ISSN 0321-0367



Белорусского государственного университета

# СЕРИЯ 1

Физика Математика Информатика

2'99



# СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

Зверева В.В., Маникало В.В., Сташкевич И.В. Стерсоэффект и синтез компози-	
ционных голограмм	3
Пухнаревич С.А., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. Дуальная флуо-	
ресценция аминооксадиазолов	7
Сазанович И.В. Фотофизика катионного Со-порфирина, встроенного в ДНК-	
моделирующие полинуклеотиды	10
Анищик В.М., Ярмолович В.А. Опенка эффективности использования тонких	
пленок InSb с различными параметрами в преобразователях Холла	14
Азарко И.И., Козлов И.П., Оджаев В.Б. Шишонок Е.М., Шипило В.Б. Парамаг-	
нитные дефекты кубического нитрида бора, синтезированного с помощью техни-	
ки высоких давлений	18
Шепелевич В.Г. Структура и свойства быстрозатвердевшей фольги сплава Д16	23
Гайдук П.И., Тишков В.С., Комаров Ф.Ф., Якубеня С.Н. Влияние мелкодисперс-	
ных включений алмаза на структуру электролитических пленок никеля	25
Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. Применение метода частичных	
областей к расчету полей в открытых резонансных системах	28
Волынец Н.А., Демидчик В.И. Отражательные свойства сетчатого экрана конеч-	
ных размеров	33

# МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. Метод решения интегральных уравне-	
ний с невырожденными ядрами в области L-изображений	37
Амелькин В.В., Малевич А.Э. Предельные свойства орбит общих динамических	
систем. І	42
Кашевский В.В. Сингулярный оператор с логарифмом в ядре и пространства	
Гельдера	46
Шилин А.П. Сингулярные интегральные уравнения с отражением на действи-	
тельной оси	48
Кравцов М.К., Лукшин Е.В. Об одной оценке числа целочисленных точек мно-	
гоиндексного аксиального транспортного многогранника	51
Демеш Н.Н., Акинфина М.А. О ковариации модифицированной периодограммы	
Уэлча для устойчивых процессов	55
Харин А.Ю. О робастности байесовского прогнозирования временных рядов	57
Журавков М.А. Естественное напряженное состояние породного массива	62

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Зажогин А.П. Кинетика люминесценции ураниловых соединений в органиче-	
ских растворителях	69
Альсевич Л.А., Булатов В.И. Предельное представление решений линейных од-	
нородных регулярных систем	71
Мартыненко М.Д., Босяков С.М. Метод характеристик для полумоментной тео-	
рии асимметричной гидродинамики	73

# НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Петр Петрович	I Забрейко	76

# Физика



УДК 778.38

#### В.В.ЗВЕРЕВА, В.В.МАНИКАЛО, И.В.СТАШКЕВИЧ

#### СТЕРЕОЭФФЕКТ И СИНТЕЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ ГОЛОГРАММ

The work presents the formation of a composite hologram of the object generated by the program of 3-D computer graphics with consideration for the stereoeffect mechanism. The expressions for calculation of the parameters to be used in formation of a set of the plane object images and their conversion to holographic photographic plate have been derived. For experimental testing of the results obtained a hologram has been synthesised.

Одним из первых процесс получения синтезированных голограмм с использованием в качестве объекта набора плоских изображений был рассмотрен в работе [1]. Здесь же предложен двухшаговый метод получения композиционной голограммы, который считается оптимальным и который мы будем рассматривать дальше.

В отличие от [1] для получения синтезированной голограммы мы иснользовали модель объекта, созданную с помощью трехмерной компьютерной графики (3D Studio MAX).

Основной задачей на этапе получения плоских транспарантов является создание модели объекта в 3D Studio MAX с учетом исходных параметров: расстояния, с которого будет рассматриваться изображение объекта, размера модели объекта, размера фотопластины, на которую производится запись транспарантов, и размера самого плоского транспаранта.

В связи с тем, что при рассматривании синтезированной голограммы каждым глазом фактически рассматриваются отдельные плоские фотографии объекта, а реальный объект имеет глубину, иллюзия объемности возникает только при определенных размерах объекта. Глубина снимаемой модели выбирается из тех же соображений, что и в стереокино [2]. Разнипа в том, что в стереокино изображение объекта всегда локализовано в плоскости экрана, а на голограмме изображение может располагаться не в плоскости фотопластины.

Восприятие стереоскопичности восстанавливаемого на экране изображения зависит от расположения плоскости рампы при съемке стереоизображений. (Плоскостью рампы называется плоскость в снимаемом пространстве, соответствующая плоскости экрана [3].) Выступающая относительно плоскости рампы часть объекта  $d_1$  соответствует величине предэкранного изображения  $\Delta_1$ , а заглубленная часть объекта  $d_2$  — величине заэкранного изображения  $\Delta_2$ . С учетом выражений для определения глубины предэкранного  $\Delta_1$  и заэкранного  $\Delta_2$  изображения, выведенных в [2], получаем формулы для расчета максимально выступающей  $d_1$  и заглубленной  $d_2$  части снимаемого объекта относительно плоскости рампы:

$$\mathbf{d}_1 = \frac{\mathbf{pl}_a \mathbf{l}_b}{\mathbf{b}_0 + \mathbf{pl}_a},\tag{1}$$

3

$$d_2 = \frac{pl_a l_b}{b_0 - pl_a},\tag{2}$$

где  $l_a$  — расстояние от глаз наблюдателя до плоскости локализации изображения объекта;  $b_0$  — стереоскопический базис, обычно принимаемый за 65 мм; p — параллакс между одноименными точками правого и левого изображений, достигающий 0,03 рад от величины расстояний до плоскости рампы в случае полного нарушения стереоэффекта;  $l_b$  — расстояние от камеры до плоскости рампы при съемке модели объекта.

Сценой в 3D Studio MAX является некоторое виртуальное пространство, в котором располагается модель объекта. Объекту присваиваются реальные материалы, устанавливаются источники освещения и камера, с помощью которой "фотографируется" модель объекта с разных сторон. Основной задачей на данном этапе является расчет координат точек местоположения камеры в виртуальном пространстве 3D Studio MAX, с которых необходимо проводить фотографирование объекта, чтобы в результате на синтезированной голограмме увидеть объемное изображение. Для этого два определенных плоских изображения, полученных фотографированием с разных ракурсов, должны составлять стереопару. Следовательно, положение камеры при съемке должно определяться по законам стереоэффекта.

Угол  $\alpha_0$  (рис.1), в пределах которого наблюдается стереоэффект, определяется размерами и взаимным расположением транспаранта и голографической фотопластины, на которой регистрируется промежуточная голограмма:

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{c-a}{2x}, \qquad (3)$$

где x — расстояние между транспарантом и голограммой при регистрации последней, a — поперечный размер изображения транспаранта 1, c — поперечный размер голограммы 2.





1 – транспарант; 2 – голографическая фотопластина

Угол  $\beta$ , под которым пересекаются визирные оси глаз при рассматривании изображения, зависит от величины стереобазиса  $b_o$  и расстояния до рассматриваемого изображения объекта  $l_o$ :

$$\beta = 2 \arcsin\left(\frac{b_0}{2I_a}\right). \tag{4}$$

Чтобы два разных снимка объекта образовывали между собой стереопару при рассматривании их с расстояния *l<sub>a</sub>*, необходимо, чтобы камеры при фотографировании модели объекта располагались относительно нее

так же, как и глаза наблюдателя при рассматривании этого объекта. При этом возможны два случая: 1) когда изображения, снятые из двух последовательных точек расположения камеры, образуют стереопару; 2) когда стереопару образуют изображения, не являющиеся соседними.

Для первого случая, число изображений N, полученных с разных ракурсов, строго определено и рассчитывается по количеству укладывающихся углов  $\beta$ , под которыми пересекаются визирные оси глаз, в полном углу, в пределах которого перемещается камера при съемке изображений объекта (рис.2):

$$N = \frac{1}{\beta} \left( \alpha_0 + 2 \arcsin\left[\frac{b \cos\frac{\alpha_0}{2}}{l_b}\right] \right) + 1, \qquad (5)$$

где b — поперечный размер модели объекта;  $l_b$  — расстояние, с которого камера «рассматривает» модель объекта, рассчитываемое по формуле:  $l_b = (l_a b)/a$ .

В случае, если рассчитанное число плоских изображений N не является нелым числом, вся дробная часть отбрасывается. Теперь угол между крайними положениями осей камер (см.рис.2) уменьшается величину 2δ. на причем  $\delta = (\beta \phi)/2$ , где  $\phi$  – отброшенная дробная часть. Отбрасывание дробного результата при получении числа плоских изображений N связано с тем, что, если полученный результат округлить, одно из положений камеры может оказаться за пределами угла стереовидения.

Угол между крайними положениями осей камер θ (см.рис.2) определяется как

$$\theta = \alpha_0 + 2 \arcsin\left(\frac{b\cos\frac{\alpha_0}{2}}{l_b}\right) - 2\delta . \quad (6)$$

Малое количество ракурсных изображений N в первом случае не позволяет получить полную иллюзию объемности <sub>F</sub> при повороте голограммы. Избавиться <sub>м</sub> от этого недостатка можно увеличением числа изображений. Для этого угол  $\beta$  делится на желаемое число частей k, тогда общее число ракурсных изображений будет



Рис.2. Схема расположения камер и модели объекта в виртуальном пространстве 3*D Studio MAX*:

1,2,3,4 — последовательные положения камеры, 5 – модель объекта; 6 – радиусы длиной *l*,

(7)

и стереопару образуют в этом случае не соседние ракурсные изображения. В этом случае каждое последующее положение камеры соответствует повороту ее оси на угол

n = k(N-1)+1,

$$\eta = \frac{\theta}{n-1},\tag{8}$$

где *n* — число предполагаемых плоских изображений (см.рис.2).

Таким образом, точками, соответствующими местам установки камеры, будут точки 1–4, лежащие на дуге окружности с радиусом  $l_b$  и центром в плоскости рампы (см.рис.2). Угол между осью камеры и плоскостью рампы при получении первого транспаранта равен

$$\xi = \frac{\pi - \theta}{2}.\tag{9}$$

На втором этапе осуществляется перенос разноракурсных транспарантов на голографическую фотопластину аналогично [1]. Для того чтобы в зоне просмотра не наблюдалось разрывов между изображениями транспарантов и не было наложений одного изображения на другое, запись на фотопластину производится на последовательно открываемые участки фотоэмульсии. Область экспонирования фотопластины последующего изображения транспаранта смешается относительно предыдущей области экспонирования, соответствующей предыдущему транспаранту, на величину, равную отношению поперечного размера фотопластины с к числу транспарантов *n*. После переноса *n* ракурсных изображений на голографическую фотопластину копированием получаем отражательную или пропускающую радужную голограмму [4, 5]. Но перед копированием необходимо решить вопрос о локализации изображения объекта на голограмме-копии при восстановлении последней. В отличие от стереокино, где локализация изображения осуществляется всегда в плоскости экрана, в случае синтезированной голограммы локализация плоских изображений объекта может осуществляться как за, так и перед плоскостью голограммы. Однако плоскость рампы объемного изображения объекта должна находиться в плоскости локализации изображения транспаранта.

Расстояние между фотопластиной и транспарантом равняется расстоянию между голограммой и глазами наблюдателя при рассматривании восстановленного на голограмме изображения.

При невыполнении этого условия ракурсные изображения на голограмме будут видны по отдельности, разделенные «мертвыми зонами», или с наложением одного изображения на другое.

Рассмотрим несколько случаев расположения голограммы-оригинала относительно глаз наблюдателя.

I. Голограмма, с которой происходило копирование, располагалась в некоторой плоскости II (рис. 3). На месте транспаранта V находилась фотошластина, на которую осуществляли копирование.



Рис. 3. Определение относительного расположения голограммы-оригинала и глаз наблюдателя: I, II, III, IV – плоскости возможного нахожления наблюдателя и голограммы; V – местоположение транспаранта (*I*, *2*, *3* – области, в которых видны изображения первого, второго и третьего ракурсов соответственно)

 Глаза наблюдателя при рассматривании изображения на окончательной голограммекопии находятся в плоскости II, каждым глазом он видит только одно изображение.

2. При помещении глаз наблюдателя в плоскости I каждый глаз видит только одно изображение, однако это изображение состоит из двух частей, каждая из которых соответствует своему ракурсному изображению. В этом случае для некоторой части рассматриваемого изображения стереоэффект всегда будет нарушаться, так как граница перехода от одного ракурсного изображения к другому для левого и правого глаз будет локализована в разных местах (соответственно на отрезке BN и LM). При перемещении глаза от точки В к точке L происходит

плавная смена первого ракурсного изображения вторым, дальше от точки *L* — второе ракурсное изображение сменяется третьим ракурсным изображением и т.д.

3. Для случая, когда глаза наблюдателя располагаются между плоскостями I и II — в плоскости III, картина видимости изменяется следующим образом. На интервале *KE* наблюдатель видит только одно первое ракурсное изображение. При смещении глаза к точке *F* правая часть первого ракурсного изображения сменяется левой частью второго ракурсного изображения, причем на сколько уменышается видимая часть первого ракурсного изображения, на столько же увеличивается видимая часть второго ракурсного изображения. На интервале *FG* видно уже только второе ракурсное изображение.

Если плоскость III располагается на таком расстоянии от плоскости II, что длина отрезка *EF* меныше длины отрезка *DA*, то вероятность наблюдения стереоэффекта по всему изображению очень велика. Чем больше увеличивается длина отрезка *EF* по сравнению с *DA*, тем меньше вероятность наблюдения стереоэффекта по всему изображению. И когда длина отрезка

6

*EF* больше длины *DA*, стереоэффект может присутствовать только на части изображения.

4. Если плоскость расположения глаз лежит за пределами плоскости I (например, плоскость IV), везде в поле зрения наблюдателя будут попадать видимые части сразу трех ракурсных изображений. В точке С видно практически все первое ракурсное изображение, его размер зависит от удаленности плоскости IV от транспаранта V: чем больше расстояние, тем меньше видимая часть. В точке *Р* видна уже только левая часть первого ракурсного изображения и правая часть второго ракурсного изображения. А при дальнейшем перемещении к точке Q появляется правая часть третьего ракурса. Таким образом, в точке Q вилна левая часть изображения первого ракурса, средняя часть второго и правая часть третьего. На сколько уменьшается видимая часть изображения первого ракурса при перемещении глаза от точки С до точки Q, на столько же увеличивается видимая часть изображения третьего ракурса, при этом средняя часть второго изображения не изменяет своего размера, происходит лишь плавное ее смещение к левому краю, она сдвигается за уходящим изображением первого ракурса. Таким образом, в плоскости IV одним глазом всегда видны без наложения частичные изображения трех ракурсов. Стереоэффект по всему изображению на плоскости IV ни в одной из точек наблюдаться не будет.

II. При расположении голограммы в плоскости III изображения на фотопластину записываются последовательно с промежуточными неэкспонируемыми участками (например, *EF*). В этом случае, если плоскость расположения глаз совпадает с плоскостью голограммы III, наблюдаются «мертвые зоны», т.е. участки, где не видно ни одного ракурсного изображения. Стереоэффекта в плоскости IV не будет, так как видимое каждым глазом изображение состоит из трех частей, одна либо две из которых являются «мертвыми зонами».

Таким образом, качественное стереоизображение на синтезированной голограмме можно наблюдать только при расположении глаз в плоскости II или в непосредственной близости от нее.

Проведенный анализ экспериментально полученных синтезированных голограмм показывает, что если параметры схемы записи не соответствуют полученным на основании формул (1), (2), (6), (8) и (9), то наблюдаются искажения восстановленного изображения в виде наложения изображений транспарантов или наличия «мертвых зон».

1. De Bitetto // Appl. Opt. 1969. Vol.8. №8. P.1740.

2. Валюс Н.А. Стереоскония. М., 1962.

3. Слабова А.Е., Кряжевская Е.В. // Техника кино и телевидения. 1992. №4. С.31.

4. Вании В.А. // Квантовая электроника. 1978. Т.5. №7. С.1499.

5. Комар В.Г., Серов О.Б. Изобразительная голография и голографический кинематограф. М., 1987.

Поступила в редакцию 02.03.99.

#### УДК 535.37: 621.37

С.А. ПУХНАРЕВИЧ, М.А. СЕНЮК, С.А. ТИХОМИРОВ, Г.Б. ТОЛСТОРОЖЕВ

#### **ЛУАЛЬНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ АМИНООКСАДИАЗОЛОВ**

The specific fluorescence properties as well as picosecond transient absorption features have been studied for amino-substituted oxadiazoles. The results are interpreted on the base of charge transfer reaction processes.

Аномальная двухполосная флуоресценция в полярных средах, впервые обнаруженная Липпертом [1] для бензонитрила и впоследствии зарегистрированная для его многочисленных аналогов, нашла интерпретацию в рамках модели состояний с внутримолекулярным переносом заряда и скрученной конфигурацией (TICT-состояние) [2-5]. Данная модель предполагает, что за испускание в коротковолновой области ответственны молекулы с плоской конфигурацией. В полярных растворителях после поглошения кванта света происходит разворот плоскостей донорной и акцепторной частей молекулы в положение, близкое к ортогональному, и последующая стабилизация состояния с внутримолекулярным переносом заряда. Состояние с переносом заряда ответственно за испускание в длинноволновой области. Соотношение интенсивностей коротковолновой и длинноволновой полос в значительной степени определяется скоростью образования и стабилизации TICT-состояния.

В настоящей работе с привлечением методов пикосекундной кинетической спектроскопии и стационарной поляризационной спектроскопии исследовано проявление TICT-состояний для аминозамещенного оксадиазола DMA-POPDP, структурная формула которого имеет вид:



Дуальная флуоресценция данного соединения в полярных растворителях ранее описана в [6]. В малополярном толуоле регистрировалось только однополосное коротковолновое свечение. На рис.1 приведен спектр флуоресценции DMA-POPDP в этаноле (кривая 1). Как видно из рисунка, интенсивность длинноволнового свечения, которое связывается с проявлением TICT-состояний исследуемого соединения, практически на порядок выше, чем коротковолнового.



Рис.1. Спектр флуоресценции (1), зависимость степени поляризации (2) и ллительности свечения (3) по полосе испускания DMA-POPDP в. этаноле



Рис.2. Спектры наведенного поглощения DMA-РОРDР в этаноле, измеренные при разном времени задержки Δt между возбуждающим и зондирующим импульсами (1 – 5 пс, 2 – 30 пс)

Подтверждением образования молекулами DMA-POPDP ТІСТ-состояний в этаноле служат результаты исследования спектров наведенного поглошения из первого возбужденного состояния. На рис.2 приве-

дены нестационарные спектры наведенного поглошения данного соединения при двух временных задержках  $\Delta t$  относительно импульса возбуждения ( $\lambda = 352$  нм,  $\tau_{umn} = 3$  пс). Из рис.2 следует, что наблюдается существенная трансформация спектров с течением времени. Непосредственно после поглошения кванта света возникает нестационарное поглошение в широкой спектральной области с основным максимумом, расположенным при  $\lambda =$ 580 нм. При длительности задержки в  $\Delta t = 30$  пс спектр заметно сужается по полуширине и его максимум сдвигается в более коротковолновую сторону ( $\lambda = 500$  нм). При дальнейшем увеличении временной задержки между возбуждающим и зондирующим импульсами форма спектров наведенного поглощения не претерпевает существенных изменений.

Кинетика оптической плотности, измеренная в длинноволновой области спектра ( $\lambda = 650$  нм), дает одноэкспоненциальное затухание с характери-

стическим временем 15 пс (рис.3). В коротковолновой части спектра ( $\lambda = 500$  нм) наблюдается разгорание оптической плотности с таким же временем. Можно предположить, что в данном случае происходит образование и стабилизация состояния с внутримолекулярным переносом заряда и скрученной конфигурацией. Процесс изменения геометрии молекулы должен контролироваться вязкостью среды. Действительно, как оказалось, в более вязком октаноле время затухания поглощения в длинноволновой области спектра равно 70 пс. Соотношение времени релаксации в этаноле и октаноле (15 и 70 пс) хорошо коррелирует с соотношением вязкостей данных растворителей.

Следует отметить, что в литературе отсутствуют прямые доказательства предположения об изменении геометрии молекулы при образовании ею ТІСТ-состояния, а имеется лишь косвенное полтверждение для некоторых органических соединений, основанное на изменении соотношения интенсивностей полос дуальной флуоресценции при возникновении стерических препятствий [7].

Подтвердить или опровергнуть предполагаемое изменение геометрии молекулы при переходе от неполярного растворителя к полярному возможно, на наш взгляд, на основании экспериментов по исследованию спектральной зависимости анизотронии флуоресценции. Для DMA-



DMA-POPDP в этаноле (λ<sub>per.</sub> = 650 нм); сплошная линия – наилучшее расчетное приближение

РОРDР наблюдается анизотропия флуоресценции в маловязких растворителях, что является следствием инерционного характера движения молекул [8].

На рис. 1 (кривая 2) приведена зависимость степени поляризации флуоресценции DMA-POPDP от длины волны регистрации, измеренная в этанольном растворе при комнатной температуре. Из рис. 1 видно, что степень поляризации флуоресценции (Р) в области коротковолновой полосы имеет более высокие значения, чем в области длинноволновой. В маловязких растворителях на значение степени поляризации флуоресценции существенное влияние оказывают два фактора: время жизни флуоресцирующих молекул в возбужденном состоянии и величина объема флуоресцирующих центров.

Исследование зависимости длительности флуоресценции этанольного раствора DMA-POPDP от длины волны регистрации показало, что данная зависимость качественно повторяет ход спектральной зависимости степени поляризации. Длительность флуоресценции, регистрируемой в максимуме длинноволновой полосы, составляет  $\tau=0.9$  нс, тогда как в области коротковолновой полосы  $\tau=1.6$  нс.

Анализ кривых затухания анизотропии флуоресценции позволил оценить время вращательной релаксации флуоресцирующих центров ( $\tau$ ,). Так, в области коротковолновой полосы ( $\lambda = 435$  нм) значение  $\tau$ , для этанольного раствора DMA-POPDP составляет 280 пс, а в области длинноволновой полосы ( $\lambda = 595$  нм) оно равно 360 пс. Увеличение времени вращательной релаксации может быть объяснено ростом объемов флуоресцирующих центров, формирующих полосу внутримолекулярного переноса заряда, вследствие увеличения дипольного момента молекулы при развороте диметиламиногруппы в ортогональное положение.

Уменьшение длительности флуоресценции и увеличение объемов флуоресцирующих центров в области длинноволновой полосы должны привести к возрастанию степени поляризации флуоресценции. Наблюдаемая на опыте деполяризация свечения в области длинноволновой полосы может быть объяснена, на наш взгляд, только образованием молекулами скрученной конфигурации. В этом случае направления дипольных моментов электронных переходов, ответственных за полосы поглощения и испускания, будут отличаться друг от друга, что приведет к уменьшению степени поляризации флуоресценции.

Таким образом, полученные результаты подтверждают предположение об образовании в этанольном растворе молекулой DMA-POPDP скрученной конфигурации с внутримолекулярным переносом заряда (TICT-состояние).

1. Lippert E., Luder W., Boos H. // Advances in molecular spectroscopy. Oxford, 1962. P.443.

2. Rotkiewicz K., Grellmann K.H., Grabovsky Z.R.// Chem. Phys. Lett. 1973. Vol.19. P.315.

3. Rotkiewicz K., Grabovsky Z.R., Jasny J.// Chem. Phys. Lett. 1975. Vol.35. P.55.

4. Клищенко А.П., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т.83. С. 664.

5. Борисевич Н.А., Казберук Д.В., Мельничук С.В.и др. // Журн. прикл. спектроскопии. 1995. Т. 62. С. 49.

6. Грузинский В.В., Сенюк М.А., Козлов И.Н.и др.// Оптика атмосферы и океана. 1993. Т.6. С.313.

7. Rotkiewicz K., Grabovsky Z.R., Krowczynski A., Kuhnle W. // J. Luminescence. 1976. Vol. 12-13. P.877.

8. Гайсенок В.А., Жолнеревич И.И., Саржевский А.М. // Оптика и епектроскопия. 1980. Т.49. С.714.

Поступила в редакцию 08.02.99.

УДК 535.33/.34:621.373.82 б

#### И.В.САЗАНОВИЧ

#### ФОТОФИЗИКА КАТИОННОГО Со-ПОРФИРИНА, ВСТРОЕННОГО В ДНК-МОДЕЛИРУЮЩИЕ ПОЛИНУКЛЕОТИДЫ

The types of the ground state interactions and excited states dynamics of the complexes of the water-soluble cationic cobalt(II) and cobalt(III) 5,10,15,20-tetrakis[4-(N-methylpyridyl)] porphyrins (Co(II)P and Co(III)P) with *Calf Thymus* DNA, poly(dA-dT) and poly(dG-dC) have been investigated by using ground state absorption and circular dichroism and time-resolved picosecond transient absorption (TA) techniques.

Активное изучение комплексов порфиринов с нуклеиновыми кислотами обусловлено двумя основными их приложениями. Первое — это использование порфиринов в качестве фотосенсибилизаторов для селективной фотодеструкции ДНК [1-3]. Второе приложение — использование порфиринов в качестве зондов для исследования ближайшего окружения в их комплексах с ДНК [4, 5].

Оказалось, что возбужденные электронные состояния порфиринов и металлопорфиринов более чувствительны к окружению в составе комплексов с ДНК и к его изменению, нежели основное состояние [6–8]. Именно поэтому использование знаний по фотофизике порфиринов позволяет получать более подробную информацию о взаимодействии порфиринов с ДНК и значительно расширяет применение порфиринов в качестве зонда на ближайшее окружение. Ранее была изучена фотофизика комплексов ДНК с водорастворимым катионным 5,10,15,20-тетракис(4-N-метилпиридил) порфирином (сокращенно  $H_2(TMPy-P4)$ ) [7] и с металлопорфиринами Cu(TMPy-P4) [6] и Ni(TMPy-P4) [8]. Целью данной работы явилось изучение связывания кобальтового производного Co(TMPy-P4) от  $H_2(TMPy-P4)$ с ДНК и ДНК-моделирующими полинуклеотидами, выяснение природы и свойств возбужденных состояний указанных комплексов, поскольку в литературе данные сведения отсутствуют.

#### Материал и методика

Со(*TMPy-P4*) синтезирован по метолике, описанной в [9, 10]. Использовались ДНК, *poly*(*dG-dC*) и *poly*(*dA-dT*) фирмы Sigma Chemical Со без какой-либо дополнительной очистки. Все эксперименты проводились при комнатной температуре в фосфатном буфере с pH=6,8 и ионной силой  $\mu$ =0,03. Образны были приготовлены смешиванием раствора порфирина с раствором соответствующего полинуклеотила. Концентрация молекул порфирина составляла около 5×10<sup>-5</sup> М/л и контролировалась спектрофотометрически, при этом использовались опубликованные значения коэф-фициентов экстинкции [5]. Молярное отношение оснований полинуклеотидов и ДНК к порфирину составляло порядка 30.

Нами измерялись сигналы наведенного просветления или поглощения на кинетическом абсорбционном спектрометре с пикосекундным временным разрешением, описанном в [6]. Для возбуждения растворов образцов применялась вторая гармоника неодимового лазера (длина волны 540 нм, ллительность импульса ~12 пс), зондирование производилось с помощью оптического параметрического генератора с температурной перестройкой длины волны в пределах полосы поглощения Co(*TMPy-P4*), с максимумом вблизи 435 нм. Все измерения производились во вращаемых кварцевых кюветах толциной 1 мм в необескислороженных растворах.

#### Результаты и их обсуждение

Встраивание Со(ТМРу-Р4) в ДНК и ДНК-моделирующие полинуклеотиды. Для исследования типов встраивания Co(TMPy-P4) в ДНК и ДНКмоделирующие полинуклеотилы измерялись спектры поглошения и кругового дихроизма  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  и  $Co^{3+}(TMPy-P4)$  в ДНК, poly(dG-dC) и в буферном растворе (для сравнения). Полученные спектры для  $Co^{3+}(TMPy-P4)$  представлены на рис. 1.



Рис. 1. Спектры поглощения (*a*) и кругового дихронизма (*б*) для Со<sup>3+</sup>-порфирина в *poly(dG-dC)* (*1*), в ДНК (*2*) и в водном буфере (*3*)

Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*). Для Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в *poly*(*dG-dC*) не было обнаружено сдвига максимума полосы поглошения Соре (вблизи 435 нм) относительно его положения в водном буфере. Максимум полосы поглошения Соре для Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в ДНК (см.рис.1) смещен на 4 нм в красную область и имеет меньшую амплитуду по сравнению со спектром в буферном растворе, т.е. имеет место гипохромизм полосы Соре [4-5]. Кроме того, наблюдался положительный сигнал кругового дихроизма для Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в ДНК и отсутствие отрицательного сигнала кругового дихроизма для Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в ДНК и отсутствие отрицательного сигнала кругового дихроизма для Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в днК и 14,5], на их основании мы делаем вывод о внешнем связывании Со<sup>3+</sup> (*TMPy-P4*) в *A*-*T*-парах и отсутствие интеркаляции в *G*-*C*-пары.

Со<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*). Величина поглошения в максимуме для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в ДНК оказалась больше, чем для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в буферном растворе. Для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в *poly*(*dG-dC*) максимум полосы поглошения Соре смещен примерно на 6 нм в красную область и имеет меньшую амплитуду по сравнению со спектром поглошения Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в буферном растворе и в ДНК. Для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в ДНК и в *poly*(*dG-dC*) наблюдались отрицательные сигналы кругового дихроизма, для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в ДНК дополнительно имеет место положительный сигнал (спектры поглошения и кругового дихроизма не приведены). Опираясь на опубликованные сведения [4, 5], из полученных нами результатов мы делаем вывод о наличии интеркалящии Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в *G-C*-положения и внешнего встраивания в *A-T*положения.

Фотофизика Со(*TMPy-P4*) с ДНК и ДНК-моделирующими полинуклеотидами. Нами измерены кинетики заселения и дезактивации возбужленных электронных состояний Co<sup>3+</sup>(*TMPy-P4*) в буфере и в ДНК, Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в poly(dG-dC) и poly(dA-dT).

 $Co^{3+}$  (*TMPy-P4*). Для  $Co^{3+}$  (*TMPy-P4*) в буферном растворе и в ДНК наблюдался один короткоживущий сигнал (о его длительности будет сказано далее). Были получены дифференциальные спектры абсорбционных изменений и на их основании восстановлены абсолютные спектры поглощения образцов в нестационарном состоянии, измеренные при определенной временной задержке. Пример дифференциального и абсолютного спектров поглощения для Со<sup>3+</sup>(ТМРу-Р4) в ДНК приведен на рис.2. Абсолютные спектры поглощения возбужденных молекул Co<sup>3+</sup>(*ТМРу-Р*4) в ДНК и в буферном растворе подобны спектрам поглощения в основном состоянии, но смещены по длине волны (см.рис.2). Более того, нет признаков наличия значительного поглощения в области между полосой поглощения Соре (435 нм) и более длинноволновой *Q*-полосой (550 нм). Указанные особенности известны в литературе [6, 11–13], и на их основании мы приписываем короткоживущий сигнал, наблюдавшийся для Co<sup>3+</sup>(*TMPy-P4*) в буферном растворе и в ДНК, порфирину в (d,d)-состоянии (т.е. состоянии с возбуждением электрона между *d*-орбиталями иона металла). Этот сигнал возникает со скоростью возбуждающего импульса и имеет длительность около 6 пс для  $Co^{3+}(TMPy-P4)$  в буферном растворе и 10 пс – в ДНК.



Рис.2. Спектры поглошения Со<sup>3+</sup>Р в ДНК:

а – в основном состоянии (1) и восстановленный спектр поглошения в короткоживущем состоянии (2), б – дифференциальный спектр без временной задержки

Со<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*). При исследовании Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в *poly*(*dG-dC*) и в *poly*(*dA-dT*) кроме короткоживущего сигнала наблюдался сигнал, соответствующий долгоживущему возбужденному состоянию Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в *poly*(*dG-dC*) и в *poly*(*dA-dT*) (длительность лежит в нс-диапазоне – см. далее). Судя по форме полученных абсолютных спектров поглошения образцов в возбужденном короткоживущем состоянии (пример такого спектра для Co<sup>2+</sup>(*TMPy-P4*) в *poly*(*dA-dT*) – на рис.3), в данном случае мы имеем дело с ( $\pi$ , $\pi^*$ )-состоянием. Особенностью спектра в таком состоянии является пологая и широкая полоса так называемого "триплетного" поглошения [6, 12, 13], которая простирается в длинноволновую область от полосы поглошения Соре вплоть до *Q*-полосы поглощения. Похожее поглощение мы обнаружили в своих результатах (см.рис.3). О природе долгоживущего сигнала для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dA-dT)* и *poly(dG-dC)* с определенностью сейчас судить сложно, так как для этого пока еще недостаточно данных. Но наша рабочая гипотеза состоит в том, что данное долгоживущее состояние является (*d,d*)-состоянием.



Рис.3. Спектры поглощения для Co<sup>2+</sup>P в *poly(dA-dT)*: *а* — в основном состоянии (1) и восстановленный спектр поглощения в короткоживущем состоянии (2), *б* — лифференциальный спектр, временная задержка 7 пс

Было оценено время жизни короткоживушего состояния: для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dA-dT)* оно составляет порядка 10 пс, для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dG-dC)* — порядка 6 пс. Также сделана оценка времени жизни долгоживушей составляющей, которая присутствует в сигналах для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dA-dT)* и в *poly(dG-dC)*. Это время приблизительно равно 10 нс для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dA-dT)* и 3 нс для  $Co^{2+}(TMPy-P4)$  в *poly(dG-dC)*.

Таким образом, установлена зависимость времени жизни возбужденных состояний  $Co^{2+}$ - и  $Co^{3+}(TMPy-P4)$  от окружения, которая дает основания для использования данных порфиринов в качестве зондов, так как позволяет судить о локализации порфирина в ДНК.

Финансовая поддержка работы осуществлялась Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, грант №М96-028.

1. Matthews J.L., Newman J.T., Sogandares-Bernal F. et al.// Transfusion. 1988. Vol.28. P.81.

2. Rywkin, S., Lenny, L., Goldstein J. et al. // Photochem. Photobiol. 1992. Vol.56. P.463.

3. Kasturi C., Platz M.S. // Ibid. 1992. Vol.56. P.427.

4. Fiel R.J. // Biomol. Struct. Dynamics. 1989. Vol.6. P.1259.

5. Pasternack R.F., Gibbs E.J., Villafranca J.J.// Biochem. 1983. Vol. 22. P. 2406.

6. Kruglik S.G., Galievsky V.A., Chirvony V.S. et al.// J. Phys. Chem. 1995. Vol.99. P.5732.

7. Chirvony V.S., Galievsky V.A., Kruk N.N. et al. // J. Photochem. Photobiol. B: Biol. 1997. Vol.40. P.154.

8. Galievsky V.A., Chirvony V.S., Kruglik S.G. et al.// J. Phys. Chem. 1996. Vol.100. P.12649.

9. Pasternack R.F., Sprio E.G., Teach M.// J. Inorg. Nucl. Chem. 1974. Vol.36. P.599.

10. Pasternack R.F., Lee H., Malek P., Spencer C. Ibid. 1977. Vol.39. P.1865.

11. Tait C.D., Holten D., Gouterman M. //Chem. Phys. Lett. 1983. Vol.100. P.268.

12. Kruglik S.G., Ermolenkov V.V., Shvedko A.G. et al. // Ibid. 1997. Vol.270. P.293.

13. Джагаров Б.М., Чирвоный В.С., Гуринович Г.П. // Пикосекундная епектроскопия и фотохимия биомолекул /Под ред. В.С. Летохова. М., 1987.

Поступила в редакцию 22.02.99.

#### В.М.АНИЩИК, В.А.ЯРМОЛОВИЧ

#### ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК Insb С РАЗЛИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ ХОЛЛА

The choice of the basic parameters of film elements, namely thickness, concentration and mobility of charge carriers, temperature coefficients, for getting optimal characteristics of well-known Hall devices and three probes transformers is discussed.

Требования, предъявляемые к преобразователям Холла (ПХ), разнообразны и в первую очередь зависят от назначения устройств, в которых используются элементы Холла. Вследствие этого практически невозможно найти универсальный материал, отвечающий всем требованиям, однако наиболее важными являются следующие основные характеристики ПХ [1]:

- высокая чувствительность к магнитным полям;

минимальная зависимость ПХ от температуры;

– хорошая технологичность в изготовлении и низкая себестоимость.

Современные ПХ с высокими метрологическими характеристиками изготовляются по планарной технологии из гетеро- и гомоэпитаксиальных структур типа *n*-InSb-*i*-GaAs, *n*-InAs-*i*-GaAs, *n*-GaAs-*i*-GaAs, a также кремния на сапфире (КНС-структуры) [1,2].

Как известно, чувствительность классического преобразователя Холла у к магнитному полю в режиме измерения эдс Холла описывается следующим соотношением

$$\gamma = \frac{|U_x|}{B} = |R_x| J d^{-1} = J (end)^{-1} = \left(\frac{Pb\mu}{lden}\right)^{1/2},\tag{1}$$

где  $U_x$  — напряжение Холла на выходе датчика; B — величина индукции магнитного поля; P — мошность рассеиваемая на ПХ;  $R_x = -1/en$  — коэффициент Холла; n и  $\mu$  — конпентрация и подвижность носителей заряда (электронов) соответственно; b, l и d — ширина, длина и толщина пластины Холла (пленки); J — ток питания преобразователя, e — заряд электрона.

Для дырочного типа проводимости соотношения аналогичные. Следует отметить, что для конкретного ПХ величина  $\gamma$  определяется с большой точностью и указывается в паспорте для номинального тока питания *J*. Она определяется в результате калибровки в известном магнитном поле. При этом величина номинального тока, зависящая от максимальной рассеиваемой мощности  $P_{\text{max}}$ , выбирается неоднозначно. Обычно ПХ вылерживает двух-кратное увеличение тока управления, что эквивалентно увеличению чувствительности к магнитному полю почти в два раза, до  $\gamma_{\text{max}}$ . Работа ПХ при максимальном токе питания (соответственно при  $\gamma_{\text{max}}$ ) допускается лишь при небольших колебаниях внешнего теплоотвода.

Анализ формулы (1) показывает, что для получения высоких значений  $\gamma$  необходимо максимальное увеличение такого параметра магниточувствительной пленки полупроводника, как  $\xi = (\mu/d \cdot n)^{1/2}$ , что достигается выбором материала пленки. Возможно допускаемая величина второго сомножителя (Pb/el)<sup>1/2</sup> зависит от многих факторов, а именно: геометрических размеров ПХ (пленки и подложки), условий эксплуатации (температуры и свойств среды), коэффициентов теплопроводности подложки  $\mathcal{K}_{\Pi}$  и герметизирующих компаундов и др. Для наиболее стандартных случаев использования ПХ обобщенным критерием эффективности использования цленок для получения высокой магнитной чувствительности ПХ может быть величина  $\eta = \mathcal{K}_{\Pi}^{1/2}\xi$ . Последнее выражение получается при условии  $P_{\max} \mathcal{K}_{\Pi}$ , что отражает факт рассеяния джоулевого тепла в основном подложкой. Подложка является своеобразным радиатором для пленочного элемента, так как толщина магниточувствительной пленки более чем на полтора-два порядка меньше толщины подложки из полуизолирующего арсенида галлия или

сапфира, и теплопроводность GaAs в три раза превышает теплопроводность InSb. Искусственное увеличение максимальной мошности рассеяния *P*<sub>таж</sub>, например, путем применения теплоотводов практически не используется из-за устоявшейся тенденции к миниатюризации ПХ. Таким образом, параметр  $\eta$  характеризует свойства всей гетеро- или гомоэпитаксиальной структуры в целом, а не только магниточувствительной пленки. Так, известно, что переход выпуска датчиков Холла из кремния (серии ДХК) на КНС-структуры позволил увеличить плотность тока питания в несколько раз, что эквивалентно увеличению рассеиваемой мошности без изменения габаритов ПХ. Следует отметить, что выбор подложки с большим коэффициентом теплопроводности и хорошими диэлектрическими свойствами для преобразователей Холла сильно ограничен возможностью эпитаксиального наращивания пленок полупроводника с высокой подвижностью носителей.

Из формулы (1) следует, что величина магнитной чувствительности  $\gamma$ является функцией таких параметров, как толшина пленки *d*, подвижность  $\mu$  и концентрация *n* носителей заряда, которые не являются независимыми друг от друга. Причем влияние этих параметров часто бывает взаимоисключающим. Так, для повышения  $\gamma$  необходимо уменьшение толшины пленки *d*, что вызывает значительное уменьшение подвижности, особенно при d < 2-3 мкм [3], а при d < 0,5-1 мкм идет катастрофическое ее падение. Эта негативная тенденция снижения  $\mu$  приводит к $\gamma \approx 0$  при стремлении *d* к нуло. Это обусловлено наличием дефектного переходного слоя между подложкой из *i*-GaAs и пленкой [2] в структурах *n*-InSb-*i*-GaAs. Аналогичное поведение  $\mu(d)$  наблюдается и в монокристаллических пленках InSb, полученных перекристаллизацией под защитным слоем [3]. В [3] этот факт объясняется диффузионным поверхностным рассеянием носителей заряда.

Многочисленные попытки выращивания пленок InSb с высокой подвижностью [2,3] показали, что это можно сделать только для чистых (нелегированных) пленок, а с увеличением концентрации электронов, когда термостабильность значительно улучшается, подвижность снижается. Таким образом, перед разработчиками и изготовителями ПХ встает задача оптимизации характеристик преобразователей в смысле выбора наиболее приемлемых диапазонов *n*,  $\mu$ , *d* для каждого конкретного полупроводникового материала в отдельности.

Поскольку соотношения геометрических размеров в ПХ являются в основном установившимися, а общие габариты миниатюризируются, то при использовании в качестве подложки *i*-GaAs удобно для рассмотрения пользоваться параметром  $\xi$ . На рис.1 представлены расчетные зависимости параметра  $\xi$  по экспериментальным значениям *n*, *d*,  $\mu$  от толщины пленок InSb, полученных различными методами эпитаксии: термическим напылением в вакууме [2], жидкофазной эпитаксией, в том числе легированные висмутом [1], полученные перекристаллизацией под защитным слоем [3].

Из рис. 1 видно, что зависимости  $\xi(d)$ , т.е. величины, пропорциональные магнитной чувствительности ПХ, характеризуются максимумами в области толцины (0,5–1,5) мкм, а именно тогда, когда подвижности носителей в пленках еще не достигают своих максимальных значений. Увеличение толщины пленки в восемь раз снижает  $\gamma$  примерно в 2 раза при концентрации носителей 2 · 10<sup>22</sup> м<sup>-3</sup>, и практически слабо ее уменьшает в сильнолегированных образцах, где  $n=1,5 \cdot 10^{24}$  м<sup>-3</sup>. Поэтому нет необходимости стремиться значится значение толщину пленок (а значит, и технологичность) при n=const, поскольку между  $\xi$  (а значит,  $\gamma$ ) и d нет обратно пропорциональной зависимости, которая может быть усмотрена из формулы (1). Последнее подтверждает факт взаимосвязанности параметров  $\mu$ , n, d. Выбор способа выращивания монокристаллической пленки также слабо влияет на $\gamma$ .

Увеличение концентрации носителей заряда на два порядка вызывает уменьшение у приближенно на порядок. Это является следствием того, что повышение концентрации носителей заряда уменьшает входное сопротивление  $R_{\text{вх}} \prod X$ , и ток питания преобразователя Холла также может быть значительно увеличен (поскольку  $P_{\text{max}} = R_{\text{вx}} J^2_{\text{max}} \approx \text{const}$  при фиксированных габаритах ПХ).



Рис.1. Зависимость расчетного параметра ξ от толщины *d* пленок InSb, полученных различными методами эпитаксии:

[, [ – термическое напыление, • – перекристаллизация под защитным слоем (по данным в [3]), × – жидкофазная эпитаксия, включая легирование висмутом для различных концентраций носителей заряда  $(1-m^{-2}\cdot 10^{22} \text{ m}^{-2}, 2-m^{-1}\cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}, 3-n=1, 5\cdot 10^{24} \text{ m}^{-5})$ 

Преимущество получения высоких значений  $\xi$ , а значит, и  $\gamma$  за счет уменьшения концентрации *n* не является очевидным, поскольку значительно возрастают температурные изменения эдс Холла. Если ПХ запитывается от источника постоянного тока *J*=const, то изменения  $U_x$  с температурой определяются только температурным коэффициентом Холла  $\beta_T$ , т.е. фактически изменением концентрации носителей заряда с температурой *T*:

$$\beta_T = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} = R_x^{-1} \frac{\Delta R_x}{\Delta T}.$$
 (2)

В случае подключения ПХ непосредственно к источнику постоянного напряжения дополнительно появляются изменения, обусловленные температурным коэффициентом электросопротивления  $\alpha_T$  из-за изменения тока *J*, проходящего через ПХ:

 $\alpha_T = \rho^{-1} \Delta \rho / \Delta T$ , (3) где  $\rho = (en\mu)^{-1}$  — удельное электросопротивление пленки. Следует заметить, что обычно схемные решения подключения ПХ обеспечивают достаточно высокую стабилизацию величины тока *J*, что делает коэффициент  $\alpha_T$  гораздо менее значимым, чем  $\beta_T$ .

ПХ часто работают в далеко не термостабильных условиях, поэтому большинство датчиков изготавливаются на основе компромиссного подхода: снижается чувствительность  $\gamma$  за счет легирования (повышение *n* до  $1 \cdot 10^{23} - 1 \cdot 10^{24}$  м<sup>3</sup>) и одновременно уменьшаются температурные коэффициенты  $\beta_T$  и  $\alpha_T$ . Использование гетероэпитаксиальных структур позволило значительно увеличить рассеиваемую мошность *P*, а значит, и  $\gamma$  с сохранением приемлемых коэффициентов  $\beta_T$  и одновременно уменьшить габариты ПХ, что видно из таблицы. Технологичность и низкая себестоимость ПХ обусловливаются высокой плотностью расположения чувствительных элементов на подложке – не менее 100–400 штук на 1 см<sup>2</sup>.

Габариты без выводов, мм	Средняя чувствительность ү, мВ/Гл	β <sub>7</sub>  , %K <sup>-1</sup>	Рассеиваемая мошность <i>Р</i> , мВт	Источник информации, производитељ, разработчик
4×6×0,5	17-23	0,015	50	[3]
-	150		56	"Сименс"
$10 \times 7 \times 0.03$	600	0,05	160	[3]
1				
0,5×0,5×0,15	150-200	0,005-0,05	100-250	ИФТТП НАН
				Беларуси [2]
1×1×0,25	100-700	0,02-0,06	120-400	Белгосуни-
ĺ ĺ				верситет [1]
$0.5 \times 0.5 \times 0.25$	500-800	0,08-0,15	100-200	ИФТТП
, , ,				HAH
			l	Беларуси
	Габариты без выводов, мм 4×6×0,5 - 10×7×0,03 0,5×0,5×0,15 1×1×0,25 0,5×0,5×0,25	Габариты без выводов, мм         Средняя чувствительность ү, мВ/Гл           4×6×0,5         17-23           -         150           10×7×0,03         600           0,5×0,5×0,15         150-200           1×1×0,25         100-700           0,5×0,5×0,25         500-800	Габариты без выводов, мм         Средняя чувствительность у, мВ/Гл         β-1, %К <sup>-1</sup> 4×6×0,5         17-23         0,015           -         150         -           10×7×0,03         600         0,05           0,5×0,5×0,15         150-200         0,005-0,05           1×1×0,25         100-700         0,02-0,06           0,5×0,5×0,25         500-800         0,08-0,15	Габариты без выводов, ммСредняя чувствительность $\gamma$ , мВ/Гл $\beta_{7}$ , %К <sup>-1</sup> Рассеиваемая мощность P, мВт $4 \times 6 \times 0.5$ $17-23$ $0,015$ $50$ $ 150$ $ 56$ $10 \times 7 \times 0.03$ $600$ $0,05$ $160$ $0,5 \times 0,5 \times 0,15$ $150-200$ $0,005-0,05$ $100-250$ $1 \times 1 \times 0.25$ $100-700$ $0,02-0,06$ $120-400$ $0,5 \times 0,5 \times 0,25$ $500-800$ $0,08-0,15$ $100-200$

Рассмотрим критерии выбора параметров пленок для трехэлектродных преобразователей Холла, функционирующих на измерении тока Холла.

Согласно рис.2, гальванометр G (или заменяющее его устройство) измеряет ток Холла і между двумя расшепленными токовыми электродами. Полный ток Холла, который может быть получен при приложении магнитного поля В, равен [4]:

$$i_{\Pi} = K(l, b) \mu Br J$$

где K(l,b) – функция, зависящая от геометрии образца и места разрыва электрода, r≈1 – Холл-фактор рассеяния. Для длинного образца l/b>2 величина K(l,b) принимает практически постоянное значение, равное 0,742; лля короткого – при l/b < 0.3 K(a,b) = a/b [5], причем это верно при  $\delta < l, \delta < b$ . С учетом расшепления только одного токового электрода измеритель G фиксирует только половину полного тока  $i_{\Pi}$  [4]  $i = i_{\Pi}/2$ , и, следовательно, чувствительность такого преобразователя к магнитному полю будет

$$\gamma_i = i/B = 0.5 K \mu J$$

С учетом мощности, рассеиваемой преобразователем  $P=J^2 R_{ex}=J^2 \rho l/(bd)= =J^2 l/(bden\mu)$ , получаем выражение для магнитной чувствительности, аналогичное формуле (1):

$$\gamma_i = \frac{1}{2} K \left( \frac{Peb}{l} dn \right)^{1/2} \cdot \mu^{3/2}. \tag{6}$$

Анализ выражения (6) показывает, что для получения высоких значений у, необходимо максимальное увеличение параметра  $\xi_i = \mu^{3/2} (dn)^{1/2}$ , который является аналогом параметра & в обычном датчике Холла. По аналогии с формулой (2) можно ввести температурный коэффициент β<sub>τ</sub>, отвечающий за температурные изменения магнитной чувствительности при J=const в таком преобразователе:

$$\beta_{T_i} = \frac{1}{\gamma_i} \frac{\Delta \gamma_i}{\Delta T} = \mu^{-1} \frac{\Delta \mu}{\Delta T}.$$
 (7)



Рис.2. Трехэлектродный преобразователь Холла

Отметим существенное отличие коэффициентов  $\beta_T$  и  $\beta_T$ , которое следует из формул (2) и (7). Они определяются температурными изменениями концентрации и подвижности носителей заряда соответственно. Температурные коэффициенты электросопротивления для обоих типов датчиков совпадают  $\alpha_T = \alpha_{T_i}$  и определяются формулой (3).

На рис.3 представлены расчетные зависимости параметра  $\xi_i$  по экспериментальным значениям  $n, d, \mu$  от толщины пленок InSb, полученных различными методами эпитаксии (обозначе-ния, как на рис.1). Видно увеличение параметра ξ<sub>i</sub>, а значит, и чувствительности ПХ к магнитному полю с ростом толщины пленки. Это является следствием уменьшения электросопротивления входного И возможностью пропускания больших значений тока Ј через образец. При этом увеличивается и ток i, регистрируемый измерителем G. При фиксированном токе управления  $\hat{J}$ =const <sub>Рис.3.</sub> Зависимость расчетного параметра большей чувствительностью обладают ¿, от толщины d пленок InSb (обозначения, пленки с высокими значениями µ,



как на рис.1)

(5)

(4)

что следует непосредственно из формулы (5).

Сильное легирование пленки InSb, т.е. увеличение концентрации носителей заряда до 1,5·10<sup>24</sup> м<sup>-3</sup>, позволяет также значительно увеличить пропускаемый ток J и за счет этого может быть поднята магнитная чувствительность γ. Иными словами, этот эффект преоблалает перед тенденцией уменьшения чувствительности за счет снижения подвижности носителей заряда при соответствующем росте *n*. Однако следует иметь в виду, что величина тока J в преобразователях на гальваномагнитных эффектах обычно не должна превышать 200 мА из-за технических ограничений подводящих проводов, выполненных в миниатюрном исполнении. Причем значительное увеличение толщины пленки с 2 мкм до 8 (т.е. в четыре раза) поднимает чувствительность  $\gamma_i$ только в два раза. А поскольку при d < 2-3 мкм величина  $\xi_i$  стремительно убывает, то наиболее целесообразным для трехэлектродных ПХ являются пленки InSb с d > 3 мкм и тонкие фольги, что следует из рис.3. Поскольку  $\gamma_i \sim \xi_i = \mu^{3/2} (dn)^{1/2}$ , то к материалам, перспективным для использования в трехэлектродных ПХ, следует отнести те, которые имеют высокую подвижность и достаточно большую концентрацию носителей заряда, например сплавы Bi-Sb. Для обычных преобразователей Холла  $\gamma \sim \xi = (\mu/nd)^{1/2}$ поэтому требуются материалы с высокой подвижностью, но малой концентрацией носителей заряда и минимальной толщиной, вследствие чего характеристики ПХ из Bi-Sb значительно уступают датчикам из InSb.

Таким образом, исходя из введенных параметров  $\xi$  и  $\xi_i$  можно оценивать характеристики как классических преобразователей Холла, так и трехэлектродных, изготовленных из различных материалов, а не только из InSb. Если пленки получены на различных подложках, то обобщенными критериями могут быть величины  $\eta = k_n^{1/2} \xi$  и  $\eta_i = k_n^{1/2} \xi_i$  соответственно.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (Проект № Ф98-054).

1. Прокошин В.И., Шепслевич В.Г., Ярмолович В.А. Устройства автоматики и робототехники на эффекте Холла. Мн., 1991.

2. Болванович Э.И. Полупроводниковые пленки и миниатюрные измерительные преобразователи. Мн., 1981.

3. Касьян В.А., Кструш П.И., Никольский Ю.А., Пасечник Ф.И. Тонкие пленки антимонида индия. Получение, свойства, применение. Кишинев, 1989.

4. Павлов Н. П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов. М., 1987.

5. Кучис Е.В. Методы исследования эффекта Холла. М., 1974.

Поступила в редакцию 17.03.99.

#### УДК 537.635: 546.273 171

И.И.АЗАРКО, И.П.КОЗЛОВ, В.Б.ОДЖАЕВ, Е.М.ШИШОНОК, В.Б.ШИПИЛО

#### ПАРАМАГНИТНЫЕ ДЕФЕКТЫ КУБИЧЕСКОГО НИТРИДА БОРА, СИНТЕЗИРОВАННОГО С ПОМОЩЬЮ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

The results of the EPR-studies of single crystals and micropowders of cubic boron nitride, cBN, synthesized in catalytic systems with an excess of nitrogen and boron, including those after thermal and radiative treatments, are reported. This paper presents a discussion of the quantitative dependences of the paramagnetic centers characteristics and also on a determination of the cBN defects nature.

Неослабевающий интерес к исследованию и широкому использованию сверхтвердых материалов продиктован их рекордно высокими характеристиками и уникальными физическими свойствами. Технология получения сверхтвердых материалов в настоящее время развивается по следующим направлениям: 1) синтез алмазов и кубического нитрида бора с использованием аппаратуры высокого давления [1,2], в том числе методом взрывного сжатия; 2) осаждение тонких пленок алмаза и кубического нитрида бора различными способами [3-5].

Тетраэдрическая структура кубического нитрида бора (BNк) позволяет рассматривать его в качестве ближайшего аналога алмаза. Высокая механическая прочность и устойчивость к любому энергетическому воздействию, а также принципиальная возможность формирования на базе BN<sub>к</sub> электрически активных структур позволяет его использовать в качестве полупроводникового материала. Качество тонких пленок нитрида бора зависит от целого ряда параметров, например: давления рабочего газа, времени осаждения, величины потенциала [3], от сопутствующей ионной имплантации при использовании импульсной высокоэнергетичной плазмы [4], выбранной подложки [6]. Как правило, пленки имеют двухслойную структуру или включения гексагонального нитрида бора, при этом рост BN<sub>к</sub> происходит в соответствии с моделью субосаждения Робертсона, развитой для тетраэдрического а-С [7]. Формированию зародышей нанокристаллов тетраэдрической структуры способствует как ионность BN-связи [8], так и перестройка структуры в пределах теплового клина, индуцированного ионами высокоэнергетичной плазмы [7].

В настоящее время в ИФТТиПП НАН Беларуси в отделе сверхтвердых материалов разработана технология и налажен синтез структурно совершенных монокристаллов и микропорошков кубического нитрида бора. Отсутствие нететраэдрической фазы в образцах значительно упрощает задачу выяснения природы дефектов кубического нитрида бора посредством изучения соответствующих парамагнитных центров (ПЦ), в том числе после термического и радиационного воздействия.

#### Материалы и методика исследования

Для анализа спектров ЭПР образнов  $BN_k$ , отличающихся каталитическими системами роста кристаллов различного размера, были выбраны: 1) монокристаллы и микропорошки кубического нитрида бора, синтезированные в системе с избытком азота ( $BN_k^{-1}$  и  $BN_k^{-2}$ ); 2) монокристаллы кубического нитрида бора, выращенные в системе с избытком азота и легированные в процессе синтеза бором ( $BN_k^{-5}$ ); 3) монокристаллы и микропорошки кубического нитрида бора, синтезированные в процессе синтеза бором ( $BN_k^{-5}$ ); 3) монокристаллы и микропорошки кубического нитрида бора, синтезированные в каталитической системе с избытком бора ( $BN_k^{-6}$  и  $BN_k^{-4}$ ). Размер монокристаллов названных образцов не превышал значения 400 мкм, а зерен микропорошков – 5–10 мкм.

Облучение образцов кубического нитрила бора проводилось электронами с энергией 2 МэВ и дозами  $4,2 \cdot 10^{16}-6,8 \cdot 10^{17}$  см<sup>-2</sup> на линейном ускорителе электронов «Электроника ЭЛУ-4» при комнатной температуре в вакууме (не менее  $10^{-3}$  Па). Термический отжиг образцов проводился в графитовом контейнере в вакууме ( $10^{-4}$  Па) в диапазоне температур 473-1273 К в течение 60 мин.

Обнаружено, что для большинства образцов кубического нитрида бора, синтезированных в системе с избытком азота ( $BN_{K}^{-1}$  и  $BN_{K}^{-2}$ ), на спектрах ЭПР при комнатной температуре регистрируется одиночный сигнал с  $g=2,0023\pm0,0005$  и формой линии, хорошо аппроксимируемой в центре уравнением Лоренца и удовлетворительно — уравнением Гаусса по краям. Ширина линии изменяется в пределах 7,0—9,0 Гс и 10,5—12,0 Гс для монокристаллов  $BN_{K}^{-1}$  и микропорошков  $BN_{K}^{-2}$  соответственно. В монокристаллах концентрация ПЦ, ответственных за этот сигнал, примерно на порядок меньше, чем в микропорошках, и равняется (1,0—4,0)·10<sup>16</sup> спин/г (табл.1). Сигнал ЭПР не насыщается при повышении мошности СВЧ излучения вплоть до 150 мВт для образцов обоих типов.

Таблица I

Параметры сцектров ЭПР и концентрация ПЦ
в исходных образцах кубического нитрида бора различного
стехиометрического состава

		$T_{\text{HIM}}$ =300 K			<i>Т</i> <sub>изм</sub> =77 К	
Образец	<i>g</i> -фактор	Δ <i>Η</i> , Γc	<i>N</i> ∙10 <sup>-№</sup> , спин/г	<i>g</i> -фактор	Δ <i>Η</i> , Γe	<i>№</i> 10 <sup>-1*</sup> , спин/г
$BN_{K}^{-1}$	2,0023	7,0	3,2	2,0023	7,0	4,2
$BN_{K}^{2}$	2,0023	10,5	5,1	2,0023	11,0	5,5
BN <sub>K</sub> <sup>6</sup>	2,005	30,0	53	2,007	22,0	1200
$BN_{K}^{4}$	2,005	30,0	220	2,006	22,0	2800
$BN_{K}^{5}$	2,0030	27,0	59	2,005	26,5	690

Для кристаллов нитрида бора, выращенных в системе с избытком азота и легированных в процессе синтеза бором ( $BN_{k}^{5}$ ), на спектрах ЭПР при обычных условиях регистрируется одиночный широкий ( $\Delta H$ =27,0  $\pm 0,5$  Гс) сигнал с  $g=2,0030\pm 0,0005$ . Форма линии смещанная: пен-

тральная часть сигнала подчиняется уравнению Лоренца, а края описываются уравнением Гаусса. При снижении температуры измерения до 77 К интенсивность сигнала возрастает примерно на порядок при сохранении ширины линии, а значение *g*-фактора увеличивается до 2,005. Форма линии при этом удовлетворительно аппроксимируется уравнением Гаусса. Сигнал ЭПР с *g*=2,0023, характерный для образцов нитрида бора, синтезированных в системе с избытком азота, зафиксирован не был.

Отличительным признаком образцов кубического нитрида бора, синтезированных в каталитической системе с избытком бора, является наличие в спектрах ЭПР при комнатной температуре как широкого сигнала с величиной g-фактора, близкой к 2,005, так и узкого сигнала со значением gфактора, характерным для свободного электрона. Наложение линий ЭПР не позволяет определить точные значения их g-факторов. Полученные зависимости интенсивности обоих сигналов ЭПР от мощности СВЧ имеют линейный характер и не позволяют разделить ПЦ по времени релаксации. Как видно из табл. 1, концентрация ответственных за широкий сигнал ПЦ в порошках  $BN_{\kappa}^{4}$  значительно больше, чем в кристаллах  $BN_{\kappa}^{6}$ . При понижении температуры измерения различие в концентрации ПЦ для образцов BN<sub>к</sub><sup>4</sup> и BN<sub>к</sub><sup>6</sup> несколько снижается при общем увеличении числа неспаренных электронов за счет роста интенсивности широкого сигнала, сопровождающегося уменьшением ширины линии. Измерения при температуре жидкого азота дали возможность точно определить значения g-фактора доминирующего сигнала для обоих образцов (см. табл.1), так как узкий сигнал в районе gфактора свободного электрона практически не наблюдался. Форма линии широкого сигнала является лоренцевой как для образнов BN<sub>K</sub><sup>4</sup>, так и для BN<sub>K</sub><sup>6</sup>. В то же время параметры сигналов ЭПР с g=2,0023 образцов кубического нитрида бора, синтезированных в системе с избытком азота ( $BN_{K}^{-1}$  и  $BN_{K}^{-2}$ ), при понижении температуры измерения до 77 К качественно не изменяются, за исключением обычного увеличения концентрации ПЦ в 2 раза по сравнению с условиями регистрации спектров ЭПР при комнатной температуре.

При повышении температуры измерения от 300 К до 450–473 К интенсивность сигналов с g=2,0023, g=2,005 для образцов  $BN_{K}^{4}$  и g=2,003 для образцов  $BN_{K}^{5}$  уменьшается в соответствии с законом Кюри при сохранении формы и ширины линии. В спектрах образцов  $BN_{K}^{1}$ ,  $BN_{K}^{2}$  и  $BN_{K}^{6}$  с ростом температуры измерения зафиксирован сигнал с g-фактором, равным 2,0013±0,0005. Как видно из рис.1*a*, форма линии данного сигнала хорошо описывается уравнением Лоренца. Характерным в поведении высокотемпературного сигнала является нелинейный рост его интенсивности и уменьшение ширины линии при увеличении температуры измерения. Значения концентрации соответствующих парамагнитных дефектов при температуре 423 К приведены в табл.2. Обращает на себя внимание тот факт, что увеличение концентрации ПЦ, ответственных за широкий сигнал ( $g = 2,003 \div 2,007$ ), препятствует образованию в кубическом нитриде бора «высокотемпературных» центров, и, как следствие, приводит к замедленному росту интенсивности соответствующего сигнала ЭПР с увеличением температуры измерения вплоть до 473 К как для монокристаллов, так и для микропорошков.



Рис.1*а.* Сигнал ЭПР с g=2,0013, регистрируемый при температуре 423 К, для кристаллов кубического нитрила бора, синтезированных в системе с избытком азота  $BN_{\kappa}^{-1}$  (кривая *1*), и теоретические линии (кривые 2,3), подчиняющиеся соответственно уравнению Лоренца и Гаусса

Для установления природы нарамагнитных центров, ответственных за сигналы ЭПР в кубическом нитриде бора различного стехиометрического состава, был проведен ряд экспериментов по термическому и радиа-



Рис. 1.6. Широкий сигнал ЭПР с g=2,006, наблюдаемый при температуре 77 К, для микропорошков кубического нитрида бора, синтезированных в системе с избытком бора BN<sub>к</sub><sup>4</sup> (кривая 1), и теоретические линии (кривые 2,3), полчиняюпиеся соответственно уравнению Лоренца и Гаусса

Таблица 2 Основные параметры сигнала с g=2,0013

Тип образцов	∆ <i>Н</i> , Гс	<i>№</i> 10 <sup>-16</sup> , спин/г	I <sub>473 K</sub> /l <sub>253 K</sub>
$BN_{R}^{-1}$	1,3	17,0	26
$BN_{K}^{2}$	1,6	4,2	13
$BN_{K}^{6}$	2,0	1,3	4,3

ционному воздействию на материал. Обнаружено, что вследствие термической обработки BN<sub>к</sub> концентрация парамагнитных дефектов в порошках, синтезированных в системе с избытком бора, монотонно уменышается при увеличении температуры отжига вплоть до 1273 К.

Эксперименты по облучению монокристаллов кубического нитрида бора  $(BN_{K}^{1}$  и  $BN_{K}^{6})$  электронами ( $D=4,2\cdot10^{16}-6,8\cdot10^{17}$  см<sup>2</sup>), а также быстрыми нейтронами ( $D=1.0\cdot 10^{14}-7.2\cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup>) показали, что параметры сигналов с g=2,0023 в пределах погрешности измерения не изменяются. На спектрах, облученных электронами порошков BN<sub>к</sub>, синтезированных в системе с избытком азота или бора, также не было обнаружено изменений концентрации исходных ПЦ. И только с ростом дозы электронного облучения легированных бором образцов BN<sub>к</sub><sup>5</sup> на спектрах ЭПР наблюдается уменьшение ширины линии при сохранении интенсивности сигнала с g=2,0030 вплоть до дозы  $4,7 \cdot 10^{17}$  см<sup>2</sup>. В то же время отмечается рост концентрации ПЦ, ответственных за широкий сигнал ЭПР в спектрах облученных нейтронами образцов  $BN_{K}^{-1}$ и BN<sub>к</sub><sup>6</sup>, регистрируемых при температуре жидкого азота. Как видно на рисунке 16, форма линии сигнала с g=2,006 не является чисто лоренцевой, как в случае широких линий, характерных для необлученных образцов  $BN_{K}^{4}$  и  $BN_{K}^{6}$ , а смешанная – в центре лоренцева, а на крыльях – ближе к гауссовой.

Обнаруженный нами «высокотемпературный» центр устойчив к электронному облучению во всем исследованном диапазоне доз облучения.

В результате проведенных исследований установлено, что присутствие в спектрах ЭПР монокристаллов и микропорошков кубического нитрида бора относительно широкого сигнала со значением g-фактора, большим 2,003, характерно только для образцов с избыточным относительно стехиометрического состава содержанием бора в кристаллической решетке. А именно, для образцов BN<sub>к</sub>, синтезированных в каталитической системе с избытком бора, либо для образцов, выращенных в системе с катализатором, содержащим азот, но легированных в процессе синтеза бором. Полученные результаты согласуются с данными работы [9] для тонких пленок на основе микрокристаллического кубического нитрида бора и аморфного гидрогенизированного нитрида бора, по мнению авторов которой появление широкого сигнала обусловлено наличием оборванных связей аморфной фазы. С включениями аморфного бора связывается и широкий сигнал в спектрах ЭПР отожженных образцов пиролитического нитрида бора. Подобная аналогия в дополнение к ранее полученным результатам не исключает возможности непосредственной связи между присутствием широкого сигнала в спектре ЭПР  $BN_{k}$  и наличием в его кристаллической решетке комплексов из междоузельных атомов бора. Сильное уширение резонансной линии можно объяснить присутствием в кристаллической решетке образцов BN<sub>к</sub><sup>6</sup> и BN<sub>к</sub><sup>4</sup> локальных напряжений, вызванных протяженными структурными дефектами и колебаниями решетки. Возможное уменьшение влияния внутренних напряжений при понижении температуры до 77 К, приводящее к сужению линии и росту интенсивности сигнала, вызывает увеличение концентрации ПЦ. Тот факт, что их количество не зависит от дозы электронного облучения, подтверждает невакансионную природу данных ПЦ. Кроме того, электронное, а тем более нейтронное, облучение нитрида бора может способствовать аннигиляции части вакансий азота с собственными либо примесными атомами и увеличивать вероятность образования многовакансионных комплексов типа «вакансия азота / междоузельные атомы бора». При этом дефицит атомов в подрешетке азота BN<sub>к</sub> приводит к уменьшению параметров кристаллической решетки вследствие смещения атомов бора по направлению к вакансиям [10].

Обнаружено также, что присутствие избыточного бора в кристаллической решетке  $BN_k$  подавляет образование в нем «высокотемпературного» центра, что приводит либо к полному отсутствию в спектре сигнала с *g*-фактором, равным 2,0013, либо к замедленному росту его интенсивности с увеличением температуры измерения (см. табл.2). Подобная связь указанных ПЦ с числом атомов бора в решетке  $BN_k$  позволяет предположить их борвакансионную природу.

В заключение отметим, что независимо от формы образцов BN<sub>к</sub> (монокристаллы или ультрадисперсные порошки) выявлено соответствие состава каталитической системы роста кубического нитрида бора его спектральным характеристикам.

1. Прихна А.И. // Физ. и техн. высок. давлений. 1995. Т.5. №3. С.24.

2. Singh B.P., Nover G., Will G. // J. Cryst. Growth. 1995. Vol.152. №3. P.143.

3. Tsuda Osamu, Yamada Yukiko, Fujii Tsuyoshi, Yoshida Toyonobu // J. Vac. Sci. and Technol. A. 1995. Vol.13. №6. P.2843.

4. Yan Pengxun, Yang Si-ze. // Phys. status solidi A. 1995. Vol.151. №1. P.191.

5. Mirkarimi P.B., Medlin D.L., McCarty K.F. et al. // J. Appl. Phys. 1997. Vol.82. №4. P. 1617.

6. Mirkarimi P.B., McCarty K.F., Cardinale G.F. et al. // J. Vac. Sci. and Technol. A. 1996. Vol.14. No1. P.251.

7. Dworschak W., Jung K., Ehrhardt H. // Thin Solid Films. 1995. Vol.254. Nº 1–2. P.65.

22

8. Hofsass H., Ronning C., Griesmeier U. et al. // Appl. Phys. Lett. 1995. Vol.67. №1. P.46.

9. Lin Sh., Brown I.M., Feldman B.J. // Solid State Commun. 1995. Vol.96. №6. P.421.

10. Илясов В.В., Никифоров И.Я. // Физика тверд. тела. 1997. Т.39. №6. С.1064.

Поступила в редакцию 09.12.98.

УДК 669.716

#### В.Г.ШЕПЕЛЕВИЧ

#### СТРУКТУРА И СВОЙСТВА БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШЕЙ ФОЛЬГИ СПЛАВА Д16

Quickly quenched foils of D16 alloy are charactirized with texture (111). Aluminium solid solution includes the CuAl<sub>2</sub> and Al<sub>6</sub>Mg<sub>4</sub>Cu particles in the bulk and boundary of grains. Electrical resistioity and microhardness of foils are increased during low-temperature annealing, but it are decreased during annealing in the high – temperature region.

Благодаря методам сверхбыстрой закалки из жидкой фазы не только расширяется круг новых материалов, но и возрастают возможности использования ранее разработанных сплавов. К числу таких материалов относятся сплавы алюминия, применяемые в различных отраслях техники [1]. В данной работе представлены результаты исследования структуры и свойств фольги сплава Д16, полученной сверхбыстрой закалкой из расплава.

Для получения фольги сплав Д16 (~0,1 г) расплавлялся и нагревался до 670-700°С. Капля расплава выплескивалась на внутреннюю полированную поверхность медного цилиндра, вращающегося со скоростью 25 об/с. Внутренний диаметр цилиндра 20 см. При кристаллизации образовывалась фольга длиной до нескольких сантиметров и шириной до 1 см. Толщина фольги достигала 60 мкм. Скорость охлаждения расплава превышала 10° К/с, как показал расчет [2]. Рентгеноструктурные исследования фольги толщиной 20-50 мкм проводились на дифрактометре ДРОН-3 в кобальтовом излучении. Текстура фольги изучалась методом "обратных" полюсных фигур. Полюсные плотности дифракционных линий рассчитывались по методу Харриса [3]. При определении фазового состава фольги использовались данные по межплоскостным расстояниям [4]. На электронном микроскопе ПРЭМ-200 были проведены исследования структуры фольги толщиной до 0,2 мкм. Измерения микротвердости фольги осуществлялись на приборе ПМТ-3 при нагрузке 20 г.

Быстрозатвердевшая фольга сплава Д16 имела мелкозернистую структуру. Размер большинства зерен находился в пределах 3-5 мкм.

В табл.1 представлены значения межплоскостных расстояний (d<sub>эксп</sub>) исследуемого сплава, а также межплоскостные расстояния возможных фаз. Из сопоставления следует, что на дифрактограмме наблюдаются дифракционные линии 111, 200, 220, 311, 222, 400, 331 и 420, обусловленные твердым раствором на основе алюминия. Кроме того, наблюдаются дифракционные отражения, вызванные выделениями фаз CuAl, и Al<sub>6</sub>Mg<sub>4</sub>Cu. Размер выделений вторых фаз достигает 60 нм (рис.1). Они распределены как на границах зерен, так и по всему объему.

Таблица І

Межилоскостные расстояция, наблюдамые экспериментально для быстрозатвердевшей фольги сплава Д16 (d<sub>эксп.</sub>) и основных его фаз [4]

Межплоскостные расстояния фаз (d), нм								
d <sub>аксп</sub> ,нм	Al	CuAl <sub>2</sub>	Al, Mg₄Cu					
0,238	-	0,237						
0,232	0,233	-						
0,214	-	0,214	_					
0,211	-	0,212	0,211					
0,202	0,202	-	—					
0,190	·	0,190	-					
0,164	-	—	0,163					
0,159	—	—	0,160					
0,143	0,143	—						
0,135	—	0,136	0,135					
0,121	0,122		—					
0,115	0,117		-					
0,101	0,101	_						
0,093	0,093							
0,0905	0,0905	-	_					



Рис.1. Микроструктура быстрозатвердевшей фольги Д16 (x 30 000)

Таблица 2 Полюсные плотности дифракционных линий быстрозатвердевшей фольги сплава Д16

Состояние фольги	Дифракционные линии					
	111	200	220	311	331	420
Исходное	2,6	0,8	0,8	0,7	0,5	0,6
Отжиг при 140°С, 1 ч	2,5	0,8	0,9	0,8	0,5	0,5
Отжиг при 480°С, 1 ч	2,5	0,8	0,8	0,8	0,5	0,6

Значения полюсных плотностей р дифракционных линий представлены в табл.2. Наибольшим значением р характеризуется дифракционная линия 111, т.е. в фольге формируется текстура (111). На долю данной ориентировки приходится около 40% объема фольги. Ранее не наблюдалось образования текстуры такого типа в алюминии и его сплавах при литье тралиционными способами. Но формирование текстуры (111)имело место при получении алюминиевых пленок в неравновесных условиях [5]. К сожалению, механизм образования данной текстуры В алюминии и его сплавах не разработан. Слелует отметить, что наблюдаемая текстура фольги, как видно из табл.2, сохраня-ется и после отжига при 140 и 480°С в течение 1 ч.

На рис.2 представлен график изменения удельного электросопротивления

 $\rho(t)/\rho_0(\rho_0,\rho(t))$  — удельное электросопротивление фольги сплава после их получения и отжига при температуре t) в процессе изохронного отжига. Время выдержки фольги при каждой температуре составляло 10 мин. Вначале изохронного отжига удельное электросопротивление незначительно увеличивается, а затем при нагреве выше 220°С уменьшается.



Рис.2. Изменение  $\rho(t)/\rho_0$  быстрозатвсрдевшей фольги при изохронном отжите



Рис. 3. Изменение микротвердости H<sub>µ</sub> быстрозатвердевшей фольги при изотермическом отжиге (1-190°C, 2-250, 3-290°C)

На рис.3 приведены графики зависимостей микротвердости  $H_{\mu}(\tau)$  фольги от времени при изотермическом отжиге. Микротвердость после отжига при 190°С увеличивается, а при 290°С – уменышается. Изменение  $H_{\mu}$  в процессе отжига при 250°С находится в пределах погрешности измерения. Так как при сверхбыстрой закалке из расплава образуется пересышенный твердый раствор на основе алюминия, то наблюдаемые изменения свойств фольги при отжиге целесообразно связать с его распадом. Первоначальное увеличение удельного электросопротивления при изохронном отжиге и увеличение микротвердости в процессе изотермического отжига при 190°С обусловлено выделением мелкодисперсных зон Гинье–Престона на на-

24

чальном этапе распада, которые вызывают как рассеяние электронов проводимости, так и упрочнение сплава [6]. Повышение температуры изохронного отжига, а также изотермический отжиг при 290°С приводят к дальнейшему развитию распада пересыщенного твердого раствора, при котором происходит образование метастабильной и стабильной фаз. Размеры выделений фаз и расстояния между ними больше, чем для зон Гинье– Престона. Также происходит уменьшение концентраций легирующих элементов в твердом растворе и растворение зон Гинье–Престона [7]. Этим и объясняются наблюдаемые уменьшения удельного электросопротивления и микротвердости.

1. Lavernia E.J., Ayers J.D., Svivatson T.S.//International Materials Reviews. 1992. Vol.37.№1. P.1.

2. Мирошниченко И.С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.

3. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов. М., 1969.

4. Миркин Л.И. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. М., 1961.

5. Астахов О.Ф., Горелик С.С., Сагалова Т.Б. Сафонов Ю.С. // Физика металлов и металловедения. 1994. Т.77. №1. С.83.

6. Тофпенец Р. Л. Разупрочняющие процессы в стареющих сплавах. Мн., 1979.

7. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов. М., 1978.

Поступила в редакцию 14.12.98.

УДК 621.315.592.548.74

#### П.И.ГАЙДУК, В.С.ТИШКОВ, Ф.Ф.КОМАРОВ, С.Н.ЯКУБЕНЯ

#### ВЛИЯНИЕ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ АЛМАЗА НА СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК НИКЕЛЯ

The processes of nickel films growth from an electrolyte containing suspension of microdispersion diamond grains have been investigated. It was found that capture of the diamond grains gives an essential increase of grain size during the growth of polycrystalline nickel films. The data of diffraction measurements for nickel films obtained from electrolyte (with and without suspension of micro-dispersion diamond grains) are given.

Исследованию морфологии поверхности и дефектности кристаллов алмаза в мировой и отечественной литературе с начала 50-х гг. и по сей день уделяется пристальное внимание [1-20]. Интерес к изучению структуры природных и синтетических алмазов определяется прежде всего их огромным значением для промышленности при производстве различного типа илифовально-полировальных и режущих инструментов, а также износостойких покрытий. В частности, широкое применение нашли покрытия различного состава, содержащие мелкокристаллическую фракцию алмазных зерен. В этом плане наиболее интересны алмазосодержащие пленки кубического никеля. Известно, что  $\alpha$ -Ni имеет кристаллическую решетку (*Fm3m*), близкую по типу к решетке алмаза (*Fd3m*). При этом различие в постоянных их кристаллических решеток не превышает 1,3%. Следует ожилать, что присутствие алмазных зерен в растущей никелевой пленке может оказать существенное влияние на формирование ее кристаллической структуры. Настоящая работа посвящена исследованию данного эффекта.

#### Материал и методика

Пленки никеля толщиной до 30 мкм выращивали на стальных пластинах в электролитической ванне состава: 100 г/л сернокислого никеля, 25 г/л сернокислого никель-аммония, 19 г/л хлористого натрия, 19 г/л борной кислоты.

Рабочая температура электролита составляла 20–22°С при pH=5,8 и плотности тока 0,7 А/дм<sup>2</sup>. От подложек пленки отделяли отлушиванием при изгибе и утоняли двухсторонним ионно-лучевым распылением. Иссле-

дование структуры проводили методами просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) и электронной дифракции (ПЭД) с использованием электронного микроскопа ЭМ-125 и электронографа ЭМР-102 (в режиме непосредственной регистрации интенсивности) соответственно. Линии электронограмм, полученных на фотопленке, фотометрировались с помощью микроденситометра MD-100. По картинам электронной дифракции исследовались положение и относительная интенсивность дифракционных максимумов.

#### Результаты и их обсуждение



Рис. 1. ПЭМ микрофотография (*a*) и лифракция (*б*) от пленки никеля, выращенной без добавления зерен алмаза в электролит

Установлено, что микропленок структура никеля, выращенных при электролитическом осаждении, существенно зависит от состава электролита. Так, например, пленки никеля, выращенные из исходного электролита без добавления алмазного ПОрошка, имели мелкодисперстную структуру (рис.1а) с размером зерен ~30-100 нм. Анализ дифракционной картины, полученной с того же участка (рис.1б), показал, что является поликрипленка сталлическим никелем без видимого присутствия значительного количества посторонних примесей или химических соединений. Необхоотметить следующие димо особенности характерные электронограмм. Во-первых, соотношение между интенсивностями дифракционных линий соответствует чистому поликристаллическому нике-

лю (см.рис. 16, таблицу). Близкие значения интенсивностей линий получали также при использовании других методов осаждения тонких пленок Ni в вакуумных условиях, таких как резистивное и электронно-лучевое испарение, магнетронное распыление и др. [12]. Во-вторых, средний размер зерен поликристаллического никеля является характерным для низкотемпературных методов осаждения и указывает на то, что процессы зародышеобразования имеют сравнительно низкую энергию активации, тогда как рост отдельных кристаллов лимитирован низкой подвижностью атомов на границе раздела электролит/подложка.

Вторая партия пленок Ni была вырашена из электролита такого же состава, однако содержавшего взвесь мелкодисперсного алмазного порошка в количестве до 4 г/л. Из анализа ПЭМ изображений (рис.2*a*) структуры осажденной пленки Ni можно сделать по крайней мере три важных вывода.

Во-первых, в процессе роста пленки Ni происходит захват алмазных зерен (на рис.2*a* зерно алмаза обозначено стрелкой), плотность которых зависит как от их содержания в электролите, так и от условий электролитического осаждения. Зерна алмаза, захваченные в процессе роста никелевой пленкой, были, как правило, правильной октаэдрической огранки и не имели внутренних дефектов.

Во-вторых, захват алмазных включений приводит к существенному изменению структуры самой пленки Ni. В частности, размер зерен поликристаллического никеля резко увеличивался, вплоть до 500-800 нм, при этом пленки приобретали ярко выраженную текстуру. Захват зерен алмаза в никелевую пленку, не влияя в пределах точности ПЭД метода на межплоскостные расстояния, заметно сказывался на виде дифракционной картины (сравни рис.16 и рис.26), приводя к перераспределению относительной интенсивности дифракционных линий (см.таблицу).

В третьих, анализ дифракционного контраста ПЭМ изображений в светлом и темном поле в сочетании с микродифракцией показал, что зерна никеля, расположенные в непосредственной близости к ограненным алмазным включениям, имеют четкую ориентационную корреляцию. Последний факт свидетельствует о возможном ориентирующем влиянии зерен алмаза на зерна никеля. Большая вероятность такого процесса определяется тем, что параметры элементарных ячеек схожих кристаллических структур никеля *а*=0,3524 нм (A1) и алмаза а=0,3568 нм (А4) совпадают с точностью до 1,3%.

Наряду с сильным ориентирующим влиянием на



1. Koivula J.I., Fryer C.W. // Gems & Gemmology. 1984. Vol.20. №3. P.147.

2. Shigley J.E.S., Frisch E., Stockton C.M. et. al. // Gems & Gemmology. 1986. Vol.22. №4. P.191.

3. Shigley J.E.S., Frisch E., Stockton C.M. et. al. // Gems & Gemmology. 1987. Vol.23. №3. P.187.

4. Елиссев А.П., Рылов Г.М., Федорова Е.Н. и др. // Препринт ОИГГМ СО РАН. №5. Новосибирск, 1992. 28 с.

5. Patel A. R., Ramanathan S. // Phil.Mag. 1962. Vol.7. No.7. P. 1305.

6. Орлов Ю. Л. Минералогия алмаза. М., 1984.

7. Ферсман А.Е. Кристаллография алмаза. М., 1955.

8. Patel A.R., Patel A.R. // J.Appl.Crystallogr. 1971. Vol.4, P.207.



Рис. 2. ПЭМ микрофотография (а) и лифракция (б) от пленки никеля, выращенной с добавлением зерен алмаза в электролит

Межплоскостные расстояния и относительные интенсивности дифракционных линий от поликристаллических пленок никеля, алмаза и пикеля с включениями алмазных зерен

HKL	d <sub>Ni</sub> A	Ι	d <sub>c</sub> A	Ι	d <sub>Ni+C</sub> A	Ι
111	2,04	1,00	2,06	1,00	2,04	1,00
200	1,77	0,50	—		1,77	0,48
220	1,25	0,40	1,26	1,00	1,26	0,42
311	1,07	0,60	1,08	0,63	1,08	0,60
222	1,02	0,10		-	1,02	0,09
400	0,88	0,02	0,89	0,18	0,89	0,03
331	0,81	0,20	0,82	0,25	0,81	0,20
420	0,79	0,16			0,79	0,16
422	0,72	0,10	0,73	0,40	0,72	0,11
511	0,68	0,10	0,69	0,35	0,69	0,11

9. Patel A.R., Patel A.R. // Brit.J.Appl.Phys.(J.Phys.D). 1968. Ser.2. Vol.1. No11. P.1445.

10. Evans T., Sauter D. H. // Phil.Mag. 1961. Vol.6. P.429.
11. Omar M., Kenawi M. // Phil.Mag. 1957. Vol.2. P.859.
12. Технология тонких пленок. М., 1977. Т.2.
13. Pandya N. S, Tolansky S.// Proc.Roy.Soc.A. 1954. Vol.225. P.40.
14. Бокий Г.Б. Безруков Г. Н., Клюев Ю.А. и др. Природные и синтетические алмазы. М., 1986.

15. Vishnevsky A.S. // J.Cryst.Gr. 1975. Vol.29. Р.296. 16. Леммлейн Г.Г., Клия М.О., Чернов А.А. // Кристаллография, 1964. Т.9. Вып.2. С.231.

17. Безруков Г.Н., Бутузов В.П., Самойлович М.И. и др. //Зап. Всесоюзного минералогического общества. 1979. Ч.108. №3. С.359.

18. Григорьев О.Н., Волкова Л.М., Якубова С.Я и др. //Металлофизика: Респ. межвед. сб. 1973. Вып.47. С.81.

19.Land A.R. // Proc.Roy.Soc.A. 1963. Vol.278. P.234.

20. Мартовинкий В.П. и др. // Кристаллография. 1985. Т.30. Вып.6. С.1203.

Поступила в редакцию 28.01.99.

УЛК 621.372.8

#### П.Д.КУХАРЧИК, В.М.СЕРДЮК, И.А.ТИТОВИЦКИЙ

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОЛА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

A new version of the theoretical partial-region method for opened resonance and waveguide systems is considered on the example of the volume cylindrical cavity with cross-circular fissure. A possibility to describe these systems with one scalar field function corresponding to H- or E-polarization is substantiated. Integral expansions by normal modes of opened regions and possibilities of their computer calculation are studied.

Метод частичных областей (или метод сшивания) [1,2] является одним из наиболее простых и эффективных теоретических инструментов исследования волновых полей в различных волноводных и резонансных системах. Сущность этого метода заключается в том, что вся область распространения поля разбивается на простые подобласти, в каждой из которых можно записать аналитические выражения для собственных решений волновых уравнений в виде независимых свободных колебаний (мод), удовлетворяющих всем необходимым граничным условиям, кроме условий на поверхностях раздела с другими подобластями. Искомое поле возбуждения в каждой такой подобласти представляется в виде разложения по полному набору ее собственных мод с амплитудными коэффициентами, которые определяются из граничных условий на стыках различных подобластей (процедура сшивания).

Обычно этот метод используют для изучения полей в закрытых волноводных и резонансных системах. Тогда все подобласти оказываются пространственно ограниченными (например, это могут быть параллеленипеды, прямоугольники или цилиндры), и их собственные моды (плоские или цилиндрические волны) образуют дискретный спектр [3-5]. Полное поле представляется в виде бесконечной суммы счетного числа слагаемых по данным модам [1,2], члены которой быстро убывают по величине при больших порядках суммирования. Но если система не является закрытой и связана с окружающим бесконечным пространством через шели, то прихолится иметь дело с неограниченными подобластями, где собственные моды (те же плоские или цилиндрические волны) образуют непрерывный спектр, и разложение полного поля по ним будет представлять собой уже не сумму, а интеграл по бесконечному интервалу интегрирования [2]. Конечно, при вычислениях на ЭВМ этот интеграл тоже можно приближенно представить конечной суммой [6], но трудность в том, что ряд из таких частичных сумм очень плохо сходится.

Целью данного исследования является разработка нового варианта метода частичных областей, который обеспечивает эффективную реализацию на ЭВМ алгоритма расчета параметров полей, возбуждаемых в открытых волноводных и резонансных системах. Рассмотрение ведется на примере объемного цилиндрического резонатора с круговой щелью посреди его оси (рис.1); эта резонансная система является основным рабочим элементом новых микроволновых датчиков измерения влажности листовых материалов (бумага, картон, ткань) [7].

Для подобной системы разбиение на подобласти очевилно: в качестве первой следует взять внутреннюю область резонатора, второй - окружающее пространство. Почти всюду их границами являются плоские и цилиндрические металлические поверхности, через которые электромагнитное поле не распространяется, и лишь на щели (p=a, -d < z < d) может происходить обмен энергией между подобластями. Чтобы упростить решение задачи, предположим, что цилиндрические стенки резонатора продолжаются за пределы плоскостей  $z=\pm L$  в бес-



Рис. 1. Цилиндрический резонатор с поперечной круговой щелью q: *a* – общий вид, *б* – разрез по осям цилиндрической системы координат р и z

конечность, т.е. что резонатор представляет собой бесконечный цилиндрический волновод с поперечной щелью и внутренними плоскими перегородками при  $z=\pm L$ . Это позволяет исключить из рассмотрения дифракцию поля на внешних круговых ребрах резонатора, которая играет второстепенную роль по сравнению с основной дифракцией резонаторных мод на шели.

Рассмотрим уравнения, описывающие пространственное распределение поля во всей резонансной системе. Предположим, что в резонаторе возбуждается монохроматическое электромагнитное поле, периолическое по азимутальному углу  $\varphi$  с целым числом *m* периодов на  $2\pi$ . Тогда в цилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\varphi$ , z (см. рис.1) пространственные компоненты электрического и магнитного полей представятся в виде [3-5]:

$$E_{\rho} = \left(-\frac{i\,mk}{\rho}u + \frac{\partial^{2}v}{\partial\rho\partial z}\right)\sin m\,\varphi; \quad H_{\rho} = \left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho\partial z} - \frac{imk}{\rho}v\right)\cos m\,\varphi; \\ E_{\varphi} = \left(-ik\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{m}{\rho}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos m\,\varphi; \quad H_{\varphi} = \left(-\frac{m}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z} + ik\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)\sin m\,\varphi; \quad (1) \\ E_{z} = -\left(\frac{\partial^{2}v}{\partial\rho^{2}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{m^{2}}{\rho^{2}}v\right)\sin m\,\varphi = \left(\frac{\partial^{2}v}{\partial z^{2}} + k^{2}v\right)\sin m\,\varphi; \\ H_{z} = -\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\rho^{2}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{m^{2}}{\rho^{2}}u\right)\cos m\,\varphi = \left(\frac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}} + k^{2}u\right)\cos m\,\varphi,$$

где временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен,  $k = \omega/c - волновое число,$ *и*и*v* $-независимые комплексные скалярные функции переменных <math>\rho$  и *z*. Они представляют собой продольные составляющие (*z*-компоненты) магнитного и электрического векторов Герца [3–5] и описывают распределение в пространстве *H*- и *E*-поляризаций возбуждаемого поля по отдельности. Каждая из них должна удовлетворять волновому уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{m^2}{\rho^2} u + k^2 u = 0.$$
(2)

Волновое уравнение для функции и запишется аналогично.

Пусть в резонаторе возбуждается *H*-мода электромагнитных колебаний. Согласно [8] строгое решение граничной задачи дифракции этой моды на краю проводящего цилиндра требует использования сразу двух полевых функций *и* и *v*: только таким образом удастся удовлетворить сразу четырем условиям непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного вектора  $E_{\varphi,z}$  и  $H_{\varphi,z}$  (1) по обе стороны шели и на ее краях  $z=\pm d$ . Однако следует учитывать, что математическая модель идеализирует реальную ситуацию и рассматривает бесконечно тонкие проводники бесконечно большой проводимости [3], а это не может не приводить к различным сингулярностям, которые не наблюдаются на практике. Поэтому представляется естественным вообще исключить из рассмотрения точки краев щели. Тогда можно обойтись одной функцией *u*, а *v* считать равной нулю во всем пространстве. Действительно, положим на шели

$$\left\{u_i(\rho,z) - u_e(\rho,z)\right\}_{\rho=a} = 0; \quad \left\{\frac{\partial u_i(\rho,z)}{\partial \rho} - \frac{\partial u_e(\rho,z)}{\partial \rho}\right\}_{\rho=a} = 0, \quad (3)$$

где  $u_i$  и  $u_e$  – значения функции *и* внутри и снаружи резонатора. Эти условия при v=0 обеспечивают выполнимость граничных условий непрерывности  $E_{\varphi,z}$  и  $H_{\varphi,z}$  (1) на всей шели, кроме ее краев, поскольку соотношения (3) можно дифференцировать по тангенциальной координате *z* во всех точках, исключая края  $z=\pm d$ , где производная по *z* фактически не определена [1,8]. Подобное приближение, позволяющее ограничиться одной полевой функцией *и* или *v*, существенно упрощает решение задачи моделирования сложных резонансных и волноводных систем, особенно ее программную реализацию на ЭВМ.

Предположим, что в резонаторе возбуждаются только четные H-моды. Поскольку исследуемая система совершенно симметрична относительно плоскости z=0, то и полное поле тогда должно обладать аналогичной симметрией. Поэтому расчет пространственной структуры поля достаточно проводить только для неотрицательных z.

Собственные моды каждой подобласти представляют собой частные решения волнового уравнения Гельмгольца (2) с граничными условиями, определяющими равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля (1) на металлических границах. В резонаторе они представляются произведением радиально зависимых функций Бесселя и синусоидальных функций осевой координаты z [3–5]. Полное поле, симметричное относительно плоскости z=0 (см. рис.1), представится в виде разложения:

$$u_i(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_m(\alpha_n \rho) \sin \beta_n (L-z), \qquad (4)$$

где  $c_n - \kappa оэффициенты разложения поля по модам, <math>\beta_n = \pi (n+0,5)/L;$  $\alpha_n = (k^2 - \beta_n^2)^{1/2}; L - полувысота резонатора. Во внешней области отсутствуют металлические поверхности, ограничивающие распространение поля по оси$ *z*, поэтому здесь постоянная распространения β может принимать любое значение, и спектр мод становится непрерывным:

$$u_e(\rho, z) = \int_0^{+\infty} b(\beta) H_m^{(1)}(\alpha \rho) \cos\beta z \, d\beta, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \tag{5}$$

где b — модовые коэффициенты,  $H_m^{(1)}$  — функция Ханкеля [9].

Представление (5) должно удовлетворять условиям на бесконечности, аналогичным известным условиям излучения [3–5]: при  $\rho \rightarrow \infty$  и при  $z \rightarrow \pm \infty$ величина  $u_e$  (5) и ее координатных производных должна стремиться к нуло. Эти условия выполняются, если амплитуды мод  $b(\beta)$  ограничены по величине для всех  $\beta$ . Действительно, стремление к нулю  $u_e(5)$  при  $\rho \rightarrow \infty$  обеспечивается асимптотикой функций Ханкеля при бесконечно большом значении аргумента [9], а в случае  $z \rightarrow \infty$  малость интеграла  $u_e(5)$  нетрудно доказать с помощью метода стационарной фазы [10].

Рассмотрим граничные условия на пилиндрической поверхности  $\rho = a$ , которые для полей (4),(5) пока не учитывались. На металлической ее части (z > d) из условия  $E_{\varphi}=0$  изнутри и снаружи резонатора получаем:  $(\partial u_i/\partial \rho)_{\rho=a}==(\partial u_o/\partial \rho)_{\rho=a}=0$ ; на шели должны иметь место равенства (3). Следовательно, произволные  $\partial u/\partial \rho$  одинаковы по обе стороны поверхности  $\rho=a$  при всех z, что дает возможность определить их как новую функцию  $w(z)=(\partial u_i/\partial \rho)_{\rho=a}==(\partial u_o/\partial \rho)_{\rho=a}$ . Вне шели эта функция должна равняться нулю. Через нее можно выразить коэффициенты в разложениях полей (4) и (5), используя соотношения ортогональности для синусоидальных функций [5] на оси z:

$$c_{n} = \frac{2}{L} \cdot \frac{f_{n}}{\alpha_{n} J'_{m}(\alpha_{n} a)}; \quad f_{n} = \int_{0}^{d} w(z) \sin \beta_{m} (L-z) dz;$$
  
$$b(\beta) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{f(\beta)}{\alpha H_{m}^{(1)}(\alpha a)}; \quad f(\beta) = \int_{0}^{d} w(z) \cos \beta z \, dz,$$
 (6)

где штрих обозначает производную функции Бесселя или Ханкеля по своему аргументу а.

Остается удовлетворить первое условие (3) на шели, для чего следует подставить выражения (6) в (4), (5) и приравнять их при  $\rho = a$ ,  $0 \le z < d$ . Полученное соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции w(z) и частоты  $\omega$  (волнового числа k). Но есть более простой вариант дальнейшего решения по методу частичных областей, который исходит из дополнительного предположения, что функция w(z) известна [1]. Тогда с учетом формул (4)–(6) первое условие (3) становится уравнением для одной величины k при разных z ( $0 \le z < d$ ). Усредним его по всем значениям z с весовой функцией w(z), т.е. проинтегрируем по всем z, предварительно умножив на нее обе части уравнения:

$$\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J_m(\alpha_n a)}{\alpha_n J'_m(\alpha_n a)} f_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{H_m^{(1)}(\alpha a)}{\alpha H_m^{(1)}(\alpha a)} f^2(\beta) d\beta.$$
(7)

Введение весовой функции здесь эквивалентно требованию более точного выполнения первого условия (3) для точек z с большим значением функции w(z) на шели, чем для точек с относительно малым ее значением.

Для выбора функции w(z) имеются следующие соображения. Во-первых, вследствие симметрии резонансной системы относительно плоскости z=0необходимо потребовать, чтобы производная данной функции была равна нулю при z=0. Во-вторых, известно [8], что при дифракции цилиндрических мод на краю металлического цилиндра функция поля u и ее нормальная производная непрерывны вблизи него. Одной из простейших функций, удовлетворяющих этим условиям, является функция

$$w(z) = \begin{cases} \cos \tau z, \quad \tau = \pi / 2d & \text{при } 0 \le z \le d \\ 0 & \text{при } z > d \end{cases}$$

Для нее

$$f_n = \frac{(-1)^n \tau \cos\beta_n d}{\tau^2 - \beta_n^2}; \quad f(\beta) = \frac{\tau \cos\beta d}{\tau^2 - \beta^2}, \tag{8}$$

причем  $f(\beta) \rightarrow d/2$  при  $\beta \rightarrow \tau$ .

При реализации описанной процедуры решения на ЭВМ нужно ограничить число слагаемых, входящих в разложения по собственным модам частичных областей задачи. Чтобы определить корректную процедуру ограничения числа членов интегральной суммы в правой части (7), предположим, что берется конечное их число с максимальным значением  $\beta = B$ , и рассмотрим остаточный член данной суммы, представляемый интегралом по  $\beta$  от B до  $+\infty$ . Пусть B – достаточно большое значение, чтобы для всех  $\beta \ge B$  можно было использовать асимптотическое выражение для функции Ханкеля при больших по модулю значениях аргумента [9]. Тогда  $\alpha \sim i\beta$ ;  $H_m^{(1)}(\alpha a)/H_m^{(1)}(\alpha a) \sim -i; f(\beta) \sim -\tau \cos\beta d/\beta^2$ , что позволяет вычислить интеграл остаточного члена, который будет равен:

$$I \approx -\frac{\tau^2 d}{12B^3} \left( \sin 2Bd + \frac{3}{B} \sin^2 Bd - \frac{3}{B^2 d} \sin 2Bd + \dots \right).$$
(9)

Если положить  $B=\pi N/d$  (N — большое целое число), то остаточный член *I* обратится в нуль. Таким образом, суммирование рядов, аппроксимирующих интеграл (7) по непрерывному спектру вне резонатора, следует заканчивать на величине  $\beta = B$ , дающей значение  $\beta d$ , кратное  $\pi$ , и чем больше эта величина, тем точнее аппроксимация. Такое же выражение (9) получается и в декартовой системе координат, если рассматривается не цилиндрический, а прямоугольный резонатор с поперечной шелью, поэтому и для него максимальное значение  $\beta d$  при вычислении интегральных сумм тоже следует полагать кратным  $\pi$ .

В расчетах на ЭВМ достаточно ограничиться значением *Bd*, равным  $5\pi$ ; тогда адекватное приближение интеграла получается, если взять примерно 600-700 членов ряда по  $\beta$ , т.е. если интервал от 0 до  $\beta=5\pi/d$  разделить примерно на 600-700 элементарных отрезков интегрирования, на каждом из которых интеграл вычисляется по формуле трапеций [6]. Для сравнения укажем, что аналогичная точность у ряда по дискретному набору мод внутри резонатора получится, если ограничиться в 4 раза меньшим числом суммируемых членов.

Таким путем можно вычислить резонансную частоту, а затем, по формулам (4)-(6),(8), и поле и во всем пространстве. Компоненты электрического и магнитного полей могут быть рассчитаны с помощью формул (1). Тем самым описанная методика позволяет полностью решить задачу расчета электродинамических параметров поля и его пространственной структуры во всех точках.

В качестве примера приведем рассчитанные по этой методике картины пространственного распределения величины функции u (4),(5) и модуля электрического поля  $|E|=(|E_{\rho}|^{2}+|E_{\phi}|^{2})^{1/2}$  внутри и вне цилиндрического резонатора, представленные на рис.2 и 3 для частного случая, когда a=2,9 см, L=17,6 см, d=0,5 см, m=1. В отсутствие шели при этом будет возбуждаться резонансная мода H115 с частотой 3,705 ГГц (длина волны 8,097 см), со щелью частота резонансного возбуждения становится равной 3,833 ГГп. Из рис.2 и 3 видно, что в основном объеме резонатора структура поля оказывается такой же, как и в резонаторе без шели [3,4], и лишь вблизи последней ее влияние на структуру поля становится заметным.



Рис.2. Линии уровня величины функции и внутри и вне цилиндрического резонатора со щелью

Рис.3. Линии уровня величины электрического поля [E] внутри и вне цилиндрического резонатора со шелью

В заключение следует отметить, что реальная структура возбуждаемого поля должна несколько отличаться от той, которая получается по описанному выше методу. Дело в том, что при штыревом или щелевом возбуждении реальных резонаторов [3,4] исходное возбуждающее поле будет содержать помимо основной резонансной цилиндрической моды множество других, нерезонансных пространственных компонент, которые будут вносить определенный вклад в полное поле внутри резонатора. Поэтому данная методика определяет, строго говоря, пространственную структуру не всего поля возбуждения, а только основной резонансной моды, и ее искажения, вызываемые утечкой электромагнитной энергии через щель.

1. Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. Численные методы расчета и проектирования. М., 1984.

2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.

3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М., 1988.

4. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1978.

5. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л., 1967. 6. Калиткин Н.Н.Численные методы. М., 1978.

7. Kuharchik P.D., Titovitsky I.A., Belyachits A.Ch., Kourilo N.I. // Summaries of the contributions... on "Electromagnetic Wave Interaction with Water and Moist Substances". SanFrancisco, California, June 17, 1996. P.135.

8. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.

9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М., 1979. 10. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., 1987.

Поступила в редакцию 11.03.99.

УДК 621.396.67

#### Н.А.ВОЛЫНЕЦ, В.И.ДЕМИДЧИК

#### ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЕТЧАТОГО ЭКРАНА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

The calculation method of electrodynamic characteristics of a half-wave symmetric dipole arranged above a grid screen is examined. This method is based on the solution of Pocklington's integral equation. The demonstrated results of analysis allow to evaluate properties of the grid screen depending on the size grid cell, the thickness conductor and the distance between dipole and the screen.

Сетчатые экраны находят широкое применение в антенной технике. Они используются в разнообразных устройствах электромагнитной защиты, в качестве рефлекторов зеркальных и вибраторных антенн, экранов пассивной ретрансляции. Это обусловливает практическую значимость исследований, связанных с моделированием электродинамических свойств устройств, использующих сетчатые структуры.

Исследования, посвященные изучению отражательных свойств сетчатых экранов, базируются, как правило, на результатах решения задачи о падении плоской электромагнитной волны на сетчатую структуру бесконечных размеров [1,2]. На практике же приходится иметь дело с антенными системами в виде излучателя и сетчатого экрана конечных размеров. В роли излучателя зачастую выступает полуволновой симметричный вибратор или решетка таких вибраторов.

Цель работы — моделирование характеристик излучения электрического вибратора, расположенного над сетчатым экраном и определение зависимости этих характеристик от геометрических параметров экрана.

Решение задачи проводилось методом моментов на основе решения интегрального уравнения Поклингтона в рамках тонкопроволочного приближения [3]:

$$E^{\tau}(s) = \frac{j}{\varpi \varepsilon} \int_{S} I(s') \left[ k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) ss' - \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r'})}{\partial s \partial s'} \right] ds', s' \in S,$$

где  $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp(-jkR/4\pi R)$ ,  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + a_0^2}$ , S — общая длина вибратора и всех проводников сетки, s,s' — криволинейные (в общем случае) координаты, отсчитываемые вдоль проводника, s,s' — единичные векторы, касательные к проводнику, x, y, z, x', y', z' — координаты точек наблюдения и источника,  $E^{\tau}(s)$  — тангенциальная составляющая электрического поля источника возбуждения,  $a_0$  — радиус проводника, I(s) искомая функция токораспределения.

Численное решение интегрального уравнения проводилось путем сведения его к матричному с выбором в качестве базисных кусочнопостоянных функций подобластей, в качестве весовых — дельта-функций. Отрезки разбиения проводника при этом выбирались таким образом, чтобы на длине проводника, образующего сторону ячейки сетки, укладывалось целое число отрезков. Это означает, что участки разбиения не содержат точек пересечения проводников. Выполнение этого условия, а также дополнительные ограничения на величину отрезков разбиения и толщину проводника обеспечивают устойчивость алгоритма решения матричного уравнения и исключают возможность появления искажений в искомом распределении тока [4,5].

На основании информации об амплитудно-фазовом распределении тока рассчитывались поле излучения и основные характеристики и параметры системы вибратор — сетчатый экран. Оценка электродинамических свойств проводилась по результатам анализа характеристики направленности (XH). Уровень заднего излучения в зависимости от геометрических параметров сетки и позволял судить об отражательных свойствах сетчатого экрана.

Геометрия задачи показана на рис.1, где облучатель параллелен плоскости экрана. Ячейки экрана прямоугольной формы.

Расчет поля излучения проводился в двух взаимно перпендикулярных плоскостях *E* и *H*. Коэффициент прохождения оценивался по максималь-

ному уровню заднего лепестка относительно максимального уровня главного лепестка (XH). Результаты расчетов приведены на рис.2*a*, где показана зависимость коэффициента прохождения от расстояния *b* между проводниками экрана, параллельными вибратору, поскольку, как известно [2], перпендикулярные вибратору проводники не влияют на отражательные свойства экрана. Менялась также и толщина проводника, из которого выполнен экран (кривая 1 соответствует  $a_0=0,004\lambda$ , кривая  $2 - a_0=0,005\lambda$ , кривая  $3 - a_0=0,01\lambda$ , кривая  $4 - a_0=0,015\lambda$ ,).



Результаты, близкие к приведенным на рис.2*a*, получаются, если расстояние *h* от вибратора до экрана находится в пределах  $0,12 - 0,28\lambda$ . При  $h/\lambda \ge 0,3$  главный лепесток (XH) начинает раздваиваться. При этом размеры эк-

рана, как установлено численными экспериментами, должны быть не меньше чем 2,5?2,5?<sup>2</sup>. В противном случае зависимость коэффициента прохождения, определяемого как отношение максимального значения заднего лепестка к максимуму главного лепестка (XH), от размеров экрана носит осциллирующий характер.



Для сравнения на рис.26 приведены аналогичные данные по расчету коэффициента прохождения на основании известного соотношения:

$$p = \sqrt{1/(1 + (\lambda / 2b \ln(b / 2\pi a_0))^2)},$$

полученного по методу, предложенному в[2], где коэффициент прохождения *p* определялся как отношение напряженности поля прошедшей волны к полю падающей плоской волны. Рассчитанный подобным образом коэффициент прохождения дает, как видно из рис.2 завышенные результаты по сравнению с предложенной методикой.

В разработанном комплексе программ предусмотрена возможность изменения произвольным образом ориентации вибратора относительно экрана, что позволяет оценивать влияние ошибок установки вибратора на его характеристики. К примеру, на рис. За показана ХН в плоскости E вибратора, параллельного экрану; на рис. 36 – вибратора, имеющего наклон  $5^{\circ}$  по отношению к плоскости экрана.



Таким образом, предложенная методика и комплекс программ позволяют ют оценивать отражательные свойства сетчатого экрана в зависимости от его геометрических параметров и толщины проводников, из которых он выполнен.

1. Электродинамика сетчатых структур / Под ред. М.И.Коиторовича. М., 1987.

2. Айзенберг Г.З., Ямпольский В.Г., Терешин О.Н. Антенны УКВ. М., 1977. Ч.2.

3. Mei K.K. // IEEE Trans. 1965. Vol. AP-13. N5. P. 374.

4. Дручинин С.В. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. N3. С. 276.

5. Демидчик В.И., Рунов А.В., Калашников Н.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. N3. С. 82.

Поступила в редакцию 14.12.98
# Математика и информатика



УДК 536.24, 517.968

#### В.П. КОЗЛОВ, Н.И. ЮРЧУК, П.А. МАНДРИК

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ В ОБЛАСТИ *L*-ИЗОБРАЖЕНИЙ

The method of solution of second kind integral equations with L-parameter is suggested.

В работах [1-3] был предложен метод парных интегральных уравнений с *L*-параметром для решения двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными разрывными граничными условиями (ГУ). Применение этого метода для решения очень важных задач математической физики с целью изучения переходных процессов от момента времени  $\tau \ge 0$  до  $\tau \rightarrow \infty$  при локальном нагреве поверхности тела со смешанными ГУ обычно приводило к неявной аналитической форме, связанной с последующим решением интегрального уравнения

$$\overline{\varphi}_{i}(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \overline{\varphi}_{i}(t,s) \overline{K}_{i}(r,t,s) dt = \overline{\Phi}_{i}(r,s), i = 1,2,$$
(1)

где 0 < r < R; Re s > 0;  $\overline{\Phi}_i(r, s)$  – известная (заданная) функция-изображение в области (0 < r < R, z = 0);  $\overline{K}_i(r, t, s)$  – ядро интегрального уравнения (1) в области *L*изображений (0 < r < R, Re s > 0);  $\overline{\phi}_i(r, s) = L^{-1}[\phi_i(r, \tau)]$  – неизвестная функцияизображение; s – параметр интегрального преобразования Лапласа;  $\tau$  – время; r – иилиндрическая координата; R – радиус круга r = R, в области которого (0 < r < R) на плоской поверхности z = 0 полупространства задается ГУ первого или второго рода, причем вне круга ( $R < r < \infty$ , z = 0) ГУ является смешанным, т.е. если в круге задана функция  $f(r, \tau)$ , то вне круга задана нормальная к поверхности z=0 производная  $\theta_z$ , и наоборот, если в круге задана нормальная производная  $\theta_r = q^*(r, \tau)$ , то вне круга задается однородное нулевое значение функции.

Рассмотрим определенный вид функций-изображений  $\overline{\Phi}_i(r,s)$  и  $\overline{K}_i(r,t,s)$ :

1) известная функция-изображение  $\overline{\Phi}_1(r,s)$  в области 0 < r < R, z = 0 и ядро  $\overline{K}_1(r,t,s)$  имеют вид:

$$\overline{\Phi}_{1}(r,s) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_{0}^{r} \frac{\overline{f}(\mu,s) \cos\left(\sqrt{\frac{s}{a}(r^{2}-\mu^{2})}\right) \mu d\mu}{\sqrt{r^{2}-\mu^{2}}}, \ 0 < r < R, \ \text{Re} s > 0,$$
(2)

$$\overline{K}_{1}(r,t,s) = \frac{\sin(t-r)\sqrt{s/a}}{t-r} + \frac{\sin(t+r)\sqrt{s/a}}{t+r}, \ 0 < t, \ r < R, \ \text{Re} \, s > 0 \ , \tag{3}$$

где  $\bar{f}(r,s) = L[f(r,\tau)]$  — заданная функция-изображение температуры в круге 0 < r < R, z = 0,  $a \neq 0$  — температуропроводность;

2) известная функция-изображение  $\overline{\Phi}_2(r,s)$  в области 0 < r < R, z = 0 и ядро  $\overline{K}_2(r,t,s)$  имеют вид:

$$\overline{\Phi}_{2}(r,s) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_{0}^{R} \frac{\overline{q}(\mu,s)\cos\left(\sqrt{\frac{s}{a}(r^{2}-\mu^{2})}\right)\mu d\mu}{\sqrt{r^{2}-\mu^{2}}}, 0 < r < R, \operatorname{Re} s > 0,, \qquad (4)$$

$$\overline{K}_{2}(r,t,s) = \frac{\sin(t-r)\sqrt{s/a}}{t-r} - \frac{\sin(t+r)\sqrt{s/a}}{t+r}, \ 0 < r, t < R, \ \operatorname{Re} s > 0 ,$$
(5)

где  $\overline{q}(r,s) = L[q(r,\tau)]$  — заданная нормальная производная температуры  $\overline{\theta}_z = -\overline{q}(r,s)/\lambda$  в круге 0 < r < R, z = 0,  $\lambda \neq 0$  — теплопроводность,  $a \neq 0$  — температуропроводность.

Для решения интегрального уравнения (1) с *L*-параметром необходимым условием является существование в круге 0 < *r* < *R* известных функций-изображе-ний

$$\bar{f}(r,s) = L[f(r,\tau)] = \int_{0}^{\infty} \exp(-s\tau)f(r,\tau)d\tau, \quad 0 < r < R, \quad \operatorname{Re} s > 0 , \quad (6)$$

$$\overline{q}(r,s) = L[q(r,\tau)] = \int_{0}^{\infty} \exp(-s\tau)q(r,\tau)d\tau, \ 0 < r < R, \ \operatorname{Re} s > 0.$$
(7)

Не нарушая идеи предлагаемого метода определения неизвестных функций  $\overline{\varphi}_i(r,s)$  из уравнения (1), мы рассмотрим частные случаи, когда оригиналы известных функций  $f(r, \tau) = f_0 = \text{const и } q(r, \tau) = q_0 = \text{const или заданные функции в круге}$  (0, *R*) могут быть представлены в виде  $f(r, \tau) = f_1(\tau)$  и  $q(r, \tau) = q_1(\tau)$ .

Тогда значения интегралов Лапласа (6), (7) будут известны:  

$$L|f(r,\tau)| = L|f_0| = f_0 / s$$
, Re $s > 0$ ,  $f_0 = \text{const.}$  8)

$$L[q(r,\tau)] = L[q_0] = q_0 / s, \text{ Re } s > 0, q_0 = \text{const},$$
(9)

$$L[f(r,\tau)] = L[f_1(\tau)] = \bar{f}_1(s), \text{ Re } s > 0, \qquad (10)$$

$$L[q(r,\tau)] = L[q_1(\tau)] = \overline{q}_1(s), \operatorname{Re} s > 0.$$
(11)

При значении (8) и вычислении (2) уравнение (1) запишется в виде:

$$\overline{\varphi}_{1}(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \overline{\varphi}_{1}(t,s) \overline{K}_{1}(r,t,s) dt = \frac{2f_{0}}{\pi s} \cos\left(r\sqrt{s/a}\right) 0 < r < R, \operatorname{Re} s > 0.$$
(12)

В работе впервые предлагается следующий метод решения уравнения (12).

Как и в [1], неизвестную аналитическую функцию-изображение  $\overline{\phi}_1(r,s) = \overline{\phi}(r,s)$  можно представить в виде функционального ряда

$$\overline{\varphi}(r,s) = \exp\left(-R\sqrt{s/a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r) \left(\sqrt{s}\right)^{n-2}, \ 0 < r < R, \ \operatorname{Re} s > 0 ,$$
(13)

причем для (13) существует обратное преобразование Лапласа, так как [4]

$$L^{-1}\left[s^{\frac{n-1}{2}}e^{-k\sqrt{s}}\right] = \frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4\tau}\right)}{2^n\sqrt{\pi\tau^{n+1}}} \cdot H_n\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right), n = 0, 1, 2, \dots; k > 0, \qquad (14)$$

где *H*<sub>n</sub>- многочлен Эрмита.

Ядро  $\overline{K}_{1}(r,t,s)$ , определяемое формулой (3), можно представить рядом

$$\overline{K}_1(r,t,s) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t,r) \cdot \left(\sqrt{s}\right)^k, \ 0 < t, r < R, \operatorname{Re} s > 0,$$

где

$$C_{k}(t,r) = \begin{cases} 0, \ k = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2}{k!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \left[ (t-r)^{k-1} + (t+r)^{k-1} \right] \ k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$
(15)

С учетом (13) и (15) уравнение (12) преобразуется к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(r)}{s} \cdot \left(\sqrt{s}\right)^n - \frac{1}{2\pi s} \int_0^R \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \left(\sqrt{s}\right)^n \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t, r) \left(\sqrt{s}\right)^k \right] dt =$$

$$= \frac{2f_0}{\pi s} \cdot \exp(R\sqrt{s/a}) \cdot \cos\left(r\sqrt{s/a}\right) 0 < r < R, \text{Re } s > 0.$$
(16)

Дальнейшие преобразования (16) связаны с умножением степенных рядов и представлением в ряд правой части уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \left( \sqrt{s} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t, r) \left( \sqrt{s} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \varphi_n(t) C_{m-n}(t, r) \left( \sqrt{s} \right)^m, \tag{17}$$

$$\exp\left(R\sqrt{s/a}\right)\cos\left(r\sqrt{s/a}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} D_k\left(R,r\right)\left(\sqrt{s}\right)^k,\tag{18}$$

где

$$D_{k}(R,r) = \frac{1}{k!} a^{-\frac{k}{2}} \left[ (R+ir)^{k} + (R-ir)^{k} \right] k = 0, 1, 2, 3, \dots$$
(19)

(*i* – мнимая единица). С учетом (17), (18) уравнение (16) принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r) \cdot \left(\sqrt{s}\right)^{n-2} = \frac{f_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} D_k (R, r) \left(\sqrt{s}\right)^{k-2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^m \left[ \int_0^R \varphi_n(t) C_{m-n}(t, r) dt \right] \left(\sqrt{s}\right)^{n-2}, 0 < r < R, \text{Re } s > 0.$$
(20)

Приравнивая соответствующие коэффициенты разложений левой и правой частей уравнения (21) при одинаковых степенях параметра  $\sqrt{s}$ , находим

$$\varphi_0(r) = \frac{2f_0}{\pi}, \varphi_1(r) = \frac{2f_0R(2+\pi)}{\pi^2\sqrt{a}}, \quad \varphi_2(r) = \frac{4f_0R^2(2+\pi)}{\pi^3a} + \frac{f_0(R^2-r^2)}{\pi a}$$

На основании (20) нетрудно получить рекуррентную формулу для определения  $\varphi_n(r)$  при любых  $n \ge 1$ , причем эта формула не будет являться интегральным уравнением относительно  $\varphi_n(t)$ , так как  $C_0(t, r) = 0$ :

$$\varphi_n(r) = \frac{f_0}{\pi} D_n(R, r) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^R \varphi_k(t) C_{n-k}(t, r) dt, 0 < r < R, \text{Re } s > 0 .$$
(21)

где  $D_n(R, r)$  определяются формулой (19),  $C_{n-k}(t, r)$  формулой (15).

Подставляя значение  $\phi_n(r)$  из (21) в (13), находим искомую функцию

$$\overline{\varphi}(r,s) = \exp\left(-R\sqrt{s/a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{f_0}{\pi} D_n(R,r) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^R \varphi_k(t) C_{n-k}(t,r) dt \right] (\sqrt{s})^{n-2}, 0 < r < R, \operatorname{Re} s > 0.$$
(22)

Используя формулу обращения (14), находим оригинал  $\varphi(r,\tau) = L^{-1}[\overline{\varphi}(r,s)]$ .

Если заданная функция в круге определяется формулой (10), то интегральное уравнение (12) принимает вид:

$$\overline{\psi}(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \overline{\psi}(t,s) \overline{K}_{1}(r,t,s) dt = \frac{2}{\pi s} \cos\left(r\sqrt{s/a}\right) 0 < r < R, \operatorname{Re} s > 0, \qquad (23)$$

где неизвестная функция  $\overline{\psi}(r,s)$  связана с  $\overline{\phi}(r,s)$  соотношением

$$\overline{\psi}(r,s) = \frac{\overline{\phi}(r,s)}{\overline{f_1}(s)}, \ \overline{f_1}(s) \neq 0.$$
(24)

Применяя описанный метод определения функции (13), (22) к соотношению (24), мы найдем значение  $\overline{\psi}(r,s)$  из уравнения (23). Далее, используя теорему операционного исчисления о свертке оригиналов двух функций [5, 6], находим значение  $\phi(r,s)$  для случая задания в области 0 < r < R известной функции (10), зависящей только от времени. При этом

$$\overline{\Phi}_1(r,s) = \frac{2}{\pi} \overline{f}_1(s) \cos\left(r\sqrt{s/a}\right), \quad \varphi(r,\tau) = \int_0^\tau f_1(\tau-\xi) \psi(r,\xi) d\xi ,$$

где  $\psi(r,\tau) = L^{-1}[\overline{\psi}(r,s)].$ 

При вычислении  $\overline{\phi}(r,s)$  по формуле (22) необходимо помнить, что  $C_{2\alpha} \equiv 0$ , когда  $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, ....$ 

При *i*=2 интегральное уравнение (1) принимает вид

$$\overline{\varphi}^*(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_0^R \overline{\varphi}^*(t,s) \overline{K}_2(r,t,s) dt = \overline{\Phi}_2(r,s), \quad 0 < r < R, \operatorname{Res} > 0, \tag{25}$$

где  $\overline{\phi}_2(r,s) = \overline{\phi}^*(r,s)$ , а  $\overline{\Phi}_2(r,s)$  и  $\overline{K}_2(r,t,s)$  задаются формулами (4) и (5). Полагая в (4)  $\overline{q}(\mu,s) = q_0 / s = const$ , т.е. в виде (9), найдем

$$\overline{\Phi}_{2}(r,s) = \frac{2q_{0}\sqrt{a}}{\pi\lambda s\sqrt{s}}\sin\left(r\sqrt{s/a}\right).$$
(26)

Подставляя (26) в (25), приходим к интегральному уравнению

$$\overline{\varphi}^{*}(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} \overline{\varphi}^{*}(t,s) \overline{K}_{2}(r,t,s) dt = \frac{2q_{0}\sqrt{a}}{\pi\lambda s\sqrt{s}} \sin\left(r\sqrt{s/a}\right).$$
(27)

Представляя аналитическую функцию  $\overline{\phi}^*(r,s)$  в виде функционального ряда

$$\overline{\varphi}^*(r,s) = \exp\left(-R\sqrt{s/a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(r) \left(\sqrt{s}\right)^{n-2}, \quad 0 < r < R, \text{ Res} > 0, \tag{28}$$

и разлагая ядро (5) в соответствующий ряд, мы получим следующий вид интегрального уравнения (27):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(r) \left( \sqrt{s} \right)^{n-2} - \frac{1}{2\pi s} \iint_0^R \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \left( \sqrt{s} \right)^n \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t, r) \left( \sqrt{s} \right)^k \right] dt =$$

$$= \frac{2q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda \left( \sqrt{s} \right)^3} \exp\left( R \sqrt{s/a} \right) \sin\left( r \sqrt{s/a} \right), \quad 0 < r < R, \text{Res} > 0,$$
(29)

где

$$A_{k}(t,r) = \begin{cases} 0, \ k = 0, 1, 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2}{k!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \left[(t-r)^{k-1} - (t+r)^{k-1}\right], \ k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$
(30)

Далее представим произведение в правой части (29) в виде

$$\exp\left(R\sqrt{s/a}\right)\sin\left(r\sqrt{s/a}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{\infty} B_k(R,r)\left(\sqrt{s}\right)^k,\tag{31}$$

где

$$B_{k}(R,r) = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{k} \left[ (R+ir)^{k} - (R-ir)^{k} \right] =$$
  
=  $\frac{i}{k!} \left(\frac{R}{\sqrt{a}}\right)^{k} \sum_{j=0}^{k} C_{k}^{j} \left(\frac{r}{R}\right)^{j} \sin\left(j\frac{\pi}{2}\right) \left[1 - (-1)^{j}\right],$  (32)

i – мнимая единица, k = 1, 2, 3, ....

По правилу (в форме) Коши произведем в (29) умножение рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi}_{n}^{*}(t) \left(\sqrt{s}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k}(t,r) \left(\sqrt{s}\right)^{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi}_{k}^{*}(t) A_{n-k}(t,r) \left(\sqrt{s}\right)^{n}.$$
(33)

Необходимо помнить, что в (33)  $A_{n-k}(t,r) = 0$  при n-k = 0,1,2,4,6,8,...С учетом значений (31) и (33) уравнение (29) запишем в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(r) (\sqrt{s})^{n-2} = \frac{q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda i} \sum_{k=1}^{\infty} B_k (R, r) (\sqrt{s})^{k-3} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_0^R \varphi_m^*(t) A_{n-m}(t, r) (\sqrt{s})^{n-2} dt, \quad 0 < r < R, \text{Res} > 0.$$
(34)

Приравнивая коэффициенты в степенных рядах (34) при одинаковых степенях

$$\sqrt{s}$$
, находим (0<  $r < R$ ,  $\lambda > 0$ ,  $a > 0$ ), что  $\varphi_0^*(r) = \frac{q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda i} B_1(R, r) = \frac{2q_0 r}{\pi \lambda}$ ,  
 $\varphi_1^*(r) = \frac{q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda i} B_2(R, r) = \frac{2q_0 R r}{\pi \lambda \sqrt{a}}, \ \varphi_2^*(r) = \frac{q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda i} B_3(R, r) = \frac{q_0 R^2 r}{\pi \lambda a} - \frac{q_0 r^3}{3\pi \lambda a}$ .

На основании (34) для  $\phi_n^*(r)$  можно записать рекуррентную формулу

$$\varphi_n^*(r) = \frac{q_0 \sqrt{a}}{\pi \lambda i} B_{n+1}(R, r) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^R \varphi_m^*(t) A_{n-m}(t, r) dt, \quad 0 < r < R,$$
(35)

где  $B_{n+1}(R,r)$  определяются из формулы (32), а  $A_{n-m}(t,r)$  — из формулы (30). Необходимо помнить, что в формуле (35)  $A_1(t,r) = A_{2\alpha}(t,r) = 0$  при  $\alpha = 0,1,2,3,...$ 

Подставляя значение  $\phi_n^*(r)$  из (35) в формулу (28), находим искомую функцию-изображение  $\overline{\phi}_n^*(r,s)$  в случае, когда в области круга 0 < r < R на поверхности z=0 полупространства задается постоянная плотность теплового потока  $q(r\tau)=q_0=$ const а вне круга  $0 < r < \infty$  на поверхности z=0 полупространства поддерживается нулевая избыточная температура

$$\begin{split} \overline{\varphi}^{*}(r,s) &= \frac{q_{0}\sqrt{a}}{\pi\lambda i} \exp(-R\sqrt{s/a}) \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1}(R,r) \left(\sqrt{s}\right)^{n-2} + \\ &+ \frac{\exp(-R\sqrt{s/a})}{2\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \int_{0}^{R} \varphi_{m}^{*}(t) A_{n-m}(t,r) dt \left(\sqrt{s}\right)^{n-2} = \\ &= \frac{q_{0}\sqrt{a}}{\pi\lambda} \left\{ \frac{2r}{\sqrt{a}} \frac{1}{s} \exp(-R\sqrt{s/a}) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\frac{k-1}{2}}}{(k+2)!} \left(\frac{R}{\sqrt{a}}\right)^{k+2} \sum_{j=0}^{k+2} C_{k+2}^{j} \left(\frac{r}{R}\right)^{j} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \left[1 - (-1)^{j}\right] \exp(-R\sqrt{s/a}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{k+1} s^{\frac{k-1}{2}} \int_{0}^{R} \varphi_{m}^{*}(t) A_{k+1-m}(t,r) dt \exp(-R\sqrt{s/a}), \quad 0 < r < R, \operatorname{Re} s > 0, \end{split}$$

где  $B_{n+1}(R,r), A_{n-m}(t,r), \phi_m^*(t)$  являются функциями известными (см. (30), (32), (35)). Используя формулу обращения (14), можно найти значение  $\phi^*(r, \tau)$ .

Если заданная в круге (0, R) функция определяется формулой вида (11) (т.е.  $L[q(r, \tau)] = L[q(\tau)] = \overline{q}(s)$ ), то, вводя новую неизвестную функцию

 $\overline{\psi}^*(r,s) = \frac{\overline{\phi}^*(r,s)}{\overline{q}(s)}, \quad \overline{q}(s) \neq 0, \quad 0 < r < R, \text{Re } s > 0, \text{ приходим к аналогичному инте-$ 

гральному уравнению в области *L*-изображений

$$\overline{\psi}^*(r,s) - \frac{1}{\pi} \int_0^R \overline{\psi}^*(t,s) \overline{K}_2(r,t,s) dt = \frac{2\sqrt{a}}{\pi \lambda s^{3/2}} \sin\left(r\sqrt{s/a}\right) \quad 0 < r < R, \text{ Re } s > 0.$$

Решая последнее уравнение разработанным выше методом, находим  $\overline{\Psi}^*(r,s)$ , применяя обратное преобразование Лапласа, находим  $\psi^*(r,\tau)$ .

Тогда 
$$\varphi^*(r, \tau) = \int_{0}^{\tau} q(\tau - \xi) \psi^*(r, \xi) d\xi, \quad 0 < r < R, \tau > 0.$$

Заметим, что при  $s \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  получаем известный стационарный случай [7,8].

Найденные функции  $\overline{\phi}_i(r,s)$  и их оригиналы  $\phi_i(r,\tau) = L^{-1}[\overline{\phi}_i(r,s)]$  имеют большое практическое значение для различных областей науки и техники при локальном нагреве плоской поверхности тела (полупространства) круговым источником тепла со смешанными разрывными граничными условиями (на поверхности тела в областях 0 < r < R и  $0 < r < \infty$ ). Эти функции получены впервые.

Предельные соотношения для функций-изображений  $\overline{\varphi}_1(r,s) = L[\varphi_1(r,\tau)]$  и  $\overline{\phi}_{2}(r,s) = L[\phi_{2}(r,\tau)]$  имеют следующий вид  $(0 < r < R, \text{Re } s > 0, \tau > 0)$ :

$$\lim_{s \to 0} [s\overline{\varphi}_1(r,s)] \Rightarrow \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{s \to \infty} [s\overline{\varphi}_1(r,s)] \Rightarrow 0, \quad \lim_{s \to 0} [s\overline{\varphi}_2(r,s)] \Rightarrow \frac{2r}{\pi}, \quad \lim_{s \to \infty} [s\overline{\varphi}_2(r,s)] \Rightarrow 0,$$
  

$$\Pi p \mu f(r,\tau) \Big|_{0 < r < R, \tau > 0} = 1, \quad \frac{q(r,\tau)}{\lambda} \Big|_{0 < r < R, \tau > 0} = \frac{q_0}{\lambda} = 1.$$

Более полное исследование зависимостей  $\phi_i(r, \tau)$ , i = 1, 2, а также их связь с другими функциями представляют собой актуальную задачу теории новых специальных функций.

1. Абдельразак Н.А. Методы решения двумерных задач нестационарной теплопроводности со смешанными и несмешанными разрывными граничными условиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1996.

2. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Абдельразак Н.А //Тезисы докладов VII Белорусской математической конференции. Мн., 1996.

3. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ, 1998. Т. 71, №4. С. 4. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. М.,

1979.

5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.

6. Козлов В.П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Мн., 1986.

7. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.

8. Sntddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.

Поступила в редакцию 13.11.98.

УЛК 517.938

#### В.В.АМЕЛЬКИН, А.Э.МАЛЕВИЧ

# ПРЕЛЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОРБИТ ОБЩИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. І

Some types of motions of general dynamical systems are studied. Dynamically limit set plays an important role in their behavior.

Пусть X – полное метрическое пространство, T – конечномерное вещественное векторное пространство\*, а тройка (f, T, X) задает общую динами-

Ряд утверждений данной статьи справедливы и в том случае, когда Х – отделимое топологическое пространство, а T – отделимая коммутативная топологическая группа.

ческую систему. Последнее означает, что в указанной тройке отображение  $f: T \times X \to X$  непрерывно,  $f(0,x) = x \quad \forall x \in X$  и  $f(t_1 + t_2, x) = f(t_1, f(t_2, x)) \quad \forall t_1, t_2 \in T$  и  $\forall x \in X$ .

Зафиксируем в пространстве T некоторый фильтр  $\mathcal{F}$ .

Определение 1. Динамически *F*-предельным множеством точки x∈X называется множество

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{f(F, x)}$$

точек прикосновения базиса  $f(\mathcal{F}, x)$  фильтра в X, где  $\overline{f(F, x)}$  – замыкание f(F, x) и  $f(\mathcal{F}, x) = \{f(F, x) | F \in \mathcal{F}\}$ .

Любая точка  $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  называется динамически  $\mathcal{F}$ -предельной точкой точки  $x \in X$ .

Из определения 1 следует, что  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  замкнуто и  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \subset f(T,x)$ . Кроме того, если фильтр  $\mathcal{F}^*$  мажорирует фильтр  $\mathcal{F}$ , то  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}(x) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \quad \forall x \in X$ .

**Теорема 1** ([1], с.101). Пусть точки  $x, p \in X$ . Тогда  $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  в том и только в том случае, когда в T существует фильтр  $\mathcal{F}^*$ , мажорирующий фильтр  $\mathcal{F}$ , такой что  $\lim_{x \to \infty} f(t, x) = p$ .

Определение 2. Точка  $x \in X$  называется  $\mathcal{F}$ -устойчивой, по Лагранжу, если существует  $F_0 \in \mathcal{F}$  такое, что  $f(F_0, x)$  относительно компактно и называется устойчивой, по Лагранжу (в целом), если относительно компактна орбита f(T, x).

Заметим, что из устойчивости, по Лагранжу (в целом), следует *F*-устойчивость, по Лагранжу, для любого фильтра *F* в *T*.

**Теорема 2**. Пусть точка  $x \in X$   $\mathcal{F}$ -устойчива, по Лагранжу. Тогда  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  – непустое компактное множество и  $\lim_{\mathcal{F}} \rho(f(t,x), \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)) = 0$ , где  $\rho$  – метри-

ка в пространстве Х.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.2 из [2].

В дальнейшем фильтр *F* будем считать инвариантным фильтром<sup>\*\*</sup>.

**Теорема 3.** Пусть *x* и t – произвольные точки пространств *X* и *T* соответственно, а  $x_t = f(t,x)$ . Тогда:

а)  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  инвариантно и  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x_t) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x);$ 

б) если точка  $x \mathcal{F}$ -устойчива, по Лагранжу, то и точка  $x_i \mathcal{F}$ -устойчива, по Лагранжу.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.1 из [2] (см. также замечание 3.2 [2]).

Определение 3. Точка  $x \in X$  называется  $\mathcal{F}$ -устойчивой, по Пуассону, если она обладает свойством возвращаемости, т.е. если для любой окрестности U точки x и любого множества  $F \in \mathcal{F}$  пересечение  $f(F, x) \cap U \neq \emptyset$ .

**Теорема 4.** Для того чтобы точка  $x \in X$  была  $\mathcal{F}$ -устойчивой, по Пуассону, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \emptyset$ .

Доказательство. *Необходимость*. Пусть точка  $x \in X$   $\mathcal{F}$ -устойчива, по Пуассону. Отсюда следует, что для любой окрестности U точки x и любого множества  $F \in \mathcal{F}$   $\overline{f(F,x)} \cap U \neq \emptyset$ , а значит, и  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap U = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{f(F,x)} \cap U \neq \emptyset$ . Последнее говорит о том, что x – точка прикоснове-

ния множества  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ . Но  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  — множество замкнутое и поэтому  $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ . Отсюда и следует выполнимость условия  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \emptyset$ .

<sup>&</sup>lt;sup>\*\*</sup> Фильтр  $\mathcal{F}$  в *T* называется *инвариантным*, если любой перенос в группе *T* переводит фильтр  $\mathcal{F}$  в себя.

Достаточность. Пусть  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \emptyset$ . В силу инвариантности множества  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  справедливо включение  $x \in f(T, x) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ , которое означает, что x – точка прикосновения для  $f(\mathcal{F}, x)$ . А тогда для любого множества  $F \in \mathcal{F}$  и любой окрестности U точки x пересечение  $f(F, x) \cap U \neq \emptyset$ . Отсюда и следует справедливость теоремы.

**Теорема 5.** Пусть x и t – произвольные точки пространств X и T соответственно, а  $x_t = f(t,x)$ . Тогда если точка x  $\mathcal{F}$ -устойчива, по Пуассону, то и точка  $x_t \mathcal{F}$ -устойчива, по Пуассону, и  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \overline{f(T,x)}$ .

Доказательство. Из  $\mathcal{F}$ -устойчивости, по Пуассону, точки x, в силу теоремы 3, имеем, что  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \cap f(T, x) \neq \emptyset$  и  $f(T, x) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \subset \overline{f(T, x)}$ . Замечая теперь, что  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  замкнуто, получаем требуемое.

Определение 4. Точка х∈Х называется Ω-периодической, где Ω — замкнутая тотальная подгруппа аддитивной векторной группы T, если

 $f(t + \omega, x) = f(t, x) \quad \forall t \in T, \ \forall \omega \in \Omega.$ 

**Теорема 6.** Пусть точка  $x \in X$   $\Omega$ -периодична. Тогда она устойчива, по Лагранжу (в целом),  $\mathcal{F}$ -устойчива, по Пуассону, и  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = f(T, x)$  для любого инвариантного фильтра  $\mathcal{F}$  пространства T.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что факторгруппа  $T/\Omega$  компактна, а следовательно, компактна и орбита f(T, x), что влечет устойчивость, по Лагранжу (в целом), точки x и в силу теоремы 5 – равенство  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = f(T, x) = f(T, x)$ .

Пусть теперь A = { $\alpha = (t, F) \in T \times \mathcal{F}$  |  $F \in \mathcal{F}, t \in F$ } – направленное множество с отношением порядка  $(t, F) \ge (t_1, F_1)$ , если и только если  $F \subset F_1$ . Проекцию множества A на T назовем направленностью, ассоциированной с фильтром  $\mathcal{F}$ . Если же { $t_{\alpha}$ } $_{\alpha \in A}$  – направленность в множестве T, то фильтр с базисом { $F_{\alpha}$ } $_{\alpha \in A}$ , где  $F_{\alpha_0} = \{t_{\alpha} \in T \mid \alpha \ge \alpha_0\}$ , называется фильтром, ассоциированным с направленностью { $t_{\alpha}$ } $_{\alpha \in A}$ .

Предложение 1 (ср. [3], с.112). Пусть фильтр  $\mathcal{F}$  ассоциирован с направленностью  $\{t_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  или, наоборот, направленность ассоциирована с фильтром. Тогда каждый предел (точка прикосновения) фильтра  $\mathcal{F}$  является пределом (предельной точкой) направленности  $\{t_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ . Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 2 (ср. [1], с.102, следствие 1). Пусть  $f: T \to X -$  отображение множества T в X и p – точка в X. Тогда если для каждого ультрафильтра  $\mathcal{U}$  в T, мажорирующего фильтр  $\mathcal{F}$ , базис  $f(\mathcal{U})$  ультрафильтра в X сходится к p, то базис  $f(\mathcal{F})$  фильтра в X также сходится к p.

Нетрудно убедиться и в справедливости следующего утверждения.

Предложение 3. Если направленность  $\{t_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset T$ , начиная с некоторого места, лежит в любом множестве из  $\mathcal{F}$ , то фильтр  $\mathcal{F}^*$ , ассоциированный с данной направленностью, мажорирует  $\mathcal{F}$ . Если, кроме того,  $\mathcal{F} -$ ультрафильтр, то  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$ .

Рассмотрим теперь, наряду с общей динамической системой (f, T, X), общую динамическую систему (g, T, Y), где Y – полное метрическое пространство, метрику которого также обозначим через  $\rho$ , и введем семейства

$$\mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F}) = \left\{ \mathcal{F}^* - \phi$$
ильтр в  $T \middle| \mathcal{F}^* \supset \mathcal{F}, \lim_{\mathcal{F}^*} f(t, x) = p \right\}$ 

И

$$\mathfrak{m}_{x}(\mathcal{F}) = \bigcup_{p \in X} \mathfrak{m}_{xp}(\mathcal{F}), \quad$$
где  $x, p \in X$ 

**Теорема 7.** Точка  $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ . При этом  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{M}_{x}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ .

Справедливость данной теоремы становится очевидной, если заметить, что в соответствии с теоремой 1 введенное ранее множество  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  можно определить и так:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x) = \left\{ p \in X \middle| \exists \mathcal{F}^* \supset \mathcal{F}, \lim_{\mathcal{F}^*} f(t, x) = p \right\}.$$

Предложение 4. Пусть  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $\mathfrak{M}_{y}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{x}(\mathcal{F})$ . Тогда если  $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ , где  $p \in X$ ,  $q \in Y$ , то  $\mathfrak{M}_{yg(t,q)}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{x(t,p)}(\mathcal{F})$ ,  $\forall t \in T$ .

Доказательство. Для любого  $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F})$  и любого  $\mathcal{F}^{**} \in \mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F}) \cap \bigcap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$  рассмотрим фильтр  $\mathcal{F}^{***} = \mathcal{F}^* \cap \mathcal{F}^{**}$ . В силу предложения 2,  $\mathcal{F}^{***} \in \mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{y}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{x}(\mathcal{F})$ . Следовательно, базис  $f(\mathcal{F}^{***}, x)$  фильтра в X сходится к своей точке прикосновения p. А поскольку  $\mathcal{F}^*$  мажорирует  $\mathcal{F}^{***}$ , то и базис  $f(\mathcal{F}^*, x)$  фильтра в X сходится к p, т.е.  $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$  и, таким образом,  $\mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$ . Далее, для любого  $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F})$ , в силу непрерывности отображений f и g и инвариантности  $\mathcal{F}$ , фильтр  $-t + \mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yg}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$ , а фильтр  $\mathcal{F}^* = t + (-t + \mathcal{F}^*) \in \mathfrak{M}_{xf(t,p)}(\mathcal{F})$  для любого  $t \in T$ . Последнее и доказывает предложение 4.

Предложение 5. Пусть  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $\mathfrak{M}_{y}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{x}(\mathcal{F})$ . Тогда существует непрерывное отображение  $h : \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y) \to \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ , для которого h(g(t,q)) = f(t,h(q))при  $\forall t \in T$  и  $\forall q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ .

Доказательство. Для любого  $q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$  семейство  $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$  по теореме 1. Поэтому существует  $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_y(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_x(\mathcal{F})$ , а следовательно, существует  $h(q) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$  точка такая, что  $\mathcal{F}^* \in \mathfrak{M}_{xh(q)}(\mathcal{F})$ . Согласно предложению 4, h – отображение из  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$  в  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$ , обладающее свойством h(g(t,q)) = f(t,h(q)). Докажем непрерывность отображения h. Для этого для произвольной точки  $q \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$  рассмотрим произвольную направленность  $\{q_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(y)$ , сходящуюся к точке q, и покажем, что ее образ  $\{p_{\alpha} = h(q_{\alpha})\}_{\alpha \in A}$  сходится в  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(x)$  к точке p = h(q). Действительно, для любого  $\alpha \in A$   $\mathfrak{M}_{xp_{\alpha}}(\mathcal{F}) \supset \mathfrak{M}_{yq_{\alpha}}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ . Обозначим через  $\{t_{\beta}\}_{\beta \in B_{\alpha}}$  направленность, ассоциированную с некоторым фильтром из  $\mathfrak{M}_{yq_{\alpha}}(\mathcal{F})$ . Тогда  $\lim_{\beta \in \mathbf{B}_{\alpha}} g(t_{\beta}, y) = q_{\alpha}, \quad a \quad \lim_{\beta \in \mathbf{B}_{\alpha}} f(t_{\beta}, x) = p_{\alpha}.$  Рассмотрим направленность  $\beta \in B_{\alpha}$  $\{t_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ , где  $\Gamma = A \times \overline{B} = A \times \prod B_{\alpha}$  — направленное произведение направленных множеств,  $\gamma = (\alpha, \overline{\beta})$  (здесь  $\alpha \in A$ ,  $\overline{\beta} \in \overline{B} = \prod B_{\alpha}$  и  $t_{\gamma} = t_{\beta_{\alpha}}$ , где α∈A β<sub>α</sub> = pr<sub>B<sub>α</sub></sub> γ). По теореме о повторном пределе ([4], c.100)  $\lim_{\gamma \in \Gamma} g(t_{\gamma}, y) = q$ . Непосредственно проверяется, что, начиная с некоторого места, направленность  $\{t_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  лежит в любом множестве из  $\mathcal{F}$ . Поэтому, в силу предложения 3, фильтр, ассоциированный с направленностью  $\{t_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ , принадлежит семейству  $\mathfrak{M}_{yq}(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{M}_{xp}(\mathcal{F})$ . Следовательно,  $\lim_{\gamma \in \Gamma} f(t_{\gamma}, x) = p$ . Итак, имеем произведение  $\Gamma = A \times \overline{B}$  направленных множеств A и  $\overline{B}$  и направленность  $\{f(t_{\gamma}, x)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ . При этом  $\lim_{\gamma \in \Gamma} f(t_{\gamma}, x) = p$ , и при любом  $\alpha \in A$ существует частичный предел  $\lim_{\overline{\beta}\in\overline{B}} f(t_{(\alpha,\overline{\beta})},x) = \lim_{\beta\in B_{\alpha}} f(t_{\beta},x) = p_{\alpha}$ . По теореме о двойном пределе ([1], с.115) существует  $\lim_{\alpha \in A} p_{\alpha} = p$ . Предложение

доказано.

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968. 2. Ludescher H. // Analele Universitatii din Timisoara. Ser. stiinte mat. 1978. Vol.16. Fasc.2.

3. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М., 1979. 4. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1981.

Поступила в редакцию 06.04.98.

УЛК 517.968

#### В.В.КАШЕВСКИЙ

#### СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР С ЛОГАРИФМОМ В ЯДРЕ И ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

It is proved that the generalized singular operator is bounded from  $H_0^{\mu}$  and  $H^{\mu,1}$ .

Введем следующий оператор

$$\left(S_{\ln}f\right)(x) = \int_{0}^{1} \frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x} dt, x \in [0,1].$$
(1)

Будем считать  $f(x) \in H^{m,k}$ , если найдется постоянная *с* такая, что

$$\left|f(x+h) - f(x)\right| \le ch^{l} \left( \ln \frac{1}{h} \right)^{k}, \qquad (2)$$

для всех x, x+ $h \in [0,1]$ , 0<  $h < \frac{1}{3}$ , k=0,1. Когда f(0)=f(1)=0, то пишем  $f(x) \in H_0^{\mu,k}$ . Кроме того, пусть  $H^{\mu,0} = H^{\mu}$ ,  $H_0^{\mu,0} = H_0^{\mu}$ .

В работе (1) было получено интегральное представление  

$$(S_{\ln}f)(x) = -\frac{\pi^2}{2}f(x) + \ln(1-x)\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-x} - \int_0^1 \frac{Rf(t)dt}{t-x} + \int_0^1 \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\frac{f(t)dt}{t-x}, \quad (3)$$
где  $(Rf)(x) = \int_0^x \frac{f(x) - f(t)}{x-t} dt.$ 

Лемма. Если  $\varphi(t) \in H_0^{\mu}$ , то  $\ln \frac{\iota}{1-t} \varphi(t) \in H_0^{\mu,1}$ .

Доказательство. Покажем, что справедлива оценка (2)

 $\left|\varphi(t+h)\ln(t+h) - \varphi(t)\ln t\right| \le \left|\varphi(t+h) - \varphi(t)\right| \ln(t+h) + \frac{1}{2}$ 

$$+ |\varphi(t)| \ln(t+h) - \ln t | = A_1 + A_2$$

Вначале оценим

$$A_1 \le ch^{\mu} \ln \frac{1}{t+h} \le ch^{\mu} \ln \frac{1}{h}.$$

Теперь оценим  $A_2$  при h > t

$$A_2 \leq ct^{\mu} \ln \left( 1 + \frac{h}{t} \right) \leq ct^{\mu} \ln \frac{1}{t} \leq ch^{\mu} \ln \frac{1}{h}.$$

Пусть h < t. Тогда

$$A_2 \leq ct^{\mu} \ln \left( 1 + \frac{h}{t} \right) \leq ct^{\mu} \frac{h}{t} \leq ch^{\mu} \left( \frac{h}{t} \right)^{1-\mu} \leq ch^{\mu} \ln \frac{1}{h}.$$

Собирая оценки, получим

$$A_1 + A_2 \le 2ch^{\mu} \ln \frac{1}{h}.$$

Лемма доказана.

**Теорема.** Оператор (1) является ограниченным из пространства  $H_0^{\mu}$  в пространство  $H^{\mu,1}$ ,  $0 < \mu < 1$ .

Доказательство. Вначале преобразуем одно из слагаемых формулы (3):

$$\int_{0}^{1} \frac{(Rf)(t)dt}{t-x} = (Rf)(1)\int_{0}^{1} \frac{tdt}{t-x} + \int_{0}^{1} \frac{(Rf)(t) - t(Rf)(1)}{t-x} dt = (S_0f)(x) + (S_1f)(x) + (S_1f)(x)$$

Получим формулу

$$\int_{0}^{1} \frac{(Rf)(t)dt}{t-x} = \ln(1-x) \int_{0}^{1} \frac{f(t)dt}{t-1} + (S_{1}f)(x) + (S_{2}f)(x), \tag{4}$$

где  $(S_1 f)(x) = \int_0^1 \frac{(Rf)(1) - t(Rf)(1)}{t - x} dt$ , а  $(S_2 f)(x) \in H^{\mu,1}$  по лемме. Из (3) и (4) вытекает, что

$$(S_{\ln}f)(x) = -\frac{\pi^2}{2}f(x) - (S_1f)(x) - (S_2f)(x) + \int_0^1 \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\frac{f(t)dt}{t-x} + \ln(1-x\left(\int_0^1\frac{f(t)dt}{t-x}-\int_0^1\frac{f(t)dt}{t-1}\right)$$

Заметим, что оператор  $(Sf)(x) = \int_{0}^{1} \frac{f(t)dt}{t-x}$  ограничен из  $H_{0}^{\mu}$  в H<sup> $\mu$ </sup>, а также из  $H_0^{\mu,1}$  в  $H^{\mu,1}$  [2], [3]. Учитывая лемму, получим, что  $(S_3 f)(x) \in H^{\mu,1}$ ,  $(S_4 f)(x) \in H^{\mu,1}$ . Из [1] и [3] вытекает, что  $(S_1 f)(x) \in H^{\mu,1}$ . Теорема доказана. Замечание. Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \sqrt{x - \frac{1}{2}}, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ 2 - 2x, x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда поведение функции (S<sub>ln</sub>f<sub>0</sub>)(x) показывает, что результат теоремы нельзя усилить в гельдеровских классах. В частности, оператор Sin не будет ограничен в пространстве  $H^{\mu}$ .

Кашевский В.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №1. С.66.
 Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
 Гусейнов А.Й., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М., 1980.

Поступила в редакцию 14.05.98.

#### А.П.ШИЛИН

## СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТРАЖЕНИЕМ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Two new singular integral equations are solved in quadratures.

Рассмотрим уравнение с интегралами в смысле главного значения на действительной оси  $-\infty < t < \infty$ :

$$(a(t)+b(t)) \varphi(t) + (b(-t)-a(t)) \varphi(-t) + \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(t)-b(\tau)) \tau \varphi(\tau) d\tau}{\tau^2 - t^2} = f(t), \quad (1)$$

$$(a(t)+c(t)) \varphi(t) + (b(t)+c(t)) \varphi(-t) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b(\tau)-c(\tau)) \varphi(\tau) + (a(\tau)-c(\tau)) \varphi(-\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t).$$

$$(2)$$

Здесь a(t), b(t), c(t), f(t) – заданные,  $\phi(t)$  – искомая *H*-непрерывные на действительной оси (включая бесконечно удаленную точку) комплекснозначные функции, причем  $\phi(\pm \infty)=0$ ,  $f(\pm \infty)=0$ . Близкие уравнения решены Ю.И.Черским [1–3].

Запишем следующее краевое условие задачи, в котором пусть все функции *Н*-непрерывны, а искомые функции исчезают на бесконечности:

$$\Phi_{+}(t) = G(t)\Phi_{*}(t) + g(t), -\infty < t < \infty.$$
(3)

Эта задача имеет лишь то отличие от классической краевой задачи Римана на действительной оси [4], что вместо функции, аналитической в нижней полуплоскости, ищется четная функция на действительной оси  $\Phi_*(t)$ . ("Звездочка" и в последующих формулах означает четность функций.)

Задача (3) допускает решение по схеме, аналогичной схеме Ф.Д.Гахова решения задачи Римана. Как в основе решения задачи Римана лежит решение задачи о скачке  $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$  с помощью операторов  $P^+$ :

$$\Phi^{\pm}(t) = (P^{\pm}g)(t) \equiv \pm \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

так в основе решения задачи (3) лежит решение задачи о скачке  $\Phi_+(t) - \Phi_+(t) = g(t)$  с помощью операторов  $P_+, P_+$ :

$$\Phi_{+}(t) = (P_{+}g)(t) \equiv \frac{g(t) - g(-t)}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)\tau d\tau}{\tau^{2} - t^{2}},$$
  
$$\Phi_{*}(t) = (P_{*}g)(t) \equiv -\frac{g(t) + g(-t)}{2} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)\tau d\tau}{\tau^{2} - t^{2}}.$$

Отметим, что возможен иной путь решения задачи (3): заменить в краевом условии t на -t и исключить из возникших двух условий  $\Phi_{\bullet}(t)$ . В результате возникнет краевое условие задачи Карлемана для полуплоскости со сдвигом-отражением; такая задача изучена в [5].

Введем функции на действительной оси:  $\Phi_+(t) = (P_+\phi)(t)$ ,  $\Phi_*(t) = (P_*\phi)(t)$ ,  $\Psi_+(t) = (P_+\psi)(t)$ ,  $\Psi_*(t) = (P_*\psi)(t)$ , где  $\psi(t) = b(t)\phi(t)$ .

Теперь уравнение (1) можно записать в виде краевой задачи

$$2a(t)\Phi_{+}(t) = 2\Psi_{*}(t) + f(t), -\infty < t < \infty.$$
(4)

Исключая из соотношений

$$\varphi(t) = \Phi_{+}(t) - \Phi_{*}(t), \ b(t)\varphi(t) = \Psi_{+}(t) - \Psi_{*}(t)$$
(5)

функцию  $\phi(t)$ , придем еще к краевой задаче

$$\Psi_{+}(t) = -b(t)\Phi_{*}(t) + \left( \left( a(t) + b(t) \right) \Phi_{+}(t) - \frac{f(t)}{2} \right), \quad -\infty < t < \infty.$$
(6)

После решения задач (4), (6) решение уравнения (1) получается по первой из формул (5). Задачи (4), (6) являются задачами вида (3), и мы решаем их, используя упомянутую аналогию с задачей Римана. Сформулируем получающийся результат после введения некоторых обозначений.

Пусть  $\alpha = -\text{Ind } a(t)$ ,  $\beta = \text{Ind } b(t)$  (считаем, что на действительной оси, включая бесконечно удаленную точку,  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ). Обозначим r — ранг линейной алгебраической системы (9), записанной впоследствии и возникающей при  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ . Пусть r = 0, если неравенства  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  одновременно не выполняются. Под квадратными корнями и логарифмами понимаются в дальнейшем произвольным образом изначально выбранные и зафиксированные однозначные непрерывные ветви.

**Теорема.** Решение уравнения (1) содержит  $\max(0,\alpha) + \max(0,\beta) - r$  произвольных комплексных постоянных и находится по формуле

$$\varphi(t) = X_{+}(t)(E_{+}(t) + P(t)) - Y_{*}(t)(F_{*}(t) + Q(t)),$$

$$\begin{aligned} X_{+}(t) &= \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{2\alpha} \frac{a(-t)}{a(t)} \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\left(\frac{\tau+i}{\tau-i}\right)^{\alpha} \frac{1}{a(\tau)}\right) \frac{\tau d\tau}{\tau^{2}-t^{2}}\right)}, \\ E_{+}(t) &= \frac{1}{4} \left(\frac{f(t)}{a(t)X_{+}(t)} - \frac{f(-t)}{a(-t)X_{+}(-t)}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)\tau d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)(\tau^{2}-t^{2})}, \\ P(t) &= 0 \text{ npu } \alpha \leq 0, P(t) = \frac{a_{1}+a_{2}t^{2}+..+a_{\alpha}t^{2\alpha-2}}{(t^{2}+1)^{\alpha}} \end{aligned}$$

при 
$$\alpha > 0, a_1, a_2, ..., a_\alpha - комплексные постоянные,
$$exp \left( \frac{1}{1} \int_{0}^{\infty} lr \left( \frac{\tau + i}{\tau} \right)^{\beta} (-b(\tau)) \frac{\tau d\tau}{\tau} \right)$$$$

где

$$Y_*(t) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{\tau-i}\int_{-\infty}^{\infty}(-b(\tau))\right)\frac{1}{\tau^2-t^2}\right)}{\sqrt{b(t)b(-t)}},$$

$$F_{*}(t) = \frac{1}{4} \left( \frac{f(t)}{Y_{+}(t)} + \frac{f(-t)}{Y_{+}(-t)} \right) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(\tau) + b(\tau))X_{+}(\tau)(E_{+}(\tau) + P(\tau))\tau d\tau}{Y_{+}(\tau)(\tau^{2} - t^{2})} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{(a(t) + b(t))(E_{+}(t) + P(t))X_{+}(t)}{Y_{+}(t)} + \frac{(a(-t) + b(-t))(E_{+}(-t) + P(-t))X_{+}(-t)}{Y_{+}(-t)} \right), \\ Y_{+}(t) = \left( \frac{t - i}{t + i} \right)^{\beta} \sqrt{\left( \frac{t + i}{t - i} \right)^{2\beta} \frac{b(t)}{b(-t)}} \exp \left( \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( \left( \frac{\tau + i}{\tau - i} \right)^{\beta} (-b(\tau)) \frac{\tau d\tau}{\tau^{2} - t^{2}} \right), \\ Q(t) = 0 \ npu \ \beta \le 0, \ Q(t) = \frac{b_{1} + b_{2}t^{2} + \dots + b_{\beta}t^{2\beta - 2}}{(t^{2} + 1)^{\beta}}$$

при  $\beta > 0, b_1, b_2, ..., b_{\beta}$  – произвольные комплексные постоянные.

При  $\alpha \ge 0$ ,  $\beta \ge 0$  уравнение (1) разрешимо безусловно. При  $\alpha < 0$ ,  $\beta \ge 0$  для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) \tau d\tau}{a(\tau) X_{+}(\tau) (\tau^{2} + 1)^{k}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\alpha.$$
(7)

При α=0, β<0 для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(2(a(\tau)+b(\tau))E_{+}(\tau)X_{+}(\tau)-f(\tau)\right)\tau d\tau}{2Y_{+}(\tau)(\tau^{2}+1)^{k}} = 0, \quad k = 1, 2, ..., -\beta.$$
(8)

При  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$  для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение совокупности условий (7),(8). При α>0, β<0 разрешимость уравнения (1) равносильна совместности системы

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{kn} a_n = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, -\beta,$$
(9)

в которой

$$p_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(\tau) + b(\tau))X_{+}(\tau)\tau^{2n-1}d\tau}{Y_{+}(\tau)(\tau^{2} + 1)^{k+\alpha}},$$
$$q_{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\tau) - 2(a(\tau) + b(\tau))E_{+}(\tau)X_{+}(\tau))\tau d\tau}{2Y_{+}(\tau)(\tau^{2} + 1)^{k}}.$$

В последнем случае постоянные  $a_1, a_2, ..., a_n$  являются общим решением системы (9). В случае α>0, β≥0 эти постоянные являются произвольными.

По-иному сводится к краевым задачам уравнение (2). Непосредственно проверяется, что его можно записать в виде

$$(P^{+}h_{1})(t) - (P^{-}h_{2})(t) = f(t), -\infty < t < \infty,$$

где  $h_1(t) = (a(t)+b(t))\phi_*(t), h_2(t) = (a(t)-b(t))\phi_{**}(t)+2c(t)\phi_*(t), \phi_*(t)=\phi(t)+\phi(-t),$  $\phi_{**}(t) = \phi(t) - \phi(-t).$ 

Отсюла

$$(a(t)+b(t))\phi_{*}(t)=f_{1}(t)+\Phi^{-}(t), -\infty < t < \infty,$$
(10)

$$(a(t)-b(t))\phi_{**}(t)+2c(t)\phi_{*}(t)=f_{2}(t)+\Phi^{+}(t), -\infty < t < \infty,$$
(11)

где  $f_1(t) = (P^+f)(t), f_2(t) = (P^-f)(t), a \Phi^-(t) и \Phi^+(t)$  – предельные значения неизвестных функций, аналитических соответственно в нижней и верхней полуплоскостях.

Соотношения (10),(11) - краевые условия двух последовательных краевых задач такого же типа, что и задача (3). Предполагая, что на действительной оси (включая бесконечно удаленную точку)  $a(t) \pm b(t) \neq 0$ , мы можем решить их и затем найти решение уравнения (2) по формуле  $\varphi(t) = \frac{1}{2} (\varphi_*(t) + \varphi_{**}(t))$ . Окончательный результат будет иметь такой же характер, что и для уравнения (1), поэтому мы его не будем приводить, ограничившись примером уравнения (2):

$$\frac{(3i-2t)\,\varphi(t)+\,i\varphi(-t)}{2i-t}+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\varphi(\tau)+\,(3i-2\tau)\,\varphi(-\tau)}{(2i-\tau)(\tau-t)}\,d\tau=\frac{4t}{t^2+4},\quad -\infty< t<\infty.$$

 $a(t) = \frac{3i-2t}{2i-t}, \quad b(t) = \frac{i}{2i-t}, \quad c(t) = 0.$  Индексы функций Здесь

a(t)+b(t)=2,  $a(t)-b(t)=\frac{2(t-i)}{t-2i}$ , от которых зависит картина разрешимости уравнения, равны нулю, что приводит к безусловной разрешимости и

единственности решения. Вычисления дают следующее решение примера:

$$\varphi(t) = -\frac{2}{3} \frac{2t^3 + 3it^2 + 8t + 3i}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)}.$$

- 1. Черский Ю.И. // Докл. АН СССР. 1979. Т.248. №4. С.802.
- 2. Он же // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. №12. С.15.
- 3. Он же // Сообщения АН ГССР. 1982. Т.106. №3. С.481.
- Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
   Мельник И.М. // Изв. вузов. Математика. 1964. №2. С.100.

Поступила в редакцию 21.05.98.

## М. К. КРАВЦОВ, Е. В. ЛУКШИН

# ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК МНОГОИНДЕКСНОГО АКСИАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО МНОГОГРАННИКА\*

Sufficiently exact upper bound for the number of integer points of the multi-index axial transportation polyhedron determined by integer vectors is obtained. Reachability of this bound is proved in some particular cases.

В [1] предложены критерии принадлежности *p*-индексного ( $p \ge 2$ ) аксиального транспортного многогранника (*p*-ATM)  $M(a^1, a^2, ..., a^n)$ =

$$= \{x = \left\| x_{i_1 i_2 \dots i_p} \right\| : \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} = a_{i_s}^s \qquad \forall i_s \in N_{n_s}, \qquad s \in N_p,$$

 $x_{i_1i_2\dots i_p} \ge 0 \quad \forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in N_{n_1} \times N_{n_2} \times \dots \times N_{n_p} \}$  порядка  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ ,  $n_s \ge 1$  $\forall s \in N_p$ , и веса k к классам многогранников с минимальным и максимальным числом целочисленных точек (ЦТ). Будем считать, что  $N_t = \{1, 2, \dots, t\}$ , а векторы  $a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_{n_s}^s)$ ,  $s \in N_p$ , имеют целые положительные компоненты, причем  $\sum_{i_s=1}^{n_s} a_{i_s}^s = k \quad \forall s \in N_p$ . Очевидно, что  $k \ge \max\{n_s: s \in N_p\}$ .

Заметим, что в [1] была также выведена рекуррентная формула для определения минимального числа ЦТ *p*-АТМ заданного порядка и веса.

Отыскание максимального числа  $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$  ЦТ *p*-АТМ порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса *k* представляет собой трудную задачу. Найти явную формулу даже для максимального числа  $\psi(n_1, n_2, k)$  ЦТ 2-АТМ (классического транспортного многогранника) порядка  $n_1 \times n_2$  и веса *k* до сих пор не удалось. В связи с этим особое значение приобретают как нижние, так и верхние оценки числа  $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$ .

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** Для числа  $z(a^1, a^2, ..., a^p, k)$  ЦТ *p*-АТМ  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса *k* и любого числа  $t \in N_p$  справедлива оценка сверху

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p}, k) \leq \frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{\substack{s=1\\s\neq t}}^{p} \prod_{\substack{i_{s}=1\\s\neq t}}^{n} (a_{i_{s}}^{s})!},$$
(1)

достижимая при  $k = n_{\mu}$ .

Доказательство. Докажем теорему, применив индукцию по числу р.

Сначала покажем, что неравенство (1) верно для любого  $t \in N_p$  при p = 2. Не ограничивая общности, будем считать, что t = 2. Наряду с 2-АТМ  $M(a^1, a^2)$  порядка  $n_1 \times n_2$  и веса k рассмотрим многогранник  $M(a^1, e)$  порядка  $n_1 \times k$ , где e = (1, 1, ..., 1).

Так как  $a_1^1, a_2^1, ..., a_{n_1}^1$  — целые положительные числа и  $\sum_{i_1=1}^{n_1} a_{i_1}^1 = k$ , то число ЦТ многогранника  $M(a^1, e)$  равно числу способов, посредством которых k элементов могут быть распределены на  $n_1$  групп, из которых первая содержит  $a_1^1$  элементов, вторая —  $a_2^1$  элементов и т. д.,  $n_1$ -я группа содержит  $a_{n_1}^1$  элементов. Формула, дающая число таких способов, совпадает с формулой (см., напр., [2, 3])

<sup>\*</sup>Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект NФ 97-266).

$$z(a^{1}, e, k) = \frac{k!}{\prod_{i=1}^{n_{1}} (a_{i_{1}}^{1})!}.$$
(2)

Множество всех целочисленных матриц (точек) многогранника M(a, b) будем обозначать через Z(a, b).

Оценим величину  $z(a^1, a^2, k)$  сверху. Пусть  $y = \|y_{i_1q}\|_{n_1 \times k}$  — некоторая матрица из множества  $Z(a^1, e)$ . По матрице у построим матрицу  $x = \|x_{i_1i_2}\|_{n_1 \times n_2}$  согласно формуле

$$x_{i_1i_2} = \sum_{q \in Q_{i_1}} y_{i_1q} \ \forall (i_1, i_2) \in N_{n_1} \times N_{n_2},$$
(3)

где  $Q_{i_2} = \left\{ q \in N_k : \sum_{l=1}^{i_2-1} a_l^2 + 1 \le q \le \sum_{l=1}^{i_2} a_l^2 \right\}, \sum_{l=1}^{0} (\cdot) = 0.$ 

Очевидно, что матрица x определяется единственным образом по заданной матрице y. Также легко видеть, что  $x \in Z(a^1, a^2)$ .

Пусть  $x = \|x_{i_1 i_2}\|_{n_1 \times n_2}$  — некоторая матрица из множества  $Z(a^1, a^2)$ . По матрице *x* построим матрицу  $y(x) = \|y_{i_1 q}^x\|_{n_1 \times k}$  согласно формуле

$$y_{i_{1}q}^{x} = \begin{cases} 1, \text{если} \quad q \in Q_{i_{2}}^{i_{1}}(x_{i_{1}i_{2}}), i_{1} \in \mathcal{K}_{i_{2}}(x), i_{2} \in N_{n_{2}}, \\ 0 \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

где  $\mathcal{K}_{i_2}(x) = \{ i_1 \in N_{n_1} : x_{i_1 i_2} > 0 \}$ , а множества  $Q_{i_2}^{i_1}(x_{i_1 i_2}), i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x),$  $i_2 \in N_{n_2}$ , удовлетворяют условиям:

$$Q_{i_{2}} = \bigcup_{i_{1} \in \mathcal{K}_{i_{2}}(x)} Q_{i_{2}}^{i_{1}}(x_{i_{1}i_{2}}) \forall i_{2} \in N_{n_{2}}, \ Q_{i_{2}}^{i_{1}'}(x_{i_{1}'i_{2}}) \cap Q_{i_{2}}^{i_{1}''}(x_{i_{1}''i_{2}}) = \emptyset \quad \forall i_{1}',$$

 $i_1'' \in \mathcal{K}_{i_2}(x), \quad i_1' \neq i_1'', \forall i_2 \in N_{n_2}, \left| Q_{i_2}^{i_1'}(x_{i_1i_2}) \right| = x_{i_1i_2} \quad \forall i_1 \in \mathcal{K}_{i_2}(x).$  Нетрудно убедиться, что  $y(x) \in Z(a^1, e).$ 

Заметим, что если  $x' \neq x''$ ,  $x', x'' \in Z(a^1, a^2)$ , то  $y(x') \neq y(x'')$ . Действительно, если предположить, что y(x') = y(x''), то на основании формулы (3) выполнено равенство x' = x'', которое противоречит условию  $x' \neq x''$ .

Таким образом, формула (3) определяет отображение множества  $Z(a^1, e)$  на множество  $Z(a^1, a^2)$ . Следовательно,  $z(a^1, a^2, k) \le z(a^1, e, k)$ . Отсюда и из (2) получаем неравенство

$$z(a^{1}, a^{2}, k) \leq \frac{k!}{\prod_{i_{1}=1}^{n_{1}} (a^{1}_{i_{1}})!},$$
(4)

которое при  $k = n_2$  превращается в равенство.

Пусть теперь  $p \ge 3$ ,  $l \in N_p$ ,  $l \ne t$ . Рассмотрим (p-1)-индексную матрицу  $y = \|y_{i_1...i_{l-1}i_{l+1}...i_p}\|$ , принадлежащую многограннику  $M(a^1, a^2, ..., a^{l-1}, a^{l+1}, ..., a^p)$  порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_{l-1} \times n_{l+1} \times ... \times n_p$ . Запишем эту матрицу в виде  $(n_1 n_2 ... n_{l-1} n_{l+1} ... n_p)$ -мерного вектора  $z(y) = (y_{11...1*11...1}, y_{11...1*11...2}, ..., y_{n_1 n_2... n_{l-1}*n_{l+1}... n_p})$ , где \* обозначает отсутствие *l*-го индекса. Удалив в векторе z(y) нулевые компоненты, получим вектор  $z^+(y)$ , число компонент которого равно числу t(y) положительных элементов матрицы y. Отметим, что компоненты вектора  $z^+(y)$  занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора z(y). Поскольку сумма компонент вектора  $z^+(y)$  равна k, то пара векторов  $a^l$  и  $z^+(y)$  определяет 2-АТМ  $M(a^l, z^+(y))$  порядка  $n_l \times t(y)$ . Пусть  $u(y) = \|u_{i_{j}j}^{y}\|_{n_{i} \times t(y)}$  — некоторая матрица многогранника  $M(a^{l}, z^{+}(y))$ , где индекс *j* представляет собой совокупность индексов  $(i_{1}i_{2}... i_{l-1}*i_{l+1}...i_{p})$ , задаваемую номерами компонент вектора  $z^{+}(y)$ . По этой матрице определим матрицу  $x(u(y)) = \|x_{i_{1}i_{2}...i_{p}}^{u(y)}\|$  согласно правилу:

 $x_{i_l i_2 \dots i_p}^{u(y)} = \begin{cases} u_{i_l j}^y, \text{ если } (i_1 i_2 \dots i_{l-1} * i_{l+1} \dots i_p) = j, \\ 0 \text{ в противном случае }. \end{cases}$ 

Очевидно, что построенная таким образом матрица  $x(u(y)) \in M(a^1, a^2, ..., a^p)$ . Легко также заметить, что любая матрица многогранника  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  может быть построена по этому правилу. Следовательно, многогранник  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  можно представить в виде:

 $M(a^1, a^2, ..., a^p) = \{x(u(y)): y \in M(a^1, a^2, ..., a^{l-1}, a^{l+1}, ..., a^p), u(y) \in M(a^l, z^+(y))\}.$  (5) Отсюда вытекает формула

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p}, k) = \sum_{y \in M(a^{1}, a^{2}, ..., a^{l-1}, a^{l+1}, ..., a^{p})} z(a^{l}, z^{+}(y), k)$$

где суммирование проводится по всем ЦТ многогранника  $M(a^1, a^2, ..., a^{l+1}, a^{l+1}, ..., a^p)$ .

Теперь, воспользовавшись оценкой

$$z(a', z^{+}(y), k) \leq \frac{k!}{\prod_{i_{l}=1}^{n_{l}} (a_{i_{l}}^{l})!},$$
(6)

полученной на основании неравенства (4), находим

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p}, k) \leq \frac{k!}{\prod_{i=1}^{n_{i}} (a^{l}_{i_{i}})!} z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{l-1}, a^{l+1}, ..., a^{p}, k).$$

Достижимость этой оценки при  $k = n_i$  следует из достижимости оценки (6). Отсюда получаем утверждение теоремы 1, поскольку, по предположению индукции, для любого числа  $t \in N_p \setminus \{l\}$  справедливо неравенство

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{l-1}, a^{l+1}, ..., a^{p}, k) \leq \frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{\substack{s=1\\s\neq l}}^{p} \prod_{i_{s}=1}^{n_{s}} (a_{i_{s}}^{s})!},$$

которое превращается в равенство при  $k = n_{t}$  Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. Справедливо неравенство

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p}, k) \leq \frac{(k!)^{p-1}}{\max\{\prod_{\substack{s=1 \ i_{s}=1 \ s \neq t \ \cdots}}^{p} \prod_{\substack{s=1 \ s \neq t \ \cdots}}^{n_{s}} (a^{s}_{i_{s}})! : t \in N_{p}\}}$$

Следствие 2. Пусть  $k = \max\{n_s: s \in N_p\}$ . Тогда

$$z(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p}, k) = f_{0}^{z} (M(a^{1}, a^{2}, ..., a^{p})) = \frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p} \prod_{i=1}^{n_{s}} (a_{i_{s}}^{s})!},$$

где  $f_0^z(M)$  — число целочисленных вершин (ЦВ) многогранника M.

Отсюда вытекает следующий известный результат [4, с. 309]: число планов *p*-индексной аксиальной проблемы выбора порядка  $k \times k \times ... \times k$  равно числу  $(k!)^{p-1}$ .

Так как *p*-ATM  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса k имеет максимальное число  $\psi(n_1, n_2, ..., n_p, k)$  ЦТ тогда и только тогда, когда для  $s \in N_n$ вектор перестановка любого есть чисел

 $\left\lfloor \frac{k}{n_s} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{n_s} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{k}{n_s} \right\rfloor, \text{ где } \cdot r(u, v) - \text{ остаток от деления}$  $n_s - r(k, n_s)$ 

числа u на число v, [h] — максимальное целое число, не превосходящее числа h (см. [1]), то на основании следствия 2 получаем следующий результат.

Следствие 3. Пусть  $k = \max\{n_s: s \in N_p\}$ . Тогда максимальное число ЦТ в классе *p*-ATM порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса *k* совпадает с максимальным числом ЦВ в том же классе и равно числу

$$\frac{(k!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p} \left( \left( \left[ \frac{k}{n_s} \right] + 1 \right)! \right)^{r(k,n_s)} \left( \left[ \frac{k}{n_s} \right]! \right)^{n_s \cdot r(k,n_s)}}$$

Как известно [1], *p*-ATM  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса k имеет минимальное число ЦТ тогда и только тогда, когда для любого  $s \in N_p$ вектор  $a^s$  является перестановкой чисел  $k - n_s + 1, 1, 1, ..., 1$ . Отсюда и из  $n_s - 1$ следствия 2 вытекает утверждение (см. [5]): минимальное число ЦТ в классе *p*-ATM порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса k,  $k = \max\{n_s: s \in N_p\}$ , совпадает с минимальным числом ЦВ в том же классе и равно числу  $\frac{(k!)^{p-1}}{\prod (k-n_s+1)!}$ .

Зная, как устроены *p*-ATM порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  и веса k с максимальным числом ЦТ, и используя следствие 1, легко установить, что справедли-BO

Следствие 4. Справедливо неравенство

$$\psi(n_{1}, n_{2}, ..., n_{p}, k) \leq \frac{(k!)^{p-1}}{\max\{\prod_{\substack{s=1\\s\neq t}}^{p} \left( \left( \left[ \frac{k}{n_{s}} \right] + 1 \right)! \right)^{r(k, n_{s})} \left( \left[ \frac{k}{n_{s}} \right]! \right)^{n_{s} - r(k, n_{s})} : t \in N_{p} \}$$

Множество всех ЦТ (ЦВ) *p*-ATM  $M(a^1, a^2, ..., a^p)$  порядка  $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$  будем обозначать через  $Z(a^1, a^2, ..., a^p)$  ( $Z_0(a^1, a^2, ..., a^p)$ ). Связь между этими множествами устанавливает

**Теорема 2**. Для того чтобы выполнялось равенство  $Z(a^1, a^2, ..., a^p) = Z_0(a^1, a^2, ..., a^p)$  $a^2$ , ...,  $a^p$ ), достаточно, а в случае, когда p=2, и необходимо, чтобы существовало подмножество  $N_0 \subseteq N_p$ ,  $|N_0| \ge p-1$ , такое, что для любого индекса  $s \in N_0$  среди компонент вектора  $a^s$  имеется по крайней мере  $n_s - 1$  компонент, равных 1.

В достаточности этих условий можно убедиться непосредственно, используя формулу (5), а необходимость легко доказать от противного.

Отметим, что равенство  $Z(a^1, a^2) = Z_0(a^1, a^2)$  впервые было получено в [1].

1. Кравцов М.К., Галактионова Е.С. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. №4. C.39.

2. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.

<sup>3.</sup> Кравцов М.К. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. №6. С.122.

4. Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. 5. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Дискретная математика. 1991. Т.3. Вып.2.

Поступила в редакцию 14.04.98.

#### УДК 519.24

C.3.

#### Н.Н.ДЕМЕШ, М.А.АКИНФИНА

# О КОВАРИАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ УЭЛЧА ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

In the present paper the modified periodogram of Welch as the estimate of spectral density of symmetric stationary  $\alpha$ -stable process is being studied, the former being combined by crossing intervals of observation. The formula for the covariation of the estimate involved have been obtained.

Рассмотрим устойчивый симметричный стационарный случайный процесс [1]  $X(t), t \in \mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, ...\},$  с показателем  $\alpha, 0 < \alpha < 2$ , допускающий спектральное представление вида

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dz(\lambda), \qquad (1)$$

где  $z(\lambda)$  — процесс с независимыми приращениями и такой, что {M  $|dz(\lambda)^p|^{\alpha/p}$ =const  $(p,\alpha) f(\lambda) d \lambda, 0 \le p \le \alpha \le 2, \lambda \le [-\pi,\pi],$ 

где const  $(p, \alpha)$  — некоторая положительная константа, зависящая только от p и  $\alpha$ , а  $f(\lambda)$  по аналогии с работой [1] будем называть спектральной плотностью.

В качестве оценки спектральной плотности  $f(\lambda)$  исследуем статистику

$$\overline{f_T}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} I_M^l(\lambda) , \qquad (2)$$

построенную по T = (L - 1)S + M последовательным наблюдениям

x(1), x(2),..., x(T) (3) за процессом (1), которые разбиты на *L* равных отрезков длины *M*, со сдвигом  $S(0 \le S \le M)$  отсчетов между соседними отрезками, где  $I_M^l(\lambda)$  – модифицированная периодограмма, определяемая формулой

$$I_{M}^{l}(\lambda) = C_{p,\alpha} \left| d_{M}^{l}(\lambda) \right|^{p}, \ 0$$

где

$$C_{p,\alpha} = \frac{D_p}{F_{p,\alpha}(c_{\alpha})^{p'_{\alpha}}}, D_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{|u|^{1+p}} du, F_{p,\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-|u|^{\alpha}}}{|u|^{1+p}} du$$
$$d_M^{\prime}(\lambda) = A_M \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{M} x(t + (i-1)S)e^{-i\lambda t}h_M(t), A_M = \frac{1}{\left[B_{\alpha,M}\right]^{1/\alpha}},$$
$$B_{\alpha,M} = \int_{-\pi}^{\pi} \left|H^{(M)}(v)\right|^{\alpha} dv, H^{(M)}(v) = \sum_{i=1}^{M} h_M(t)e^{-i\omega t}.$$

а  $h_M(t)$ — окно просмотра данных. Статистику (2) будем называть модифицированной периодограммой Уэлча [6]. Цель перекрытия отрезков — увеличить число усредняемых отрезков при заданной длине временного ряда и тем самым уменьшить дисперсию оценки спектральной плотности. Этот подход эффективен для временных рядов средней длины, когда сглаживание спектральными окнами еще не дает желаемых результатов [2]. Оценки такого вида были предложены в работах [3],[4] для стационарных случайных процессов второго порядка. В работе [5] показано, что оценка (2) является асимптотически несмещенной. В работе [6] вычислена дисперсия исследуемой оценки.

Исследуем ковариацию статистики (2).

Теорема. Справедливо равенство

$$\operatorname{cov}\left\{\overline{f}_{T}(\lambda_{1}), \overline{f}_{T}(\lambda_{2})\right\} = \frac{1}{L^{2}} \left\{ LK_{1}(\lambda_{1}, \lambda_{2}) + \sum_{\substack{l_{1}, l_{2} = 1\\ l_{1} \neq l_{2}}}^{L} K_{2}(\lambda_{1}, \lambda_{2}; l_{1}, l_{2}) \right\},$$

$$0 
(5)$$

где

$$\begin{split} K_{1}(\lambda_{1},\lambda_{2}) &= \mathcal{Q} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left\{ c_{M}^{(1)}(u_{1},u_{2})\right\} - \exp\left\{ c_{M}^{(2)}(u_{1},u_{2})\right\} \right] \frac{du_{1}du_{2}}{|u_{1}u_{2}|^{1+p}}, \mathcal{Q} = \frac{1}{\left[ \frac{p}{F_{p,\alpha}c_{\alpha}^{\prime}\alpha^{\prime}} \right]^{2}}, \\ c_{M}^{(1)}(u_{1},u_{2}) &= -c_{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u_{1}H_{M}(\lambda_{1}-\upsilon) + u_{2}H_{M}(\lambda_{2}-\upsilon) \right|^{\alpha} f(\upsilon)d\upsilon, H_{M}(\upsilon) = A_{M}H^{(M)}(\upsilon), \\ c_{M}^{(2)}(u_{1},u_{2}) &= -c_{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |u_{1}|^{\alpha}|H_{M}(\lambda_{1}-\upsilon)|^{\alpha} + |u_{2}|^{\alpha}|H_{M}(\lambda_{2}-\upsilon)|^{\alpha} \right\} f(\upsilon)d\upsilon, \\ K_{2}(\lambda_{1},\lambda_{2};l_{1},l_{2}) &= \mathcal{Q} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left\{ c_{M}^{(3)}(u_{1},u_{2}) \right\} - \exp\left\{ c_{M}^{(2)}(u_{1},u_{2}) \right\} \right] \frac{du_{1}du_{2}}{|u_{1}u_{2}|^{1+p}}, \\ c_{M}^{(3)}(u_{1},u_{2}) &= -c_{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |u_{1}H_{M}(\lambda_{1}-\upsilon)e^{il_{1}S\upsilon} + u_{2}H_{M}(\lambda_{2}-\upsilon)e^{il_{2}S\upsilon} \right|^{\alpha} f(\upsilon)d\upsilon. \end{split}$$

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{cov}\left\{\overline{f}_{T}(\lambda_{1}), \overline{f}_{T}(\lambda_{2})\right\} = \operatorname{cov}\left\{\frac{1}{L}\sum_{l_{1}=1}^{L}I_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1}), \frac{1}{L}\sum_{l_{2}=1}^{L}I_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right\} =$$

$$= \frac{1}{L^{2}}\sum_{\substack{l_{1}=l_{2}=l=1\\l_{1}\neq l_{2}}}^{L}\operatorname{cov}\left\{I_{M}^{l}(\lambda_{1}), I_{M}^{l}(\lambda_{2})\right\} + \frac{1}{L^{2}}\sum_{\substack{l_{1},l_{2}=1\\l_{1}\neq l_{2}}}^{L}\operatorname{cov}\left\{I_{M}^{l}(\lambda_{1}), I_{M}^{l}(\lambda_{2})\right\} \cdot$$
(6)

Из [1] известно, что

$$\operatorname{cov}\left\{I_{M}^{l}(\lambda_{1}), I_{M}^{l}(\lambda_{2})\right\} = K_{1}(\lambda_{1}, \lambda_{2})$$
(7)

Рассмотрим второе слагаемое в (6). Из работы [1] известно, что

$$\operatorname{cov}\left\{I_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1}),I_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right\} = Q\int_{-\infty-\infty}^{\infty}\int_{-\infty-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}M\operatorname{Re}\exp\left\{i\left(u_{1}d_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1})+u_{2}d_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right)\right\} + \frac{1}{2}M\operatorname{Re}\exp\left\{i\left(u_{1}d_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1})+u_{2}d_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right)\right\} - \exp\left\{-c_{\alpha}|u_{2}|^{\alpha}\psi_{M}(\lambda_{2})\right\}\operatorname{Mcos}\left(u_{1}d_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1})\right) - \exp\left\{-c_{\alpha}|u_{1}|^{\alpha}\psi_{M}(\lambda_{1})\right\}\operatorname{Mcos}\left(u_{2}d_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right) + \exp\left\{-c_{\alpha}\left\{\psi_{M}(\lambda_{1})|u_{1}|^{\alpha}+\psi_{M}(\lambda_{2})|u_{2}|^{\alpha}\right\}\right\}\right]\frac{du_{1}du_{2}}{|u_{1}u_{2}|^{l+p}},$$
(8)

$$M\cos(u_{j}d_{M}^{i_{j}}(\lambda_{j})) = \exp\left\{-c_{\alpha}\left|u_{j}\right|^{\alpha}\psi_{M}(\lambda_{j})\right\},$$

$$M(\lambda_{j}) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|H_{M}(\lambda_{j}-\upsilon)\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon, \quad j = \overline{1,2}.$$
(9)

1 1. 11

Преобразовав правую часть в (8) с учетом соотношения [1]

W

$$\operatorname{Mexp}\left\{i\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}\overline{z}_{n}x(t_{n})\right\} = \exp\left\{-c_{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\overline{z}_{n}e^{it_{n}\upsilon}\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon\right\},\qquad(10)$$

получим

$$M\operatorname{Re}\exp\{i(u_{1}d_{M}^{i}(\lambda_{1})+u_{2}d_{M}^{i2}(\lambda_{2}))\} =$$

$$= M\operatorname{Re}\exp\{iA_{M}\operatorname{Re}\left\{u_{1}\sum_{t_{1}=1}^{M}x(t_{1}+(1_{1}-1)S)e^{-i\lambda_{1}t}h_{M}(t_{1})+u_{2}\sum_{t_{2}=1}^{M}x(t_{2}+(t_{2}-1)S)e^{-i\lambda_{2}t_{2}}h_{M}(t_{2}))\} = \exp\{-c_{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|u_{1}H_{M}(\lambda_{1}-\upsilon)e^{it_{1}S\upsilon}+u_{2}H_{M}(\lambda_{2}-\upsilon)e^{it_{2}S\upsilon}|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon,$$

где в случае совпадения наблюдений в рассматриваемых интервалах (т.е.  $t_1 + (l_1 - 1) = t_2 + (l_2 - 1)) \ \overline{z}_n = \exp\{-i\lambda_1 t_1\}h_M(t_1) + \exp\{-i\lambda_2 t_2\}h_M(t_2).$ Аналогично

$$M\operatorname{Reexp}\left\{i\left(u_{1}d_{M}^{l_{1}}(\lambda_{1})-u_{2}d_{M}^{l_{2}}(\lambda_{2})\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-c_{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u_{1}H_{M}(\lambda_{1}-\upsilon)e^{ii_{1}S\upsilon}-u_{2}H_{M}(\lambda_{2}-\upsilon)e^{ii_{1}S\upsilon}\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon\right\}.$$
(12)

Тогда с учетом формул (12),(11),(9),(8) получим требуемое выражение для  $K_2(l_1, l_2; \lambda_1, \lambda_2)$ . Теорема доказана.

1. Masry E., Cambanis S.// Stochastic processes and their applications. 1984. Vol. 18. P.1.

2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его применение. М., 1990.

3. Welch P.D. //IEEE Trans. Audio Electroacou.1967. AU-15. №2. P.70.

5. W СТСП Р. D. // ПЕЕВ глав. Анию Енсигоасой. 1907. АС-15. №2. 1.70. 4. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №3. С.35. 5. Демеш Н. Н., Бондаренко М.А. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. науч. тр. Брест, 1997. С.3.

6. Демеш Н.Н., Бондаренко М.А. //Компьютерный анализ данных и моделирование: Сб.науч.ст. Мн., 1998. С.110.

Поступила в редакцию 19.05.98.

УДК 519.2

#### А.Ю.ХАРИН

# О РОБАСТНОСТИ БАЙЕСОВСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯЛОВ\*

The problem of robustness analysis of Bayesian forecasting of time series is considered. For the trend and autoregressive models new robust prediction statistics are constructed by minimax criterion. Theoretical results are illustrated through the numerical experiment.

Большое количество эффективных методов статистического прогнозирования временных рядов (ВР) для достаточно широкого класса гипотетических моделей приведено в [1, 2]. Однако любая гипотетическая вероятностная модель описывает реальное явление неточно, с некоторыми иска-

(11)

Исследования поддержаны грантом №455/30 для молодых ученых Белгосуниверситета.

жениями. Поэтому в байесовском статистическом прогнозировании [3] и его многочисленных приложениях (техника, экономика, медицина и др.) актуальны задачи исследования робастности [4] прогноза к искажениям модельных предположений [5]. Для авторегрессионной и трендовой моделей ВР указанные задачи решены в настоящей работе с использованием результатов, полученных в [6, 7].

# 1. Математическая модель. Характеристики робастности

Пусть на некотором вероятностном пространстве ( $\Omega$ , *F*, *P*) определены следующие три случайных элемента: вектор параметров  $\theta = (\theta_i) \in \Theta \subseteq \Re^m$  с гипотетической априорной плотностью распределения вероятностей (п.р.в.)  $\pi^0(\theta)$ ; вектор  $x = (x_i) \in \Re^T$  наблюдаемых значений ВР с гипотетической условной п.р.в.  $p^0(x \mid \theta)$ ; подлежащее прогнозированию значение ВР  $y \in \Re$  с гипотетической условной п.р.в.  $g^0(y \mid \theta)$ .

Для определенной гипотетической модели точность произвольного прогноза  $\hat{y} = f(x)$  характеризуется функционалом риска (значением среднего квадрата ошибки) прогнозирования:

$$r_0(f) = E_0\{(\hat{y} - y)^2\} = \iint_{\Re^T \Re} p^0(x) q^0(y|x) (f(x) - y)^2 \, dy \, dx, \qquad (1)$$

$$q^{0}(y|x) = \int_{\Theta}^{\pi} g^{0}(y|\theta) p^{0}(\theta|x) d\theta, \qquad (2)$$

$$p^{0}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = p^{0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\pi^{0}(\boldsymbol{\theta}) / p^{0}(\boldsymbol{x}), \ p^{0}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{\Theta}} p^{0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\pi^{0}(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}.$$

Оптимальным по критерию минимума функционала риска (1) является байесовский прогноз [2]:

$$\hat{y} = f_0(x) = \int_{\Re} y q^0(y|x) dy, \ x \in \Re^T.$$
(3)

Пусть гипотетическая модель искажена: вместо гипотетических плотностей  $\pi^{0}(\cdot), p^{0}(\cdot), g^{0}(\cdot)$  имеют место искаженные плотности  $\pi^{\varepsilon}(\cdot) \in \Pi, p^{\varepsilon}(\cdot) \in P, g^{\varepsilon}(\cdot) \in G$ , где  $\Pi, P, G$  — семейства допустимых искаженных п.р.в. Для искаженной модели функционал риска есть

$$r_{\varepsilon}(f;\pi^{\varepsilon},p^{\varepsilon},g^{\varepsilon}) = E_{\varepsilon}\{(\hat{y}-y)^{2}\} = \iint_{\mathfrak{R}^{T}\mathfrak{R}} p^{\varepsilon}(x)q^{\varepsilon}(y|x)(f(x)-y)^{2}dydx, \quad (4)$$

где подынтегральные плотности определяются аналогично (2) через искаженные плотности  $\pi^{\varepsilon}(\cdot), p^{\varepsilon}(\cdot), g^{\varepsilon}(\cdot).$ 

Определим функционал верхнего риска  $r_{+}(f)$  как некоторую оценку функционала риска сверху:  $r_{\varepsilon}(f;\pi^{\varepsilon},p^{\varepsilon},g^{\varepsilon}) \leq r_{+}(f)$  для любой статистики  $f(\cdot)$  и произвольных плотностей  $\pi^{\varepsilon}(\cdot) \in \Pi$ ,  $p^{\varepsilon}(\cdot) \in P$ ,  $g^{\varepsilon}(\cdot) \in G$ . Гарантированный верхний риск  $r_{+}^{*}(f)$  зададим соотношением:

$$r_{+}^{*}(f) = \sup_{\pi^{\varepsilon}(\cdot) \in \Pi, p^{\varepsilon}(\cdot) \in P, g^{\varepsilon}(\cdot) \in G} r_{\varepsilon}(f; \pi^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}, g^{\varepsilon}) \le r_{+}(f).$$
(5)

Статистика  $\hat{y} = f_*(x)$  называется робастной ( $r_+$ -робастной) прогнозирующей статистикой, если  $r_+^*(f_*) = \inf_{f(\cdot)} r_+^*(f)$  ( $r_+(f_*) = \inf_{f(\cdot)} r_+(f)$ ).

Определим расстояние между плотностями  $h_1(u)$ ,  $h_2(u)$  в пространстве C(U,w) непрерывных на множестве U функций с весом 1/w(u) (w(u) > 0,  $u \in U$ ):

$$\rho_{C(U,w)}(h_1,h_2) = \sup_{u \in U} \frac{|h_1(u) - h_2(u)|}{w(u)}.$$
 (6)

Рассмотрим следующие два варианта искажений гипотетической вероятностной модели.

1) Для некоторых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ge 0$  семейства  $\Pi$ , P, G допустимых искаженных п.р.в. являются  $\varepsilon$ -окрестностями своих гипотетических центров в метрике, задаваемой выражением (6):

$$\Pi = \{ \pi^{\varepsilon} : \rho_{C(\Theta, \pi^{0})}(\pi^{0}, \pi^{\varepsilon}) \leq \varepsilon_{1} \}, \quad P = \{ p^{\varepsilon} : \rho_{C(\Re^{T}, p^{0})}(p^{0}, p^{\varepsilon}) \leq \varepsilon_{2} \},$$

$$G = \{ g^{\varepsilon} : \rho_{C(\Re, g^{0})}(g^{0}, g^{\varepsilon}) \leq \varepsilon_{3} \}.$$
(7)

2) Гипотетическая априорная плотность  $\pi^0(\theta)$  подвержена искажениям Тьюки—Хьюбера [4] с вероятностью появления засорения  $\varepsilon$  и произвольной засоряющей плотностью  $\tilde{\pi}(\theta)$ :

$$\Pi = \left\{ \pi^{\varepsilon} : \pi^{\varepsilon}(\theta) = (1 - \varepsilon)\pi^{0}(\theta) + \varepsilon \widetilde{\pi}(\theta), 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_{+} < \frac{1}{2} \right\}.$$
 (8)

Отметим, что на практике значение  $\varepsilon$ , как правило, неизвестно, однако известно значение  $\varepsilon_+$ , которое может интерпретироваться как наибольшая возможная доля засорения (выбросов) [4].

# 2. Робастное байесовское прогнозирование ВР с трендом

Пусть гипотетическая модель исследуемого ВР является трендовой:

$$x_t = \theta' \psi(t) + u_t, t = 1, 2, \dots, T + \tau,$$
 (9)

где T > m — длительность наблюдения,  $\tau \in N$  — требуемая глубина прогноза;  $\psi(t) = (\psi_i(t)) - m$ -вектор-столбец базисных функций тренда;  $\{u_t\}$  — независимые нормально распределенные случайные величины (CB) с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ ;  $y = x_{T+\tau}$ . Пусть также

$$\pi^{0}(\Theta) = n_{m}(\Theta|a, A) -$$
(10)

*т*-мерная гауссовская плотность с вектором математического ожидания  $a \in \Re^m$  и невырожденной ковариационной матрицей A.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{split} S_{T+\tau} &= \{1, 2, \dots, T, T+\tau\}, \ \Xi(t) = \ \psi(t) \ \psi(t), \ \Gamma = \left(\sum_{l \in S_{T+\tau}} \Xi(t)\right)^{-1}, \\ &\zeta(x) = \sum_{t=1}^{T} x_t \ \psi(t); \ \alpha = \sum_{l \in S_{T+\tau}} \psi(t) \Gamma \Xi(T+\tau) \Gamma \psi(t), \\ &\beta(x) = \frac{1}{cl} \left(\sum_{t=1}^{T} x_t \ \psi(T+\tau) \Gamma \psi(t) + \right. \\ &+ \zeta'(x) \Gamma \psi(T+\tau) - \sum_{l \in S_{T+\tau}} \psi(t) \Gamma \zeta(x) \ \psi(T+\tau) \Gamma \psi(t) \right), \\ &\gamma(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \ \alpha \beta^2(x); \ B = \left(A^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \Xi(t)\right)^{-1}, \ b(x) = BA^{-1}a + \frac{1}{\sigma^2} B\zeta(x); \\ &h(x) = \left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(a'A^{-1}a - b'B^{-1}b + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)\right\}; \\ &\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}h(x)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{t=1}^{T} (x_t - \zeta'(x) \Gamma \psi(t))^2 + (\psi(T+\tau) \Gamma \zeta(x))^2\right)\right\}. \end{split}$$

Определим функцию  $\Psi(x, y) = \sup_{\Theta \in \Theta} (g^0(y|\Theta)p^0(x|\Theta))$  и следующие два функ-

ционала для произвольных  $\epsilon \ge 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $0 \le \epsilon \le \epsilon_+ < \frac{1}{2}$ :

$$r_{1+}(f) = r_0(f) \prod_{i=1}^3 (1 + \varepsilon_i), \qquad (11)$$

$$r_{2+}(f;\varepsilon) = (1-\varepsilon)r_0(f) + \varepsilon \iint_{\mathfrak{R}^T \mathfrak{R}} \Psi(x,y)(f(x)-y)^2 dy dx .$$
(12)

**Лемма.** Функционал (12) не убывает при увеличении параметра  $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2})$ .

Доказательство. Пусть  $0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ . Тогда после тождественных преобразований (12) получим:

$$r_{2+}(f,\varepsilon_{2}) - r_{2+}(f,\varepsilon_{1}) = (\varepsilon_{2} - \varepsilon_{1}) \times$$
  
 
$$\times \int_{\mathfrak{R}^{T}\mathfrak{R}} (f(x) - y)^{2} \int_{\Theta} (\Psi(x,y) - g^{0}(y|\Theta)p^{0}(x|\Theta))\pi^{0}(\Theta)d\Theta dy dx \ge 0.$$

**Теорема 1.** Если ВР описывается трендовой моделью (9), а гипотетическая априорная п.р.в. определена (10), то справедливы следующие два утверждения: 1) для искажений (7)  $r_{1+}$  -робастная прогнозирующая статистика совпадает с байесовской:

$$f_*(x) = f_0(x) = \frac{\psi(T+\tau)(\sigma^2 A^{-1} + \Gamma^{-1})^{-1}(\sigma^2 A^{-1} a + \zeta(x))}{1 - \psi(T+\tau)(\sigma^2 A^{-1} + \Gamma^{-1})^{-1}\psi(T+\tau)};$$
 (13)

**2)** для искажений (8)  $r_{2+}$  -робастной прогнозирующей статистикой является статистика

$$f_{*}(x) = \frac{f_{0}(x) + \frac{\varepsilon_{+}}{1 - \varepsilon_{+}} \beta(x) \delta(x) e^{\gamma(x)}}{1 + \frac{\varepsilon_{+}}{1 - \varepsilon_{+}} \delta(x) e^{\gamma(x)}}.$$
 (14)

Доказательство. Согласно [6], выполнено свойство  $r_{1+}$ -робастности байесовского прогноза:  $f_*(x) = f_0(x)$ . Для получения явного вида  $f_0(x)$  находится явный вид плотности  $q^0(y|x)$ , с использованием которого и (3) приходим к (13). При известном значении  $\varepsilon$ , согласно [7],  $r_{2+}$ -робастная по отношению к искажениям (8) прогнозирующая статистика имеет вид:

$$f_*(x) = \frac{f_0(x) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{1}{p^0(x)} \int_{\Re} y \Psi(x, y) dy}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{1}{p^0(x)} \int_{\Re} \Psi(x, y) dy}.$$
(15)

Вычислив интегралы в (15) и тождественно преобразовав полученное выражение, а затем воспользовавшись леммой, приходим к (14).•

# 3. Робастное байесовское прогнозирование авторегрессионных ВР

Пусть стационарный ВР описывается моделью авторегрессии *m*-го порядка AP(m) с коррелированным обновляющим процессом  $\{u_i\}$ :

$$x_t + \theta' \widetilde{x}_{t-1} = u_t, \ t \in S_{T+1},$$
 (16)

где 
$$\widetilde{x}_j = (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m+1})'$$
,  $j \in S_{T+1}$ ,  $\{u_t\}$  — стационарный гауссов-

ский процесс с  $E\{u_t\} = 0$ ,  $D\{u_t\} = \sigma^2 < \infty$  и  $(T \times T)$ -ковариационной матрицей  $\Sigma = (\sigma_{tt'})$ ,  $\sigma_{tt'} = Cov\{u_t, u_{t'}\}$ ,  $t, t' \in S_T$ ;  $y = x_{T+1}$ ;  $x_{-m+1}, x_{-m+2}, \ldots, x_0$  — начальные значения.

Примем следующие матричные обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_{-1} & \dots & x_{-m+1} \\ x_1 & x_0 & \dots & x_{-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T-1} & x_{T-2} & \dots & x_{T-m} \end{pmatrix}, \quad M = \sigma^2 A^{-1} + X' \sigma^2 \Sigma^{-1} X + \tilde{x}_T \tilde{x}_T';$$
  
$$\alpha = -M^{-1} \tilde{x}_T, \quad \beta = M^{-1} (X' \sigma^2 \Sigma^{-1} x - \sigma^2 A^{-1} a).$$

**Теорема 2.** Если стационарный ВР описывается моделью AP(m) (16), а гипотетическая априорная п.р.в. — гауссовская (10), то  $r_{1+}$ -робастная по отношению к искажениям (7) прогнозирующая статистика совпадает с байесовской и допускает представление:

$$f_*(x) = f_0(x) = \tilde{x}_T \beta / (1 + \tilde{x}_T \alpha).$$
(17)

Доказательство. В [7] получено свойство  $r_{1+}$ -робастности байесовского прогноза по отношению к искажениям (7). Выражение для байесовской прогнозирующей статистики (17) получается аналогично тому, как это сделано в теореме 1.•

Для искажений Тьюки-Хьюбера (8) даже в случае, когда  $\{u_i\}$  – независимые одинаково распределенные СВ ( $\Sigma = I_T$ ), получение аналитического выражения  $r_{2+}$ -робастного прогноза затруднительно вследствие сложности аналитического вычисления  $\arg \max_{\theta \in \Theta} (p^0(x|\theta)g^0(y|\theta))$ . Одно из приближенных выражений для такого прогноза получено в [6].

Алгоритмы прогнозирования (13), (17) реализованы в пакете прикладных программ СТАТПРО, разработанном в 1998 г. в НИЛ статистического анализа и моделирования Белгосуниверситета и предназначенном для статистического прогнозирования ВР. Эти алгоритмы успешно применялись при решении ряда реальных задач, в том числе в задаче прогнозирования с помощью трендовых моделей объемов продаж на одном из промышленных предприятий Республики Беларусь и прогнозирования на основе АР-моделей цепного индекса потребительских цен в республике.



Прогнозирование цепного индекса потребительских цен

На рисунке представлены результаты применения алгоритма (17) при прогнозировании цепного индекса потребительских цен с января по апрель 1998 г. на основе экономико-статистических данных по индексу цен в период с декабря 1994 г. по декабрь 1997 г. (*T*=37, *m*=6); кружками помечены истинные значения индекса, а кривая после момента *t*=37 соответствует точечному прогнозу (17); затемненная область соответствует 95%ному интервальному прогнозу.



2. Справочник по прикладной статистке /Под ред. Э.Ллойда, У.Ледермана. М., 1990.

3. Berger J. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. New York, 1985.

4. Huber P. Robust Statistics. New York, 1981.

5. Geisser S. // Lecture Notes in Statistics. New York, 1992. Vol.75. P.289.

6. Kharin A. // Proc. of the V-th Int. Conf. «Comp. Data Analysis & Modeling». Minsk, 1998. P.112.

7. Galinskij V., Kharin A. // Proc. of the VII-th Int. Vilnius Conf. on Prob. Theory and Math. Statistics. Vilnius, 1998. P.209.

Поступила в редакцию 09.09.98.

УДК 539.3: 622.831

#### М.А.ЖУРАВКОВ

# ЕСТЕСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРОДНОГО МАССИВА

The approach to evaluate a natural stress state (main stresses) of rock massif is described. Necessity to take into consideration of opportunity of existence of two various initial stress state of massif is denoted. The model of possible evolution of geodynamic massif condition is described.

Одним из показателей, отражающих состояние массива горных пород, является уровень его напряженности. Так, например, образование тектонических структур во многом определяется действующими геофизическими полями напряжений. В свою очередь, складчатые и разрывные нарушения являются причиной возникновения тектонической напряженности массива. Переход массива горных пород из одного напряженного состояния в другое сопровождается качественными изменениями: образованием новых структурных элементов с новыми свойствами. Переход массива горных пород в новое качественное состояние происходит под действием сил тектонической и техногенной природы и зависит от уровня начального напряженного состояния. Поле начальных напряжений может быть естественным гравитационным или предельно-напряженным уже вблизи поверхности земли вследствие действия сил тектонической природы.

При оценке регионального напряженно-деформированного состояния (НДС) участка породного массива необходимо учитывать ряд существенных факторов, как например: силовое воздействие со стороны более крупных участков земной коры (т.е. напряженное состояние более высокого ранга); тектоногенетические процессы и механизмы, обусловившие образование тектонических структур различного типа; строение массива; физико-механические свойства слагающих пород и эффективные характеристики массива в целом.

Поля напряжений являются динамическими, так как видоизменяются под воздействием геодинамических и техногенных процессов. Постоянное геодинамическое и техногенное воздействие на массив (например, вследствие отработки месторождения полезных ископаемых) влечет за собой дальнейшее накопление повреждений, которые в свою очередь определяют или даже формируют современные прорастающие магистральные разломы и трещины.

Изучение естественного напряженного состояния массива включает несколько этапов. Так, расчет силового поля существенным образом требует выполнения следующих действий.

А. Изучение блочной структуры массива и ее генезиса [1,2].

Для этого определяется иерархическая соподчиненность структурообразований в рассматриваемом регионе, воссоздаются физико-механические условия формирования тектонических структур, выявляется степень унаследованности современным полем напряжений тех полей, которые обусловлены предшествующим развитием региона. Полученные результаты используются для формирования граничных условий в модельных задачах. **Б.** Реконструкция полей напряжений в массиве, повлекших образование тектонических нарушений, с помощью подходов механики деформируемого твердого тела и механики разрушения.

Для выполнения этих операций необходимо установить деформационные и прочностные свойства горных пород, определить механизм деформирования и модели разрушения массива на блоки.

Оценку начального поля напряжений можно производить, исходя из следующего [3,4]. Между напряжениями и деформациями, вплоть до разрушения пород, существуют определенные закономерности. Кроме того, момент и характер разрушения соответствуют выбранной гипотезе прочности (например, гипотезе Кулона-Мора). Поэтому поле напряжений можно восстановить, решив обратную задачу: по характеру нарушений в массиве горных пород, по виду входящих в него структурных блоков и по соотношениям, определяющим вид разрушения, реконструируется напряженное состояние массива, предшествовавшее разрушению. Если дополнительно рассмотреть формирующиеся разломы, то восстанавливается картина действующего поля напряжений.

Общий вид выражений для главных напряжений (фоновых) при образовании структур в процессе сброса, раздвига, взброса, надвига, сдвига пород может быть представлен в виде следующих зависимостей [4]:  $\sigma_i^{(j)} = \lambda_i^{(j)}(\rho,\mu,\alpha)\gamma H + C_i^{(j)}(\rho,\mu,\alpha)\sigma_0$ , где  $i = \overline{1,3}$  определяет компоненту главных напряжений; i = 4,5 – соответственно касательное и нормальное напряжения в породах, находящихся в непосредственной близости от разрыва, ориентированного, в свою очередь, под углом  $\alpha$  к плоскости действия минимального напряжения  $\sigma_3$ . Индекс  $j = \overline{1,3}$  определяет тип структур, образованных соответственно при сбросах, раздвигах (j=1), взбросах, надвигах (j=2), и сдвигах (j=3). Формулы для коэффициентов  $\lambda_i^{(j)}$  и  $C_i^{(j)}$  представлены в [4,13].  $\lambda_i^{(j)}$  и  $C_i^{(j)}$  — функции от коэффициента (угла) внутреннего трения  $\rho$ , предела прочности пород на одноосное сжатие  $\sigma_0$ , коэффициента поперечной деформации  $\mu$ , ориентации разлома (угол  $\alpha$ ).  $\gamma$  — средняя плотность пород для рассматриваемого участка массива на глубине H.

Ориентация главных напряжений может быть установлена с помощью методов тектонофизики и геофизических методов.

В. На следующем этапе, используя в качестве граничных условий полученные результаты, методами математического моделирования оценивается перераспределение напряжений собственно в блочном массиве и вдоль контактов отдельных блоков для исследуемого региона.

**Г**. И наконец, на данном этапе выполняется прогнозная оценка НДС массива на определенных этапах отработки месторождения (освоения подземного пространства).

Оценку напряженного состояния массива горных пород необходимо выполнять еще до начала ведения подземных работ (подземное строительство, разработка месторождения полезных ископаемых). Это можно выполнить, например, методом геодинамического районирования [1,5].

Оценка напряженного состояния горного массива выполняется в два этапа.

На **первом этапе** устанавливаются напряжения в массиве на основе отнесения того или иного его участка к зонам сжатия или растяжения земной коры.

В зонах растяжения и таких зонах, в которых в силу тектонических особенностей деформирования массива отсутствует воздействие активных горизонтальных сил, усредненные напряжения в массиве можно рассчитывать по А.Н.Диннику: наибольшее главное напряжение равно весу пород и действует вертикально, горизонтальные главные напряжения равны между собой и могут быть выражены через боковой отпор.

В зонах преобладающего горизонтального сжатия земной коры, в части ее, прилегающей к земной поверхности, создаются условия для возникновения предельно напряженного состояния [3].

Замечание. Внешним признаком наличия таких зон могут являться, например, проявления естественной сейсмичности.

В этом случае максимальную составляющую напряжений в массиве о<sub>1</sub> образует активная сила в горизонтальной плоскости. Действие этих напряжений уравновешивается за счет влияния веса горных пород от рассматриваемой точки до земной поверхности. Промежуточное напряжение  $\sigma_2$ , действующее в горизонтальной плоскости, определяется как боковой отпор от  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Величины горизонтальных главных напряжений в зоне предельно напряженного состояния массива не могут быть определены в настоящее время главным образом из-за отсутствия надежных закономерностей изменения показателей прочности горного массива по мере увеличения глубины. Вследствие этого могут быть приняты различные гипотезы относительно характера изменения напряжений по мере роста глубины.

Оценим в первом приближении главные напряжения в массиве.

Логично в первом приближении принять линейный характер нарастания напряжений с глубиной (корректность данного допущения согласуется с гипотезой Л.Гейма-А.Н.Динника).

При оценке главных напряжений необходимо выделить два случая: массив находится в допредельном напряженном состоянии и в предельнонапряженном состоянии.

Первый случай соответствует, например, действию в массиве лишь сил гравитации.



Рис.1. Оценка главных напряжений в массиве в первом приближении в случае действия гравитационных сил

Типовая приближенная картина распределения главных напряжений в этом случае может быть представлена в виде схемы (рис.1).

Замечание. Примем, что о1 и о2 – компоненты горизонтальных главных напряжений, а оз – компонента вертикальных главных напряжений.

напряженное Предельное состояние массива в компонентах главных напряжений в общем виде может быть записано как Ψ

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{1}$$

Физически запись (1) характеризует переход пород из одного физического состояния в другое. Математически это означает условие применимости различных физических уравнений, описывающих эти состояния.

Замечание. На графике это выражается переходом на новую кривую.

Пусть для компонентов главных напряжений справедливы следующие соотношения:

$$\sigma_3 = \int_0^H \gamma(z) dz, \ \sigma_2 = \sigma_x(z), \ \sigma_1 = \sigma_y(z) , \qquad (2)$$

где Н – глубина от поверхности земли до рассматриваемой точки массива. И пусть предельное напряженное состояние пород описывается уравнениями вида:

$$\sigma_{3} - \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \sigma_{1} = \sigma_{press}$$
(3)

или

$$\sigma_{3} - \frac{\sigma_{press}}{\sigma_{ext}} \sigma_{I} = \sigma_{press}.$$
(4)

Здесь  $\sigma_{press}$ ,  $\sigma_{ext}$  – пределы прочности на одноосное сжатие и растяжение соответственно;  $\rho$  – угол внутреннего трения пород.

Замечание. Записи (3) и (4) выписаны в соответствии с нашими обозначениями, т.е.  $|\sigma_3| \ge |\sigma_2| \ge |\sigma_1|$ . Наиболее распространенным в литературе является допущение  $|\sigma_1| \ge |\sigma_2| \ge |\sigma_3|$ .

 $H_{\rm np}$  — глубина, начиная с которой горные породы переходят в предельное напряженное состояние, а  $H_{\rm e}$  — глубина, начиная с которой горные породы теряют прочность и устанавливается гидростатическое напряженное состояние.

Замечание. На глубинах, где горные породы переходят в предельное напряженное состояние, коэффициент внутреннего трения sin  $\rho$  становится равным нулю. Следовательно, условие (4) принимает вид  $\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_{\text{press}}$ .

Рассмотрим второй случай — массив вблизи земной поверхности находится в предельном напряженном состоянии. В этом случае в соответствии с принятыми нами обозначениями  $|\sigma_1| \ge |\sigma_2| \ge |\sigma_3|$ .

Замечание. Этот случай моделирует состояние динамического равновесия, когда любые внешние дополнительные воздействия могут привести к нарушению устойчивости и дискретному характеру деформирования массива.

Для предельно-напряженного массива вблизи земной поверхности максимальное горизонтальное напряжение о1 можно принять равным

$$\sigma_1 = k \sigma_{\text{press}} , \qquad (5)$$

где *k* — коэффициент структурного ослабления. Предельное напряженное состояние в этом случае описывается уравнениями вида:

$$\sigma_1 - \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \sigma_3 = \sigma_{press} \tag{6}$$

или

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{press}}{\sigma_{ext}} \sigma_3 = \sigma_{press} .$$
 (7)

С учетом (2) напряжения в (6) и (7) являются функциями координаты *z* (глубины):

$$\sigma_1(z) = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \sigma_3(z) + \sigma_{press}(z) , \qquad (8)$$

$$\sigma_{1}(z) = \frac{\sigma_{press}}{\sigma_{ext}} \sigma_{3}(z) + \sigma_{press}(z) .$$
(9)

На основании (5), (8) и (9) кривая оценки главных напряжений в массиве, находящемся в предельном напряженном состоянии, представлена на рис.2 (обозначения такие же, что и на рис.1).

Из приведенных зависимостей следует, что важным является установление значения величин  $H_{np}$  и  $H_r$  для конкретных пород и уточнение приведенных зависимостей.

Факт существования режимов деформирования породного массива в допредельном и предельно-напряженном состоянии уже вблизи земной поверхности имеет важное значение для объяснения характера поведения массива в естественных условиях и под влиянием техногенных воздействий (инженерной деятельности людей).

Гипотеза о возможности нахождения толщи массива, прилегающей к земной поверхности, в предельно-напряженном состоянии позволяет объяснить многие процессы в массиве. Такой участок массива горных пород в каждый момент имеет предельное распределение напряжений и предельный запас потенциальной энергии [6]. На любое изменение устойчивости данного участка в целом или его отдельных частей вследствие естественных или техногенных причин массив будет отвечать активными деформационными процессами, стремясь восстановить существовавшее до этого предельно-напряженное состояние.



Рис.2. Оценка главных напряжений предельно-напряженного вблизи земной поверхности массива Замечание. Данный процесс деформирования может быть смоделирован с помощью подходов теории катастроф [7].

Так как такие деформационные процессы в блочном массиве происходят по неровным поверхностям ослабления, существующим в нем или вновь образующимся, то их можно охарактеризовать как "толчкообраз-ный" (дискретный) процесс деформирования, происходящий с притоком энергии извне при каждом толчке, т.е. этот процесс является динамическим.

Замечание. В каждый момент времени и в каждом месте участка массива, находящегося в зоне предельнонапряженного состояния, существует своя скорость пластического деформирования и релаксации, превышение

которой ведет к проявлению хрупкого разрушения в массиве в виде толч-ков [6].

Еще одно важное заключение можно сделать из приведенных выражений для расчета напряжений: так как с увеличением глубины разработки дискретность распределения напряжений в массиве снижается, то роль блочного строения массива и его тектонической нарушенности (сдвигов, сбросов, надвигов и других дислокаций) затухает [6].

Замечание. Примером нарушения естественного предельно-напряженного состояния является проявление толчков при заполнении водохранилища и установление нового предельно-напряженного состояния.

На основании сказанного модель развития геодинамического состояния массива может быть представлена следующим образом [6]:

1. Все динамические процессы и явления в земной коре (землетрясения, толчки, горные удары, внезапные выбросы и др.) можно рассматривать с единой позиции закономерностей поведения массива, находящегося в предельном напряженном состоянии, т.е. такие явления проявляются в областях породного массива, находящегося в предельно-напряженном состоянии.

2. Деформирование массива в предельно-напряженном состоянии происходит дискретно "толчкообразным" образом до установления нового предельно-напряженного состояния. Данное обстоятельство имеет место вследствие дискретности распределения напряжений и потенциальной энергии упругого деформирования массива, вызванных, в свою очередь, различием физико-механических свойств горных пород, их литологического состава, форм и последовательностей залегания, блочностью иерархической ступени.

Вторым этапом оценки напряжений в нетронутом или нарушенном массиве является расчет напряжений в блочном массиве методами интегральных уравнений или конечных элементов, когда в качестве граничных условий используются усредненные главные напряжения [8,9].

В этом случае при проектировании и строительстве конкретных подземных сооружений можно иметь достоверные данные о напряженном состоянии блочного массива и принимать обоснованные решения по технологическим вопросам освоения подземного участка породного массива. Окончательное поле напряжений строится путем наложения естественного и техногенного полей напряжений. В результате можно строить прогнозные карты зон опасного напряженного состояния для решения вопросов безопасности ведения горных работ.

Так как поле техногенных напряжений является динамическим, т.е. изменяется в соответствии с развитием горных пород, то изучение и уточнение состояния блочного массива необходимо выполнять постоянно. Для этого можно закладывать специальные геодинамические полигоны для проведения мониторинговых исследований как на земной поверхности, так и в глубине массива (в шахтах) с использованием геодезических и геомеханических измерений, микросейсмических наблюдений, геофизических методов.

В частности, система геомониторинга должна включать следующие основные методики инструментальных измерений геомеханических характеристик горного массива [10]:

 сейсмический контроль за динамическими явлениями как естественного, так и техногенного происхождения;

 – деформографические и наклономерные наблюдения за медленными деформациями и подвижками в массиве;

контроль изменений гидрорежима в массиве;

электрометрические и сейсмоэлектрические измерения;

- измерения напряжений в массиве в подземных выработках;

- нивелирования 1 класса по поверхностным и подземным полигонам;
- регистрацию проявлений горного давления в подземных выработках;

- диагностический контроль сооружений, конструкций и оборудования.

Следует иметь в виду, что целесообразность использования той или иной методики (в том числе и не вошедших в перечень) на данном конкретном объекте может быть установлена лишь опытным путем. Методики должны быть объединены в единый комплекс, с автоматизацией процессов регистрации и обработки данных в реальном времени. Такой комплекс позволит не только решить задачу получения необходимых знаний о массиве и режиме его деформирования, но на основе создания банка данных и разработанных с помощью расчетов критериев прогнозировать возникновение опасных и катастрофических ситуаций в процессе ведения горных работ и эксплуатации подземных сооружений.

Замечание. По современным представлениям геодинамический полигон (все месторождение или его часть) — это часть земной коры, где осуществляется совместное изучение современных движений земной коры и геофизических полей с целью прогноза проявления структуры для того, чтобы уметь различить природные и техногенные процессы в структурно неоднородной среде на основе расчетных моделей развития деформационных процессов во времени и системы натурных наблюдений.

Таким образом, оценку и прогноз напряженного состояния в породном массиве следует производить на основе представлений о напряженнодеформированном состоянии массива в естественных условиях и при техногенном воздействии на него, с учетом структуры и уровней предельного напряженного состояния последнего в совокупности с мониторинговыми исследованиями напряженного состояния.

1. Батугина И.М., Петухов И.М. Геодинамическое районирование месторождений при проектировании и эксплуатации рудников. М., 1988.

2. Журавков М.А., Земсков А.Н., Смычник А.Д. Влияние природных и техногенных факторов на неодинамическое состояние литосферы в районах геологических нарушений. Мн., 1997.

3. Работа Э.Н., Батугина И.М. // Профилактика горных ударов при проектировании и строительстве шахт: Сб. науч. тр. / ВНИМИ. Л., 1985. С.11.

4. Работа Э. Н. // Геодинамика месторождений: Сб.науч.тр./ КузПИ. Кемерово, 1988. С.42.

5. Методические указания по профилактике горных ударов на основе геодинамики месторождений. М., 1983.

6. Петухов И.М. // Проблемы горной геомеханики при разработке полезных ископаемых. Л., 1989. С.97.

7. Zhuravkov M., Andreyko S., Zemskov A.// Computer applications and operations research in the mineral industries. Pub. By Moskow State Mining University. 1977. P.502.
8. Работа Э.Н., Комаров В.О.//Сб. научн. тр. ВНИМИ. Л., 1983. С.41.
9. Зубков В.В. // Проблемы теории трещин и механика разрушения (Исследования

по упругости и пластичности. Вып.15). Л., 1986. С.39.

10. Сырников Н.М.// Контроль состояния скального массива при долговременной эксплуатации крупногабаритных подземных сооружений. Сб. науч. тр. Апатиты, 1993. С.49. 11. Журавков М.А., Смычник А.Д. Проектирование геомониторинговых сис-

тем для регионов крупномасштабного освоения подземного пространства. Мн., 1997.

Поступила в редакцию 28.05.98.

# Краткие сообщения



УДК 535.372

#### А.П.ЗАЖОГИН

# КИНЕТИКА ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ РАСТВОРОВ УРАНИЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ В ОРГАНИЧЕСКИХ РАСТВОРИТЕЛЯХ

The luminescence kinetics of uranyl nitrate solutions in water and organic solvents has been studied. It has been found that it is nonexponential and may be represented by two exponents. The difference between the decay constants of uranyl complexes is significant in solvents with low donor ability, and not nearly so large on solvents with high donor ability.

Спектры люминесценции органических растворов ураниловых солей при низкой температуре имеют довольно сложный характер и состоят обычно из двух и более серий полос, относительная интенсивность которых зависит от температуры, концентрации и других факторов [1]. Все это указывает на существование в этих растворах одновременно нескольких центров свечения.

Для снятия спектров люминесценции и кинетики затухания свечения готовились растворы уранилнитрата (C=0,2 моль/л) в следующих органических растворителях: ацетонитрил, ацетон, метилэтилкетон (МЭК), вола, лиметилформамид (ДМФА), диметилацетамид (ДМАА), диметилсульфоксид (ДМСО), пирилин. В спектрах люминесценции растворов уранилнитрата в ацетонитриле и в воде видно существование двух систем полос, слвинутых относительно друг друга соответственно примерно на 150 см<sup>-1</sup> и 360 см<sup>-1</sup> [2]. Из этого можно предположить наличие в каждом из растворов при T= 77К нескольких типов центров свечения.

В спектрах растворов уранилнитратата в ацетоне, ДМФА, ДМАА и ДМСО видна только одна система полос [2]. Это может свидетельствовать либо о близости значений частот излучения различных типов центров, либо об наличии в растворе только одного центра свечения.

К выводу о многоцентровости свечения можно прийти, рассматривая кинетические кривые затухания люминесценции. Ввиду сложности состава растворов времена затухания люминесценции в данном случае носят, скорее, оценочный характер.

При рассмотрении логарифмических зависимостей интенсивности люминесценции от времени можно отметить наличие нескольких типов центров свечения практически во всех используемых растворителях. Значения времен затухания свечения комплексов уранила в растворителях приведены в таблице. Как видно из анализа этих данных, имеется два типа растворителей: 1) ацетонитрил, ацетон, МЭК, где т примерно в два раза превышает время т в воде и их значения примерно равны времени затухания люминесценции для кристалла  $UO_2(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$  [3], 2) ДМФА, ДМАА и ДМСО, где т меньше, чем т в воде. Указанные данные подтверждают тот факт, что основным видом комплексов в первых растворителях являются уранилнитрат с двумя молекулами воды, а во вторых — комплексы уранила с нейтральными лигандами [4].

Из изложенного видно, что если кривая затухания люминесценции комплексов уранилнитрата в первых четырех растворителях явно не является экспонентой, то для комплексов уранилнитрата в трех последних растворителях различие в τ не так велико, чтобы говорить об явной неэкспоненциальности. Неэкспоненциальность спада интенсивности люминесценции комплексов уранила в замороженных органических растворах (кетоны, спирты) замечена давно [5-7]. В работе [6] зарегистрировано также изменение спектра люминесценции замороженных растворов уранила на различных стадиях затухания. С.И.Вавилов и В.Л.Левшин [5] объяснили неэкспоненциальность наличием двух центров люминесценции, так как кривая спада интенсивности люминесценции уранилсульфата хорошо разлагается в приближении двух экспонент. Возможно, что кривая спада интенсивности люминесценции не случайно разлагается на две компоненты. Комплексные соединения уранила в растворах, если судить по скоростям лигандного обмена, имеют очень подвижное окружение. Тем не менее в растворе всегда должно существовать одно или несколько наиболее вероятных окружения при данном составе раствора. В условиях быстрого обмена ближайшего окружения комплексов уранила в жилком растворе спал интенсивности люминесценции остается экспоненциальным [8], однако при замораживании, когда скорость лигандного обмена сильно замедляется, в замороженном растворе остаются в основном две формы комплексного иона, наиболее близкие к равновесной форме. В таком замороженном растворе присутствуют наверняка и другие комплексные формы, но их концентрация значительно меньше, чем двух наиболее вероятных, поэтому-то кривая спада разлагается часто в приближении двух экспонент. Такое рассмотрение является, конечно же, приближенным. Так, например, спад интенсивности люминесценции уранилсульфата хорошо аппроксимируется в приближении двух экспонент [5], в то время как известно, что ионы уранила в этой соли имеют шесть центров, отличающихся координационным окружением [9,10].

Длительность возбужденного состояния разных центров свечения органических растворов уранилнитрата при 77К (т в 10<sup>-6</sup> с)

Растворитель	τι	τ,
Ацетонитрил	450	375
Ацетон	480	380
МЭК	520	380
Вода	220	258
ДМФА	180	185
ДМАА	165	169
ДМСО	150	163

Полученные результаты позволяют также сделать вывод о том, что для лигандов большой донорной способности (три последних), для которых скорость обмена лигандов намного меньше, чем для первых, вероятность образования комплексов, значительно отличающихся между собой, как по структуре, так и по затуханию люминесценции, мала.

1. Володько Л.В., Турецкая Е.А. //Журн. прикл. спектроскопии. 1965. Т.3. №3. С. 248.

2. Зажогин А.П., Серафимович А.И., Комяк А.И. //Там же. 1994. Т.60. №1-2. С.94.

3. Белфорд Е., Рабинович Р. Спектроскопия и фотохимия соединений уранила. М., 1968.

4. Зажогин А.П., Серафимович А.И., Комяк А.И., Титков Е.Ф. //Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1986. №1. С.24.

5. Вавилов С.И., Левшин В.Л.// Zs. f. Phys. 1928. Vol.48. P.397.

6. Володько Л.В., Турецкая Е.А. //Журн. прикл. спектроскопии. 1966. Т.4. №4. С. 327.

7. Турецкая Е.А. //Там же. 1971. Т.15. №3. С. 547.

8. Moriyasu M., Yokoyama Y., Ikeda S. //J. Inorg. and Nucl. Chem. 1977. Vol.39. P.2199.

9. Казаков В.П., Коробейникова В.Н., Чувилин Ю.Н. и др. //Оптикаи спектроскопия. 1973. Т.35. С.991.

10. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения. Мн., 1981. Т.1.

УДК 517.926

#### Л.А. АЛЬСЕВИЧ, В.И.БУЛАТОВ

# ПРЕДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

It is showed that every solution of linear homogeneous regular differential system is limiting for corresponding exponential solution of the system with small parameter.

Рассмотрим стационарную систему, не разрешенную относительно производной

$$A_0 \dot{x}(t) = A x(t), \tag{1}$$

где x - n-вектор;  $A_0$  и A — вещественнные  $n \times n$ -матрицы.

Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0)=x_0$$
,

где  $x_0$  — постоянный *n*-вектор, будем подразумевать дифференцируемую *n*-вектор-функцию x(t),  $t \in [0; +\infty[$ , удовлетворяющую (1)-(2).

Известно [1], что система (1), у которой  $\det A_0 \neq 0$ , всегда имеет единственное решение

$$x(t) = e^{A_0^{-1}At} x_0,$$

соответствующее начальному условию (2). Целью данной работы является обобщение такого представления решений для случая регулярных систем (1).

$$\operatorname{et}(\lambda_0 A_0 - A) \neq 0. \tag{3}$$

Для регулярной системы (1) положим

$$\begin{cases} y(t) = e^{-\lambda_0 t} x(t), \\ G = (A - \lambda_0 A_0)^{-1} A_0, \end{cases}$$
(4)

где число λ<sub>0</sub> удовлетворяет условию (3). В силу (1)-(4) имеем

d

$$\begin{cases} G\dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$
 (5)

Очевидно, что регулярная система (1) тогда и только тогда будет иметь решение, соответствующее начальному условию (2), когда разрешима система (5), т.е. когда [2]

$$x_0 \in \boldsymbol{L}(G^n), \tag{6}$$

где *L*(*G*<sup>\*</sup>) означает линейное пространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы *G*<sup>\*</sup>.

Наряду с системой (5) при условии (6) рассмотрим систему

$$(G + pE)\dot{y}_{p}(t) = y_{p}(t),$$
  
 $y_{p}(0) = x_{0},$  (7)

где число *р* играет роль малого параметра. Для всех достаточно малых  $p\neq 0$  система (7) будет системой с det(*G*+*pE*) $\neq 0$ , и, значит, имеет решение

(2)

$$y_p(t) = e^{(G+pE)^{-1}t} x_0,$$
 (8)

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. Для произвольной *n*×*n*-матрицы *G* существует предельная матричная функция

$$F(t) = \lim_{p \to 0} (e^{t(G+pE)^{-1}} G^n),$$
(9)

являющаяся квазиполиномом от t и удовлетворяющая системе

$$GF(t) = F(t),$$

$$F(0) = G^{n}.$$
(10)

Доказательство. С помощью подходящей невырожденной *n*×*n*-матрицы *S* матрицу *G* можно привести к блочно-диагональному виду [3]

$$S^{-1}G S = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где Q — соответствующая нильпотентная  $m \times m$ -матрица, H — некоторая невырожденная  $(n-m) \times (n-m)$  — матрица. Учитывая, что  $Q^m = 0$ , из (11), во-первых, имеем [3]

$$G^{n} = \left( S \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} S^{-1} \right)^{n} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{n} \end{bmatrix} S^{-1},$$
(12)

и, во-вторых, получаем [3]

$$e^{t(G+pE)^{-1}} \cdot G^{n} = S \begin{bmatrix} e^{t(Q+pE)^{-1}} & 0\\ 0 & e^{t(H+pE)^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & H^{n} \end{bmatrix} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & e^{t(H+pE)^{-1}} H^{n} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Отсюда для матричной функции (9) следует

$$F(t) = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tH^{-1}} H^n \end{bmatrix} S^{-1}.$$
 (13)

Поэтому, во-первых, элементами F(t) будут квазиполиномы от t, u, вовторых,

$$G\dot{F}(t) = S\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{-1}e^{tH^{-1}}H^n \end{bmatrix} S^{-1} = F(t),$$

причем, в силу (12), (13) имеем

$$F(0) = S\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^n \end{bmatrix} S^{-1} = G^n,$$

т.е. получаем (10).

Доказанная лемма позволяет легко обосновать следующий основной результат.

**Теорема.** При условии (6) для решения (8) соответствующей системы (7) существует предельная функция

$$y(t) = \lim_{p \to 0} y_p(t),$$
 (14)

удовлетворяющая (5).

Доказательство. Из (6) следует, что найдется такой n-вектор  $y_0$ , что  $x_0 = G^n y_0$ .

Поэтому, для решения (8) системы (7) имеем

$$y_p(t) = e^{t(G+pE)^{-1}}G^n y_0.$$

Отсюда, в силу предыдущей леммы для предельной функции (14), вопервых, получаем

$$y(t) = \lim_{p \to 0} (e^{t(G+pE)^{-1}}G^n)y_0 = F(t)y_0,$$
(15)
где F(t) определяется соотношением (9), и, во-вторых, на основании (10) непосредственно проверяется, что функция (15) удовлетворяет системе (5).

Следствие. Любое решение x(t) регулярной системы (1), соответствующее начальному условию (2), представимо в виде

$$x(t) = \lim_{p \to 0} (e^{t(\lambda_0 E + (G + pE)^{-1})} x_0),$$
(16)

где число  $\lambda_0$  определяется соотношением (3), а  $G = (A - \lambda_0 A_0)^{-1} A_0$ .

Действительно, в силу (3)-(5) из (8),(14) для (1)-(2) имеем

$$x(t) = e^{\lambda_0 t} y(t) = e^{\lambda_0 t} \lim_{p \to 0} \left( e^{t(G+pE)^{-1}} x_0 \right) = \lim_{p \to 0} \left( e^{t(\lambda_0 E + (G+pE)^{-1})} x_0 \right).$$

Замечание. Хотя в представлении (16) решения x(t) регулярной системы (1)-(2) фигурирует произвольное число  $\lambda_0$ , удовлетворяющее (3), можно показать, что предельная функция x(t) в (16) не зависит от  $\lambda_0$ , и, например, может быть найдена также по формуле [4]

$$x(t) = \lim_{\epsilon \to 0} (e^{t(A_0 + \epsilon A)^{-1}A} x_0).$$

1. Л.А.Альсевич, Л.П.Черенкова // Практикум по дифференциальным уравнениям. Минск.»Вышэйшая школа», 1990

2. Bulatov V // Sur les solutions d'un système différentiel non resoluble par rapport f la dérivée. Cahiers mathématiques. Université d'Oran. Fascicule al Annee 1988. ORAN — ALGÉRIE.

3. Гантмахер Ф.Р.//Теория матриц. М., 1988.

4. В.И.Булатов //Об одном предельном представлении решений линейных регулярных систем. Тез. докл. междунар. матем.конф. «Еругинские чтения – У», 26-28 мая 1998г. Могилев, 1998г.

Поступила в редакцию 04.06.98

УДК 532.135: 539.374

#### М.Д.МАРТЫНЕНКО, С.М.БОСЯКОВ

#### МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ АСИММЕТРИЧНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

The system of equations of the asymmetrical theory of viscous liquid medium is reduced and on its base the equation of characteristics is received.

Рассмотрим асимметричную теорию вязких жидких сред, в которой поворот локального трехгранника равен среднему повороту поля перемещений:

$$\omega = 1/2 \operatorname{rot} \upsilon, \, \omega = (\omega_1, \, \omega_2, \, \omega_3), \, \upsilon = (\upsilon_1, \, \upsilon_2, \upsilon_3), \tag{1}$$

где ω – вектор углового поворота, υ – вектор скорости.

٢.

Уравнения движения могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji,j} + X_{i} = \rho \frac{dv_{i}}{dt}, \\ \sum_{j=1}^{3} \mu_{ji,j} + \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + Y_{i} = j \frac{d\varpi_{i}}{dt}. \end{cases}$$
(2)

Здесь компоненты силовых и моментных напряжений образуют несимметричные тензоры [1-3], причем

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_i \upsilon_j + \partial_j \upsilon_j) + \alpha(\partial_j \upsilon_j - \partial_i \upsilon_j) - 2\alpha \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_k + \left(\lambda \sum_{k=1}^3 \partial_k \upsilon_k - p\right) \delta_{ij},$$
  
$$\mu_{ij} = \gamma(\partial_j \omega_i + \partial_i \omega_j) + \beta(\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j).$$

Фигурирующие в этих формулах переменные совпадают с обозначениями [2].

Из второго уравнения системы (2) находим несимметричную часть тензора силовых напряжений:

$$\sigma_{\langle lm \rangle} \equiv \frac{1}{2} (\sigma_{lm} - \sigma_{ml}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,3}^{3} \varepsilon_{ilm} \mu_{jl,j} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ilm} \left( Y_i - j \frac{d \overline{\omega}_i}{dt} \right).$$

Обозначим симметричную часть тензора напряжений

$$\sigma_{(ij)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} + \sigma_{ji} \right).$$

Тогда:

$$\sigma_{(ij)} = \mu \left( \partial_j \upsilon_i + \partial_i \upsilon_j \right) + \left( \lambda \sum_{k=1}^3 \partial_k \upsilon_k - p \right) \delta_{ij},$$
  
$$\sigma_{(ij)} = \alpha \left( \partial_j \upsilon_i - \partial_i \upsilon_j \right) - 2\alpha \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

Поэтому из первого уравнения системы (2) получим:

$$\mu \Delta \upsilon + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}\upsilon - \operatorname{grad} p + \frac{1}{4}(\gamma + \beta) \operatorname{rot} \operatorname{rot}\Delta \upsilon + \frac{1}{2} \operatorname{rot}\left(Y - j\frac{d\omega}{dt}\right) + X = \rho \frac{d\upsilon}{dt}$$

или

$$\mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{graddivv} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \operatorname{rotrot} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{Y} + \mathbf{X} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{j}{4} \operatorname{rot} \left[ \frac{d}{dt} (\operatorname{rotv}) \right].$$
(3)

(4)

К этому уравнению следует добавить уравнение неразрывности  $d\rho/dt+\rho \operatorname{divo}=0.$ 

Система (3),(4) является нелинейной и поэтому для ее упрощения предположим, что движения происходят с малыми скоростями. Это позволяет отбросить в ней нелинейные члены. Кроме того, если жидкость несжимаемая и  $\rho$ =const, то разрешающая система уравнений принимает такой вид:

$$\begin{cases} \mu \Delta \upsilon - \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \Delta^2 \upsilon - \operatorname{grad} p + \frac{1}{2} \operatorname{rot} Y + X = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \upsilon - \frac{j}{4} \Delta \upsilon \right), \\ -\operatorname{div} \upsilon = 0. \end{cases}$$
(5)

Введем операторное обозначение

$$\Pi = \mu \Delta - \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \Delta^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4} \Delta - \rho \right)$$

Тогда (5) принимает вид:

$$\begin{cases} \Pi \mathbf{v} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{2} \operatorname{rot} Y + X = 0, \\ -\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$
(6)

Уравнение характеристической поверхности для (6) не позволяет определить значения  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$  при *t*=0 [5].

Это приводит к такому уравнению:

74

$$\Pi \Omega \ 0 \ 0 - \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$$

$$0 \ \Pi \Omega \ 0 - \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$$

$$0 \ \Pi \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}$$

$$- \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} 0$$

$$= 0.$$
(7)

Откуда имеем следующее уравнение характеристических поверхно-

стей

$$\mu \Delta \Omega - \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \Delta^2 \Omega + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{j}{4} \Delta \Omega - \rho \Omega \right) = 0.$$

В частном случае *j*=0, γ+β=0 из (7) получим уравнение характеристик для классической гидродинамики вязкой жидкости.

1. Аэро Э.Л., Булыгин А.П., Кувшинский Е.В. // ПММ. 1964.Т.29. С.297. 2. Мартыненко М.Д., Войнич В.П. //Вести НАН БССР. Сер. физ.-тех. наук. №4. 1996. С.68.

3. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М., 1996. Т.IV.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т.IV.

Поступила в редакцию 11.02.99.

# Наши юбиляры



# ПЕТР ПЕТРОВИЧ ЗАБРЕЙКО



Исполнилось 60 лет со дня рождения выдающегося математика, заведующего кафедрой математических методов теории управления Белгосуниверситета, главного научного сотрудника института математики НАН Беларуси, доктора физикоматематических наук, профессора Петра Петровича Забрейко.

П.П.Забрейко родился 03.02.1939 г. в Воронеже. В 1961 г. окончил математический факультет Воронежского государственного университета. Во время учебы в аспирантуре под руковод-ством проф. М.А.Красносельского им был получен рял важных результатов по геометрическим методам анализа, часть из которых вошла в монографию, опубликованную в 1963 г., а также послужила основой кандилатской диссертации (1964 г.). По окончании аспирантуры П.П.Забрейко работал в Воронежском госуниверситете, Институте автоматики и телемеханики в Москве. Построенная им в этот период систематическая тео-

рия операторов и операторных уравнений в идеальных пространствах функций составила содержание докторской диссертации, защищенной в 1968 г. В 1971–1981 гг. П.П.Забрейко работал в Ярославском госуниверситете. В 1981 г. он был приглашен в Белгосуниверситет на должность профессора кафедры функционального анализа. С 1988 г. проф. Забрейко П.П. возглавляет кафедру математических методов теории управления механико-математического факультета.

П.П.Забрейко — ученый с мировым именем. Им опубликовано более 360 научных работ, из них восемь монографий, многие из которых переведены за рубежом. В его статьях и книгах ставятся и решаются фундаментальные научные проблемы. Невозможно назвать все проблемы, к которым проявляет интерес П.П.Забрейко. Здесь и общие проблемы линейного и нелинейного анализа, геометрические и асимптотические метолы анализа, теория интегральных и дифференциальных уравнений, многозначный анализ, теория и приложения функциональных и *К*-нормированных пространств, теория операторов суперцозиции. Особо следует отметить полученные им результаты по глобальным проблемам анализа — теоремы о неявной функции, теоремы о среднем для дифференцируемых отображений в бесконечномерных пространствах,  $L_p$ -теория интегральных уравнений Фредгольма и т.д.

Среди ученых широко известны глубокий аналитический ум, энциклопедические знания проф.П.П.Забрейко в области математического анализа, геометрии, алгебры и других разделов математики. К нему постоянно обращаются за советами и консультациями ученые разных стран.

П.П.Забрейко проволит большую методическую работу на факультете. Опубликованные им методические пособия – яркие образцы глубокого понимания суги рассматриваемых проблем. П.П.Забрейко – замечательный лектор, его занятия неизменно пользуются успехом у студентов. Им был также прочитан пикл лекций по основам теории чисел и пространств для учителей. Он открыт для новых интересных начинаний (например, был одним из первых на факультете, кто начал читать специальные курсы на английском языке). Под его руководством и при непосредственном участии на факультете открыта новая специализация – "математические методы в экономике". П.П.Забрейко делает очень многое для того, чтобы такая специализация реально давала студентам подготовку для решения как глобальных, так и локальных проблем экономики.

Профессор П.П.Забрейко уделяет большое внимание подготовке научно-педагогических кадров на факультете. Под его руководством подготовлены и защищены 5 докторских и 27 кандидатских диссертаций. Широки междунаролные связи проф.П.П.Забрейко. Он участвует в разработке совместных научных программ с учеными Вюрпбургского, Рурского (г.Бохум) (Германия), II Римского, Калабрийского и Падуанского университетов (Италия). Его статьи выходят в различных международных математических журналах, многие из них полготовлены совместно с учеными Германии, Италии, США, Югославии, Чехии, Болгарии, Вьетнама и др. Он – член редколлегии международного "Журнала по интегральным уравнениям и приложениям" ("IEA"), издаваемого в США. П.П.Забрейко – активный участник многочисленных междунаролных математических конференций, неоднократно был приглашен для чтения лекций и выступлений на семинарах в различные университеты и научные центры.

Всесторонне образованный человек, знаток физики и механики, литературы и истории проф. П.П.Забрейко пользуется большим авторитетом и уважением среди коллег и студентов БГУ.

Горячо и сердечно поздравляем Петра Петровича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, творческой активности на многие годы.

И.В.Гайшун, В.В.Гороховик, Н.А.Изобов, С.В.Рогозин, Н.И.Юрчук, Л.А.Япович

#### УДК 778.38

Зверева В.В., Маникало В.В., Сташкевич И.В. Стереоэффект и синтез композиционных голограмм // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

В работе рассматриваются особенности получения композиционной голограммы объекта, созданного программой трехмерной компьютерной графики с учетом закономерностей стереоэффекта. Получены выражения расчета параметров схемы для формирования набора плоских изображений объекта и переноса их на голографическую фотопластину. Для экспериментальной проверки полученных результатов синтезированы голограммы.

Библиогр. 5 назв., ил.3.

#### УДК 535.37.621.37

Пухнаревич С.А., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. Дуальпая флуоресценция аминооксалиазолов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Методами лазерной спектроскопии высокого временного разрешения и стационарной поляризационной спектроскопии исследована дуальная флуоресценция спиртовых растворов аминооксадиазолов. Показано, что при образовании TICT-состояния наблюдается изменение геометрии молекулы.

Библиогр. 8 назв., ил. 3.

#### УДК 535.33/34:621.373.826

Сазанович И.В. Фотофизика катионного Со-порфирина, встроенного в ДНКмолелирующие полинуклеотиды // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Исследованы типы взаимодействия в основном состоянии и динамика дезактивании энергии электронного возбуждения в водорастворимых катионных кобальт(II) и кобальт(III) 5,10,15,20-тетракис[4-(N-метилпиридил)]порфиринах (Co(II)П и Co(III)П) с Calf Thymus ДНК poly(dA-dT) и poly(dG-dC) с использованием методов абсорбщионной спектроскопии, кругового дихронизма и кинетической абсорбщионной спектроскопии с пикосскундным временным разрешением.

Библиогр.13 назв., ил.3.

#### УДК 537.311.33 + 538.975

Анишик В.М., Ярмолович В.А. Оценка эффективности использования тонких плепок InSb с различными нараметрами в преобразователях Холла // Вестн. Белорус. унта. Сер.1. 1999. №2.

Рассмотрен выбор основных параметров пленочных элементов из InSb, а именно: их толщины, концентрации и подвижности носителей заряда, температурных коэффициентов, плотности размещения для получения оптимальных характеристик как классических датчиков Холда, так и трехэлектродных преобразователей Холда.

Библиогр. 5 назв., ил.3.

#### УДК 537.635: 546.273 171

Азарко И.И., Козлов И.П., Оджаев В.Б. Шишонок Е.М., Шипило В.Б. Парамагнитные дефекты кубического питрида бора, синтезированногос помощью техники высоких давлений // Вести. Белорус. ун-та. Сер1. 1999. №2.

Приводятся результаты исследований ЭПР монокристаллов и микропороннков кубического нитрида бора, синтезированных в каталитической системе роста с избытком азота или бора, в том числе после термического и радиационного воздействия. Представлено обсуждение количественных данных по характеристикам парамагнитных центров, выявлено соответствие состава каталитической системы роста кристаллов их спектральным характеристикам.

Библиогр. 11 назв., табл.2, ил.1.

#### УДК 669.716

Шепелевич В.Г. Структура и свойства быстрозатвердевшей фольги сплава Д16 // Вестн.Белорус.ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Быстрозатвердевшая фольга сплава Д16 характеризуется текстурой (111). Пересыщенный твердый раствор на основе алюминия содержит мелкодисперсные выделения фаз CuAl<sub>2</sub> и Al<sub>6</sub>Mg<sub>4</sub>Cu, которые находятся в объеме и на границах зерен. При отжиге в области низких температур удельное электросопротивление и микротвердость фольги увеличиваются, а в области высоких температур — уменьшаются.

Библиогр. 7 назв., табл.2, ил.3.

#### УДК 621.315.592.548.74

Гайдук П.И., Тишков В.С., Комаров Ф.Ф., Якубеня С.Н. Влияние мелколисперсных включений алмаза на структуру электролитических пленок никеля // Вестн.Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Исследованы процессы роста никелевых пленок из электролита, содержащего взвесь мелкодисперсных алмазных зерен. Установлено, что захват алмазных зерен приводит к существенному увеличению размеров зерен растущей поликристаллической пленки никеля. Приведены данные дифрактомстрических измерений никелевых пленок, выращенных из электролита, содержащего (или не содержащего) взвесь алмазного порошка.

Библиогр. 20 назв., табл. 1, ил. 2.

#### УДК 621.372.8

Кухарчик П.Д., Сердюк В.М., Титовицкий И.А. Применение метода частичных областей к расчету полей в открытых резонансных системах // Вестн. Белорус. унта. Сер. 1. 1999. №2.

На примере объемного цилиндрического резонатора с поперечной круговой щелью рассматривается новый вариант теоретического метода частичных областей для расчета открытых резонансных и волноводных систем. Обосновывается возможность описания таких систем с помощью одной скалярной полевой функции, соответствующей *H*- или *E*-поляризации. Исследуются интегральные разложения поля по собственным модам открытых областей и возможности их вычисления с помощью ЭВМ.

Библиогр. 10 назв., ил.3.

#### УДК 621.396.67

Волынец Н.А., Демидчик В.И. Отражательные свойства сетчатого экрана конечных размеров //Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Рассмотрен метод расчета электродинамических характеристик полуволнового симметричного вибратора, расположенного над сегчатым экраном, основанный на решении интегрального уравнения Поклингтона; приведены результаты анализа, позволяющие оценить отражательные свойства сетчатого экрана в зависимости от размеров ячейки сетки, толщины проводника, из которого она выполнена, и расстояния от вибратора до экрана.

Библиогр.5 назв., ил.3.

#### УДК 536.24, 517.968

Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. Метод решения интегральных уравнений с невырожденными ядрами в области *L*-изображений // Вестн. Белорус. ун-та. Сср. 1.1999. № 2.

В работе предложен метод решения интегральных уравнений второго порядка с *L*-параметром.

Библиогр. 8 назв.

#### УДК 517.938

Амелькин В.В., Малевич А.Э. Предельные свойства орбит общих динамических систем. 1 // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. N 2.

Изучаются некоторые типы движений общих динамических систем, в поведении которых существенную роль играет динамически предельное множество.

Библиогр. 4 назв

#### УДК 517.968

Кашевский В.В. Сингулярный оператор с логарифмом в ядре и пространства Гельдера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. №2.

Исследуется оператор  $\left(S_{\ln}f\right)(x) = \int_{0}^{1} \frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x} dt, x \in [0,1].$ 

Доказана ограниченность оператора  $S_{\mu}$  из пространства  $H_0^{\mu}$  в пространство  $H^{\mu,1}$ ,  $0 < \mu < 1$ . Библиогр. 3 назв.

УДК 517.968.23

Шилин А.П. Сингулярные интегральные уравнения с отражением на действительной оси // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Сведением к краевым задачам для аналитических функций решены в замкнутой форме два полных сингулярных интегральных уравнения со сдвигом  $\alpha(t) = -t$ .

Библиогр. 5 назв.

# CONTENTS

### PHYSICS

Zvereva V.V., Manikalo V.V., Stashkevitch I.V. The stereoeffect and synthesis of composite holograms	3
Pukhnarevitch S.A., Senyuk M.A., Tikhomirov S.A., Tolstorozhev G.B. Dual fluorescence of aminooxadiazoles	7
Sazanovich I.V. Photophysics of the cationic Co-porphyrins bound to DNA-modeling polynucleotides	10
Anishchik V.M., Yarmolovich V.A. The efficiency estimation of using InSb thin films with various parameters in Hall transformers	14
Azarko I.I., Kozlov I.P., Odzhaev V.B., Shishonok E.M., Shipilo V.B. The paramagnetic defects of cubic boron nitride, synthesized using the high pressure devices	18
Shepelevich V.G. Structure and properties of quickly solidified foils of D16 alloy	23
Kuharchik P.D., Serdyuk V.M., Titovitsky I.A. Application of the partial-region method to field coloulation in opened resonance systems	20
Volynets N.A., Demidtchick V.I. The reflective properties of a grid screen of finite dimensions	20
without of the second	55

## MATHEMATICS AND INFORMATICS

Kozlov V.P., Yurchuk N.I., Mandrik P.A. Method of solution of integral equations with	~~
undegeneration kernels into L-image region	37
Amel'kin V.V., Malevich A.E. Limit properties of orbits of general dynamical systems. I	42
Kashevsky V.V. Singular operator with the logarithm in the kernel and Holder spaces	46
Shilin A.P. Singular integral equations with reflection on the real axe	48
Kravtsov M.K., Lukshin E.V. On a bound of the number of integer points of the multy-	
index axial transportation polyhedron	51
Demesh N.N., Akinfina M.A. On covariation of the modified periodogram of Welch for	
symmetric stationary a-stable process	55
Kharin A. Yu. On robustness of Bayesian time series prediction	57
Zhuravkov M.A. Natural stress state of rock's massif	62

# BRIEF COMMUNICATIONS

Zazhogin A.P. Luminescence Kinetics of the Solutions of Uranyl Compounds in Organic Solvents	69
Alsevich L.A., Bulatov V.I. Limiting representation of solution of linear homogeneous regular systems	<b>7</b> 1
Martynenko M.D. Bosiakov S.M. Method of characteristics for the half-momentary theory of asymmetrical hydrodynamics.	73

## OUR JUBILEE

Peter	Petrovich	Zabrejko	76
-------	-----------	----------	----

#### УДК 519.10

Кравцов М.К., Лукшин Е.В. Об одной оценке числа целочисленных точек многоиндексного аксиального транспортного многогранника // Вестн.Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Получена достаточно точная оценка сверху для числа целочисленных точек многоиндексного аксиального транспортного многогранника, определенного целочисленными векторами. В некоторых частных случаях доказана достижимость этой оценки.

Библиогр. 5 назв.

#### УДК 519.24

Демеш Н.Н., Акинфина М.А. О ковариации модифицированной периодограммы Уэлча для устойчивых процессов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

В качестве оценки спектральной плотности для симметричных стационарных αустойчивых процессов рассматривается модифицированная периодограмма Уэлча, построенная по пересекающимся интервалам. Приводится формула для ковариации данной статистики.

Библиогр. 6 назв.

#### УДК 519.2

Харин А.Ю. О робастности байесовского прогнозирования временных рядов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. №2.

Рассматривается задача анализа робастности байесовского прогнозирования временных рядов. Для трендовой и авторегрессионной моделей построены робастные прогнозирующие статистики из условия минимакса функционала риска. Теоретические результаты иллюстрируются результатами вычислительного эксперимента.

Библиогр. 7 назв., ил. 1.

#### УДК 539.3: 622.831

Журавков М.А. Естественное напряженное состояние породного массива // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. №2.

Описывается подход к оценке естественного напряженного состояния (главных напряжений) породной толщи. Указывается на необходимость учета при этом возможности существования массива изначально в допредельном напряженном состоянии и предельнонапряженном. Приведена модель возможного развития геодинамического состояния массива.

Библиогр. 11 назв., ил.2.

#### УДК 535.372

Зажогин А.П. Кипетика люминесценции растворов ураниловых соединений в органических растворителях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. №2.

Изучена кинетика люминесценции растворов уранилнитрата в воде и органических растворителях. Установлено, что она является неэкспоненциальной и может быть представлена двумя экспонентами. Разница в величинах констант затухания комплексов уранила большая в растворителях с малой донорной способностью и значительно меньшая в растворителях с большой донорной способностью.

Библиогр. 10 назв.

#### УДК 517.926

Альсевич Л.А., Булатов В.И. Предельное представление решений линейных однородных регулярных систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. №2.

Показано, что каждое решение линейной однородной регулярной дифференциальной системы является предельным для соответствующего экспоненциального решения системы с малым параметром.

Библиогр. 4 назв.

#### УДК 532.132: 539.374

Мартыненко М.Д., Босяков С.М. Метод характеристик для полумоментной теории асимметричной гидродинамики // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. №2.

Выведена разрешающая система уравнений асимметричной теории вязких жилкостей, в которой поворот локального трехгранника равен среднему повороту поля перемещений, и на ее основе получено уравнение распространений характеристик.

Библиогр. 5 назв.