(x) = \int_0^{\xi} \rho_1(t+\gamma) d\gamma. \tag{10}$$

Так как
$$f(x,u(x))-f(x,y_1(x))=\int_0^1 f_u(x,y_1(x)+\sigma\varepsilon_1(x))d\sigma\,\varepsilon_1(x),$$

то величина $\varepsilon_1^*(x)$, задаваемая формулой (10), при достаточно малых $\xi>0$ может служить в качестве главной части локальной ошибки $\varepsilon_1(x)$. Поэтому добавлением $\varepsilon_1^*(x)$ к $y_1(x)$ (добавлением $\rho_1(x)$ к $y_1'(x)$) получим улучшенное приближение к $u(x)$, которое в свою очередь снова уточним, рассматривая его как стартовое в уже описанном процессе. Такой способ построения последовательности приближений к $u(x)$, обобщающий широко известный процесс последовательных приближений Пикара [2, с. 48], сопряжен при его численной реализации с проблемой вычисления интегралов типа (10). Для того чтобы снять эту проблему, рассмотрим видоизмененную схему построения такого рода приближений, выделяя из каждой последовательной дифференциальной невязки ее главную часть в виде многочлена по ξ соответствующей степени.

Прежде всего представим невязку (7) в виде
$$\rho_1(x)=a_{1,1}\xi+\varphi_2(x). \tag{11}$$

Очевидно, что при любом значении векторного параметра $a_{1,1}$ справедливо равенство $\varphi_2(t)=0$. С целью уменьшить норму второго слагаемого в правой части (11) потребуем дополнительно, чтобы $\varphi_2(t+\xi_1)=0$, где $\xi_1\in(0,\tau]$. Это приводит к равенству
$$a_{1,1}=\frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1,y_1(t+\xi_1))-\exp(-\mu\xi_1)f\right]. \tag{12}$$

Тем самым можно явно выписать главную точно интегрируемую по ξ часть $\tilde\rho_1(x)$ дифференциальной невязки $\rho_1(x)$:
$$\tilde\rho_1(x)=a_{1,1}\xi. \tag{13}$$

Добавлением (13) к $y_1'(x)$ находим
$$y_2'(x)=y_1'(x)+\tilde\rho_1(x)=\exp(-\mu\xi)f+a_{1,1}\xi$$

и
$$y_2(x)=y_1(x)+\tilde\varepsilon_1^*(x),$$

где (ср. (10))
$$\tilde\varepsilon_1^*(x)=\int_0^\xi\tilde\rho_1(t+\gamma)\,d\gamma=\frac{1}{2}a_{1,1}\xi^2.$$

Аналогично (6), (7) для нового приближения $y_2(x)$ можно выписать дифференциальную невязку $\rho_2(x)=f(x,y_2(x))-y_2'(x)=f(x,y_2(x))-y_1'(x)-\tilde\rho_1(x)$, немногочленную часть $f(x,y_2(x))-\exp(-\mu\xi)f$ которой, подобно (11), запишем в виде $f(x,y_2(x))-\exp(-\mu\xi)f=a_{2,1}\xi+a_{2,2}\xi(\xi-\xi_1)+\varphi_3(x)$. Очевидно, что $\varphi_3(t)=0$. Потребуем дополнительно, чтобы $\varphi_3(t+\xi_1)=0$ и $\varphi_3(t+\xi_2)=0$, где $\xi_2\in(0,\tau]$, при этом $\xi_2\neq\xi_1$. Это позволяет последовательно найти
$$a_{2,1}=\frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1,y_2(t+\xi_1))-\exp(-\mu\xi_1)f\right]\quad\text{(ср. (12))},$$

$$a_{2,2}=\frac{1}{\xi_2(\xi_2-\xi_1)}\left[f(t+\xi_2,y_2(t+\xi_2))-\exp(-\mu\xi_2)f-a_{2,1}\xi_2\right],$$

$$\tilde{\rho}_2(x) = a_{2,1}\,\xi + a_{2,2}\,\xi(\xi - \xi_1) - \tilde{\rho}_1(x) = (a_{2,1} - a_{1,1})\xi + a_{2,2}\,\xi(\xi - \xi_1),$$

$$y_3'(x) = y_2'(x) + \tilde{\rho}_2(x) = y_1'(x) + \tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x),$$

$$y_3(x) = y_1(x) + \tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x),$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_2^*(x) = \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_2(t+\gamma)\,d\gamma.$$

Отталкиваясь от полученного приближения $y_3(x)$, по описанной выше методике процесс уточнения можно продолжить. Аналогично проделанному на этом (третьем) этапе находим:

$$a_{3,1} = \frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1, y_3(t+\xi_1)) - \exp(-\mu\xi_1)f\right],$$

$$a_{3,2} = \frac{1}{\xi_2\, p_1(\xi_2)}\left[f(t+\xi_2, y_3(t+\xi_2)) - \exp(-\mu\xi_2)f - q_{3,1}(t+\xi_2)\right],$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{\xi_3\, p_2(\xi_3)}\left[f(t+\xi_3, y_3(t+\xi_3)) - \exp(-\mu\xi_3)f - q_{3,2}(t+\xi_3)\right],$$

$$\tilde{\rho}_3(x) = q_{3,3}(x) - \tilde{\rho}_1(x) - \tilde{\rho}_2(x),$$

$$\tilde{\varepsilon}_3^*(x) = s_{3,3}(x) - \tilde{\varepsilon}_1^*(x) - \tilde{\varepsilon}_2^*(x),$$

$$y_4'(x) = y_1'(x) + \tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x) + \tilde{\rho}_3(x),$$

$$y_4(x) = y_1(x) + \tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x) + \tilde{\varepsilon}_3^*(x).$$

Здесь для сокращения записей использованы следующие обозначения:

$$p_m(\xi) = \prod_{k=1}^{m}(\xi - \xi_k), \quad m \ge 1, \tag{14}$$

$$q_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{j} a_{i,k}\,\xi\, p_{k-1}(\xi), \quad i \ge j,\ j \ge 1, \quad p_0(\xi) \equiv 1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^*(x) = \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_i(t+\gamma)\,d\gamma, \quad i \ge 1,$$

$$s_{i,j}(x) = \int_0^{\xi} q_{i,j}(t+\gamma)\,d\gamma.$$

И аналогично в случае i-го этапа приближений можно записать:

$$a_{i,1} = \frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1, y_i(t+\xi_1)) - \exp(-\mu\xi_1)f\right], \quad i \ge 1,$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{\xi_j\, p_{j-1}(\xi_j)}\left[f(t+\xi_j, y_i(t+\xi_j)) - \exp(-\mu\xi_j)f - q_{i,j-1}(t+\xi_j)\right],$$

$$i \ge j, \quad j = 2, 3, \ldots, i,$$

$$\tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x) + \ldots + \tilde{\rho}_i(x) = q_{i,i}(x),$$

$$\tilde{\rho}_j(x) = q_{j,j}(x) - q_{j-1,j-1}(x), \quad j \ge 2,$$

$$\tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x) + \ldots + \tilde{\varepsilon}_i^*(x) = s_{i,i}(x),$$

$$\tilde{\varepsilon}_j^*(x) = s_{j,j}(x) - s_{j-1,j-1}(x), \quad j \ge 2,$$

$$y'_{i+1}(x) = y'_i(x) + \widetilde{\rho}_i(x) = y'_1(x) + \widetilde{\rho}_1(x) + \widetilde{\rho}_2(x) + \ldots + \widetilde{\rho}_i(x),$$
$$y_{i+1}(x) = y_i(x) + \widetilde{\varepsilon}_i^*(x) = y_1(x) + \widetilde{\varepsilon}_1^*(x) + \widetilde{\varepsilon}_2^*(x) + \ldots + \widetilde{\varepsilon}_i^*(x), \quad i \geq 1.$$

Если степень m многочлена $p_m(\xi)$ невелика, то непосредственным перемножением скобок в правой части (14) этот многочлен приводится к виду, удобному для точного интегрирования. Чтобы эту процедуру автоматизировать, что особенно актуально в случае $m >> 1$, перепишем многочлен (14) в форме

$$p_m(\xi) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \xi^{m-k} p_{m,k} . \tag{15}$$

Так как по построению $p_m(\xi) = (\xi - \xi_m) p_{m-1}(\xi)$, $m \geq 1$, то для определения коэффициентов $p_{m,k}$ из (15) можно записать следующие рекурсивные формулы:

$$p_{m,k} = \begin{cases} 1, \quad k = 0, \\ p_{m-1,k} + \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k<m, \\ \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k=m . \end{cases}$$

Очевидно, что эти коэффициенты, как и сам многочлен $p_m(\xi)$, не связаны с исходной задачей, а зависят только от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

В заключение заметим, что в общей схеме рассмотренных построений существенных изменений не произойдет, если в качестве стартового приближения вместо (3) избрать приближенное решение задачи (1), (2), полученное любым другим численным методом, при этом под производной приближенного решения следует понимать его локальную производную [3].

1. Бобков В.В., Бобкова Н.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М., 1990.
3. Бобков В.В. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1174.

Поступила в редакцию 21.06.2000.

УДК 621.321.1:519.1

Н.И. ЛИСТОПАД, А.Г. КОПАЧЕВ

СИНХРОНИЗАЦИЯ ПОТОКОВ МУЛЬТИМЕДИА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ

In this paper we have presented a set of algorithms for achieving synchronization in a best-effort distributed system. These algorithms, based on numerical timestamps, take into account both the possible frame lost due to the device buffers overflow at the sender, and the display time of a video frame at the receiver.

We extended the solution to n continuous streams synchronization that have the same or different sources.

Одна из основных проблем при реализации систем мультимедиа – способ синхронизации потоков данных. В статье описывается новый метод синхронизации потоков в распределенных средах с использованием временных меток. Представлены алгоритмы, реализующие данный метод, которые основаны на числовых метках и учитывают как потери кадров из-за переполнения буфера устройства, так и время вывода кадра у получателя.

Вопросы синхронизации потоков данных рассмотрены в ряде литературных источников, однако наиболее подробно в работах [1–7]. При этом, как правило, анализируются только два потока (аудио и видео). На практике же, особенно при широком использовании мультимедиаприложений при проведении видеоконференций, возникают ситуации, когда потоки формируются различными n источниками в распределенной среде. Данная задача специалистами ранее не решалась.

Постановка задачи

Рассмотрим непрерывные аудио-, видеопотоки. Так как временные отношения между кадрами при формировании потоков могут искажаться, то вводится процедура синхронизации для оценки временных отношений между потоками [1]. Каждому кадру потока назначаются числовые временные метки. Если потоки сформированы одним источником, то процедура определения временных отношений между ними простая, так как у них один источник синхронизации (часы). Если потоки формируются разными источниками, то необходимо введение механизма централизованной синхронизации или эмуляции глобальных для этих потоков часов.

Таким образом, необходимо задать для каждого кадра корректный номер (временную метку) в соответствии с тем порядком, в котором он захвачен драйвером устройства, а не с которым он был доставлен в приложение, а также учесть наличие нескольких независимых источников потоков.

Модель схемы синхронизации

Рассмотрим модель на основе числовых меток (порядковые номера кадров).

Введем следующие обозначения:

1) α_i– порядковый номер i-го кадра, полученного программой;

2) α_{play}– порядковый номер кадра потока α, который воспроизводится в данный момент;

3) d_α – продолжительность кадра в потоке α;

4) n_α – количество буферов в очереди драйвера устройства потока α;

5) diff_α – временная разница между двумя последовательными операциями чтения из потока α;

6) lost_α – количество потерянных кадров потока α в промежутке между двумя последними операциями чтения из-за переполнения очереди драйвера устройств;

7) $t_{0\alpha}$ – время начала потока α;

8) $A_{\alpha\beta}$ – максимально допустимое время расхождения потоков α и β (асинхронность);

9) $t_{\alpha\beta}$ – толерантность (максимально допустимое расхождение потоков α и β, выраженное количеством кадров).

Порядковый номер кадра зависит от алгоритма, реализованного драйвером устройства в случае переполнения очереди. Тогда количество потерянных кадров выражается следующей формулой:

$$\mathrm{lost}_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\left\lceil \mathrm{diff}_\alpha - n_\alpha d_\alpha \right\rceil}{d_\alpha}, \text{ если } \quad (\mathrm{diff}_\alpha - n_\alpha d_\alpha) \rangle 0. \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Алгоритм 1

(случай, когда драйвер устройства переписывает кадры поверх старых в циклическом режиме)

Пока процесс обрабатывается {
ПолучитьКадр (*fr*); /* Получить кадр из очереди */
$\alpha_c = \alpha_c + 1 + \text{lost}_{\alpha}$; /* Вычислить следующий порядковый номер */
МаркироватьКадр(*fr*, α_c) /* Назначить вычисленный номер текущему кадру */
Пока (очередь $\neq 0$) {
ПолучитьКадр (*fr*);
$\alpha_c = \alpha_c + 1$;
МаркироватьКадр(*fr*, α_c);}
}

Алгоритм 2

(случай, когда драйвер устройства не помещает данные в очередь после ее заполнения)

$\alpha_c = 1$;
Пока процесс обрабатывается {
ПолучитьКадр (*fr*); /* Получить кадр из очереди */
МаркироватьКадр(*fr*, α_c); /* Назначить вычисленный номер текущему кадру */
Пока (очередь $\neq 0$) {
ПолучитьКадр (*fr*);
$\alpha_c = \alpha_c + 1$;
МаркироватьКадр(*fr*, α_c);
}
$\alpha_c = \alpha_c + \text{lost } \alpha$; /* Вычислить порядковый номер следующего кадра */
}

Условия синхронизации двух потоков

Реализация любой схемы синхронизации налагает ряд ограничений на поток. Приведем примеры таких ограничений [2]:

1) кадры с одинаковыми номерами должны воспроизводиться одновременно;

2) разница во времени между основным и вспомогательным кадрами должна быть меньше допустимой разницы между потоками.

Рассмотрим два потока: один основной, другой вспомогательный. Пусть аудиопоток будет основным. Всякий раз, когда видеокадр должен отобразиться, мы вычисляем порядковый номер аудиокадра, который идеально подходит для воспроизведения. Если порядковый номер текущего аудиокадра совпадает с вычисленным, то кадр воспроизводится немедленно. Если номер текущего аудиокадра меньше вычисленного, то видеокадр ожидает. Если же номер аудиокадра больше вычисленного, то видеокадр отбрасывается.

Вычислим порядковые номера кадров α_i основного потока, которые должны воспроизводиться во время отображения кадра β_j вспомогательного потока. Следует отметить, что во время отображения одного кадра вспомогательного потока может быть отображено больше одного кадра основного потока, но при старте кадра β_j может отображаться только один кадр α_i. Тогда имеем:

$$\alpha_i = \left\lfloor \frac{t - t_{0_\alpha}}{d_\alpha} \right\rfloor, \tag{2}$$

$$\beta_j = \left\lfloor \frac{t - t_{0_\beta}}{d_\beta} \right\rfloor. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем:

$$\beta_j \le \frac{t - t_{0_\beta}}{d_\beta} < \beta_j + 1, \qquad (4)$$

$$\frac{t - t_{0_\alpha}}{d_\alpha} - 1 < \alpha_i \le \frac{t - t_{0_\alpha}}{d_\alpha}. \qquad (5)$$

Заменив t из (4) и подставив в (5), получаем:

$$\beta_j \frac{d_\beta}{d_\alpha} + \frac{t_{0_\beta} - t_{0_\alpha}}{d_\alpha} - 1 < \alpha_i < \beta_j \frac{d_\beta}{d_\alpha} + \frac{t_{0_\beta} - t_{0_\alpha}}{d_\beta} + \frac{d_\beta}{d_\alpha}. \qquad (6)$$

Введем следующие подстановки:

$$D = \frac{d_\beta}{d_\alpha}, \quad T = \frac{t_{0_\beta} - t_{0_\alpha}}{d_\alpha}. \qquad (7)$$

Так как α_i – целое значение, получаем следующую зависимость для кадров α_i основного потока, которые должны воспроизводиться в течение отобрания кадра β_j вспомогательного потока:

$$\alpha_i \in \begin{cases} \left[\lfloor \beta_j D + T, \ \beta_j D + T + D - 1 \rfloor\right], & \text{если} \ D, T \in Z \\ \left[\left\lceil \beta_j D + T - 1 \right\rceil, \left\lfloor \beta_j D + T + D \right\rfloor\right], & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (8)$$

Выражение (8) позволяет получить порядковые номера кадров основного потока, которые должны были бы воспроизводиться во время отображения кадра β_j вспомогательного потока. Для нахождения номера кадра основного потока, во время которого кадр β_j должен стартовать, среди кадров, полученных в соответствии с (8), возьмем кадр с наименьшим порядковым номером. Чтобы обеспечить максимально допустимое расхождение двух потоков, вычислим толерантность потоков $t_{\alpha\beta}$:

$$t_{\alpha\beta} = \begin{cases} \dfrac{A_{\alpha\beta}}{d_\alpha} - 1, \text{если} \ \dfrac{A_{\alpha\beta}}{d_\alpha} \in Z, \\ \left\lfloor \dfrac{A_{\alpha\beta}}{d_\alpha} \right\rfloor, \text{иначе.} \end{cases} \qquad (9)$$

Поэтому кадр β_j может стартовать, если порядковый номер текущего кадра основного потока α_{play} удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha_i - t_{\alpha\beta} \le \alpha_{\text{play}} \le \alpha_i + t_{\alpha\beta}, \qquad (10)$$

где α_i – значения, полученные из (8).

Алгоритм синхронизации одного аудио- и одного видеопотоков

Рассмотрим алгоритм, который учитывает изменение времени отображения видеокадра. Поток видео будет вспомогательным и будет синхронизироваться с аудиопотоком. Оба потока являются непрерывными.

Алгоритм 3
(случай синхронизации аудио-, видеопотоков)

$t_{\text{отображения}}$ = Начальное Значение; /* Инициализировать значение отображения кадра */

Пока (1) {

ПолучитьКадр(v); /* Получить видеокадр v из буфера приложения */

t_d=*РазархивироватьКадр*(v); /* Разархивировать кадр и измерить время */

α_{play}=*ПолучитьТекущийАудиокадр*() $+\left\lfloor \dfrac{t_{\text{отображения}}}{d_\alpha} \right\rfloor$; /* Вычислить номер аудиокадра, который будет стартовать после отображения видеокадра */

α_i=*ВычислитьНеобходимыйАудио*(v); /* Вычислить номер аудиокадра для отображения, если бы заданный видеокадр стартовал */

Если ($\alpha_i<\alpha_{\text{play}}-t_{\alpha v}$); /* Если видеокадр опоздал, то отбросить его */

Продолжить;

Если (($\alpha_i>\alpha_{\text{play}}+t_{\alpha v}$) /* Если видеокадр опережает, то ожидать*/

Ожидать(($\alpha_i-\alpha_{\text{play}})xd_\alpha$);

t_p=*Отобразить*(v); /* Видеокадр вовремя отобразить и засечь время отображения */

$t_{\text{отображения}}=0{,}25t_p+0{,}75\ t_{\text{отображения}}$; /* Вычислить новую оценку времени отображения */

$v=\left\lfloor \dfrac{t_d+t_p}{d_v} \right\rfloor$; /* Вычислить порядковый номер следующего видеокадра */

}

Синхронизация n непрерывных потоков

Ранее описанный алгоритм синхронизации обобщим на случай n потоков.

При решении задачи синхронизации n потоков необходимо:

1) найти допустимые значения асинхронности $A_{\alpha\beta}$ между двумя любыми видами потоков (между двумя аудиопотоками, между аудио- и видеопотоками, между двумя видеопотоками);

2) разработать алгоритм смешивания аудиопотоков;

3) разработать алгоритм синхронизации n потоков.

Опишем каждый из названных пунктов.

1) Эмпирически было получено, что время ожидания, на границе которого потоки считались синхронизированными, составляет примерно 0,5 с.

2) В случае двух или более аудиопотоков предлагается следующая стратегия. Предположим, что потоки имеют одинаковую длину кадров. Согласно отношениям (8) и (9), кадр подчиненного аудиопотока вычисляет порядковый номер кадра основного потока, который должен быть отображен в случае, если кадр подчиненного потока стартовал (α_i) бы при толерантности потоков $t_{\alpha\alpha}$. Если порядковый номер текущего аудиокадра основного потока меньше α_i, то подчиненный поток ожидает кадр основного потока, порядковый номер которого равен α_i. Если порядковый номер текущего кадра основного потока находится в интервале $[\alpha_i, \alpha_i+t_{\alpha\alpha}]$, то кадр подчиненного потока отображается вместе со следующим кадром основного потока. В противном случае кадр подчиненного потока отбрасывается.

3) Алгоритм синхронизации n непрерывных потоков можно описать следующим образом: аудиопотоки «смешиваются» по схеме, описанной в предыдущем пункте, а каждый видеопоток синхронизируется с результирующим аудиопотоком в соответствии с алгоритмом 3.

Синхронизация потоков в распределенной среде

В описанном алгоритме 3 синхронизации *n* непрерывных потоков один источник. Покажем, как данный алгоритм может быть обобщен для случая распределенной среды. Согласно условию синхронизации двух потоков приложение должно иметь представление о временной разнице между потоками. Так как потоки могут формироваться различными источниками, то необходимо введение временного отношения между потоками в распределенной среде.

Временной интервал делится на дискретные блоки, которые будем называть временными кадрами [3]. На каждой станции есть локальный счетчик, показания которого увеличиваются при старте каждого нового кадра. Одна станция делает групповую рассылку всем остальным станциям сообщения «СТАРТ». Станция при получении данного сообщения принимает время его получения за время «общего старта». Во избежание потерь в сети и задержек при передаче пошлем *n* таких сообщений через равные промежутки времени (σ). При получении *i*-го сообщения «СТАРТ» в момент времени T_i станция вычисляет время начала «общего старта» путем вычисления минимума (T_0, T_1–σ, T_2–2σ,… T_i–$i\sigma$). (В данном случае мы игнорируем задержку распространения сигнала. Такой подход допустим в локальных сетях. При проведении экспериментальных исследований задержка распространения сигнала между конечными устройствами не превышала 5 мс, что значительно меньше продолжительности аудио- и видеокадра.)

Определим через T_0 время старта. Каждая станция будет хранить «виртуальные часы», которые стартуют в момент T_0 и изменяются через каждые Δ реальных временных интервалов. Общее время можно рассматривать как поток кадров длиной Δ, который воспроизводится на каждой станции и стартует независимо. В этом случае используем термин: *поток синхронизации – время* Δ.

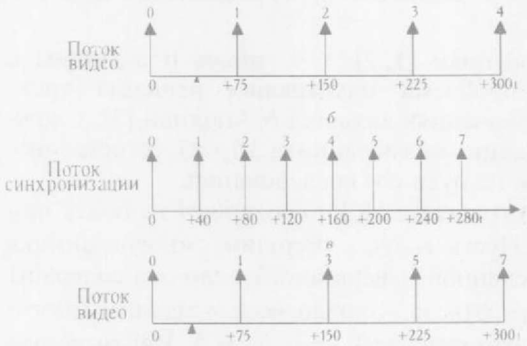
После старта потока синхронизации все события в системе связаны с ним. Для этого порядковые номера кадров во всех потоках выражаются через порядковые номера кадров потока синхронизации. С учетом этого необходимо внести изменения в процедуру назначения порядковых номеров.

После вычисления порядкового номера α_i по формуле 6 дополнительно вычисляется α_i:

$$\alpha_i = \left\lfloor \frac{\alpha_i, d_\alpha}{\Delta} \right\rfloor. \tag{11}$$

Константа D из соотношения (7) меняется на $D = \frac{d_\Delta}{d_\Delta} = 1$.

На рис. *а* показаны порядковые номера кадров, назначенные потоку видео в соответствии с алгоритмом 1. Продолжительность кадра потока видео 75 мс. На рис. *б* показан поток синхронизации с продолжительностью кадра 40 мс, а на рис. *в* – порядковые номера потока видео, выраженные через порядковые номера потока синхронизации, описанного формулой (11). Первый кадр имеет номер 0, второй кадр – порядковый номер 1, поэтому ему назначается $\left\lfloor \frac{1x75}{40} \right\rfloor = 1$. Третий кадр имеет порядковый номер 2, ему назначается номер $\left\lfloor \frac{2x75}{40} \right\rfloor = 3$ и т. д.



Порядковые номера потока видео в соответствии с алгоритмом 1

При использовании потока синхронизации снимаются ограничения, накладываемые на продолжительность кадра основного потока, так как данная величина может изменяться приложением.

Таким образом, для синхронизации n потоков предлагается следующий алгоритм:

1) дать старт потоку синхронизации на каждой станции, используя предложенный механизм;

2) назначить порядковые номера кадров, используя отношение (11);

3) синхронизировать потоки в соответствии с алгоритмом 3.

Отличие предложенного алгоритма от известных состоит в том, что он позволяет синхронизировать непрерывные мультимедиапотоки в распределенной среде при наличии n независимых источников потоков и разной длине аудио-, видеокадров.

1. Stoica E., Abdel-Wahab H., Maly K. Synchronization of multimedia streams in distributed environment. Norfolk, 1997.

2. Cen S., Pu C., Staehli R. A distributed real-time MPEG video audio player. New Hapmshire, 1995.

3. Sun Microsystems // SunVideo 1.0 User's guide. Oct. 1993.

4. Chen H-Y., Wu J-L. // IEEE Journal of Selected Areas in Communications. 1996. Vol. 14. № 1. P. 238.

5. Stoica I., Zhang H. LIRA: A model for service differentiation in the internet. In proceedings of NOSSDAV'98. London, 1998.

6. Листопад Н.И., Копачев А.Г. // Вестн. связи. 1998. № 6. С. 23.

7. Quemada J. ISABEL: looking to the future // EXPERT Winter Workshop.Villars, 1999.

Поступила в редакцию 11.01.2000.

УДК 519.10

М.К. КРАВЦОВ, Е.В. ЛУКШИН

К ОЦЕНКЕ ЧИСЛА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА МНОГОИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Explicit formula for determination of 7-non-integer vertices number of the polytope of three-axial assignment problem, i.e. the vertices with the number of fractional components being equal 7, is obtained.

Хорошо известно [1], что многогранник $M(2,n)=\{x=\|x_{ij}\|_n : x_{ij}\geq 0\ \forall (i,j)\in N_n\times N_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall j\in N_n$, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall i\in N_n\}$ задачи о назначениях является целочисленным. Здесь $N_n=\{1, 2, ..., n\}$. В отличие от $M(2,n)$ многогранник $M(p,n)=\{x=$ $=\left\|x_{i_1\ldots i_p}\right\|_n : x_{i_1\ldots i_p}\geq 0\ \ \forall (i_1, ..., i_p)\in N_n^p,\ \sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{s-1}=1}^{n}\ \sum_{i_{s+1}=1}^{n}\ldots\sum_{i_p=1}^{n} x_{i_1\ldots i_p}=1\ \ \forall i_s\in N_n$,

$\forall s \in N_p\}$, где $N_n^p = \underbrace{N_n \times N_n \times ... \times N_n}_{p \text{ раз}}$, p-индексной ($p \geq 3$) аксиальной задачи о назначениях не является целочисленным [1, 2], т. е. имеет и вершины с дробными компонентами. Уже проблема нахождения решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях является NP-полной [3]. Сложное строение нецелочисленных вершин многогранника $M(p, n)$, естественно, создает принципиальные трудности на пути его исследования.

Известно [1], что вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент. Пусть $r \in N_{3n-2}$. Вершину многогранника $M(3, n)$ будем называть r-нецелочисленной (r-вершиной), если она содержит ровно r дробных компонент. Пусть $\sigma(n, r)$ – число всех r-вершин многогранника $M(3, n)$. Легко доказать, что $\sigma(n, r)=0$, $r=1, 2, 3, 5$. Найти явную формулу для $\sigma(n, r)$ до сих пор не удалось. Известна лишь формула для частного случая, когда $r=4$ [4]:

$$\sigma(n, 4) = (n!)^2 n(n-1)/4, \ n \geq 2. \qquad (1)$$

С использованием этой формулы в [5] указана оценка числа $f_0^u(M(p, n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(p, n)$, $p \geq 3$:

$$f_0^u(M(p, n)) \geq (n!)^{p-1}((n^2-n)/4)((n^2+3n+2)/6)^{p-3}. \qquad (2)$$

Тем самым при $n \geq 3$ получено опровержение гипотезы 18 из [2].

В настоящей работе доказана следующая

Теорема. $\sigma(n, 7) = 3(n!)^2 n(n-1)(n-2)$, $n \geq 3$.

Важность этой теоремы, в частности, состоит в том, что она позволяет значительно (в $12n-23$ раз, где $n \geq 3$) улучшить оценку (2).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся свойств вершин многогранника $M(3, n)$.

Рассмотрим матрицу $y = \|y_{ij}\|_n \in M(2, n)$. Запишем эту матрицу в виде n^2-мерного вектора $z(y) = (y_{11}, \ldots, y_{1n}, \ldots, y_{n1}, \ldots, y_{nn})$. Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y. Компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$. Так как сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна n, то пара векторов $z^+(y)$ и $e=(1, ..., 1) \in E_n$ определяет транспортный многогранник $M(z^+(y), e)$.

Пусть $g(y) = \|g_{pt}^y\|_{t(y) \times n} \in M(z^+(y), e)$, где индекс p представляет собой совокупность индексов (i, j), задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. Тогда по этой матрице определим матрицу $x(g(y)) = \|x_{ijt}^{g(y)}\|_n$ согласно правилу

$$x_{ijt}^{g(y)} = \begin{cases} g_{pt}^y, \text{если } (i, j) = p, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $M(3, n) = \{x(g(y)) \colon y \in M(2, n), g(y) \in M(z^+(y), e)\}$.

При этом будем говорить, что матрица $x(g(y)) \in M(3, n)$ построена на основе матрицы $g(y)$ многогранника $M(z^+(y), e)$. Легко доказать утверждение: число $f_0^z(M(3, n))$ целочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ выражается формулой

$$f_0^z(M(3,n)) = \sum_{y \in \text{vert } M(2,n)} f_0(M(z^+(y), e)),$$

где $f_0(M)$ – число вершин многогранника M, vert M – множество вершин многогранника M.

Отсюда вытекает следующий известный результат [1]:

$$f_0^z(M(3,n)) = (n!)^2. \tag{3}$$

Совокупность элементов матрицы $x=\|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например i, будем называть двумерным сечением ориентации (jt) матрицы x. Двумерное сечение матрицы x назовем нецелочисленным сечением, если оно содержит хотя бы одну дробную компоненту. Очевидна следующая

Лемма 1. Всякая нецелочисленная матрица $x=\|x_{ijt}\|_n$ многогранника $M(3, n)$ обладает свойствами: (а) каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержит по крайней мере две дробные компоненты; (б) $I(x)=J(x)=T(x)\geq 2$, где $I(x)$, $J(x)$ и $T(x)$ – число всех нецелочисленных двумерных сечений соответственно ориентации (jt), (it) и (ij) матрицы x.

Пусть $n \geq 3$. Зафиксируем $m \in \{2, 3, ..., n-1\}$. Пусть I_1, J_1, T_1 –подмножества мощности m множества N_n. Положим $I_2=N_n\backslash I_1$, $J_2=N_n\backslash J_1$, $T_2=N_n\backslash T_1$. Так как $m\leq n-1$, то $I_2\neq\varnothing$, $J_2\neq\varnothing$, $T_2\neq\varnothing$. Для двух троек подмножеств (I_1, J_1, T_1) и (I_2, J_2, T_2) определим многогранники $M(I_s, J_s, T_s)=\{x=\|x_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s} : x_{ijt}\geq 0$ $\forall(i, j, t)\in I_s\times J_s\times T_s$, $\sum_{i\in I_s}\sum_{j\in J_s} x_{ijt}=1$ $\forall t\in T_s$, $\sum_{i\in I_s}\sum_{t\in T_s} x_{ijt}=1$ $\forall j\in J_s$, $\sum_{j\in J_s}\sum_{t\in T_s} x_{ijt}=1$ $\forall i\in I_s\}$, $s=1, 2$.

Замечание. Многогранник $M(I_1, J_1, T_1)$ ($M(I_2, J_2, T_2)$) отличается от многогранника $M(3, m)$ ($M(3, n-m)$) лишь нумерацией элементов их матриц.

Методом от противного легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$ – вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s=1, 2$. Тогда матрица $x^0=\|x^0_{ijt}\|_n$ с элементами

$$x^0_{ijt}=\begin{cases} y^s_{ijt}, \text{ если } (i,j,t)\in I_s\times J_s\times T_s,\ s=1,2, \\ 0 \text{ для остальных } (i,j,t) \text{ из } N_n^3 \end{cases} \tag{4}$$

является вершиной многогранника $M(3, n)$.

Доказательство теоремы. Покажем вначале, что

$$\sigma(n,7)=\binom{n}{3}^3((n-3)!)^2\sigma(3, 7). \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу $x^*=\|x^*_{ijt}\|_3\in M(3, 3)$, ненулевые компоненты которой определяются следующим образом: $x^*_{221}=x^*_{332}=2/3$, $x^*_{111}=x^*_{112}=x^*_{133}=x^*_{213}=$ $=x^*_{323}=1/3$. Пусть R_{ijt} – $3n$-мерный вектор-столбец, у которого единицы стоят в строках с номерами i, $n+j$ и $2n+t$, а остальные элементы – нули. Поскольку уравнение $\alpha_1R_{221}+\alpha_2R_{332}+\alpha_3R_{111}+\alpha_4R_{112}+\alpha_5R_{133}+\alpha_6R_{213}+\alpha_7R_{323}=0$ имеет единственное решение $\alpha_s=0$ $\forall s\in N_7$, то x^* является 7-вершиной многогранника $M(3, 3)$. Значит, $\sigma(3, 7)>0$.

Пусть I_1, J_1, T_1 – некоторые подмножества (возможно, тождественные) мощности 3 множества N_n. Положим $I_2=N_n\backslash I_1$, $J_2=N_n\backslash J_1$, $T_2=N_n\backslash T_1$. Очевидно (ввиду $n>3$), что $I_2\neq\varnothing$, $J_2\neq\varnothing$, $T_2\neq\varnothing$. Пусть $y^1=\|y^1_{ijt}\|_{I_1\times J_1\times T_1}$ – 7-вершина многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$ (такая вершина всегда существует, поскольку $\sigma(3, 7)>$ >0), а $y^2=\|y^2_{ijt}\|_{I_2\times J_2\times T_2}$ – целочисленная вершина многогранника $M(I_2, J_2, T_2)$. Тогда согласно лемме 2 матрица x^0, элементы которой определяются по формуле (4), является 7-вершиной многогранника $M(3, n)$. Так как среди положительных элементов двух матриц y^1 и y^2 нет равных, то каждый выбор новой тройки подмножеств (I_1, J_1, T_1), задающих многогранник $M(I_1,J_1,T_1)$, приводит к получению различных 7-вершин многогранника $M(3, n)$. Отсюда, приняв во внимание тот факт, что в качестве подмножества I_1 могут быть взяты любые три элемента из множества N_n, получаем, что тройку подмножеств (I_1,J_1,T_1) можно выбрать $\binom{n}{3}^3$ способами. Учитывая далее формулу $f_0^z(M(I_2,J_2,T_2)) = ((n-3)!)^2$ (см. замечание и (3)), приходим к неравенству

$$\sigma(n, 7)\geq \binom{n}{3}^3((n-3)!)^2\sigma(3, 7). \tag{6}$$

Допустим теперь, что имеет место строгое неравенство в (6). Тогда у многогранника $M(3, n)$ должна найтись 7-вершина x^0, положительные компоненты которой расположены в p двумерных сечениях одной ориентации, где $p\geq 4$. Отсюда с учетом свойства (а) леммы 1 приходим к неравенству $7\geq 2\cdot 4$, что невозможно. Поэтому справедлива формула (5).

Теперь установим справедливость равенства

$$\sigma(3, 7)=648. \tag{7}$$

Поскольку $M(3,3)=\{x(g(y)):y\in M(2,3),\ g(y)\in M(z^+(y),e)\}$, где $e=(1,1,1)$, а у многогранника $M(2, 3)$ не существует матриц, содержащих 1, 2, 3 и 5 дробных компонент, то для доказательства равенства (7) достаточно рассмотреть всевозможные матрицы $y\in M(2,3)$, имеющие $h(y)$ дробных компонент, где $h(y)=4, 6, 7$, и найти все те вершины многогранника $M(z^+(y),e)$, на основе которых можно построить 7-вершины многогранника $M(3,3)$. Рассмотрим три случая: 1) $h(y)=7$, 2) $h(y)=6$, 3) $h(y)=4$.

Случай 1. Пусть $h(y)=7$, где $y=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5 & 0\\ 0 & \alpha_6 & \alpha_7\end{Vmatrix}\in M(2, 3)$, $0<\alpha_l<1\ \forall l\in N_7$.

Полагая $\alpha_4=\alpha$, $\alpha_7=\beta$, матрицу y очевидным образом можно записать в виде $y=\begin{Vmatrix}1-\alpha & \alpha+\beta-1 & 1-\beta\\ \alpha & 1-\alpha & 0\\ 0 & 1-\beta & \beta\end{Vmatrix}$, где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta>1$. Для матрицы y имеются две возможности.

Подслучай 1. Пусть среди чисел α и β имеется хотя бы одно число, не равное 2/3. Тогда для любой матрицы u, полученной из матрицы y путем перестановки ее строк и столбцов, матрица $x(g(u))$, построенная на основе матрицы $g(u)\in M(z^+(u), e)$, где $e=(1,1,1)$, не является 7-вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Подслучай 2. Пусть $\alpha=\beta=2/3$. Тогда $y=\begin{Vmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3\end{Vmatrix}$, и всякая вершина многогранника $M(z^+(y), e)$, где $z^+(y)=(1/3_{(1,1)}, 1/3_{(1,2)}, 1/3_{(1,3)}, 2/3_{(2,1)}, 1/3_{(2,2)}, 1/3_{(3,2)}, 2/3_{(3,3)})$, $e=(1,1,1)$, имеющая 7 ненулевых компонент, содержит единственный столбец с тремя положительными компонентами, причем каждая из них равна 1/3.

Пусть $V(y)$ – множество всех тех вершин многогранника $M(z^+(y),e)$, для каждой из которых существуют индексы $t_1\in N_3$, $t_2\in N_3\backslash\{t_1\}$ и пары $(i_1,j_1)\in Q_1(y)=\{(1,1), (2,2), (1,2)\}$, $(i_2, j_2)\in Q_2(y)=\{(1,3), (3,2), (1,2)\}\backslash\{(i_1, j_1)\}$ такие, что $g^y_{(3,3),t_1}$=2/3, $g^y_{(2,1),t_2}$=2/3, $g^y_{(i_1,j_1),t_1}$=1/3, $g^y_{(i_2,j_2),t_2}$=1/3. Пусть t_1=1, t_2=2. Рассмотрим матрицы $g^l(y)\in V(y)$, $l\in N_8$, ненулевые компоненты которых определяются следующим образом:

$$g^1_{(1,1),3}=g^1_{(1,2),1}=g^1_{(1,3),2}=g^1_{(2,2),3}=g^1_{(3,2),3}=1/3,\quad g^1_{(2,1),2}=g^1_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^2_{(1,1),3}=g^2_{(1,2),1}=g^2_{(1,3),3}=g^2_{(2,2),3}=g^2_{(3,2),2}=1/3,\quad g^2_{(2,1),2}=g^2_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^3_{(1,1),1}=g^3_{(1,2),2}=g^3_{(1,3),3}=g^3_{(2,2),3}=g^3_{(3,2),3}=1/3,\quad g^3_{(2,1),2}=g^3_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^4_{(1,1),3}=g^4_{(1,2),2}=g^4_{(1,3),3}=g^4_{(2,2),1}=g^4_{(3,2),3}=1/3,\quad g^4_{(2,1),2}=g^4_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^5_{(1,1),1}=g^5_{(1,2),3}=g^5_{(1,3),2}=g^5_{(2,2),3}=g^5_{(3,2),3}=1/3,\quad g^5_{(2,1),2}=g^5_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^6_{(1,1),1}=g^6_{(1,2),3}=g^6_{(1,3),3}=g^6_{(2,2),3}=g^6_{(3,2),2}=1/3,\quad g^6_{(2,1),2}=g^6_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^7_{(1,1),3}=g^7_{(1,2),3}=g^7_{(1,3),2}=g^7_{(2,2),1}=g^7_{(3,2),3}=1/3,\quad g^7_{(2,1),2}=g^7_{(3,3),1}=2/3;$$
$$g^8_{(1,1),3}=g^8_{(1,2),3}=g^8_{(1,3),3}=g^8_{(2,2),1}=g^8_{(3,2),2}=1/3,\quad g^8_{(2,1),2}=g^8_{(3,3),1}=2/3.$$

Так как уравнение $\alpha_1R_{121}+\alpha_2R_{331}+\alpha_3R_{132}+\alpha_4R_{212}+\alpha_5R_{113}+\alpha_6R_{223}+\alpha_7R_{323}=0$ имеет единственное решение $\alpha_s=0$ $\forall s\in N_7$, то матрица $x(g^l(y))$, построенная на основе $g^l(y)$, является 7-вершиной многогранника $M(3, 3)$. Аналогично доказывается, что любая матрица $x(g^l(y))$, l=2, 3, 4, построенная на основе $g^l(y)$, является 7-вершиной многогранника $M(3, 3)$. Поскольку уравнения $\alpha_1R_{111}+\alpha_2R_{331}+\alpha_3R_{132}+\alpha_4R_{212}+\alpha_5R_{123}+\alpha_6R_{223}+\alpha_7R_{323}=0$, $\alpha_1R_{111}+\alpha_2R_{331}+\alpha_3R_{212}+$ $+\alpha_4R_{322}+\alpha_5R_{123}+\alpha_6R_{133}+\alpha_7R_{223}=0$, $\alpha_1R_{221}+\alpha_2R_{331}+\alpha_3R_{132}+\alpha_4R_{212}+\alpha_5R_{113}+\alpha_6R_{123}+$ $+\alpha_7R_{323}=0$ и $\alpha_1R_{221}+\alpha_2R_{331}+\alpha_3R_{212}+\alpha_4R_{322}+\alpha_5R_{113}+\alpha_6R_{123}+\alpha_7R_{133}=0$ имеют соответственно решения: $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_6=\alpha_7=-1$, $\alpha_2=\alpha_4=1$, $\alpha_5=2$; $\alpha_1=\alpha_4=\alpha_6=\alpha_7=-1$, $\alpha_2=\alpha_3=1$, $\alpha_5=2$; $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\alpha_7=-1$, $\alpha_2=\alpha_4=1$, $\alpha_6=2$ и $\alpha_1=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_7=-1$, $\alpha_2=\alpha_3=1$, $\alpha_6=2$, то матрица $x(g^l(y))$, l=5, 6, 7, 8, построенная на основе $g^l(y)$, не является вершиной многогранника $M(3, 3)$. Итак, учитывая, что t_1 и t_2 можно выбрать шестью способами, имеем

$$|\{x(g(y)):g(y)\in V(y)\}\cap \operatorname{vert} M(3,3)|=24. \tag{8}$$

Обозначим через U_1 множество всех матриц, полученных из матрицы y путем перестановки ее строк и столбцов. Очевидно, что $|U_1|$=18. Поэтому в силу (8) находим

$$|\bigcup_{u\in U_1}\{x(g(u)):g(u)\in V(u)\}\cap \operatorname{vert} M(3,3)|=432. \tag{9}$$

Пусть $W(y)$ – множество тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, каждая из которых содержит 7 положительных компонент и не принадлежит множеству $V(y)$. Тогда $\{x(g(u)):\ g(u)\in W(u)\}\cap \operatorname{vert} M(3,3)=\varnothing$ $\forall u\in U_1$.

Случай 2. Пусть $h(y)$=6, где $y=\begin{Vmatrix}\alpha & 1-\alpha & 0\\ 0 & \alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & 0 & \alpha\end{Vmatrix}\in M(2, 3)$, $0<\alpha<1$.

Если $\alpha\neq 1/3$, $\alpha\neq 2/3$, то любая матрица, построенная на основе матрицы, принадлежащей множеству $\operatorname{vert} M(z^+(y), e)$, $z^+(y)=(\alpha_{(1,1)}, \alpha_{(2,2)}, \alpha_{(3,3)}, 1-\alpha_{(1,2)}, 1-\alpha_{(2,3)}, 1-\alpha_{(3,1)})$, e=(1,1,1), не является 7-вершиной многогранника $M(3, 3)$.

Пусть $\alpha\in\{1/3, 2/3\}$. Тогда $y=\begin{Vmatrix}2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 2/3\end{Vmatrix}$ при α=2/3;

$y=\begin{Vmatrix}1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & 0 & 1/3\end{Vmatrix}$ при α=1/3, и всякая вершина многогранника $M(z^+(y), e)$,

имеющая 7 ненулевых компонент, содержит единственный столбец с тремя положительными компонентами, причем каждая из них равна 1/3. Пусть $V(y)$ – множество тех вершин многогранника $M(z^+(y), e)$, для каждой из которых существует единственный индекс $t \in N_3$ такой, что $g^y_{(i,j),t}=1/3$ $\forall(i, j) \in Q_1(y)=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ при $\alpha=1/3$; $g^y_{(i,j),t}=1/3$ $\forall(i, j) \in Q_2(y)=\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ при $\alpha=2/3$. Легко убедиться, что $|V(y)|=18$. Рассмотрим матрицу $\overline{g}(y)=\left\|\overline{g}^y_{(i,j),t}\right\|_{6\times 3} \in V(y)$ с ненулевыми компонентами: $\overline{g}^y_{(i,j),1}=1/3$ $\forall(i, j) \in Q_1(y)$, $\overline{g}^y_{(1,2),2}=2/3$, $\overline{g}^y_{(3,1),2}=1/3$, $\overline{g}^y_{(2,3),3}=2/3$, $\overline{g}^y_{(3,1),3}=1/3$. Так как уравнение $\alpha_1R_{111}+\alpha_2R_{221}+\alpha_3R_{331}+\alpha_4R_{122}+ +\alpha_5R_{312}+\alpha_6R_{233}+\alpha_7R_{313}=0$ имеет единственное решение $\alpha_s=0$ $\forall s \in N_7$, то матрица $x(g(y))$, построенная на основе $g(y)$, является 7-вершиной многогранника $M(3,3)$. Поскольку любая матрица $g(y)$ множества $V(y)$ путем перестановки ее столбцов и строк, принадлежащих множествам $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ (перестановка строки $(i_1, j_1) \in Q_1(y)$ со строкой $(i_2, j_2) \in Q_2(y)$ не допускается), может быть приведена к матрице $g(y)$, то матрица $x(g(y))$, построенная на основе $g(y) \in V(y)$, является 7-вершиной многогранника $M(3,3)$. Отсюда, учитывая $|V(y)|=18$, имеем равенство $|\{x(g(y)): g(y) \in V(y)\} \cap \text{vert } M(3,3)|=18$. Поэтому, обозначив через U_2 и U_3 множества всех матриц, полученных из матрицы y соответственно при $\alpha=1/3$ и $\alpha=2/3$ путем перестановки ее строк и столбцов, и приняв во внимание, что $|U_2 \cup U_3|=12$, получим

$$|\bigcup_{u \in U_2 \cup U_3}\{x(g(u)): g(u) \in V(u)\} \cap \text{vert } M(3,3)|=216. \qquad (10)$$

Пусть $W(y)$ – множество тех вершин из $\text{vert } M(z^+(y), e) \backslash V(y)$, каждая из которых содержит 7 положительных компонент. Ясно, что любая матрица $x(g(y))$, построенная на основе $g(y) \in W(y)$, не является вершиной многогранника $M(3,3)$.

Случай 3. Пусть $h(y) = 4$, где $y=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1-\alpha\\ 0 & 1-\alpha & \alpha\end{Vmatrix} \in M(2, 3)$, $0<\alpha<1$. Тогда любая матрица $x(g(y))$, построенная на основе $g(y) \in \text{vert } M(z^+(y), e)$, где $z^+(y)=(1_{(1,1)}, \alpha_{(2,2)}, \alpha_{(3,3)}, 1-\alpha_{(2,3)}, 1-\alpha_{(3,2)})$, $e=(1,1,1)$, не является 7-вершиной многогранника $M(3,3)$.

Таким образом, согласно (9) и (10) получаем равенство (7). Теорема доказана.

Следствие. $f_0^u(M(p, n)) \geq (n!)^{p-1}((n^2-n)/4)(12n-23)((n^2+3n+2)/6)^{p-3}$.

Доказательство проведем индукцией по числу p, $p\geq 3$. Из теоремы в силу (1) имеем

$$f_0^u(M(3, n)) \geq ((n^2-n)/4)(12n-23)(n!)^2.$$

Предположим, что доказываемое неравенство верно для $p=k-1$, т. е.

$$f_0^u(M(k-1, n)) \geq (n!)^{k-2}((n^2-n)/4)(12n-23)((n^2+3n+2)/6)^{k-4}, \qquad (11)$$

и рассмотрим случай, когда $p=k$. На основании утверждения 3 [5] и теоремы 5.3 из [1] (с. 229) получаем неравенство

$$f_0^u(M(k, n)) \geq f_0^u(M(k-1, n))(n+2)!/6.$$

Теперь, воспользовавшись (11), убеждаемся в справедливости доказываемого неравенства при $p=k$.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект NФ 97–266).

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. Дискрет. мат. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3.
3. Balas E., Saltzman M.J. Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 23. № 3. P. 201.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XII Междунар. конф. М., 1999. Ч. 1. С. 119.
5. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. Изв. вузов. Математика. 1999. № 12. С. 65.

Поступила в редакцию 17.06.99.

УДК 519.1

Н.А. НАУМОВИЧ

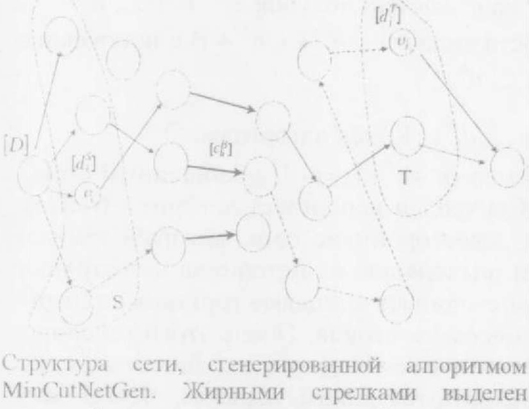
ГЕНЕРАТОР ЗАДАЧ О МИНИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ

An algorithm for generation of mincut-maxflow problem instances with with apriori known optimal solution is suggested.

Экземпляры задач о минимальном разрезе используются в качестве тестовых при практическом анализе многих комбинаторных алгоритмов оптимизации, в частности задачи о минимизации субмодулярной функции [1]. Алгоритм, описанный в данной статье, предназначен для генерации сетей с предписанным количеством вершин и дуг, а также с априори известным решением задачи о минимальном разрезе – множеством дуг, составляющим минимальный разрез.

Алгоритм MinCutNetGen генерации задач о максимальном потоке с известным минимальным разрезом

Алгоритм MinCutNetGen генерирует сеть, состоящую из двух частей: *левосторонней* и *правосторонней сети*, а также соединяющего их *моста* (рисунок).



Структура сети, сгенерированной алгоритмом MinCutNetGen. Жирными стрелками выделен «мост». S – множество источников, T – множество стоков. Для некоторых вершин и дуг указаны их пропускные способности

Параметрами алгоритма являются: n^L – количество вершин левосторонней сети; m^L – количество дуг левосторонней сети; n^S – количество источников; n^R – количество вершин правосторонней сети; m^R – количество дуг правосторонней сети; n^T – количество стоков; n^B – количество дуг в мосте; D – целочисленное суммарное производство в источниках; C – априорная целочисленная суммарная пропускная способность дуг моста ($C \le D$). Апостериорная суммарная пропускная способность дуг моста не превосходит C и определяется в процессе генерации сети $[u^{\min}, u^{\max}]$ – диапазон изменения верхней пропускной способности дуг (обеих сетей), причем сгенерированная алгоритмом верхняя пропускная способность некоторых дуг может превосходить $[u^{\max}]$, если это требуется для обеспечения вывоза всего объема производства D из источников. Сгенерированная сеть имеет $n=n^L+n^R+2$ вершины и $m=m^L+n^S+n^B+m^R+n^T$ дуг. На значения параметров накладываются следующие ограничения:

связность: $m^L \ge n^L, m^R \ge n^R$;

допустимость: $D \geq n^S$. Алгоритм использует следующие промежуточные величины: d_i^S – производство в источнике i, полученное равномерным распределением суммарного производства D между n^S источниками, $i=1,\ldots, n^S$, $D = \sum_i^{n^S} d_i^S$; d_i^B – потребление в i-й вершине левой части моста, $i=1,\ldots, n^B$, $D = \sum_i^{n^B} d_i^B$; c_i^B, $i=1,\ldots, n^B$ – величины, полученные равномерным распределением C на n^B частей; d^T – потребление в i-м стоке, полученное в процессе работы алгоритма, $i=1,\ldots, n^T$.

Алгоритм MinCutNetGen генерации сети с известным минимальным разрезом для задачи о максимальном потоке

Вход: $n^L, m^L, n^S, m^S, n^R, m^R, n^T, n^B, D, C, u^{\min}, u^{\max}$.

Выход: v^C – величина минимального разреза; минимальный разрез, которым является, в частности, мост между левосторонней и правосторонней сетями.

Шаг 1. Получить d_i^S, $i=1,\ldots, n^S$, равномерно распределив D между n^S источниками.

Шаг 2. [Сгенерировать левостороннюю сеть.] Вызвать NetGen(0, n^L, m^L, n^S, m^S, n^B, d^B, $u^{\min}$, $u^{\max}$).

Шаг 3. [Сгенерировать правостороннюю сеть.] Вызвать NetGen(n^L, n^R, m^R, n^B, d^B, n^T, d^T, $u^{\min}$, $u^{\max}$).

Шаг 4. Сгенерировать n^S дуг вида (s,i), где s – *обобщенный источник* с пропускными способностями d_i^S, $i=1,\ldots, n^S$.

Шаг 5. Сгенерировать n^T дуг вида (i,t), где t – *обобщенный сток* с пропускными способностями d_i^T – потребление в i-м стоке, полученное в процессе работы алгоритма, $i=1,\ldots, n^T$.

Шаг 6. Равномерно разделить C на n^B частей, получая c_i^B, $i=1,\ldots, n^B$.

Шаг 7. Сгенерировать n^B дуг моста вида $(n^L - n^B + i, n^L + i)$ с пропускными способностями $\min(c_i^B, d_i^B)$, $i=1,\ldots, n^B$.

Шаг 8. Вычислить $v^C = \sum_{i=1}^{n^B} \min(c_i^B, d_i^B)$. Конец алгоритма. $\otimes$

Обобщенный источник имеет номер $(n^L+n^R+1)=n-1$, обобщенный сток – номер $(n^L+n^R+2)=n$. Алгоритм MinCutNetGen использует алгоритм NetGen, генерирующий правостороннюю и левостороннюю сети, который вначале генерирует непересекающиеся цепи, выходящие из источника и состоящие из случайного количества дуг, затем соединяет концевые вершины сгенерированных цепей со случайным количеством стоков. После этого генерируются дополнительные дуги до достижения необходимого количества m дуг. Пропускные способности дуг генерируются таким образом, чтобы весь продукт, произведенный в источниках, мог быть привезен в стоки. Пусть Distribute (D, n, d) – процедура, которая, используя датчик псевдослучайных равномерно распределенных чисел, делит целое число D на n частей $d_i > 0$, $i=1,\ldots,n$ таким образом, что $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Приведем описание алгоритма NetGen генерации потоковой сети.

Вход: n – количество вершин, m – количество дуг; n^0 – сдвиг в нумерации вершин (первая вершина сети имеет порядковый номер n^0+1); n^S – количество источников; d_i^S, $i=1,\ldots, n^S$ – производство в i-м источнике; n^T – количество стоков; $[u^{\min}, u^{\max}]$ – диапазон изменения пропускных способностей дуг.

Выход: потоковая сеть, вершины которой перенумерованы так, что первая вершина имеет номер n^0+1, d_i^T – потребление в i-м стоке, i=1,..., n^T.

Шаг 1. [Сгенерировать цепи.] Вначале сеть состоит только из вершин и не имеет дуг. Пусть S – множество источников, T – множество стоков. Если $n=n^S+n^T$, то промежуточных вершин нет, и цепи состоят только из вершин-источников. Иначе – определить, сколько дуг должно быть в каждой из цепей: **Distribute** $(n-n^S-n^T, n^S, N^C)$, $N^C=(\eta_1^C,\dots,\eta_{n^S}^C)$. Сгенерировать n^S вершинно непересекающихся цепей, причем i-я цепь состоит из η_i^C дуг, и пропускная способность каждой j-й дуги i-й цепи определяется как $c_{ij}=\max(d_i^S,u_j)$, где u_j – случайное число из диапазона [$u^{\min}$, $u^{\max}$]. Для каждой i-й цепи вычислить d_i^{CE} – количество продукта, которое может быть привезено в концевую вершину цепи, i=1,..., n^S.

Шаг 2. Для $i\in 1,\dots, n^S$ определить T_i – множество стоков, с которыми должна быть соединена i-я цепь. Распределить поток i-й цепи между $|T_i|$ стоками: **Distribute** $(d_i^{CE}, |T_i|, D^{CT})$, где $D^{CT}=(d_1^{CT},\dots,d_{|T_i|}^{CT})$ – результирующий вектор, и соединить каждую концевую вершину i-й цепи с $|T_i|$ стоками $j\in T_i$ дугами пропускной способности d_j^{CT}.

Шаг 3. Пусть $\overline{m}$ – количество уже сгенерированных дуг. Если $m>\overline{m}$, то сгенерировать $m-\overline{m}$ различных дуг с верхней пропускной способностью из диапазона $\left[u^{\min}, u^{\max}\right]$. Перенумеровать вершины полученной сети начиная с n^0. ⊗

Теорема. В построенной потоковой сети:

1) дуги моста B являются одним из минимальных разрезов;

2) величина минимального разреза равна $v^C=\sum_{i=1}^{n^B}\min(c_i^B,d_i^B)$.

Доказательство теоремы следует из описания алгоритма. ⊗

1. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М., 1984.

Поступила в редакцию 25.01.2000.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

В статье В.А. Емеличева, Ю.В. Никулина «О радиусе сильной устойчивости векторной траекторной задачи», опубликованной в № 1 журнала за 2000 г., на с. 49 по техническим причинам допущена опечатка.

Перед формулировкой теоремы следует заменить введеные обозначения

$$\varphi^n(A)=\min_{t\in P(A)}\ \max_{t\in\overline{P}(A)}\ \min_{i\in N_n}\ \Gamma_i(t,t,A),$$

$$\psi^n(A)=\min_{t\in\overline{P}(A)}\ \max_{t\in P(A)}\ \min_{i\in N_n}\ \Gamma_i(t,t,A).$$

на

$$\varphi^n(A)=\max_{t\in P(A)}\ \min_{t\in\overline{P}(A)}\ \max_{i\in N_n}\ \Gamma_i(t,t,A),$$

$$\psi^n(A)=\min_{t\in\overline{P}(A)}\ \max_{t\in P(A)}\ \min_{i\in N_n}\ \Gamma_i(t,t,A).$$

УДК 621.315.592

Н.А. ПОКЛОНСКИЙ

ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ С ВОДОРОДОПОДОБНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

The model for calculating the critical density of metal-insulator transition for static permittivity, as a function of the Bohr radius of an isolated impurity as temperature $T\to 0$ K, is refined.

Рассмотрим ковалентный полупроводник с относительной диэлектрической проницаемостью решетки ε_r. Концентрация доноров в зарядовых состояниях (0) и (+1) равна $N=N_0+N_{+1}$, отрицательно заряженных акцепторов – KN. Уравнение электронейтральности есть $N_{+1}=KN$.

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{r\alpha}\varepsilon_0$, где ε_0 – электрическая постоянная, определяет связь локального электрического поля E_l, действующего на каждую поляризуемую частицу, со средним макроскопическим полем E_{av} [1, 2]. Зависимость $\varepsilon_{r\alpha}$ от поляризуемости частиц диэлектрика приближенно устанавливает формула Клаузиуса – Моссотти – Лорентц – Лоренца (КМЛЛ).

В [3] кристаллическая матрица рассматривалась как сплошная среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r\varepsilon_0$ и связью между локальным и внешним полями в виде:

$$E_l = E_{av} + \left(\alpha N_0/3\varepsilon_r\right)E_l,$$

где α – поляризуемость нейтрального донора.

В [4] для описания диэлектрической проницаемости в легированном полупроводнике учтено влияние поляризации атомов матрицы с концентрацией N_h на локальное поле, действующее на нейтральный донор. Связь локального E_l и внешнего полей E_{av} в кристалле полагалась в виде:

$$E_l = E_{av} + \left(\alpha_h N_h/3 + \alpha N_0/3\varepsilon_r\right)E_l,$$

где α_h – поляризуемость атома матрицы.

По нашей модели [5] с учетом суперпозиции электрических полей как атомов кристаллической матрицы с концентрацией N_h, так и нейтральных доноров с концентрацией $N_0=(1-K)N$ имеем (ср. [4]):

$$E_l = E_{av} + \left(\alpha_h N_h/\beta_h + \alpha N_0/3\right)E_l, \tag{1}$$

где β_h учитывает точечную симметрию нелегированного кристалла (в модели КМЛЛ полагается $\beta_h=3$).

Поляризуемость нейтрального водородоподобного донора (или акцептора) [6]:

$$\alpha = 18\pi\left[a_H(N)\right]^3, \tag{2}$$

где $a_H(N) = e^2/(8\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 E_d)$ – боровский радиус донора со средней энергией ионизации $E_d(N)$.

По данным, приведенным в [4, 7], для $N=N_c$, когда $\varepsilon_{r\alpha}(N_c) \to \infty$, средний радиус области, приходящийся на один нейтральный донор при $K<<1$, есть $0{,}62\,N_c^{-1/3}$, что более чем в 2,5 раза превышает $a_H(N_c)$. Поэтому использование диэлектрической проницаемости кристаллической решетки $\varepsilon_r\varepsilon_0$ при нахождении $a_H(N_c)$ оправдано.

Отметим, что входящая в формулу (2) энергия ионизации донора E_d зависит от N и K [5, 8]. Корреляционное взаимодействие подвижных положительно заряженных состояний доноров (мигрирующих прыжковым образом электронных вакансий) и неподвижных отрицательно заряженных акцепторов приводит к уменьшению энергии ионизации донора. Средняя энергия ионизации донора есть:

$$E_d = I_d - \frac{3e^2}{16\pi\varepsilon_r\varepsilon_0(\lambda + d)}, \tag{3}$$

где I_d – энергия ионизации изолированного донора, $d \approx 0{,}554(N(1+K))^{-1/3}$ – среднее расстояние минимального сближения между ионами примесей в кристалле, λ – радиус (длина) экранирования иона прыгающими между донорами в зарядовых состояниях (0) и (+1) электронами [5, 8], $\lambda^{-2} = -(e^2/\varepsilon_r\varepsilon_0)\partial N_{+1}/\partial E_F$, при этом уровень Ферми E_F определяется из уравнения электронейтральности $N_{+1}=KN$.

Суммарная поляризованность атомов матрицы и нейтральных доноров по [2] есть:

$$(\alpha_h N_h + \alpha(1-K)N)\varepsilon_0 E_l = (\varepsilon_{r\alpha} - 1)\varepsilon_0 E_{av}. \tag{4}$$

Полагая $\beta_h=3$ (как если бы атомы матрицы образовывали простую кубическую решетку или были распределены хаотично [2]), из (1) и (4) имеем:

$$\varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_r + \frac{(\varepsilon_r + 2)^2\alpha(1-K)N}{9 - (\varepsilon_r + 2)\alpha(1-K)N}. \tag{5}$$

Заметим, что (5) можно представить в "каноническом" (по КМЛЛ) виде:

$$\frac{\varepsilon_{r\alpha} - 1}{\varepsilon_{r\alpha} + 2} = \frac{1}{3}(N_h\alpha_h + N_0\alpha).$$

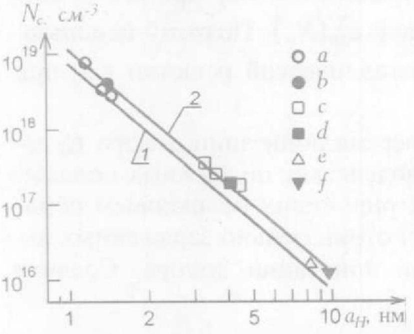
Одним из критериев перехода изолятор–металл по [4, 7, 9] является неограниченное возрастание макроскопической диэлектрической проницаемости полупроводника $\varepsilon_{r\alpha}\varepsilon_0$ при увеличении концентрации легирующей примеси до критической N_c. Отметим, что критерии отличия изолятора от проводника в рамках микроскопического подхода обсуждаются в работе [10].

Условие перехода изолятор–металл $\varepsilon_{r\alpha}(N_c) \to \infty$, согласно (5), принимает вид:

$$N_c = \frac{9}{(\varepsilon_r + 2)\alpha(1-K)}. \tag{6}$$

По моделям [3] и [4] для $\varepsilon_{r\alpha}(N)$ критическая концентрация N_c оказывается соответственно в $\varepsilon_r(\varepsilon_r + 2)/3$ и в ε_r раз больше, чем по формуле (6) при тех же значениях α.

На рисунке показаны критические концентрации перехода изолятор–металл N_c в зависимости от боровского радиуса примеси a_H для Si и Ge, легированных атомами As, P, Sb, B и Ga, а также для n-InP и n-GaAs. При расчете по формуле (6) полагалось ε_r=12, что соответствует средней величине относительной диэлектрической проницаемости кристаллической решетки перечисленных кристаллических полупроводников [11].



Зависимость критической концентрации перехода изолятор–металл N_c от боровского радиуса $a_H = e^2/(8\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 I_d)$ изолированной водородоподобной примеси при $K \approx 0{,}01$:

1 – расчет N_c с учетом зависимости α от концентрации примеси по формулам (2) и (3) при K = 0,01; 2 – $E_d = I_d$. Экспериментальные данные (см.[32]): *a* – *n*-Si (Si:As, Si:P, Si:Sb); *b* – *p*-Si:B; *c* – *n*-Ge (Ge:As, Ge:P, Ge:Sb); *d* – *p*-Ge:Ga; *e* – *n*-InP; *f* – *n*-GaAs

Обычно считается, что формула КМЛЛ применима лишь к точечным дипольным системам, т. е. к системам, состоящим из абсолютно неперекрывающихся изолированных атомов или ионов. В обзоре [12] обосновано, что эта формула применима к весьма общего типа диэлектрикам и полупроводникам, в том числе и с перекрывающимися электронными оболочками. При этом, однако, поляризуемости, входящие в формулу КМЛЛ, не выражаются через поляризуемость изолированных атомов (ионов), а должны вычисляться с учетом взаимодействия между ними.

В [13] показано, что, несмотря на различие в физическом смысле магнитной и электрической индукций и восприимчивостей, учет коллективных эффектов для системы магнитных "неполярных" диполей приводит к формуле КМЛЛ, связывающей магнитную восприимчивость вещества с восприимчивостью отдельного диполя.

Автор выражает благодарность С.А. Вырко и А.И. Сягло за обсуждения и помощь в оформлении рукописи.

1. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1978.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М., 1989.
3. Кастеллан Дж., Зейтц Ф. // В сб.: Полупроводниковые материалы. М., 1954. С. 14.
4. Dhar S., Marshak A.H. // Sol.-St. Electronics. 1985. Vol. 28. № 8. P. 763.
5. Поклонский Н.А., Сягло А.И. // ФТТ. 1998. Т. 40. № 1. С. 147.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Квантовая механика. М., 1989.
7. Edwards P.P., Sienko M.J. // Phys. Rev. 1978. Vol. B 17. № 6. P. 2575.
8. Поклонский Н.А., Сягло А.И., Бискупски Г. // ФТП. 1999. Т. 33. № 4. С. 415.
9. Забродский А.Г. // УФН. 1998. Т. 168. № 7. С. 804.
10. Кудинов Е.К. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 8. С. 2306.
11. Semiconductors – Basic Data /Ed. O. Madelung. Berlin, 1996.
12. Гинзбург В.Л., Максимов Е.Г. // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. 1992. Т. 5. № 9. С. 1543.
13. Виноградов А.П. // РЭ. 1999. Т. 44. № 9. С. 1131.

Поступила в редакцию 21.03.2000.

УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, С.М. БОСЯКОВ

ПОВЕРХНОСТИ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Wave processes in thermoelastic cubic anisotropic medium with regard the finite velocity of heat's propagation are investigated from the points of view of theory of strong discontinuities.

Рассматриваются тела, термоупругие свойства которых характеризуются четырьмя материальными постоянными. Выражения для тензора напряжений в этом случае имеют вид [1, 2]:

$$\sigma_{ii} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})e_{ii} + \lambda_{12}\sum_{\kappa=1}^{3} e_{kk} - \beta T,$$
$$\sigma_{ij} = 2\lambda_{44}e_{ij} - \beta T, i \neq j = \overline{1,3}. \quad (1)$$

Здесь $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ – компоненты тензора деформаций, λ_{11}, λ_{12}, λ_{44}, β – материальные постоянные термоупругой среды.

Подставляя (1) в уравнения движения [2]

$$\sum_{i=1}^{3}\partial_j\sigma_{ij} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2)$$

получим

$$\left(\Delta + (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})\partial_i^2\right)u_i + (\lambda_{12} + \lambda_{44})\partial_i\sum_{i=1}^{3}\partial_k u_k + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \beta\partial_i T. \quad (3)$$

Для того чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений термоупругости для кубически анизотропного тела в отсутствие эффекта связности полей смещения и температуры, присоединим к (3) обобщенный закон теплопроводности [3]. В результате придем к такой системе

$$\left(\Delta + (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})\partial_i^2\right)u_i + (\lambda_{12} + \lambda_{44})\partial_i\sum_{i=1}^{3}\partial_k u_k + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \beta\partial_i T,$$
$$\Delta T = \frac{1}{a_t}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\alpha c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где T – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния, α_t – коэффициент температуропроводности, c – скорость распространения тепла, α – коэффициент теплопроводности. Отметим также и то, что второе уравнение (4) записано для случая, когда отсутствуют внутренние источники тепла.

Предположим, что первые производные от компонент вектора смещения $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и приращения температуры T претерпевают сильные разрывы на гладкой поверхности $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$. В этом случае производные $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \frac{\partial u_k}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial T}{\partial t}, i, k = \overline{1,3}$, фактически непрерывны с каждой из сторон поверхности φ вплоть до точек самой поверхности. Этот факт совместно с непрерывностью u_k позволяет сформулировать такие кинематические условия совместности [4, 5]:

$$p_k\frac{\partial u_i}{\partial t} - p_0\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = M_{ki}, i, k = \overline{1,3}, \quad (5)$$

$$p_k\frac{\partial T}{\partial t} - p_0\frac{\partial T}{\partial x_k} = M_k. \quad (6)$$

Здесь введены такие обозначения $p_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, $p_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, k = \overline{1,3}$.

Также при распространении поверхностей разрыва должны выполняться динамические условия совместности для термоупругих полей [4]:

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}p_k - \rho p_0\frac{\partial u_i}{\partial t} = M_{4i}, i = \overline{1,3}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial x_k}p_k - \frac{1}{\alpha c^2}p_0\frac{\partial T}{\partial t} = M_{44}. \quad (8)$$

Соотношения (5)–(8) будем рассматривать как шестнадцать алгебраических уравнений для шестнадцати производных первого порядка от T, u_1, u_2, u_3. Чтобы привести систему (5)–(8) к более простому виду, умножим уравнения (7). (8) на p_0 и получающиеся выражения $p_0 \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}, p_0 \dfrac{\partial T}{\partial x_n}$ заменим правыми частями следующих равенств:

$$p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = p_k \frac{\partial u_i}{\partial t} - M_{ki},\ i,k = \overline{1,3},$$

$$p_0 \frac{\partial T}{\partial x_k} = p_k \frac{\partial T}{\partial t} - M_k.$$

В результате придем к системе четырех уравнений относительно $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}, \dfrac{\partial T}{\partial t}$:

$$M_{4i} \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_i}{\rho}\left(A_{11} p_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{12}\left(p_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + p_l \frac{\partial u_l}{\partial t} \right) \right) +$$
$$+ \frac{A_{44}}{\rho}\left(p_k^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} + p_k p_l \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_l}{\partial t} \right) + p_l^2 \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) - p_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \ldots, i \neq k \neq l = \overline{1,3},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}\left(\sum p_n^2 - \frac{1}{\alpha c^2} p_0^2 \right) = p_0 M_{44} + \ldots .$$

Частные производные первого порядка от компонент вектора смещения u_i и приращения температуры T могут иметь разрывы непрерывности на поверхности φ, которая определяется из условия неразрешимости системы (9). Это эквивалентно равенству нулю ее главного определителя:

$$\det|A| = 0,$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}, i = \overline{1,3}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ системы (9). Раскрывая определитель, получим

$$\begin{gathered}\left((\lambda_{44}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \rho p_0^2)^3 + (\lambda_{11} + -\lambda_{44})(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(\lambda_{44}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - p_0^2)^2 + \right.\\ + (\lambda_{11} + \lambda_{12})(\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})(\lambda_{44}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \rho p_0^2)(p_1^2 p_2^2 + p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_3^2) + \\ \left. + (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})^2 (\lambda_{11} + \lambda_{44} + \lambda_{12}) p_1^2 p_2^2 p_3^2\right)\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{1}{\alpha c^2} p_0^2 \right) = 0.\end{gathered} \quad (10)$$

Заметим. что уравнение (10) сильных разрывов поля смещений и температуры с точностью до множителя совпадает с уравнением характеристик для системы (4)

$$\begin{gathered}((g^2 - \rho Z_t^2)^3 + (\varepsilon + \sigma)(g^2 - \rho Z_t^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma)(g^2 - \rho Z_t^2) \times \\ \times (Z_{x_1}^2 Z_{x_2}^2 + Z_{x_2}^2 Z_{x_3}^2 + Z_{x_1}^2 Z_{x_3}^2) + \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma) Z_{x_1}^2 Z_{x_2}^2 Z_{x_3}^2)(c^2 g^2 - \frac{1}{\alpha} Z_t^2) = 0.\end{gathered} \quad (11)$$

Здесь $Z = Z(t, x_1, x_2, x_3)$ – характеристическая поверхность системы (4),

$$g^2 = Z_{x_1}^2 + Z_{x_2}^2 + Z_{x_3}^2,\ \varepsilon = \lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44}, \sigma = \lambda_{12} + \lambda_{44}.$$

Разделив обе части (10) на $(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^4$, получим уравнение четвертой степени относительно квадратов скоростей распространения поверхностей сильных разрывов $v^2 = \dfrac{p_0^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ для определения скоростей квазипродольной, квазипоперечных упругих и квазитепловой волн. Фиксируя произвольно на поверхности φ точку N с нормалью $\boldsymbol{n}$ к элементу поверхности $d\,\varphi_N$, можно рассчитать скорости распространения указанных типов волн в направлении $\boldsymbol{n}$. Так, например, для характерных в кубических кристаллах осей симметрии четвертого и третьего порядка имеем соответственно [6]:

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1, \tag{12}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (10), получим:

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda_{44}}{\rho}},\ v_3 = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{\rho}}. \tag{12'}$$

В случае (13) для расчета скоростей продольной и поперечных волн приходим к кубическому уравнению стандартного вида $y^3 + py + q = 0$, где

$$y = \frac{\lambda_{44}(3-\rho) + \lambda_{11}\rho}{3\rho} - v^2,$$

$$p = -\frac{\lambda_{44}^2}{3\rho^2}(\lambda_{12} + \lambda_{44})^2,$$

$$q = \frac{\lambda_{44}^3}{27\rho^3}\Big((\lambda_{11} - \lambda_{44})^3 - 2(\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})(\lambda_{11}^2 - \lambda_{11}\lambda_{44} + \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{12}\lambda_{44} + \lambda_{12}^2)\Big).$$

Скорость тепловой волны v_T в кубически анизотропном теле в отсутствие эффекта связности тепловых и деформационных полей оказывается равной $c\sqrt{\alpha}$ независимо от выбранного внутри кристалла направления.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М., 1986.
2. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев, 1976.
4. Петрашень Г.И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. М., 1980.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т. 4. Ч. 2.
6. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965.
7. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1985.

Поступила в редакцию 25.11.99.

УДК 519.62

Е.Б. СОНЕЦ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОПРАВОК И ЯВНЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ

A variant of the method of successive corrections in the case of an initial value problem for a system of ordinary differential equations is considered. Formulas for derivation of continuous explicit exponentially fitted Runge-Kutta methods constructed on the basis of the presented technique are given.

В работе [1] был предложен метод последовательных поправок (МПП) – способ построения одношаговых методов сколь угодно высокого порядка точности численного решения начальных задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$u'(t) = f(t, u(t)), \tag{1}$$

являющийся обобщением классического принципа последовательного повышения порядка точности результата (см., напр., [2, с. 31]).

В данной работе рассматривается несколько иной вариант схемы МПП, позволяющий конструировать вложенные экспоненциально скорректированные (см., напр., [2, с. 85]) методы Рунге-Кутты с непрерывными расширениями, а также приводятся формулы для коэффициентов этих методов в случае нулевого параметра корректировки.

Следуя [1], заменим задачу нахождения решения исходной системы (1) на отрезке $[t, t+\tau]$ задачей для поправки $\Delta(x) = u(t+x) - u(t)$ на отрезке $x \in [0, \tau]$. После замены переменных $x=\alpha\tau$ будем иметь:

$$\Delta\,(\alpha) = \tau f\,(t + \alpha\tau, u(t) + \Delta(\alpha)), \quad \Delta_1(0) = 0\,.$$

В качестве базового возьмем вариант МПП, приводящий к методам s-го порядка точности, в котором на каждой стадии j=1,2,…, s–1, вычисляются значения приближения $\delta^j(\alpha) \approx \Delta(\alpha)$ в j первых отличных от нуля точках множества

$$\left\{ \alpha_k \mid k = 0,1,\dots,s-1,\ \ \alpha_k \in [0,1];\ \ \alpha_i \neq \alpha_j,\ \ if\ i \neq j;\ \ \alpha_0 = 0 \right\}$$

как решения дифференциальной задачи

$$\frac{d}{d\alpha}\delta^j(\alpha) = \tau A \delta^j(\alpha) + P_{j-1}(\alpha)\,, \quad \delta^j(0) = 0\,, \quad 0 \le \alpha \le 1, \tag{2}$$

где $P_{j-1}(\alpha)$ есть интерполяционный многочлен степени j–1, построенный по таблице приближений $(\alpha_k, \widetilde{v}(\alpha_k))$ к значениям $(\alpha_k, v(\alpha_k))$, $k = 0,1,\dots,j-1$,

$$v(\alpha) = \tau f\,(t + \alpha\tau, u(t) + \Delta(\alpha)) - \tau A \Delta(\alpha)\,, \ \ A = f_u(t,u)\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{v}(\alpha) = \tau f\,(t + \alpha\tau, u(t) + \delta(\alpha)) - \tau A \delta(\alpha) \tag{4}$$

(можно положить для начала $\Delta(\alpha) \approx \delta(\alpha) := \delta^{j-1}(\alpha)$, $\delta^0(\alpha)$=0).

Для обеспечения j-го порядка аппроксимации непрерывного «дифференциального» метода

$$y(t + \alpha\tau) = y(t) + \delta^j(\alpha), \quad 0 \le \alpha \le 1, \tag{5}$$

необходимо, чтобы каждое из приближений $\delta(\alpha_k) \approx \Delta(\alpha_k)$, используемое при построении интерполяционного многочлена, имело по крайней мере j–1 порядок аппроксимации. Последнее следует из формулы Коши и представления остаточного члена интерполирования в форме Лагранжа (см. также (3), (4)):

$$\Delta(\alpha) = \int_0^\alpha \exp(\tau(\alpha-\xi)A) v(\xi) d\xi = \int_0^\alpha \exp(\tau(\alpha-\xi)A)(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{w_j(\xi)}{(\xi-\alpha_k) w_j(\alpha_k)} v(\alpha_k) +$$

$$+ \frac{v^{(j)}(\eta(\xi))}{j!} w_j(\xi))\, d\xi = \delta^j(\alpha) + r, \quad \|r\| = O(\tau^{j+1}).$$

Далее рассмотрим случай A=μI, где I – единичная матрица, μ – скалярный адаптивный параметр, задаваемый, например, равенством μ=$(f_u\, f, f)/(f, f)$. Тогда для решения задачи (3) в точках $\alpha = \alpha_i$, $i = 1,2,\dots,j$, $j = 1,2,\dots,s-1$, на основании формулы Коши справедливо представление

$$\delta^j(\alpha_i) = \tau \sum_{k=0}^{j-1} A_k^j(\alpha_i, \mu)[f(t + \alpha_k\tau,\ y + \delta^{j-1}(\alpha_k)) - \mu\delta^{j-1}(\alpha_k)], \quad \delta^0(\alpha_0) = 0\,, \tag{6}$$

$$A_k^j(\alpha, \mu) = \int_0^\alpha \exp(\mu\tau(\alpha-\xi)) \frac{w_j(\xi)}{(\xi-\alpha_k) w_j(\alpha_k)} d\xi, \quad w_j(\alpha) = \prod_{i=0}^{j-1} (\alpha - \alpha_i)\,, \tag{7}$$

которое можно заменить на более предпочтительное правило расчета

$$\delta^j(\alpha_i)=\tau\sum_{k=0}^{i-1}A_k^j(\alpha_i,\mu)[f(t+\alpha_k\tau,\ y+\delta^j(\alpha_k))-\mu\delta^j(\alpha_k)]+$$

$$+\tau\sum_{k=i}^{j-1}A_k^j(\alpha_i,\mu)[f(t+\alpha_k\tau,\ y+\delta^{j-1}(\alpha_k))-\mu\delta^{j-1}(\alpha_k)],\qquad(8)$$

если учесть, что вычисляемые значения $\delta^j(\alpha_i)$ могут заменить в правой части (6) менее точные поправки $\delta^{j-1}(\alpha_i)$. После вычисления по формуле (8) значений всех поправок, необходимых для построения метода s-го порядка, итоговая поправка $\delta^s(\alpha)$ строится по формуле (6) с заменой α_i на α, j на s.

S-стадийный МПП, задаваемый формулами (6)–(8) и (5) с заменой j на s, можно рассматривать как явный p-стадийный метод Рунге-Кутты

$$\varphi_i=f(t+c_i\tau,\ y+\tau\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\varphi_j),\quad i=1,2,...,p,\quad p=s(s-1)/2+1,\qquad(9)$$

$$y(t+\alpha\tau)=y+\tau\sum_{i=1}^{p}b_i(\alpha)\varphi_i,\quad 0\le\alpha\le1,\qquad(10)$$

$$c=(0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\quad \ldots,\quad \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{s-1})^T,$$

что позволяет ставить вопрос об оптимальном выборе параметров α_i, например, с целью минимизации коэффициентов погрешности [3, с. 168] метода (9)–(10). В случае $\mu=0$ ненулевые коэффициенты β_{ij}, b_i задаются формулами

$$\beta_{l(j,i),l(j,k)}=A_k^j(\alpha_i),\quad k=0,1,...,i-1;\quad \beta_{l(j,i),l(j-1,k)}=A_k^j(\alpha_i),\quad k=i,i+1,...,j-1;$$

$$b_{l(s-1,k)}(\alpha)=A_k^s(\alpha),\quad k=0,1,...,s-1,$$

где j=1,2,…,s–1, i=1,2,…,j, $l=l(j,k)=\begin{cases} j(j-1)/2+k+1, & k\ge1,\\ 1 & k=0.\end{cases}$

При $\mu\neq0$ приходим к скорректированным методам Рунге-Кутты, точным на решениях системы $u'=\mu u+q(t)$, где $q(t)$ – многочлен степени не выше s–1.

1. Бобков В.В., Борисевич А.М.// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 52.

2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории численных методов. Дифференциальные уравнения. Мн., 1982.

3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.

Поступила в редакцию 25.01.2000.

УДК 517.9

Е.М. РАДЫНО

ОБ ОТНОШЕНИИ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ДИАМЕТРУ

Generalization of the notion of number π for arbitrary norm of euclidian plane is given and strict estimate of π is obtained.

Обобщение длины на плоскости приводит к задаче, поставленной впервые, по-видимому, Питером Лаксом: обобщить число π и получить его точную оценку.

Кривой назовем произвольное непрерывное отображение единичного отрезка в метрическое пространство $f:[0,1]\to X$, длиной кривой $L(f)$ – верхнюю грань множества сумм $\sum_{k=1}^{n}\rho(f(x_{k-1}),f(x_k))$, где ρ – метрика, $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$. Длина кривой не меньше расстояния между ее концами $L(f)\geq\rho(f(0),f(1))$.

На плоскости E^2 с метрикой ρ выделим круги $B[O,r]=$ $=\{X\in E^2:\rho(O,X)\leq r\}$ и окружности $S[O,r]=\{X\in E^2:\rho(O,X)=r\}$. Окружности могут быть пустым множеством даже в метрике, топологически эквивалентной евклидовой. Поэтому ограничимся нормами плоскости – метриками, которые задаются нормой векторов $\rho(A,B)=\|\boldsymbol{AB}\|$. Отрезок $[XY]$ отождествим с кривой $f:[0,1]\to E^2:t\mapsto Z$, где $\boldsymbol{XZ}=t\boldsymbol{XY}$.

Лемма 1. *Нормы плоскости обладают свойствами:*

1) длина отрезка совпадает с расстоянием между его концами;

2) $B[O,r]$ и $S[O,r]$ – центрально-симметричные фигуры;

3) $B[O,r]$ – выпуклая фигура, т. е. вместе с точками X,Y содержит и весь отрезок $[XY]$;

4) класс ограниченных множеств един для всех норм плоскости.

Доказательство. Свойства 1–3 просто следуют из определения нормы. Эквивалентное 4 утверждение см. в [1, с. 158].

Лемма 2. *Пусть Φ – выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура с центром в точке O, содержащая свою границу Γ. Тогда Γ является единичной окружностью с центром O для некоторой (единственной) нормы плоскости.*

Доказательство. Введем норму векторов, которая и задаст нужную норму плоскости. Положим $\|\boldsymbol{0}\|=0$. Для произвольного $\boldsymbol{OX}\neq\boldsymbol{0}$ рассмотрим луч $[OX)$ и точку $X'=[OX)\cap\Gamma$. Тогда $\boldsymbol{OX}=\lambda\boldsymbol{OX'}$ для некоторого $\lambda>0$. Положим $\|\boldsymbol{OX}\|=\lambda$. Очевидно, $X\in\Gamma$ равносильно $\|\boldsymbol{OX}\|=1$, а $X\in\Phi$ равносильно $\|\boldsymbol{OX}\|\leq 1$. Для введенной нормы (однозначно определяемой фигурой Φ) проверим здесь лишь неравенство треугольника.

Если хотя бы один вектор равен $\boldsymbol{0}$, то неравенство треугольника выполнено. Пусть $\boldsymbol{OZ}=\boldsymbol{OX}+\boldsymbol{OY}$, $\|\boldsymbol{OX}\|=a$, $\|\boldsymbol{OY}\|=b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. По определению $\boldsymbol{OX}=a\boldsymbol{OX'}$, $\boldsymbol{OY}=b\boldsymbol{OY'}$, где $X',Y'\in\Gamma\subset\Phi$. Рассмотрим $\boldsymbol{OZ''}=\frac{1}{a+b}\boldsymbol{OZ}=$ $=\frac{a}{a+b}\boldsymbol{OX''}+\frac{b}{a+b}\boldsymbol{OY''}$. Имеем $\boldsymbol{X'Z''}=\frac{b}{a+b}\boldsymbol{X'Y'}$. Поскольку $\frac{b}{a+b}\in[0,1]$, то $Z''\in[X'Y']\subset\Phi$, откуда вытекает $\frac{1}{a+b}\|\boldsymbol{OZ}\|=\|\boldsymbol{OZ''}\|\leq 1$, что и доказывает неравенство треугольника.

Пусть $B_E=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ – единичный круг в некоторой прямоугольной системе координат Oxy в E^2 и φ – параметризация единичной окружности $\varphi:t\mapsto(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$, где $t\in[0,1]$. Пусть $h:B_E\to\Phi\subset E^2$ – гомеоморфизм. Периметром $P(\Phi)$ назовем $L(h\circ\varphi)$ – длину кривой $h\circ\varphi$, образ которой является границей Φ. Периметр $P(\Phi)$ зависит лишь от Φ.

Если Ф выпуклая, то гомеоморфизм h существует и всякая ломаная, приближающая границу Ф, образует вписанный выпуклый многоугольник.

Лемма 3. *Пусть* Φ *и* Φ_0 *– выпуклые ограниченные фигуры плоскости и* $\Phi \subset \Phi_0$, *тогда* $P(\Phi) \le P(\Phi_0)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный выпуклый многоугольник $M = A_1A_2...A_n$, вписанный в Φ. Построим выпуклые фигуры $\Phi_1 \supset ... \supset \Phi_n = M$, отрезая от Φ_0 по очереди куски вдоль прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. При этом криволинейные части границы заменяются на не превосходящие их по длине отрезки: $P(\Phi_0) \ge P(\Phi_1) \ge ... \ge P(\Phi_n) = P(M)$. Взяв верхнюю грань по всем многоугольникам M, получаем: $P(\Phi_0) \ge \sup P(M) = P(\Phi)$.

Следствие. Периметры ограниченных выпуклых фигур конечны.

Длиной окружности $S[O,r]$ назовем периметр круга $B[O,r]$. Для произвольной нормы плоскости ρ положим π(ρ) равным половине длины единичной окружности $S[O,1]$. Например, для нормы, порожденной правильным шестиугольником, π=3.

Теорема 1. *Число* π(ρ) *принимает все значения из отрезка* $[3,4]$ *и только эти значения.*

Доказательство. Пусть $S = S[O,1]$ – единичная окружность для нормы ρ. Доказательство проведем в три этапа.

1. Пусть $O_1 \in S$. Рассмотрим окружности S_1 и S_2 – образы S при параллельных переносах на векторы $\boldsymbol{OO}_1$ и $\boldsymbol{OO}_2 = -\boldsymbol{OO}_1$ соответственно. Множество $S_1 \cap S$ содержит по точке в обоих полуплоскостях относительно прямой OO_1. Обозначим их K и L. При сдвиге точек K, L на вектор $\boldsymbol{OO}_2$ получаются точки N, $M \in S_2 \cap S$ соответственно. Используя лемму 3, заключаем, что $P(S) \ge P(O_1KNO_2ML) = \|\boldsymbol{O_1K}\| + \|\boldsymbol{NK}\| + \|\boldsymbol{NO_2}\| + \|\boldsymbol{O_2M}\| + \|\boldsymbol{ML}\| + \|\boldsymbol{LO_1}\| = 6 \cdot 1 = 6$ и $\pi \ge 3$.

2. Среди параллелограммов с центрами в точке O, вписанных в S, есть параллелограмм $KLMN$ с наибольшей площадью (в обычном смысле). Действительно, площадь $KLMN$ непрерывно зависит от пары точек $(K, L) \in S \times S$ и применима теорема Вейерштрасса, так как S компактна.

Параллелограмм $KLMN$, очевидно, не вырожден. Проведем две пары прямых через K, M параллельно LN и через L, N параллельно KM, которые при пересечении образуют параллелограмм $PTUV$ ($K \in PT$, $L \in VP$). Прямая VP – опорная, т. е. нет никакой точки $X \in S$, лежащей "выше" прямой VP (иначе площадь $KLMN$ не минимальна). Аналогично прямые PT, TU и UV – опорные. Согласно лемме 3 $P(S) \le P(PTUV) = \|\boldsymbol{PT}\| + \|\boldsymbol{TU}\| + \|\boldsymbol{UV}\| + \|\boldsymbol{VP}\| = 4 \cdot 2 = 8$ и $\pi \le 4$.

3. Выберем на плоскости систему координат. В качестве единичной окружности, задающей норму плоскости, возьмем шестиугольник $H(t)$ с координатами вершин $A(1,0)$, $B\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1+t}{2}\right)$, $C(0,1)$, $D(-1,0)$, $E\left(-\frac{1+t}{2}, -\frac{1+t}{2}\right)$, $F(0,-1)$, где $t \in [0,1]$. Периметр $P(H(t)) = \|\boldsymbol{AB}\| + \|\boldsymbol{BC}\| +$

$+\|CD\|+\|DE\|+\|EF\|+\|FA\|=1+1+\dfrac{2}{1+t}+1+1+\dfrac{2}{1+t}$ принимает значения на всем отрезке $[6, 8]$.

Теорема 2. Пусть ρ_1 и ρ_2 – нормы плоскости, $S_1[O_1,1]$ и $S_2[O_2,1]$ – соответствующие единичные окружности и существует такое A – аффинное преобразование плоскости, что $S_2 = A(S_1)$. Тогда $\pi(\rho_1)=\pi(\rho_2)$.

Доказательство. Из условия видно, что $\|e\|_1 = 1 \Leftrightarrow \|A(e)\|_2 = 1$. Всякий $a\neq 0$ представим в виде $a=\|a\|_1 e$, где $\|e\|_1 = 1$. Поскольку $A(a)=\|a\|_1 A(e)$, то $\|A(a)\|_2 = \|a\|_1$. Пусть $[X_1Y_1]$ – хорда S_1, $[X_2Y_2]=A([X_1Y_1])$ – хорда S_2. Имеем $\rho_1(X_1,Y_1)=\|X_1Y_1\|_1=\|X_2Y_2\|_2=\rho_2(X_2,Y_2)$. Таким образом, у всех выпуклых многоугольников M_1 и $M_2 = A(M_1)$, вписанных в S_1 и S_2, периметры в соответствующих нормах совпадают. Взяв верхнюю грань по всем M_1, получаем требуемое.

Следствие. Всякой норме, задаваемой скалярным произведением, соответствует π=3,14159…, хотя обратное и неверно.

Как следствие изложенного, возникает критерий, который профессор Я.В. Радыно предложил доказать или опровергнуть.

Гипотеза. *Пусть банахово пространство X имеет линейную размерность большую двух. Пространство X является гильбертовым тогда и только тогда, когда число π для всех сужений нормы на двумерные подпространства X равняется 3,14159… .*

Автор данной статьи благодарен профессору Я.В. Радыно за постановку задачи и внимание.

1. Антоневич А.Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 13.04.2000.

УДК 621.382.323–416

А.Д. АНДРЕЕВ, В.М. БОРЗДОВ, В.О. ГАЛЕНЧИК

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНОВ В КАНАЛЕ СУБМИКРОННОГО МОП-ТРАНЗИСТОРА

The technique to estimate the total electron charge in the channel of submicron MOSFET is developed. This technique allows to estimate of the total electron charge in the channel both in the linear and saturation modes.

При моделировании МОП-транзисторов "методом крупных частиц" весьма важным вопросом, который при этом необходимо решать, является нахождение величины заряда электронов в проводящем канале прибора. Знание суммарного заряда электронов необходимо для определения заряда отдельно взятой "крупной частицы" и согласования процедуры моделирования переноса электронов с процедурой расчета напряженностей электрических полей в структуре [1].

В режиме работы прибора с непрерывным проводящим каналом поверхностный заряд инверсных электронов может быть оценен по известной формуле [2]

$$Q_n = (V_G - V(x) - V_{FB} - 2\varphi_b)C_{ox} + f\sqrt{2\varepsilon\varepsilon_0 eN_A[2\varphi_b + V(x) + V_{SS}]}\,, \qquad (1)$$

где V_G, V_{SS}, $V(x)$ – потенциалы на затворе, подложке и в точке с координатой x вдоль канала соответственно; φ_b – потенциал в нейтральном объеме подложки; C_{ox} – удельная емкость окисла; e – элементарный заряд; ε – диэлектрическая проницаемость кремния; ε_0 – диэлектрическая постоянная; N_A – концентрация акцепторов; V_{FB} – напряжение плоских зон; f – фактор, учитывающий короткоканальные эффекты и равный

$$f = 1 - \frac{z_j}{L}\left(\sqrt{1 + \frac{2z_d}{z_j}} - 1\right), \qquad (2)$$

где z_j – глубина области легирования стока, z_d – глубина области пространственного заряда, L – длина канала.

Для оценки зависимости $V(x)$ предполагалось, что напряжение на стоковой области обеднения и на остальной части канала падает линейно. Считая, что напряженность электрического поля, обусловленного пространственным зарядом, превышает среднюю напряженность электрического поля, созданного на стоковой области обеднения стоковым напряжением [3], можно рассчитать падение напряжения на этом участке по формуле, полученной в работе [4].

Известно, что соотношение (1) неприменимо в перекрытой части канала, когда прибор работает в режиме насыщения тока стока. В данной работе для оценки заряда в этом режиме предлагается следующая методика. Вся область моделирования разбивается на две части: область 1 – от истока до точки отсечки канала x_o и область 2 – от точки отсечки до стока. Точка перекрытия канала x_o находится из условия $Q_n(x_o)=0$. С учетом непрерывности протекания тока в канале можно записать

$$en_1v_1S_{\perp 1} = en_2v_2S_{\perp 2}, \qquad (3)$$

где n_1, n_2 – средние концентрации электронов в областях 1 и 2 соответственно; $S_{\perp 1}$, $S_{\perp 2}$ – площади сечения этих областей; v_1 и v_2 – средние дрейфовые скорости электронов. При этом для $S_{\perp 1}$, $S_{\perp 2}$ справедливы следующие соотношения

$$S_{\perp 1} = Wz_i, \quad S_{\perp 2} = Wz_j, \qquad (4)$$

где z_i – глубина инверсионного слоя.

Используя далее уравнения (1)–(4), находим суммарные заряды электронов в областях 1 и 2

$$Q_1 = n_1 z_i x_o We = W\int_0^{x_o} Q_n(x)dx, \quad Q_2 = n_2 z_j (L - x_o)We. \qquad (5)$$

Тогда на основе (5) получим

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1 x_o S_{\perp 1}}{n_2(L - x_o)S_{\perp 2}}. \qquad (6)$$

Из (3) следует, что $\dfrac{n_1S_{\perp 1}}{n_2S_{\perp 2}} = \dfrac{v_2}{v_1}$ и

$$Q_2 = \frac{L - x_o}{x_o}\frac{v_1}{v_2}Q_1 = \frac{L - x_o}{x_o}\gamma Q_1\,, \qquad (7)$$

где $\gamma = v_1/v_2$ – подгоночный параметр. Таким образом, суммарный заряд электронов в области моделирования может быть оценен по формуле

$$Q = Q_1 + Q_2 = \left(1 + \frac{L - x_o}{x_o}\gamma\right)W\int_0^{x_o} Q_n(x)dx. \qquad (8)$$

Предложенная в данной работе методика оценки заряда электронов в канале МОП-транзистора была использована при построении численных моделей для расчета электрических и электрофизических характеристик прибора.

1. Борздов В.М., Комаров Ф.Ф. Моделирование электрофизических свойств твердотельных слоистых структур интегральной электроники. Мн., 1999.

2. Маллер Р., Кейминс Т. Элементы интегральных схем. М., 1989.

3. Андреев А.Д., Бельский А.М., Борздов В.М. и др. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1999. № 2. С. 37

4. Андреев А.Д., Борздов В.М., Валиев А.А. и др. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 2. С. 55.

Поступила в редакцию 06.09.2000.

Выдающиеся ученые Беларуси

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ САРЖЕВСКИЙ
(1930 – 1983)

27 августа 2000 г. исполнилось бы 70 лет известному белорусскому ученому и педагогу, заслуженному деятелю науки Белорусской ССР, доктору физико-математических наук, профессору Александру Михайловичу Саржевскому.

А.М. Саржевский родился 27 августа 1930 г. в г. Арзамасе в семье рабочего. После окончания в 1953 г. БГУ им. В.И. Ленина он начал трудовую деятельность в Физико-техническом институте АН БССР. С момента организации Института физики АН БССР в 1955 г. Александр Михайлович – сотрудник лаборатории люминесценции. Основным содержанием его работ было исследование поляризационных характеристик люминесценции сложных молекул в растворах, изучение и анализ влияния деполяризующих факторов (вращательного движения, внутримолекулярных колебаний, межмолекулярного переноса энергии) на предельную степень поляризации. В 1961 г. А.М. Саржевский под руководством академика АН БССР А.Н. Севченко защитил кандидатскую диссертацию.

В 1967 г. А.М. Саржевский возглавил кафедру общей физики БГУ им. В.И. Ленина. Здесь во всей многогранности раскрылся его организаторский талант. Совместно с учениками им были развернуты исследования спектрально-поляризационных характеристик обширных классов соединений – производных антрацена, ксантена, стильбена и др. На основании проведенных экспериментальных измерений и теоретических исследований в рамках осцилляторной модели и квантовомеханических расчетов сделаны существенные уточнения в теорию поляризованной флуоресценции сложных молекул в растворах. Получила дальнейшее развитие линейная теория деполяризации люминесценции сложных молекул в растворах. Разработана теория вращательной деполяризации люминесценции для многоуровневой модели молекулы с учетом вращения в промежуточных релаксационных состояниях при проявлении инерционных эффектов вращения. Полученные результаты систематизированы в монографиях А.М. Саржевского, А.Н. Севченко "Анизотропия поглощения и испускания света молекулами" (1971) и В.А. Гайсенка, А.М. Саржевского "Анизотропия поглощения и люминесценции многоатомных молекул" (1986).

Александр Михайлович явился инициатором исследований в области нелинейной лазерной спектроскопии. Совместно с учениками им были разработаны основные положения поляризованной нелинейно-возбуждаемой флуоресценции (наиболее детально – двухфотонно-возбуждаемой), начаты исследования в области лазерной физики, в частности в области описания поляризации излучения лазеров на растворах органических соединений.

Большое внимание А.М. Саржевский уделял научно-организационной работе. По его и А.Н. Севченко предложению в 1976 г. на базе научной группы кафедры создается лаборатория спектроскопии НИИ ПФП при БГУ, а в 1978 г. – отраслевая научно-исследовательская лаборатория электронных средств и методов обработки оптической информации, вся деятельность которых находилась под пристальным вниманием Александра Михайловича.

Результаты большой и плодотворной научной деятельности А.М. Саржевского отражены почти в 200 научных работах по актуальным вопросам спектроскопии, люминесценции, квантовой электроники и нелинейной спектроскопии. В 1973 г. А.М. Саржевский защитил докторскую диссертацию. Результаты его работы высоко оценивались специалистами в нашей стране и за рубежом.

Под руководством А.М. Саржевского подготовлено 19 кандидатов наук, пять из них в последующем защитили докторские диссертации, а Е.С. Воропай и В.А. Гайсенок стали лауреатами Государственной премии. Его ученики работают в вузах республики и далеко за ее пределами в качестве руководителей научных коллективов и организаций, стали крупными организаторами науки. За большие заслуги в развитии науки и подготовке научных кадров в 1980 г. Александру Михайловичу было присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки Белорусской ССР.

Стремясь к совершенствованию форм и методов преподавания физики, А.М. Саржевский много внимания уделял научно-методическим исследованиям. В 1976 г. кафедра общей физики становится базовой по этой проблеме для вузов Белоруссии, а А.М. Саржевский – председателем научно-методического совета по физике Прибалтийской зоны СССР. Им опубликовано более 40 работ научно-методического характера. Много сил и внимания А.М. Саржевский уделял непосредственно работе со студентами и организации учебного процесса. По его инициативе на кафедре был разработан ряд оригинальных демонстрационных экспонатов и работ, описанных в учебном пособии А.М. Саржевского, В.Н. Наумчика "Наглядность в демонстрационном эксперименте по физике (эргономический подход)". А.М. Саржевский – автор двухтомного учебного пособия "Оптика" (1984), которое и по сей день остается одним из самых содержательных по курсу оптики.

А.М. Саржевский вел большую общественную работу, являлся заместителем председателя специализированного совета по защите диссертаций, ответственным редактором физико-математической серии журнала "Вестник БГУ им. В.И. Ленина".

В памяти всех, кто работал и общался с Александром Михайловичем Саржевским, навсегда сохранится образ доброжелательного, требовательного к себе и внимательного к окружающим человека, который всю свою жизнь отдал делу развития образования и науки в нашей стране.

Е.С. Воропай, И.И. Жолнеревич, А.П. Клищенко

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12

Гринчук А.В., Ушаков Е.А. **Вычисление интегралов по путям в пространстве де Ситтера** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Пропагатор в пространстве де Ситтера вычисляется на основе интегралов по путям. Предложен метод расчета интегралов по путям для частиц со спином. Производится сравнение вычислений с вычислениями в нерелятивистской квантовой механике.

Библиогр. 8 назв.

УДК 535.37

Гулис И.М., Кислый В.В., Цвирко В.А. **Люминесценция сложных органических молекул в матрице сегнетоэлектрического кристалла триглицинсульфата** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Температурные зависимости спектров люминесценции допированных органическими молекулами кристаллов триглицинсульфата интерпретируются на основе представлений об изменениях спонтанной поляризации, определяющей спектральные сдвиги за счет ориентационных взаимодействий.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 535.317.1

Грицай Ю.В., Могильный В.В. **Влияние взаимодействия фотоиндуцированных дефектов на динамику фазовых голографических решеток в антраценсодержащих полимерных слоях** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Исследована запись фазовых голографических решеток в антраценсодержащих полимерных слоях при различных интенсивностях. Обнаружены отклонения кинетики дифракционной эффективности фазовых голограмм от разработанной ранее модели со стабильными центрами захвата в виде усиления голографических решеток без инверсии фазового контраста. Построена модель явления, основывающаяся на предположении о взаимодействии дефектов, приводящем к освобождению захваченных фотонейтральных молекул (растворителя). Достигнуто качественное согласие результатов расчетного моделирования с экспериментальными зависимостями.

Библиогр. 9 назв., ил. 3.

УДК 621.315.592

Гайдук П.И., Чернявская Ю.В., Ларсен А.Н. (Дания), Тишков В.С., Комаров Ф.Ф. **Концентрационные зависимости подвижности носителей заряда и удельного сопротивления в имплантированных сплавах $Si_{1-x}Ge_x$** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Методом измерения эффекта Холла в сочетании с прецизионным послойным стравливанием исследованы концентрационные зависимости подвижности носителей заряда и удельного сопротивления в слоях эпитаксиальных $Si_{1-x}Ge_x$-сплавов ($0<x<0,5$), выращенных на Si-подложках. Слои легированы путем ионной имплантации As^+ ($8 \cdot 10^{15}$ см$^{-2}$) с последующим быстрым термическим отжигом. Установлены зависимости удельного сопротивления и подвижности носителей заряда от стехиометрического состава $Si_{1-x}Ge_x$-сплава.

Библиогр. 9 назв., табл. 2, ил. 3.

УДК 669.76:537.3

Шепелевич В.Г., Гречанников Э.Е. **Влияние легирования на зеренную структуру быстрозатвердевших фольг сплава Bi-15 ат.% Sb** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Быстрозатвердевшие фольги сплава Bi-15 ат.% Sb имеют мелкозернистую структуру и четко выраженную текстуру $(10\bar{1}2)$. Легирование сплава алюминием, галлием, германием, индием, серой, оловом и цинком уменьшает размеры зерен и не оказывает влияния на формирование текстуры.

Библиогр. 5 назв., табл. 1, ил. 1.

УДК 621.315.592

Гайдук П.И. **Влияние микропузырей в подложке кремния на эпитаксиальный рост SiGe-сплавов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Методами просвечивающей электронной микроскопии исследовано влияние водородно-индуцированных микропузырей в Si-подложке на гетероэпитаксиальный рост слоев сплава $Si_{0,85}Ge_{0,15}$. Микропузыри в Si-подложке получали методом имплантации ионов водорода с последующим отжигом. Установлено, что пузыри в Si-подложке приводят к ускоренной релаксации упругих деформаций, вызванных несоответствием параметров кристаллических решеток Si и SiGe-сплава. Обсуждается роль микропузырей в формировании и эволюции дислокаций в эпитаксиальных слоях и на границе раздела SiGe/Si.

Библиогр. 20 назв., ил. 2.

УДК 621.396. 67

Демидчик В.И. **Интегральное уравнение для тонких проводников с диэлектрическим покрытием** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2000. № 3.

Приводится вывод интегрального уравнения типа Поклингтона для тонкопроволочных структур произвольной геометрии с диэлектрическим покрытием. Даны примеры сравнения результатов расчета с известными экспериментальными данными.

Библиогр. 5 назв., ил. 2.

УДК 517.984

Еровенко В.А. **О различных классификациях точек спектра ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Для подмножеств спектра, эффективно описываемых в алгебраических терминах левых, правых делителей и топологических делителей нуля банаховой алгебры ограниченных линейных операторов, а именно точечного, дефектного, аппроксимативно-точечного и аппроксимативно-дефектного спектров, описаны их спектральные свойства при отображении оператора, при расширении оператора и для прямой суммы операторов, а также тонкая структура этих спектров в терминах состояний оператора.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517. 968.23

Шилин А.П. **Сингулярное интегральное уравнение на границе угла** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Построено в квадратурах решение сингулярного интегрального уравнения со специальным сдвигом. Уравнение задано на паре лучей, выходящих из нуля на комплексной плоскости. Оно сведено к двум двухэлементным задачам линейного сопряжения для функций, обладающих некоторыми характерными свойствами. Задачи решены с помощью подходящей факторизации по формулам, близким к формулам Ф.Д. Гахова решения задачи Римана.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.926.4

Примичева З.Н. **Об ограниченных решениях дифференциальной системы с линейным приближением класса Конти–Коппеля** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Установлены существование и единственность ограниченного решения дифференциальной системы с линейным приближением класса Конти–Коппеля.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.926

Булатов В.И. **Об обобщенной фундаментальной матрице линейной регулярной системы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Доказан критерий существования решений линейных регулярных однородных дифференциальных систем и получены аналитические представления этих решений через конструктивно определяемую обобщенную фундаментальную матрицу рассматриваемых систем.

Библиогр. 3 назв.

УДК 622.831; 539.3

Журавков М. А., Грищенкова О. Б., Ковалева М.А. **Использование полуобратного метода Сен-Венана в геомеханике. 1. Теоретические основы и анализ систем разрешающих уравнений** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Описаны теоретические основы решения некоторых классов задач прикладной геомеханики на базе использования основной идеи полуобратного метода Сен-Венана. Выполнен анализ систем разрешающих уравнений, а также влияния граничных условий и принятых физических гипотез на окончательные решения.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.958
Борухов В.Т., Корзюк В.И. **Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Обратная задача восстановления граничных условий переноса сводится к прямой задаче для линейной системы дифференциальных уравнений с неклассическими граничными условиями.

Библиогр. 8 назв.

УДК 519.62
Бобков В.В., Бобкова Н.А. **Метод последовательных дифференциальных невязок** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Для начальной задачи в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида предлагается новый способ построения рекурсивного типа одношаговых методов сколь угодно высоких порядков точности. Построение каждого улучшенного приближения к решению на шаге связано с учетом главной части невязки последнего приближения на исходной дифференциальной задаче.

Библиогр. 3 назв.

УДК 621.321.1:519.1
Листопад Н.И., Копачев А.Г. **Синхронизация потоков мультимедиа в распределенных средах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Представлен набор алгоритмов, обеспечивающих синхронизацию n непрерывных потоков мультимедиа в распределенных средах. Алгоритмы основаны на числовых временных метках и учитывают как потери кадров из-за переполнения буфера устройства, так и время вывода кадра у получателя.

Отличие проведенного исследования от существующих состоит в том, что алгоритмы синхронизации распространены на случай n непрерывных потоков, каждый из которых имеет свой источник.

Библиогр. 7 назв., ил. 1.

УДК 519.10
Кравцов М.К., Лукшин Е.В. **К оценке числа нецелочисленных вершин многогранника многоиндексной аксиальной задачи о назначениях** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Получена явная формула для определения числа 7-нецелочисленных вершин, т. е. вершин, число дробных компонент которых равно 7, многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1
Наумович Н.А. **Генератор задач о минимальном разрезе** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Описывается алгоритм генерации потоковых сетей с предписанным количеством вершин и дуг, а также с априори известным решением задачи о минимальном разрезе.

Библиогр. 1 назв., ил. 1.

УДК 621.315.592
Поклонский Н.А. **Поляризационное экранирование электростатического поля в кристаллических полупроводниках с водородоподобными примесями** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2000. № 3.

Дано описание поляризационной диэлектрической проницаемости ковалентного полупроводника с нейтральными водородоподобными примесями. Определена критическая концентрация примеси, для которой низкочастотная диэлектрическая проницаемость обращается в бесконечность. Расчетные зависимости критической концентрации от боровских радиусов легирующих примесей сопоставляются с известными экспериментальными данными.

Библиогр. 13 назв., ил. 1.

УДК 539.3
Мартыненко М.Д., Босяков С.М. **Поверхности сильного разрыва в теории термоупругости кубически анизотропных тел** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

С позиции теории сильных разрывов рассматриваются тепловые процессы, характеризующиеся конечной скоростью распространения тепла, в кубически анизотропном теле. Показано существование волн трех типов и получены явные формулы для скоростей этих волн.

Библиогр. 7 назв.

УДК 519.62

Сонец Е.Б. **Метод последовательных поправок и явные методы Рунге-Кутты** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Рассматривается вариант метода последовательных поправок, позволяющий конструировать явные непрерывные экспоненциально скорректированные методы Рунге-Кутты для численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены формулы расчета таблиц коэффициентов методов в случае нулевого параметра корректировки.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.9

Радыно Е.М. **Об отношении длины окружности к диаметру** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Обобщено понятие числа π для произвольных норм евклидовой плоскости, получены точные оценки.

Библиогр. 2 назв.

УДК 621.382.323 – 416

Андреев А.Д., Борздов В.М., Галенчик В.О. **Оценка величины заряда электронов в канале субмикронного МОП-транзистора** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3.

Предлагается методика оценки суммарного заряда электронов в субмикронном кремниевом МОП-транзисторе. Данная методика отличается от известных тем, что, во-первых, позволяет оценить суммарный заряд электронов как в линейном режиме работы прибора, так и в режиме насыщения стокового тока, во-вторых, малыми затратами машинных ресурсов. Рассмотренная методика может быть применена при построении разного рода математических моделей МОП-транзисторов.

Библиогр. 4 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS AND INFORMATICS

BRIEF COMMUNICATIONS

OITSTANDING SCIENTISTS OF BELARUS