

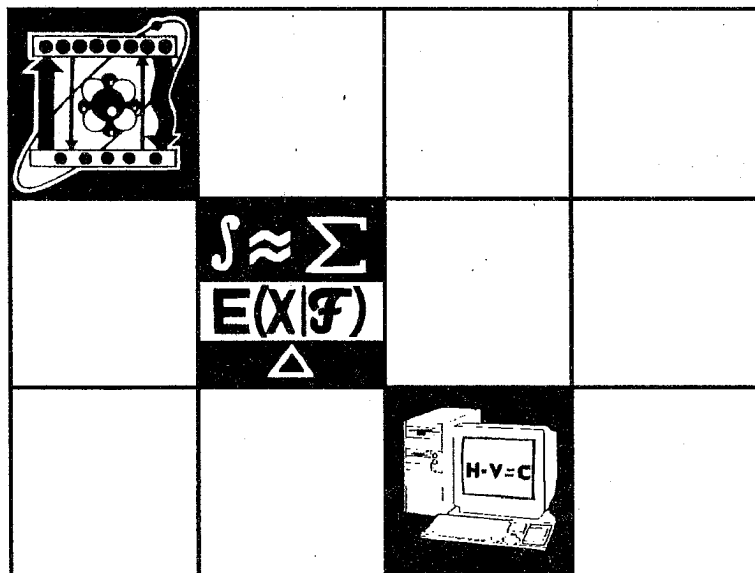
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

3'99



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Губарь Н.Б., Урбанович А.И. Шестиволновое смещение ультракоротких импульсов в кубических средах.....	3
Воронай Е.С., Самцов М.П., Чалов В.Н., Александрова Е.Н., Жаврид Э.А., Журавкин И.Н., Истомин Ю.П. Закономерности флуоресценции симметричных трикарбонацианиновых красителей в биологических тканях.....	8
Покаташкин В.И., Сытько В.В., Красовский А.Н., Умрейко С. Д. Миграция энергии электронного возбуждения в кристаллах $Rb_3UO_2F_5$ при селективном лазерном возбуждении.....	13
Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Гранько С.В., Григорьев В.В., Камышиан А.С. Оптические свойства пленок ПММА, облученных легкими ионами.....	16
Тиников В.С., Гайдук П.И., Ширяев С.Ю., Ларсен А.Н. Морфология поверхности кристаллов германия, облученных тяжелыми ионами средних энергий.....	20
Сидоренко А.В. Метод нелинейной динамики для анализа биоэлектрической активности мозга при изменении функционального состояния центральной нервной системы.....	22
Мальев С.В., Кухарчик П.Д. Расчет эффективных электродинамических параметров композиционных материалов методом минимальных автономных блоков.....	27
Ильинков В.А., Ильинкова Н.И. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое и непериодическое воздействие.....	33

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Морозевич А.Н., Железко Б.А., Самаль С.А. Особенности проектирования информационно-аналитических систем поддержки принятия решений в социально-экономических объектах.....	39
Емеличев В.А., Похилько В.Г. Радиус квазистойчивости множества Парето векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок.....	45
Матальцкий М.А. К вопросу исследования экспоненциальных сетей при зависимости вероятностей перехода от их состояний.....	48
Бобков В.В., Борисевич А.М. Метод последовательных поправок.....	52
Кукрак Г.О. Об отображениях экспоненциальных пространств.....	56
Бокша А.Н. Приближение функций двух переменных рациональными операторами в равномерной метрике.....	59
Моценский В.А., Моценский Д.В. Вычисление предикатов и реализация булевых функций.....	66

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

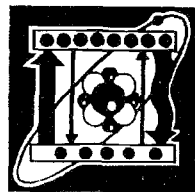
Зверович Н.Э. Разбиения вершин графов и кораскраски.....	70
Габасова О.Р. Достаточные условия оптимальности в задаче оптимизации фирмы с двумя технологическими способами производства.....	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Валерий Иванович Прокошин.....	75
Юрий Семенович Харин.....	76

ХРОНИКА

Курбацкий А.Н., Воротицкий Ю.И. Международная научная конференция CAS-99.....	78
---	----



УДК 535.34

Н.Б.ГУБАРЬ, А.И.УРБАНОВИЧ

ШЕСТИВОЛНОВОЕ СМЕШЕНИЕ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В КУБИЧЕСКИХ СРЕДАХ

In this work we have investigated the six-wave mixing (SWM) process of ultrashort pulses at arbitrary correlations of their intensities. We have obtained equations describing the SWM-process and made numerical simulations of SWM for the Gaussian pulses.

При распространении в нелинейной среде мощных световых волн происходит модуляция ее оптических характеристик интерферирующими полями и запись динамических решеток. Рассеяние оптического излучения на этих решетках может приводить к кроссвоздействию мощных волн и к возникновению дополнительных волн. Решетка модуляции диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$ может возникать вследствие разных механизмов воздействия излучения на вещество. Например, в конденсированных резонансных средах к нелинейности взаимодействия мощных волн накачки могут привести следующие эффекты: насыщение поглощения, тепловые явления из-за нагрева среды, генерация и диффузия свободных носителей в фоторефрактивных кристаллах и др.

Под действием двух мощных волн E_1 и E_2 в среде с кубической нелинейностью $\chi^{(3)}$ индуцируется динамическое возмущение $\delta\epsilon \propto E_1 E_2^*$. Если на среду падает третья сигнальная волна E_3 , то при рассеянии ее на записанной решетке возникают дифрагированные волны, определяемые поляризацией

$$\delta P = \chi_{12}^{(3)}(E_1 E_2) E_3 + \chi_{13}^{(3)}(E_1 E_3^*) E_2 + \chi_{23}^{(3)}(E_2 E_3^*) E_1. \quad (1)$$

Впервые четырехволновое смешение (ЧВС) во встречных пучках накачки наблюдалось в 1971 г. в кювете с раствором красителя в случае частотно-вырожденного взаимодействия $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ [1]. В последующие годы проводилось теоретическое и экспериментальное исследование ЧВС в различных средах: газах, низкотемпературной плазме щелочных металлов, стеклах, полупроводниках [2,3].

Интерес к многоволновому смешению (МВС) ультракоротких импульсов (УКИ) обусловлен их широким использованием, например в спектроскопии для изучения процессов возбуждения и релаксации в резонансных средах, в динамической голографии, обращении волнового фронта (ОВФ) [4–6]. Временные и энергетические характеристики эффекта МВС определяются амплитудой, фазой и временем установления динамических решеток. Поэтому характеристики дифрагированных волн являются мерой соответствующих оптических свойств среды.

При смешении УКИ происходит сложная временная модуляция возбуждающих и дифрагированных импульсов. Даже если модуляция входных

импульсов на фоне постоянной составляющей проявляется слабо, то в выходных она существенна и экспериментально наблюдаема. Исследование временных и энергетических характеристик дифрагированных УКИ может дать важную информацию о процессах резонансного взаимодействия мощного излучения с веществом в существенно нестационарных условиях. Не менее важное практическое применение МВС в активных средах — создание лазеров с распределенной обратной связью (РОС), обусловленной переотражением встречных генерируемых волн на динамических брэгговских решетках [7], которые могут создаваться благодаря пространственной модуляции инверсии населенностей.

Если длительность импульса много меньше времени продольной и поперечной релаксации резонансной среды ($\tau_p \ll T_1, T_2$), то релаксационные процессы не успевают разрушить "фазовую память" частиц вещества, поэтому макроскопическая поляризация среды является нелинейной функцией фазы и амплитуды поля во все предыдущие моменты времени. Это приводит к появлению целого ряда когерентных нелинейных эффектов, среди которых фотонное эхо, оптические нутации, самоиндуцированная прозрачность и т.д.

При ЧВС во встречных пучках накачки эффективность генерации обращенного импульса ограничена малой длиной нелинейного взаимодействия $L_n = t_p \cdot v / 2$ и не может достигать больших значений. Если в нелинейных средах добавка к показателю преломления среды положительна ($\delta n > 0$) при углах схождения $\theta = (2\delta n)^{1/2} \ll \pi/2$ (квазипродольная геометрия смещения), то осуществляется параметрический захват обращаемого сигнала попутной волной накачки и возбуждение дополнительной пары волн E_5 и E_6 , следовательно, развивается шестиволновое смещение (ШВС) (рис. 1) [8–10]. При этом [6] пороговая длина самовозбуждения обращающей системы меньше, чем при ЧВС, и в стационарном режиме вблизи порога параметрической неустойчивости наблюдается резкое увеличение эффективности. В нестационарном режиме ($L_n \ll L$) повышение эффективности генерации E_4 достигается при попутном взаимодействии.

В работах [11–13] изучен эффект частотно-вырожденного ШВС в прозрачной среде с кубической нелинейностью. В случае мгновенного отклика в приближении заданного поля накачки было проведено численное моделирование системы волновых уравнений, описывающих ШВС, и исследованы энергетические и временные характеристики выходных импульсов в зависимости

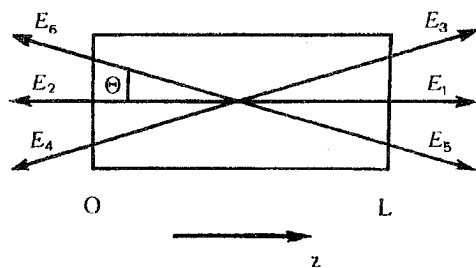


Рис. 1. Геометрия шестиволнового смещения

от параметров нелинейной среды и входных импульсов накачки. Проведено исследование ШВС УКИ в зависимости от времени запаздывания одного из импульсов накачки, распространяющегося в направлении, противоположном направлению сигнала. Показано, что при определенной временной задержке между импульсами накачки можно реализовать параметрическое усиление сигнала и обращенного импульса практически на всей длине нелинейной среды с высокой эффективностью. Прослежена динамика перехода от ШВС к ЧВС путем изменения угла схождения θ импульсов накачки и сигнала. Для сравнительно больших значений τ_p в режиме истощения накачки определена область значений параметров, в которой эффективность ЧВС выше, чем в случае ШВС.

В данной статье рассматривается процесс нестационарного ШВС в более общем случае при произвольном соотношении интенсивностей взаимодействующих УКИ.

Динамическое уравнение для нелинейной добавки $\delta n(|E|^2)$ к показателю преломления среды n_0 имеет вид

$$t_r (d\delta n/dt) + \delta n = n_2 |E|^2, \quad (2)$$

здесь $n_2 = 2\pi\chi^{(3)}$ — коэффициент, определяющий величину нелинейной добавки, t_r — время релаксации керровского отклика.

Поляризация среды P_j для j -й волны есть

$$P_j = n_0 / 2\pi \delta n(|E|^2) E_j. \quad (3)$$

Суммарное поле в среде в частотно-вырожденном случае запишем в виде

$$E = \sum_{j=1}^6 E_j \exp(-i(\omega t - k_j r)). \quad (4)$$

Пусть E_1 и E_2 — встречные УКИ накачки, E_3 — сигнал, E_4 — обращенный сигнал, E_5 и E_6 — дополнительная пара импульсов (см. рис. 1).

Подставляя (3), (4) в (2) и затем в волновое уравнение, получаем систему уравнений, описывающих процесс ШВС

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_1}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-i t_r} & \left(E_1 \int_0^t I_0 e^{t' t_r} dt + E_2 \int_0^t E_1 E_2^* e^{t' t_r} dt + E_3 \int_0^t (E_1 E_3^* + \right. \\ & + E_4 E_2^*) e^{t' t_r} dt + E_4 \int_0^t (E_1 E_4^* + E_3 E_2^*) e^{t' t_r} dt + E_5 \int_0^t (E_1 E_5^* + E_6 E_2^*) e^{t' t_r} dt + \\ & + E_6 \int_0^t (E_1 E_6^* + E_5 E_2^*) e^{t' t_r} dt + \left[E_2 \int_0^t (E_3 E_6^* + E_5 E_4^*) e^{t' t_r} dt + \right. \\ & \left. + E_3 \int_0^t (E_5 E_1^* + E_2 E_6^*) e^{t' t_r} dt + E_5 \int_0^t (E_3 E_1^* + E_2 E_4^*) e^{t' t_r} dt \right] e^{-i q r} \Bigg) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dE_2}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_2}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-i t_r} & \left(E_2 \int_0^t I_0 e^{t' t_r} dt + E_1 \int_0^t E_2 E_1^* e^{t' t_r} dt + \right. \\ & + E_3 \int_0^t (E_4 E_1^* + E_2 E_3^*) e^{t' t_r} dt + E_4 \int_0^t (E_3 E_1^* + E_2 E_4^*) e^{t' t_r} dt + E_5 \int_0^t (E_6 E_1^* + E_2 E_5^*) e^{t' t_r} dt + \\ & + E_6 \int_0^t (E_5 E_1^* + E_2 E_6^*) e^{t' t_r} dt + \left[E_1 \int_0^t (E_6 E_3^* + E_4 E_5^*) e^{t' t_r} dt + \right. \\ & \left. + E_4 \int_0^t (E_1 E_5^* + E_6 E_2^*) e^{t' t_r} dt + E_6 \int_0^t (E_1 E_3^* + E_4 E_2^*) e^{t' t_r} dt \right] e^{i q r} \Bigg), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_3}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_3}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-i t_r} & \left(E_3 \int_0^t I_0 e^{t' t_r} dt + E_4 \int_0^t E_3 E_4^* e^{t' t_r} dt + \right. \\ & + E_1 \int_0^t (E_3 E_1^* + E_2 E_4^*) e^{t' t_r} dt + E_2 \int_0^t (E_1 E_4^* + E_3 E_2^*) e^{t' t_r} dt + E_5 \int_0^t (E_3 E_5^* + E_6 E_4^*) e^{t' t_r} dt + \\ & + E_6 \int_0^t (E_3 E_6^* + E_5 E_4^*) e^{t' t_r} dt + \left[E_1 \int_0^t (E_1 E_5^* + E_6 E_2^*) e^{t' t_r} dt + E_6 \int_0^t E_1 E_2^* e^{t' t_r} dt \right] e^{i q r} \Bigg) \quad (7) \end{aligned}$$

$$-\frac{dE_4}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_4}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-t/t_r} \left(E_4 \int_0^t I_0 e^{t'/t_r} dt + E_3 \int_0^t E_4 E_3^* e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_1 \int_0^t (E_4 E_1^* + E_2 E_3^*) e^{t'/t_r} dt + E_2 \int_0^t (E_1 E_3^* + E_4 E_2^*) e^{t'/t_r} dt + E_5 \int_0^t (E_6 E_3^* + E_4 E_5^*) e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_6 \int_0^t (E_5 E_3^* + E_4 E_6^*) e^{t'/t_r} dt + \left[E_2 \int_0^t (E_5 E_1^* + E_2 E_6^*) e^{t'/t_r} dt + E_5 \int_0^t E_2 E_1^* e^{t'/t_r} dt \right] e^{-iqr} \right) \quad (8)$$

$$\frac{dE_5}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_5}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-t/t_r} \left(E_5 \int_0^t I_0 e^{t'/t_r} dt + E_6 \int_0^t E_5 E_6^* e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_1 \int_0^t (E_5 E_1^* + E_2 E_6^*) e^{t'/t_r} dt + E_2 \int_0^t (E_1 E_6^* + E_5 E_2^*) e^{t'/t_r} dt + E_3 \int_0^t (E_5 E_3^* + E_4 E_6^*) e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_4 \int_0^t (E_3 E_6^* + E_5 E_4^*) e^{t'/t_r} dt + \left[E_1 \int_0^t (E_1 E_3^* + E_4 E_2^*) e^{t'/t_r} dt + E_4 \int_0^t E_1 E_2^* e^{t'/t_r} dt \right] e^{iqr} \right) \quad (9)$$

$$-\frac{dE_6}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dE_6}{dt} = i \frac{\gamma}{t_r} e^{-t/t_r} \left(E_6 \int_0^t I_0 e^{t'/t_r} dt + E_5 \int_0^t E_6 E_5^* e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_1 \int_0^t (E_6 E_1^* + E_2 E_5^*) e^{t'/t_r} dt + E_2 \int_0^t (E_1 E_5^* + E_6 E_2^*) e^{t'/t_r} dt + E_3 \int_0^t (E_6 E_3^* + E_4 E_5^*) e^{t'/t_r} dt + \right. \\ \left. + E_4 \int_0^t (E_3 E_5^* + E_6 E_4^*) e^{t'/t_r} dt + \left[E_2 \int_0^t (E_3 E_1^* + E_2 E_4^*) e^{t'/t_r} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + E_3 \int_0^t E_2 E_1^* e^{t'/t_r} dt \right] e^{-iqr} \right) \quad (10)$$

Здесь $v = c/n_0$, $\gamma = 2\pi\chi^{(3)}k/n_0$, $q = 2k_1 - k_3 - k_5 = -2k_2 + k_4 + k_6$, $I_0 = |E_j|^2$.
Граничные условия зададим в виде

$$E_1(0, t) = E_{10}(t), E_2(L, t) = E_{20}(t), E_3(0, t) = E_{30}(t), \\ E_4(L, t) = E_5(0, t) = E_6(L, t) = 0. \quad (11)$$

Если $t_r \ll \tau_p$, то система (5–10) описывает ШВС в случае мгновенного отклика и упрощается к виду, приведенному в [13]. Аналитическое исследование уравнений (5–10) будет проведено в следующей работе.

Режим истощения накачки качественно изменяет задачу о многоволновом смешении. в частности эффективность процесса может сильно изменяться по мере распространения в среде, возникает область насыщения.

Уравнения (5–10) анализировались методами численного моделирования, результаты которого для входных импульсов гауссовой формы

$$E_j = E_{0j} \exp(-(t-2t_p)^2/2t_p^2), j=1,3, E_2 = E_{02} \exp(-(t-2t_p-t_z)^2/2t_p^2) \quad (12)$$

представлены на рис.2–4 для нормированных величин $E_i = \sqrt{\frac{kn_{2k}}{n_0}} L E_i$,

$T=t/(L/v)$ [11–13]. На рис.2 приведены огибающие сигнального E_3 и обратного E_4 импульсов на выходе из среды при различных значениях параметра $q_0 = qL = k\theta^2 L$, т. е. при различных значениях угла схождения θ между импульсами накачки E_1 и сигнала E_3 . Как и в стационарном случае [11, 13], с

увеличением угла θ пиковая интенсивность этих импульсов возрастает, достигая наибольшего значения при $q_0 \approx 6$, т.е. в области угла точного фазового синхронизма $\theta_s \approx (6/kL)^{1/2}$, затем падает.

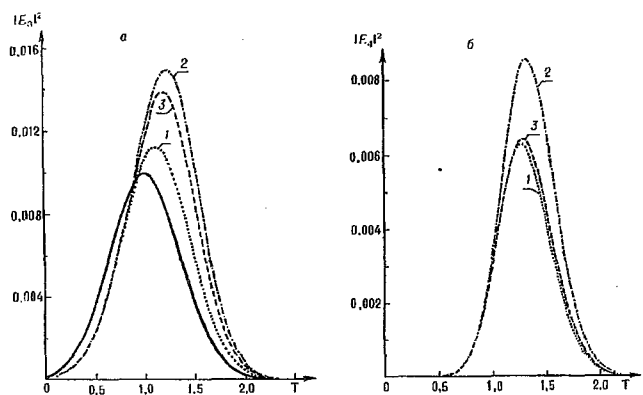


Рис.2. Огибающие выходных импульсов E_3 и E_4 в зависимости от T для $E_{01}=E_{02}=1$, $E_{03}=0,1$, $t_p=0,5$, $t_z=0$. Сплошная кривая соответствует входному импульсу E_3 . Кривая 1 соответствует $q_0 = 1$, 2 – 6, 3 – 30

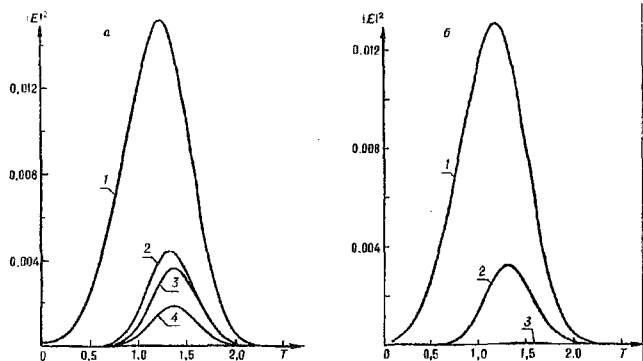


Рис.3. Огибающие выходных импульсов $E_3 - E_6$ в зависимости от T для $E_{03}=0,1$, $t_p=0,5$, $t_z=0$:

а – $E_{01} = 1,323$, $E_{02} = 0,5$, $q_0 = 4$; б – $E_{01} = 0,5$, $E_{02} = 1,323$, $q_0 = 7$

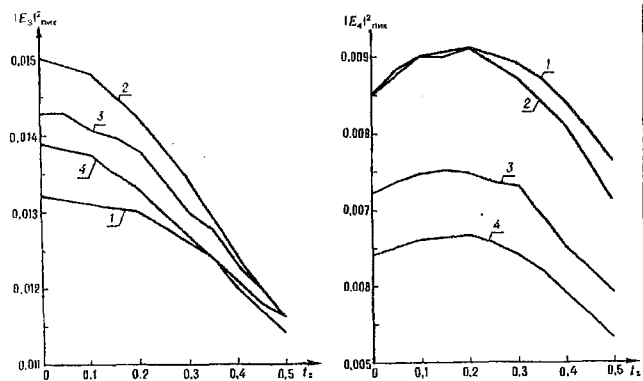


Рис.4. Зависимость пиковых интенсивностей E_3 , E_4 от времени задержки t_z при различных значениях параметра q_0 при $t_p=0,5$, $E_{01}=E_{02}=1$, $E_{03}=0,1$. Кривая 1 соответствует $q_0=3$, 2 – 6, 3 – 11, 4 – 30

На рис.3 приведены огибающие импульсов E_j ($j=3,4,5,6$) в случае, когда опорные импульсы E_1 и E_2 имеют различные входные пиковые интенсивности, и при выполнении условия фазового синхронизма для импульса сигнала, которое в случае а) $q_0=4$, в случае б) $q_0=7$. Из приведенных кривых видно, что пиковая интенсивность обращенного импульса E_4 в случае б) вдвое выше, чем в а). Импульсы E_4 и E_5 , распространяющиеся от границы среды $z=L$ в случае $E_1>E_2$ (рис.3а), не испытывают эффективного усиления за счет перекачки энергии из волны E_1 , так как амплитуды дифракционных решеток, определяющих эту перекачку, малы. Когда $E_2>E_1$ (рис.3б), наиболее интенсивно усиливается импульс E_4 , так как в этом случае для него реализуется режим трехволнового смешения практически на всей длине среды.

На рис.4 приведены зависимости пиковых интенсивностей сигнала и обращенного импульсов при различных углах θ в зависимости от времени задержки t_z . Если с увеличением времени задержки пиковая интенсивность сигнала

монотонно падает, то у E_4 она имеет характерный максимум. Это связано с тем, что при больших временах задержки для сигнального импульса реализуется режим трехволнового смещения, когда он усиливается за счет импульса E_1 . Обращенный импульс, который генерируется из шумов, дифрагирует на решетках нелинейности, индуцированных волнами E_1 и E_2 в результате чего в него происходит перекачка энергии из обоих импульсов накачек, и для $t_2 \sim 0,2$ реализуются оптимальные условия усиления за счет ШВС.

Авторы выражают большую благодарность профессору А.А.Афанасьеву за критические замечания и внимание к работе.

1. Степанов Б.И., Ивакин Е.В., Рубанов А.С. // ДАН СССР. 1971. Т.196. №3. С.567.

2. Chiao R.I., Kelley P.L., Garmire E.M. // Phys. Rev. Lett. 1966. Vol.17. №22. P.1158.

3. Беспалов В.И., Таланов В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т.3. С.471.

4. Woerdman H.J. // Opt. Comm. 1970. Vol.2. N 5. P.212.

5. Grynberg G., Petrossian A., Pinard M., Vallet M. // Europhys. Lett. 1992. Vol.17. N3. P.213.

6. Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. Обращение волнового фронта. М., 1985. С.247.

7. Kogelnik H., Shank C.V. // Appl. Phys. Lett. 1971. Vol.18. N4. P.152.

8. Grynberg G. // Opt. Comm. 1988. Vol.66. P.321.

9. Saffman M., Zozulya A.A., Andersen D.Z. // JOSA B. 1994. Vol.11. N8. P.1409.

10. Grynberg G., Paye J. // Europhys. Lett. 1989. Vol.8. N1. P.29.

11. Афанасьев А.А., Губарь Н.Б., Самсон В.А. и др. // КИНО' 95. 1995. Т.1. С.164.

12. Afanas'ev A.A., Gubar N.B., Samson B.A. et al. // UPS95. 1995. Technical digest. MP16.

13. Afanas'ev A.A., Gubar N.B., Samson B.A. et al. // SPIE. Vol.2800 (proceedings ICONO95). P.232.

Поступила в редакцию 28.04.99.

УДК 535.37

Е.С.ВОРОПАЙ, М.П.САМЦОВ, В.Н.ЧАЛОВ, Е.Н.АЛЕКСАНДРОВА, Э.А.ЖАВРИД,
И.Н.ЖУРАВКИН, Ю.П.ИСТОМИН

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ТРИКАРБОЦИАНИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ

The presence of polymethine dyes, photosensibilizers having absorption and fluorescence into the transparency region of biological tissues, may be detected down to 1.5 cm from the surface of the animal body. When introduced in the ratio $1 \div 2$ mg/kg, the fluorescence intensity registered from the body surface for the polymethine dyes under study is directly proportional to their concentration in the tumor nodes and muscles. The changes in the fluorescence intensity during scanning over the tumor node surface are indicative of the presence of regions with inhomogeneous dye distribution.

В последние годы наблюдается увеличение количества научных работ по спектроскопии молекул в биологических системах различной степени сложности. Такая тенденция вызвана исключительной научной и практической важностью разрабатываемых проблем. Лазерная фототерапия является одним из перспективных направлений в развитии методов лечения онкологических заболеваний. При этом возможность регистрации флуоресценции фотосенсибилизаторов непосредственно в органах в значительной степени облегчает изучение динамики их накопления и вывода из организма *in vivo*.

Вместе с тем при использовании нового класса сенсibilизаторов возникает ряд вопросов, выяснение которых представляется необходимым для получения достоверной информации в такого рода исследованиях. Следует выяснить: насколько коррелирует величина сигнала флуоресценции и концентрация сенсibilизатора в тканях; с какой глубины от поверхности регистрируется флуоресценция сенсibilизатора; как влияет на результаты исследований насыщенность исследуемых тканей кровеносными сосудами; какой вклад во флуоресценцию вносит свечение окрашенных соединений, содержащихся в исследуемых органах и попадающих в пучок возбуждающего света.

Настоящая работа посвящена решению обозначенных выше проблем в отношении трикарбоцианиновых красителей. Эти соединения представляются перспективными в качестве фотосенсibilизаторов для фототерапии [1–9].

Материал и методика

В качестве фотосенсibilизаторов использовались новые трикарбоцианиновые красители с индолининовыми концевыми группами, синтезированные в лаборатории спектроскопии НИИ прикладных физических проблем им. А.Н.Севченко: 1 – индолининовый полиметиновый краситель с гептаметиновой цепью сопряжения; 2 – индолининовый полиметиновый краситель с 4-хлорзамещенной гептаметиновой цепью сопряжения; 3 – 2, 5-метилиндолининовый полиметиновый краситель с 4-хлорзамещенной гептаметиновой цепью сопряжения. Максимум длинноволновой полосы поглощения этих соединений лежит в спектральной области 720–750 нм, а молярный десятичный коэффициент поглощения составляет $1,5 \div 3 \cdot 10^5 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Препараты вводили внутривенно в концентрации 1÷2 миллиграмм на килограмм массы животных.

В работе использовались беспородные белые крысы по три в группе. Животным подкожно перевивались в области бедра штаммы опухолей саркомы М-1 и РС. Исследования производились, когда размеры опухолевых узлов достигали 20–40 мм. На протяжении эксперимента животные, которым был введен фотосенсibilизатор, содержались в условиях, исключающих воздействие на них прямого солнечного света.

Для исследования фармакокинетики накопления и вывода красителей из организма животных по их флуоресценции произведена модернизация спектрометра на базе двойного монохроматора фирмы Spex. Спектральный диапазон регистрации излучения спектрометра 400–880 нм. Для возбуждения флуоресценции использовалось излучение криптонового ($\lambda=647,1$ или $\lambda=676,4$ нм) лазера. В качестве детектора излучения использовался охлаждаемый, работающий в режиме счета фотонов фотоумножитель RCA 31034. Для подвода к исследуемому объекту возбуждающего излучения и регистрации излучения флуоресценции применялся Y-образный волоконный световод. Один конец этого световода состоит из хаотически перемешанных волокон, другой конец делится на два жгута, содержащие одинаковое количество волокон. Лазерное излучение через систему зеркал и линз вводится в один из концов световода и через общий торец подводится непосредственно к исследуемому образцу. Мощность возбуждающего излучения регулируется в пределах $0,01 \div 0,2$ Вт. Флуоресценция через объединенный торец световода фокусируется объективом спектрометра в плоскости его входной щели. Описанная схема формирования возбуждающего пучка и сбора флуоресценции образца, а также высокая спектральная избирательность прибора обеспечили достаточную чувствительность комплекса в целом.

Регистрация сигнала флуоресценции производилась непосредственно через кожу: световод прикладывался в 5–6 точках к исследуемому участку. Полученные значения усреднялись. Для учета уровня рассеянного света и собственной флуоресценции биологических тканей производились контрольные измерения у животных, которым препараты не вводили.

Спектры поглощения красителей в растворах и образцах тканей регистрировались с помощью спектрофотометра PV 1251A, исправленные спектры флуоресценции – с помощью спектрофлуориметра Fluorolog фирмы Spex.

Концентрация красителя в крови животных определялась путем их экстракции 2%-м раствором тритона X-100; концентрация красителей с экстрактом – по интенсивности его флуоресценции с помощью спектрофлуориметра Fluorolog, предварительно откалиброванного по растворам красителей с известной концентрацией. Непременно контролировалась оптическая плотность образцов экстрактов, при необходимости разбавлением образцов обеспечивалось линейное соответствие сигнала флуоресценции и концентрации красителей.

Результаты и их обсуждение

При переходе от органических растворителей к биологическим системам для всех исследованных соединений наблюдается одинаковый характер изменений их спектральных свойств. В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены спектры поглощения красителя 3 в этаноле и сыворотке крови, а также флуоресценции в этаноле, сыворотке крови и биологических тканях. Спектры поглощения красителей в сыворотке крови в общих чертах сохраняют форму спектров в органическом растворителе. Вместе с тем наблюдается bathochromный сдвиг на 12 нм и полуширина спектров увеличивается примерно на 10 нм. Спектры флуоресценции красителей в биологических тканях также смещены по сравнению со спектрами в этаноле в длинноволновую область более чем на 10 нм, а полуширина больше на 20 нм. Следует отметить, что спектры флуоресценции красителей в образцах мышечных, кожных и опухолевых тканей практически совпадают между собой. При этом спектры в тканях близки по положению и форме к спектрам в сыворотке крови.

При использовании для возбуждения флуоресценции излучения с длиной волны 647.1 нм интенсивность свечения тканей контрольных животных в области флуоресценции красителей составляла около 10% от сигнала флуоресценции красителей. При переходе к возбуждению излучением с длиной волны 676.4 нм уровень мешающего излучения

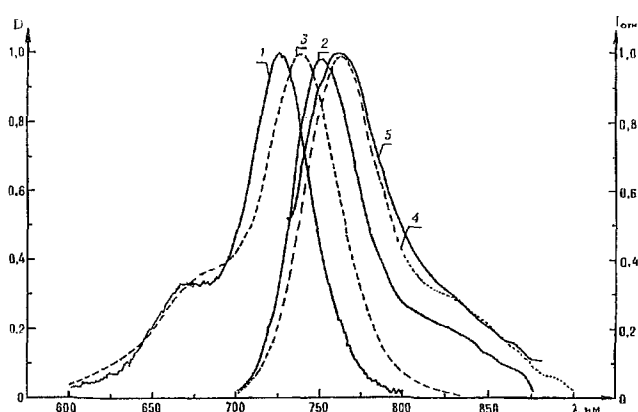


Рис. 1. Спектры поглощения (1, 3) и флуоресценции (2, 4, 5) красителя 3 в этаноле (1, 2), сыворотке крови (3, 4) и мышечной ткани (5)

уменьшался более чем на порядок (не превышал 1% от регистрируемого сигнала флуоресценции исследованных красителей).

После внутривенного введения животным красителей определенная их часть содержится в крови. Для выяснения влияния насыщенности кровью

опухолевых и мышечных тканей на результаты измерений проводилось сравнение интенсивности флуоресценции красителей в опухоли и бедре непосредственно перед и сразу после обескровливания тканей органов животных. В результате было установлено, что через час и в более поздние сроки после введения красителей сигнал от поверхности тканей, из которой кровь удалена, уменьшается примерно на 10%.

Были проведены также измерения зависимости содержания красителей в крови от времени, прошедшего после введения. Для этого производился забор крови, краситель экстрагировали 2%-м раствором тритона X-100. В результате оказалось, что концентрация красителей в крови уменьшается по закону, близкому к экспоненциальному, и через час после введения в крови его содержание уменьшается примерно на порядок (рис.2).

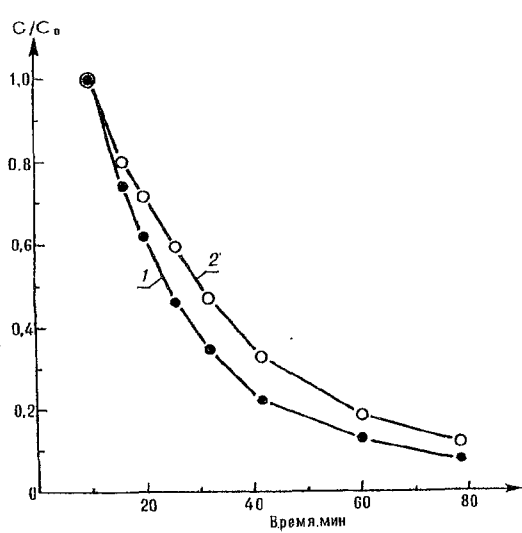


Рис.2. Изменение относительной (C/C₀) концентрации красителя 2 (1) и красителя 3 (2) в крови животных в зависимости от времени после введения

Для определения размеров области, с которой регистрируется флуоресценция красителей в конкретных экспериментальных условиях, был проведен анализ влияния толщины образцов тканей на сигнал флуоресценции. На возбуждении использовалось излучение с длиной волны 676,4 нм, флуоресценция регистрировалась в спектральной области 800 нм. Для такого рода исследований отбирались животные с опухолевыми узлами размером по глубине более 15 мм. Через час после внутривенного введения животным красителя производился забор опухолевых узлов вместе с участком кожи над ней. Со стороны кожного по-

крова опухоли подводился световод и регистрировалась интенсивность флуоресценции при последовательном уменьшении толщины образца. Результаты этих измерений представлены в табл.1. Как видно из таблицы, толщина опухоли до 1,5 см не сказывается на величине сигнала флуоресценции, а когда она становится меньше этого значения, сигнал флуоресценции начинает уменьшаться. Из этих данных следует, что испускание красителей регистрируется от молекул красителей, находящихся не только в коже и непосредственно прилегающих к ней слоях опухолевой ткани, но и на значительной глубине (до 1,5 см).

Таблица 1

Зависимость интенсивности флуоресценции красителя 3 от толщины опухолевой ткани

Толщина опухолевой ткани, см	2,5	2,2	1,8	1,5	1,0
Сигнал флуоресценции, отн.ед.	3000	3000	3000	2400	1000

Были проведены исследования зависимости сигнала флуоресценции от мышечных и опухолевых тканей при введении различных концентраций красителей. Исследования проводились при введении крысам с перевитой опухолью саркомы М-1 и РС красителей в дозах 1,0 и 2,0 мг/кг. Возбуждение флуоресценции осуществлялось светом с длиной волны 676,4 нм, а регистрация флуоресценции – на длине волны 800 нм. На протяжении 24 ч

производилось наблюдение за сигналом флуоресценции красителей в опухоли и мышце бедра. Отношение сигнала флуоресценции для мышц бедра и штамма РС при изменении в два раза дозы введенного красителя представлены в табл. 2.

Таблица 2

Отношение (I_2/I_1) интенсивности флуоресценции красителя 2 при его введении животным в концентрации 1 мг/кг – I_1 и 2 мг/кг – I_2

Объект	Время, ч								
	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	24,0
РС	2,0	2,1	1,9	2,1	2,0	2,1	1,9	2,0	2,1
Мышца	2,1	1,9	1,8	1,8	2,2	1,9	2,1	1,8	1,9

Из приведенных данных видно, что при увеличении дозы препарата в два раза интенсивность флуоресценции красителя в мышечных тканях и в опухолевых узлах РС на протяжении всего времени наблюдения в среднем также увеличивалась в два раза. Для саркомы М1 такого соответствия не наблюдалось. С целью выяснения причин такого расхождения были проведены исследования распределения красителей непосредственно в объеме опухолевой ткани. Для этого производилось сканирование по плоскости срезов опухоли. Исследовались сплошные опухоли и опухоли со спонтанно (прижизненно) изменившейся структурой (некрозом тканей). Следует отметить, что для штамма саркомы М1 характерным является появление в узлах спонтанных некрозов при размере опухоли более 1,5 см. Опухолевые узлы штамма РС, как правило, вырастают без некрозов.

Оказалось, что в сплошных, без спонтанных некрозов, опухолях обоих исследованных штаммов содержание красителя у поверхности и внутри опухоли отличалось не более чем на 7 %. Если же у опухоли имелся спонтанный некроз, то в этой зоне содержание красителей было меньше, чем в остальной ткани опухоли в 3÷5 раз. Естественно, что и в условиях *in vivo* изменения сигнала флуоресценции в значительной степени определяются наличием неоднородностей в тканях опухолевых узлов. В связи с тем, что в опухолевых узлах саркомы М1 присутствовали спонтанные неоднородности, наблюдалось несоответствие сигнала флуоресценции и вводимой дозы красителей. Следует подчеркнуть, что при сканировании по поверхности однородных, без спонтанных некрозов, опухолей интенсивность флуоресценции изменяется не более чем на 7%. Для опухолевых узлов, в которых впоследствии выявлено наличие спонтанного некроза, при сканировании по их поверхности интенсивность флуоресценции изменяется в 2÷3 раза. Следовательно, путем анализа изменения интенсивности флуоресценции ПК при сканировании по поверхности опухоли возможно диагностировать наличие в ней спонтанных некрозов.

Таким образом, полиметиновые красители, фотосенсибилизаторы с поглощением и флуоресценцией в спектральной области прозрачности биологических тканей («терапевтического окна») можно регистрировать с глубины до 1,5 см от поверхности тела животных. Интенсивность зарегистрированной с поверхности тела животных флуоресценции исследованных полиметиновых красителей при введении в диапазоне 1÷2 мг/кг прямо пропорциональна их концентрации в опухолевых узлах и мышцах. По изменению интенсивности флуоресценции при сканировании по поверхности опухолевых узлов возможно определять наличие в них областей с неоднородным распределением красителей.

Работа выполнена частично за счет средств Фонда фундаментальных исследований в рамках проекта Ф97-230.

1. Воропай Е.С., Самцов М.П., Луговский А.П. и др. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1996. №3. С.23.
2. Жаврид Э.А., Журавкин И.Н., Александрова Е.Н. и др. // Актуальные вопросы онкологии и медицинской радиологии. Мн., 1996. С.333.
3. Жаврид Э.А., Истомин Ю.И., Александрова Е.Н. и др. // Там же. Мн., 1997. С.266.
4. Voropay E.S., Samtsov M.P., Lugovskiy A.P. et al. // Experimental Oncology. 1997. Vol.19. №1. С.56.
5. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Современные вопросы оптики, радиационного материаловедения, информатики радиофизики и электроники. Мн., 1997. С.88.
6. Schastak S.I., Enzmann V., Jngel A. et al // Laser Medizin. 1997. Vol.13. P.50.
7. Diwu Z., Lown W. J. // Pharmac. Ther. 1994. Vol.63.
8. Bellnier D. A., Potter W.R., Lurine A. et al. // Photochem. Photobiol. 1995. Vol.62. №5. P.896.
9. Lipshutz G.S., Castro D.J., Saxton R.E. et al. // Laryngoscope. 1994. Vol.104. P.996.

Поступила в редакцию 02.06.99.

УДК 535.37

В.И. ПОКАТАШКИН, В.В. СЫТЬКО, А.Н. КРАСОВСКИЙ, С. Д. УМРЕЙКО

МИГРАЦИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ ПРИ СЕЛЕКТИВНОМ ЛАЗЕРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

The luminescence of $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ crystals upon selective resonance laser excitation within inhomogeneously broadened band of the first electronic transition has been investigated at 6 K. The nonselective spectral transfer of the electronic excitation energy detected in uranyl fluoride complexes has been attributed to interaction of lower excitation levels and Raman phonons in the crystal.

Для подавляющего большинства соединений уранила с пентакоординацией иона UO_2^{2+} характерна димерная или полимерная структура. Кристаллы пентафторуранилатов $\text{M}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ представляют собой исключение, являясь соединениями островного типа [1]. Связь уранила UO_2^{2+} с лигандами здесь в значительной степени ковалентная, а взаимодействие уранилового комплекса с катионами осуществляется преимущественно силами ионной связи [2]. Спектры люминесценции данных кристаллов достаточно структурированы по сравнению со спектрами полимерных соединений уранила, линии их низкотемпературных спектров аномально широки по сравнению со спектрами кристаллов ураниловых соединений с островной структурой. В связи с этим представляется интересным рассмотрение процессов формирования спектров $\text{M}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ с использованием возможности селективного лазерного возбуждения.

Ранее [3–5] при исследовании селективно возбуждаемой люминесценции $\text{M}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ при гелиевых температурах основное внимание уделялось анализу перераспределения интенсивности свечения между центрами разных типов. Настоящая работа посвящена исследованию процессов миграции энергии электронного возбуждения, протекающих при 6 К в кристаллах $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ при резонансном селективном лазерном возбуждении центров в рамках неоднородно уширенного контура бесфоновой линии (БФЛ).

Измерения проводились с использованием спектрального и криогенного оборудования, описанного в работах [3–5]. Возбуждение люминесценции осуществлялось излучением лазера на красителе кумарин-102, возбуждаемого излучением Кг- лазера.

Спектры поглощения и люминесценции кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ в области БФЛ, связанной с чисто электронным переходом ν_{00} , показаны на рис. 1. Сразу следует отметить нарушение закона зеркальной симметрии спектров поглощения и люминесценции, что скорее всего является проявлением нелинейного электрон-решеточного взаимодействия. При резонансном селективном возбуждении вид спектров люминесценции изменяется и зависит от частоты возбуждения. В области БФЛ они представлены триплетом узких линий на фоне широкой полосы. Центральный максимум триплета, связанного с люминесценцией резонансно возбуждаемых центров, совпадает с частотой селективного возбуждения. Стоксова и антистоксова линии отстоят от центрального максимума на $1,6 \div 1,7 \text{ см}^{-1}$, причем данная разность в спектральном положении линий триплета не зависит от частоты возбуждения. Триплетная структура сохраняется и для линий, связанных с колебательными повторениями ν_{00} с частотой полностью симметричных валентных колебаний иона уранила $\nu_s(\text{UO}_2^{2+})$. Форма широкополосной части спектра селективно возбуждаемой люминесценции имеет асимметричную гауссову форму, характерную для БФЛ люминесценции, возбуждаемой широкополосным ультрафиолетовым излучением.

Уменьшение частоты возбуждения в пределах неоднородно уширенной полосы ведет к уменьшению значений частот $\nu_s(\text{UO}_2^{2+})$ и перераспределению интенсивностей узкополосной резонансной и широкополосной частей спектров люминесценции (рис. 1, 2). При селективном резонансном возбуждении в области менее 19925 см^{-1} спектр люминесценции практически представлен только однородно уширенным резонансным триплетом.

При резонансном возбуждении люминесценции локального уранилового центра сохраняется форма широкополосного "пьедестала", распространяющегося как на стоксову, так и на антистоксову области. В то же время максимум широкой полосы резонансно возбуждаемой люминесценции претерпевает смещение в область более низких частот относительно максимума БФЛ люминесценции при широкополосном возбуждении. Это указывает на существование миграции энергии электронного возбуждения по уранилфторидным комплек-

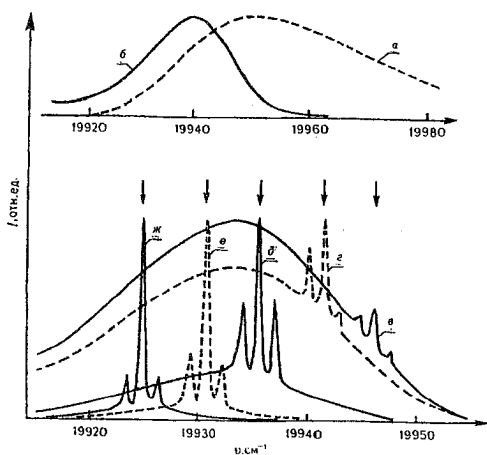


Рис. 1. Спектры поглощения (а) и люминесценции (б-ж) кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ (6 К) при неселективном (а, б – асимметричная гауссова компонента) и при резонансном селективном возбуждении (б-ж). Стрелками показаны резонансные частоты возбуждения

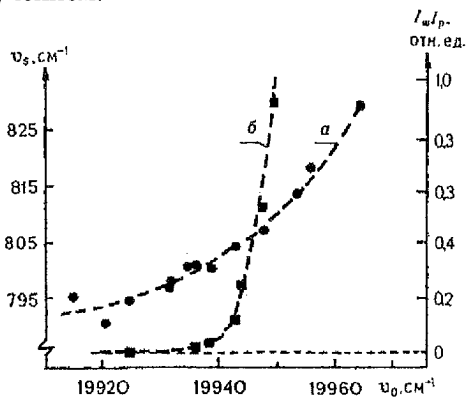


Рис. 2. Зависимость частоты валентных колебаний $\nu_s(\text{UO}_2^{2+})$ от частоты чисто электронного перехода ν_{00} (а) и относительное изменение интенсивностей широкополосной $I_{\text{ш}}$ и резонансной $I_{\text{р}}$ составляющих БФЛ (б) в спектрах люминесценции резонансно возбуждаемых центров кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$

сам. Первоначальными донорами энергии здесь являются резонансно возбужденные центры.

В настоящее время рассматриваются четыре основных механизма элементарного донорно-акцепторного взаимодействия центров [6], которые применимы для описания исследуемой здесь миграции энергии возбуждения по контуру неоднородно уширенной полосы кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$. Два из них связаны с нерезонансным одно- и двухфононным переносом энергии и еще два — с резонансным переносом энергии с участием рамановского рассеяния фононов или колебательных квантов доноров и акцепторов.

Вероятность нерезонансного однофононного переноса пропорциональна величине энергетической расстройки ϵ комбинирующих состояний, а соотношение вероятностей процессов с поглощением и испусканием фонона определяется как $\exp(-\epsilon/(kT))$. Вероятность нерезонансного двухфононного процесса является функцией интеграла перекрытия электрон-фононных спектров взаимодействующих центров. Однако рассматриваемые линии являются бесфононными, а широкополосные части спектра имеют антистоксову составляющую. Следовательно, данные нерезонансные механизмы миграции энергии в рассматриваемом случае маловероятны. С учетом ширины БФЛ и особенностей колебательных спектров комплексных анионов $[\text{UO}_2\text{F}_5]^{3-}$ [7, 8] можно говорить также о невозможности при гелиевых температурах резонансной миграции энергии в рамках неоднородно уширенной полосы с участием локальных колебаний уранилфторидного комплекса.

Таким образом, наиболее вероятным является резонансный перенос энергии электронного возбуждения с участием рамановского рассеяния фононов. Участие рамановских фононов обеспечивает фазовую релаксацию системы и соответствующее уширение электронного спектра. При этом компенсируется энергетическая расстройка комбинирующих состояний взаимодействующих центров [4]. Максимум такого взаимодействия достигается при температурах $T = \hbar \nu_F / (6k)$. Последнее условие в рассматриваемом случае полностью удовлетворяется, так как значения колебаний решеточных мод исследуемых кристаллов $\nu_F \sim 28 \div 34 \text{ см}^{-1}$ [8]. В пользу данного механизма говорит и тот факт, что линии резонансного триплета уширены. Присутствие антистоксовой составляющей широкополосной части спектра является следствием неселективного характера миграции энергии электронного возбуждения, подобного наблюдаемому в системе ионов Yb^{3+} в бариево-алюминатных фосфатных стеклах при температурах более 80 К [6].

Потеря селективности спектральной миграции энергии возбуждения по контуру неоднородно уширенной БФЛ кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ может быть связана с наличием характерных для всех КСУ близко расположенных нижних электронно-возбужденных состояний, которые в кристаллическом поле низкой симметрии претерпевают соответствующее расщепление, приводящее к появлению серии энергетических уровней, между которыми может осуществляться эффективное частотно-независимое взаимодействие [9]. Вероятно также, что взаимодействие близко расположенных нижних возбужденных состояний активных центров в локальном поле низкой (не выше C_{5v}) симметрии приводит к нарушению адиабатичности (взаимодействия типа Реннера-Теллера и спин-орбитального), а это обуславливает триплетную структуру линий резонансно возбуждаемой люминесценции и нарушение зеркальной симметрии спектров люминесценции и поглощения кристаллов $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$.

Таким образом, в кристаллах $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ имеет место взаимодействие близкорасположенных нижних возбужденных электронных состояний, что приводит к нарушению адиабатичности системы, проявляющейся при гелиевых температурах. В связи с этим контур спектральной полосы формируется при наличии неселективной спектральной миграции энергии электронного возбуждения, обусловленной рамановским рассеянием фононов кристалла.

Работа поддерживалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант Ф 97-186).

1. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения. Мн., 1981.
2. Sergienko V.I., Davidovich R.L., Kostin V.I., Matstutain A.A. // Spectrosc. Lett., 1871 Vol.4 P.19.
3. Бойков В.Н., Кулешов Н.В., Красовский А.Н. // Докл. АН СССР. 1983. Т.273 С.94.
4. Они же // ЖПС. 1986. Т.44. С.861.
5. Они же // Докл. АН БССР. 1987 Т.31 С.47.
6. Алимов О.К., Ашуров М.Х., Басиев Т.Т. и др. // Тр. ИОФАН 9. 1987. Т.50.
7. Gorller-Warland C., de Jaegere S. // Spectrochem. Acta 28A. 1972. P.257.
8. Flint C.L., Tanner P.A. // Mol. Phys. 1981. Vol.43 С.933.
9. Сытько В.В., Умрейко Д.С. // ЖПС 1998. Т.65. С.818.

Поступила в редакцию 14.04.99.

УДК 537.311

Ф.Ф.КОМАРОВ, А.В.ЛЕОНТЬЕВ, С.В.ГРАНЬКО, В.В.ГРИГОРЬЕВ, А.С.КАМЫШАН

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ПММА, ОБЛУЧЕННЫХ ЛЕГКИМИ ИОНАМИ

The results of investigation of the ion irradiation effect on the optical constant of PMMA films are presented. It is shown that ion implantation gives possibility to change locally the refraction index of thin organic films, and the approach based on molecular refraction allows to forecast values of n .

Важнейшими элементами современной интегральной оптики являются тонкопленочные и диффузионные диэлектрические микроволноводы, образующиеся за счет резкого или плавного изменения показателя преломления среды [1]. Перспективы развития интегральной оптики и оптоэлектроники во многом связаны с решением ряда материаловедческих проблем. Так, использование традиционных LiNbO_3 и InP для изготовления пассивных оптических устройств (делители, волноводы, частотные фильтры и т.д.) приводит к высокой стоимости последних [2]. Альтернативными материалами, как показали результаты недавних исследований [2,3], могут стать оптически прозрачные тонкие полимерные пленки, подвергнутые ионной бомбардировке с целью локального изменения коэффициента преломления. Однако при их использовании возникает ряд проблем. Во-первых, низкая термостойкость исследованных в этой связи материалов. Температура стеклования (T_g) наиболее изученного полимера полиметилметакрилата (ПММА) составляет примерно 100°C . Во-вторых, недостаточность надежных экспериментальных данных по изменению показателя преломления (n) и экстинкции (k) в зависимости от условий облучения [3,4]. Имеется также ряд проблем, связанных с изменением толщины пленки полимера в процессе ионного облучения, а также с оптимизацией условий бомбардировки для получения однородности оптических функций по всей глубине пленки [5].

Цель настоящей работы – исследование изменений оптических параметров (n, k) и динамики изменения толщины (Δd) тонких пленок ПММА, облученных легкими ионами.

Материал и методика

Пленки полиметилметакрилата $[C_5H_8O_2]_n$ синтезированы в лаборатории элионики НИИ ПФП им. А.Н.Севченко. Выбор данных материалов в качестве объектов исследования обусловлен, в первую очередь, их прозрачностью в видимой области, а также наличием некоторого числа экспериментальных данных по пленкам ПММА для контроля методик определения оптических функций. Кроме того, на базе ПММА предполагается синтезировать ряд полимеров, обладающих (по предварительным данным) более высокой T_g . Пленки названных полимеров наносились на очищенные подложки ИК-прозрачного кремния КДБ-10 методом центрифугирования. Толщина пленок находилась в пределах 0,5–1,0 мкм. Облучение полученных образцов ионами H_2^+ , N^+ и B^+ проводили на ускорителе на базе ЭГ-2. Измерение оптических параметров (n, k) и толщины имплантированных пленок выполнено с помощью компенсационного эллисометра ЛЭФ-3М ($\lambda = 0.6328$ мкм). Определенные данным методом значения коэффициента преломления исходных пленок ПММА составили $n_0 = 1,48$ (ПММА), что хорошо согласуется с имеющимися литературными данными. Образец для определения погрешности измерения толщины пленок представлял собой двухслойную систему $SiO_2(50,8 \text{ нм}) / Si$. Контрольный замер дал значение 50,9 нм для толщины слоя оксида. Спектры ИК-пропускания получены на спектрофотометре «Spectord-75 IR». Моделирование условий ионной бомбардировки проводили методом Монте-Карло (МК) с помощью модифицированной программы TRIM 85 [6].

Результаты и их обсуждение

Полученные значения изменения толщины Δd , показателя преломления n , а для случая облучения ионами азота и коэффициента экстинкции k приведены в таблице.

Значения изменения толщины Δd , показателя преломления (n) и экстинкции (k) пленок ПММА, облученных ионами бора и азота

$B^+(100 \text{ кэВ})$			$N^+(300 \text{ кэВ})$			
$D, \text{см}^2$	$\Delta d/d_0$	n	$D, \text{см}^2$	$\Delta d/d_0$	n	k
1×10^{12}	0,012	1,48	1×10^{12}	0,04	1,49	0
5×10^{12}	0,040	1,50	$6,7 \times 10^{12}$	0,06	1,50	0
1×10^{13}	0,090	1,51	1×10^{13}	0,116	1,525	0
5×10^{13}	0,179	1,53	$6,7 \times 10^{13}$	0,372	1,532	0
7×10^{13}	0,184	1,54	1×10^{14}	0,402	1,545	0,005
1×10^{14}	0,212	1,55	2×10^{14}	0,551	1,600	0,006
3×10^{14}	0,400	1,58	$6,7 \times 10^{14}$	0,614	1,700	0,08
5×10^{14}	0,536	1,64	1×10^{15}	0,613	1,710	0,08
7×10^{14}	0,560	1,68	–	–	–	–
1×10^{15}	0,596	1,76	–	–	–	–

Обсуждение полученных результатов начнем с методологических аспектов постановки и проведения эксперимента. При облучении органических материалов легкими ионами с энергией $E > 10$ кэВ/а.е.м. доминирующим механизмом потерь энергии является неупругое взаимодействие с электронами мишени. Обычно в экспериментах по ионно-лучевой модификации

оптических свойств полимеров [3, 4] энергия легких ионов достигает нескольких мэВ и даже при толщине пленок 1–5 мкм величина $[dE/dx]_e$ почти постоянна, что обеспечивает получение слоев с однородным по глубине значением коэффициента преломления. Однако такие эксперименты весьма дорогостоящие, а главное – не технологичны. Поэтому для целей практического применения данной технологии формирования пассивных элементов интегральной оптики мы использовали режимы ионной обработки, аналогичные принятым в твердотельной технологии [7]. Вследствие этого толщина пленки модифицируемого полимера должна выбираться, основываясь на результатах расчета профилей выделенной энергии и траекторных параметров внедряемых ионов. На рис. 1 приведены рассчитанные методом МК профили неупруго выделенной энергии при имплантации ионов $B^+(100 \text{ кэВ})$, $H_2^+(250 \text{ кэВ})$ и $N^+(300 \text{ кэВ})$ в ПММА. Видно, что наиболее однородное распределение потерь энергии по глубине имеет место при бомбардировке ПММА ионами $H_2^+(250 \text{ кэВ})$. В связи с этим толщина пленок ПММА при имплантации ионов $H_2^+(250 \text{ кэВ})$ составляла примерно 1 мкм. Толщина исходных пленок при бомбардировке ионами бора и азота находилась в пределах 0,7–0,8 мкм.

Результаты экспериментальных данных, представленных в таблице, наглядно демонстрируют ограниченность применения TRIM – алгоритма, в котором не учитывается изменение толщины пленки при облучении. Причем объяснить наблюдаемые величины Δd , исходя из механизма физического травления, невозможно. Рассчитанные с помощью программы TRIM95 значения парциальных коэффициентов распыления позволяют отнести за счет этого механизма не более 1% изменения толщины. Поэтому объяснение наблюдаемых значений Δd необходимо связывать с механизмом прямого радиационного травления полимеров [8], включающим их усадку и выход “фрагментов”.

Для объяснения увеличения коэффициента преломления пленок ПММА, подвергнутых ионному облучению, необходимо рассмотреть структурные преобразования в них и связать эти преобразования с изменением молекулярной рефракции. На рис. 2 представлены спектры ИК-пропускания пленок некоторых полимеров, содержащих в своем составе карбонильную группу $-C=O$. Видно, что при дозах облучения $D > 1 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$ отсутствует полоса поглощения, соответствующая колебаниям группы $-C=O$. Вместе с тем полосы поглощения, связанные со скелетными колебаниями $-C-C-$, сохраняются.

Особое значение имеют данные по кинетике изменения толщины пленок ПММА при ионном облучении (см. таблицу). Зависимость $\Delta h(D)$ состоит из трех участков. В области малых доз ($D < 5 \times 10^{13} \text{ см}^{-2}$) величина Δh линейно зависит от дозы облучения. В диапазоне $5 \times 10^{13} \text{ см}^{-2} < D < 5 \times 10^{14} \text{ см}^{-2}$ на-

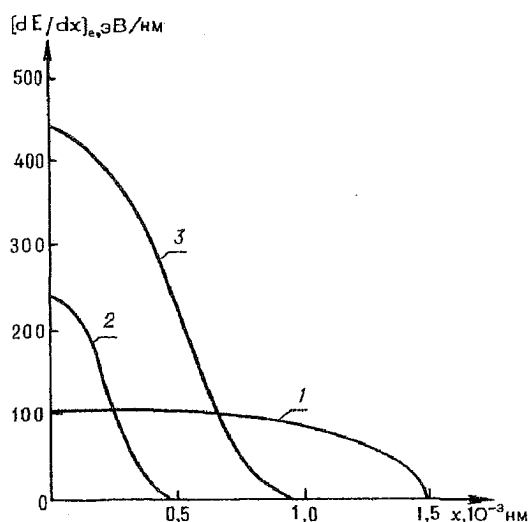


Рис. 1. Профили потерь энергии на ионизацию ионов H_2^+ (250 кэВ, $R_p = 1,37 \text{ мкм}$), B^+ (100 кэВ, $R_p = 0,17 \text{ мкм}$) и N^+ (300 кэВ, $R_p = 0,78 \text{ мкм}$) имплантированных в ПММА

блюдается резкое увеличение Δh . При $D > 1 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$ значения Δh слабо зависят от D . Такое поведение $\Delta h(D)$ находится в согласии с моделью прямого радиационного травления полимеров [8]. Расчет по формулам [8] показывает, что число атомов в уходящих фрагментах соответствует отрыву группы COOCH_3 , содержащей в составе $-\text{C}=\text{O}$. Тогда, основываясь на известных значениях молярной рефракции для различных химических связей и формуле Лоренца–Лоренца:

$$\frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 2)} = \delta \times R_{\text{mol}} / M,$$

$$R_{\text{mol}} = \sum_i R_{\text{bond}}^i,$$

где δ – плотность, M – молекулярный вес, R_{bond} – рефракции, соответствующие химическим связям, можно рассчитать значения коэффициента преломления согласно принятой схеме деструкции ПММА.

Расчет величины коэффициента преломления на основе принятой схемы деструкции дает величину $n_{\text{теор.}} = 1,65$, что близко к экспериментально определенному. Аналогичные зависимости $n(D)$ имеют место и при облучении пленок ПММА ионами H_2^+ . Естественно, что при одних и тех же дозах облучения изменение Δn меньше при бомбардировке протонами. Так, при $D = 1 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$ величина $n = 1,54$, что существенно

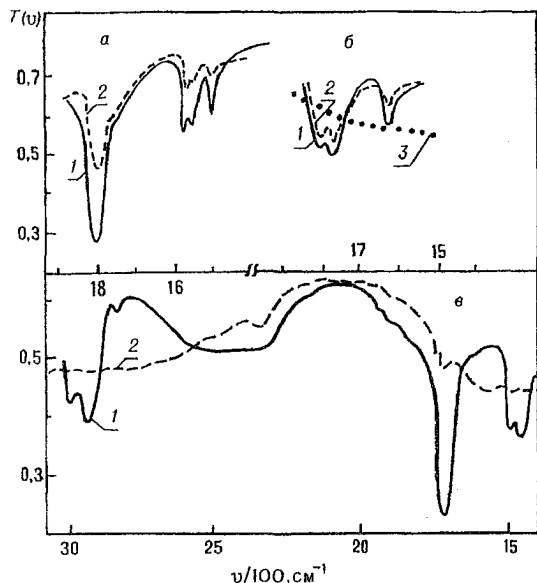


Рис.2. Спектры ИК-пропускания некоторых полимеров:

a – полимера хлорангидрида метакриловой кислоты ($\text{C}_4\text{H}_5\text{OCl}$): 1 – необлученный, 2 – облученный ионами B^+ (100 кэВ, $D = 1 \times 10^{14} \text{ см}^{-2}$); *b* – сополимера формилстирола со стиролом (ФСС): 1 – необлученный, 2 – облученный ионами B^+ (150 кэВ, $D = 5 \times 10^{13} \text{ см}^{-2}$), 3 – облученный ионами B^+ (150 кэВ, $D = 5 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$); *e* – фоторезиста $\alpha\text{-Br-PMMA}$: 1 – необлученный, 2 – облученный ионами H_2^+ (300 кэВ, $D = 7 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$).

меньше, чем при облучении ионами бора и азота.

Таким образом, ионная имплантация позволяет изменять коэффициент преломления полимеров, а подход, основанный на молекулярной рефракции, позволяет прогнозировать величину n .

Авторы благодарят Фонд фундаментальных исследований Республики Беларусь за частичную финансовую поддержку данных исследований.

1. Townsend P. D. // *Vacuum*. 1984. Vol.34. N.3-4. P.395.
2. Kulish J. R., Franke H., Roger A. et al. // *J. Appl. Phys.* 1988.63(8). P.2517.
3. Brunner S., Ruck D. M., Tinschert K. et al. // *Nucl. Inst.Meth.(B)*. 1996. Vol.107. P.333.
4. Biersack J. P., Schmoldt A., Fink D., Schiwietz G. // *Rad. Eff. Def. in Sol.* 1996. Vol.140. P.63.
5. Xu X. L., Yu Y., Lin Z. et al. / *Nucl. Inst. Meth.(B)*. 1991. Vol.59/60. P.1267.
6. Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Острцов Е.Ф., Туровец О. Л. // *Микроэлектроника*. 1992. Т.21. Вып.1. С.75.
7. Гранько С.В., Григорьев В.В., Камышан А.С. и др. // *Материалы П Межгосуд. научн.-техн. конф. «Квантовая электроника»*, Мн., 1998. С.158.
8. Махвиладзе Т.М., Пантелеев Е.Г., Сарычев М.Е. // *Мат. моделирование*. 1990. Т.2. №3. С.3.

Поступила в редакцию 15.04.99.

МОРФОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ ГЕРМАНИЯ, ОБЛУЧЕННЫХ ТЯЖЕЛЫМИ ИОНАМИ СРЕДНИХ ЭНЕРГИЙ

Ion-beam induced formation of amorphous surface layers in Ge-single crystals with strongly developed (cellular-like) morphology is investigated by using transmission electron microscopy, electron diffraction and profilometry. The implantation of heavy ions with average energy and dose was carried out at room temperature. The possible mechanisms of cellular structure formation are proposed and discussed.

В литературе сообщалось о наблюдении нового дефекта структуры, формирующегося в недрах аморфной фазы Ge, имплантированного сверх некоторой критической дозы тяжелыми ионами (Bi^+ , Pb^+) средних энергий [1,2]. Эта структура с радикально измененной приповерхностной морфологией приводит к аномальному разбуханию имплантированного слоя. Вынос и старение имплантированных структур на воздухе вызывает их быстрое насыщение примесями С и О и приводит к замедлению последующего отжига [2]. Первым признаком формирования подобных дефектов структуры, характерных только для кристаллов германия, было появление черноты имплантированной области. Это резко контрастирует как с низкодозной имплантацией в Ge, так и с имплантацией в Si, когда имплантированные области приобретают молочный оттенок.

Материал и методика

В настоящей работе приведены результаты структурных исследований кристаллов (111)-Ge и слоев эпитаксиального Ge, выращенного молекулярно-лучевой эпитаксией на пластинах (001)-Si с буферным слоем сплава $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ ($1 \geq x \geq 0$) толщиной 15 мкм, имплантированных ионами Ge^+ с энергией 400 кэВ дозами от 5×10^{15} ион/см² до $2,2 \times 10^{16}$ ион/см². Имплантированные слои исследовались с использованием просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), в том числе ПЭМ поперечных сечений (cross-section) и дифракции (ПЭД). Препарирование образцов проводили посредством последовательной механической шлифовки и полировки и финишного ионного травления при низкой температуре и скользящем падении пучка ($\sim 5-7^\circ$) относительно поверхности образца. Степень разбухания имплантированных кристаллов Ge изучалась путем измерения ступенек на их границе с неимплантированными областями при помощи профилометра ДЕКТЭК 3030.

Результаты и их обсуждение

Области, имплантированные ионами, приобретали черный цвет. В оптическом микроскопе эти области представлялись чередующимися участками, существенно отличающимися оттенками серого цвета. ПЭД-исследованиями было установлено, что имплантированные слои имеют аморфную структуру. С помощью Фурье-анализа [3] зависимостей углового распределения интенсивности когерентно-рассеянных электронов, полученных по ПЭД-картинам, были построены кривые радиального распределения атомной плотности (КРРАП). По положению и площади под первым пиком КРРАП были определены параметры структуры ближнего порядка (ПСБП) аморфных слоев: R_1 – среднестатистическое расстояние между ближайшими соседними атомами и N_1 – среднее число ближайших соседей. Было установлено, что во всех случаях ПСБП ($R_1=0,245$ нм и $N_1=3,98$) практически совпадали с таковыми для кристаллического Ge ($R_1=0,2449$ нм и $N_1=4$).

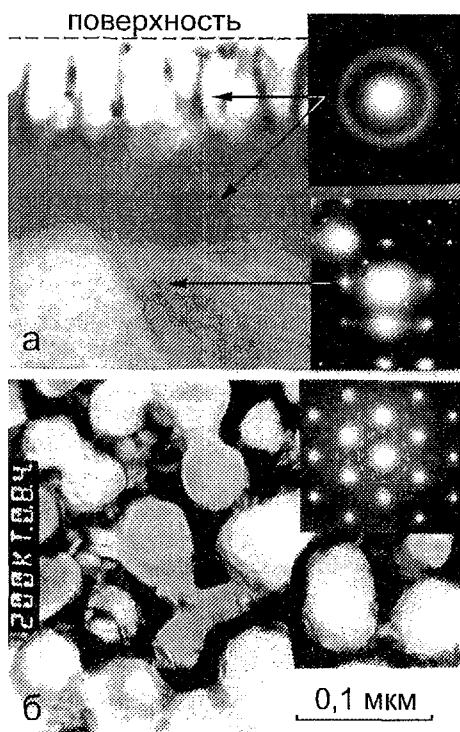


Рис.1. ПЭМ-изображения и картины дифракции от *а* – cross-section сотовой и сплошной частей имплантированного аморфного слоя и монокристаллической матрицы (111)-Ge (указаны стрелками); *б* – plan-view ПЭМ-изображения и картина дифракции от сотовой части имплантированного слоя после БТО

TRIDYN для Ge, аморфизованного ионной имплантацией, дает возможное максимальное значение падения плотности в имплантированном слое на 2.5%. Это должно было бы привести к появлению на границе облученной области ступеньки высотой не более 7.5 нм. Однако в нашем случае на границе черной области были зафиксированы ступеньки, значительно превышающие по величине глубину среднего просцированного пробега (R_p) ионов, рассчитанного с помощью программы TRIM-95. На рис.2 представлена профилограмма ступеньки на границе области (111)-Ge, облученной ионами Ge^+ с энергией 400 кэВ дозой 2.2×10^{16} ион/см².

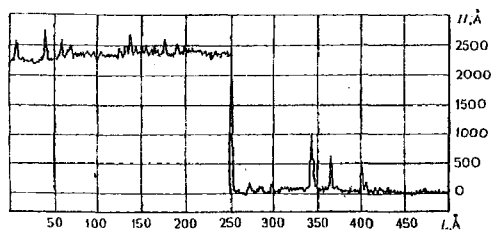


Рис.2 Профилограмма ступеньки на границе имплантированной области (111)-Ge

матрице. Как следует из анализа ПЭМ-изображений структуры в сочетании с ПЭД-анализом, рекристаллизованные сотовые слои содержат высокую плотность микродвойников, при этом форма и геометрические размеры ка-

На cross-section ПЭМ-изображений (рис.1а) наблюдается трехслойная структура, содержащая верхний аморфный слой толщиной 125 нм, пронизанный каналами диаметром 20–80 нм, промежуточный сплошной аморфный слой толщиной около 300 нм и монокристаллическую матрицу Ge. На plan-view ПЭМ-изображений от верхнего слоя видно, что каналы овальной формы образуют сотовую структуру с перегородками толщиной порядка 10 нм (аналогично рис.1б). Установлено, что с ростом дозы от 5×10^{15} ион/см² до 2.2×10^{16} ион/см² высота ступеньки увеличивается с 70 до 230 нм. При этом происходит рост толщины верхнего сотовообразного слоя, сопровождающийся удлинением каналов. Толщина же промежуточного сплошного аморфного слоя практически не меняется, оставаясь на уровне 300 нм, что приблизительно соответствует удвоенному значению глубины среднего просцированного пробега (R_p) ионов Ge^+ .

Известно, что в имплантированных слоях Si наблюдали разбухание матрицы, сопровождавшееся падением плотности на 1.8% [4]. Теоретический расчет с помощью программы

Исследованы закономерности рекристаллизации имплантированных Ge-слоев. В частности установлено, что быстрый термический отжиг (БТО) свежемплантированных образцов Ge при 620°C в течение 2–15 с приводил к рекристаллизации обоих аморфных слоев. Рекристаллизация как сплошного, так и сотовообразного аморфного слоя проходит эпитаксиально

налов не меняются (рис.1б). Формирование высокой плотности двойников свидетельствует о существовании большой концентрации барьеров для кристаллизации, каковыми могут быть развитая внешняя поверхность сотообразной структуры, а также адсорбированные атомы кислорода и углерода [2].

* * *

Анализ результатов исследования позволил предложить модель формирования радиационных дефектов в кристаллическом Ge при имплантации тяжелых примесей. В модели предполагается, что энергия, выделяющаяся при торможении ионов в ядерную подсистему, приводит к существенному ослаблению связей поверхностных атомов с подложкой, что, в свою очередь, облегчает условия их поверхностной миграции. Предполагается также, что формирование сотообразной структуры является следствием поверхностной миграции атомов из впадин к пикам. Как показали предварительные теоретические оценки, такое поверхностное состояние атомов Ge является энергетически выгодным. Ранее сообщалось, что при термическом напылении в вакууме на монокристаллы Ge наблюдали столбчатый рост пленок Ge [5]. По-видимому, в зарождении и эволюции сотообразной структуры заметную роль также играют процессы физического распыления с последующим поверхностным осаждением распыленных атомов.

Работа выполнялась при финансовом содействии Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант Ф98-003).

1. Appleton B.R., Holland O.W., Narayan J. et al. // Appl. Phys. Lett. 1982. Vol. 41. № 8. P. 711.

2. Holland O.W., Appleton B.R., Narayan J. // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. № 5. P. 2295.

3. Coleman M.V., Thomas D.J.D. // Phys. Stat. Sol. 1967. Vol. 24. № 2. P. K111.

4. Custer J.S., Thompson M., Jacobson D.C. et al. // Appl. Phys. Lett. 1994. Vol. 64. № 4. P. 437.

5. Nakhodkin N.G., Bardamid A.F., Novoselskaya A.I. // Thin Solid Films. 1984. Vol. 112. P. 267.

Поступила в редакцию 27.04.99.

УДК 621.391:537.86:539.182

А.В. СИДОРЕНКО

МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА БИОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ МОЗГА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ НЕРВНОЙ СИСТЕМЫ

An analysis of the bioelectric brain activity is carried out by the nonlinear dynamics method. This method may be used to differentiate the manifestations of excitation and retardation processes.

Традиционными методами для анализа биоэлектрической активности мозга являются статистические и спектральные методы [1,2]. Получаемая при этом информация носит интегральный характер и не всегда достаточна, чтобы идентифицировать функциональное состояние организма. Регистрируемые различные типы электроэнцефалограммы при изменении функционального состояния ЦНС (центральной нервной системы) содержат периодические и непериодические составляющие. Природа стохастичности электроэнцефалограммы заключается в сложнейшей структуре взаимодействия различных отделов нервной системы. Функционируя как единое целое,

мозг проявляет свои уникальные возможности, в частности в феномене хранения и извлечения информации.

Периодическая биоэлектрическая активность, согласно представлениям о фазово-частотном способе кодирования информации в мозге, играет определяющую роль. Для адекватного функционирования система должна обладать возможностью изменения уровня активности в сторону синхронизации и десинхронизации, которую можно рассматривать как состояние детерминированного хаоса.

Целью предлагаемой работы является выявление при помощи методов нелинейной динамики критериев для оценки функционального состояния центральной нервной системы.

Методы анализа

Спектральный корреляционный метод широко используется для обработки и анализа сигналов и достаточно подробно освещен в литературе [3]. Остановимся на одном из методов нелинейной динамики. В основу использования данных методов в физиологии положены представления о функциональных системах живого организма как открытых диссипативных динамических системах, далеких от состояния термодинамического равновесия. Их поведение описывается методами, развитыми для исследования детерминированного хаоса. Под детерминированным хаосом понимают нерегулярные колебания, порождаемые нелинейными процессами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию во времени состояния системы по известной предыстории. Теория детерминированного хаоса позволяет получить количественную меру степени упорядоченности случайно-подобных сигналов. Динамическому хаосу в фазовом пространстве системы соответствует притягивающее множество, называемое странным аттрактором.

Основным преимуществом методов нелинейной динамики является то, что фазовый портрет системы может быть восстановлен из измеренных параметров, зависящих от одной переменной [4]. Параметрами, характеризующими нелинейную динамическую систему, являются корреляционная размерность d и энтропия Колмогорова K . Корреляционная размерность d отражает степень сложности системы, т.е. определяет число независимых дифференциальных уравнений, необходимых для описания системы. Энтропия Колмогорова K характеризует устойчивость работы системы, измеряемую скоростью расхожимости ее траекторий в фазовом пространстве.

Для вычисления корреляционной размерности и энтропии Колмогорова может быть использован алгоритм Гроссбергера–Прокаччо [5].

Временная реализация электроэнцефалограммы (аналог для животных – электрокортикограмма) $x(t)$ представляется в виде последовательности чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

где $x_n = x(n\tau)$, τ – время выборки, n – целое число.

Эта последовательность порождает m -мерные векторы, лежащие в m -мерном фазовом пространстве

$$\mathbf{x}_i^T = (x_i, \dots, x_{i+m-1}),$$

где T – знак транспонирования.

Состояние системы в реконструированном m -размерном фазовом пространстве определяется m -размерными точками для каждой временной реализации $x(t)$.

Корреляционная размерность d определяется

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} [\lg C_m(r) / \lg r],$$

где $C_m(r)$ – корреляционный интеграл, r – размер ячейки разбиения.

Корреляционный интеграл записывается

$$C_m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta[r - |x_i - x_j|],$$

где θ – функция Хевисайда, N – число точек, используемых для оценки размерности.

Найдено, что для малых r поведение функции $C_m(r)$ может быть описано: $C_m(r) \approx r^d$, где d – параметр, близкий к фрактальной размерности странного аттрактора. Для достоверной оценки корреляционной размерности d размерность соответствующих псевдофазовых пространств должна удовлетворять условию Мане

$$m \geq 2d + 1.$$

Для оценки корреляционной размерности сигнала электрокортикограммами используется метод расчета, описанный в [6], который обеспечивает выигрыш во времени.

Энтропия Колмогорова K определяется выражением

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \lg[C_m(r) / C_{m+1}(r)].$$

Для открытых динамических систем энтропийные параметры целесообразно представлять в нормированном к энергии виде [7]. В нашей работе рассчитывается энтропия Колмогорова, нормированная на энергию в физиологически значимом диапазоне электрокортикограммы. В качестве нормирующей величины используется энергия в том частотном диапазоне ритмических составляющих мозга, в котором находится максимальная частота спектра.

Аппаратурное обеспечение и особенности проведения эксперимента

Экспериментальные исследования проводились на 30 белых крысах массой 160–180 г.

Функциональное состояние центральной нервной системы изменяли при воздействии:

- 1) электромагнитных излучений,
- 2) фармакологических средств.

Электромагнитное излучение миллиметрового диапазона оказывало влияние на состояние нервной системы различным образом. Введение уретана (1 г/кг, внутривенно), наркотизирующего вещества, вызывало состояние торможения [8]. Состояние возбуждения вызывалось введением стрихнина в сенсомоторную зону больших полушарий мозга. Для регистрации электрокортикограмм животным субдурально устанавливались позолоченные электроды в соматосенсорную зону коры больших полушарий. Измерения проводились в автоматизированной установке [9], расположенной в экранированной от внешних электромагнитных полей камере. Для облучения использовано низкоинтенсивное излучение миллиметрового диапазона (плотность потока мощности 150 мкВт/см²) от серийных генераторов Г4-141 или Г4-142. Облучение осуществлялось СВЧ полем линейной поляризации, ориентированном вдоль головы животного. Формирование электромагнитного поля проводилось рупорной антенной с коэффициентом направленного действия 22 дБ и шириной диаграммы направленности 17° и

21° в плоскости магнитной и электрической составляющей поля. Усиление сигналов электрической активности мозга происходило в усилителе биоэлектрических сигналов УБФ4-03. Для автоматизации измерений использовался разработанный модуль преобразования сигналов. Обработка усиленных биоэлектрических сигналов осуществлялась компьютером типа РС АТ 486. Частота дискретизации составляла 800 Гц, длительность реализации – 12 с. Регистрация выбранных реализаций проводилась в режиме контроля и при воздействии миллиметрового излучения или введения фармакологических средств через определенные временные интервалы. Разработанное программное обеспечение позволяло осуществлять ввод экспериментальных данных в компьютер, проведение цифровой обработки сигналов, анализ электрокортикограмм на основе рассчитанных информационных параметров.

Из экспериментальных электрокортикограмм вычислялись корреляционная размерность d и нормированная энтропия Колмогорова E . Спектральная плотность мощности электрокортикограмм рассчитывалась согласно [3] при помощи преобразования Фурье. Спектральная плотность мощности электрокортикограмм S_n/S_0 оценивалась в частотном диапазоне ритмических составляющих мозга: δ – (0,5–4) Гц, θ – (4–8) Гц, α – (8–12) Гц, β – (12–30) Гц, где n соответственно изменялось от 1 до 4. S_0 представляет собой спектральную плотность мощности в диапазоне частот от 0,5 до 30 Гц. Для каждой реализации оценивалась максимальная частота спектра мощности f_m . При определении параметров методом наименьших квадратов рассчитывались среднеквадратичные отклонения теоретических аппроксимаций от экспериментальных данных.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1, представляющим действие уретана на биоэлектрическую активность мозга, видны характерные изменения, свойственные переходу от бодрствующего состояния к наркотическому сну, что выражается в появлении медленных волн большой амплитуды. Спектральный корреляционный анализ показывает существенные изменения в уровне спектральной плотности мощности отдельных частотных составляющих ЭКоГ (таблица).

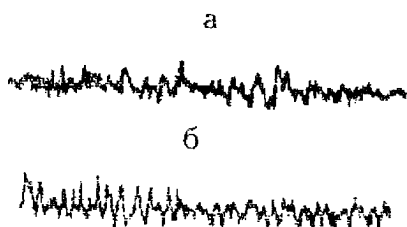


Рис. 1. Электрокортикограммы крысы: а – в контроле, б – при изменении функционального состояния (при действии наркоза)

Происходит значительное снижение вклада β - и α -ритмов и возрастание δ - и θ -ритмов в суммарную биоэлектрическую активность мозга. Через 10 мин после введения наркоза более чем в четыре раза снижается максимальная частота ЭКоГ f_m . Эти типичные изменения ЭКоГ отмечаются и другими авторами при действии наркоза [8].

При проведении анализа биоэлектрической активности мозга с использованием метода нелинейной динамики удалось выявить дополнительные важные изменения в ЭКоГ. Из таблицы видно, что при действии наркоза происходит снижение коэффициента корреляционной размерности. Так, через 10 мин после введения уретана коэффициент d уменьшился с $2,512 \pm 0,011$ до $2,448 \pm 0,010$, а нормированное значение E снизилось на 21,5 %. Эти сведения указывают на то, что в условиях наркоза, когда в мозгу преобладают процессы торможения, его способность переходить в новое функциональное состояние снижается, т.е. можно говорить о снижении числа степеней свободы ЦНС.

Изменения параметров электрокортикограммы крысы при введении наркоза

Время наблюдения, мин	S_1/S_0	S_2/S_0	S_3/S_0	S_4/S_0	f_m , Гц	d	$E \cdot 10^{-2}$
Бодрствование							
Контроль	$0,209 \pm 0,010$	$0,221 \pm 0,008$	$0,061 \pm 0,005$	$0,341 \pm 0,007$	$6,22 \pm 0,04$	$2,512 \pm 0,011$	$2,179 \pm 0,01$
Наркоз							
5	$0,676 \pm 0,008$	$0,199 \pm 0,01$	$0,045 \pm 0,007$	$0,054 \pm 0,01$	$2,62 \pm 0,03$	$2,489 \pm 0,012$	$1,852 \pm 0,012$
10	$0,817 \pm 0,01$	$0,094 \pm 0,005$	$0,027 \pm 0,006$	$0,024 \pm 0,010$	$1,31 \pm 0,03$	$2,448 \pm 0,010$	$1,712 \pm 0,009$
15	$0,813 \pm 0,008$	$0,096 \pm 0,005$	$0,048 \pm 0,007$	$0,024 \pm 0,008$	$1,21 \pm 0,03$	$2,437 \pm 0,012$	$1,126 \pm 0,012$

Проведенные эксперименты показали, что активизирующие работу мозга воздействия (микроволновое излучение, стрихнин) вызывают изменения показателей ЭКОГ, рассчитанных методом нелинейной динамики в противоположном направлении (рис.2,3).

Так, если наркотизированных крыс подвергнуть облучению миллиметровым излучением, происходит возрастание параметра корреляционной размерности, причем более эффективное действие излучения наблюдается на десятой минуте облучения. Максимальное значение корреляционной размерности d и нормированного значения энтропии Колмогорова E устанавливаются через час после начала воздействия. Это свидетельствует о повышении реактивности ЦНС.

Еще более выраженные изменения наблюдаются в смещении спектральных характеристик и показателей нелинейной динамики при действии на мозг стрихнина (см. рис.2,3). Функциональное состояние при этом характеризуется повышением динамичности нервной системы с максимумом действия на пятой минуте после введения стрихнина. В этом же состоянии усиливаются высокочастотные составляющие спектра ЭКОГ, мощность β -ритмов по сравнению с контролем возрастает на 45–54%.

К десятой минуте при сочетании действия наркоза и стрихнина происходит смещение максимальной частоты спектра в область низких частот. Поведение нормированного значения энтропии Колмогорова E аналогично корреляционной размерности, т.е. она максимальна в состоянии, определяемом максимальным значением корреляционной размерности.

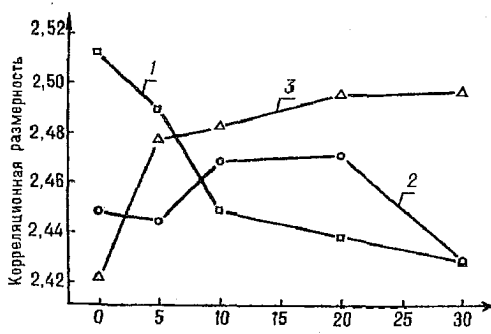


Рис.2. Изменения корреляционной размерности электрокортикограммы крысы при: 1 – действию наркоза; 2 – наркоза+миллиметрового излучения; 3 – наркоза + стрихнина

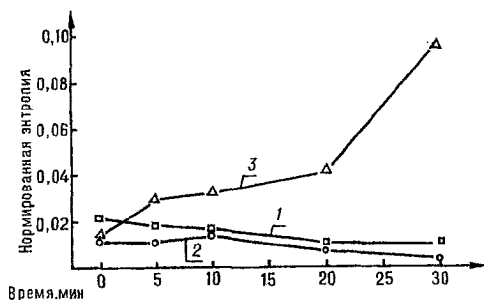


Рис.3. Изменения нормированной энтропии Колмогорова электрокортикограммы крысы при: 1 – действию наркоза; 2 – наркоза+миллиметрового излучения; 3 – наркоза+стрихнина

Анализ биоэлектрической активности мозга с использованием метода нелинейной динамики позволяет получить дополнительные сведения о функциональном состоянии ЦНС. Такие параметры, как корреляционная размерность и нормированная энтропии Колмогорова, могут быть использованы в качестве критерия для характеристики сложных режимов функционирования автоволновых биологических систем, в частности для дифференциации выраженности процессов возбуждения и торможения в мозге. Возможно, указанные параметры следует использовать для оценки функциональной динамичности ЦНС.

1. Павлова Л. П. Системный подход к психофизиологическому исследованию мозга человека. Л., 1988.
2. Зенков Л. Р. // Журн. нейропатологии и фтизиатрии. 1990. №90. С.48.
3. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., 1990.
4. Takens F. Detecting strange attractions in turbulence / Eds. D.A.Rand. Berlin., 1981. P.366.
5. Grassberger P., Procaccia. I. //Physical Review Letters. 1983. Vol.50. №5.P.346.
6. Сидоренко А. В., Царюк В. В., Ходасевич А. И и др. // Современные методы обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления. Мн., 1995. Ч.1. С.168.
7. Анищенко В. С. // Радиотехника и электроника. 1992. Т.37. №3. С.167.
8. Холодов Ю. А., Лебедева Н. Н. Реакции нервной системы человека на электромагнитные поля. М., 1992.
9. Сидоренко А. В. //Зарубежная радиоэлектроника. 1996. № 12. С. 57.

Поступила в редакцию 02.03.99.

УДК 537.87

С.В.МАЛЬИЙ, П.Д.КУХАРЧИК

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ МИНИМАЛЬНЫХ АВТОНОМНЫХ БЛОКОВ

A new calculation technique of the effective electrodynamic parameters of composite materials representing a dielectric matrix with dispersed arbitrary particles is offered. The procedure is based on the method of minimal autonomous blocks. The calculation of dielectric permeability of the composite material with two-layer spherical particles has been performed.

Композиционные материалы, представляющие собой диэлектрические матрицы с диспергированными в них частицами, имеют широкое применение в различных областях техники. Электродинамические свойства композиционных материалов находятся в сложной многопараметрической зависимости от их внутренней структуры и радиофизических свойств входящих в них компонентов.

Если структурные неоднородности распределены по объему композиционного материала периодически или статистически равномерно, а характеристические размеры неоднородностей $a \ll \lambda$, где λ – длина волны в среде, то радиофизические свойства композита могут быть описаны усредненными макроскопическими материальными параметрами – эффективными диэлектрической ϵ_{eff} и магнитной μ_{eff} проницаемостями. Значения эффективных электродинамических параметров композиционных материалов определяются по данным натурного или вычислительного эксперимента в результате решения соответствующей обратной задачи.

В настоящее время известны различные по точности, универсальности и эффективности аналитические и численные модели взаимодействия элек-

ромагнитного излучения с композиционными и структурно неоднородными материалами, а также методики расчета их эффективных электродинамических параметров [1–4].

Рассмотрим новую методику определения эффективных электродинамических параметров композиционных материалов, базирующуюся на методе минимальных автономных блоков.

В качестве модели композиционного материала рассмотрим однородную диэлектрическую матрицу, в которой периодически распределены произвольные по форме, внутренней структуре и материальным параметрам частицы.

Под эффективными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей понимают соответствующие параметры для однородного материала, макроскопические электродинамические свойства которого совпадают со свойствами композиционного материала при совпадении режимов облучения и макроскопических конструктивных параметров.

Простейшей модельной задачей является взаимодействие плоской линейно поляризованной волны с плоскопараллельным слоем композиционного материала, расположенного в свободном и изотропном пространстве. Пусть толщина слоя равна d , а направление распространения волны нормально к поверхности слоя. Макроскопические электродинамические свойства указанного слоя характеризуются по отношению к падающей на него плоской волне матрицей рассеяния $S_{\text{сп}}$. Если элементы матрицы рассеяния слоя известны, то значения эффективной диэлектрической ϵ_{eff} и магнитной μ_{eff} проницаемостей могут быть получены следующим образом [5,6]:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \quad \mu_{\text{eff}} = \sqrt{C_1 C_2}; \quad (1)$$

где $C_1 = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2$, $C_2 = -\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \ln \frac{1}{\tau}\right)^2$, ρ и τ в этих выражениях связаны с элементами матрицы рассеяния S_{11} и S_{21} соотношениями:

$$\rho = X \pm \sqrt{X^2 - 1}, |\rho| \leq 1; \quad (2)$$

$$\tau = (V_1 - \rho)/(1 - V_1 \rho); \quad (3)$$

$$x = \frac{1 - V_1 V_2}{V_1 - V_2}, \quad V_1 = S_{21} + S_{11}; \quad V_2 = S_{21} - S_{11}. \quad (4)$$

Таким образом, задача определения эффективных электродинамических параметров сводится к нахождению элементов матрицы рассеяния плоского слоя композиционного материала. Для этого воспользуемся методикой, базирующейся на методе минимальных автономных блоков [7].

Рассмотрим основные положения этой методики на примере композиционного материала, представляющего собой однородную диэлектрическую матрицу, в которой диспергированы однородные сферические частицы в узлах объемной прямоугольной периодической сетки с периодами $d_{x,y,z}$. Фрагмент сечения материала в плоскости XOZ представлен на рис. 1а. Учет периодичности позволяет перейти к электродинамически эквивалентной задаче дифракции на неоднородности, расположенной в пространственном волноводе, как показано на рис. 1б. Область пространственного волновода, содержащую неоднородность, разобьем на систему прямоугольных параллелепипедов. Процесс дискретизации называется декомпозицией, результатом которой является декомпозиционная схема, представленная на рис. 1в. Отдельные параллелепипеды, минимальные автономные блоки (МАОБ) подключены к шести виртуальным волноводам. Электродинамические свойства

ва МАБ описываются матрицей рассеяния по отношению к волнам, распространяющимся в виртуальных полубесконечных волноводах, подключенных к граням МАБ. С учетом двухмодовости виртуальных волноводов матрица рассеяния МАБ имеет двенадцатый порядок и для кубического блока – следующую структуру [7]:

$$S_{\text{МАБ}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \beta & \delta & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & \beta & -\delta & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \gamma & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & \delta \\ \beta & \beta & \alpha & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta \\ \delta & -\delta & 0 & 0 & \gamma & \alpha & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 \\ -\delta & \delta & 0 & 0 & \alpha & \gamma & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & \alpha & -\delta & \delta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \gamma & \delta & -\delta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & -\delta & \delta & \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & \delta & -\delta & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \delta & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & \gamma & \alpha \\ 0 & 0 & \delta & \delta & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (5)$$

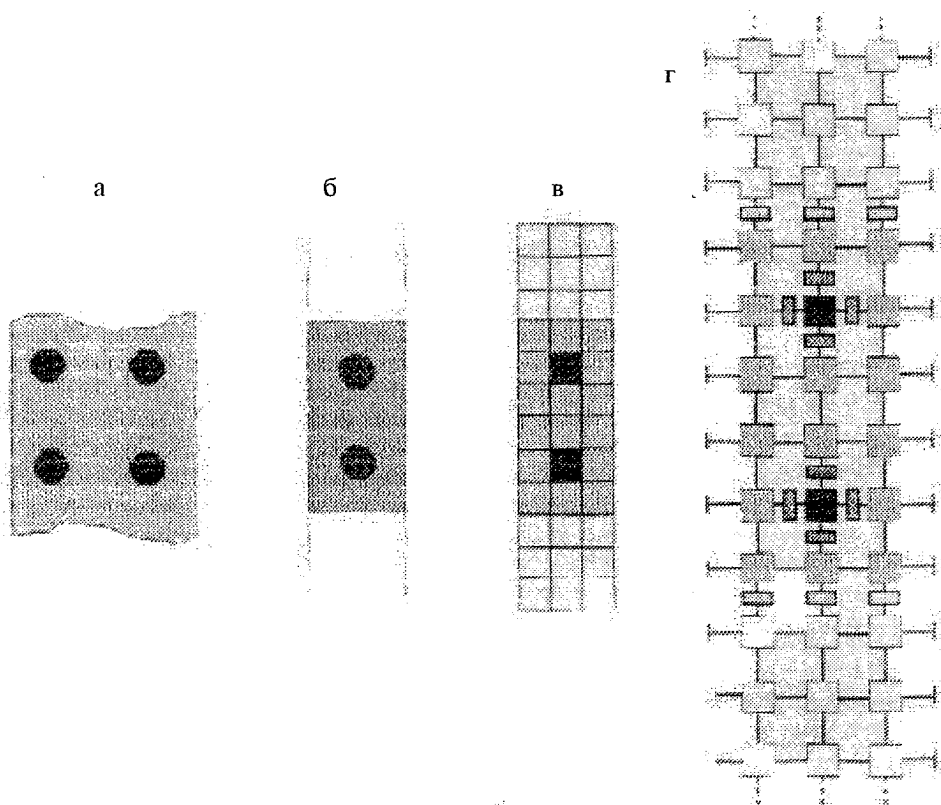


Рис. 1 Порядок построения декомпозиционной схемы в рамках метода МАБ:
 а – фрагмент исследуемого материала; б – эквивалентный пространственный волновод;
 в – дискретизация пространственного волновода; г – декомпозиционная схема

Элементы матрицы рассеяния МАБ зависят от размеров блоков $\Delta_{x,y,z}$, материальных параметров среды в них и длины волны. Выражения для матричных элементов $S_{\text{МАБ}}$ при произвольных размерах блоков приведены в [7]. В частном случае кубического МАБ, для которого $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$, формулы расчета матричных элементов упрощаются и имеют вид:

$$\alpha_i = \frac{J^2 - 1}{J^2 - T}, \quad \beta_i = \delta_i = -i \frac{J^2 k \Delta}{2(J^2 - T)}, \quad \gamma_i = 0. \quad (6)$$

где $T = e^{ik\Delta}$; $I = \frac{2}{k\Delta} \sin \frac{k\Delta}{2}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число в среде, заполняющей МАБ.

Для корректного учета граничных условий в декомпозиционную схему вводятся специальные блоки перехода, как показано на рис. 1г. Электродинамические свойства этих блоков описываются матрицей рассеяния вида [7]:

$$S_n = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \tau_1 \\ \tau_2 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad (7)$$

с элементами

$$\rho = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}, \quad \tau_1 = \frac{2W_1}{W_2 + W_1}, \quad \tau_2 = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}, \quad (8)$$

где W_1 и W_2 – волновые сопротивления граничащих сред, связанные с материальными параметрами сред, заполняющих блоки, соотношениями:

$$W_{1,2} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\epsilon_{1,2}}}. \quad (9)$$

Блоки контакта с границей имеют выход на один виртуальный волновод и описываются матрицей рассеяния

$$S_b = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (10)$$

где $r = -1$ для идеально проводящей стенки и $r = 1$ для идеальной магнитной стенки. Конечная проводимость металла может быть учтена путем использования в матрице рассеяния коэффициента отражения r вида:

$$r = \frac{(1+i)\sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{2\sigma}} - 1}{(1+i)\sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{2\sigma}} + 1}, \quad (11)$$

где ω – частота; σ – проводимость металла.

Каналы в декомпозиционной схеме могут быть разделены на две группы: внутренние и внешние. К внешним относятся каналы, соответствующие граням МАБ, выходящим на границы декомпозиционной области $\Sigma_{1,2}$. Остальные каналы относятся к категории внутренних и объединяют общие грани соседних МАБ. В каждом из внутренних каналов волны, падающие относительно одного МАБ, являются отраженными относительно другого. Это позволяет провести объединение всех МАБ в декомпозиционной схеме по общим внутренним каналам. В ходе объединения используются матрицы рассеяния отдельных МАБ, а также матрицы рассеяния блоков перехода и блоков контакта с границей. Этот процесс носит название рекомпозиции и

может быть реализован в рамках методики определения матрицы рассеяния объекта по матрицам рассеяния входящих в него компонентов [7].

В основе процесса рекомпозиции лежит объединение двух многополюсников, имеющих общие каналы. Приведем алгоритм определения матрицы рассеяния объединенного многополюсника по известным матрицам для объединяемых многополюсников. Пусть многополюсники A и B имеют соответственно M_1 и M_2 каналов, среди которых L каналов являются общими. Свойства многополюсников описываются матрицами рассеяния S^A и S^B . Преобразуем матрицы $S^{A,B}$ путем перестановки строк и столбцов так, чтобы общие каналы обоих многополюсников были пронумерованы последними, и представим $S^{A,B}$ в виде

$$S^A = \begin{pmatrix} S_{11}^A & S_{12}^A \\ S_{21}^A & S_{22}^A \end{pmatrix}, S^B = \begin{pmatrix} S_{11}^B & S_{12}^B \\ S_{21}^B & S_{22}^B \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где подматрицы $S_{11}^{A,B}, S_{12}^{A,B}, S_{21}^{A,B}, S_{22}^{A,B}$ имеют соответственно порядки $(M_{1,2} - L) \times (M_{1,2} - L), (M_{1,2} - L) \times L, L \times (M_{1,2} - L), L \times L$. Тогда матрица рассеяния объединенного многополюсника S^{AB} будет иметь порядок $M_1 + M_2 - 2L$. Подматрицы $S_{11}^{AB}, S_{12}^{AB}, S_{21}^{AB}, S_{22}^{AB}$ имеют соответственно порядки $(M_1 - L) \times (M_1 - L), (M_2 - L) \times (M_1 - L), (M_1 - L) \times (M_2 - L), (M_2 - L) \times (M_2 - L)$ и могут быть рассчитаны по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S_{11}^{AB} &= S_{11}^A + S_{12}^A (I - S_{22}^B S_{22}^A)^{-1} S_{22}^B S_{21}^A, \\ S_{12}^{AB} &= S_{12}^A (I - S_{22}^B S_{22}^A)^{-1} S_{21}^B, \\ S_{21}^{AB} &= S_{12}^B (I - S_{22}^A S_{22}^B)^{-1} S_{21}^A, \\ S_{22}^{AB} &= S_{11}^B + S_{12}^B (I - S_{22}^A S_{22}^B)^{-1} S_{22}^A S_{21}^B. \end{aligned} \quad (13)$$

Конечным результатом полной рекомпозиции является многоканальная матрица рассеяния S_{MK} по отношению к свободным каналам, выходящим на плоскости $\Sigma_{1,2}$. Матрица S_{MK} описывает электродинамические свойства системы относительно волн, распространяющихся в виртуальных каналах. Для такого описания вводится падающий c^+ и отраженный c^- векторы, имеющие следующую блочную структуру:

$$c^+ = \begin{pmatrix} c_{11}^+ \\ c_{12}^+ \\ c_{21}^+ \\ c_{22}^+ \end{pmatrix}, c^- = \begin{pmatrix} c_{11}^- \\ c_{12}^- \\ c_{21}^- \\ c_{22}^- \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Первый индекс в (15) соответствует номеру границы декомпозиционной области $\Sigma_{1,2}$, второй номер – поляризационному индексу. Подвекторы $c_{ij}^\pm$ – наборы комплексных чисел $c_{ij}^\pm(s, l)$, где $s, l = 1, 2, \dots, N_x, N_y$ – число МАБ по координатам x и y соответственно. Вектор c^+ задан, в нашем случае $c_{11}^+ = 1, c_{12}^+ = c_{21}^+ = c_{22}^+ = 0$. Вектор c^- выражается равенством

$$c^- = S_{MK} c^+ \quad (15)$$

и дает решение рассматриваемой задачи в МАБ-представлении.

Таким образом, элементы матрицы рассеяния слоя композита S_{11} и S_{21} выражаются через c^- следующим образом:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_s \sum_l \begin{pmatrix} c_{11}^-(s, l) \\ c_{21}^-(s, l) \end{pmatrix} \Delta_{xs} \Delta_{yl}, \quad (16)$$

где Δ_{xs}, Δ_{yl} – размеры МАБ с номерами (s, l) .

Таким образом, эффективные электродинамические характеристики композиционного материала могут быть рассчитаны по формулам (1–6) с учетом найденных элементов матрицы рассеяния слоя.

В качестве примера использования разработанной методики рассмотрим композиционный материал, представляющий собой однородную диэлектрическую матрицу, в которой периодически диспергированы двухслойные частицы кубической формы. Периоды объемной решетки по трем пространственным координатам равны $d_x = d_y = d_z = 14$ мкм. Внешний размер частицы и толщина оболочки соответственно равны 10 мкм и 2 мкм. В качестве диэлектрической матрицы выбран тефлон с $\epsilon = 2,2$, $\tan \delta = 10^{-3}$. Оболочка частицы выполнена из

титана с проводимостью $\sigma = 2,38 \cdot 10^6$ 1/(Ом·м). Внутренняя область частицы характеризуется параметрами $\epsilon = \mu = 1$, что соответствует свободному пространству. Декомпозиция осуществлялась на систему кубических МАБ с размером грани $d = 2$ мкм. Результаты расчетов представлены на рис.2 в виде зависимостей действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от длины волны. Штриховые линии соответствуют результатам, полученным по разработанной методике, а сплошные – по формулам, приведенным в [4] и предназначенным для расчета эффективных электродинамических параметров композиционных материалов из двухслойных сферических частиц.

Сравнительный анализ результатов показывает, что они качественно и количественно близки даже при некотором различии формы частиц. Следует ожидать, что при более точной аппроксимации геометрии частиц степень совпадения результатов увеличится.

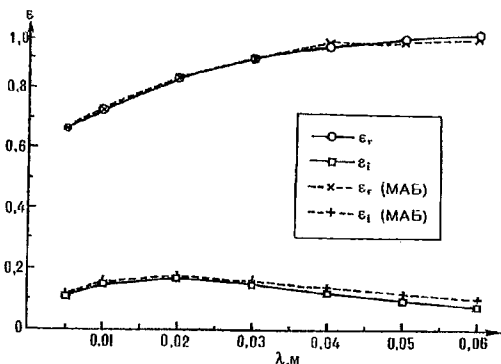


Рис.2. Зависимость действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от длины волны для композита в виде диэлектрической матрицы, в которой диспергированы двухслойные кубические частицы

1. Петров Ю. И. Физика малых частиц. М., 1982.
2. Ковнеристый Ю.К., Лазарева И.Ю., Раваев А.А. Материалы, поглощающие СВЧ-излучение. М., 1982.
3. Левин Л. Теория волноводов. М., 1981.
4. Галстян Е.А., Раваев А.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. XXX. №10. С.1243.
5. Nicolson A.M., Ross G.F. // IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement. 1970. Vol. IM-19. №4. P.377.
6. Freeman M.S., Nottenburg R.N., Dubow J.B. // J.Phys. E: Sci. Instrum. 1979. Vol.12. P.899.
7. Никольский В.В., Т.И. Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М., 1983.

Поступила в редакцию 22.04.99.

МЕТОД РАСЧЕТА РЕАКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

A new method of calculation of the reaction of linea dissipative system to the arbitrary periodical and non-periodical influence based on the representation of the reaction in a closed form has been offered. A wide range of applications can be found for this method.

Важным этапом проектирования радиоэлектронных систем является выработка требований к частотным характеристикам их функциональных звеньев, которая осуществляется математическим моделированием линейных искажений. Его проводят с использованием (не)периодических воздействий. При этом в случае периодических сигналов реакцию системы целесообразно представлять в замкнутом виде. Это упрощает вычислительную процедуру, устраняет свойственные применению тригонометрического ряда проблемы улучшения сходимости и оценки точности, повышает наглядность результата [1].

Известны методы представления в замкнутом виде реакции линейной системы на периодическое воздействие [2–4]. Они отличаются сложностью, громоздкими преобразованиями, значительными даже для простейших воздействий и невысоких порядков дифференциального уравнения (передаточной функции), плохим согласованием с используемым описанием свойств систем, поэтому практически не применяются.

Цель работы – создание удобного для практического использования метода расчета, основанного на представлении реакции в замкнутом виде.

Решение задачи. Для расширения возможностей моделирования свойства системы целесообразно описывать операторной передаточной функцией в виде [1]:

$$K(p)=G(p)/(cV(p)), \quad (1)$$

где $G(p)$ – многочлен степени g с действительными коэффициентами;

$$V(p)=p^w+c_1p^{w-1}+\dots+c_w=\prod_{s=1}^r(p+a_s)\prod_{l=1}^q(p^2+2a_l p+a_l^2+\omega_l^2) - \text{многочлен}$$

Гурвица степени w , содержащий r простых действительных и q пар простых комплексно-сопряженных корней; c – нормирующий множитель; $g \leq w$;

$a_{s(l)} > 0$; $\omega_l > 0$. Модель (1) описывает (не)минимально-фазовые системы с произвольными амплитудно- и фазочастотными характеристиками. Нормированность переменной p позволяет использовать справочную литературу, где табулированы нули многочленов $G(p)$ и $V(p)$ типовых фильтров.

Для решения задачи доказаны следующие теорема и следствие из нее.

Теорема. Если на интервале $[0, T]$ действительная функция $\xi(t)$ имеет все производные и $|\xi^{(u)}(t)| \leq ML^{u+1}$ ($u = 0, 1, 2, \dots$), то при любом $t_v \in [0, T]$ преобразование $\bar{\xi}_v(p) = \int_0^{t_v} \xi(t)e^{-pt} dt$ представляется в виде $\bar{\xi}_v(p) = F_{v1}(p)e^{-pt_v} - F_{v0}(p)$, где функции комплексного переменного $F_{v1}(p)$ и $F_{v0}(p)$ аналитичны в области $|p| > L$ и стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$.

Следствие. Если $F_{v0}(p)$ – дробно-рациональная функция, то функция $F_{v1}(p)$ тоже дробно-рациональна, и многочлен ее знаменателя совпадает с многочленом знаменателя функции $F_{v0}(p)$.

Введем действительную функцию $\varphi(t)$, определяемую на интервале $[0, \infty)$ и удовлетворяющую на интервале $[0, T]$ условиям доказанной теоремы, а также функции (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{iT}(t) &= \begin{cases} \varphi(t), [(i-1)(i-2)t_1/2, t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1)) \\ 0, (-\infty, (i-1)(i-2)t_1/2, [t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1), \infty) \end{cases} \\ \varphi_i(t) &= \begin{cases} \varphi_{iT}(t), [0, T) \\ \varphi_i(t+T), (-\infty, \infty) \end{cases}, \alpha_h(t) = \begin{cases} \varphi(t), [ht_1, \infty) \\ 0, (-\infty, ht_1) \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $0 \leq t_1 < t_2 < T$; $i = 0, 1, 2$; $h = 0, 1$.

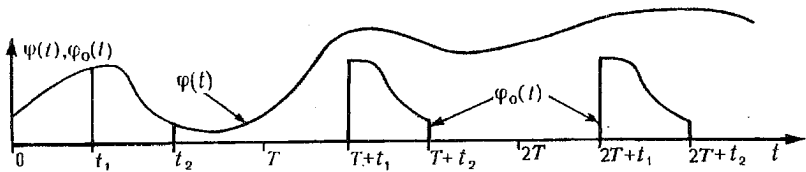


Рис. 1. Воздействия $\varphi(t)$, $\varphi_0(t)$

Найдем реакцию системы, описываемой (1), на периодическое воздействие $\varphi_0(t)$. Для этого вначале рассмотрим воздействие $\varphi_1(t)$ (см. (2), рис. 1). Реакция на него определяется выражением [5]

$$\psi_1(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{\overline{\varphi_{1T}}(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{pt} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} \frac{\overline{\varphi_{1T}}(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{pt} dp, \quad (3)$$

где $\overline{\varphi_{1T}}(p) = \int_0^{t_1} \varphi(t) e^{-pt} dt$; контур интегрирования охватывает особые точки на мнимой оси комплексной плоскости (рис. 2а).

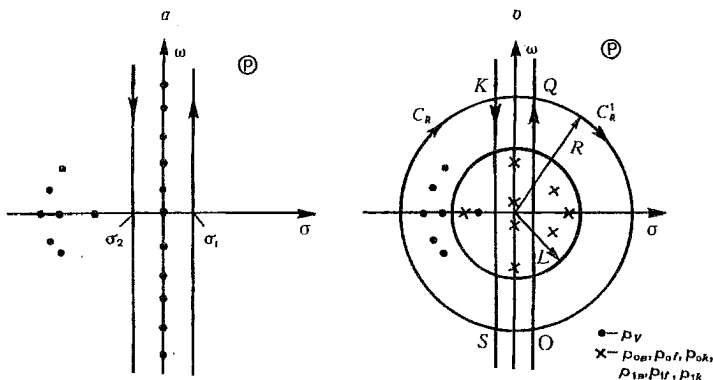


Рис. 2. Расположение контуров интегрирования

Функция $\overline{\varphi_{1T}}(p)$ аналитична во всей открытой p -плоскости. Внутри контура интегрирования расположено бесконечное число полюсов — корней уравнения $1 - e^{-pT} = 0$. Поэтому стандартный подход вычисления (3) (теорема Коши о вычетах) приводит к реакции в форме ряда Фурье [5].

В соответствии с доказанной теоремой представим:

$$\overline{\varphi_{1T}}(p) = F_1(p) e^{-pt_1} - F_0(p). \quad (4)$$

Обозначим: p_v – полюсы функции $K(p)$; $p_{0b}(p_{1b})$, $p_{0f}(p_{1f})$, $p_{0k}(p_{1k})$ – особые точки (полюсы, существенно особые) функции $F_0(p)$ ($F_1(p)$), расположенные соответственно на действительной, мнимой осях и вне осей комплексной плоскости (особую точку $p = 0$ относим к $p_{0f}(p_{1f})$); p'_{1b} , p'_{1f} , p'_{1k} – те из точек p_{1b} , p_{1f} , p_{1k} , которые не совпадают с точками p_{0b} , p_{0f} , p_{0k} . Для упрощения считаем, что все полюсы p_v не совпадают с особыми точками функций $F_0(p)$ и $F_1(p)$. Возьмем в (3) такие σ_1 и σ_2 , чтобы точки p_{0b} , p_{1b} , p_{0k} , p_{1k} лежали: в правой полуплоскости правее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_1$, в левой – левее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_2$ (рис.2б). Это всегда можно сделать при изолированных особых точках.

С учетом изложенного и (4) преобразуем выражение (3):

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} F_1(p) K(p) e^{p(t-t_1)} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 - jR}^{\sigma_2 + jR} F_1(p) K(p) e^{p(t-t_1)} dp + \\ & + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{F_1(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 - jR}^{\sigma_2 + jR} \frac{F_1(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp - \\ & - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} F_0(p) K(p) e^{pt} dp - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 - jR}^{\sigma_2 + jR} F_0(p) K(p) e^{pt} dp - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \times \\ & \times \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{F_0(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-T)} dp - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 - jR}^{\sigma_2 + jR} \frac{F_0(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-T)} dp = \sum_{x=1}^8 \psi_{1x}(t). \quad (5) \end{aligned}$$

Для вычисления в (5) сумм $\sum_{x=1}^2 \psi_{1x}(t)$ первого и второго и $\sum_{x=5}^6 \psi_{1x}(t)$ пятого и шестого слагаемых применим теорему Коши [5]. С учетом обозначений при нахождении суммы $\sum_{x=1}^2 \psi_{1x}(t)$ ($\sum_{x=5}^6 \psi_{1x}(t)$) вычеты берутся в особых точках $p_{1f}(p_{0f})$. Полученное решение справедливо на всей временной оси.

Согласно теореме $\lim_{p \rightarrow \infty} F_{1(0)}(p) = 0$. Помня это, из дуг окружности радиуса

R , расположенных левее (правее) прямых $\operatorname{Re} p = \sigma_2$ ($\operatorname{Re} p = \sigma_1$), и отрезков последних образуем замкнутые контуры интегрирования Γ_R и Γ'_R , проходимые в отрицательном направлении (рис.2б). Учитывая (1) и лемму Жордана [5], устанавливаем, что на дуге C_R (C'_R)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{F_1(p) K(p) e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1)} dp = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} \frac{F_1(p) K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp = 0, \quad (6)$$

причем первое равенство справедливо при $t-t_1 > 0$, второе – при $t-t_1-T < 0$. Тогда при вычислении суммы $\sum_{x=3}^4 \psi_{1x}(t)$ правомерно (с учетом временных ин-

тервалов, где справедливы равенства (6)) заменить предшествующее предельному переходу интегрирование вдоль отрезка KS (OQ) прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_2$ ($\operatorname{Re} p = \sigma_1$) интегрированием вдоль контура Γ_R (Γ'_R) и воспользоваться теоремой Коши о вычетах, которые здесь берутся по полюсам p_v функции $K(p)$ и особым точкам p_{1b} , p_{1k} функции $F_1(p)$.

Поступая аналогично при вычислении суммы $\sum_{x=7}^8 \psi_{1x}(t)$ и выполняя не-

сложные преобразования результата $\sum_{x=1}^8 \psi_{1x}(t)$, приходим к выражениям ψ_{1b}

и $\psi_{1n}(t)$, представляющим реакцию $\psi_1(t)$ на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, T) соответственно. Далее формальной заменой $t_1, F_1(p)$ на t_2 и $F_2(p)$ соответственно в выражениях ψ_{1b} и $\psi_{1n}(t)$ получаем соотношения для $\psi_{2b}(t)$ и $\psi_{2n}(t)$ — реакции системы на воздействие $\varphi_2(t)$. Функция $F_2(p)$ аналогична функции $F_1(p)$ в случае воздействия $\varphi_1(t)$. Наконец, учитывая равенство $\varphi_0(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ и свойство линейности преобразования Лапласа, находим реакцию $\psi_0(t)$ на воздействие $\varphi_0(t)$ (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \psi_{0a}(t) \\ \psi_{0b}(t) \\ \psi_{0n}(t) \end{Bmatrix} = & - \sum_{p_{0f}, p_{0k}, p_{0b}} \text{res} (F_0(p)K(p)e^{pt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}) + \sum_{p_v} \text{res} \left(\frac{F_1(p)K(p)e^{p(t-t_1)}}{1-e^{-pT}} \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-pt} \\ e^{-pt} \end{Bmatrix} \right) - \\ & - \sum_{p_v} \text{res} \left(\frac{F_2(p)K(p)e^{p(t-t_2)}}{1-e^{-pT}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ e^{-pt} \end{Bmatrix} \right), \quad \begin{Bmatrix} \psi_{0a}(t) = \psi_0(t), (0, t_1) \\ \psi_{0b}(t) = \psi_0(t), (t_1, t_2) \\ \psi_{0n}(t) = \psi_0(t), (t_2, T) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

На практике для решения задач моделирования искажений достаточно ограничиться воздействиями $\varphi_0(t)$, для которых функция $F_0(p)$ дробно-рациональна и имеет простые полюсы [1]. При этом, как доказано, функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ также дробно-рациональны, причем многочлены знаменателей функций $F_z(p)$ ($z=0, 1, 2$) совпадают, и степень многочлена числителя каждой из них меньше степени многочлена знаменателя. Поэтому представим:

$$F_z(p) = A_z(p)/B(p), \quad (8)$$

где $A_z(p)$ — многочлен числителя;

$B(p) = p \prod_{f=1}^d (p^2 + \omega_f^2) \prod_{b=1}^m (p + a_b) \prod_{k=1}^n (p^2 + 2a_k p + a_k^2 + \omega_k^2)$ — многочлен знаменателя, содержащий простые корни; $|a_{b(k)}| > 0$; $|\omega_{f(k)}| > 0$. Тогда с учетом (1), (8) и несовпадения полюсов p_v с особыми точками функций $F_z(p)$ нахождение реакции по (7) сводится к вычислению вычетов в простых полюсах функций $\rho_z(p) = F_z(p)K(p)$. После выполнения необходимых преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \psi_{0a}(t) \\ \psi_{0b}(t) \\ \psi_{0n}(t) \end{Bmatrix} = & \left(\frac{K_0 N_{00}}{c} + \sum_{f=1}^d \frac{K_f N_{0f}}{c \omega_f} \sin(\omega_f t + \varphi_f + \varphi_{0f}) + \sum_{b=1}^m \frac{K_b N_{0b} e^{-a_b t}}{c} + \right. \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{K_k N_{0k} e^{-a_k t}}{c \omega_k} \sin(\omega_k t + \varphi_k + \varphi_{0k}) \left. \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{s=1}^r \frac{K_s e^{-a_s t}}{c} (N_{1s} e^{a_s t_1} \begin{Bmatrix} D_{sT} \\ D_{sT} \\ D_{sT} \end{Bmatrix} - \\ & - N_{2s} e^{a_s t_2} \times \begin{Bmatrix} D_{sT} \\ D_{sT} \\ D_{sT} \end{Bmatrix}) + \sum_{l=1}^q \frac{K_l e^{-a_l t}}{c \omega_l} (N_{1l} e^{a_l t_1} \begin{Bmatrix} D_{lT} \\ D_{lT} \\ D_{lT} \end{Bmatrix} \sin(\omega_l(t-t_1) + \varphi_l + \varphi_{1l}) - \\ & - N_{2l} e^{a_l t_2} \times \begin{Bmatrix} D_{lT} \\ D_{lT} \\ D_{lT} \end{Bmatrix}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} E_{IT} \\ E_{IT} \\ E_{IT} \end{matrix} \right\} \cos(\omega_l(t-t_1) + \varphi_l + \varphi_{l1}) - N_{2l} e^{a_l t/2} \left\{ \begin{matrix} D_{IT} \\ D_{IT} \\ D_{IT} \end{matrix} \right\} \sin(\omega_l(t-t_2) + \varphi_l + \varphi_{2l}) - \\ & - \left\{ \begin{matrix} E_{IT} \\ E_{IT} \\ E_{IT} \end{matrix} \right\} \times \cos(\omega_l(t-t_2) + \varphi_l + \varphi_{2l})) , \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} & \frac{G(p)}{V(p)} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ p+a_s \\ p^2+2a_l p+a_l^2+\omega_l^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} K_0 \quad (p=0) \\ K_f e^{j\varphi_f} \quad (p=j\omega_f) \\ K_b \quad (p=-a_b) \\ K_k e^{j\varphi_k} \quad (p=-a_k+j\omega_k) \\ K_s \quad (p=-a_s) \\ K_l e^{j\varphi_l} \quad (p=-a_l+j\omega_l) \end{matrix} \right\}; \quad D_{sT} = (e^{-a_s T} - 1)^{-1}; \\ & \frac{A_0(p)}{B(p)} \left\{ \begin{matrix} p \\ p^2+\omega_f^2 \\ p+a_b \\ p^2+2a_k p+a_k^2+\omega_k^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N_{00} \quad (p=0) \\ N_{0f} e^{j\varphi_{0f}} \quad (p=j\omega_f) \\ N_{0b} \quad (p=-a_b) \\ N_{0k} e^{j\varphi_{0k}} \quad (p=-a_k+j\omega_k) \end{matrix} \right\}; \\ & D_{sT} = (1 - e^{a_s T})^{-1}; \quad \frac{A_z(p)}{B(p)} = \left\{ \begin{matrix} N_{zs} \quad (p=-a_s), (z=1, 2) \\ N_{zl} e^{j\varphi_{zl}} \quad (p=-a_l+j\omega_l) \end{matrix} \right\}; \\ & D_{IT} = (1 - e^{a_l T} \cos \omega_l T) / U_{IT}; \\ & E_{IT} = e^{a_l T} \sin \omega_l T / U_{IT}; \quad D_{IT} = (e^{a_l T} \cos \omega_l T - e^{2a_l T}) / U_{IT}; \\ & U_{IT} = 1 - 2e^{a_l T} \cos \omega_l T + e^{2a_l T}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения (9), в отличие от ряда Фурье, представляют реакцию в замкнутом виде. Они – результат разложения по конечной неортогональной системе функций, образованной из "собственных функций воздействия" ($e^{p_{0f}t}$, $e^{p_{0b}t}$, $e^{p_{0k}t}$) и "собственных функций линейной системы" ($e^{p_{vl}t}$) [6]. Использование их при моделировании устраняет проблемы улучшения сходимости и оценки точности решения, повышает наглядность результата. Для заданных воздействия и системы входящие в (9) и определяемые (10) коэффициенты неизменны. Это и конечное (малое) число слагаемых уменьшает объем вычислений.

Выражения (9) обладают общностью, пригодны для периодических и непериодических воздействий. Действительно, выполняя в них предельные переходы при $t_1 \rightarrow 0$, $t_2 \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$, можно получить соотношения для реакций на воздействия $\varphi_2(t)$, $\varphi_{0T}(t)$, $\varphi_{2T}(t)$, $\alpha_h(t)$ (см. (2)). Очевидно, в случае $\alpha_h(t)$ функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условиям доказанной теоремы на интервале $[0, \infty)$. Принципиально выражения (9) применимы при кратных полюсах функций $K(p)$ и $F_z(p)$ и (или) совпадении их полюсов. В этом случае, следуя [7], необходимо вначале все полюсы положить простыми и несовпадающими, а потом выполнить в (9) предельные переходы, ведущие к совпадению соответствующих простых полюсов.

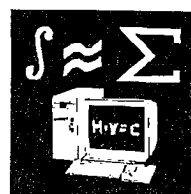
Алгоритм расчета по предлагаемому методу. 1. Представляется в виде (1) модель системы. 2. Проверяется, удовлетворяет ли функция $\varphi(t)$ условиям доказанной теоремы. 3. Согласно (3) и (4) находятся функции $F_z(p)$ ($z = 0, 1, 2$), представляемые в виде (8). 4. Вычисляются (по (10)) параметры и представляются в (9).

По предлагаемому методу разработана многофункциональная программа моделирования линейных искажений в системах радиоэлектроники, радиофизики и телекоммуникаций, реализованная на языке Turbo Pascal [8].

1. Ильинков В. А. // Радиотехника и электроника. Мн., 1989. Вып.18. С.11.
2. Заездный А. М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. 2-е изд., испр. и доп. Л., 1971.
3. Эггартер Т. П. // ТИИЭР. 1969. Т.57. №3. С.112.
4. Фейрман Ф., Маклейн П. // Там же. 1970. Т.58. №6. С.157.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. 5-е изд., испр. М., 1987.
6. Ильинков В. А., Ильинкова Н. И. // Автоматизация проектирования дискретных систем: Тез. докл. междунар. конф. Мн., 1995. С.115.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Под ред. И. Г. Арамановича. М., 1974.
8. Ильинков В. А., Романов В. Е., Румянцев А. В. // Автоматизация проектирования дискретных систем: Тез. докл. междунар. конф. Мн., 1995. С.116.

Поступила в редакцию 04.01.99.

Математика и информатика



УДК 612.821:007

А.Н.МОРОЗЕВИЧ, Б.А.ЖЕЛЕЗКО, С.А.САМАЛЬ

ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Examined are general principles of the developing adapting analytical data decision support systems' (AD DSS) design process modeling. As the methodological simulation base the UPD-requirements' conception is used. For all that the AD DSS design is considered as the process of the application domain's knowledge models' transformation and of the User, Producer and Designer requirements' co-ordinative changes satisfaction. As the universal data-modeling method the generalized objects conception is proposed being used.

Информационно-аналитические системы поддержки принятия решения (ИА СППР) как класс человеко-машинных систем, предназначенных для оказания помощи лицу, принимающему решение (ЛПР), в его профессиональной деятельности по использованию данных, знаний и моделей, являются в социально-экономических системах «интеллектуальным» подклассом СППР [1].

ИА СППР весьма сложны в реализации. Поэтому необходимо, чтобы срок службы, а главное – время морального старения были как можно больше. Данную цель можно достичь, если при проектировании ИА СППР обеспечить возрастание их возможностей со временем и с усложнением решаемых проблем.

Общие принципы решения таких задач определены так называемой концепцией ПИР-требований, в основе которой – удовлетворение растущих соподчиненных требований Потребителя, Изготовителя и Разработчика [2]. Концепция распространяется и на ИА СППР (см.схему).

Необходимость в проектировании ИА СППР, как правило, возникает в процессе разработки или модернизации некоторой системы управления. При этом ИА СППР рассматривают как компонент системы, связанный не только с объектом управления, но и с внешней средой и обязанный удовлетворять требованиям, вытекающим из особенностей использования ИА СППР в социально-экономической системе.

Согласно определению*, проектированию ИА СППР должна предшествовать выработка требований, предъявляемых к проектируемой ИА СППР, и критериев качества ее работы, которые затем обеспечиваются соответствующими характеристиками ИА СППР. В общем же виде задача проектирования ИА СППР схожа с задачей проектирования управляющих вычис-

* Проектирование ИА СППР – процесс разработки комплекта документации, на основании которой можно изготовить ИА СППР, обладающую характеристиками, обеспечивающими выполнение возложенных на нее функций при заданном качестве функционирования.

лительных машин [3]. Однако в рамках концепции ПИР-требований объект проектирования приобретает нестационарность. Поэтому задача проектирования формулируется следующим образом.

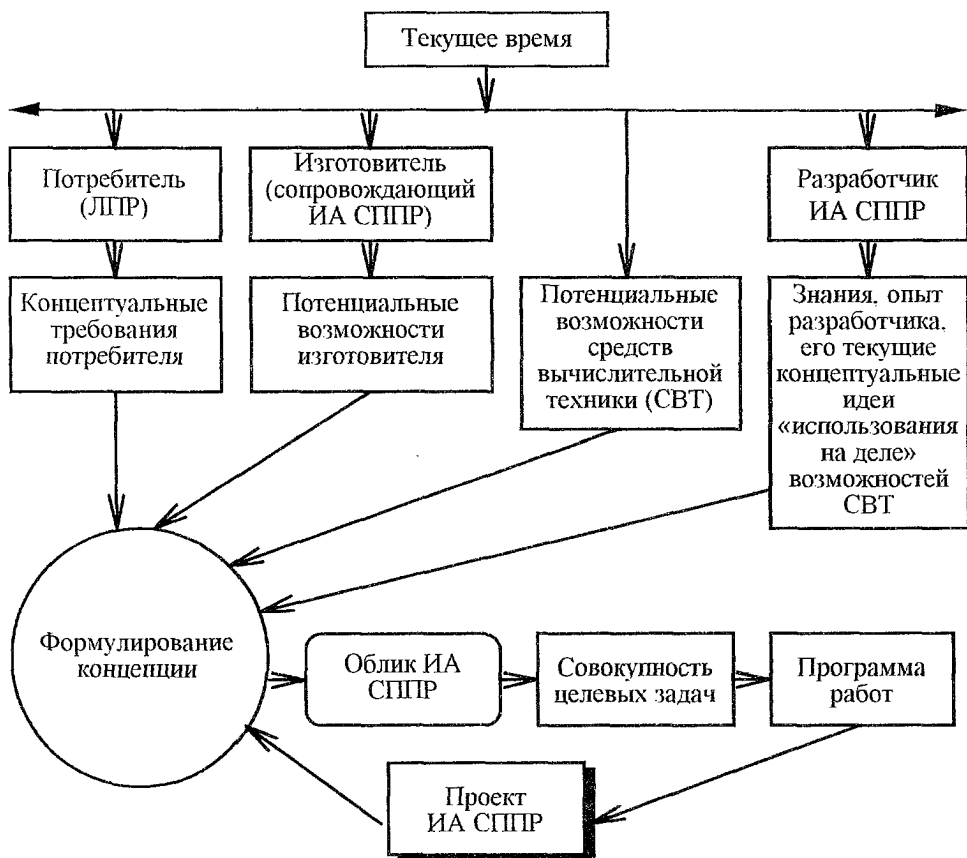


Схема формирования концепции ПИР-требований

Пусть $R(t) = \{r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)\}$ – требования, предъявляемые к проектируемой ИА СППР; $P(t) = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}$ – характеристики, существенно влияющие на архитектуру ИА СППР; $L(t) = \{l_1(t), l_2(t), \dots, l_k(t)\}$ – система ограничений, накладываемых на основные характеристики, связанные с возможными пределами их изменения; $K(t) = F(R(t), P(t), L(t))$ – критерий оценки качества ИА СППР. Необходимо для заданных векторов $R(t)$ и $L(t)$ отыскать такой вектор $P(t)$:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= f_1(R(t), P(t), L(t)); \\ p_2(t) &= f_2(R(t), P(t), L(t)); \\ &\dots \\ p_n(t) &= f_n(R(t), P(t), L(t)), \end{aligned}$$

при котором величина критерия приняла бы экстремальное значение.

Решение, очевидно, лежит в области открытых архитектур, обеспечивающих в первую очередь расширение входной информационной базы, баз данных и баз знаний за счет «внешних поступлений» или самообучения (в том числе экспертов).

Анализ задачи проектирования показывает, что создание ИА СППР является видом деятельности с интенсивным использованием знаний. Необходимы знания о функциональных и операционных требованиях, а также

конфигурации строящейся системы; о том, как эти требования ограничивают структуру, и другие характеристики данной системы; о ее реализации и возможном описании языков, используемых в процессе разработки программного обеспечения ИА СППР; о структуре алгоритмов и данных, пакетах программ, конфигурации технических средств и т.д.

Разработка ИА СППР может рассматриваться как процесс трансформации моделей знаний о предметной области и удовлетворения соподчиненному росту требований (ограничений) [4]. Ограничения могут быть представлены с нескольких точек зрения [5–7]:

- семантики прикладных подсистем;
- организации системы;
- вычислительных аспектов;
- разработки.

На любой стадии проектирования модель ИА СППР является многоуровневым описанием, состоящим из моделей требований с соответствующими конструкциями и реализациями. Среда проектирования должна содержать инструментальные средства для создания, редактирования и проверки достоверности описания на каждом из этих иерархических уровней. Кроме того, необходимы инструментальные средства для трансформации модельных отображений, которые помогают специалистам в продвижении от исходных моделей требований к проектированию и от проектирования к реализации. В перспективе такие инструментальные средства могут сами рассматриваться как основанная на знаниях ИА СППР, которая управляет проектными решениями и предлагает возможности их развития. Проанализируем подробнее с этой точки зрения современное представление о том, что же является содержанием процесса разработки ИА СППР.

Построение ИА СППР является дорогостоящим видом деятельности и предполагает как разработку и построение баз данных, моделей и знаний, так и разработку прикладных программ и пользовательских интерфейсов. Таким образом, методология проектирования ИА СППР опирается на достижения в области технологий моделирования, проектирования баз данных, знаний и программирования.

Поэтому особое значение приобретает создание методологии, охватывающей все фазы разработки ИА СППР, начиная от накопления и анализа требований. Традиционно [5] основой для проектирования подобных систем считается построение глоссария для каждого проблемно-ориентированного приложения. Построенные глоссарии (по одному для каждой прикладной задачи) разделяются в дальнейшем на данные, операции и события, и для них конструируется концептуальная схема. Так, каждая прикладная задача определяет представление, а все представления должны быть объединены в единственную (глобальную) концептуальную схему. После компоновки концептуальная схема преобразуется в логическую, затем производится «физическое проектирование». Обычно используется расширенная модель типа «сущность–связь» и сети Петри для концептуального и динамического моделирования данных, операций и событий.

Программное обеспечение ИА СППР является средством, требующим эффективного управления на всех этапах от концепции до ее осуществления, проверки, эксплуатации и развития. Как и развитие баз данных, моделей и знаний, развитие программных средств является многостадийным процессом, который начинается с моделирования требований и продолжается разработкой, реализацией и тестированием.

Большой прогресс достигнут в сфере программирования [8]. Однако другие стадии процесса развития ИА СППР остаются относительно неисследованными. Более того, взаимоотношения между различными задачами и уровнями представления отражаются в лучшем случае на бумаге, что усложняет поиск исчерпывающих решений в области проектирования программного обеспечения ИА СППР.

Метод инженерии знаний рассматривает разработку и эксплуатацию ИА СППР как создание и последовательное ведение взаимосвязанных баз знаний. Существует два различных, но взаимосвязанных направления в развитии этого метода. Одно касается вопроса о том, какого рода знания должны быть охвачены, как эти знания могли бы быть представлены и какова адекватная методология их инженерии. Другое связано с вопросом о контроле, поддержке и документировании пошагового процесса инженерии знаний с помощью соответствующей базы знаний.

Процесс проектирования ИА СППР на основе знаний можно представить в виде некоторой схемы с трехуровневой архитектурой. Для моделирования требований необходим язык представления знаний, который может быть гибко приспособлен к любой из большого разнообразия возможных областей применения. Для концептуального проектирования и объектно-ориентированной спецификации необходима формальная рабочая среда, в которой компоненты и взаимосвязи компонентов ИА СППР могут быть единообразно описаны. Для программной реализации компонентов ИА СППР требуются средства с мощными моделями данных и абстрактными конструкциями предикатно-ориентированного доступа, позволяющие создавать масштабируемые прикладные программы.

Разработка в пределах каждого из этих трех уровней может обеспечиваться средами спецификаций, конструирования и программирования, содержащими такие инструментальные средства, как специализированные редакторы, средства прототипирования, визуализации и т.д. Преобразование между уровнями может поддерживаться специальными мастерами отображения, в качестве которых могут выступать, например, предпроцессоры [9], библиотеки классов [10] или CASE-средства [9, 11, 12].

Разработка ИА СППР представляет собой процесс проб и ошибок с возвратами к предыдущему состоянию и накоплением опыта. Формализация знаний может помочь избежать повторения одних ошибок дважды.

После разработки ИА СППР должна быть пригодна к эксплуатации в течение длительного периода времени. Эксплуатация охватывает коррекцию ошибок и учет изменяющихся требований, что требует многократного использования опыта, накопленного на более ранних стадиях разработки. Кроме того, потребители могут уже иметь свои методологии для разработки компонентов ИА СППР. Например, разработка программного обеспечения подразумевает использование библиотеки многократно применяемых компонентов, которые должны быть описаны с позиций формализации требований, проектирования и реализации.

Эти дополнительные условия требуют наличия уровня представления знаний об объектах и процессах разработки как таковых. Модель знаний, разрабатываемая в процессе создания программного средства, становится частью реализации ИА СППР. Это еще один довод в пользу рассмотрения разработки программного обеспечения ИА СППР как прикладной системы с интенсивным использованием баз моделей, данных и знаний. Анализ опубликованных материалов [5, 13] и собственный опыт [10] показывают,

что в принципе можно на 70% идентифицировать и сохранить те концепты и связи, которые, как предполагается, должны многократно использоваться в более поздних фазах процесса создания и эксплуатации ИА СППР. К основным из них можно отнести следующие.

Объекты: фрагменты требований, спецификаций, проектов, реализаций; процессы проектирования: проектные решения и их обоснования, результирующие зависимости; роли, которые играют персонал и компоненты компьютерных систем, их обязанности, задачи и последовательности информационных обменов.

Механизмы представления используемых при проектировании ИА СППР знаний могут рассматриваться как различные варианты представления некоторой основной формализации. На ранних стадиях процесса разработки они могут быть проблемно ориентированными и подчеркивать последовательное введение ПИР-требований. На более поздних стадиях они сосредоточиваются главным образом на решениях, принятых для удовлетворения этих ограничений в конкретной среде. Таким образом, процесс удовлетворения ПИР-требований частично управляется (ограничивается) преобразованиями между базовыми представлениями рассматриваемых уровней. Следовательно, основным вопросом при разработке (выборе) способа и языка моделирования требований является его адаптируемость и способность к расширению на множество областей применения. К числу наиболее важных особенностей, которые необходимо охватить, относятся описание объектов, правила и временное изменение процесса конструирования.

Одним из решений может быть использование в качестве способа моделирования знаний на различных уровнях концепции *K*-систем [14], а в качестве средства реализации этого способа моделирования – концепции *GO*-объектов [14], используемых для представления знаний. По сравнению с многими довольно причудливыми языками моделирования требований использование концепции *GO*-объектов позволяет достичь необходимых функциональных возможностей с минимальным количеством базовых конструкций, объединенных с технологиями расширения возможностей. Каждый объект предметной области представляет собой звено в цепи *GO*, известное системе в течение одного интервала времени, и считается достоверным в течение другого интервала времени.

Классификационная иерархия образует в формируемой базе знаний слой: обозначения, простые классы, классы классов и т. д. Каждый класс определяет некоторый подязык для более низкого класса. Тем самым достигается ряд желательных свойств благодаря способности к расширению за счет неограниченной иерархии классов.

Для практической реализации предложенного подхода среда разработки должна обеспечивать взаимосвязанный набор графических инструментальных средств, которые, сохраняя преимущества формальной модели требований, позволят организовать процесс формулирования и верификации требований следующим образом.

1. Разработать общую структуру модели, используя хорошо известные графические формализации, такие, например, как *IDEF0*-диаграммы или диаграммы “сущность–связь” [9, 15].

2. Тщательно детализировать эту исходную модель, используя одну из общепринятых объектно-ориентированных методологий [13, 14] и инструментальных средств [8, 14, 15, 17].

3. Проверить достоверность модели, используя прототипирование компонентов ИА СППР и контрольные примеры, выполнить на них дедуктивные запросы и проверки целостности.

4. Расширить модель, путем агрегации/декомпозиции, обобщения/специализации или классификации/обработки [18].

Конкретные методологические и общие абстрактные модели могут рассматриваться как элементы модели программного процесса типа решение – объект–инструментальное средство (РОС) [19].

Модель РОС соответствует уже сложившейся традиции представлять программный процесс как хронологическую последовательность проектных решений. Объекты проектирования могут иметь семантические описания; эти описания состоят из произвольно выбранного комплекса ГО-объектов [14]. Проектные решения соотносят описания объектов проектирования своего входа и выхода с помощью зависимостей. Однако, как показали результаты проекта DAIDA [5], простая модель “объект–решение” адекватна только для представления неавтоматизированных процессов разработки программных средств. В эру частично автоматизированных CASE-сред программный процесс становится историей выполнения проектных решений с помощью инструментальных средств.

Каждый объект в модели среды создается не только со своим структурным описанием, но также с дополнительным набором определяемых пользователем правил преобразования и ограничения целостности, причем последним придают значение при обработке модели среды действительными проектами программных средств. Поэтому реальные объекты проекта, проектные решения и обращения к инструментальному средству проектирования записываются как простые классы модели. В этом отношении проект направляется (дедуктивные правила) или принуждается (ограничения целостности) к использованию только тех языков, методологий и инструментальных средств, которые признаются имеющимися в распоряжении в данный момент времени в среде разработки ИА СППР. Поскольку семантическое описание любой среды может быть ГО-объектом любого класса, то дополнительное множество концептов может быть относительно легко приспособлено для интегрирования новых методов и инструментальных средств, а также для того, чтобы снабжать соответствующие новые классы объектов, решений и инструментальных средств подходящими правилами и ограничениями.

Таким образом, разработка ИА СППР рассматривается как создание и постоянная эксплуатация взаимосвязанных баз знаний. Эти базы знаний должны охватывать весьма различные аспекты, чтобы экспертам было удобно выражать их наиболее понятным для них языком, основанным на использовании концепции ГО-объектов.

1. Морозевич А.Н. // Новые информационные технологии в образовании: Тр. третьей междунаро. конф. Мн., 12–13 нояб. 1998 г. Мн., 1998. С.28.

2. Он же. // Проблемы качества и надежности изделий электронной техники, радиоэлектронной аппаратуры и средств управления: Тез. докл. науч.-технич. конф. Мн., 1–2 дек. 1988 г. Мн., 1998. С.28.

3. Применение управляющих вычислительных машин: Учеб. пособие / А.Н.Морозевич, А.В.Николаев, А.П.Папкевич, А.А.Петровский. Мн., 1988.

4. Morozovich A., Zhelezko B. // Proc. of Int. Conf. on Application of Computer Systems. Szczecin. 1997. P.434.

5. Jarke M., Mylopoulos J., Schmidt J. et al. // Программирование. 1991. №1. С.3.

6. Davis A // Communication of the ACM. Vol. 31. №9. P.1098.
7. Железко Б.А. // Проблемы переходной экономики и механизм ее функционирования в Республике Беларусь. Мн., 1997. С.414.
8. Калянов Г. // СУБД. 1997. №2. С.61.
9. Чен П. // Там же. 1995. №3. С.137.
10. Morozovich A.N., Zhelezko B.A. Computer system for the analysis of infrared spectra: Тез. докл. VII Белорусской математической конф. Мн., 18–22 ноябр. 1996. Мн., 1996. Ч.3. С.210.
11. Штрик А.А. // CASE-технология: Мат. семинара. М., 1993. С.10.
12. Горин С.В., Тандоев А.Ю. // СУБД. 1995. №3. С.20.
13. Аджиев В. // Открытые системы. 1996. №6. С.40.
14. Железко Б.А., Морозевич А.Н. // Новые информационные технологии в образовании. Мн., 12–13 нояб. 1996. Мн., 1996. С.84.
15. Функциональное моделирование. Методология IDEF0. М., 1993.
16. Козлинский А. // Компьютерное обозрение. 1993. №1. С.29.
17. Железко Б.А., Панасик Г.А., Пихун В.Н., Шелешкевич В.И. // УСМ. 1990. №4. С.96.
18. Макетирование, проектирование и реализация диалоговых информационных систем / Л.И. Гуков, У.И. Ломачко, А.В. Морозова и др. М., 1993.
19. Jarke M., Jeusfeld M., Rose T. // Information systems. 1990. Vol.15. №1. P.86.
20. Железко Б.А. Системы поддержки принятия решений: вопросы создания и примеры использования / Под ред. А.Н.Морозевича. Мн., 1998.

Поступила в редакцию 04.02.99

УДК 519.10

В.А.ЕМЕЛИЧЕВ, В.Г.ПОХИЛЬКО

РАДИУС КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ НА МНОЖЕСТВЕ ПОДСТАНОВОК

For a linear vector optimization problem over a subset of the permutation group, we give a formula for the quasistability radius.

Пусть $A=\{a_{ij}\}_{n \times m}$ и $B=\{b_{ij}\}_{n \times m}$ – пара вещественных матриц, $n \geq 1$, $m \geq 2$; S_m – симметрическая группа подстановок, действующая на множестве $N_m=\{1,2,...,m\}$; $t \in S_m$. На множестве подстановок $T \subseteq S_m$, $|T| > 1$, зададим векторную целевую функцию

$$f(t, A, B) = (f_1(t, A, B), f_2(t, A, B), \dots, f_n(t, A, B))$$

с частными критериями

$$f_i(t, A, B) = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{it(j)} \rightarrow \min_{t \in T}, i \in N_n.$$

В этом контексте под векторной (n -критериальной) задачей $Z^n(A, B)$ будем понимать задачу поиска множества эффективных подстановок (множества Парето) $P(A, B)$, которое определим традиционным образом [1]:

$$t^0 \in P(A, B) \Leftrightarrow t^0 \in T \ \& \ \nexists t \in T \ (\tau(t, t^0, A, B) \leq 0 \ \& \ \tau(t, t^0, A, B) \neq 0),$$

где $\tau(t, t^0, A, B) = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, $\tau_i = \tau_i(t, t^0, A, B) = f_i(t, A, B) - f_i(t^0, A, B)$, $i \in N_n$, $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, что частным случаем нашей задачи (при $n=1$) является широко известная задача минимизации линейной формы на множестве подстановок (см., например, обзор [2]).

Как обычно [3–6], под квазиустойчивостью векторной задачи $Z^n(A, B)$ будем понимать свойство сохранения эффективности всех оптимальных по Парето подстановок при “малых” возмущениях параметров векторной целевой функции. В терминах точечно-множественных отображений квазиустойчивость эквивалентна полунепрерывности снизу по Хаусдорфу отображения, характеризующего зависимость множества Парето от исходных данных [7]. В данном случае будем возмущать лишь элементы матрицы A . Поэтому радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A, B)$ назовем предел таких возмущений, т.е. величину

$$\rho^n(A, B) = \begin{cases} \sup Q, & \text{если } Q \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q = \emptyset, \end{cases}$$

где $Q = \{\varepsilon > 0: \forall C \in \mathfrak{R}(\varepsilon) \ (P(A, B) \subseteq P(A + C, B))\}$, $\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{C \in \mathbf{R}^{nm}: \|C\| < \varepsilon\}$, $\|C\| = \max\{|c_{ij}|: (i, j) \in N_n \times N_m\}$ — чебышевская норма матрицы $C = \{c_{ij}\}_{n \times m}$ в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$.

Теорема. Пусть в каждой строке матрицы B элементы попарно различны. Тогда для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, B)$, $n \geq 1$, справедлива формула

$$\rho^n(A, B) = \min_{t^0 \in P(A, B)} \min_{t \in T \setminus \{t^0\}} \max_{i \in N_n} \Gamma_i(t, t^0, A, B), \quad (1)$$

$$\text{где } \Gamma_i(t, t^0, A, B) = \frac{\tau_i(t, t^0, A, B)}{\Delta_i(t, t^0, B)}, \quad \Delta_i(t, t^0, B) = \sum_{j=1}^m |b_{ij}(t) - b_{ij}(t^0)|.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при выполнении условия теоремы справедливы неравенства

$$\Delta_i(t, t^0, B) > 0 \quad \forall i \in N_n, \forall t \neq t^0.$$

Поэтому величина φ , стоящая в правой части формулы (1), всегда определена. Сначала докажем неравенство $\rho^n(A, B) \geq \varphi$. Если $\varphi = 0$, это неравенство очевидно.

Пусть $\varphi > 0$. Тогда для любых двух различных подстановок $t^0 \in P(A, B)$ и $t \in T$ выполняется условие

$$\max\{\Gamma_i(t, t^0, A, B): i \in N_n\} \geq \varphi.$$

Пусть $p \in \operatorname{argmax}\{\Gamma_i(t, t^0, A, B): i \in N_n\}$. Тогда имеем

$$\Gamma_p(t, t^0, A, B) \geq \varphi > \|C\| \quad \forall C \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Отсюда получаем

$$\tau_p(t, t^0, A + C, B) = \tau_p(t, t^0, A, B) + \tau_p(t, t^0, C, B) \geq \tau_p(t, t^0, A, B) - \Delta_p(t, t^0, B) \max\{|c_{pj}|: j \in N_m\} \geq \tau_p(t, t^0, A, B) - \Delta_p(t, t^0, B) \|C\| > 0 \quad \forall C \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Следовательно, $P(A, B) \subseteq P(A + C, B) \quad \forall C \in \mathfrak{R}(\varphi)$, т.е. $\rho^n(A, B) \geq \varphi$.

Далее покажем, что $\rho^n(A, B) \leq \varphi$. Для этого достаточно убедиться в существовании для любого числа $\varepsilon > \varphi$ двух различных подстановок $t^0 \in P(A, B)$, $t \in T$ и матрицы $C \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ таких, что выполняются соотношения

$$\tau(t, t^0, A + C, B) \leq 0, \quad \tau(t, t^0, A + C, B) \neq 0.$$

Пусть $\varepsilon > \varphi$. Тогда, согласно определению числа φ , найдутся такие различные подстановки $t^0 \in P(A, B)$ и $t \in T$, что

$$\gamma = \max\{\Gamma_i(t, t^0, A, B): i \in N_n\} < \varepsilon.$$

Поэтому если в качестве возмущающей матрицы $C \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$c_{ij} = -c \cdot \text{sign}(b_{i(j)} - b_{i^0(j)}), \quad i \in N_n, j \in N_m,$$

где $\gamma < c < \varepsilon$. то получим

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t^0, A+C, B) &= \tau_i(t, t^0, A, B) + \tau_i(t, t^0, C, B) = \tau_i(t, t^0, A, B) - \\ &- c \Delta_i(t, t^0, B) < \Delta_i(t, t^0, B) (\Gamma_i(t, t^0, A, B) - \gamma) \leq 0 \quad \forall i \in N_n. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Напомним [1], что множество строго эффективных решений (множество Смейла) задачи $Z''(A, B)$ определяется следующим образом:

$$S(A, B) = \{t \in T: \forall t^0 \in T \setminus \{t\} \exists i \in N_n (\tau_i(t, t^0, A, B) < 0)\}.$$

Очевидно, что $S(A, B) \subseteq P(A, B)$.

Следствие 1. При выполнении условия теоремы задача $Z''(A, B)$ квазиустойчива ($\rho''(A, B) > 0$) тогда и только тогда, когда

$$P(A, B) = S(A, B).$$

Следствие 2. Если все компоненты вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ попарно различны, то задача минимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^m a_j b_{i(j)} \rightarrow \min_{t \in T}$$

на множестве подстановок $T \subseteq S_m$, $|T| > 1$, квазиустойчива при возмущении компонент вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ тогда и только тогда, когда оптимальная подстановка единственна.

В заключение отметим, что формула (1) радиуса квазиустойчивости векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок имеет тот же вид, что и формула радиуса квазиустойчивости линейной траекторной задачи векторной оптимизации (следствие 2[5]). Отличие состоит лишь в значении величины $\Delta_i(\cdot)$, в то время как величина $\tau_i(\cdot)$ и в том, и в другом случаях представляет собой разность значений i -го частного критерия двух аргументов.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект №Ф97-266).

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
2. Емеличев В.А., Супруненко Д.А., Танаев В.С. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. №6. С.25.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. №4. С.137.
4. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №3. С.39.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. // Мат. заметки. 1998. Т.63. Вып.1. С.21.
6. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // ЖВМ и МФ. 1998. Т.38. №11. С.1801.
7. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.

Поступила в редакцию 24.03.98.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ ПРИ ЗАВИСИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА ОТ ИХ СОСТОЯНИЙ

Queueing networks with many servers systems and different classes of customers have been considered. Transient probabilities depend on network states.

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, которая состоит из n систем обслуживания (СМО), в i -й СМО для обслуживания формируются m_i очередей. $i = \overline{1, n}$. Состояние очереди α -й СМО характеризуется вектором $\bar{k}_{i\alpha} = (k_{i\alpha 1}, k_{i\alpha 2}, \dots, k_{i\alpha r})$, где $k_{i\alpha c}$ – число заявок типа c в α -й очереди i -й СМО. $i = \overline{1, n}, \alpha = \overline{1, m_i}, c = \overline{1, r}$, состояние i -й СМО – вектором $\bar{k}_i = (\bar{k}_{i1}, \bar{k}_{i2}, \dots, \bar{k}_{ir})$, $i = \overline{1, n}$, а состояние сети – вектором $k = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n)$.

Пространство состояний i -й СМО X_i – некоторое подмножество точек с целочисленными неотрицательными координатами $m_i \times r$ – мерного евклидова пространства. пространство состояний сети $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Будем предполагать, что состояние сети $k(t)$ в момент времени t является эргодическим неприводимым марковским процессом. Тогда из уравнений глобального равновесия следует:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{c,s=1}^r P(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) \lambda(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}, k) u(k_{j\beta s}) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r P(k + I_{j\beta s}) \lambda(k + I_{j\beta s}, k) + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r P(k - I_{j\beta s}) \times \\ & \quad \times \lambda(k - I_{j\beta s}, k) u(k_{j\beta s}) = P(k) \times \\ & \quad \times \left[\sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{c,s=1}^r \lambda(k, k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \lambda(k, k + I_{j\beta s}) + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \lambda(k, k - I_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда. $I_{i\alpha c} = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) r$ -вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером $r(m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1} + \alpha - 1) + c$, которая равна 1. $\lambda(k, z)$ – интенсивность переходов сети из состояния k в состояние z .

Справедлива следующая

Теорема. Пусть

$$\begin{aligned} & \lambda(k, k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) = g_{j\beta s i \alpha c}(k) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}), \\ & \lambda(k, k - I_{j\beta s}) = b_{j\beta s}(k) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}), \quad \lambda(k, k + I_{i\alpha c}) = a_{j\beta s}(k), \\ & \sup_k g_{j\beta s i \alpha c}(k), \sup_k b_{j\beta s}(k), \sup_k a_{j\beta s}(k) < \infty, \\ & i, j = \overline{1, n}, \alpha = \overline{1, m_i}, \beta = \overline{1, m_j}, c, s = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Тогда } P(k) = P(I_0) \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \frac{e_{i\alpha c}^{k_{i\alpha c}}(k_{i\alpha c})}{\Xi_{i\alpha c}(1) \cdot \Xi_{i\alpha c}(2) \cdot \dots \cdot \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \Xi_{i\alpha c}(1) \cdot \Xi_{i\alpha c}(2) \cdot \dots \cdot \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c}) = 1 \quad \text{при } k_{i\alpha c} = 0, \\ & \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r g_{i\alpha c j\beta s} (k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1) + a_{j\beta s} (k - I_{j\beta s}) \right] \times \\ & \times u(k_{j\beta s}) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r g_{j\beta s i\alpha c} (k) + b_{j\beta s} (k) \right] e_{j\beta s}(k_{j\beta s}), \quad (4) \\ & j = \overline{1, n}, \beta = \overline{1, m_j}, s = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

$I_0 - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)r$ -вектор с нулевыми компонентами.

Стационарное распределение $P(k)$ существует и единственно при условии эргодичности марковского процесса $k(t)$, которое выполняется, если существует сумма бесконечного ряда

$$\Theta = \sum_{k \in X} \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \frac{e_{i\alpha c}^{k_{i\alpha c}}(k_{i\alpha c})}{\Xi_{i\alpha c}(1) \cdot \Xi_{i\alpha c}(2) \cdot \dots \cdot \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})} < \infty, \quad (5)$$

при этом $P(I_0) = \frac{1}{\Theta}$.

В случае замкнутой сети

$$a_{j\beta s}(k) = b_{j\beta s}(k) = 0, j = \overline{1, n}, \beta = \overline{1, m_j}, s = \overline{1, r}, \quad P(I_0) = \frac{1}{\Theta(K)},$$

$$\text{где } \Theta(K) = \sum_{k \in X(K)} \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \frac{e_{i\alpha c}^{k_{i\alpha c}}(k_{i\alpha c})}{\Xi_{i\alpha c}(1) \cdot \Xi_{i\alpha c}(2) \cdot \dots \cdot \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})},$$

$$X(K) = \left\{ k \mid k_{i\alpha c} \geq 0, i = \overline{1, n}, \alpha = \overline{1, m_i}, c = \overline{1, r}, \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r k_{i\alpha c} = K \right\}.$$

Доказательство. Из (3) следует

$$\begin{aligned} P(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) &= P(k) \frac{e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s})}{e_{j\beta s}(k_{j\beta s}) \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1)}, \\ P(k + I_{j\beta s}) &= P(k) \frac{e_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1)}{\Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1)}, \quad P(k - I_{j\beta s}) = P(k) \frac{\Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s})}{e_{j\beta s}(k_{j\beta s})}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}, k) = g_{i\alpha c j\beta s} (k - I_{i\alpha c} + I_{j\beta s}) \Xi_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1)$,

$$\lambda(k + I_{j\beta s}, k) = b_{j\beta s} (k + I_{j\beta s}) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1),$$

$$\lambda(k - I_{j\beta s}, k) = a_{j\beta s} (k - I_{j\beta s}),$$

то из (1) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{c,s=1}^r g_{j\beta s i\alpha c} (k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) \frac{e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1)}{e_{j\beta s}(k_{j\beta s})} u(k_{j\beta s}) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r b_{j\beta s} (k + I_{j\beta s}) e_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1) + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r a_{j\beta s} (k - I_{j\beta s}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) \frac{u(k_{j\beta s})}{e_{j\beta s}(k_{j\beta s})} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{c,s=1}^r g_{j\beta s i \alpha c}(k) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) \times u(k_{j\beta s}) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r a_{j\beta s}(k) + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r b_{j\beta s}(k) \Xi_{j\beta s}(k) u(k_{j\beta s}). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r g_{i \alpha c j \beta s}(k + I_{i \alpha c} - I_{j \beta s}) \times \right. \\ \left. \times \frac{e_{i \alpha c}(k_{i \alpha c} + 1)}{e_{j \beta s}(k_{j \beta s})} + \frac{a_{j \beta s}(k_{j \beta s} - 1)}{e_{j \beta s}(k_{j \beta s})} \right\} = \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r g_{j \beta s i \alpha c}(k) + b_{j \beta s}(k) \right] = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r g_{j \beta s i \alpha c}(k) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r b_{j\beta s}(k) \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}). \end{aligned}$$

Кроме того, заменив в (4) $k_{j\beta s}$ на $k_{j\beta s} + 1$ и взяв в обеих частях этого равенства сумму $\sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r$, будем иметь

$$+ \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r b_{j\beta s}(k + I_{j\beta s}) e_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1) = \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r a_{j\beta s}(k),$$

т.е. соотношение (6) превращается в тождество.

Для замкнутой сети соответствующие соотношения очевидны, поскольку в сети постоянно обслуживается K заявок.

Покажем, что условие (5) является условием эргодичности случайного процесса $k(t)$. Воспользуемся эргодической теоремой Фостера [1], согласно которой достаточно проверить, что система уравнений

$$\sum_{z \in X} x(z) \frac{\lambda(z, k)}{\lambda(z)} = x(k), \lambda(z) > 0, k \in X, \quad (7)$$

где $\lambda(z)$ — интенсивность выхода из состояния z , имеет нетривиальное решение $x(k)$, $k \in X$, такое, что $\sum_{k \in X} |x(k)| < \infty$. Действительно, беря $x(k) = \lambda(k)P(k)$, где $P(k)$ определяется соотношением (3), получим, что (7) удовлетворяется, так как

$$\sum_{z \in X} P(z) \lambda(z, k) = P(k) \lambda(k) = P(k) \sum_{m \in X} \lambda(k, m), k \in X,$$

совпадают с уравнениями глобального равновесия (1), которым, как мы проверили, удовлетворяет $P(k)$. Сходимость ряда

$$\sum_{k \in X} |x(k)| = \sum_{k \in X} \lambda(k) P(k)$$

следует из сходимости ряда (5), поскольку из (2) вытекает, что $\sup_k \lambda(k) < \infty$.

Значит, при выполнении условия (5) процесс $k(t)$ эргодичен. Поэтому финальное распределение является единственным стационарным распределением и, следовательно, совпадает с $\{P(k), k \in X\}$, где $P(k)$ определяется (3).

Пример. Пусть в сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ . в i -ю СМО каждая заявка типа c входного потока независимо от других поступает с вероятностью $p_{0ic}(k)$, зависящей от состояния сети k ,

$\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r p_{0ic}(k) = 1, k \in X$. После завершения обслуживания в i -й СМО, когда состояние сети равно k , заявка типа c переходит с вероятностью $p_{icjs}(k)$ в j -ю СМО как заявка типа s и с вероятностью $p_{ic0}(k)$ уходит из сети,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r p_{icjs}(k) + p_{ic0}(k) = 1, i = \overline{1, n}, c = \overline{1, r}, k \in X.$$

Заявка, поступающая в j -ю СМО, с вероятностью $p_j^{(\beta)}(k)$, зависящей от состояния сети в момент ее прихода, становится в β -ю очередь этой СМО, $\beta = \overline{1, m_j}$, $\sum_{\beta=1}^{m_j} p_j^{(\beta)}(k) = 1, k \in X$. Времена обслуживания заявок в очередях имеют показательное распределение и пусть $\mu_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})$ — интенсивность обслуживания заявок типа c в α -й очереди i -й СМО, когда в этой очереди находятся $k_{i\alpha c}$ заявок типа c , $i = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, m_i}$, $c = \overline{1, r}$.

В этом случае система уравнений для вероятностей состояний сети принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} = & - \left[\lambda + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \mu_{j\beta s}(k_{j\beta s}) \right] P(k, t) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{\beta=1}^{m_j} \sum_{s=1}^r \{ p_{js0}(k + I_{j\beta s}) \mu_{j\beta s}(k_{j\beta s} + 1) P(k + I_{j\beta s}, t) + \\ & + u(k_{j\beta s}) p_j^{(\beta)}(k - I_{j\beta s}) [\lambda p_{0js}(k - I_{j\beta s}) P(k - I_{j\beta s}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r p_{icjs}(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) \mu_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1) P(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}, t) \} \} \end{aligned}$$

поэтому для интенсивностей переходов между состояниями сети справедливы следующие соотношения:

$$\lambda(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}, k) = \mu_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1) p_{icjs}(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) \times p_j^{(\beta)}(k - I_{j\beta s}),$$

$$\lambda(k, k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) = \mu_{j\beta s}(k_{j\beta s}) p_{jsic}(k) p_i^{(\alpha)}(k),$$

кроме того,

$$g_{j\beta si\alpha c}(k) = p_{jsic}(k) p_i^{(\alpha)}(k - I_{j\beta s}), \Xi_{j\beta s}(k_{j\beta s}) = \mu_{j\beta s}(k_{j\beta s}),$$

$$a_{j\beta s}(k) = \lambda p_{0js}(k) p_j^{(\beta)}(k), b_{j\beta s}(k) = p_{js0}(k),$$

и значит. условие (2) выполняется.

Таким образом, в данном случае из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. При условии

$$\sum_{\bar{k}_i} \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \frac{k_{i\alpha c} e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})}{\mu_{i\alpha c}(1) \mu_{i\alpha c}(2) \dots \mu_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})} < \infty, i = \overline{1, n},$$

марковский процесс $k(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет вид:

$$P(k) = G \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha=1}^{m_i} \prod_{c=1}^r \frac{e_{i\alpha c}^{k_{i\alpha c}}(k_{i\alpha c})}{\mu_{i\alpha c}(1) \mu_{i\alpha c}(2) \dots \mu_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})},$$

где $e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r p_{icjs}(k + I_{i\alpha c} - I_{j\beta s}) e_{i\alpha c}(k_{i\alpha c} + 1) + \lambda p_{0js}(k - I_{j\beta s}) \right] \times \\ \times p_j^{(\beta)}(k - I_{j\beta s}) u(k_{j\beta s}) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{m_i} \sum_{c=1}^r p_{jsic}(k) p_i^{(\alpha)}(k - I_{j\beta s}) + p_{js0}(k) \right] \times \\ \times e_{j\beta s}(k_{j\beta s}), \quad j = \overline{1, n}, \quad \beta = \overline{1, m_j}, \quad s = \overline{1, r},$$

G – нормировочная константа.

Отметим, что в [2] рассмотрена замкнутая звездообразная экспоненциальная сеть с однотипными заявками и однолинейными системами обслуживания при зависимости вероятностей перехода от ее состояний; показано, что стационарные вероятности состояний имеют форму произведения.

1. Foster F. G. // Ann. Math. Statist. 1953. Vol.24. №2. P.355.
2. Ивницкий В. А. // Автомат. и вычисл. техн. 1994. №6. С.29.

Поступила в редакцию 08.09.98.

УДК 519.62

В.В.БОБКОВ, А.М.БОРИСЬЕВИЧ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОПРАВOK

Propose way of creating one step methods of the recursive type with infinite order of accuracy for the initial value problem in the case of a system of ordinary differential equations. Proposed way is convenient for design of numerical algorithms with automatic selection of order of accuracy and step of the grid.

Объектом нашего внимания будет задача построения одношаговых методов высоких порядков точности для численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u(t) = f(t, u(t)), \quad (1)$$

В широко известном научном издании [1, с.203] отмечается, что явный метод типа Рунге-Кутты десятого порядка точности занесен в Книгу рекордов Гиннеса. "Получение формул еще более высокого порядка превращается в сложную проблему, бросающую вызов математикам. Трудности растут быстрее, чем по экспоненте, а методы становятся громадными монстрами и делают к тому же управление длиной шага все более и более трудным" [1, с.206].

Особенно актуальной, конечно, является не столько задача построения конкретных примеров методов более высоких порядков точности, сколь проблема разработки вычислительных алгоритмов переменного порядка и шага. Далее, в развитие [2] предлагается рекурсивный способ построения одношаговых методов общего назначения любого (сколь угодно высокого) порядка точности, конструкция которых на практике допускает простые

процедуры оценки локальной погрешности, что легко может быть использовано для решения названной проблемы.

Локально на шаге $\tau > 0$ систему (1) нам будет удобнее записать в форме

$$u(t + \xi) = f(t + \xi, u(t + \xi)), \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (2)$$

Значение n -мерного вектора $u(t + \xi)$ при $\xi = 0$ будем считать известным (или вычисленным на предыдущем этапе дискретизации):

$$u(t) = y. \quad (3)$$

Нахождение $u(t + \tau)$ эквивалентно, очевидно, вычислению при $\xi = \tau$ значения поправки

$$\Delta_1(\xi) = u(t + \xi) - y. \quad (4)$$

Последняя является (см. (2) – (4)) решением следующей начальной задачи:

$$\Delta_1(\xi) = f(t + \xi, y + \Delta_1(\xi)), \quad \Delta_1(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (5)$$

В качестве первого приближения к $\Delta_1(\xi)$ возьмем вектор $\delta_1(\xi)$, удовлетворяющий задаче Коши вида

$$\delta_1(\xi) = a_0, \quad \delta_1(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (6)$$

Для выбора a_0 перепишем (5) в форме

$$\Delta_1(\xi) = a_0 + \varphi_1(\xi), \quad \Delta_1(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad (7)$$

и потребуем, чтобы

$$\varphi_1(\xi_0) = 0, \quad (8)$$

где $\xi_0 = 0$. Тогда будем иметь:

$$a_0 = f(t, y) = f. \quad (9)$$

Тем самым в качестве приближения $y(t + \xi)$ к $u(t + \xi)$ на отрезке $0 \leq \xi \leq \tau$ с локальной ошибкой порядка τ^2 можно (см. (4) – (9)) взять вектор

$$y(t + \xi) = y + \delta_1(\xi), \quad (10)$$

где

$$\delta_1(\xi) = \xi a_0 = \xi f. \quad (11)$$

Рекурсивное уточнение $y(t + \xi)$ естественно связать с поправкой

$$\Delta_2(\xi) = \Delta_1(\xi) - \delta_1(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad (12)$$

для которой по аналогии с (5) – (7) можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta_2(\xi) &= \varphi_1(\xi) = f(t + \xi, u(t + \xi)) - a_0 = a_1 \xi + \varphi_2(\xi), \\ \Delta_2(0) &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta_2(\xi) = a_1 \xi = a_1 \xi p_0(\xi), \quad \delta_2(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad p_0(\xi) \equiv p_{0,0} = 1. \quad (14)$$

По построению имеем:

$$\varphi_2(0) = 0. \quad (15)$$

Потребовав дополнительно, чтобы

$$\varphi_2(\xi_1) = 0, \quad (16)$$

где $\xi_1 \in [0, \tau]$, $\xi_1 \neq \xi_0 = 0$, получим (см. (13)), что

$$a_1 = [f(t + \xi_1, u(t + \xi_1)) - a_0] / [\xi_1 p_0(\xi_1)]. \quad (17)$$

Вместо $u(t + \xi_1)$ в (17) естественно использовать известный (см. (10))

вектор $y(t + \xi_1)$. Тогда найдем

$$a_1^{[1]} = \left[f\left(t + \xi_1, y(t + \xi_1)\right) - a_0 \right] / [\xi_1 p_0(\xi_1)] \quad (18)$$

и взамен (14) будем иметь:

$$\delta_2(\xi) = a_1^{[1]} \xi = a_1^{[1]} \xi p_0(\xi), \quad \delta_2(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (19)$$

Задача Коши (19) решается точно. Тем самым находим (ср. (10))

$$y(t + \xi) = y + \delta_1(\xi) + \delta_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (20)$$

Новое рекурсивное уточнение по аналогии с (12) свяжем с поправкой $\Delta_3(\xi) = \Delta_2(\xi) - \delta_2(\xi)$. Подобно (13) – (15) тогда можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta_3(\xi) &= \varphi_2(\xi) = f(t + \xi, u(t + \xi)) - a_0 - a_1 \xi = \\ &= a_2 \xi (\xi - \xi_1) + \varphi_3(\xi), \quad \Delta_3(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau; \end{aligned}$$

$$\delta_3(\xi) = a_2 \xi (\xi - \xi_1) p_0(\xi) = a_2 \xi p_1(\xi), \quad \delta_3(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad (21)$$

$$p_1(\xi) = \xi p_{1,0} - p_{1,1}, \quad p_{1,0} = 1, \quad p_{1,1} = \xi_1 p_{0,0} = \xi_1; \quad (22)$$

$$\varphi_3(\xi_0) = \varphi_3(\xi_1) = 0.$$

По аналогии с (16) дополнительное требование в этом случае принимает вид $\varphi_3(\xi_2) = 0$, где $\xi_2 \in [0, \tau]$, $\xi_2 \neq \xi_j, j=0,1$. Такое требование позволяет найти (ср. (17))

$$a_2 = [f(t + \xi_2, u(t + \xi_2)) - a_0 - a_1 \xi_2 p_0(\xi_2)] / [\xi_2 p_1(\xi_2)]$$

и (ср. (18))

$$a_2^{[1]} = \left[f\left(t + \xi_2, y(t + \xi_2)\right) - a_0 - a_1 \xi_2 p_0(\xi_2) \right] / [\xi_2 p_1(\xi_2)], \quad (23)$$

где (см. (18))

$$a_1^{[2]} = \left[f\left(t + \xi_1, y(t + \xi_1)\right) - a_0 \right] / [\xi_1 p_0(\xi_1)] \quad (24)$$

является естественным уточнением $a_1^{[1]}$.

Тем самым по аналогии с (19) будем иметь:

$$\delta_3(\xi) = a_2^{[1]} \xi p_1(\xi), \quad \delta_3(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (25)$$

При этом мы можем также улучшить и приближение из (19) к $\Delta_2(\xi)$:

$$\delta_2(\xi) = a_1^{[2]} \xi p_0(\xi), \quad \delta_2(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (26)$$

И. наконец, получаем уточненное приближение к $u(t + \xi)$ (ср. (10), (20)):

$$y(t + \xi) = y + \delta_1^{[4]}(\xi) + \delta_2^{[4]}(\xi) + \delta_3^{[4]}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \quad (27)$$

Заметим, что, при желании, на этой основе процесс уточнения коэффициентов можно повторить.

В общем случае по аналогии с (6), (14), (21) последовательные поправки $\delta_{i+1}(\xi)$, $0 \leq \xi \leq \tau$, $i=1,2,\dots$, можно задавать посредством начальных задач вида

$$\delta_{i+1}(\xi) = a_i(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)\dots(\xi - \xi_{i-1}) = a_i \xi p_{i-1}(\xi), \\ \delta_{i+1}(0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad (28)$$

где $\xi_j \in [0, \tau]$, $\xi_0 = 0$, $\xi_j \neq \xi_k$ ($j \neq k$). Чтобы точное решение каждой из задач Коши (28) легко было выписать в случае $i \gg 1$, перепишем многочлен вида $p_m(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_m)$ по аналогии с (14), (22) в форме

$$p_m(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \xi^{m-k} p_{m,k}. \quad (29)$$

Так как по построению $p_m(\xi) = (\xi - \xi_m)p_{m-1}(\xi)$, $m \geq 1$, то в развитие (14), (22) для определения коэффициентов $p_{m,k}$ из (29) можно записать следующие рекуррентные формулы:

$$p_{m,k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ p_{m-1,k} + \xi_m p_{m-1,k-1}, & k < m, \\ \xi_m p_{m-1,k-1}, & k = m. \end{cases} \quad (30)$$

Заметим, что вид многочлена (29) не связан с исходной системой (1), а зависит только от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$.

Перепишав на основе (30) многочлен $p_{i-1}(\xi)$ из правой части (28) в форме (29), легко выписать точное решение каждой из задач (28) через коэффициенты a_i :

$$\delta_{i+1}(\xi) = a_i \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \frac{\xi^{i+1-k}}{i+1-k} p_{i-1,k}, \quad 0 \leq \xi \leq \tau, \quad i=1,2,\dots$$

Для коэффициентов a_i в соответствии с изложенной схемой построений при этом справедливы рекурсивные равенства

$$a_i = \frac{[f(t + \xi_i, u(t + \xi_i)) - a_0 - a_1 \xi_i p_0(\xi_i) - \dots - a_{i-1} \xi_i p_{i-2}(\xi_i)]}{\xi_i p_{i-1}(\xi_i)}, \quad i=1,2,\dots$$

Коэффициент a_0 вычисляется точно (см (9)). В соответствии с этим точно находятся также $\delta_1(\xi)$ (см. (11)) и $y(t + \xi)$ (см. (10)). Для остальных же коэффициентов a_{j-1} ($j > 1$), поправок $\delta_j(\xi)$ и искомых приближений

$y(t + \xi) = y + \delta_1^{[j+1]}(\xi) + \delta_2^{[j+1]}(\xi) + \dots + \delta_j^{[j+1]}(\xi)$ по аналогии с изложенным (см. (18) – (20), (23) – (27)) строятся очевидные цепочки уточняющих процедур.

В заключение заметим, что замной переменной $\xi = \alpha\tau$ систему (2) можно привести к виду

$$v(\alpha) = \tau f(t + \alpha\tau, v(\alpha))$$

для новой неизвестной вектор-функции $v(\alpha) = u(t + \alpha\tau)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, с начальным значением $v(0) = u$ (см. (3)). Непосредственно применяя в этом случае подробно описанную методику построений, приходим к вычислительным методам, обладающим рядом дополнительных достоинств, предопределяемых тем обстоятельством, что область изменения новой переменной интегрирования α не связана (в отличие от ξ) с шагом τ .

Приведенные результаты могут быть использованы (напр., по аналогии с [2]) и при конструировании специализированных методов численного решения жестких систем.

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М., 1990.

2. Бобков В. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1995. N2. С. 41.

Поступила в редакцию 11.06.98

УДК 513.83

Г.О. КУКРАК

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

In this paper the map of hyperspaces induced by closed map of topological spaces is considered. The necessary and sufficient condition for such map to be perfect is established. Also it is proved that hyperspaces of compact subsets of coabsolute Hausdorff spaces are coabsolute.

Начнем с основных понятий и обозначений. Через τ_x и Φ_x обозначим соответственно топологию и семейство всех замкнутых подмножеств пространства X . Экспоненциальное пространство $\exp X$ пространства X , элементами которого являются все не пустые замкнутые подмножества пространства X , рассматривается с топологией Виеториса, базу которой обра-

зуют множества вида $\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{F \in \exp X : F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset\}$, где $U_i \in \tau_x$,

$n \in \mathbb{N}$. Все пространства считаем удовлетворяющими аксиоме T_1 , а отображения непрерывными и сюръективными, если иное не оговорено. Отметим также, что $X \subseteq \exp X$ как подпространство ($X \ni x \rightarrow \{x\} \in \exp X$). Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется совершенным, если оно замкнуто (т.е. $f(F) \in \Phi_y$ для любого $F \in \Phi_x$) и компактно (т.е. $f^{-1}(y)$ компактно для любого $y \in Y$) (см., напр., [1]). Для множества $A \subseteq X$ положим $T_1(A) = \{F \in \exp X : F \cap A \neq \emptyset\}$, $T_2(A) = \{F \in \exp X : F \subseteq A\}$. Легко проверяются следующие свойства:

$$\exp X \setminus T_1(A) = T_2(X \setminus A), \quad (1)$$

$$\exp X \setminus T_2(A) = T_1(X \setminus A), \quad (2)$$

$$\bigcup \{T_1(A_s) : s \in S\} = T_1(\bigcup \{A_s : s \in S\}), \quad (3)$$

$$\bigcap \{T_2(A_s) : s \in S\} = T_2(\bigcap \{A_s : s \in S\}). \quad (4)$$

Скажем, что отображение $g: \exp X \rightarrow \exp Y$ индуцировано замкнутым отображением $f: X \rightarrow Y$, если $g(F) = f(F)$ для любого $F \in \exp X$.

Предложение 1. Пусть $g: \exp X \rightarrow \exp Y$ индуцировано замкнутым отображением $f: X \rightarrow Y$. Тогда

1) g непрерывно и сюръективно;

2) g компактно тогда и только тогда, когда f совершенно и удовлетворяет следующему условию:

$f^{-1}f(F) \setminus U$ компактно для любых $F \in \Phi_X \setminus \{\emptyset\}$ и $U \in \tau_X$ таких, что $F \subseteq U$. (*)

Доказательство. Проверка 1) не сложная. Перейдем к 2). Докажем необходимость. Так как g компактно, $g^{-1}(\{y\}) = \exp f^{-1}(y)$ компактно, откуда следует компактность $f^{-1}(y)$ (см., напр., [1]) и, следовательно, совершенность отображения f . Покажем, что выполняется условие (*). Пусть $F \subseteq U$ и $\alpha = \{U_s : s \in S\}$ покрытие множества $f^{-1}f(F) \setminus U$. Не теряя общности, можно считать, что $U_s \cap F = \emptyset$ для любого $s \in S$. Рассмотрим покрытие $\{T_2(U)\} \cup \{T_1(U_s) : s \in S\}$ множества $g^{-1}(f(F))$. Пусть $\{T_2(U)\} \cup \{T_1(U_{s_i})\}_{i=1}^n$ — конечное подпокрытие. Тогда $\{U_{s_i}\}_{i=1}^n$ покрытие для $f^{-1}f(F) \setminus U$. Действительно, пусть $x \in f^{-1}f(F) \setminus U$. Обозначим $F_x = F \cup \{x\}$. Ясно, что $F_x \in g^{-1}(f(F))$, но $F_x \notin T_2(U)$. Значит, $F_x \in T_1(U_{s_j})$ для некоторого $j \leq n$, откуда следует, что $x \in U_{s_j}$.

Докажем достаточность. Пусть $B \in \exp Y$, рассмотрим $g^{-1}(B)$. Для начала заметим, что множества $T_1(U)$ и $T_2(V)$ для $U, V \in \tau_X$ образуют предбазу пространства $\exp X$. Поэтому, в силу теоремы Александера о предбазе, достаточно показать, что из любого покрытия множества $g^{-1}(B)$ элементами этой предбазы выделяется конечное подпокрытие. Итак, пусть $\{T_1(U_t)\}_{t \in T} \cup \{T_2(V_s)\}_{s \in S}$ — покрытие $g^{-1}(B)$, и $U = \bigcup \{U_t : t \in T\}$. Рассмотрим два случая.

1) Найдется $u \in B$ такой, что $f^{-1}(u) \subseteq U$. Тогда существует конечный набор $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_n}\}$ для которого $f^{-1}(u) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{t_i}$. Легко видеть, что $\{T_1(U_{t_1}), \dots, T_1(U_{t_n})\}$ — конечное покрытие множества $g^{-1}(B)$.

2) Для любого $u \in B$ имеем: $f^{-1}(u) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Обозначим $F = f^{-1}(B) \setminus U$. Ясно, что $f(F) = B$. Поскольку $F \cap U = \emptyset$, $F \subseteq V_p$ для некоторого $p \in S$. Множество $f^{-1}f(F) \setminus V_p$ компактно по предположению и лежит в U , т.е. покрывается конечным набором $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_n}\}$. Очевидно, что $\{T_1(U_{t_1}), \dots, T_1(U_{t_n}), T_2(V_p)\}$ — покрытие для $g^{-1}(B)$. Предложение доказано.

В дальнейшем мы покажем, что из компактности отображения g следует его замкнутость. Для этого нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего напомним, что замкнутой базой пространства X называется такое подсемейство $\gamma \subseteq \Phi_X$, что любое $F \in \Phi_X$ представляется в виде $F = \bigcap \alpha$, где $\alpha \subseteq \gamma$. Семейство $\sigma \subseteq \Phi_X$ называется замкнутой предбазой, если совокупность всех конечных пересечений элементов σ образуют замкнутую базу. Из формул (1)–(4) видно, что совокупность множеств $T_1(F)$ и $T_2(F)$, где $F \in \Phi_X \setminus \{\emptyset\}$ образуют замкнутую предбазу, а множества $\langle \langle F; F_1, \dots, F_n \rangle \rangle = T_1(F) \cup T_2(F_1) \cup \dots \cup T_2(F_n)$ — замкнутую базу пространства $\exp X$. Нам также потребуется следующая легко проверяемая

Лемма 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ компактно, и семейство $\xi \subseteq \Phi_X \setminus \{\emptyset\}$ удовлетворяет условию:

для любого конечного подсемейства $\xi_1 \subseteq \xi$ найдется $F \in \xi$ такое, что $F \subseteq \bigcap \xi_1$. (**)

Тогда $f(\bigcap \xi) = \bigcap \{f(F) : F \in \xi\}$.

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое $\Sigma \subseteq \exp X$, $\Sigma = \bigcap \xi$, где ξ есть семейство некоторых множеств вида $\langle \langle F; F_1, \dots, F_n \rangle \rangle$. Обозначим через η семейство, которое получается из ξ путем добавления к нему всех конечных пересечений элементов ξ . Очевидно, что семейство η удовлетворяет условию (**) и $\bigcap \eta = \bigcap \xi$. Таким образом, если $g: \exp X \rightarrow \exp Y$, индуцированное совершенным отображением $f: X \rightarrow Y$, компактно, то его замкнутость можно легко вывести, опираясь на формулы (1)–(4), определение множеств $\langle \langle F; F_1, \dots, F_n \rangle \rangle$, лемму 1 и следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть отображение $g: \text{exp} X \rightarrow \text{exp} Y$ индуцировано замкнутым отображением $f: X \rightarrow Y$. Тогда

- 1) $g(T_1(F)) = T_1(f(F))$,
- 2) $g(T_2(F)) = T_2(f(F))$,
- 3) $g(T_1(F_1) \cap \dots \cap T_1(F_n)) = T_1(f(F_1)) \cap \dots \cap T_1(f(F_n))$,
- 4) $g(T_1(F_1) \cap \dots \cap T_1(F_n) \cap T_2(F)) = T_1(f(F_1 \cap F)) \cap \dots \cap T_1(f(F_n \cap F)) \cap T_2(f(F))$ для любых $F, F_1, \dots, F_n \in \text{exp} X$.

Доказательство. Проверка равенств 1), 2), 3) достаточно простая. Проверим 4). Прежде всего заметим, что $T_1(F_1) \cap \dots \cap T_1(F_n) \cap T_2(F) = T_1(F_1 \cap F) \cap \dots \cap T_1(F_n \cap F) \cap T_2(F)$. Поэтому, в силу 1)–3) $g(T_1(F_1) \cap \dots \cap T_1(F_n) \cap T_2(F)) \subseteq T_1(f(F_1 \cap F)) \cap \dots \cap T_1(f(F_n \cap F)) \cap T_2(f(F))$. Для доказательства обратного включения рассмотрим любое $B \in T_1(f(F_1 \cap F)) \cap \dots \cap T_1(f(F_n \cap F)) \cap T_2(f(F)) = g(T_1(F_1 \cap F) \cap \dots \cap T_1(F_n \cap F) \cap T_2(F))$. Найдутся $C_1, C_2 \in \text{exp} X$ такие, что $g(C_i) = B$ при $i=1, 2$, $C_1 \cap F_1 \cap F \neq \emptyset$ при любом $i \leq n$, а $C_2 \subseteq F$. Положим $C = (C_1 \cup C_2) \cap F$. Легко показать, что $C \in T_1(F_1 \cap F) \cap \dots \cap T_1(F_n \cap F) \cap T_2(F) \cap g^{-1}(B)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Отображение $g: \text{exp} X \rightarrow \text{exp} Y$, индуцированное замкнутым отображением $f: X \rightarrow Y$, совершенно тогда и только тогда, когда f совершенно и удовлетворяет условию (*).

Пусть теперь ΘX – пространство всех ультрафильтров $\xi \subseteq \tau_x$ с базой $\{O_U: U \in \tau_x\}$, где $O_U = \{\xi \in \Theta X: \xi \ni U\}$ [2]. Абсолютом в смысле Шапиро называют подпространство $qX \subseteq \Theta X \times X$, состоящее из всех пар (ξ, x) таких, что $\xi \rightarrow x$, т.е. $\cap \{[U]_x: U \in \xi\} \ni x$, где $[U]_x$ – замыкание U в X . Известно [3], что пространство qX экстремально несвязно (т.е. $[U]_{qX} \in \tau_{qX}$ для любого $U \in \tau_{qX}$), а отображение проектирования $\pi: qX \rightarrow X: (\xi, x) \rightarrow x$ совершенно, неприводимо и отделимо (отображение $f: X \rightarrow Y$ называют неприводимым, если $f(F) \neq Y$, как только $F \in \phi_x$ и $F \neq X$; и отделимым, если любые две различные точки $x, y \in X$, для которых $f(x) = f(y)$ имеют дизъюнктные окрестности). Напомним также, что пространства X и Y соабсолютны (т.е. имеют общий с точностью до гомеоморфизма абсолют) тогда и только тогда, когда существуют пространство Z и совершенные неприводимые и отделимые отображения $f_1: Z \rightarrow X$ и $f_2: Z \rightarrow Y$ [4, 5].

Предложение 2 [6]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ совершенное отображение. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) отображение $f: X \rightarrow Y$ неприводимо,
- 2) отображение $g_1: \text{exp} X \rightarrow \text{exp} Y$ неприводимо,
- 3) отображение $g_2: \text{exp}_c X \rightarrow \text{exp}_c Y$ неприводимо,

где $\text{exp}_c X = \{F \in \text{exp} X: F \text{ компактно}\}$ — C -экспонента пространства X , а отображения g_1 и g_2 индуцированы отображением f .

Следствие. Пусть $f: X \rightarrow Y$ совершенно, неприводимо, отделимо и удовлетворяет условию (*), и одно из пространств регулярно. Тогда экспоненты этих пространств соабсолютны.

Доказательство очевидно, так как в этом случае оба пространства регулярны, а их экспоненты хаусдорфовы (см., напр., [1]).

Рассмотрим теперь хаусдорфово пространство X . Имеет место

Предложение 3. Отображение $g: \text{exp}_c X \rightarrow \text{exp}_c Y$, индуцированное непрерывным отображением $f: X \rightarrow Y$, совершенно тогда и только тогда, когда совершенно f .

Этот результат был получен М.М. Чобаном в [6] для вполне регулярных пространств. На случай произвольных хаусдорфовых пространств его рассуждения не переносятся.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как X замкнуто в $\exp_c X$. Докажем достаточность. Компактность g следует из тех же рассуждений, что и в предложении 1 и очевидного факта: $f^{-1}f(F) \setminus U$ компактно для любых компактного $F \subseteq X$ и открытого $U \supseteq F$. Замкнутость g также доказывается аналогично предыдущему, так как в силу совершенности f компактные подмножества пространства X и только они отображаются на компактные подмножества пространства Y .

Следствие. C -экспоненты соабсолютных (т.е. имеющих общий с точностью до гомеоморфизма абсолюта) хаусдорфовых пространств соабсолютны.

Доказательство следует из предложений 2,3, известного факта, что пространства X и Y соабсолютны тогда и только тогда, когда существуют пространство Z и совершенные неприводимые и отделимые отображения $f_1: Z \rightarrow X$ и $f_2: Z \rightarrow Y$ [4.5] и хаусдорфовости C -экспонент хаусдорфовых пространств.

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1980.
2. Илиадис С. Д., Фомин С. В. // УМН. 1966. Т.21. Вып.4. С.77.
3. Шапиро Л. Б. // Докл. АН СССР. 1976. Т.226. №3. С.523.
4. Пономарев В. И. // УМН. 1966. Т.21. Вып.4. С.101.
5. Пономарев В. И., Шапиро Л. Б. // УМН. 1976. Т.31. Вып.5. С.121.
6. Чобан М. М. // Fund. Math. 1971. Т.71. С.27.
7. Чобан М. М. // Докл. АН СССР. 1969. Т.186. С.272.

Поступила в редакцию 13.04.98.

УДК 517.5

А.Н. БОКИЛА

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

The local and uniform estimations for deviations of Gelder class functions of two variables from special rational operators with positive kernels have been obtained.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в пространстве R^2 и такая, что существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x, y)| dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Введем в рассмотрение положительный оператор

$$F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) K(t, x) K(\tau, y) dt d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x) K(\tau, y) dt d\tau}, \quad (1)$$

где $K(t, x) = \frac{\sin^2[\Phi_n(t) - \Phi_n(x)]}{(t-x)^2}$, $K(\tau, y) = \frac{\sin^2[\Phi_m(\tau) - \Phi_m(y)]}{(\tau-y)^2}$ — ядра Фейера,

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - x), \quad z_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_k > 0, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

$$\Phi_m(y) = \sum_{k=1}^m \arg(w_k - y), \quad w_k = \mu_k + i\nu_k, \quad \nu_k > 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x) dt = \pi \Phi_n(x) \quad (2)$$

(см. [1]), перепишем:

$$F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f) = \frac{1}{\pi^2 \Phi_n(x) \Phi_m(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) K(t, x) K(\tau, y) dt d\tau \quad (1)$$

Введенный оператор является рациональной функцией порядка $2n-2$ относительно переменной x и рациональной функцией порядка $2m-2$ относительно переменной y .

Непосредственно из определения следует, что рациональный оператор $F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)$ точен для константы, в частности $F_{2n-2, 2m-2}(x, y; 1) \equiv 1$.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по каждой из переменных x и y в отдельности, т. е. выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &\leq A|x_1 - x_2|^\alpha + B|y_1 - y_2|^\beta, \\ -\infty < x_1, x_2, y_1, y_2 < +\infty, 0 < \alpha, \beta < 1, \end{aligned} \quad (3)$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)| &< (1 + \frac{2}{\pi(1-\alpha)}) \frac{A}{[\Phi_n(x)]^\alpha} + \\ &+ (1 + \frac{2}{\pi(1-\beta)}) \frac{B}{[\Phi_m(y)]^\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Учитывая свойство точности оператора $F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)$ для константы, соотношение (1) и условие (3) теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} &|f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 \Phi_n(x) \Phi_m(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y) - f(t, \tau)| K(t, x) K(\tau, y) dt d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 \Phi_n(x) \Phi_m(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [A|x-t|^\alpha + B|y-\tau|^\beta] K(t, x) K(\tau, y) dt d\tau = \\ &= \frac{A}{\pi \Phi_n(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-t|^\alpha K(t, x) dt + \frac{B}{\pi \Phi_m(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} |y-\tau|^\beta K(\tau, y) d\tau = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть x фиксировано. Введем множества $E_x = \{t: |x-t| \leq \frac{1}{\Phi_n(x)}\}$,

$CE_x = R \setminus E_x$. Оценим интеграл I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{A}{\pi \Phi_n(x)} \int_{E_x} |x-t|^\alpha K(t, x) dt + \frac{A}{\pi \Phi_n(x)} \int_{CE_x} |x-t|^\alpha K(t, x) dt < \\ &< \frac{A}{[\Phi_n(x)]^\alpha} \frac{1}{\pi \Phi_n(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x) dt + \frac{A}{\pi \Phi_n(x)} \int_{CE_x} \frac{dt}{|t-x|^{2-\alpha}} = \end{aligned}$$

$$=(1+\frac{2}{\pi(1-\alpha)})\frac{A}{[\Phi_n(x)]^\alpha}. \quad (6)$$

Аналогично, разбивая область интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на два множества $E_y = \{\tau: |y-\tau| \leq \frac{1}{\Phi_m(y)}\}$, $CE_y = R \setminus E_y$, для каждого фиксированного $y \in R$, получим, что

$$I_2 \leq (1+\frac{2}{\pi(1-\beta)})\frac{B}{[\Phi_m(y)]^\beta}. \quad (7)$$

Из неравенств (5)–(7) получаем требуемую оценку (4).

$$\text{Следствие 1. Если } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = +\infty, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + 1}, \quad (8)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sigma_m = +\infty, \quad \sigma_m = \sum_{k=1}^m \frac{\nu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2 + 1}, \quad (9)$$

то в условиях теоремы 1 последовательность рациональных функций $F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)$ при $n, m \rightarrow +\infty$ равномерно сходится к функции $f(x, y)$ на любом ограниченном прямоугольнике.

Доказательство. Следствие 1 немедленно вытекает из оценки (4) и соотношений:

$(1+x^2)\Phi_n(x) \geq \sigma_n$, $(1+y^2)\Phi_m(y) \geq \sigma_m$, справедливость которых следует из очевидного неравенства $(1+x^2)(\alpha^2 + \beta^2 + 1) \geq (\alpha - x)^2 + \beta^2$, $\forall \alpha, \beta \in R$.

Через $C_\infty(R^2)$ будем обозначать класс функций $f(x, y)$, непрерывных в каждой точке $(x, y) \in R^2$ по совокупности переменных и удовлетворяющих условиям $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = a(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = b(y)$.

Теорема 2. Если $f(x, y) \in C_\infty(R^2)$ и индуцированная функция $\varphi(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(\text{tg} \frac{u}{2}, \text{tg} \frac{v}{2})$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} |\varphi(u_1, v_1) - \varphi(u_2, v_2)| &\leq A|u_1 - u_2|^\alpha + B|v_1 - v_2|^\beta, \\ -\pi &\leq u_1, u_2, v_1, v_2 \leq \pi, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

то справедливо соотношение

$$\begin{aligned} |f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)| &= O[\chi(\frac{1}{(1+x^2)\Phi_n(x)}, \alpha) + \\ &+ \chi(\frac{1}{(1+y^2)\Phi_m(y)}, \beta)] \end{aligned} \quad (11)$$

при $n, m \rightarrow +\infty$, где $\chi(\delta, \alpha) = \delta^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\chi(\delta, 1) = \delta \ln \frac{1}{\delta}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 необходимо видоизменить представление (1). Прежде всего, полагая $x = \text{tg} \frac{u}{2}$, $t = \text{tg} \frac{v}{2}$, получаем:

$$\Phi_n(t) - \Phi_n(x) = \int_x^t \Phi_n(\rho) d\rho = \int_{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - \rho)^2 + \beta_k^2} d\rho, \quad (12)$$

где $\gamma_n(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^2 + \beta_k^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$, (см. [1]).

Затем, сделав замену переменных $\tau = \operatorname{tg} \frac{p}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{q}{2}$, получаем:

$$\Phi_m(\tau) - \Phi_m(y) = \int_{\tau}^y \Phi_m(\rho) d\rho = \int_{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}} \sum_{k=1}^m \frac{v_k}{(\mu_k - \rho)^2 + v_k^2} d\rho \equiv \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta, \quad (13)$$

где $\gamma_m(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{v_k}{(\mu_k - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^2 + v_k^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$.

Из (12) следует, что $\gamma_n(u) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} \Phi_n(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) = \frac{1+x^2}{2} \Phi_n(x)$, (14)

из (13) следует, что $\gamma_m(q) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{q}{2}} \Phi_m(\operatorname{tg} \frac{q}{2}) = \frac{1+y^2}{2} \Phi_m(y)$. (15)

С учетом (12) – (15) и (2) после замены переменных в (1), имеем

$$\begin{aligned} F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f) &= F_{2n-2, 2m-2}(\operatorname{tg} \frac{u}{2}, \operatorname{tg} \frac{q}{2}; f) = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(v, p) \frac{\sin^2 \int \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \frac{\sin^2 \int \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку оператор $F_{2n-2, 2m-2}(\operatorname{tg} \frac{u}{2}, \operatorname{tg} \frac{v}{2}; f)$ точен для константы, будем иметь с учетом периодичности подынтегральной функции в (1) равенство

$$\begin{aligned} f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f) &= \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \times \\ &\times \int_{|u-v| \leq \pi} \int_{|p-q| \leq \pi} [\varphi(u, q) - \varphi(v, p)] \times \\ &\times \frac{\sin^2 \int \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \frac{\sin^2 \int \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp = I. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $(u, q) \in R^2$ – фиксированная точка. Введем множества

$$E_u = \begin{cases} \{v: |v-u| \leq \pi\}, & \text{если } \gamma_n(u) \leq \frac{1}{2}, \\ \{v: |v-u| \leq \frac{\pi}{2\gamma_n(u)}\}, & \text{если } \gamma_n(u) > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$E_q = \begin{cases} \{p: |q-p| \leq \pi\}, & \text{если } \gamma_m(q) \leq \frac{1}{2}, \\ \{p: |q-p| \leq \frac{\pi}{2\gamma_m(q)}\}, & \text{если } \gamma_m(q) > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$CE_u = \{v: |v-u| \leq \pi\} \setminus E_u, \quad CE_q = \{p: |q-p| \leq \pi\} \setminus E_q.$$

Очевидно, если $\gamma_n(u) \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_m(q) \leq \frac{1}{2}$, то множества CE_u и CE_q являются пустыми множествами. В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $\gamma_n(u) > \frac{1}{2}$, $\gamma_m(q) > \frac{1}{2}$. Из (16) и (10) следует, что при всякой фиксированной $(u, q) \in R^2$

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \times \\ &\times \int_{|q-p| \leq \pi} \int_{|v-u| \leq \pi} |\varphi(u, q) - \varphi(v, p)| \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp \leq \\ &\leq \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{|q-p| \leq \pi} \int_{|v-u| \leq \pi} [A|v-u|^\alpha + B|q-p|^\beta] \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp \leq \\ &\leq \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \left\{ \int_{E_q E_u} \int + \int_{E_q CE_u} \int + \int_{CE_q E_u} \int + \int_{CE_q CE_u} \int \right\} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя линейность и положительность оператора (1), условие (10) теоремы 2, получим оценку интеграла I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{E_q E_u} \int [A|v-u|^\alpha + B|q-p|^\beta] \times \\ &\times \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}. \quad (18)$$

Оценим интеграл I_2 . При этом сначала рассмотрим случай, когда $0 < \alpha, \beta < 1$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{E_q} \int_{CE_u} [A|v-u|^\alpha + B|q-p|^\beta] \times \\ &\quad \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dv dp \leq \\ &\leq \frac{A}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{CE_u} |v-u|^\alpha \frac{\pi^2}{(v-u)^2} dv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dp + \\ &+ \frac{B}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \left(\frac{\pi}{2\gamma_m(q)}\right)^\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} dv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dp \leq \\ &\leq \frac{A\pi}{4\gamma_n(u)} \int_{CE_u} \frac{dv}{|v-u|^{2-\alpha}} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{A\pi}{2(1-\alpha)} \frac{1}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \\ &\quad + \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегралы I_2 и I_3 оцениваются аналогично. В результате оценки интеграла I_3 получим, что

$$I_3 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta-1} \frac{B\pi}{2(1-\beta)} \frac{1}{[\gamma_m(q)]^\beta}. \quad (20)$$

И, наконец, оценим интеграл I_4 .

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \frac{A\pi^2}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{CE_u} \frac{dv}{|v-u|^{2-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \int_p^q \gamma_m(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{q-p}{2}} dp + \\ &+ \frac{B\pi^2}{16\pi^2 \gamma_n(u) \gamma_m(q)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \int_u^v \gamma_n(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} dv \int_{CE_q} \frac{dp}{|q-p|^\beta} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{A\pi}{2(1-\alpha)} \frac{1}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta-1} \frac{B\pi}{2(1-\beta)} \frac{1}{[\gamma_m(q)]^\beta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из соотношений (17)–(21) получаем следующую оценку

$$|I| = |f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)| < \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \frac{2-\beta}{1-\beta} \frac{\pi^\beta}{2^{\beta-1}} \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1. \quad (22)$$

По схеме, приведенной выше для случая $0 < \alpha, \beta < 1$, получаем следующие оценки $|I|$ для остальных случаев:

$$|I| < \frac{A\pi \ln 4}{\gamma_n(u)} + A\pi \frac{\ln \gamma_n(u)}{\gamma_n(u)} + \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \frac{2-\beta}{1-\beta} \frac{\pi^\beta}{2^{\beta-1}} \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}, \quad \alpha = 1, \quad 0 < \beta < 1. \quad (23)$$

$$|I| < \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \frac{B\pi \ln 4}{\gamma_m(q)} + B\pi \frac{\ln \gamma_m(q)}{\gamma_m(q)} + \frac{\pi^\beta}{2^{\beta-1}} \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta = 1. \quad (24)$$

$$|I| < \frac{A\pi \ln 4}{\gamma_n(u)} + A\pi \frac{\ln \gamma_n(u)}{\gamma_n(u)} + \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{A}{[\gamma_n(u)]^\alpha} + \frac{B\pi \ln 4}{\gamma_m(q)} + B\pi \frac{\ln \gamma_m(q)}{\gamma_m(q)} + \frac{\pi^\beta}{2^{\beta-1}} \frac{B}{[\gamma_m(q)]^\beta}, \quad \alpha = \beta = 1. \quad (25)$$

Учитывая полученные оценки (22)–(25), а также равенства (14) и (15), получаем требуемое соотношение (11).

Следствие 2. Если выполнены условия (8)–(10), то последовательность рациональных функций $F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)$ при $n, m \rightarrow +\infty$ равномерно сходится к функции $f(x, y)$ на всей плоскости R^2 .

Доказательство. Предположим для определенности, что $0 < \alpha, \beta < 1$. Из (22) с учетом (14) и (15), используя неравенства $(1+x^2)\Phi_n(x) \geq \sigma_n$, $(1+y^2)\Phi_m(y) \geq \sigma_m$, получим

$$|f(x, y) - F_{2n-2, 2m-2}(x, y; f)| \leq \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \frac{4A\pi^\alpha}{[(1+x^2)\Phi_n(x)]^\alpha} + \frac{2-\beta}{1-\beta} \frac{4B\pi^\beta}{[(1+y^2)\Phi_m(y)]^\beta} \leq \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \frac{4A\pi^\alpha}{[\sigma_n]^\alpha} + \frac{2-\beta}{1-\beta} \frac{4B\pi^\beta}{[\sigma_m]^\beta}.$$

1. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.

2. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

Поступила в редакцию 23.10.98.

В.А.МОЩЕНСКИЙ, Д.В.МОЩЕНСКИЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ И РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

It is proved that boolean functions which are computed by Turing machines with great number of inner states can be computed by a fixed Turing machine.

Подчеркнем связь между вычислением предикатов и реализацией последовательности булевых функций (БФ). Об этой связи говорится и в монографии Р.Нигматуллина: «Одним из главных мотивов при изучении сложности БФ является ее связь со сложностью машинных вычислений... Сложность схемы из функциональных элементов хорошо мажорирует время и память машинных вычислений» ([1, с.53]). Основным доказываемым здесь результат гласит: имеется последовательность БФ, весьма сложная по реализации машинами Тьюринга (но за линейное время), которая задает вычислимый предикат (но с очень большой временной сложностью) и, значит, каждая БФ из этой последовательности вычислима и машиной Тьюринга с фиксированной сложностью.

1. Перейдем к точным формулировкам. Пусть $R(z)$ есть произвольный предикат, определенный в множестве N . При каждом m , $m \in N$, можем положить $R(m) = R(a_{m0}, a_{m1}, \dots, a_{mK})$, где каждое $a_{mi} \in B = \{0, 1\}$, $a_{m0} = 1$ и

$$\sum_{i=0}^K 2^{K-i} a_{mi} = m.$$

Пусть каждая x_i ($1 \leq i \leq n$) есть переменная над множеством $B = \{0, 1\}$. Тогда $R(1, x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$, если предикат $R(z)$ всюду определен ($n \geq 1$). Значит, $\{R_i(1, x_1, \dots, x_n) \mid i \geq 1\} = P_2^{(n)}$, если R_i ($i \geq 1$) есть все всюду определенные предикаты: в общем случае $\{R_i(1, x_1, \dots, x_n) \mid i \geq 1\} = P_2^{(n)} \cup \hat{P}_2^{(n)}$, где $\hat{P}_2^{(n)}$ — множество всех частичных БФ от n аргументов ($n \geq 1$).

Утверждение 1. Каждый предикат $R(z)$, определенный в N , задает последовательность БФ

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots \quad (1)$$

(всюду определенных или/и частичных); и обратно, каждая такая последовательность (1) задает соответствующий предикат $R(z)$ в множестве N (без определения значений $R(0)$ и $R(1)$).

Следствие 1. Не каждая последовательность (1) задает вычислимый предикат.

В самом деле, существуют невычислимые предикаты. Более точно, справедливо

Утверждение 2. Не каждая последовательность (1), где БФ f_n определяется первым представлением Лупанова^{*}, задает вычислимый предикат.

Действительно, в противном случае по первому представлению БФ можно было бы организовать вычисление и временная сложность вычисления каждого предиката была бы асимптотически не больше, чем $2^n/n$.

Перейдем к формулировке и доказательству основного утверждения. Для этого воспользуемся следующим результатом.

Теорема ([3]). Существует последовательность

^{*} См. [2, с. 68].

$$g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n), \dots, \quad (2)$$

где БФ $g_n(x_1, \dots, x_n)$ не вычислима (за $2n$ шагов) ни одной машиной Тьюринга с внешним алфавитом мощности K ($K \geq 2$) и числом внутренних состояний меньшим, чем $2^{n-1}/n(K-1)$.

В последовательности (2) функции g_n при достаточно большом n могут быть разными. Поэтому мы упорядочим множество всех функций из $P_2^{(n)}$ таким образом. Для данной булевой функции f через $v(f)$ обозначим то натуральное число, двоичная запись которого есть векторное задание f . Теперь будем считать, что для любых f_1 и f_2 из множества $P_2^{(n)}$ функция f_1 предшествует функции f_2 , если $v(f_1) < v(f_2)$.

Теорема. Существует вычислимый за $O(n^2 2^{2n} 2^{2^n})$ шагов общерекурсивный предикат, обладающий следующими свойствами:

- 1) он задает последовательность (2), каждая функция $g_n(x_1, \dots, x_n)$ из которой удовлетворяет теореме Кузьмина (при $K=2$);
- 2) функция $g_n(x_1, \dots, x_n)$ есть первая такая функция из множества $P_2^{(n)}$.

Доказательство. Опишем алгоритм нахождения значения предиката $R_1(z)$ при произвольном $z \geq 2$, $z = 1x_1 x_2 \dots x_n$ ($\forall x_i \in B$) и докажем, что $R_1(z) = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где g_n — первая функция из $P_2^{(n)}$, удовлетворяющая теореме Кузьмина.

Этот алгоритм будет заключаться в переборе всех булевых функций из $P_2^{(n)}$ в порядке старшинства и в переборе для каждой из них всех одноленточных машин Тьюринга с внешним алфавитом $\{0, 1\}$ (т. е. тех машин, которые фигурируют в [3]) и числом внутренних состояний, равным $\lfloor 2^{n-1}/n \rfloor + 1$. и моделировании работы каждой такой машины над всеми двоичными словами длины n в течение $2n$ шагов, чтобы убедиться, вычислима ли очередная f_i из $P_2^{(n)}$ какой-либо требуемой машиной.

Чтобы этот алгоритм реализовать, необходимо располагать процессами порождения как всех указанных машин Тьюринга, так и векторного задания очередной булевой функции. Сначала опишем, как получить все необходимые для этого величины, ориентируясь на исходное слово z , а затем оценим временную сложность вычисления самого трудоемкого процесса.

На первом этапе по исходному двоичному слову $z = 1x_1 x_2 \dots x_n$ длины $n+1$ вычислим $m_0 = \lfloor 2^{n-1}/n \rfloor + 1$. Для этого сначала вычислим 2^{n-1} , построив на ленте правее слова z (через одну пустую клетку, которой всегда будем разделять разные слова на ленте) слово $z_1 = 10^{(n-1)}$, содержащее одну единицу и $n-1$ нулей. Затем вычисляем n в двоичной записи, используя алгоритм перевода унарной записи в двоичную ([4, с.29]). После этого найдем m_0 , применяя школьный алгоритм деления и добавляя единицу. (В конце этого этапа на ленте будут слова z , z_1 , m_0 .)

На втором этапе заготовим таблицу всех команд подвижной машины (т.е. машины со сдвигами считывающей головки только вправо (П) или влево (Л)) с m_0 внутренними состояниями и буквами внешнего алфавита $0, 1$. Это будет вектор $\tilde{m}$ длины $2m_0(3 + \lfloor \log_2 m_0 \rfloor)$, каждая «компонента» которого из $3 + \lfloor \log_2 m_0 \rfloor$ разрядов содержит запись daq_i (записи a и d занимают по одной клетке, а запись q_i отождествляется с двоичной записью числа i , а она занимает, как известно, $\lfloor \log_2 m_0 \rfloor + 1$ клеток ленты; мы берем немножко больше, полагая, что $\lfloor \log_2 m_0 \rfloor + 1 = n - \lfloor \log_2 n \rfloor$), где $a \in B$, $d \in \{П, Л\}$, $0 \leq i \leq \leq m_0$. Здесь удобно придерживаться указанного вида daq_i записи правой части команды машины Тьюринга, ибо в таком случае она начинается с буквы П или Л и после одной двоичной буквы следует двоичная запись

числа i (которую в дальнейшем обозначаем $(i)_2$), а окончанием ее является снова буква П или Л. Значит, возможные значения daq_i принадлежат множеству $\{0Lq_i, 0Пq_i, 1Lq_i, 1Пq_i \mid 0 \leq i \leq m_0\}$ и его элементы упорядочены следующим образом:

$$\begin{aligned} 0Lq_0 < 0Lq_1 < \dots < 0Lq_{m_0} < 0Пq_0 < 0Пq_1 < \dots < 0Пq_{m_0} < \\ < 1Lq_0 < \dots < 1Lq_{m_0} < 1Пq_0 < \dots < 1Пq_{m_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Все "координаты" вектора $\tilde{m}$ в первый момент положим равными $0Lq_0$ и полученный вектор обозначим через $\tilde{m}_1$. (Заметим, что вектор $\tilde{m}_1$ задает машину Тьюринга, вычисляющую булеву функцию-константу нуль). Правее $\tilde{m}_1$ запишем вектор $\tilde{p}_1 = (0, \dots, 0)$ из n нулей. Наконец, правее вектора $\tilde{p}_1$ заготовим вектор $\tilde{b}_1$ длины 2^n (сначала со всеми компонентами, равными нулю, и, значит, такой вектор задает первую функцию из $P_2^{(n)}$) для записи векторного задания булевых функций из рассматриваемого множества функций. Итак, все величины для проведения указанного моделирования построены.

Пусть БФ f_i , представленная вектором $\tilde{b}_i$, оказалась вычислена некоторой из указанных машин. Чтобы получить следующую f_{i+1} , к вектору $\tilde{b}_i$ (как двоичной записи) следует прибавить 1. Для проверки того, является ли функция f_{i+1} вычислимой, "запускаем" машину $\tilde{m}_1$ сначала над словом $0^{(n)}$ и после $2n$ шагов (согласно доказательству теоремы Кузьмина $2n$ шагов достаточно: шаги отсчитываем метками над буквами слова $\tilde{p}_1$, ибо наша машина имеет больше, чем два символа) проверяем, остановилась ли она. Если моделируемая машина остановилась и ее результат есть $f_i(0, \dots, 0)$, то к вектору $\tilde{p}_1$ добавляем 1.

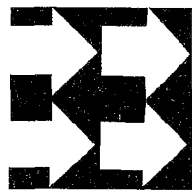
Если она не остановилась или остановилась, но результат не равен $f_i(0^{(n)})$, то строим машину $\tilde{m}_2$, которая получается из $\tilde{m}_1$ путем замены первой координаты на $0Lq_1$. В общем случае $\tilde{m}_{i+1}$ получается из $\tilde{m}_i$ заменой первой "координаты" a_{i1} из $\tilde{m}_i$ на следующую за a_{i1} согласно (3), причем следующей за $1Пq_{m_0}$ будет $0Lq_0$ с переносом "единицы" в следующую "координату". Другими словами, вектор $\tilde{m}_{i+1}$ получается из $\tilde{m}_i$ добавлением согласно (3) "единицы" в $4(m_0+1)$ -арной системе счисления. (Хранить последовательность (3) на ленте нет необходимости; достаточно сравнивать i с m_0 , и если $i < m_0$, то к $(i)_2$ добавить 1, если же $i = m_0$, то по a и d определить следующую.) Если, перебрав все указанные машины (что будет соответствовать заполнению всех "координат" значением $1Пq_{m_0}$), БФ f_{i+1} окажется хотя бы в одной точке, не вычислимой за время $2n$, то она искомая. Поскольку мы взяли m_0 равным половине от асимптотической сложности, то такая БФ найдется, после чего выдается ее значение на наборе $x_1 x_2 \dots x_n$.

Осталось оценить время самого сложного процесса. Ясно, что им является моделирование в течение $2n$ шагов вычисления 2^n наборов не более $C_1 2^{2^n}$ булевых функций, где $0 < C_1 < 1$, ибо $2^{n-1}/n$ есть половина сложности по [3] (при $K=2$).

Моделирование одного шага потребует $O(n2^n)$ шагов, ибо требуется по-буквенно сравнивать два слова длины n , находящиеся на расстоянии 2^n . Значит, моделирование $2n$ шагов потребует $O(n^2 2^n)$ шагов, а вычисление на всех 2^n двоичных наборах потребует $O(n^2 2^{2n})$, моделирование вычисления указанного множества булевых функций – $O(n^2 2^{2n} 2^{2^n})$ шагов. Теорема доказана.

1. Нигматуллин Р. Сложность булевых функций. Казань, 1983.
2. Лупанов О. Б. // Проблемы кибернетики. М., 1963. Вып.10. С.63.
3. Кузьмин В. А. // Там же. М., 1965. Вып.13. С.75.
4. Трахтенброт Б. А. Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, 1967.

Поступила в редакцию 06.03.98.



УДК 519.1

И.Э.ЗВЕРОВИЧ

РАЗБИЕНИЯ ВЕРШИН ГРАФОВ И КОРАСКРАСКИ

Let P and Q be hereditary classes of graphs. Denote by $S(P, Q)$ the class of all graphs G such that there exists a partition $VG = X \cup Y$ satisfying the following conditions: $G(X) \in P$ and $G(Y) \in Q$. A class P is called $\cup$ -closed if $G \cup H \in P$ for every graphs $G, H \in P$.

Theorem 1. If P is a $\cup$ -closed hereditary class, which has no finite forbidden induced subgraph characterization, and the independence number $\alpha(G)$ is bounded above for all graphs $G \in Q$, then $S(P, Q)$ has no finite forbidden induced subgraph characterization.

We also consider co-colorings of graphs.

Будем придерживаться стандартной терминологии [1]. Теоретико-графовое свойство (класс графов) P называется *наследственным*, если $H \in P$ для любого графа $G \in P$ и любого его порожденного подграфа H . Одной из основных проблем исследования наследственных классов является проблема выяснения существования конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов. Если наследственный класс графов имеет конечную характеристику, то для него легко построить полиномиальный алгоритм распознавания. В противном случае существование такого алгоритма не гарантируется.

Здесь мы рассмотрим одну общую модель семейства наследственных классов, которые не допускают конечной характеристики, и один частный случай, в котором построим полиномиальный алгоритм распознавания.

Пусть P и Q – два наследственных класса графов. Обозначим через $S(P, Q)$ класс всех графов G таких, что существует разбиение $VG = X \cup Y$, удовлетворяющее условиям $G(X) \in P$ и $G(Y) \in Q$.

Класс P называется $\cup$ -замкнутым, если дизъюнктивное объединение $G \cup H$ содержится в P для любых двух графов $G, H \in P$.

Теорема 1. Если P является $\cup$ -замкнутым наследственным классом, не имеющим конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов, а числа независимости $\alpha(G)$ ограничены сверху константой для всех графов $G \in Q$, то класс $S(P, Q)$ не имеет конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Доказательство. Выберем произвольную бесконечную последовательность $(G_i; i \geq 1)$ попарно различных минимальных запрещенных порожденных подграфов для класса P . Обозначим $c = \max\{\alpha(G): G \in Q\}$. Построим графы $H_i = (c + 1)G_i$, состоящие из $c + 1$ дизъюнктивных копий графа G_i , $i \geq 1$.

Покажем, что $H_i \notin S(P, Q)$ при любом $i \geq 1$. Действительно, в противном случае существует разбиение $VH_i = X_i \cup Y_i$. По крайней мере одна ко-

пия графа G_i в H_i не имеет ни одной общей вершины с множеством Y_i , так как выполняется неравенство $\alpha(H_i(Y_i)) \leq c$. Поэтому эта копия целиком содержится в множестве X_i , что невозможно в силу $H_i(X_i) \in P$. Таким образом, H_i действительно является запрещенным порожденным подграфом для класса $S(P, Q)$.

Докажем минимальность графа H_i как запрещенного порожденного подграфа для $S(P, Q)$. Пусть

$$H_i = G_{j_1} \cup G_{j_2} \cup \dots \cup G_{j_{c+1}}$$

и $u_i \in V H_i$. Можно считать, что $u_i \in V G_{j_1}$. Покажем, что $H_i - u_i \in S(P, Q)$. В силу минимальности G_i как запрещенного порожденного подграфа для P , $G_i - u_i \in P$ для любой вершины $u_j \in V G_i$.

Удалим из каждой копии G_{j_i} ($j = 2, 3, \dots, c+1$) графа H_i одну вершину u_j . Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{c+1}\}$. В силу $\cup$ -замкнутости класса P , порожденный подграф $H_i \setminus U = \bigcup_{j=1}^{c+1} (G_{j_i} - u_j)$ принадлежит P . Так как $c = \max\{\alpha(G) : G \in Q\}$,

то пустой подграф $H_i (U \setminus \{u_i\})$ принадлежит Q . Поэтому $H_i - u_i \in S(P, Q)$, откуда следует его минимальность как запрещенного порожденного подграфа для $S(P, Q)$.

Кораскраской графа G называется разбиение множества вершин на подмножества, порождающие пустые или полные подграфы (называемые *пустыми* и *полными* долями). Если число пустых (соответственно, полных) долей равно k (соответственно l), то кораскраска называется (k, l) -кораскраской. Обозначим через $Co(k, l)$ класс всех графов, имеющих (k, l) -кораскраску ($k \geq 0$ и $l \geq 0$).

Теорема 2 ([3]). Граф является расщепляемым тогда и только тогда, когда он не содержит порожденных подграфов $2K_2$, C_4 и C_5 .

Предложение 3. Класс $Co(k, l)$ имеет конечную характеристику в терминах запрещенных порожденных подграфов тогда и только тогда, когда $k \leq 1$ и $l \leq 1$.

Доказательство. Достаточность. Имеем $Co(1, 0) = \text{FIS}(K_2)$ (пустые графы), $Co(0, 1) = \text{FIS}(O_2)$ (полные графы) и $Co(1, 1) = \text{FIS}(2K_2, C_4, C_5)$ (теорема 2).

Необходимость. Имеем $Co(2, 0) = \text{FIS}(C_{2n+1} : n \geq 1)$ (двудольные графы) и $Co(0, 2)$ (графы, дополнительные к двудольным).

Пусть теперь $k + 1 \geq 3$. Обозначим $G_{kl} = (q + 1)K_{p+1}$. Если $G_{kl} \in Co(k, l)$, то каждый пустой подграф содержит самое большее одну вершину из каждой копии графа K_{k+1} . Так как число пустых подграфов равно k , то по крайней мере одна вершина из каждого K_{p+1} попадает в некоторый полный подграф. Поэтому l полных подграфов содержат $l + 1$ несмежных вершин – противоречие. Таким образом, $G_{kl} \notin Co(k, l)$.

Далее, граф $G_{kl} - u$ имеет (k, l) -разбиение для любой вершины $u \in V G$: подграфы K_{k+1} образуют полные доли, а подграф K_k можно разбить на k одновершинных подграфов и отнести их в пустые доли.

Теперь приведем алгоритм распознавания класса $Co(2, 1)$ (см. также [2]). Для вершины $u \in V G$ полагаем $N^-(u) = V G \setminus N(u)$.

Алгоритм. РАСПОЗНАВАНИЕ КЛАССА $Co(2, 1)$

ВХОД. Граф $G \neq K_1$.

ШАГ 0. Положить $I = \emptyset$ и $K = \emptyset$.

ШАГ 1. Для любой вершины $u \in V G$ проделать шаги 2, 3 и 4.

ШАГ 2. Если $G(N(u))$ не является расщепляемым графом, а $G(N^-(u))$ является двудольным графом, то положить $u \in K$;

если $G(N(u))$ является расщепляемым графом, а $G(N^-(u))$ не является двудольным графом, то положить $u \in I$;

если $G(N(u))$ не является расщепляемым графом, а $G(N^-(u))$ не является двудольным графом, то выход 1.

ШАГ 3. Если $H = G(N(u))$ является расщепляемым графом, а $F = G(N^-(u))$ является двудольным графом, то произвольным образом разбить VH на полную долю A и пустую долю B , а VF произвольным образом разбить на доли C и D .

Если множество $B \cup C \cup D$ порождает двудольный граф, то положить $K = A \cup \{u\}$ и выход 2.

Иначе перейти к шагу 4.

ШАГ 4. Для любой вершины $v \in B$ проверить, порождает ли множество $(B \cup C \cup D) \setminus \{v\}$ двудольный граф.

Если да, то положить $K = \{u, v\} \cup (A \cap N(v))$ и выход 2.

Если ни для какой вершины $v \in B$ указанное условие не выполняется, то положить $u \in I$.

ШАГ 5. Если K порождает полный граф, а I порождает двудольный граф, то выход 2. Иначе выход 1.

ВЫХОД 1: $G \notin Co(2,1)$.

ВЫХОД 2: $G \in Co(2,1)$; K, I_1, I_2 , где I_1, I_2 есть произвольное разбиение на доли подграфа, порожденного множеством $I = VG \setminus K$.

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.

2. Brandstadt A. // Discr. Math. 1996. Vol.152. № 1–3. P.47.

3. Foldes S., Hammer P.L. // Proc. 8th Southeastern Conf. on Combin., Graph Theory and Computing. Baton Rouge, 1977. P.311.

Поступила в редакцию 01.09.99.

УДК 517.977

О.Р. ГАБАСОВА

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФИРМЫ С ДВУМЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СПОСОБАМИ ПРОИЗВОДСТВА

An optimal control problem with state and mixed constraints is under consideration. Sufficient optimality conditions are justified.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления [1]:

$$V(D, I, K_1) = e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= rX + S - (a + r + wl_2)K + (l_2 - l_1)wK_1 - D, \quad \dot{K} = \\ &= -aK + I, \quad X(0) = 0, \quad K(0) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$D(t) \geq 0, \quad X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t), \quad 0 \leq K_1(t) \leq K(t), \quad t \in T = [0, z]. \quad (3)$$

Здесь $X = X(t)$, $K = K(t)$ – собственный и общий капиталы фирмы к моменту t , K_1 – количество капитала, выделенного на первый технологический способ (1ТС); $S = S(Q)$ – выручка от реализации продукции $Q = q_1K_1 + q_2K_2$ (q_j – производительность капитала j ТС, $j = 1, 2$); $D = D(t)$, $I = I(t)$ – дивиденды и инвестиции в момент времени t ; a, i – нормы амортизации и дисконтирования; r, w – норма процента по кредиту и ставка заработной платы; l_j – трудоемкость реализации единицы капитала в j ТС; k – отношение максимального кредита к собственному капиталу; z – горизонт пла-

нирования. Функционал (1) представляет ценность фирмы с точки зрения акционеров: система уравнений (2) – производственно-финансовая модель фирмы: X, K – переменные состояния (фазовые переменные); D, I, K_1 – переменные управления. В качестве доступных управлений будем использовать функции

$$\tilde{D}(t) = D_0 \delta(t) + D(t), \tilde{I}(t) = I_0 \delta(t) + I(t), K_1(t), t \in T, \quad (4)$$

где D_0, I_0 – параметры обобщенных управлений, подлежащие вычислению; $\delta(t), t \in T$, – δ -функция Дирака; $D(t), I(t), K_1(t), t \in T$, – кусочно-непрерывные функции.

Введем следующие константы: $C_{1X} = (a + i + wl_1)/q_1$, $C_{1XY} = (a + r + wl_1)/q_1$, $C_{12} = (l_2 - l_1)w/(q_2 - q_1)$, $K_{12}: dS/dK = C_{12}$, $K_{1X}: dS/dQ = C_{1X}$, $K_{1XY}: dS/dQ = C_{1XY}$; $X_{1X} = K_{1X}$.

Задачу (1)–(4) решим при следующих предположениях: A_1) функция $S(Q)$, $Q > 0$, непрерывна вместе с первой и второй производными, причем $S(0) = 0$, $S'(Q) > 0$, $S''(Q) < 0$, $Q > 0$; A_2) $i < r$; A_3) $dS/dQ|_{Q=0}$ – достаточно большое положительное число; A_4) $X^* < X_{1X} < X^* < \infty$, X^* – достаточно малое положительное число; A_5) $o(|\Delta K|) = S(q(K + \Delta K)) - S(qK) - \Delta K$; A_6) $0 < Q(t) < Q_a$; $Q_a: dS/dQ = a/q_1$; $Q_{1X}: dS/dQ = C_{1X}$; $Q_{1XY}: dS/dQ = C_{1XY}$; $Q_{12}: dS/dQ = C_{12}$. Каждой тройке $\tilde{D}(t), \tilde{I}(t), K_1(t), t \in T$, доступных управлений соответствует траектория $X(t), K(t), t \in T$, системы (2), которая в начальный момент времени $t = 0$ совершает скачок $\Delta X(0) = -D_0$, $\Delta K(0) = -I_0$, а далее представляется непрерывными функциями $X(t), K(t), t \in [0, z]$. Таким образом, в начальный момент имеется возможность изменить объемы собственного и общего капиталов фирмы на конечную величину.

Заменим задачу (1)–(4) на эквивалентную задачу оптимального управления с подвижным левым концом в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$\begin{aligned} X_0 - X(0) + e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max, \dot{X} = rX + S - (a + r + wl_2)K + \\ + (l_2 - l_1)wK_1 - D, \dot{K} = -aK + I, X_* \leq X(0) \leq \\ \leq X_0, X(0) \leq K(0) \leq (1+k)X(0), \end{aligned} \quad (5)$$

$$D(t) \geq 0, X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t), 0 \leq K_1(t) \leq K(t), t \in T = [0, z].$$

Совокупность $(X(0), K(0)); D(t), I(t), K_1(t), t \in T$, и порождаемую ею траекторию $X(t), K(t), t \in T$, удовлетворяющие неравенствам задачи (5), будем называть допустимыми начальным состоянием и управлениями. Допустимое начальное состояние $(X^0(0), K^0(0))$ и допустимые управления $D^0(t), I^0(t), K_1^0(t), t \in T$, называются оптимальными программными управлениями, если на них критерий качества (5) достигает максимального значения: $V(D^0, I^0, K_1^0) = \max_{D, I, K_1} V(D, I, K_1)$. Чтобы ввести понятие позиционного решения задачи (5), погрузим ее в семейство задач

$$\begin{aligned} X_0 - X(\tau) + e^{-iz} X(z) + \int_\tau^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max, \dot{X} = \\ = rX + S - (a + r + wl_2)K + (l_2 - l_1)wK_1 - D, \dot{K} = \\ = -aK + I, X_* \leq X(\tau) \leq P, X(\tau) \leq K(\tau) \leq (1+k)X(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

$$D(t) \geq 0, X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t), 0 \leq K_1(t) \leq K(t), t \in T_\tau = [\tau, z],$$

зависящее от скаляров τ и P . Пусть $(X^0(\tau, P), K^0(\tau, P), D^0(t|\tau, P), I^0(t|\tau, P), K_1^0(t|\tau, P), t \in T_\tau)$ – оптимальные начальное состояние и программные управления задачи (6) для позиции (τ, P) , $Z(\tau)$ – множество чисел P , для которых задача (6) имеет решение при фиксированном τ . В теории оптимального управления функции

$$D^0(\tau, P) = D^0(\tau | \tau, P), I^0(\tau, P) = I^0(\tau | \tau, P), K_1^0(\tau, P) = K_1^0(\tau | \tau, P), P \in Z(\tau), \tau \in T,$$

называют оптимальными управлениями типа обратной связи или позиционным решением задачи (5). Их построение называется синтезом оптимальных управлений типа обратной связи. Используя технику работы [2], можно для задачи (5) доказать достаточные условия оптимальности.

Теорема. Допустимые начальное состояние $(X(0), K(0))$, управления $D(t), I(t), K_1(t), t \in T$, траектория $(X(t), K(t)), t \in T$, оптимальны в задаче (5), если найдутся такие кусочно-непрерывные функции $\mu(t), \mu_1(t), \mu_2(t), v_1(t), v_2(t), t \in T$, числа $\xi_1 \dots \xi_4$, на которых выполняются соотношения:

1) сопряженная система $\dot{\lambda}_1 = \lambda_1(i-r) + v_1 - v_2(1+k), \quad \dot{\lambda}_2 = (i+a)\lambda_2 - \lambda_1 \times [q_2 dS/dQ - (a+r+wl_2)] - \mu_2 - v_1 + v_2$; 2) условия трансверсальности на левом конце траектории $-\lambda_1(+0) = -1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3(1+k) + \xi_4, -\lambda_2(+0) = \xi_2 - \xi_3$; 3) условия трансверсальности на правом конце траектории $\lambda_1(z) = 1, \lambda_2(z) = 0$; 4) условия неотрицательности $\mu(t) \geq 0, \mu_1(t) \geq 0, \mu_2(t) \geq 0, v_1(t) \geq 0, v_2(t) \geq 0, t \in T; \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0, \xi_4 \geq 0$; 5) условия дополняющей нежесткости $\xi_1(X_0 - X(0)) = 0, \xi_2(K(0) - X(0)) = 0, \xi_3((1+k)X(0) - K(0)) = 0, \xi_4(X(0) - X_*) = 0, \mu(t)D(t) = 0, \mu_1(t)K_1(t) = 0, \mu_2(t)(K(t) - K_1(t)) = 0, v_1(t)(K(t) - X(t)) = 0, v_2(t)((1+k)X(t) - K(t)) = 0$; 6) условия стационарности $1 - \lambda_1(t) + \mu(t) = 0, \lambda_1[-(q_1 - q_2)dS/dQ + (l_2 - l_1)w] + \mu_1 - \mu_2 = 0$; 7) условие вогнутости $\int_0^z \lambda_1(t) \alpha_1(|\Delta K(t)|, |\Delta K_1(t)|) dt \leq 0$.

Эта теорема в дальнейшем будет использоваться для построения программного решения задачи (5) и синтеза оптимальной политики фирмы.

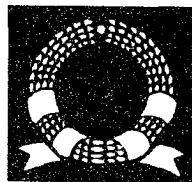
Работа частично финансируется Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (Ф98 – 014).

1. Van Hilten O., Kort P.M., Loon P.J.J.M. Dynamic policies of the firm. Berlin; Heidelberg, 1993.

2. Габасов Р., Габасова О.Р., Дмитрук Н.М. // Автоматика и телемеханика. 1998. №9. С.111.

Поступила в редакцию 09.02.99.

Наши юбиляры



ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ ПРОКОШИН



Исполнилось 60 лет известному ученому в области физического материаловедения, полупроводникового приборостроения доктору физико-математических наук, профессору Валерию Ивановичу Прокошину.

В.И.Прокошин родился 12 августа 1939 г. в г.Ветка Гомельской области в семье военнослужащего. После окончания средней школы он в 1956 г. поступает на физический факультет Белорусского государственного университета. По завершении учебы был принят в аспирантуру при кафедре физики твердого тела БГУ. На этой кафедре после окончания в 1964 г. аспирантуры он прошел все преподавательские должности от ассистента до профессора. На становление В.И.Прокошина как ученого и педагога сильное влияние оказали профессор Н.Ф.Кунин и академик АН БССР Н.Н.Сирота.

В 1974 г. В.И.Прокошин был переведен в отдел науки и учебных заведений ЦК КПБ. С 1990 г. работал ректором Республиканского межотраслевого института повышения квалификации руководящих работников и специалистов отраслей народного хозяйства, проректором по учебной работе Республиканского научно-методического и учебного центра «Алгоритм».

В 1994 г. Валерий Иванович перешел на работу в Комитет по науке и технологиям при Совете Министров Республики Беларусь (ныне Государственного комитета по науке и технологиям) на должность начальника управления научно-технической политики, где и работает в настоящее время. В 1966 г. В.И.Прокошин защитил кандидатскую диссертацию, а в 1988 г. стал доктором физико-математических наук, в 1990 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В.И.Прокошин является автором около 120 научных статей, 6 монографий и учебных пособий. Среди них «Полуметаллические измерительные преобразователи для робототехнических систем», «Устройства автоматики и робототехники на эффекте Холла», «Наука Беларуси в русле технических инноваций», «Приоритеты развития науки и техники в Республике Беларусь» и т.д. В.И.Прокошиным подготовлены четыре кандидата наук, причем трое из них (В.М.Анишик, И.С.Ташлыков, В.Г.Шепелевич) стали докторами наук. Под руководством профессора В.И.Прокошина создана научная школа по одному из актуальных направлений — физике гальвано- и тензорезистивных процессов в полуметаллах и сплавах на их основе. Им изучены закономерности структурно-кинетических превращений в моно- и поликристаллических материалах, установлены механизмы дефектообразования и формирования текстуры влияния примесей и температурных полей, проведено комплексное исследование процессов переноса заряда и влияния магнитных полей на них, термической стабильности электрофизических свойств.

Крайне важным с точки зрения дальнейшего использования явилось исследование особенностей изменения кинетических свойств в тонкопленочных образцах полуметаллических материалов и сплавов в условиях воздействия упругих деформаций, температурных и магнитных полей, термостабильности тензорезистивных и гальваномагнитных характеристик. На этой основе были разработаны новые конструкции холловских и тензорезистивных датчиков, основные принципы технологических процессов их изготовления из тонкопленочных материалов, выработаны рекомендации по практическому использованию изготовленных измерительных преобразователей, внедрению их в производство.

Созданы по гибридной технологии преобразователи Холла на основе миниатюрных пленочных датчиков. Несомненную практическую значимость представляют проводимые в настоящее время В.И.Прокошиным и его учениками работы по созданию и серийному произ-

водству самонастраиваемых вентильных электродвигателей с магнитопроцессорной системой управления. Для развития этих актуальных научно-прикладных исследований и разработок в БГУ при активном участии В.И.Прокошина была открыта проблемная лаборатория твердотельных преобразователей робототехнических систем.

Как ученый и практик многие годы занимается также проблемами совершенствования государственно-правовых и политических методов управления научно-технической деятельностью в Республике Беларусь. Он имеет ряд публикаций по вопросам кадрового обеспечения обновления научных направлений, научно-технических инноваций в Беларуси, опыта управления научно-исследовательской сферой, определения приоритетов развития науки и техники, принципов формирования и реализации научно-технической политики и т.д.

В.И.Прокошин активно участвует в научно-организационной работе: является действительным членом (академиком) Белорусской инженерной академии, Международной академии организационных и управленческих наук.

Большое внимание уделяет работе в совете Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов. Много сил отдает Межправительственной белорусско-украинской комиссии по сотрудничеству в области науки и технологий, в которой является секретарем. Плодотворно работает в составе Наблюдательного совета за деятельностью Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. Является членом Национального совета по физике частиц высоких энергий при Полномочном представителе Совета Министров Республики Беларусь в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне. Активно работает в составе Координационного совета ГКНТ по приоритетному направлению научно-технической деятельности «Энергетика и транспорт». Вносит большой вклад в деятельность Экспертного совета по развитию материально-технической базы науки, созданного ГКНТ и НАН Беларуси.

В.И.Прокошин награжден медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения Владимира Ильича Ленина», двумя Почетными грамотами Верховного Совета БССР.

Искренне поздравляя Валерия Ивановича со славным юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших успехов в его многогранной деятельности.

Э.М.Шпилевский, В.Г.Шепелевич, В.Ф.Степях

ЮРИЙ СЕМЕНОВИЧ ХАРИН



Исполнилось 50 лет заведующему кафедрой математического моделирования и анализа данных БГУ, доктору физико-математических наук, профессору Юрию Семеновичу Харину.

Ю.С.Харин родился 17 сентября 1949 г. в с.Зырянское Томской области в семье служащих. После окончания с отличием в 1971 г. Томского госуниверситета поступил в аспирантуру на кафедру прикладной математики. После защиты кандидатской диссертации (1974 г.) работал на кафедре старшим преподавателем, а затем доцентом. С 1976 г. Ю.С.Харин работает в БГУ доцентом незадолго до этого созданной кафедры теории вероятностей и математической статистики. В 1986 г. он защищает докторскую диссертацию, а в 1988 г. ему присваивается ученое звание профессора. В этом же году по его инициативе организуется новая кафедра математического моделирования и анализа данных, которую Ю.С.Харин возглавляет со дня основания.

Научные интересы Ю.С.Харина сосредоточены в области математической и прикладной статистики. Им создана белорусская школа по робастному (устойчивому) статистическому анализу данных. Профессор Ю.С.Харин разработал основы теории робастного статистического распознавания образов. Им предложены и исследованы эффективные статистические методы исследования неоднородностей («разладоков») в многомерных выборках и временных рядах. Под его руководством разработана система статистического программного обеспечения для ПЭВМ, состоящая из восьми пакетов прикладных программ (СТАН, МУЛЬТИ-СТАН, ДИНСТАТ, СТАТМОД, САРКК, РОСТАН, СТАТПРО, ЭКОНОМЕТРИКА) и внедренная более чем в 30 организациях Беларуси и России. Лицензию на англоязычную версию ППП РОСТАН по робастному статистическому анализу приобрел в 1995 г. Мюнхенский университет (Германия). В настоящее время Ю.С.Харин вместе со своими учениками активно работает над решением задач робастного статистического прогнозирования.

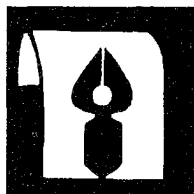
Большое внимание Ю.С.Харин уделяет практическому применению полученных научных результатов. С 1988 г. он возглавляет НИЛ статистического анализа и моделирования, где под его руководством и при активном участии выполнено более 20 научно-исследовательских работ. Полученные теоретические результаты использованы при эконометрическом моделировании и прогнозировании динамики важнейших макроэкономических параметров, компьютерном медицинском диагностировании, решении задач защиты информации, статистическом моделировании и регулировании технологических процессов в микроэлектронике.

В списке научных работ Ю.С.Харина более 200 публикаций, в том числе три монографии, одна из которых опубликована в издательстве Kluwer Academic Publishers (Dordrecht-Boston-London), четыре учебных пособия. Статьи ученого публиковались в таких престижных научных журналах, как "Lecture Notes in Statistics", "Lecture Notes in Computer Science", "Cybernetics and Control", "Mathematical Methods of Statistics", "Теория вероятностей и ее применения", "Проблемы передачи информации", "Автоматика и телемеханика" и др. Под его руководством защищены одна докторская и одиннадцать кандидатских диссертаций. В 1997 г. за цикл научных работ Ю.С.Харину была присуждена премия А.Н.Севченко.

Профессор Ю.С.Харин ведет интенсивную педагогическую работу, он является организатором новой для нашей страны специальности "Экономическая кибернетика" и двух специализаций, основателем СНИЛ при кафедре математического моделирования и анализа данных (1988 г.).

Ю.С.Харин много времени уделяет научно-организационной работе, являясь членом трех специализированных советов по защите диссертаций, зам.главного редактора научного сборника "Проблемы защиты информации", президентом Белорусской статистической ассоциации, организатором пяти международных конференций "Компьютерный анализ данных и моделирование", членом Белорусского математического общества, Белорусской ассоциации распознавания образов, Американского математического общества, Международного института математической статистики, Международного общества Бернулли по математической статистике. Международный биографический центр в Кембридже в 1998 г. присвоил профессору Ю.С.Харину почетное звание "Человек года". В этом же году Ю.С.Харин был избран действительным членом Международной академии наук высшей школы.

Преподаватели, сотрудники и студенты факультета прикладной математики и информатики, редколлегия журнала "Вестник БГУ" (серия I) сердечно поздравляют Юрия Семёновича с пятидесятилетием и желают ему крепкого здоровья, счастья, новых творческих успехов в научной, педагогической и общественной деятельности.



МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ CAS-99

С 20 по 24 сентября 1999 г. в БГУ на базе Центра информационных технологий состоялась вторая международная научная конференция «Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании» – CAS-99.

Тезисы докладов прислали 92 автора из Беларуси (были представлены вузы и научно-исследовательские институты Минска, Бреста, Гомеля, Гродно и Витебска), России, Украины, Эстонии, Германии, Великобритании и США. Доклады, включенные в научную программу конференции, были разделены на четыре секции: «Теория современных систем компьютерной алгебры (СКА) и пакеты прикладных программ на их основе», «Применение СКА в математике и механике», «Применение СКА в физике» и «СКА в образовании».

Заседания конференции проходили 21–23 сентября. С пленарными докладами выступили профессор В.П.Герт (Дубна, Россия), который затронул широкий круг вопросов, связанных с историей развития и применения систем и алгоритмов компьютерной алгебры, сделал обзор истории развития методов и инструментов компьютерной алгебры в науке и инженерно-технической практике, а также профессор О.И.Маричев (Шампейн, США), который рассказывал о возможностях системы Mathematica 4, сравнив ее с другой популярной СКА Maple V.

Еще один участник конференции – профессор Роберт Краглер (Вайнгартен, Германия) прочитал серию лекций на английском языке для студентов, аспирантов и сотрудников БГУ.

В отличие от первой конференции (декабрь 1997 г.) в этот раз организаторы составили программу таким образом, чтобы секционные заседания не пересекались по времени, что дало возможность каждому участнику конференции послушать все сообщения. Особенно активно обсуждались доклады, посвященные использованию систем компьютерной алгебры в образовании.

Параллельно с работой конференции прошла выставка «Информационные технологии в образовании», на которой, в частности, была представлена литература, посвященная системам компьютерной математики. Более десятка своих книг представил участник конференции из Смоленска профессор В.П.Дьяконов – автор большинства описаний различных СКА на русском языке. Ряд материалов был доставлен при содействии О.И.Маричева из американской компании Wolfram Research, Inc. (WRI) – разработчика системы Mathematica.

Итоговое заседание конференции проходило 24 сентября. Зарубежные участники отметили значительную работу, проделанную за последние два года Центром информационных технологий БГУ по внедрению СКА в различных областях науки и образования. В этот период БГУ были сделаны конкретные шаги для ориентации белорусских ученых на использование лицензионного программного обеспечения: достигнута договоренность с WRI о льготных ценах на Mathematica для учебных заведений Беларуси, закуплены 30 лицензий системы Mathematica 4.0.1 для БГУ. Центр информационных технологий БГУ получил права дистрибутора продукции WRI на территории Беларуси.

Участниками была отмечена очень хорошая техническая оснащенность конференции. Были высказаны пожелания продолжить регулярные встречи специалистов в области СКА на белорусской земле.

А.Н.Курбацкий, Ю.И.Воротницкий

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.34

Губарь Н.Б., Урбанович А.И. **Шестиволновое смещение ультракоротких импульсов в кубических средах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Рассматривается процесс нестационарного шестиволнового смещения (ШВС) ультракоротких импульсов при произвольном отношении их интенсивностей. Получены уравнения, описывающие процесс ШВС, и проведено численное моделирование процесса ШВС для гауссовых импульсов.

Библиогр. 13 назв., ил.4.

УДК 535.37

Воропай Е.С., Самцов М.П., Чалов В.Н., Александрова Е.Н., Жаврид Э.А., Журавкин И.Н., Истомин Ю.П. **Закономерности флуоресценции симметричных трикарбоцианиновых красителей в биологических тканях** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Полиметиновые красители, фотосенсибилизаторы с поглощением и флуоресценцией в спектральной области прозрачности биологических тканей можно регистрировать на глубине до 1,5 см от поверхности тела животных. Интенсивность зарегистрированной с поверхности тела животных флуоресценции исследованных полиметиновых красителей при введении в диапазоне 1÷2 мг/кг прямо пропорциональна их концентрации в опухолевых узлах и мышцах. По изменению интенсивности флуоресценции при сканировании по поверхности опухолевых узлов возможно определять наличие в них областей с неоднородным распределением красителей.

Библиогр. 9 назв., табл. 2, ил.2.

УДК 535.37

Покаташкин В.И., Сытько В.В., Красовский А.Н., Умрейко С.Д. **Миграция энергии электронного возбуждения в кристаллах $Rb_3UO_2F_5$ при селективном лазерном возбуждении** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

При температуре 6 К исследована люминесценция кристаллов пентафторуранилатов рубидия $Rb_3UO_2F_5$ при резонансном селективном лазерном возбуждении в пределах неоднородно уширенной полосы первого электронного перехода. Обнаружен неселективный спектральный перенос энергии электронного возбуждения по системе уранилфторидных комплексов, обусловленный взаимодействием нижних возбужденных энергетических уровней и участием рамановских фононов кристалла.

Библиогр. 9 назв., ил.2.

УДК 537.311

Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Гранько С.В., Григорьев В.В., Камышан А.С. **Оптические свойства пленок ПММА, облученных легкими ионами** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Представлены результаты исследования изменения оптических констант пленок полиметилметакрилата, облученных легкими ионами. Показано, что ионная имплантация является эффективным способом модификации оптических свойств полимеров, и подход, основанный на изменении молекулярной рефракции, позволяет прогнозировать значения коэффициента преломления.

Библиогр. 8 назв., табл. 1, ил.2.

УДК 621.315.592.2:546.289:537.533.35

Тишков В.С., Гайдук П.И., Ширяев С.Ю., Ларсен А.Н. **Морфология поверхности кристаллов германия, облученных тяжелыми ионами средних энергий** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Методами профилометрии, просвечивающей электронной микроскопии и электронографии исследованы процессы формирования на поверхности кристаллов германия, облученных тяжелыми ионами средних энергий, аморфного слоя с аномальной морфологией поверхности. Рассмотрены возможные механизмы формирования сотообразной структуры.

Библиогр. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.391:537.86:539.182

Сидоренко А.В. **Метод нелинейной динамики для анализа биоэлектрической активности мозга при изменении функционального состояния центральной нервной системы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Анализ биоэлектрической активности мозга с использованием метода нелинейной динамики позволяет получить дополнительные сведения о функциональном состоянии центральной нервной системы. Такие параметры, как корреляционная размерность и нормированная энтропия Колмогорова, могут быть использованы в качестве критерия для характеристики сложных режимов функционирования автоволновых биологических систем, в частности для дифференциации выраженности процессов возбуждения и торможения в мозге.

Библиогр. 9 назв., табл.1, ил.3.

УДК 537.87

Малый С.В., Кухарчик П.Д. **Расчет эффективных электродинамических параметров композиционных материалов методом минимальных автономных блоков** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. № 3.

Предлагается новая методика расчета эффективных электродинамических параметров композиционных материалов, представляющих собой диэлектрическую матрицу с диспергированными в ней частицами. Методика базируется на методе минимальных автономных блоков. Приводятся результаты расчета диэлектрической проницаемости материала с двухслойными сферическими частицами.

Библиогр. 7 назв., ил.2.

УДК 621.372: 537.86

Ильинков В.А., Ильинкова Н.И. **Метод расчета реакции линейной системы на периодическое и непериодическое воздействие** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Предложен пригодный для широкого применения метод расчета реакции линейной диссипативной системы на произвольное периодическое и непериодическое воздействие, основанный на представлении реакции в замкнутом виде.

Библиогр.8 назв., ил.2.

УДК 612.821:007

Морозевич А.Н., Железко Б.А., Самаль С.А. **Особенности проектирования информационно-аналитических систем поддержки принятия решений в социально-экономических объектах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Рассматриваются общие принципы моделирования процесса проектирования адаптивных развивающихся информационно-аналитических систем поддержки принятия решений (ИА СППР). В качестве методологической основы моделирования используется концепция ПИР-требований. При этом разработка ИА СППР рассматривается как процесс трансформации моделей знаний о предметной области и удовлетворения соподчиненному изменению требований Потребителя, Изготовителя и Разработчика. В качестве универсального способа моделирования знаний предлагается использовать концепцию обобщенных объектов.

Библиогр.20 назв., ил.1.

УДК 519.10

Емеличев В.А., Похилько В.Г. **Радиус квазиустойчивости множества Парето векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Получена формула радиуса квазиустойчивости множества Парето в векторной задаче оптимизации линейных форм на множестве подстановок симметрической группы.

Библиогр. 7 назв.

УДК 519.872

Матальцкий М.А. **К вопросу исследования экспоненциальных сетей при зависимости вероятностей перехода от их состояний** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Исследуется экспоненциальная сеть с разнотипными заявками и системами со многими очередями. Вероятности переходов заявок между системами сети зависят от ее состояния. Показано, что стационарные вероятности состояний имеют форму произведения.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.62

Бобков В.В., Борисевич А.М. **Метод последовательных поправок** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1999. №3.

Для начальной задачи в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида предлагается способ построения рекурсивного типа одношаговых методов сколь угодно высоких порядков точности. Способ удобен для конструирования вычислительных алгоритмов с автоматическим выбором не только шага сетки, но и порядка точности метода.

Библиогр.2 назв.

УДК 513.83

Кукрак Г.О. **Об отображениях экспоненциальных пространств** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Рассматривается отображение гиперпространств замкнутых подмножеств топологических пространств X и Y , индуцированное замкнутым отображением $f: X \rightarrow Y$. Найдено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы это отображение было совершенным. Доказано, что гиперпространства компактных подмножеств соабсолютных хаусдорфовых пространств соабсолютны.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.5

Бокша А.Н. **Приближение функций двух переменных рациональными операторами в равномерной метрике** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

В классе гельдеровских функций двух переменных найдены локальные и равномерные оценки для их отклонений от специальных рациональных операторов с положительными ядрами.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.712.2

Мощенский В.А., Мощенский Д.В. **Вычисление предикатов и реализация булевых функций** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Подчеркивается связь между вычислением предикатов и реализацией последовательности булевых функций (БФ). Строится последовательность БФ, весьма сложная по реализации машинами Тьюринга (но за линейное время), которая задает вычислимый предикат (но с очень большой временной сложностью). Следовательно, каждая БФ из этой последовательности вычислима и машиной Тьюринга с фиксированной сложностью.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1

Зверович И.Э. **Разбиения вершин графов и кораскраски** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

Пусть P и Q – два наследственных класса графов. Обозначим через $S(P, Q)$ класс всех графов G таких, что существует разбиение $VG = X \cup Y$, удовлетворяющее условиям $G(X) \in P$ и $G(Y) \in Q$. Класс P называется $\cup$ -замкнутым, если дизъюнктивное объединение $G \cup H$ содержится в P для любых двух графов $G, H \in P$.

Доказано, что если P является $\cup$ -замкнутым наследственным классом, не имеющим конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов, а числа независимости $\alpha(G)$ ограничены сверху константой для всех графов $G \in Q$, то класс $S(P, Q)$ не имеет конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Обозначим через $Co(k, l)$ класс всех графов, имеющих (k, l) -кораскраску, где $k \geq 0$ и $l \geq 0$.

Доказано, что класс $Co(k, l)$ имеет конечную характеристику в терминах запрещенных порожденных подграфов тогда и только тогда, когда $k \leq 1$ и $l \leq 1$. Приведен алгоритм распознавания класса $Co(2, 1)$.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977

Габасова О.Р. **Достаточные условия оптимальности в задаче оптимизации фирмы с двумя технологическими способами производства** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №3.

В статье рассматривается задача оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями и приводятся достаточные условия оптимальности.

Библиогр. 2 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Gubar N.B., Urbanovich A.I.</i> Six-wave mixing of ultrashort pulses in cubic media...	3
<i>Voropay E.S., Samitsov M.P., Tchalov V.N., Zhavrid E.A., Aleksandrova E.N., Zhuravkin I.N.</i> Fluorescence Mechanisms of Symmetric Tricarbocyanine Dyes in Biological Tissues.....	8
<i>Pokatazhkin V.I., Syt'ko V.V., Krasovski A.N., Umreiko S.D.</i> Migration of the Electronic Excitation Energy in $\text{Rb}_3\text{UO}_2\text{F}_5$ Crystals upon Selective Laser Excitation ...	13
<i>Komarov F.F., Leont'ev A.V., Gran'ko S.V., Grigor'ev V.V., Kamyshan A.S.</i> Optical properties of PMMA films irradiated by light ions	16
<i>Tishkov V.S., Gaiduk P.I., Shiryayev S.Yu., Larsen A.N.</i> Surface morphology of germanium crystals irradiated with heavy ions of average energy	20
<i>Sidorenko A.V.</i> The nonlinear dynamics method for analysis of various functional states of central nervous system.....	22
<i>Maly S.V., Kuharchik P.D.</i> Calculation of the effective electrodynamic parameters of composite materials by the method of minimal autonomous blocks	27
<i>Ilyinkov V.A., Ilyinkova N.I.</i> A Calculation method for the linear system response to periodic and aperiodic action	33

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Morozevich A.N., Zhelezko B.A., Samal S.A.</i> The ways of the developing of information analytical systems to support decision making process in social economic objects.....	39
<i>Emelichev V., Pakhilka V.</i> The quasistability radius of the Pareto set for a vector problem of linear forms minimization	45
<i>Matalyski M.A.</i> Investigation of exponential queueing networks with dependent on network states transient probabilities.....	48
<i>Bobkov V.V., Borisevich A.M.</i> Consistent improvement method.....	52
<i>Kukrak G.O.</i> On the maps of hyperspaces.....	56
<i>Boksha A.N.</i> Approximation of functions of two variables by rational operators in uniform metric	59
<i>Moshchenskii V.A., Moshchenskii D.V.</i> Predicate computation and realization of boolean functions	66

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Zverovich I.E.</i> Vertex partitions of graphs and co-colorings.....	70
<i>Gabasova O.R.</i> Sufficient optimality conditions to the optimization problem of the firm with two production activities.....	72

OUR JUBILEE

Valery Ivanovich Prokoshin.....	76
Yury Semenovitch Kharin.....	77

CHRONICLE

<i>Kurbatzky A.N., Vorotnitzky Yu.I.</i> International scientific conference CAS-99	78
---	----