

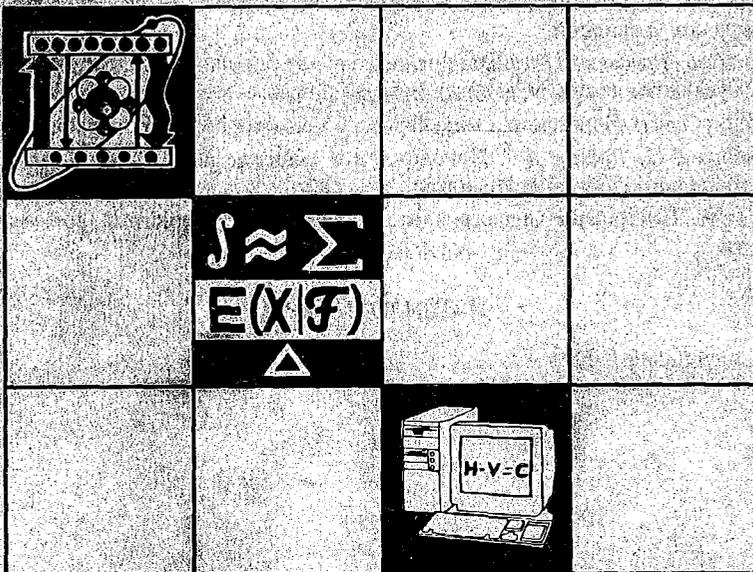
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

2'98



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Алексеевко Н.А., Зажогин А.П.</i> Электронно-колебательные спектры поглощения и строение комплексов уранилхлорида в растворах	3
<i>Грузинский В.В., Кухто А.В., Галькин В.В.</i> Зависимость эффективности генерации от частоты излучения накачки в лазерах на сложных органических соединениях в квазистационарном режиме	6
<i>Карапетян О.Э., Кухарчик Л.В., Сагайдак Д.И., Тимофеева Г.И.</i> Прогнозирование цветовых характеристик ЖК экранов	12
<i>Сухвало С.В., Власов В.В., Рудь В.Г.</i> Глобальная и локальная устойчивость магнитных фаз в магнетиках кубической сингонии	17
<i>Андреев А.Д., Комаров Ф.Ф., Михей В.Н.</i> Эмиссия горячих электронов в подзатворный диэлектрик МОП-ПТ с высоколегированной подложкой	23
<i>Пономарь В.Н., Пилипенко В.А., Горушко В.А., Тарасик М.И.</i> Планаризация поверхности изолирующего диэлектрика с использованием быстрой термической обработки	26
<i>Клиценко А.П., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б.</i> Свободные радикалы: фотолиссосация одианрных связей в органических молекулах и сопутствующие релаксационные процессы	29

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА

<i>Калитин Б.С.</i> Динамическая модель рынка типа "эффективная конкуренция". Неотрицательный запас прочности	41
<i>Пилипчук Л.А., Пилипчук А.С.</i> Критерий оптимальности для одной двойственной линейной экстремальной задачи	46
<i>Абрамович М.С.</i> Оценка мощности спектрального критерия обнаружения момента "разладки" временных рядов	49
<i>Бабицькі А.У.</i> Оптимізація уваходнай плыні адналінейнай сістэмы масавага абслугоўвання	53
<i>Чесалин В.И.</i> Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений	57
<i>Абабна Муса (Иордания).</i> Регуляция нелокальными условиями задачи управления начальным условием для эволюционных дифференциально-операторных уравнений	60
<i>Юссеф Х. (Сирия).</i> Неравенства типа черных и колмогоровские поперечники	64
<i>Мастяница В.С., Шуляев Д.С.</i> Приближенное решение обобщенного интегрально-дифференциального уравнения Прадтля	70
<i>Штин С.Л.</i> Построение аналога ядра Коши на четырехлистной римановой поверхности	73

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Антон Антонович Лабуда</i>	77
-------------------------------------	----

Главный редактор В.Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П.Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

П.Д. КУХАРЧИК (*ответственный редактор*),
В.М. АНИЩИК, Л.М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*),
В.Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А.М. БЕЛЬСКИЙ (*ответственный секретарь*),
В.В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), Е.С. ВОРОПАЙ,
Р.Ф. ГАБАСОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КОМЯК,
В.И. КОРЗЮК, М.Д. МАРТЫНЕНКО, В.И. МИРОНЕНКО, С.Г. МУЛЯРЧИК,
И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:
Белорусский государственный университет.

Регистрационный №805.

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 1998. №2

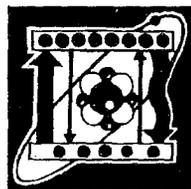
Редактор *И.А. Лешкевич*
Художественный редактор *Д.Е. Дивин*
Технический редактор и корректор *Г.И. Хмарун*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Г.М. Добыш* и *В.А. Семеновым*

Подписано в печать 13.05.98. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офс.
Усл.-печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 8,17. Тираж 750 экз. Заказ 1194. Цена 20000 р.

Издательство "Універсітэцкае", 220048, Минск, пр.Машерова 11 Адрес редакции:
220080, Минск, Университетский городок, тел. 220-65-42.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства "Белорусский Дом
печати", 220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 543.422. 541.65

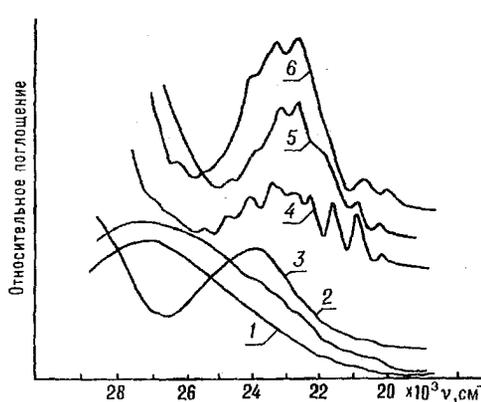
Н.А.АЛЕКСЕЕНКО, А.П.ЗАЖОГИН

ЭЛЕКТРОННО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ И СТРОЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ УРАНИЛХЛОРИДА В РАСТВОРАХ

The main results obtained when investigating the electron absorption spectra of uranyl chloride solutions in water and some organic solvents are presented. The composition of the first coordination sphere of uranyl complexes in solutions has been studied. The correlation dependence between state of the first pure electron transfer band and solvent properties has been received.

Известно, что большинство реакций в водных и неводных растворах уранила протекает по донорно-акцепторному механизму и обусловлено переносом электронной плотности от молекулы донора (растворителя) к молекулам акцептора (ионам уранила), т.е. растворитель является не только средой, но и реагентом. В общем случае довольно трудно определить те свойства растворителя, которые оказывают главенствующее влияние на данную реакцию взаимодействия между растворителем и соединением уранила (координацию, образование водородных связей и т.д.) и которые определяют характер его влияния на всю систему. Попытки установить взаимосвязь параметров спектров поглощения иона уранила с физическими свойствами растворителей предпринимались неоднократно [1], но, к сожалению, до настоящего времени еще нет достаточно удовлетворительной общей теории для описания процессов комплексообразования в водных и неводных растворах и электронного строения иона уранила в этих растворах.

В данной статье на основе изучения спектров электронного поглощения растворов $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$ в различных растворителях (воде, ДМФА, ДЭАА, ДМСО, ГМФТА, ТБФ) исследовано влияние физико-химических свойств молекул растворителей на положение и интенсивность полос в спектре и применимость эмпирических параметров растворителей [2] для описания механизмов сольватации и комплексообразования иона уранила.



Спектры поглощения растворов $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$ в: 1 - ГМФТА; 2 - ДЭАА; 3 - воде; 4 - ТБФ; 5 - ДМФА; 6 - ДМСО.

Спектры электронного поглощения ряда растворов $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$ при комнатной температуре приведены на рисунке. Как видно, спектры поглощения имеют характерную полосатую структуру, насчитывающую в видимой области до десяти-двенадцати полос. Следует отметить, что замена растворителей оказывает влияние на интенсивность и ширину полос поглощения в гораздо большей степени, чем на их смещение. Кроме этого, растворитель оказывает влияние и на общий вид спектра: часть спектров достаточно хорошо детализирована (например, спектры $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$ в ДМСО, в ДМФА, в ТБФ), а остальные имеют довольно широкие, трудноразрешимые полосы. В спектрах также можно наблюдать

и закономерность изменения коэффициента поглощения: самым малым обладают наиболее длинноволновые полосы, а в коротковолновой части спектров наблюдается значительное его увеличение.

В таблице приведены частоты максимумов полос поглощения и величины разностей $\Delta\nu$ между ними для растворов $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$ в различных растворителях, а также донорные числа растворителей (DN). Донорное число, по Гутману [3], является термодинамической характеристикой растворителя и отражает его способность к ионной сольватации.

Положение максимумов абсорбционных полос и частотные интервалы в спектре поглощения раствора $UO_2Cl_2 \cdot 3H_2O$

Частоты максимумов полос спектра поглощения, cm^{-1}	Частотный интервал, cm^{-1}	Частоты максимумов полос спектра поглощения, cm^{-1}	Частотный интервал, cm^{-1}	Частоты максимумов полос спектра поглощения, cm^{-1}	Частотный интервал, cm^{-1}
в воде ($DN=18$)		в ТБФ ($DN=23,7$)		в ДМФА ($DN=26,6$)	
20 580		20 200		20 280	
21 280	700	20 880	680	21 000	700
23 960	3×636	21 580	700	21 750	750
26 800	4×730	22 320	740	22 600	850
		22 900	580	23 280	680
		23 460	560	23 980	700
		24 140	680	24 700	720
		24 740	600	25 380	680
		25 500	760	27 480	3×700
		26 450	950		
		27 200	750		
		28 140	940		
в ДМСО ($DN=29,8$)		в ДЭАА ($DN=32,2$)		в ГМФТА ($DN=38,8$)	
20 050		20 060		20 370	
20 750	700	20 350	270	21 100	730
22 700	3×650	21 050	700	21 850	750
23 320	620	21 800	750	25 000	4×787
23 950	630	22 700	900	27 500	3×830
24 720	770	23 400	700		
25 400	780	24 150	750		
26 380	980				

Сопоставление частот максимумов самых длинноволновых полос для каждого образца, которые соответствуют первому чисто электронному переходу иона уранила, позволяет установить определенную корреляционную зависимость между их значением и донорной способностью для ряда растворителей (H_2O , ДМФА, ДМСО, ДЭАА). Эту корреляционную зависимость, полученную методом наименьших квадратов (МНК), можно представить в виде уравнения:

$$\nu_{00}(DN) = \nu_{00}(DN=0) - k \cdot DN = (21404 - 44 \cdot DN) \text{ см}^{-1}, \quad (1)$$

где $\nu_{00}(DN=0)$ — частота чисто электронного перехода в комплексе уранилхлорида с нейтральными лигандами при значении донорного числа DN , равном нулю.

Кроме этого, данные таблицы показывают, что частотный интервал между первыми тремя полосами поглощения для спектров 1–6 равен примерно $700\text{--}770 \text{ см}^{-1}$, что практически соответствует средней величине частоты полносимметричного валентного колебания уранила в возбужденном состоянии для соединений уранилхлорида. Нарушение частотного интервала между максимумами полос поглощения в области частот $21800\text{--}22300 \text{ см}^{-1}$ свидетельствует о возможном переходе в следующее возбужденное электронное состояние, причем частотный интервал между третьей и четвертой полосами увеличивается до $750\text{--}900 \text{ см}^{-1}$, а между последующими уменьшается до $560\text{--}700 \text{ см}^{-1}$ (частотные интервалы для каждого спектра примерно равны между собой). Подобное поведение полос в спектрах можно объяснить перекрыванием двух возбужденных электронных состояний. Поэтому

можно предположить, что четвертая полоса является началом нового электронного перехода. Очередное нарушение частотных интервалов наблюдается в области $25500\text{--}26500\text{ см}^{-1}$ (в этой и более длинноволновой области полосы становятся трудноразрешимыми из-за перекрыwania нескольких электронных состояний).

Кроме того, следует обратить внимание на спектр $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ в ДЭАА. В этом спектре наблюдаются две серии полос, сдвинутые относительно друг друга примерно на 270 см^{-1} . В области первого чисто электронного перехода имеются две достаточно разрешимые полосы, причем более длинноволновая полоса несколько выше по интенсивности, а для последующих полос вторая серия наблюдается как небольшое плечо на коротковолновом крыле этих полос. Можно предположить, что в растворе $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ с ДЭАА в процессе комплексообразования образуются два вида комплексов: в одном происходит вытеснение молекулами растворителя из внутренней сферы иона уранила и хлора и воды за счет высокой донорной способности ДЭАА, а в другом — во внутренней сфере частично остаются молекулы воды.

Согласно [2,3], вода обладает донорным числом, равным 18, но донорная способность молекул воды может значительно увеличиться за счет образования сильных водородных связей [2]. За счет этих изменений увеличивается так называемое суммарное донорное число, а следовательно, и среднее донорное число. Значение этого среднего донорного числа определяется как среднеарифметическое значений донорных чисел всех (в случае пентагональной координации — пяти) входящих во внутреннюю сферу иона уранила нейтральных лигандов. С использованием уравнения для зависимости положения первого чисто электронного перехода ν_{00} от донорного числа растворителя (1) и понятия среднего и суммарного донорных чисел, было проведено вычисление значения величин ν_{00} для наиболее возможного комплекса уранила, в первую координационную сферу которого входят молекулы воды и молекулы ДЭАА. Вычисленное значение для состава координационной сферы иона уранила, состоящей из трех молекул H_2O и двух молекул ДЭАА, равно 20360 см^{-1} , что довольно близко к экспериментальному значению (см. таблицу). Это может служить подтверждением того, что в растворе $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ в ДЭАА образуются два сорта комплексов.

В спектре раствора $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ в ГМФТА полосы смещены в длинноволновую область по сравнению с ожидаемыми ($\nu_{00}=20400\text{ см}^{-1}$ и 19700 см^{-1} соответственно). Так как растворитель имеет достаточно большое значение донорного числа (38,8), то, следовательно, понижение суммарного донорного числа можно объяснить лишь тем, что помимо молекул ГМФТА в координационную сферу иона уранила входят и молекулы воды. Это тем более вероятно, так как молекулы ГМФТА имеют относительно большие размеры и поэтому, в силу стерических факторов, в процессе комплексообразования во внутренней сфере иона уранила остаются молекулы воды. Из вычислений, аналогичных приведенным ранее, можно сделать вывод, что образуемые комплексы в первой координационной сфере имеют две молекулы ГМФТА и три молекулы воды.

Особое внимание следует обратить на поведение полос в спектре раствора $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ в ТБФ. Весь спектр (по сравнению с ожидаемым) сдвинут в коротковолновую область как при полной замене прежней координационной сферы на молекулы ТБФ, так и со спектром комплексов типа $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 2\text{ТБФ}$ или $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{ТБФ}$, которые, как предполагается в ряде работ [4,5], образуются при экстракции уранилхлорида. Этот сдвиг, по всей вероятности, можно объяснить увеличением суммарного донорного числа окружения уранила. Использование экспериментальных данных по положению полосы первого чисто электронного перехода ($\nu_{00}=20200\text{ см}^{-1}$) и уравнения (1) позволило сделать предварительную оценку значения среднего донорного числа. Оно,

как оказалось, должно быть порядка 27. Уже отмечалось, что донорная способность воды может значительно увеличиваться при образовании сильных водородных связей в комплексах, при этом донорное число может возрасти до 25 [6]. ТБФ имеет донорное число, равное 23,7, которое незначительно отличается от донорного числа воды. Поэтому увеличение среднего донорного числа до 27 маловероятно. Кроме того, ТБФ обладает низким значением диэлектрической проницаемости ϵ , что оказывает влияние на выгеснительную способность этого растворителя. Из сказанного следует, что, рассматривая только электронные спектры поглощения, нельзя с достаточной степенью уверенности утверждать, какие именно комплексы образуются в данном растворе. Необходимы дополнительные исследования.

Несмотря на то, что выполненный на основе абсорбционных спектров анализ носит во многом предположительный и интуитивный характер, он, тем не менее, позволяет с достаточной определенностью судить как об электронном строении, так и о составе координационного окружения уранила в комплексах, образующихся в растворах, в зависимости от эмпирических характеристик молекул растворителя.

1. Володько Л.В., Комяк А.И., Умрейко Д.С. Ураниловые соединения. М., 1985.
2. Райхард К. Растворители и эффекты среды в органической химии. М., 1991.
3. Гутман В. Химия координационных соединений в неводных растворах. М., 1971.
4. Липилина И.И. Уранил и его соединения. М., 1959.
5. Стоянов Е.С., Михайлов Б.А., Образцова И.И. Координационная химия. 1985. Т. II. Вып. 12. С. 1663.
6. Trachtman M., Miller J. G. // J. Am. Chem. Soc. 1962. Vol. 84. P. 4828.

Поступила в редакцию 15.09.97.

УДК 621.378.34

В.В. ГРУЗИНСКИЙ, А.В. КУХТО, В.В. ГАЛЬКИН

ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ОТ ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ НАКАЧКИ В ЛАЗЕРАХ НА СЛОЖНЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЯХ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

The dependence of lasing efficiency of dye lasers on the pumping wavelength is investigated theoretically in quasi-steady state. It is shown that for some cases the generation efficiency maximal value is reached not in a maximum of absorption spectrum, but in the longwave region of this spectrum.

Исследования зависимости эффективности генерации от длины волны накачки, проведенные для некоторых сложных органических соединений [1,2], показали, что в ряде случаев максимальное значение эффективности генерации достигается при накачке не в максимуме спектра поглощения, а на длинноволновом крыле этого спектра. Такое положение отличается от общепринятых представлений и поэтому требует более детального изучения. Анализ спектров поглощения из возбужденных синглетных и триплетных уровней для растворов 1,4-ди[2-(5-фенилоксазолил)]бензола (ПОПОП) [1] позволили предположить, что такое поведение эффективности генерации обусловлено наведенным поглощением излучения накачки в системе возбужденных синглетных состояний. Для проверки этого предположения было проведено исследование зависимости эффективности генерации от длины волны накачки методом математического моделирования. Расчеты проведены для хорошо изученного и используемого в промышленных лазерах соединения — ПОПОП в условиях квазистационарного режима и поперечной накачки. Экспериментальная зависимость эффективности генерации от длины волны накачки ПОПОП известна из [1], спектры наведенного синглет-синглетного (*S-S*) и триплет-триплетного (*T-T*) поглощения в области усиления и поглощения из основного состояния взяты из [3] и представлены на рис. 1.

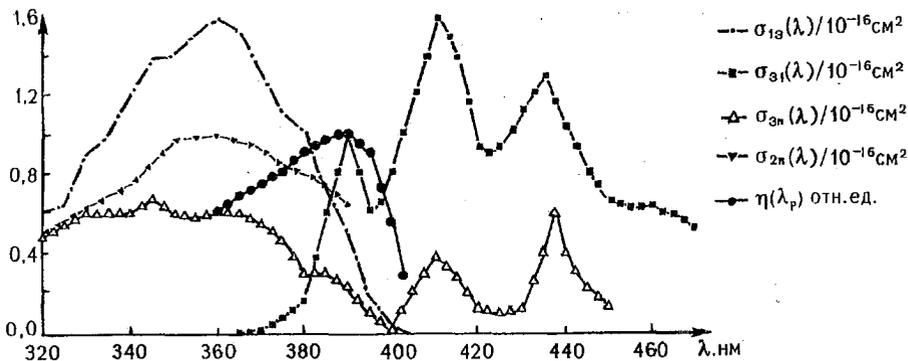


Рис.1. Сечения переходов S_0-S_1 , S_1-S_0 , S_1-S_n , T_1-T_n и экспериментальная кривая зависимости эффективности генерации ПОПОП в диоксане от длины волны излучения накачки.

Для кинетического анализа генерации лазеров на сложных органических соединениях используем общепринятую пятиуровневую модель, в которой схема электронно-колебательно-вращательных энергетических уровней молекулы состоит из основного состояния, двух синглетных и двух триплетных возбужденных состояний [4,5]. Кроме того, ограничимся рассмотрением частного случая квазистационарной генерации. Этот режим достаточно подробно описан в литературе, однако, как правило, расчеты были выполнены либо для тонкого слоя [6,7], либо с использованием условия стационарности [8,9]. В первом случае оказывается, что максимальная эффективность генерации должна достигаться при накачке в область максимума спектра поглощения, условие же стационарности вообще может быть не применимо при рассмотрении лазеров на средах с относительно большим временем жизни молекул в триплетном состоянии [4]. Напротив, для того чтобы определить эффективность накачки для реальных условий, будем рассматривать конечные размеры генерирующей области и в общем случае не ограничиваться стационарной генерацией.

Скоростные уравнения для населенностей энергетических уровней в общем случае имеют вид [6-11]:

$$\frac{dn_3}{dt} = -n_3 [p_{31} + p_{32} + I_p(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p) + F(\sigma_{31}^g + \sigma_{13}^g)] + (n - n_2) [I_p \sigma_{13}^p + F \sigma_{13}^g], \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -n_2 p_{21} + n_3 p_{32}, \quad (2)$$

где p_{31} , p_{32} — вероятности спонтанных переходов с уровня S_1 в основное — S_0 и триплетное — T_1 состояния соответственно; p_{21} — вероятность перехода с уровня T_1 в основное состояние; $\sigma_{31}^p, \sigma_{13}^p, \sigma_{31}^g, \sigma_{13}^g$ — сечения вынужденного излучения и поглощения на частоте накачки p и генерации g соответственно; I_p и $F = I + I$ — плотность потока фотонов на частоте накачки и суммарная плотность потока фотонов на частоте генерации соответственно; n — концентрация частиц активного вещества, а n_1 и n_2 — концентрация населенности уровней S_1 и T_1 соответственно.

В общем случае населенности n_1 и n_2 зависят как от координат x и z , так и от времени. Однако, как показывают расчеты на ЭВМ, в условиях поперечной накачки при плотностях мощности, значительно превышающих пороговую, после установления квазистационарного режима генерации указанные величины можно считать функциями только времени. Кроме того, в этом случае коэффициенты усиления и потерь равны и поэтому n_1 и n_2 удовлетворяют соотношению:

$$k_r \equiv \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{r_1 r_2} = n_3 (\sigma_{31}^g + \sigma_{13}^g - \sigma_{35}^g) - n_2 (\sigma_{24}^g - \sigma_{13}^g) - m \sigma_{13}^g, \quad (3)$$

где L — длина активной зоны в поперечном относительно распространения накачки направлении, а r_1 и r_2 — коэффициенты отражения зеркал резонатора;

σ_{24}^{α} — сечение поглощения с первого триплетного состояния на частоте генерации.

Из (3) для зависимости n_3 от n_2 имеем

$$n_3 = c_1 n_2 + c_2, \quad (4)$$

$$\text{где } c_1 = \frac{\sigma_{24}^{\alpha} - \sigma_{13}^{\alpha}}{\sigma_{31}^{\alpha} + \sigma_{13}^{\alpha} - \sigma_{35}^{\alpha}}, \quad c_2 = \frac{n\sigma_{13}^{\alpha} + k_r}{\sigma_{31}^{\alpha} + \sigma_{13}^{\alpha} - \sigma_{35}^{\alpha}}.$$

$$\text{Из } \frac{dn_2}{dt} = c_3 n_2 + c_4, \quad (5)$$

где $c_3 = p_{32}c_1 - p_{21}$, $c_4 = c_2 p_{32}$, находим изменение концентрации молекул в триплетном состоянии:

$$n_2 = c_5 \exp(c_3 t) + c_6, \quad (6)$$

$$\text{где } c_5 = \frac{n_2^0 c_3 + c_4}{c_3}, \quad c_6 = \frac{p_{32} c_2}{p_{21} - p_{32} c_1}, \quad n_2^0 \text{ — населенность уровня } T_1 \text{ к моменту}$$

начала квазистационарного режима генерации.

Концентрация синглетно-возбужденных молекул изменяется со временем следующим образом:

$$n_3 = c_7 \exp(c_3 t) + c_8, \quad (7)$$

$$\text{где } c_7 = c_1 c_5, \quad c_8 = c_1 c_6 + c_2.$$

Так как здесь используется приближение, при котором населенности уровней S_1 и T_1 одинаковы во всем генерирующем объеме, то зависимость потока излучения накачки от глубины проникновения в среду z и времени t будет выражена:

$$I_p(z, t) = I_p^0 \exp\left[\int_0^z k_p(t - \frac{z-z'}{c}) dz'\right], \quad (8)$$

где $k_p(t) = n_3(t)(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p - \sigma_{35}^p) - n_2(t)(\sigma_{24}^p - \sigma_{13}^p) - n\sigma_{13}^p$; I_p^0 — величина потока фотонов накачки при $z = 0$.

Пренебрегая изменением $k_p(t)$ в течение времени прохода расстояния z фотоном накачки, (8) можно записать в виде:

$$I_p(z, t) = I_p^0 \exp[zk_p(t)] = I_p^0 \exp[z(c_9 \exp(c_3 t) + c_{10})], \quad (9)$$

где $c_9 = c_7(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p - \sigma_{35}^p) - c_5(\sigma_{24}^p - \sigma_{13}^p)$, $c_{10} = c_8(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p - \sigma_{35}^p) - c_6(\sigma_{24}^p - \sigma_{13}^p) - n\sigma_{13}^p$.

Зная функциональные зависимости $n_2(t)$, $n_3(t)$ и $I_p(z, t)$, по (1) легко определить F как функцию z и t :

$$F(z, t) = \frac{n_3'(t) + n_3(t)[p_{31} + p_{32} + I_p(z, t)(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p)] + I_p(z, t)\sigma_{13}^p(n_2(t) - n)}{\sigma_{13}^p(n - n_2(t)) - n_3(t)(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p)}, \quad (10)$$

где $n_3'(t)$ — производная функции $n_3(t)$ по времени.

Выделяя зависимость F от z и t явно, (10) можно переписать в виде:

$$F(z, t) = \frac{c_{13} + c_{14} \exp(c_3 t) + I_p^0(c_{15} \exp(c_3 t) + c_{16}) \exp[z(c_9 \exp(c_3 t) + c_{10})]}{c_{11} - c_{12} \exp(c_3 t)}, \quad (11)$$

где $c_{11} = \sigma_{13}^p(n - c_6) - c_8(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p)$, $c_{12} = c_5\sigma_{13}^p + c_7(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p)$, $c_{13} = c_8(p_{31} + p_{32})$, $c_{14} = c_7(c_3 + p_{31} + p_{32})$, $c_{15} = c_7(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p) + c_5\sigma_{13}^p$, $c_{16} = c_8(\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p) + (c_6 - n)\sigma_{13}^p$.

Предполагая, что

$$\langle I_a^+(z, x, t) + I_a^-(z, x, t) \rangle_x = F(z, t), \quad (12)$$

и пренебрегая изменением потоков за время прохождения ими активной области, для потоков I_a^+ и I_a^- , приближенно равных потокам I^+ и I^- соответственно, получим:

$$I_a^+(z, x) = \frac{k_r L F(z)}{(\exp(k_r L) - 1)(r_2 \exp(k_r L) + 1)} \exp(k_r x), \quad (13)$$

$$I_a(z, x) = \frac{k_r L F(z)}{(\exp(k_r L) - 1)(r_2 \exp(k_r L) + 1)} r_2 \exp(k_r |2L - x|). \quad (14)$$

Тогда эффективность генерации лазера в рамках данного приближения можно определить по формуле:

$$\eta = \frac{\lambda_p}{\lambda_s} \frac{\Theta}{I_p^0 t_p} \int_0^{t_k} \int_0^{z_k(t)} F(z, t) dz dt, \quad (15)$$

где $\Theta = \frac{k_r \exp(k_r L)(r_2(1-r_1)\exp(k_r L) + 1 - r_2)}{(\exp(k_r L) - 1)(r_2 \exp(k_r L) + 1)}$, а $z_k(t)$ — максимальное значение координаты z , при котором в момент t существует генерация:

$$z_k(t) = \frac{1}{c_9 \exp(c_3 t) + c_{10}} \ln \left[-\frac{c_{14} \exp(c_3 t) + c_{13}}{I_p^0 (c_{15} \exp(c_3 t) + c_{16})} \right]; \quad (16)$$

где t_k — продолжительность времени существования генерации:

$$t_k = \min \left\{ t_p, \frac{1}{c_3} \ln \left[-\frac{c_{13} + c_{16} I_p^0}{c_{14} + c_{15} I_p^0} \right] \right\}, \quad (17)$$

где t_p — длительность накачки.

Интегрирование (11) по z от нуля до z_k дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{z_k(t)} F(z, t) dz = \\ & = \frac{1}{c_{11} - c_{12} \exp(c_3 t)} \left[(c_{13} + c_{14} \exp(c_3 t)) \left(z_k(t) - \frac{1}{c_9 + c_{10} \exp(c_3 t)} \right) + \frac{I_p^0 (c_{15} \exp(c_3 t) + c_{16})}{c_9 + c_{10} \exp(c_3 t)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Дальнейшее интегрирование (18) в общем случае затруднительно, однако при относительно небольших потерях и высоких концентрациях для $z_k(t)$ и η соответственно имеем:

$$z_k(t) = \frac{c_3}{c_{10}} \left[t + \frac{1}{c_3} \ln \left(-\frac{c_{14}}{I_p^0 c_{16}} \right) \right], \quad (19)$$

$$\eta = \frac{\lambda_p}{\lambda_s} \frac{\Theta}{I_p^0 t_p} \left[c_{17} (1 - \exp(-c_3 t_k)) - c_{18} (1 - \exp(-2c_3 t_k)) - c_{19} t_k^2 - c_{20} t_k \right], \quad (20)$$

$$\text{где } c_{17} = \frac{c_{14}}{c_3 c_{10} c_{12}}, \quad c_{18} = \frac{I_p^0 c_{16}}{2c_3 c_{10} c_{12}}, \quad c_{19} = \frac{c_3 c_{14}}{c_{10} c_{12}}, \quad c_{20} = \frac{c_{14}}{c_{10} c_{12}} \ln \left(-\frac{c_{14}}{I_p^0 c_{16}} \right).$$

Из (19) и (20) видно, что значения z_k и η уменьшаются с течением времени.

В случае, когда влиянием триплетных уровней можно пренебречь, для оценки кпд аналогично получим:

$$\eta_0 = \frac{\lambda_p}{\lambda_s} \frac{\Theta}{I_p^0} \left[\frac{I_p^0 (1 + n_3^0 \sigma_{35}^p / k_0^p) (1 - \exp(k_0^p z_k) - n_3^0 p_{31} z_k)}{k_r + n_3^0 \sigma_{35}^p} \right], \quad (21)$$

где $n_3^0 = (n \sigma_{13}^p + k_r) / (\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p - \sigma_{35}^p)$; $k_0^p = n_3^0 (\sigma_{31}^p + \sigma_{13}^p - \sigma_{35}^p) - n \sigma_{13}^p$;

$$z_k = \frac{1}{k_0^p} \ln \left[-\frac{n_3^0 p_{31}}{I_p^0 (k_0^p + n_3^0 \sigma_{35}^p)} \right].$$

Из изложенного очевидно, что (15), (20) и (21) дают значение кпд генерации только после установления квазистационарного режима. Полный же кпд можно представить в виде:

$$\eta_c = \frac{\eta_{sp} T_{sp} + \eta T}{T_{sp} + T}, \quad (22)$$

где η и T — эффективность и продолжительность стационарной и нестационарной (индекс sp) генерации соответственно.

Как видно из (19), в общем случае при $\eta_{sp} \neq \eta$ полученные выражения позволяют оценивать общий КПД тем точнее, чем строже выполняется условие $T \gg T_{sp}$. Поскольку типичная длительность установления квазистационарного режима генерации в условиях небольших потерь и интенсивного возбуждения составляет 0,1–3 нс, то для реальных систем достаточно $T > 15$ –30 нс. Отметим, что все приведенные выше выражения были получены без использования приближения Питерсона [8] и поэтому имеют более широкую область применения.

Результаты расчетов эффективности преобразования энергии накачки в энергию генерации для раствора ПОПОП в диоксане при полном отсутствии наведенного поглощения на частоте накачки и при наличии S - S , T - T и обоих видов поглощения при различных значениях концентрации раствора и интенсивности накачки графически представлены на рис. 2 и 3. На рисунках показаны значения варьируемых параметров. Значения остальных параметров были равны: $L=0,5$ см; $r_1=r_2=0,9$; $I_p=10,0$; $n=1,0$; $\lambda_g=420$ нм. В случае учета влияния триплетов (см. рис. 2) КПД генерации рассчитывался по (18) при достаточно типичном значении $n_2^0=0,01n$ и длительности накачки $t_p=10$ нс. Длина волны генерации во всех случаях была равна $\lambda_g=420$ нм.

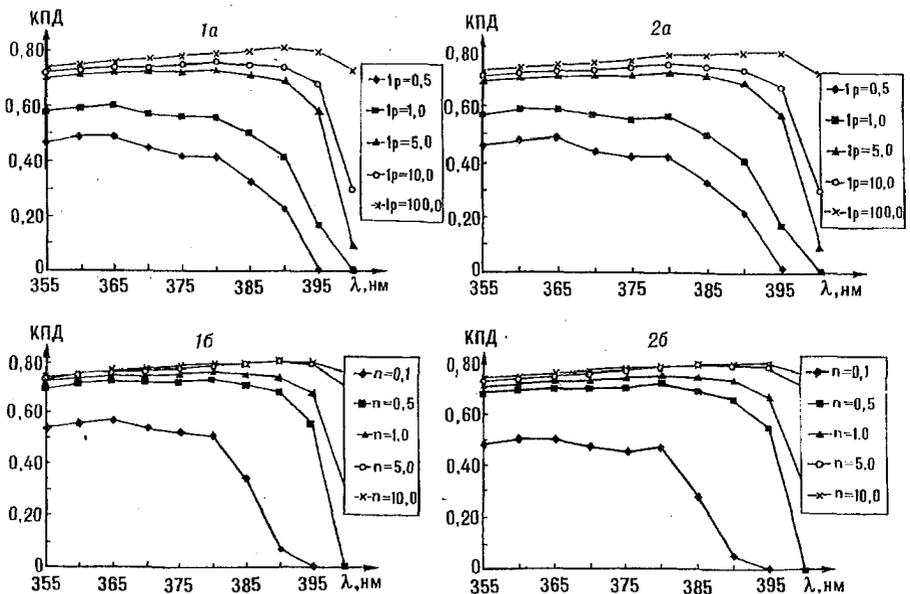


Рис. 2. Зависимость КПД квазистационарной генерации от длины волны излучения накачки в отсутствие наведенного поглощения на частоте накачки (1а,б) и при его наличии (2а,б) при различных значениях плотности мощности накачки, МВт/см² (1а,2а) и концентрациях раствора, 10¹⁷см⁻³ (1б,2б).

Анализ полученных зависимостей показывает, что даже в условиях квазистационарной генерации ее максимальный КПД в большинстве случаев достигается при накачке не в максимуме полосы поглощения, а в более длинноволновой области, причем характер кривых не зависит от наличия наведенного в системе возбужденных состояний поглощения, особенно при довольно большой интенсивности накачки, концентрации раствора и высокочастотных резонаторах. Напротив, при $I_p < 1$ МВт/см², $n < 10^{16}$ см⁻³ или в низкочастотных резонаторах зависимость $\eta(\lambda_p)$ слегка напоминает контур полосы поглощения. В данном приближении наблюдаемая зависимость объясняется, в первую очередь, стоксовыми потерями и эффективностью поглощения излучения на частоте накачки молекулами в основном состоянии. Влияние же наведенного поглощения с уровня S_1 приводит к уменьшению КПД только на несколько процентов. (Исключение составляет случай малых

концентраций, когда относительная населенность уровня S_1 достаточно высока.) Напротив, снижение кпд, вызываемое поглощением из триплетных состояний, составляет десятки процентов. Кроме того, в этом случае кпд генерации повышается с увеличением концентрации раствора только в области невысоких концентраций. В остальной области с ростом концентрации раствора кпд уменьшается, что указывает на существование оптимальной концентрации раствора в лазерах на средах, для которых $p_{32} \gg p_{21}$.

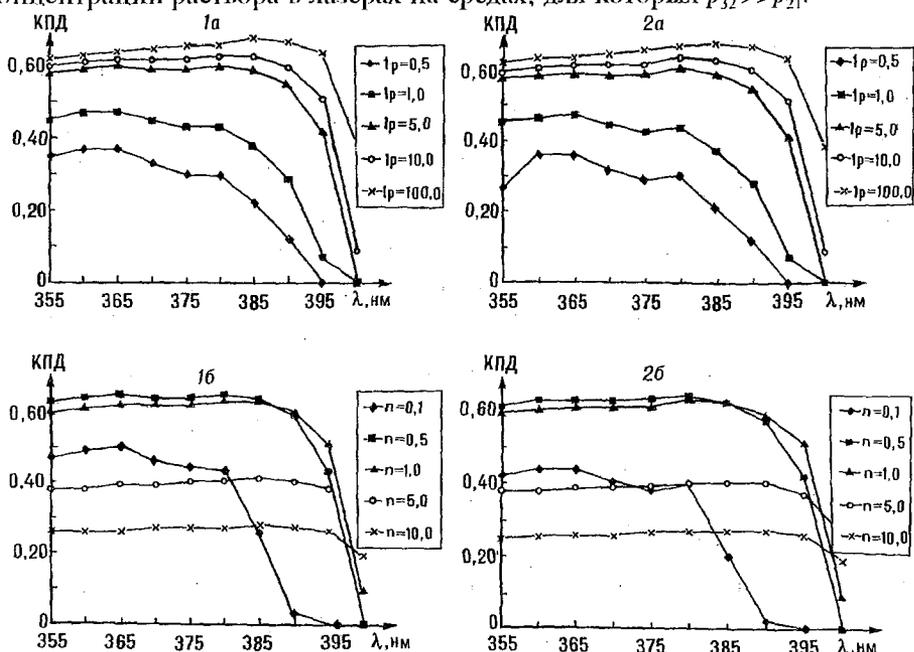


Рис. 3. Зависимость кпд квазистационарной генерации от длины волны излучения накачки при наличии $T-T$ поглощения (1а,б), $T-T$ и $S-S$ поглощения (2а,б) при различных значениях плотности мощности накачки в $\text{МВт}/\text{см}^2$ (1а,2а) и концентрациях раствора в 10^{17}см^{-3} (1б,2б). Длительность накачки $t_n = 10 \text{нс}$.

Как указывалось ранее, суммарный по всей длительности накачки кпд определяется по (22). В свою очередь, анализ показывает, что в условиях импульсной накачки значительную роль играет процесс наведенного поглощения с первого возбужденного синглетного уровня [12,13], что, очевидно, приводит к дополнительному уменьшению эффективности возбуждения в области максимума полосы поглощения по сравнению с накачкой в более длинноволновой области в лазерах на ПОПОП.

Таким образом, анализ зависимости кпд генерации от длины волны накачки в квазистационарном режиме показал, что ее поведение при достаточно высоких интенсивностях накачки, концентрациях растворов и добротностях резонаторов носит универсальный характер, ее поведение практически не зависит от формы спектров $S-S$ и $T-T$ поглощения излучения накачки.

1. Грузинский В.В., Кухто А.В., Хон Бен И // ЖПС. 1993. Т.58. Вып.1-2 С.162.
2. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №1.
3. Marowsky C., Schomburg H. // J. of Photochem. 1980. V.14. P.1.
4. Лазеры на красителях / Под. ред. Ф.Шефера. М., 1976.
5. Левшин Л.В., Салецкий А.М. Лазеры на основе сложных органических соединений. М., 1992.
6. Richard A. Keller // IEEE J.Quantum Electr. 1970. V.QE6. P.411.
7. Самсон Ф.М. Методы расчета ОКГ на органических красителях. Мн., 1970.
8. Степанов Б.И. Методы расчета оптических квантовых генераторов на органических красителях при монокромоатическом возбуждении. Мн., 1968. Ч.1.
9. Peterson N.C., Kurylo M.J., Braun W. et al // J.Opt.Soc.Am. 1971. V.61. P.746.
10. Flamant P. // Opt. Commun. 1978. V.25. P.247.
11. Ganiel U., Hardy A., Neumann G., Treves // IEEE J.Quantum E. 1975. V.QE11. P.881.
12. Иццоки И.Я., Серегин С.Л., Чередниченко О.Б. // ЖПС. 1983. Т.39. Вып.3. С.390.
13. Wieder I. // Appl. Phys. Lett. 1972. V.21. P.318.

Поступила в редакцию 15.09.97.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦВЕТОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖК ЭКРАНОВ

Computer modeling of the process of color formation in the LCD has been developed. On the basis of developed model the optical designing of RGB matrices of LCD has been performed. The optimum design of LCD and RGB of filters has been determined.

Совершенствование жидкокристаллических (ЖК) материалов позволило создавать экраны больших размеров, которые в последнее время нашли широкое применение в переносных компьютерах, телевизионных приемниках и проекционном телевидении. Полноцветные широкоформатные ЖК экраны требуют дополнительного усовершенствования технологии их изготовления. Сложность современных полноцветных ЖК экранов (активная матрица цветных фильтров, состоящая из сотен тысяч пикселей) отрицает потребление малой мощности, свойственное начальной технологии ЖК экранов. Яркая подсветка, требуемая для освещения и эксплуатации активной матрицы, уменьшает сроки эксплуатации источников питания в переносных устройствах с ЖК экранами.

Современные ЖК экраны с хорошими технико-экономическими показателями должны иметь RGB фильтры с высоким коэффициентом пропускания, высокой чистотой (насыщенностью) цвета, хорошей воспроизводимостью, должны быть стойкими к высоким температурам в процессе изготовления экрана, обладать высокой цветостабильностью в процессе эксплуатации, хорошей воспроизводимостью.

Высокие требования, предъявляемые к качеству цветопередающих систем, делают необходимым оптимизацию технологического процесса их изготовления. На практике оптимизация технологического процесса влечет большие материальные затраты. Поэтому для проектирования эффективных цветопередающих систем важно прогнозирование их оптимальных характеристик на модельных прототипах этих систем [1].

Авторами данной статьи было проведено компьютерное моделирование процесса формирования цвета в структурных элементах ЖК экрана. На основании разработанной модели осуществлено оптическое проектирование RGB матриц ЖК экрана, исследовано влияние параметров функциональных слоев и конструктивных особенностей ЖК экрана на его цветовые характеристики. Рассчитаны пределы Мак-Адама для источника подсветки ЖК экрана, определены оптимальные R, G и B фильтры для NTSC и ES стандартов.

Моделирование процесса получения цветных абсорбционных фильтров

Окраска прозрачных слоев характеризуется спектральным коэффициентом поглощения, который определяется по следующей формуле

$$k_{\lambda} = -\ln T_i / Cl, \quad (1)$$

вытекающей из закона Бера, где T_i — внутренний коэффициент пропускания несветорассеивающего слоя, l — геометрическая толщина слоя, C — концентрация красителя или пигмента. Для растворов красящих веществ, подчиняющихся закону Бера, величина k_{λ} не зависит от толщины слоя и концентрации красящего вещества, а зависит от длины волны падающего излучения и свойств красящего вещества. Коэффициент поглощения красящего вещества, состоящего из нескольких компонент, является суммой коэффициентов всех составляющих.

Уравнение (1) использовалось для компьютерного моделирования процесса окрашивания рельефов фоторезиста. Коэффициент поглощения красителей и коэффициент поглощения фоторезиста определялись по формуле (1) и экспериментальным спектрофотометрическим данным.

Была создана база данных коэффициентов поглощения цветных материалов (красители, пигменты), которая использовалась для подбора материалов, необходимых для получения цветных фильтров (ЦФ) основных R, G, B цветов.

Для численного проектирования фильтров с заданными координатами цветности были разработаны пакеты программ для ПЭВМ. Концентрации цветных материалов фильтра и толщина фильтра с заданными координатами цветности определялись путем минимизации целевой функции

$$F(\bar{C}, t) = \left[(x(\bar{C}, t) - x_s)^2 + (y(\bar{C}, t) - y_s)^2 \right]^{1/2} / 2 + H(\bar{C}, t), \quad (2)$$

где x_s и y_s — заданные координаты цветности; $x(\bar{C}, t)$ и $y(\bar{C}, t)$ — расчетные координаты цветности, $\bar{C} = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор с координатами концентраций красящих веществ; $H(\bar{C}, t)$ — функция штрафов, учитывающая технологические ограничения на концентрации красящих веществ и толщину фильтра.

Координаты цветности фильтра определялись следующими выражениями [2]:

$$x = X / (X + Y + Z), \quad y = Y / (X + Y + Z), \quad (3)$$

где X, Y, Z — координаты цвета фильтра, которые рассчитывались с использованием метода взвешенных ординат по формулам:

$$X = K \sum_{\lambda=380}^{780} \varphi(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda, \quad Y = K \sum_{\lambda=380}^{780} \varphi(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda, \quad Z = K \sum_{\lambda=380}^{780} \varphi(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta\lambda, \quad (4)$$

где $K = 100 / \left(\sum_{\lambda=380}^{780} S(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda \right)$, $\varphi(\lambda) = S(\lambda)T(\lambda)$, $S(\lambda)$ — относительное спектральное распределение энергии излучения подсветки; λ и $\Delta\lambda$ — длина волны и интервал длин волн; $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ — удельные координаты цвета в колориметрической системе МКО 1931 г., $T(\lambda)$ — спектральный коэффициент пропускания фильтра. В программе $\Delta\lambda = 5$ нм, что обеспечивало достаточную точность расчетов. Если спектр $\bar{\varphi}(\lambda)$ сильно меняется по длинам волн, то величина интервала длин волн $\Delta\lambda$ должна быть уменьшена.

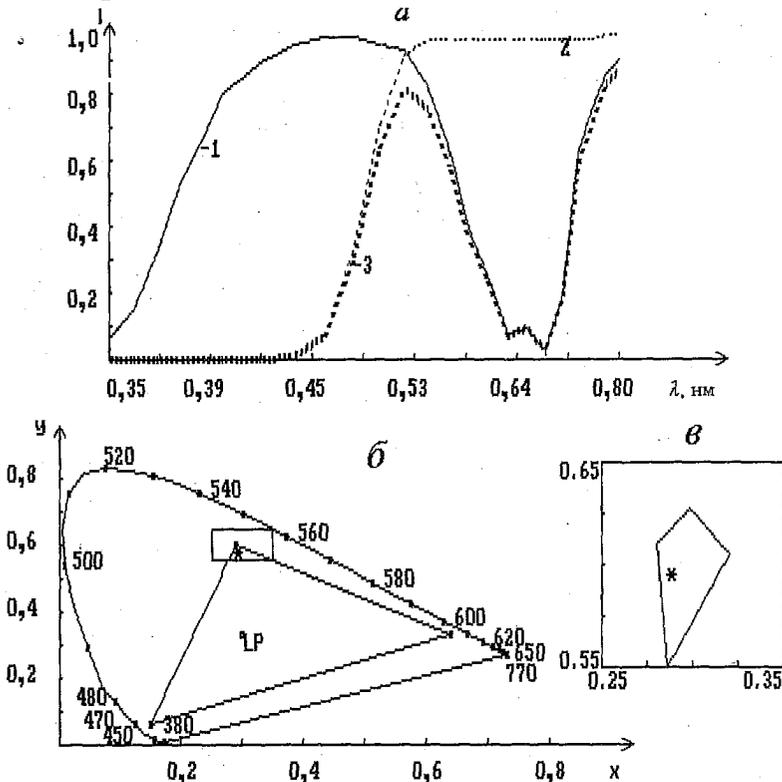


Рис. 1. Спектральные характеристики выбранных красителей и их смеси в фоторезисте (а): 1 — активный ярко-голубой 53Ш; 2 — кислотный желтый светопрочный; 3 — смесь красителей в соотношении 1,0:2,1 в фоторезисте (толщина 1,50 мм) и координаты цветности ($x = 0,286$, $y = 0,600$) полученной смеси на диаграмме цветностей МКО 1931 г. с треугольником основных цветов ЕС (б); область допуска ЕС для зеленого цвета (в)

Минимизация целевой функции проводилась с использованием метода нелинейной минимизации Нелдера-Мида [3].

На рис. 1 приведены примеры численного моделирования фильтра зеленого цвета. Для получения фильтра зеленого цвета выбраны красители: активный ярко-голубой 53Ш и кислотный желтый светопрочный. Спектральные характеристики выбранных красителей и спектральная характеристика их смеси в фоторезисте показаны на рис. 1а. Координаты цветности полученной смеси удовлетворяют ЕС стандарту для телевизионных приемников (рис. 1б).

Разработанные пакеты программ позволяют решать также обратную задачу, т.е. определять концентрации красящих веществ в окрашиваемом рельефе с целью дальнейшей коррекции процесса окрашивания.

Компьютерное моделирование позволяет проводить прогноз возможных вариантов получения из заданного набора красящих веществ фильтров основных цветов с требуемыми цветовыми и спектральными характеристиками, проводить быструю и эффективную замену красящих веществ при изменении технических требований к фильтрам.

Оптимальные RGB фильтры

Для хорошей цветопередачи телевизионного приемника (ТП) цветовой треугольник основных RGB цветов должен охватывать наибольшую гамму цветов. В то же время ТП должен обеспечивать получение высокой яркости изображения при сравнительно небольшой затрате мощности на получение основных цветов. С расширением треугольника RGB при данной мощности излучения ТП становится труднее получить достаточную яркость изображения, так как основные его цвета приближаются к цветам спектрального локуса, становятся более насыщенными, а спектр их излучения становится менее широким. Повысить яркость в этом случае можно только увеличением мощности излучения подсветки ЖК экрана.

Согласно Д.Мак-Адаму, максимально достижимую насыщенность цвета для данного спектрального интервала и соответствующее ему значение максимальной светлоты β_{max} ($\beta_{max} = Y/Y_0$, где Y и Y_0 — координаты цвета световых потоков, прошедшего через фильтр и падающего на его) создают оптимальные фильтры, т.е. фильтры, спектральные коэффициенты пропускания которых имеют нулевые значения в некоторых участках спектра и равняются единице в остальных при наличии не более двух переходов от нуля к единице. Спектры пропускания оптимальных R, G, B фильтров для стандартов NTSC и ЕС при освещении источником подсветки ЖК экрана представлены на рис. 2. Реальные фильтры создают меньшую насыщенность цвета и меньшую светлоту (соответственно, яркость), чем оптимальные. На рис. 3 представлены диаграмма цветности x, y МКО 1931 г. с треугольником цветностей ЕС, цветностями основных цветов R, G, B и контурами постоянных значений β_{max} (пределы Мак-Адама) при освещении стандартным излучением D65 (источник дневного света) и источником подсветки ЖК экрана. Из анализа рисунков следует, что реальные G и B фильтры имеют наибольшее отличие яркостей от оптимальных фильтров, так как реальные синие и зеленые красители при большой яркости имеют малую насыщенность цвета.

RGB фильтры в структуре ЖК экрана

ЖК экран для оптического проектирования представляет собой тонко-слоистую систему, включающую проводящий слой индий-олова оксида (ИТО), ориентирующий слой полиимидной кислоты (ПАК), жидкий кристалл и абсорбционные цветные фильтры (ЦФ). Следовательно, на процесс формирования цвета RGB фильтрами в ЖК экране оказывают влияние многократные отражения от всех слоев, входящих в его структуру. С целью исследования влияния интерференционных явлений в тонких слоях структурных элементов ЖК экрана на его спектральные и цветовые характеристики проведено компьютерное моделирование процесса формирования цвета в

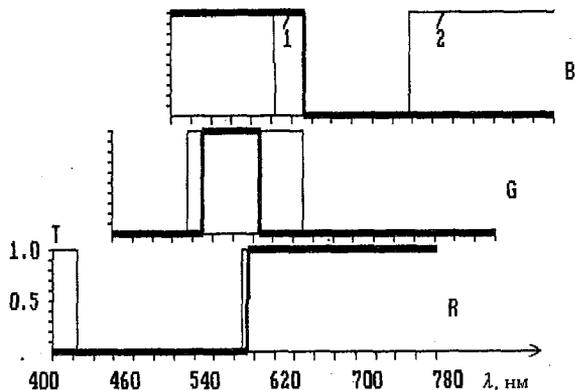


Рис.2. Зависимость коэффициента пропускания от длины волны оптимальных R (а), G (б), В (в) фильтров для 1 - NTSC и 2 - ЕС стандартов при освещении источником подсветки ЖК экрана

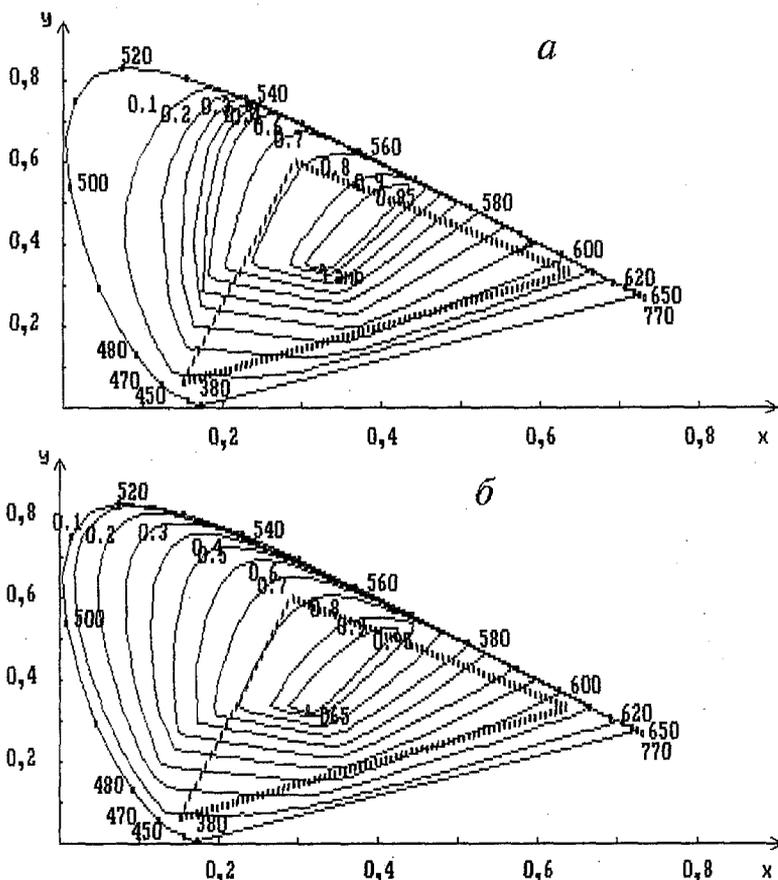


Рис.3. Диаграмма цветности x, y МКО 1931 г. с треугольником цветностей ЕС, координатами цветности x, y реальных основных цветов соответственно на рис. а и б:
 $R(x=0,62$ (а), $0,63$ (б); $y=0,63$ (а), $0,35$ (б); $\beta_{max}=0,199$ (а), $0,205$ (б)); $G(x=0,30$ (а), $0,23$ (б); $y=0,63$ (а), $0,59$ (б); $\beta_{max}=0,138$ (а), $0,502$ (б)); $B(x=0,18$ (а), $0,16$ (б); $y=0,17$ (а), $0,15$ (б); $\beta_{max}=0,138$ (а), $0,178$ (б)) и контурами постоянных значений β_{max} при освещении (а) источником подсветки ЖК экрана, (б) стандартным источником D65 МКО

структурных элементах ЖК экрана [5,6]. Параметр цветовых различий двух спектральных характеристик ΔE_{ab}^* определяется следующими выражениями [2]:

$$\Delta E_{ab}^* = |(\Delta L^*)^2 + (\Delta a^*)^2 + (\Delta b^*)^2|^{1/2};$$

$$L^* = 116(Y/Y_0)^{1/3} - 16 \quad (1 \leq Y \leq 100),$$

$$a^* = 500[(X/X_0)^{1/3} - (Y/Y_0)^{1/3}],$$

$$b^* = 200[(Y/Y_0)^{1/3} - (Z/Z_0)^{1/3}].$$

Практически неотличимыми считаются два цвета, если их параметр цветовых различий $\Delta E_{ab} \leq 3$. Программа использует заданные экспериментальные зависимости коэффициентов поглощения от длины волны для ИТО и ПАКа, для абсорбционных фильтров эти зависимости моделируются в программе моделирования абсорбционных фильтров.

Были исследованы влияния изменения толщины конструктивных элементов RGB матрицы на ее цветовые характеристики. Исследования показывают, что изменение толщины любого из конструктивных слоев RGB фильтров может приводить к существенным цветовым различиям. Так, для зеленого фильтра, конструкция которого следующая: G фильтр формируется на стеклянной подложке, при этом абсорбционный фильтр наносится на защитный слой ПАКа и проводящий слой ИТО, покрытый двумя слоями ПАКа. Геометрическая толщина слоев следующая: ИТО — $t=0,067$ мкм, абсорбционного фильтра — $1,5$ мкм, слоя ПАКа — $0,067$ мкм; параметр цветовых различий следующий: при изменении толщины абсорбционного фильтра на $0,1$ мкм параметр $\Delta E_{ab}=3,65$; при изменении толщины слоя ИТО на $t=0,1$ мкм $\Delta E_{ab}=6,22$, при изменении толщины слоя ПАКа на $0,02$ мкм $\Delta E_{ab}=2,94$.

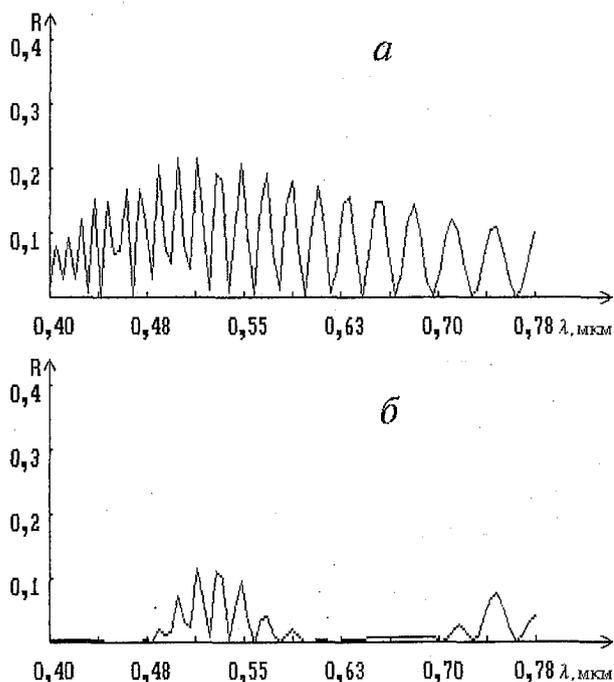


Рис.4. Спектральная зависимость коэффициента отражения внешнего излучения от ЖК экрана для G фильтра. Конструкция ЖК экрана:

(а) — стекло-ИТО-ПАК-ЖК-ПАК-ЦФ-ИТО-стекло-подсветка, (б) — стекло-ЦФ-ИТО-ПАК-ЖК-ПАК-ИТО-стекло-подсветка. Геометрические толщины слоев равны: ЦФ — $t=1,5$ мкм, ИТО — $t=0,067$ мкм, ПАК — $t=0,03$ мкм, ЖК — $t=8$ мкм

Последовательность расположения структурных элементов в ЖК экране влияет на спектральное отражение падающего на экран внешнего излучения. При расположении R, G, B фильтров на передней подложке ЖК экрана конструкция матрицы следующая: стекло-ЦФ-ИТО-ПАК-ЖК-ПАК-ИТО-стекло-подсветка; отражение внешней радиации от передней плоскости экрана селективно из-за поглощения части падающего излучения абсорбционными R, G, B фильтрами, т.е. R фильтр отражает падающее на его внешнее излучение только в красной области спектра, G фильтр — в зеленой, B фильтр — в синей области спектра. При расположении R, G, B фильтров на задней подложке конструкция матрицы: стекло-ИТО-ПАК-ЖК-ПАК-ЦФ-ИТО-стекло-подсветка, отражение падающего на экран внешнего излучения равномерно по спектру. Результаты расчета коэффициента отражения падающего на экран внешнего излучения для G фильтра пред-

ставлены на рис.4. Из анализа результатов, представленных на рисунке, следует, что конструкция ЖК экрана с расположением RGB фильтров перед ИТО и ЖК будет иметь более высокий контраст изображения. Эти свойства абсорбционных фильтров были использованы для улучшения контраста фосфорного экрана [5].

Таким образом, разработанный комплекс программ позволяет численно оптимизировать реальный процесс получения RGB матрицы, прогнозировать цветовые характеристики ЖК экрана.

1. Lagier J., Bergean D., den Boer W. et al. // SID' 94 Digest. 1994. P.197.
2. Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике. М., 1978.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.
4. Кухарчик Л.В., Сагайдак Д.И., Тимофеева Г.И. // SID Proceedings of the 5-th International Symposium on Information Displays. Мн., 1996. С.66.
5. Ohno K., Nakagawa H., Kusunoki T. // Digest tech. papers. SID 94 Digest. 1994. P.584.

Поступила в редакцию 05.03.98.

УДК 539.292

С.В.СУХВАЛО, В.В.ВЛАСОВ, В.Г.РУДЬ

ГЛОБАЛЬНАЯ И ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНЫХ ФАЗ В МАГНЕТИКАХ КУБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ

A mathematical analysis of global and local stability of the spin-orientational structure in magnetics of cubic symmetry is conducted. With consideration of energy crystallographic magnetic anisotropy five anisotropy constants. The results received have enabled one to establish a set of possible phases, their stability type and scheme of possible phase conversions.

Для выявления всех сторон фазовых спин-ориентационных изменений в магнитных материалах необходимо дальнейшее уточнение гамильтониана энергии магнитной анизотропии путем учета членов полиномиального разложения высокой степени и констант анизотропии не ниже пятой.

В качестве первого приближения такого рассмотрения можно использовать запись полного потенциала однородно намагниченного ферромагнетика кубической симметрии ($F_{06}=0$) в нулевом магнитном поле при отсутствии внешних напряжений [1]:

$$F_0 = K_1(\alpha_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2\alpha_z^2 + \alpha_y^2\alpha_z^2) + K_2\alpha_x^2\alpha_y^2\alpha_z^2 + K_3(\alpha_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2\alpha_z^2 + \alpha_y^2\alpha_z^2)^2 + K_4(\alpha_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2\alpha_z^2 + \alpha_y^2\alpha_z^2)\alpha_x^2\alpha_y^2\alpha_z^2 + K_5\alpha_x^4\alpha_y^4 + \dots,$$

где K_i ($i=1,2,\dots$) — константы магнитной анизотропии с учетом влияния упругой и магнитоупругой составляющих [2], α_i ($i=x,y,z$) — направляющие косинусы вектора спонтанной намагниченности (компоненты параметра порядка).

Учитывая условие нормировки ($\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$), введем новые обобщенные координаты:

$$x^2 = \alpha_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2\alpha_z^2 + \alpha_y^2\alpha_z^2, \quad y^2 = \alpha_x^2\alpha_y^2\alpha_z^2.$$

Согласно [3], x^2 и y^2 являются инвариантами второй и третьей степени энергии магнитной анизотропии ферромагнетика с кубической симметрией, которую можно записать в виде степенного ряда по этим инвариантам:

$$F_{\text{анн}} = K_1 x^2 + K_2 y^2 + K_3 x^4 + K_4 x^2 y^2 + K_5 y^4 + \dots \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой инвариантный полином с коэффициентами в виде констант кристаллографической анизотропии, необходимый для дальнейшего анализа фазовой равновесности и устойчивости. Важные аспекты устойчивости спиновой конфигурации магнитных систем с кубической симметрией выявляются при минимизации инвариантного полинома как по параметру порядка, так и по инвариантам кубической симметрии [4,5].

Минимизация полинома энергии системы по компонентам параметра порядка дает набор решений, характеризующих отдельные составляющие конфигурации магнитной системы в целом, т.е. позволяет оценить устойчивость спин-ориентационного состояния на локальном уровне.

Минимизация энергии магнитной анизотропии по инвариантам соответствует рассмотрению устойчивости на уровне спиновой конфигурации магнитной системы в целом, поскольку ей должна соответствовать группа симметрии, инвариантная группе симметрии парамагнитной фазы. Такой уровень устойчивости можно классифицировать как глобальный.

В обоих случаях, поскольку при анализе устойчивости магнитной системы существует необходимость рассмотрения второй производной по минимизирующим параметрам, требуется учет не менее пяти членов полиномиального разложения.

При минимизации инвариантного полинома, как показали расчеты, характеристическое уравнение матрицы устойчивости всегда имеет действительные решения, так как $(K_3 - K_5)^2 + K_4^2 > 0$. Границы областей устойчивости в фазовом пространстве управляющих параметров задаются поверхностями $4K_3K_5 - K_4^2 = 0$ и $K_3 + K_5 = 0$. Диаграмма фазового состояния на глобальном уровне приведена на рисунке:

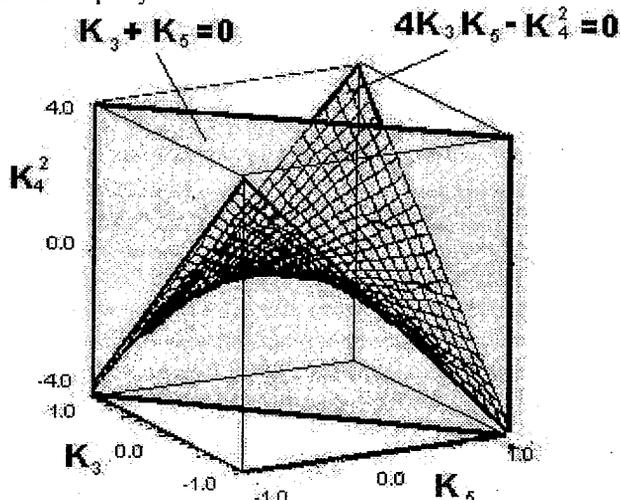


Диаграмма глобальной устойчивости спиновой конфигурации магнитной системы

Можно выделить ряд областей, характеризующихся определенным типом устойчивости спиновой конфигурации на глобальном уровне:

1) Для области $4K_3K_5 - K_4^2 > 0$, $K_3 + K_5 < 0$ оба корня характеристического уравнения матрицы устойчивости $\lambda_{12} = K_3 + K_5 \mp \sqrt{(K_3 - K_5)^2 + K_4^2}$ отрицательны, потенциальная функция имеет изолированный максимум, что соответствует неустойчивому состоянию магнитной системы.

2) Для $4K_3K_5 - K_4^2 < 0$, $K_3 + K_5 < 0$ и $4K_3K_5 - K_4^2 < 0$, $K_3 + K_5 > 0$ корни имеют разные знаки, следовательно, потенциальная функция имеет седловую точку.

3) Для $4K_3K_5 - K_4^2 > 0$, $K_3 + K_5 > 0$ оба корня положительны и потенциальная функция имеет изолированный минимум, что соответствует устойчивости глобального состояния.

Минимизация энергии магнитной системы по компонентам параметра порядка равносильна минимизации по переменным x и y . Система уравнений для нахождения равновесных решений при этом запишется так:

$$\begin{cases} dF_a / dx = 2x(K_1 + 2K_3x^2 + K_4y^2) = 0, \\ dF_a / dy = 2y(K_2 + 2K_5y^2 + K_4x^2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Матрица локальной устойчивости имеет вид:

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} K_1 + 6K_3x^2 + K_4y^2 & 2K_4xy \\ 2K_4xy & K_2 + 6K_5y^2 + K_4x^2 \end{pmatrix}$$

Система (2) может иметь девять решений типа $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$, (x,y) .

$$1. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

Потенциальная функция имеет изолированный минимум, если $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$.

$$2,3. \begin{matrix} K_1 + 2K_3 x^2 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} -2K_1 & 0 \\ 0 & K_2 + K_4 x^2 \end{bmatrix}$$

Потенциал имеет изолированный минимум, если $K_1 < 0$ и $(2K_3K_2 - K_4K_1)/2K_3 > 0$. Равновесная фаза $x_p^2 = -K_1/2K_3$, $y_p = 0$ устойчива, если $K_1 < 0$, $K_3 > 0$ и $2K_3K_2 - K_4K_1 > 0$. Если $K_3 < 0$, то равновесной фазы $(x_p, 0)$ нет ($K_1 < 0$) либо она неустойчива ($K_1 > 0$). При этом может существовать неравновесная устойчивая фаза $(x_H, 0)$, если $K_2 + K_4x^2 > 0$ и $K_1 < 0$.

$$4,5. \begin{matrix} x = 0 \\ K_2 + 2K_5 y^2 = 0 \end{matrix} \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} K_1 + K_4 y^2 & 0 \\ 0 & -2K_2 \end{bmatrix}$$

Потенциальная функция имеет изолированный минимум, если $K_2 < 0$ и $(2K_5K_1 - K_4K_2)/2K_5 > 0$. Равновесная фаза $y_p^2 = -K_2/2K_5$, $x_p = 0$ устойчива, если $K_2 < 0$, $K_5 > 0$ и $2K_5K_1 - K_4K_2 > 0$. Если $K_5 < 0$, то равновесной фазы $(0, y_p)$ не наблюдается ($K_2 < 0$) либо она неустойчива ($K_2 > 0$). При этом может существовать неравновесная устойчивая фаза $(0, y_H)$, если $K_1 + K_4y^2 > 0$ и $K_2 < 0$.

6-9. Решения типа (x, y) определяются системой уравнений

$$\begin{cases} K_1 + 2K_3x^2 + K_4y^2 = 0, \\ K_2 + 2K_5y^2 + K_4x^2 = 0 \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} K_1 + 2K_3x^2 + K_4y^2 = 0, \\ K_2 + 2K_5y^2 + K_4x^2 = 0 \end{cases} \quad (3b)$$

и матрицей устойчивости

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} 4K_3x^2 & 2K_4xy \\ 2K_4xy & 4K_5y^2 \end{bmatrix}$$

Множество подобных решений существует, если квадратные уравнения системы (3) соответствуют взаимно пересекающимся вещественным кривым второго порядка (эллипсам и/или гиперболам).

Уравнения (3) описывают гиперболу в случае выполнения условий $K_3K_4 < 0$ и $K_5K_4 < 0$ или действительный эллипс, если $K_3K_4 > 0$, $K_1/(2K_3 + K_4) < 0$ для (3a), $K_5K_4 > 0$, $K_2/(2K_5 + K_4) < 0$ для (3b).

Условие взаимного пересечения равносильно существованию общих корней уравнений системы, что дает следующие возможные решения:

$$\begin{aligned} x_p^2 &= (2K_5K_1 - K_4K_2)/(K_4^2 - 4K_3K_5), \\ y_p^2 &= (2K_3K_2 - K_4K_1)/(K_4^2 - 4K_3K_5), \end{aligned}$$

которые будут соответствовать минимуму потенциальной функции, если

$$\begin{aligned} K_3x_p^2 + K_5y_p^2 + \sqrt{(K_3x_p^2 - K_5y_p^2)^2 + K_4^2x_p^2y_p^2} &> 0, \\ K_3x_p^2 + K_5y_p^2 - \sqrt{(K_3x_p^2 - K_5y_p^2)^2 + K_4^2x_p^2y_p^2} &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Неравенства (4) равносильны выполнению условий:

$$K_3x_p^2 + K_5y_p^2 > 0 \text{ и } 4K_3K_5 - K_4^2 > 0.$$

Полученные решения дают набор устойчивых локальных фаз, которые обозначим по типу определяющих их инвариантов: $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$, (x, y) . Из приведенных соотношений следует, что наряду с равновесными фазами $(0, 0)$, $(x_p, 0)$, $(0, y_p)$, (x_p, y_p) возможно существование ряда неравновесных устойчивых локальных фаз типа $(x_H, 0)$, $(0, y_H)$, (x_H, y_H) , а условия устойчивости равновесной фазы (x_p, y_p) тождественны условиям устойчивости спиновой конфигурации магнитной системы или условиям глобальной устойчивости (при условии $x_p^2 > 0$, $y_p^2 > 0$). В отличие от этого устойчивость равновесных фаз $(x_p, 0)$, $(0, y_p)$ связана с устойчивостью конфигурации магнитной системы

Равновесность, устойчивость и соотношение энергий составляющих спиновой конфигурации
при различных значениях и соотношениях констант анизотропии.

K_1, K_2, K_3, K_4, K_5	5а	5б	5в	5г
>0>0>0>0>0	$F_{xy}^{y,HP} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_y^{c,HP} < F_{00}^{y,P}$	$F_{xy}^{y,HP} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P}$	$F_{x0}^{Hy,HP} < F_{0y}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,HP}$	$F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,HP}$
>0>0>0>0<0	—	—	—	$F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{0y}^{c,P}$
>0>0>0<0>0	$F_{xy}^{y,P} < F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{c,HP} < F_{00}^{y,P}$	$F_{xy}^{y,P} < F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P}$	$F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P}$	$F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P}$
>0>0>0<0<0	—	—	$F_{0y}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{Hy,P}$	$F_{x0}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{Hy,P}$
>0>0<0>0<0	—	—	—	—
>0>0<0<0>0	—	—	$F_{0y}^{c,HP} < F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{Hy,P}$	—
>0>0<0<0<0	—	—	$F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{Hy,P} < F_{0y}^{Hy,P}$	$F_{00}^{y,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{Hy,P} < F_{x0}^{Hy,P}$
>0<0>0>0>0	$F_{xy}^{y,HP} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P}$	$F_{xy}^{y,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P}$	$F_{x0}^{Hy,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP}$	$F_{0y}^{y,P} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP}$
>0<0>0>0<0	—	—	$F_{x0}^{Hy,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP}$	$F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{0y}^{c,HP}$
>0<0>0<0>0	$F_{xy}^{y,P} < F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P}$	$F_{xy}^{y,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P}$	$F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P}$	$F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P}$
>0<0>0<0<0	—	—	—	$F_{x0}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{0y}^{Hy,HP}$
>0<0<0>0>0	—	—	$F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{c,P}$	—
>0<0<0>0<0	—	—	$F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{0y}^{c,HP}$	$F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{c,HP}$
>0<0<0<0>0	—	—	$F_{0y}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{Hy,P}$	—
>0<0<0<0<0	—	—	—	—
<0>0>0>0>0	$F_{xy}^{y,HP} < F_{x0}^{y,P} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P}$	$F_{xy}^{y,HP} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{y,P} < F_{00}^{c,P}$	$F_{x0}^{y,P} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP}$	$F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP}$
<0>0>0>0<0	—	—	—	$F_{x0}^{y,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{c,P}$
<0>0>0<0>0	$F_{xy}^{y,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P}$	$F_{xy}^{y,P} < F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{y,P} < F_{00}^{c,P}$	$F_{x0}^{c,P} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P}$	$F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P}$
<0>0>0<0<0	—	—	—	$F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{Hy,P}$
<0>0<0>0>0	—	—	$F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{x0}^{c,HP}$	—
<0>0<0>0<0	—	—	$F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{c,P}$	$F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{x0}^{c,HP}$
<0>0<0<0>0	—	—	$F_{0y}^{Hy,HP} < F_{00}^{c,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{x0}^{Hy,HP}$	—
<0>0<0<0<0	—	—	—	—
<0>0<0>0>0	$F_{xy}^{y,P} < F_{x0}^{y,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P}$	$F_{xy}^{y,P} < F_{0y}^{y,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P}$	$F_{x0}^{y,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P}$	$F_{0y}^{y,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P}$
<0<0>0>0<0	—	—	—	$F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{0y}^{c,HP}$
<0<0>0<0>0	$F_{xy}^{y,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P}$	$F_{xy}^{y,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P}$	$F_{x0}^{c,P} < F_{0y}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P}$	$F_{0y}^{c,HP} < F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P}$
<0<0>0<0<0	—	—	—	$F_{x0}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{0y}^{Hy,HP}$
<0<0<0>0>0	—	—	$F_{0y}^{c,P} < F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,P} < F_{x0}^{c,HP}$	—
<0<0<0>0<0	—	—	—	—
<0<0<0<0>0	—	—	$F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{x0}^{c,HP} < F_{0y}^{Hy,HP}$	—
<0<0<0<0<0	—	—	$F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{x0}^{Hy,HP} < F_{0y}^{Hy,HP}$	$F_{00}^{Hy,P} < F_{xy}^{c,HP} < F_{0y}^{Hy,HP} < F_{x0}^{Hy,HP}$

лишь по одной обобщенной координате. Наконец, устойчивость фазы (0,0) не связана с устойчивостью конфигурации магнитной системы.

Выражение найденных равновесных решений через направляющие косинусы показывает, что им соответствуют только определенные кристаллографические направления типа [100], [110] и [111]. Подобный результат является хорошо известным фактом.

Сопоставление термодинамических потенциалов составляющих спиновой конфигурации позволило разбить пространство изменения констант анизотропии на ряд областей и построить таблицу, содержащую сведения о возможных спиновых конфигурациях кубических магнетиков. В таблице через F_{x^2} , F_{x^2} , F_{0y} , F_{00} , $0=F_{00}$ обозначены термодинамические потенциалы фаз (x,y), (x,0), (0,y), (0,0) соответственно.

Устойчивость и равновесность локальных фаз в различных областях изменения констант анизотропии показана в верхнем индексе термодинамических потенциалов с учетом следующих обозначений: у — устойчивое состояние, ну — неустойчивое состояние, с — состояние, соответствующее седловой точке, нр — неравновесное решение, р — равновесное решение.

Колонки в таблице соответствуют следующим областям изменения констант анизотропии:

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 > 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 < 0 \quad (5a)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 > 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 > 0 \quad (5б)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 > 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 > 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 < 0 \quad (5в)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 > 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 > 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 > 0 \quad (5г)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 < 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 < 0 \quad (5д)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 < 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 > 0 \quad (5е)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 < 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 > 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 < 0 \quad (5ж)$$

$$K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 < 0; K_4^2 - 4K_3 K_5 > 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 > 0. \quad (5з)$$

Проведенный анализ спин-ориентационного состояния магнитной системы на основе полученных критериев фазовой устойчивости и сопоставления термодинамических потенциалов составляющих магнитной конфигурации позволил выявить в фазовом пространстве изменения констант анизотропии 24 глобально устойчивых состояния (устойчивых спиновых конфигураций). Из них 6 конфигураций имеют один минимум энергии и соответственно характеризуются однородной ориентацией спинов вдоль пространственной диагонали кубической решетки [111]. Такой результат согласуется с теоретическими понятиями о магнитных группах в кубических магнитных кристаллах.

Однородные высокосимметричные состояния реализуются в следующих областях фазового изменения констант анизотропии:

$$K_1 > 0, K_2 < 0, K_3 > 0, K_4 < 0, K_5 > 0, K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 > 0,$$

$$K_1 < 0, K_2 > 0, K_3 > 0, K_4 < 0, K_5 > 0, K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0 \text{ и } K_2^2 K_3 - K_1^2 K_5 < 0,$$

$$K_1 < 0, K_2 < 0, K_3 > 0, K_4 < 0, K_5 > 0, K_5 K_1^2 + K_3 K_2^2 - K_4 K_1 K_2 > 0 \text{ и } K_4^2 - 4K_3 K_5 < 0.$$

Остальные глобально устойчивые конфигурации характеризуются наличием нескольких минимумов энергии, т.е. определенной неоднородностью спиновой конфигурации, свидетельствующей о понижении симметрии системы. Согласно [4,5], такие состояния являются промежуточными этапами при переходе от одной однородной высокосимметричной спиновой конфигурации к другой.

Проведенный термодинамический анализ спиновой структуры кубических магнетиков в отсутствие внешнего поля позволяет сделать следующие выводы.

При рассмотрении устойчивости и равновесности спиновой конфигурации магнитной системы в целом необходим учет не менее пяти констант анизотропии. Для анализа фазовой устойчивости имеет принципиальное значение проведение комплексной минимизации инвариантного полинома. Термодинамическая устойчивость спин-ориентационной структуры кубических магнетиков характеризуется двумя уровнями — устойчивостью спиновой конфигурации магнитной системы в целом (глобальный уровень, определяемый минимизацией инвариантного полинома по инвариантам) и устойчивостью

отдельных составляющих спиновой конфигурации (локальный уровень, определяемый минимизацией инвариантного полинома по компонентам параметра порядка).

Особо выделяются спиновые конфигурации с одним минимумом энергии. Такие состояния обладают наиболее высокой симметрией для кубической сингонии и однородной ориентацией всех спинов вдоль пространственных осей типа [111] кубической магнитной решетки.

Термодинамически возможно существование спиновых конфигураций с нарушением симметрии, которым соответствует более одного минимума энергии и более сложное распределение областей намагниченности с ориентацией спинов вдоль различных кристаллографических направлений. В таких спиновых конфигурациях характерно наличие локально устойчивых состояний вдоль осей типа [110] и [100].

Количество возможных устойчивых спиновых конфигураций как с однородной, так и более сложной спиновой структурой определяется симметрией магнитной решетки.

При протекании в рассматриваемых магнетиках процессов спонтанной спиновой переориентации возможны фазовые переходы двух типов: а) между состояниями с наиболее симметричными спиновыми конфигурациями, обладающими одним минимумом энергии; б) между устойчивыми локальными состояниями. С точки зрения термодинамики, основными являются переходы первого типа. Переходы между локальными фазами играют чаще всего вспомогательную роль и управляются закономерностями фазовых изменений на глобальном уровне.

1. Акулов Н. С. Ферромагнетизм. М.; Л. 1939.
2. Вонсовский С. В. Магнетизм. М., 1971.
3. Виглин А. С. // ФТТ. 1960. Т.11. №2. С.331.
4. Гуфан Ю. М., Торгашев В. И. // ФТТ. 1980. Т.22. Вып.6. С.1629.
5. Гуфан Ю. М. // ЖЭТФ. 1971. Вып.4. С.1537.

Поступила в редакцию 10.09.97.

УДК 621.382.323-416

А.Д.АНДРЕЕВ, Ф.Ф.КОМАРОВ, В.Н.МИХЕЙ

ЭМИССИЯ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОДЗАТВОРНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК МОП-ПТ С ВЫСОКОЛЕГИРОВАННОЙ ПОДЛОЖКОЙ

Substrate ionization currents are measured and electron mean free path and energy are defined for dopant level substrate $7 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ MOSFET. The potential barrier across Si-SiO₂ division and emission electron currents are calculated in the range gate voltage. Substrate and emission current gradients have contrarious signs. These peculiarities may be caused by strengthening of impact ionization.

С уменьшением длины канала [1-3] и увеличением уровня легирования подложки [4] МОП-ПТ напряжение на стоке, при котором ток насыщается, становится меньше эффективного напряжения затвора и проводящий канал может не перекрываться. Электроны перемещаются по непрерывному пути от истока до стока, приобретают энергию, которая достаточна для преодоления потенциального барьера на границе диоксид кремния-кремний, могут эмитировать в окисел. Зависимость тока эмиссии от уровня легирования подложки приведена в [5]. В данной работе рассмотрено влияние напряжения, приложенного к затвору, на высоту потенциального барьера, среднюю длину свободного пробега и энергию электронов, а также эмиссионный ток в транзисторе с концентрацией примесей в кремниевой подложке $N_A = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Длина L и ширина W канала равны 4 и 12 мкм соответственно, глубина областей истока и стока $x_j = 0,8$ мкм, толщина окисла кремния под алюминиевым затвором $x_{ox} \approx 0,3$ мкм.

Для расчета эмиссионного тока применялась формула, полученная в [5]:

$$I_g = \frac{W\Delta L\lambda}{x_j^2} C_0 (V_g - V_T - V_S) \sqrt{\frac{e\lambda E_m}{2\pi m^*}} \exp\left(-\frac{\varphi_a}{e\lambda E_m}\right) \left(1 - e^{-\frac{x_j}{\lambda}}\right), \quad (1)$$

где ΔL — размер области ионизации вдоль канала, λ — средняя длина свободного пробега электронов, C_0 — удельная емкость окисла, V_g, V_T, V_S — напряжение на затворе, пороговое и среднее напряжение на участке ионизации, φ_a — высота потенциального барьера на границе Si-SiO₂.

В структуре с заданной концентрацией примесей умножение носителей заряда осуществляется в канале, который непрерывен, или $(V_g - V_T) \gg V_S$ [4], поэтому плотность электронов около стока и величина тока I_g (1) определялись только эффективным напряжением затвора $V_g - V_T$. При повышенном уровне легирования подложки возрастает приложенное к затвору напряжение, составляющая напряженности электрического поля в окисле и компонент туннельного тока, который учитывается дополнительным понижением барьера [3,6]:

$$\varphi_a = 3,29B - aE_{ox}^{1/2} - bE_{ox}^{2/3},$$

где $a = 2,59 \cdot 10^{-4} \text{e (В} \cdot \text{см)}^{1/2}$, $b = 10^{-5} \text{e (см}^2 \text{В)}^{1/3}$, E_{ox} — напряженность электрического поля в окисле, равная отношению падения напряжения на окисле $V_o = V_g - \varphi_{ms} - \varphi_s$ к его толщине, φ_{ms} — контактная разность потенциалов в МОП-конденсаторе, $\varphi_s = 2\varphi_f$ — потенциал на границе Si-SiO₂ в режиме сильной инверсии, $\varphi_f = (kT/e) \ln(N_A/n_i)$, n_i — собственная концентрация носителей заряда. Для концентрации примесей $N_A = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$, $\varphi_f \sim 0,4$,

$$\varphi_{ms} \sim 0,8, V_g \sim 60 \text{ В и } E_{ox} \approx \frac{V_g}{x_{ox}}.$$

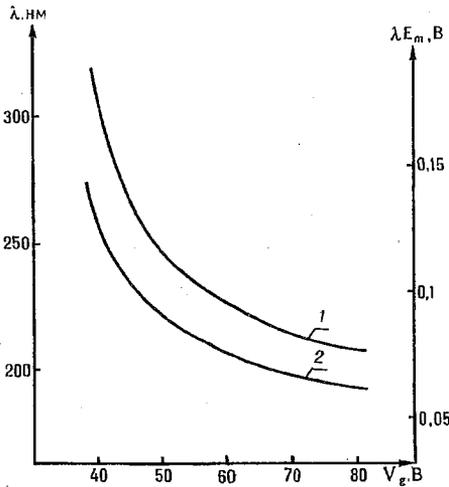


Рис. 1. Зависимости средней длины свободного пробега λ (1) и тепловой энергии электронов (2) от напряжения затвора V_g в режиме умножения носителей заряда, $V_D = 4 \text{ В}$.

$d\lambda/dV_g, d(\lambda E_m)/dV_g$ имеют отрицательный знак (разность между напряжением на стоке V_D и напряжением насыщения тока V_{DS} уменьшается с увеличением V_g), что приводит к уменьшению тока I_g (1).

На рис. 2. даны зависимости измеренного тока подложки I_x и рассчитанного по формуле (1) компонента эмиссионного тока I_g от напряжения затвора. Из рисунка видно, что ток I_x возрастает с увеличением напряжения V_g . Это увеличение можно объяснить тем, что для заданного напряжения на стоке, выбранного в интервале используемых уровней умножения носителей заряда, возрастает плотность инверсионных электронов, а также их число с энергией, равной или большей порога ионизации. Пропорционально возрастает также

Электроны проходят без соударений расстояние $x = x_j$ из глубины подложки к границе раздела, если $x_j \sim \lambda$. Глубину стока как технологический параметр уменьшают ($x_j \sim 0,2 \text{ мкм}$), чтобы снизить тепловой ток утечки. В интервале изменения уровня легирования $N_A = 10^{22} \div 10^{24} \text{ м}^{-3}$ величина $\lambda \cong (3000 \div 300) \text{ нм}$ [5] и в (1) $\exp(-x_j/\lambda) \ll 1$, поэтому основной вклад в эмиссионный ток вносят параметры: $\Delta L, \lambda E_m, V_g, \varphi_a$ при заданных значениях x_j, W, V_T . На рис. 1. даны зависимости среднего арифметического значения λ от V_g , полученные по трехпараметрической модели и току подложки в режиме умножения носителей заряда в поле, напряженность которого рассчитывалась по известной формуле

$$E_m = \sqrt{eN(V_D - V_{DS}/2\epsilon)}, \text{ и } \lambda E \text{ от } V_g.$$

Как видно из рисунка, градиенты

число электронов с энергией, равной или большей высоты потенциального барьера. Эти электроны могут эмитировать в окисел и создавать ток затвора, величина которого будет зависеть от интенсивности рассеяния электронов или соотношения между толщиной окисла x_{ox} и средней длиной свободного пробега электронов λ_{ox} при перемещении от границы раздела Si-SiO₂ к затвору. Если $x_{ox} \sim \lambda_{ox}$, ток I_g может быть сравним с током, протекающим через подзатворный диэлектрик [7]. Так как стоковое напряжение меньше эффективного напряжения затвора, то проводящий канал не перекрывается и электроны перемещаются от истока до стока по непрерывному пути [8]. В этом случае не следует учитывать эффект обратного поля вблизи перехода стока [9] и вероятность того, что электрон преодолевает существующее на окисле падение напряжения [7]. Уменьшение тока вызвано в основном сильной зависимостью показателя экспоненты $\varphi_d/e\lambda E_m$ в (1) от напряжения V_g (рис.3).

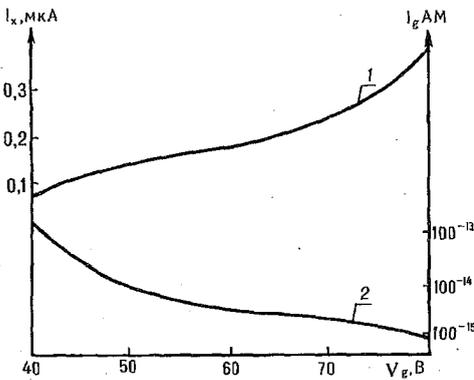


Рис.2. Зависимости измеренного тока подложки I_x и рассчитанного по (1) тока эмиссии I_g от напряжения затвора V_g в режиме умножения носителей заряда, $V_D = 4$ В.

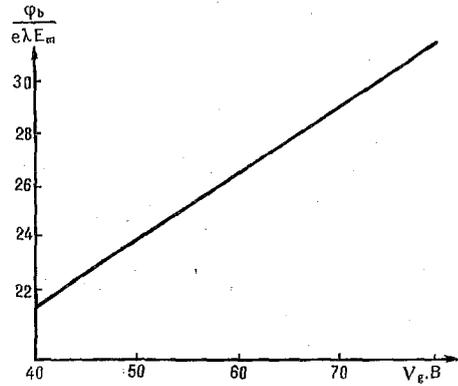


Рис.3. Зависимость показателя экспоненты $\varphi_d/e\lambda E_m$ в (1) от напряжения затвора V_g .

Полученные экспериментальные и расчетные данные показывают, что при повышении уровня легирования подложки МОП-ПТ до $7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$, толщине подзатворного диэлектрика $\sim 0,3$ мкм, глубине n^+ - p -перехода стока $\sim 0,8$ мкм увеличение приложенного к затвору напряжения приводит к увеличению тока подложки, который формально используют для оценки деградации порогового напряжения и крутизны вольтамперной характеристики. В данном случае эта оценка не будет адекватной, так как ответственный за деградацию ток эмиссии имеет противоположную зависимость от напряжения затвора. В структурах типа МОП-ПТ КНД подбором глубины n^+ - p -перехода стока [5] возможна оптимизация токов утечки тепловой генерации и эмиссии горячих электронов, чтобы снизить их значения до сравнимых величин и, следовательно, определить необходимую толщину слоя полупроводника, в котором изготавливается транзистор.

1. Ghibando G. // Phys. Stat. Sol. (a). 1989. 113. P.223.
2. Arora N., Sharma M. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1991. 38. №6. P.1392.
3. Banna M. // Int. J. Electron. 1994. 77. №1. P.49.
4. Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. С.26.
5. Андреев А.Д., Борисович Д.Д., Комаров Ф.Ф. и др. // Вестн Академіі навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1997. №4. С.58.
6. Ning T.H., Osburn C.M., Yu H.N. // J. Appl. Phys. 1977. 48. №1. P.286.
7. Miura-Mattausch M., Schwerin A., Weber W. et. all // IEE Proceedings. 1987. 134. Pt.1. №4. P.111.
8. Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №1. С.26.
9. Acovic P., Dutoit M. // Helvet. Rhys. Acta. 1988. 61. №1-2. P.117.

Поступила в редакцию 05.03.98.

ПЛАНАРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ИЗОЛИРУЮЩЕГО ДИЭЛЕКТРИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Fusing processes in boron- and phosphor-silicate glasses using rapid thermal processing were investigated. It is shown that this method leads to improvement of electrical characteristics of the elements in integrated circuits.

В настоящее время при производстве интегральных микросхем (ИМС) повышенное внимание уделяется многослойным металлизированным структурам. В связи с этим особую важность приобретает снижение рельефа поверхности подложки перед металлизацией для исключения дефектов межсоединений, вызванных чрезмерной крутизной ступеней изолирующего диэлектрика, которые формируются в процессе создания контактов к активным областям микросхем в изолирующем диэлектрике. Среди существующих методов планаризации рельефа поверхности самое широкое применение в технологии ИМС находят методы оплавления легкоплавких стекол, сопровождающиеся применением высокотемпературных процессов.

Рост степени интеграции ИМС и переход к субмикронной технологии предъявляют жесткие требования к процессу планаризации изолирующего диэлектрика, так как данная операция является, как правило, последней высокотемпературной обработкой пластины, в которой уже сформированы активные и пассивные элементы ИМС. Использование при этом высоких температур приводит к перераспределению примеси в активных областях, ухудшая характеристики формируемых приборов. Поэтому наибольший интерес вызывает использование для этих целей быстрой термической обработки (БТО) [1].

В настоящей работе приведены результаты исследований процесса оплавления легкоплавких фосфоросиликатного (ФСС) и борофосфоросиликатного (БФСС) стекол с применением БТО. Изучены степень оплавления и электрофизические параметры пленок в зависимости от основных параметров БТО — температуры и скорости ее набора (длительности процесса). Проведены исследования влияния БТО в режимах оплавления на перераспределение примеси в ионно-легированных слоях (ИЛС).

Для исследования процесса оплавления пленок ФСС и БФСС в зависимости от режимов БТО изготавливались тестовые структуры по следующему технологическому маршруту. Исходные кремниевые пластины КЭФ-4,5 диаметром 100 мм подвергались химической обработке и термическому окислению до толщины окисла 0,1 мкм. Для создания рельефа на поверхности пластины с использованием фотолитографии и последующего плазмохимического травления формировались ступеньки поликремния высотой 1,0 мкм, на которые осаждались пленки ФСС с содержанием фосфора 10–12% и БФСС с содержанием фосфора $5,9 \pm 0,2$ вес.% и бора $2,9 \pm 0,1$ вес.% толщиной 0,8–0,9 мкм. Оплавление пленок ФСС и БФСС проводилось на установке БТО в диапазоне температур 1073–1373 К при скорости набора температуры 75, 100, 125 К/с. Контроль температуры осуществлялся с помощью термопары, являющейся одной из опорных точек, на которых располагалась пластина [2]. Часть пластин с пленками ФСС оплавлялась в диффузионной печи при температуре 1273 К в течение 20 мин и при 1123 К в течение 45 мин для БФСС и использовалась в качестве контрольных.

Рельеф поверхности пластин после БТО и оплавления в диффузионной печи исследовался методом растровой электронной микроскопии. Характеристикой степени оплавления поверхности ИМС служила величина угла наклона ступеньки рельефа, образованного различными методами оплавления, которая определялась по микрофотографии путем построения касательных к боковой поверхности ступеньки. Точность определения угла оплавления составляла $\pm 30^\circ$.

На рис. 1 показана зависимость угла оплавления пленок ФСС и БФСС от температуры и скорости набора температуры при БТО. Полученные

данные свидетельствуют о том, что наилучшие характеристики оплавления наблюдаются при скорости набора температуры $V_c < 100$ К/с, что обусловлено достаточной длительностью процесса термообработки при таких скоростях нагрева. Кроме того, обеспечивающий надежное запыление поверхности угол оплавления ($45 \pm 5^\circ$) при БТО достигается при температурах ≥ 1273 К для ФСС и ≥ 1173 К для БФСС. Время оплавления не превышало 10 с.

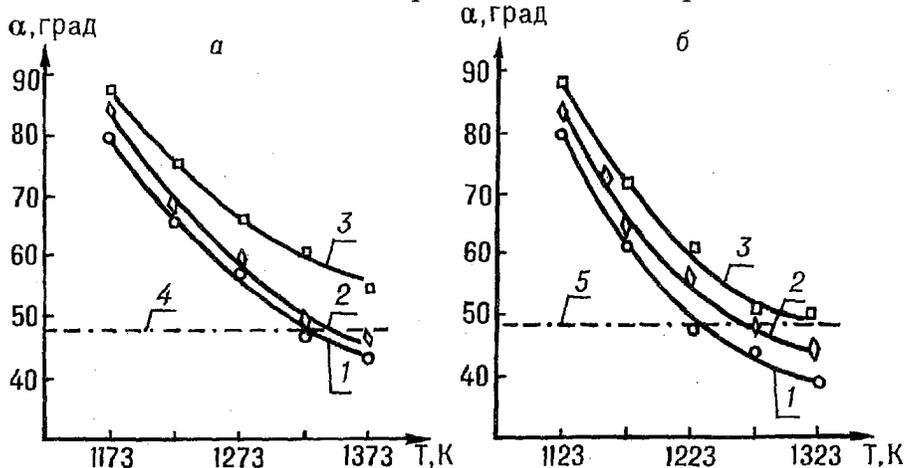


Рис.1. Зависимость угла оплавления ступеньки ФСС (а) и БФСС (б) от температуры БТО: скорость набора температуры 1—75 К/с; 2—100; 3—125 К/с; 4—длительная термообработка при $T=1273$ К; 5—при $T=1123$ К

В связи с тем, что оплавление пленок ФСС и БФСС происходит при высоких температурах, проводилось исследование влияния импульсной термообработки на активацию и перераспределение легирующих примесей в ранее сформированных ИЛС.

Исследование проводилось на образцах, легированных бором ($D=300$ мкКл/см²; $E=30$ кэВ) и фосфором ($D=1000$ мкКл/см²; $E=40$ кэВ) в режимах формирования сток-истоковых областей КМОП ИМС. Импульсная обработка осуществлялась при $V_c=100$ К/с в диапазоне температур 1123–1323 К. Для сравнения часть пластин подвергалась термической обработке в диффузионной печи в стационарных режимах оплавления ФСС и БФСС.

Изучение влияния импульсного оплавления ФСС и БФСС на поверхностное сопротивление ионно-легированных слоев (рис.2) показало, что как для бора, так и для фосфора значение поверхностного сопротивления с увеличением температуры уменьшается. Однако его величина после БТО в исследованных режимах ниже, чем после длительной термической обработки при 1123 К и сравнима со значением, получаемым при 1273 К. Меньшие значения поверхностного сопротивления после БТО свидетельствуют о доактивации примеси в ионно-легированных слоях при такой обработке.

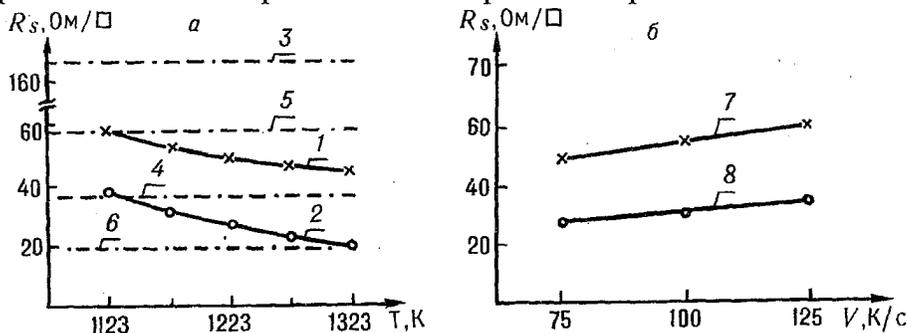


Рис.2. Зависимость поверхностного сопротивления слоев, легированных бором B^+ (300 мкКл/см², 30 кэВ) и фосфором P^+ (1000 мкКл/см², 40 кэВ), от температуры (а) и скорости нагрева (б): 1— R_s, V^+ после БТО при скорости нагрева 100 К/с; 2— R_s, P^+ после БТО при скорости нагрева 100 К/с; 3— R_s, V^+ после ТО при $T=1123$ К и $t=45$ мин; 4— R_s, V^+ после ТО при $T=1273$ К и $t=20$ мин; 5— R_s, P^+ после ТО при $T=1123$ К и $t=45$ мин; 6— R_s, P^+ после ТО при $T=1273$ К и $t=20$ мин; 7— R_s, P^+ после БТО при $T=1173$ К; 8— R_s, V^+ после БТО при $T=1173$ К

Анализ глубин залегания переходов после планаризации (рис.3) показал, что с увеличением температуры БТО от 1123 К до 1323 К x_j увеличивается от 0,26 мкм до 0,35 мкм (для фосфора) и от 0,27 мкм до 0,38 мкм (для бора). Глубина p - n -перехода до оплавления составляла 0,23 мкм для фосфора и 0,25 мкм для бора. После оплавления в стандартном режиме при 1123 К и времени 45 мин в среде азота глубина залегания перехода в 1,3 раза больше, чем после БТО, а после обработки при 1273 К и 20 мин – в 1,8 раза. Столь значительное уменьшение перераспределения примеси при БТО обусловлено меньшим временем диффузии. Однако перераспределение примеси при импульсном оплавлении ФСС, БФСС в рамках обычных процессов диффузии должно составлять тысячные доли микрона. Полученные данные об изменении x_j на 0,02–0,03 мкм свидетельствуют о дополнительном воздействии фотонного потока на процесс диффузии. Рассмотрим вклад мощного фотонного потока в процесс диффузии примесей.

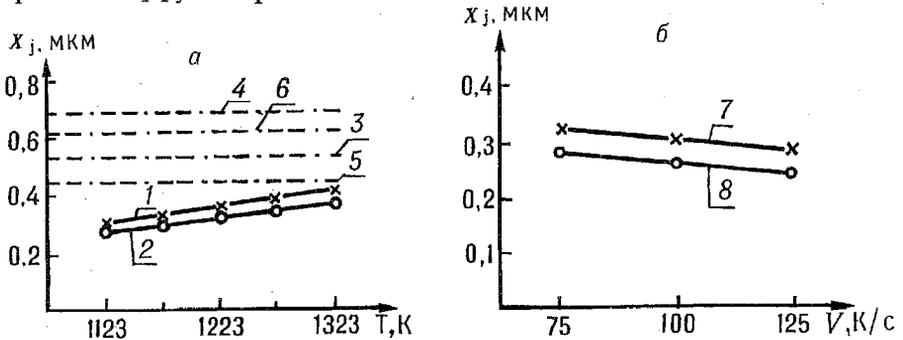


Рис.3. Зависимость глубины залегания p - n -перехода, сформированного имплантацией бора B^+ (300 мкКл/см², 30 кэВ) и фосфора P^+ (1000 мкКл/см², 40 кэВ) от температуры (а) и скорости нагрева (б):

1 – $x_j B^+$ после БТО при скорости нагрева 100 К/с; 2 – $x_j P^+$ после БТО при скорости нагрева 100 К/с; 3 – $x_j B^+$ после ТО при $T=1123$ К и $t=45$ мин; 4 – $x_j B^+$ после ТО при $T=1273$ К и $t=20$ мин; 5 – $x_j P^+$ после ТО при $T=1123$ К и $t=45$ мин; 6 – $x_j P^+$ после ТО при $T=1273$ К и $t=20$ мин; 7 – $x_j P^+$ после БТО при $T=1173$ К; 8 – $x_j B^+$ после БТО при $T=1173$ К

Перераспределение примеси в процессе нагрева описывается следующим выражением

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \nabla(D_i \nabla N_i + Z_i \mu_i N_i E), \quad (1)$$

где D_i – коэффициент диффузии i -ой примеси; $\mu_i = D_i/kT$ – подвижность i -ой примеси; $Z_i = 1$ для акцепторов; $Z_i = -1$ для доноров; E – вектор напряженности электрического поля во время обработки ионно-легированного слоя.

Поскольку коэффициент диффузии в выражении (1) зависит от температуры, то ее изменение в процессе обработки учитывалось путем решения уравнения теплопроводности [3]. Если предположить, что фотонный поток генерирует электронно-дырочные пары равномерно в области ИЛС, то получаем в ней следующую разность потенциалов

$$\varphi = kT \ln n / N_i. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$E = -kT \nabla N_i / N_i, \quad (3)$$

для доноров получаем

$$D_D \nabla N_D - \mu_D N_D E = D_D \nabla N_D - \frac{D_D}{kT} N_D \left(-\frac{kT \nabla N_D}{N_D} \right) = 2D_D \nabla N_D. \quad (4)$$

Аналогично для акцепторов получаем

$$D_A \nabla N_A + \mu_A N_A E = 2D_A \nabla N_A. \quad (5)$$

Выражения (4,5) показывают, что совместная диффузия подвижных носителей и примеси приводит к появлению электрического поля, которое фактически удваивает коэффициент диффузии. Это явление аналогично

эффекту Дембера. Для обычного термического отжига такое удвоение коэффициента диффузии имеет место только в первоначальный момент времени, так как, обладая высокой подвижностью, электроны и дырки быстро рассасываются и затем идет диффузия только внедренной примеси. При БТО фотонный поток постоянно "подкачивает" электроны и дырки, что приводит к ускоренной диффузии примеси по сравнению с длительной термической обработкой.

Таким образом, БТО при скорости набора температуры 100 К/с позволяет получать угол оплавления $45 \pm 5^\circ$ для БФСС при $T > 1173$ К и для ФСС при $T > 1273$ К за время не более 10 с, что в 1,3–1,8 раза уменьшает перераспределение примеси в уже сформированных ионно-легируемых слоях по сравнению со стандартными методами оплавления. Наличие наблюдаемого перераспределения обусловлено как термодиффузионными процессами, так и возникновением электрического поля под воздействием фотонного потока, приводящего к удвоению коэффициента диффузии легирующих примесей. Установлено, что разработанный метод оплавления ФСС и БФСС позволяет доактивировать примесь в уже сформированных ИЛС, тем самым улучшая электрические характеристики активных элементов ИМС.

1. Пилипенко В.А., Понов Ю.П. // Электронная промышленность. 1988. Вып.5. С.3.

2. Пилипенко В.А., Топчий В.Н., Перец А.Ф. и др. // Фотонные процессы в микроэлектронике. Суздаль, 1987. С.33.

3. Куликов В.С., Стержанов Н.И., Пилипенко В.А. и др. // Промышленная теплотехника. 1984. Т.6. №5. С. 33.

Поступила в редакцию 13.02.98.

УДК 535.37

А.П.КЛИЩЕНКО, М.А.СЕНЮК, С.А.ТИХОМИРОВ, Г.Б.ТОЛСТОРОЖЕВ

СВОБОДНЫЕ РАДИКАЛЫ: ФОТОДИССОЦИАЦИЯ ОДИНАРНЫХ СВЯЗЕЙ В ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛАХ И СОПУТСТВУЮЩИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Experimental results are presented on the dynamics and mechanisms of aromatic sulfide molecules photodissociation as well as photoreduction processes of ketons. Charge transfer reactions and structural transformations which take place in free radicals just after their formation are analyzed.

1. Введение

Органические свободные радикалы — это промежуточные частицы различных структурных превращений молекул, быстрообразующиеся (фемто- и пикосекундный диапазон) и обычно короткоживущие ($\sim 10^{-3}$ с). Из-за наличия неспаренного электрона их электронные уровни имеют дублетную и квартетную природу в отличие от обычных органических молекул, которым свойственны синглетные и триплетные уровни. Радикалы играют важную, а часто определяющую роль в многочисленных фотохимических превращениях молекул. На протяжении длительного времени они являлись предметом всесторонних исследований в физике, химии, биологии [1–3]. Однако только сравнительно недавно современный уровень развития техники лазерной спектроскопии высокого и сверхвысокого временного разрешения позволил получать качественно новую информацию и корректно решать проблемы, связанные с выяснением детальных механизмов быстропротекающих фотопроцессов в таких системах, что можно считать началом нового периода в изучении свободных радикалов.

Далее приводятся данные о динамике и механизмах образования свободных радикалов при фотовосстановлении (присоединение водорода диссоциирующего донора) ароматических кетонов и гомолитической фотодиссоциации одинарной S-S связи в молекулах дисульфидов.

II. Экспериментальная техника

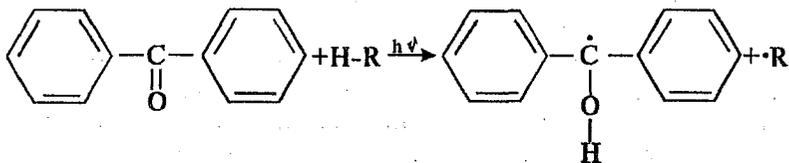
Кинетические измерения проводились с использованием автоматизированного пикосекундного спектрометра [4]. Для возбуждения молекул исследуемого вещества использовались импульсы второй, третьей, либо четвертой гармоник ($\lambda_{\text{возб.}} = 528, 352, 264 \text{ нм}$) основной частоты неодимового лазера, генерируемые в кристаллах КДР. Излучение гармоник после фильтрации и прохождения регулируемой оптической линии задержки фокусируется в кювету с исследуемым веществом. Непреобразованное излучение основной частоты служит для формирования широкополосного пикосекундного континуума, используемого в качестве зондирующего импульса.

В спектрометре реализована двухлучевая схема измерений. Излучение пикосекундного континуума, генерируемого в кювете с D_2O , полупрозрачным зеркалом делится на два одинаковых по интенсивности импульса, один из которых проходит через кювету с исследуемым веществом до импульса возбуждения и является опорным сигналом. Второй импульс задерживается и проходит через возбужденный объем в кювете с исследуемым веществом с регулируемой временной задержкой относительно импульса возбуждения. Оба луча с помощью сферической и цилиндрической линз фокусируются на разные по высоте участки входной щели полихроматора. В результате этого в фокальной плоскости полихроматора формируется два параллельных спектра: один из них представляет собой спектр континуума, прошедшего через возбужденный объем в кювете с исследуемым веществом, другой — через невозбужденный. Спектры для каждой лазерной вспышки регистрируются и обрабатываются системой на основе видеокон, оптического многоканального анализатора и микроЭВМ. Для исследования временной кинетики изменения оптической плотности в узком спектральном интервале зондирующего излучения используется двухканальный измеритель энергии лазерных импульсов. Анализированный спектральный диапазон выделяется из пикосекундного континуума с помощью интерференционных фильтров.

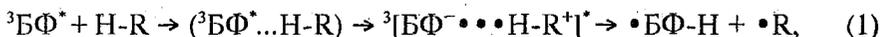
Спектрометр обеспечивает временное разрешение $\pm 3 \text{ пс}$ при точности измерения абсорбционных изменений $(2-5) \cdot 10^{-3} \text{ опт.ед.}$ Использование математического моделирования, учитывающего конечную длительность импульсов, позволяет повысить временное разрешение вплоть до 1 пс .

III. Фотовосстановление ароматических кетонов

Фотовосстановление бензофенона (БФ), т.е. отрыв атома водорода от донорной молекулы H-R и присоединение его к БФ с образованием кетильного свободного радикала $\bullet\text{БФ-H}$, относится к числу классических примеров фотохимической реакции, протекающей в триплетном состоянии молекулы

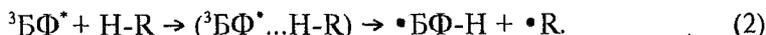


Механизм этого процесса ранее изучался различными фотохимическими и спектроскопическими методами. Общепринятой стала считаться двухэтапная схема образования кетильного радикала [5]:



где $({}^3\text{БФ}^* \dots \text{H-R})$ — столкновительный комплекс, ${}^3[\text{БФ}^- \dots \text{H-R}^+]$ — комплекс переноса заряда (эксиплекс), $\bullet\text{БФ-H}$ — кетильный радикал.

В принципе возможен и одноступенчатый процесс образования кетильного радикала [6,7] непосредственно в столкновительном комплексе:



Квантовый выход образования кетильного радикала при использовании в качестве донора водорода алифатического амина триэтиламина (ТЭА) не зависит от полярности растворителя, а в случае ароматического амина N,N-диэтиланилина (ДЭА) существенно падает с увеличением полярности среды [8]. Это естественно связать с различием механизмов фотовосстановления БФ указанными соединениями. Известно также [9], что при фотопереносе электрона в полярных растворителях обычно наблюдается быстрое образование сольватированных ион-радикалов, а в высокополярном растворителе ацетонитриле ($\epsilon=37$) распад на ион-радикалы происходит с выходом, близким к единице [10]. Это означает, что в случае двухступенчатого механизма образования кетильного радикала в полярном ацетонитриле должны регистрироваться полосы поглощения ион-радикалов.

ΔD , отн. ед.

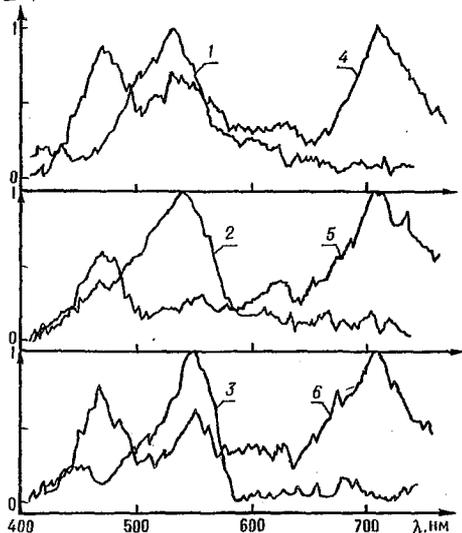


Рис. 1. Нестационарные спектры поглощения бинарных систем (БФ + ТЭА, кривые 1, 2, 3 и БФ + ДЭА, кривые 4, 5, 6) в ацетонитриле при различных временных задержках между возбуждающим и зондирующим импульсом:

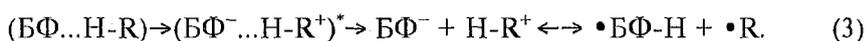
$\Delta t = 20$ пс (1, 4), 100 (2, 5), 500 (3) и 1600 пс (6)

в области спектра 660–740 нм, где поглощают анион-радикалы BF^- . Таким образом, отсутствие полос поглощения, свойственных состояниям с переносом заряда при фотовосстановлении БФ алифатическим амином ТЭА в высокополярном растворителе ацетонитриле, высокий (0,9–1,0) квантовый выход образования кетильного радикала в растворителях разной полярности [8] свидетельствуют о том, что в данном случае фотоперенос водорода происходит по одноступенчатому механизму (2).

Существенно иная картина наблюдается [11] в процессе образования кетильного радикала для системы БФ ($C=2 \cdot 10^{-2} \text{M}$) + ДЭА ($C=1 \text{M}$) (рис. 1, кривые 4, 5, 6). Оказалось, что спектр нестационарного поглощения этой бинарной системы в ацетонитриле при малых $\Delta t=20$ пс является суммой спектров анион-радикала BF^- ($\lambda_{\text{макс}}=710$ нм), катион-радикала ДЭА^+ ($\lambda_{\text{макс}}=480$ нм) и $T_1^* \rightarrow T_n^*$ -поглощения БФ ($\lambda_{\text{макс}}=530$ нм). При $\Delta t=100$ пс спектр поглощения состоит практически из полос $\lambda_{\text{макс}}=480$ и 710 нм. Образование кетильного радикала в данном случае ($\lambda_{\text{макс}}=550$ нм) происходит за время порядка 1600 пс при столкновении анион-радикала BF^- и катион-радикала ДЭА^+ . К этому времени в растворе устанавливается динамическое равновесие.

Суммарный спектр представляет собой суперпозицию полос поглощения ион-радикалов БФ⁻, ДЭА⁺ и кетильного радикалов.

Для системы БФ+ДЭА в ацетонитриле экспериментально изучено изменение с течением времени оптической плотности нестационарного поглощения БФ и ион-радикальных пар. Из сопоставления этих данных с модельными расчетами при учете конечной длительности возбуждающего и зондирующего импульсов $\tau_{\text{и}}=3$ пс с гауссовым профилем найдено, что характеристическое время образования триплетных молекул БФ в ацетонитриле равно 18 пс, а время образования ион-радикальных пар короче 1 пс. Такой результат является неожиданным с точки зрения общепринятых представлений об участии триплетных молекул БФ в первой стадии (перенос электрона) присоединения водорода по механизму (1). Зарегистрированное короткое время возникновения ион-радикалов указывает на существование слабосвязанного комплекса между ДЭА и молекулами БФ уже в основном состоянии. Это говорит о том, что при используемых концентрациях ДЭА ($C=1M$) большая часть невозбужденных молекул БФ находится в связанном состоянии. Образование кетильного радикала в этом случае можно представить схемой



Для пары БФ+ДЭА в неполярном гексане реализуется двухступенчатый механизм образования кетильного радикала, т.е. через промежуточный эксиплекс. Вначале наблюдается быстрый фотоперенос электрона, о чем свидетельствует появление в нестационарном спектре полос поглощения с $\lambda_{\text{макс}}=480$ и 710 нм. Поскольку полярность растворителя мала, диссоциация комплекса на сольватированные ион-радикалы малоэффективна. В этом случае происходит образование устойчивого возбужденного комплекса с переносом заряда (эксиплекса), спектр поглощения которого практически совпадает со спектром ион-радикальной пары. С течением времени поглощение, за которое ответственны состояния с переносом заряда, исчезает и при $\Delta t=1600$ пс в спектре нестационарного поглощения наблюдается полоса с $\lambda_{\text{макс}}=550$ нм, соответствующая кетильному радикалу. Предполагая, что перенос протона является основным каналом дезактивации эксиплекса, скорость этого процесса можно оценить, изучив кинетику затухания нестационарного поглощения в полосе анион-радикала БФ⁻. Для системы БФ+ДЭА скорость переноса протона оказалась равной $2,9 \cdot 10^9$ с⁻¹.

Известно, что введение в молекулу БФ электронодонорных заместителей (например аминогруппы) подавляет процесс фотовосстановления в протонодонорных растворителях. Предполагалось, что это происходит вследствие образования состояния с внутримолекулярным переносом заряда. Природа таких состояний в молекулах типа донор электрона – акцептор электрона, соединенных одинарной связью, активно исследуется разными методами в течение достаточно длительного времени, начиная с обнаружения Липпертом [12] аномальной флуоресценции бензонитрила в полярных средах. Наблюдаемые эффекты нашли интерпретацию в рамках модели состояний с внутримолекулярным переносом заряда и скрученной конфигурацией (ТІСТ-состояния).

Понятие о ТІСТ-состояниях впервые было введено Грабовским и др. [13] для объяснения аномальной двухкомпонентной флуоресценции диметиламинобензонитрила, наблюдавшейся в полярных растворителях. Согласно этой модели ТІСТ-состояния могут реализовываться в мультихромоморфных системах, в которых имеются электронодонорная Д и электроноакцепторная А группы. При этом группы А и Д должны быть слабо связаны. В таких системах, которые обладают вращательной относительно одинарной связи степенью свободы, но плоские в основном состоянии, образование ТІСТ-

состояния включает поворот в возбужденном состоянии плоскости донора Д относительно плоскости акцептора А. В своем классическом виде данная модель предполагает, что за испускание в коротковолновой области ответственны молекулы, имеющие плоскую конфигурацию (донорная и акцепторная части молекулы лежат в одной плоскости) в основном состоянии и сохраняющие ее при переходе в возбужденное состояние. Такая ситуация реализуется в неполярных средах. В полярных растворителях после поглощения кванта света происходит разворот плоскостей донорной и акцепторной частей молекулы во взаимно ортогональное положение, что приводит к стабилизации состояния с внутримолекулярным переносом заряда. Это состояние ответственно за испускание в длинноволновой области. Таким образом, при определенных условиях может возникать аномальная двухполосная (дуальная) люминесценция, причем соотношение интенсивностей коротковолновой и длинноволновой полос в значительной степени определяется скоростью образования и стабилизации ТИСТ-состояния.

Модель ТИСТ-состояния считается в настоящее время наиболее разработанной и широко используемой, хотя в своем классическом виде (растворитель рассматривается как континуальная среда с использованием таких параметров, как полярность, диэлектрическая проницаемость, показатель преломления) она оказалась не в состоянии объяснить целый ряд экспериментальных фактов, например: резкое увеличение отношения интенсивностей длинноволновой и коротковолновой флуоресценции при добавлении следов специфических растворителей к полярным апротонным растворам, практически полное отсутствие аномального длинноволнового свечения даже в высокополярных, но тщательно осушенных растворителях при выполнении экспериментов в инертной атмосфере [14]. Анализ накопленного экспериментального материала позволяет говорить о существенной роли в процессе внутримолекулярного перераспределения заряда при фотовозбуждении рассматриваемых объектов специфической сольватации, приводящей к образованию уже в основном состоянии комплексов определенной конфигурации. В работах [15,16] на основе использования методов сверхскоростной спектроскопии показано, что необходимым условием полного разделения зарядов в возбужденном состоянии молекулы является существование уже в основном состоянии комплексов определенной конфигурации с молекулами растворителя, а решающим фактором является не столько полярность среды, сколько присутствие в среде молекул с протонодонорными группировками.

ΔD , отн. ед.

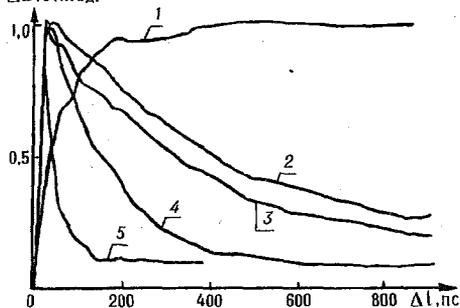


Рис.2. Кинетики оптической плотности ДМАБФ в растворителях различной природы:

1 — пентан ($\lambda_{\text{св}}=520$ нм); 2 — ацетон, 3 — ацетон + 0,1% H_2O , 4 — ацетон + 0,7% H_2O , 5 — ацетон + 30% H_2O , ($\lambda_{\text{св}}=470$ нм)

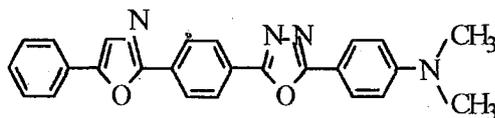
Кинетика оптической плотности наведенного поглощения ДМА-ВР в растворителях различной природы показана на рис.2. Считая, что состояния с переносом заряда в пентане не образуются, наблюдаемый для этого растворителя рост оптической плотности (в зависимости от времени, кривая 1) следует связать с заселением триплетного состояния за счет интерконверсии с характеристическим временем 95 пс. В дальнейшем данное состояние может участвовать в процессах фотовосстановления по уже рассмотренным нами соответствующим механизмам.

Кинетика оптической плотности в случае полярных растворителей имеет совершенно иной характер. Так, кривая 2, отражающая изменение оптической плотности в максимуме коротковолновой полосы, для ацетонового раствора имеет сложный вид и в ней можно выделить четыре временных интервала:

быстрое нарастание сигнала, практически совпадающее с аппаратной функцией спектрометра, далее незначительный рост в диапазоне нескольких десятков пикосекунд, затем затухание и выход на стационарное значение. Изменение количества содержания примесной воды в растворителе существенно сказывается на релаксационных процессах (кривые 3–5). Видно, что время затухания коротковолновой полосы в спектре наведенного поглощения сокращается при добавлении воды к ацетонному раствору, относительный вклад долгоживущей компоненты уменьшается. Время жизни ПИСТ-состояния, оцененное по кривым 2–5, равно соответственно 390, 310, 160, 35 пс. Величина сигнала на плато, обусловленного $T_1 \rightarrow T_2$ поглощением молекул DMA-BP, отражает долю молекул, сохранивших плоскую конфигурацию и не испытавших внутримолекулярный перенос заряда. С ростом концентрации примесной воды эта доля уменьшается в соответствии со смещением константы равновесия в сторону комплексообразования. В дифференциальных спектрах сигналу на плато кинетической зависимости соответствует широкополосное бесструктурное поглощение практически во всей спектральной области регистрации.

Совокупность наблюдаемых спектрально-кинетических особенностей можно объяснить в рамках модели частично скрученной уже в основном состоянии структуры. Этот взаимный разворот плоскостей аминогруппы и ароматического фрагмента, обусловленный возмущающим воздействием водородных связей либо с примесными молекулами воды в полярных гидрофильных растворителях, либо с молекулами самих протондонорных растворителей (спирты), является необходимым условием образования ПИСТ-состояния при возбуждении молекул DMA-BP. Быстрое, практически совпадающее с аппаратной функцией спектрометра, возникновение наведенного поглощения для ПИСТ-состояний данной молекулы в относительно маловязких растворителях (ацетон, ацетонитрил, этанол) трудно объяснить в рамках классической концепции, предполагающей в основном состоянии плоскую конфигурацию молекул, а в возбужденном ортогональную. Поворот на такой большой угол занимал бы определенное время даже в сравнительно маловязких растворителях, что проявилось бы в кинетических экспериментах. Существование же комплекса в основном состоянии с уже частично скрученной на определенный угол (по оценкам [14], он может составлять до 60°) конфигурацией приводит к тому, что необходимый доворот до ортогонального состояния может проявиться в пикосекундном временном диапазоне только в достаточно вязких растворителях. Действительно, в вязком протондонорном растворителе пропаноле время стабилизации ПИСТ-состояния диметиламинобензофенона оказалось равным 15 пс.

Предложенная модель, в рамках которой находят объяснения спектрально-кинетические особенности поведения аминопроизводных кетонов в протондонорных растворителях, подтверждается данными по исследованию *n*-диметиламино-2,5-дифенилоксиадиазола-1,-3,-4 (DMA-POPDOP), способного, исходя из структурной формулы, к образованию ПИСТ-состояний:



В спектрах люминесценции данного соединения ранее уже наблюдались [17] особенности, типичные для ПИСТ-образующих систем. В спиртовых растворах при комнатных температурах появляется длинноволновая полоса ($\lambda_{\text{макс}} = 565$ нм), смещенная более чем на 100 нм по отношению к спектру в толуольном растворе. В целом же флуоресценция сильно потушена. Квантовый выход не превышает 10^{-3} по сравнению с 0,58 в толуольном растворе. В то же время при понижении температуры или увеличении вязкости в спиртовом

ряду величина смещения плавно уменьшается, возрастает квантовый выход флуоресценции. Эти и ряд других спектральных особенностей в поведении данных систем требуют дополнительных исследований с использованием методов пикосекундной кинетической спектроскопии.

На рис.3а приведены дифференциальные спектры при двух временных задержках Δt относительно импульса возбуждения для DMA-POPДОР в толуоле. Непосредственно после поглощения кванта света возникает полоса усиления с $\lambda_{\text{max}}=450$ нм, соответствующая полосе флуоресценции, и широкополосное бесструктурное наведенное поглощение во всей остальной спектральной области регистрации. С течением времени форма спектра практически не изменяется. Как показывают измерения кинетики оптической плотности в соответствующих спектральных областях, наведенное поглощение релаксирует по экспоненциальному закону с характеристическим временем 1800 пс, а в затухании усиления регистрируется двухэкспоненциальная зависимость с характеристическими временами 400 и 1800 пс. Данное обстоятельство представляется достаточно необычным фактом и может быть связано с нежесткой структурой пепочечного молекулярного остова и возможностью существования в неполярном растворителе по крайней мере двух устойчивых конформеров исследуемой молекулы. Оцененное время релаксации коррелирует с временем затухания флуоресценции, измеренным на флуориметре.

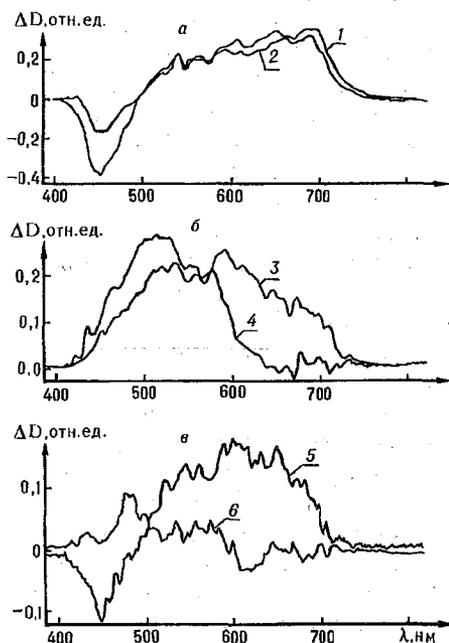


Рис.3. Нестационарные спектры поглощения DMA-POPДОР при различных временных задержках Δt между возбуждающим и зондирующим импульсами: в толуоле (а): 1 - 300 пс, 2 - 10; этаноле (б): 3 - 5, 4 - 30; октаноле (в): 5 - 10, б - 700 пс

При переходе к спиртовым растворам картина меняется существенным образом (рис.3 б,в). Для этанольного раствора регистрируется только наведенное поглощение, причем его спектр быстро трансформируется с течением времени. Кинетика оптической плотности, измеренная в длинноволновой части спектра ($\lambda_{\text{рег}}=650$ нм), дает одноэкспоненциальное затухание с характеристическим временем 15 пс. В коротковолновой части спектра ($\lambda_{\text{рег}}=500$ нм) наблюдается разгорание оптической плотности с таким же временем 15 пс. Следует считать, что в данном случае происходит образование и стабилизация

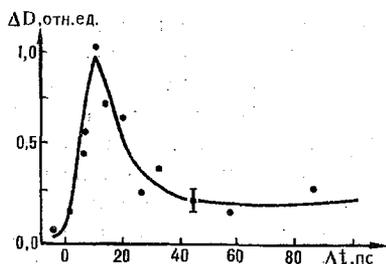


Рис.4. Кинетика изменения оптической плотности для раствора дифенилдисульфида в додекане

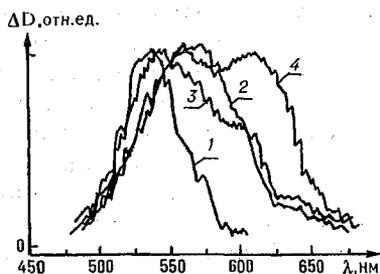


Рис.5. Спектры нестационарного поглощения аминофенилтильного радикала в гексане (1), диэтиловом эфире (2) и этаноле (3,4); $\Delta t=5$ (3), 100 (1,2), 120 пс (4)

состояния с внутримолекулярным переносом заряда и скрученной конфигурацией. Этот процесс должен контролироваться вязкостью, что и наблюдается в эксперименте с более вязким спиртовым растворителем — октанолом.

На рис. 3в приведены разрешенные во времени дифференциальные спектры исследуемой молекулы в октанолe. Трансформация спектров носит более сложный характер. В отличие от этанольного раствора наблюдается быстро релаксирующее усиление в коротковолновой области спектра, причем усиление достаточно быстро сменяется наведенным поглощением. Кинетика оптической плотности наведенного поглощения в длинноволновой области спектра дает характеристическое время затухания порядка 70 пс, которое соответствует времени релаксации усиления в коротковолновой области спектра ($\lambda_{\text{пер}}=475$ нм). По аналогии с этанольным раствором время 70 пс следует связать с процессом стабилизации ТИСТ-состояния, при этом оказывается, что соотношение времен для этанольного и октанольного растворов (15 и 70 пс) согласуется с соотношением вязкостей данных растворителей.

Регистрацию полосы усиления для более вязкого спиртового растворителя, равно как и возрастание в этом случае квантового выхода флуоресценции, о чем говорилось ранее, можно связать с двумя факторами. Во-первых, с увеличением “временного окна” для наблюдения флуоресценции в коротковолновой области спектра, что связано с уменьшением скорости образования слабофлуоресцирующего состояния с переносом заряда. Поскольку для конечного состояния с полным переносом заряда характерно наведенное поглощение в широкой спектральной области (в том числе и коротковолновой), мы наблюдаем уменьшение усиления и переход к наведенному поглощению в коротковолновой области спектра с характеристическим временем, соответствующим времени затухания длинноволнового поглощения, т.е. образования и стабилизации ТИСТ-состояния. Во-вторых, как отмечалось ранее, необходимым условием формирования ТИСТ-состояния является существование уже в основном состоянии комплексов определенной конфигурации с молекулами растворителя. Переход к более вязкому октанолу возможно уменьшает константу равновесия комплексообразования, при этом число молекул DMA-POPDP, сохраняющих в основном состоянии плоскую конфигурацию и не участвующих в образовании ТИСТ-состояний, увеличивается. Такие молекулы должны давать полосы усиления в коротковолновой области спектра аналогично толуольному раствору, что и наблюдается на эксперименте.

Таким образом, характер трансформации нестационарных дифференциальных спектров исследованных систем в полярных растворителях определяется существованием в основном состоянии как молекул, не участвующих в образовании комплексов с протонодонорными молекулами среды и сохраняющих плоскую конфигурацию в основном и в возбужденном электронном состоянии, так и комплексов определенной конфигурации, при возбуждении которых происходит образование ТИСТ-состояний. Константа равновесия данной двухцентровой системы контролируется вязкостью среды.

IV. Фотодиссоциация органических сульфидов

Образование свободных радикалов органических соединений может быть результатом фотодиссоциации одинарных связей в многоатомных молекулах. В этом плане исследовались симметричные и несимметричные серосодержащие ароматические соединения: дифенилдисульфид, аминифенилтиол, диметиламинофенилдисульфид, диэтиламинофенилдисульфид, 4-аминофенил-4-ацетофенилдисульфид, 4-аминофенил-4-ацетофенил-1-метоксидисульфид.

Характеристическое время фотодиссоциации τ_D определялось по нарастанию оптической плотности в максимумах полос поглощения образующихся свободных радикалов [18]. Эксперименты показали, что для всех исследованных серосодержащих молекул $\tau_D < 1$ пс.

Важной характеристикой процессов фотодиссоциации является квантовый выход разрыва молекулярных связей. Исследована зависимость квантового выхода φ_{S-H} распада S-H связи в аминифенилтиоле от энергии возбуждающего кванта. Методика определения абсолютного квантового выхода фотодиссоциации основывалась на регистрации количества выделившегося водорода при облучении аминифенилтиола в гептане [19,20]. Оказалось, что выход фотодиссоциации существенно зависит от энергии возбуждающего кванта: при $\lambda_{\text{возб}}=264, 300$ и 337 нм $\varphi_{S-H}=0,36; 0,25$ и $0,075$ соответственно.

Знание абсолютного значения φ_{S-H} позволило определить коэффициент экстинкции ϵ , аминифенилтиольного радикала, который составляет $\epsilon_r=9077$ моль $^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

Измеренный (по отношению к аминифенилтиолу) квантовый выход фотодиссоциации S-S связи в аминифенилдисульфиде также увеличивается с ростом энергии возбуждающего кванта ($\varphi_{S-S}=0,57$ и $0,048$ для $\lambda_{\text{возб}}=264$ и 337 нм соответственно). Причина наблюдаемых зависимостей может быть связана с наличием потенциального барьера для протекания процесса фотодиссоциации.

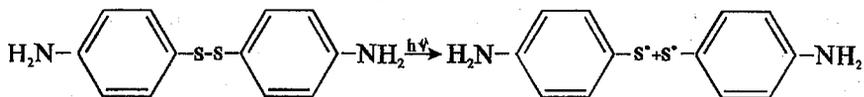
Относительно высокое значение коэффициента экстинкции ϵ_s ($\sim 10^4$ моль $^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) при переходе в возбужденное электронное состояние сульфидов указывает на то, что поглощение кванта света не может вести к прямому переходу на диссоциативный терм, т.е. диссоциация происходит при переходе системы со связывающего возбужденного уровня на несвязывающий диссоциативный. В целом, полученная совокупность экспериментальных данных для всех исследованных серосодержащих соединений ($\tau_p \leq 1$ пс, зависимость выхода диссоциации от $\lambda_{\text{возб}}$, высокое значение ϵ_s) позволяет считать [21], что наиболее вероятным механизмом фотодиссоциации серосодержащих ароматических соединений является преддиссоциация.

Конкуренция между разделением свободных радикалов и их геминальной рекомбинацией регулируется эффектом "клетки". Проявление этого эффекта для дифенилдисульфида и аминопроизводных фенилтиола и дифенилдисульфида оказалось принципиально различным. Кривая кинетики оптической плотности финилтиольного радикала в додекане (рис.4) имеет ярко выраженный максимум [22]. Такое поведение кинетической зависимости характерно для протекания процесса геминальной рекомбинации радикалов, когда "клетка" растворителя препятствует выходу радикалов в объем. Оцененное время τ_g быстрой первичной геминальной рекомбинации оказалось равным 10 пс. На кинетической кривой поглощения аминифенилтиольного радикала при диссоциации аминифенилтиола пик геминальной рекомбинации не регистрируется. Не наблюдается и заметной зависимости квантового выхода диссоциации от вязкости среды. В данном случае это можно объяснить тем, что эффект "клетки" для атома водорода отсутствует. Характерного вида кинетической зависимости также не наблюдается и для аминопроизводных дифенилдисульфидов, хотя увеличение вязкости среды ведет к уменьшению квантового выхода фотодиссоциации, что свидетельствует в пользу наличия эффекта "клетки". Видимо, в данном случае на характере протекания процессов геминальной рекомбинации существенным образом начинает сказываться быстрый внутримолекулярный перенос заряда во вновь образующихся аминифенилтиольных радикалах.

В работе [23] изучалась фотодиссоциация и геминальная рекомбинация радикалов при фотолизе тетрафенилгидразина (N-N связь). Обнаружено, что магнитное поле ослабляет эффект геминальной рекомбинации. Это связывалось с тем, что конечным уровнем в процессе преддиссоциации является триплетный. Для случая ароматических дисульфидов магнитное поле не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на кинетику геминальной

рекомбинации. По-видимому, это связано с тем, что в серосодержащих молекулах преддиссоциация происходит в системе синглетных уровней.

Как уже отмечалось, отсутствие характерного пика геминальной рекомбинации для аминифенильных радикалов можно связать с развитием быстрых процессов внутримолекулярного перераспределения заряда во вновь образуемых при фотодиссоциации S-S-связи радикалах:



Представлялось интересным исследовать механизмы данных процессов и природу образующихся в результате их протекания состояний.

На рис.5 представлены нестационарные спектры поглощения аминифенилтильного радикала в различных растворителях. В нейтральном гексане (диэлектрическая проницаемость $\epsilon=1,9$) наблюдается узкая по сравнению с другими растворителями полоса нестационарного поглощения радикала (кривая 1, $\lambda_{\text{макс}}=540$ нм). При этом форма и положение максимума спектра не изменяется при увеличении Δt вплоть до 1000 пс. В диэтиловом эфире ($\epsilon=4,22$) спектр поглощения радикала (кривая 2, $\lambda_{\text{макс}}=565$ нм) уширен за счет увеличения интенсивности длинноволнового крыла. Форма и положение спектра в диапазоне времени от 1 до 1000 пс также практически не зависят от Δt . Переход к протонодонорным полярным растворителям приводит к новым эффектам: появлению в спектре поглощения аминифенилтильного радикала двух разделенных полос и заметным трансформациям спектров во времени. Так, для этанола ($\epsilon=25,2$) при малых Δt нестационарный спектр поглощения (рис. 5, кривая 3) расположен в области длин волн, характерной для поглощения радикала в слабополярных растворителях. С ростом Δt появляется длинноволновая полоса, имеющая максимум $\lambda_{\text{макс}}=610$ нм (кривая 4), а коротковолновая полоса испытывает незначительное длинноволновое смещение (вероятно, вследствие вклада длинноволновой полосы). При использовании в качестве растворителя метанола ($\epsilon=32,6$) наблюдалась аналогичная картина.

Изменение оптической плотности D нестационарного поглощения радикала от времени задержки Δt между возбуждающим и зондирующим импульсами изучалось для длин волн $\lambda_{\text{зонд}}=560$ и $\lambda_{\text{зонд}}=610$ нм. Рассчитанные кинетические кривые сравнивались с экспериментальными зависимостями и определялось соответствующее характеристическое время. Оказалось, что время образования коротковолновой полосы в различных растворителях $\tau_D \leq 1$ пс. Время образования полосы с $\lambda_{\text{макс}}=610$ нм равно 20 и 25 пс соответственно для растворов в метаноле и этаноле.

Наблюдаемые спектральные особенности могут быть объяснены существованием нейтральной и ионной форм аминифенилтильного радикала. Возможность существования ионной формы ранее уже предполагалась для объяснения значительного дипольного момента аминифенилтильного радикала [24] и наблюдаемого уменьшения его реакционной способности при взаимодействии со стирилом в полярных растворителях [25].

Для выяснения геометрической структуры «ионной» формы была изучена зависимость скорости ее формирования от объема замещающей аминогруппы и свойств среды. С этой целью для растворителей различной природы была исследована кинетика изменения во времени оптической плотности в полосе, соответствующей ионной форме радикалов, образующихся при фотолизе диэтиламинодифенилдисульфида. Длины волн максимумов полос поглощения $\lambda_{\text{макс}}$ составляли 620 и 680 нм соответственно. Анализ экспериментальных результатов показал, что для растворителей относительно малой вязкости характеристическое время образования ионной формы

является линейной функцией вязкости. Отклонение от линейной зависимости наблюдается для более вязкого бутанола, что, вероятно, объясняется дополнительным влиянием микроструктуры растворителя. При этом увеличение вязкости среды от 0,35 сР для ацетонитрила до 2,25 сР для бутанола приводит к увеличению характеристического времени образования ионной формы от 10 пс до 200 пс. Сравнение полученных данных для растворов amino- и диэтиламинозамещенных фенилтильных радикалов показывает, что увеличение объема замещающих групп на атоме азота приводит к соответствующему увеличению времени образования ионной формы. Характеристическое время формирования данной структуры для диэтиламинофенилтильного радикала в этаноле примерно 1,6 раз больше, чем для аминифенилтильного радикала. Эти результаты дают возможность предположить, что разделение зарядов и стабилизация ионной формы аминозамещенных радикалов сопровождается вращением аминогруппы. Такой процесс в радикалах аналогичен образованию ТИСТ-состояний, имеющих место для органических молекул, о чем уже говорилось.

Аминозамещенные фенилтильные радикалы представляют собой молекулярную систему, в которой донор электрона (аминогруппа) отделена от акцептора электрона (атома серы S) π -системой фенильного кольца, т.е. являются классическим примером ТИСТ-образующих систем. Экспериментально наблюдаемые для аминозамещенных фенилтильных радикалов спектральные и кинетические закономерности полностью аналогичны проявлениям ТИСТ-состояний, которые свойственны молекулярным системам. Еще раз подчеркнем важную роль сольватации образующихся радикалов и образования комплексов с растворителем в процессе разделения зарядов и стабилизации полярной формы.

Таким образом, можно сделать заключение, что при фотолизе исходных аминозамещенных дисульфидов после разрыва S-S связи образуются соответствующие тильные радикалы, имеющие плоскую геометрию с частичным переносом заряда. Последующий полный перенос электрона от донорной аминогруппы к акцепторному атому серы сопровождается поворотом плоскости аминогруппы относительно плоскости акцептора с образованием ТИСТ-состояния, причем между формами устанавливается динамическое равновесие. Константа такого равновесия и скорость образования ТИСТ-состояния из плоской конфигурации аминозамещенных радикалов определяются свойствами растворителя и объемом вращающихся аминогрупп.

Отметим, что тильные свободные радикалы, образующиеся при фотолизе дисульфидов в конденсированной и газовой фазах, могут являться активными центрами лазерной среды [26].

Представленные результаты позволили прояснить вопрос о механизмах сверхбыстрых процессов образования органических свободных радикалов. В то же время поставленные в работе вопросы получили дальнейшее развитие при исследовании механизмов диссоциации дисульфидов в фемтосекундном диапазоне времени [27], работах по квантово-химическому анализу их электронной структуры [28], в процессе изучения векторных характеристик распада S-S-связи [29]. Недавно зарегистрировано образование ТИСТ-состояний [30] в изолированных молекулах пианофенилдисилана при исследовании квазилинейчатых спектров люминесценции этих соединений и их вандерваальсовских комплексов в сверхзвуковой струе.

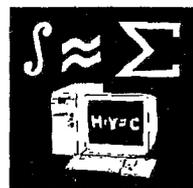
1. Gomberg M. Triphenylmethyle, in Fall von dreiwertigen Kohlenstoff. Berlin, 1900. Vol.33. P.3150.

2. Ingold C., Barton H. // Proc. Leeds Phys. Soc. 1929. Vol.1. 421.

3. Кошкин Л.В., Мусабеков Ю. Возникновение и развитие представлений об органических свободных радикалах. М., 1967.

4. Лысак Н.А., Мельничук С.В., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. // ЖПС. 1987. Т.47. С.267.
5. Молекулярные взаимодействия / Под ред. Г.Ратайчика, У.М.Орвилл-Томаса. 1984. С.560.
6. Wazner P.J., Leavitt R.A. // J. Am. Chem. Soc. 1973. Vol.95. P.3669.
7. Борисевич Н.А., Лысак Н.А., Мельничук С.В. и др. // ДАН СССР. 1987. Т.295. С.900.
8. Inbar S., Linshitz H., Cohen C.S. // J. Am. Chem. Soc. 1980. Vol.102. P.1419.
9. Weller A. // Z. Phys. Chem. N.F. 1982. Vol.130. P.129.
10. Hinatu J., Masuhara H., Mataga N., Misumi S. // Bull. Chem. Soc. Japan. 1978. Vol.51. P.1032.
11. Борисевич Н.А., Лысак Н.А., Мельничук С.В. и др. // ЖПС. 1988. Т.49. С.653.
12. Lippert E., Luder W., Boos H. Advances in molecular spectroscopy / Ed. A.Bu Manginy. Oxford, 1962. P.443.
13. Rotkievich K., Grellmann K.N., Grabovsky Z.R. // Chem. Phys. Lett. 1973. Vol.19. P.315.
14. Cazeau-Dubroca C., Ait Lyazidi S., Cambou P. et al. // J.Phys.Chem. 1989. Vol.93. P.2347.
15. Борисевич Н.А., Казберук Д.А., Мельничук С.В. и др. // ЖПС. 1995. Т.62. №3. С.49.
16. Клищенко А.П., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. // Оптика и спектроскопия. 1997. Т.83. №4. С.664.
17. Грузинский В.В., Сенюк М.А., Козлов И.Н. и др. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т.6. №3. С.313.
18. Борисевич Н.А., Мельничук С.В., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. // Изв. АНР. Сер. физ. 1992. Т.56. №2. С.64.
19. Малкин Я.Н., Кузьмин В.А., Рузиев Ш. // Изв. АН СССР. Сер. хим. 1987. №3. С.537.
20. Борисевич Н.А., Малкин Я.Н., Мельничук С.В. и др. // Изв. АН СССР. Сер. хим. 1990. №3. С.540.
21. Кривошеев Я.В., Мельничук С.В., Плотников В.Г. и др. // ДАН СССР. 1990. Т.312. С.913.
22. Мельничук С.В., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. №6. С.50.
23. Hyde M.G., Beddard G.S. // Chem. Phys. 1991. Vol.151. P.239.
24. Morine G.H., Kuntz R.R. // Chem. Phys. Lett. 1979. Vol.67. P.552.
25. Ito O., Matsuda M. // J. Amer. Chem. Soc. 1982. Vol.104. P.1701.
26. Борисевич Н.А., Лысак Н.А., Мельничук С.В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т.43. №3. С.113.
27. Ernsting N.P. // Chem. Phys. Lett. 1990. Vol.166. P.221.
28. Майер Г.В., Базыль О.К., Артюхов В.Я. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т.6. №3. С.308.
29. Blokhin A.P., Gelin M.F., Polubisok S.A. et al. // J. of Mol. Structure. 1997. Vol.408/409. P.569.
30. Taji Y., Ishikawa H., Miyazawa T. et al. // J. Am. Chem. Soc. 1997. Vol.119. P.7400.

Математика и информатика



УДК 33:517.925

Б.С.КАЛИТИН

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТИПА "ЭФФЕКТИВНАЯ КОНКУРЕНЦИЯ". НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ЗАПАС ПРОЧНОСТИ*

The problem of stability of the equilibrium prices in the simple critical cases.

В данной статье исследуется экономическая модель [1] для случая, когда запасы прочности неотрицательны, т.е.

$$S_j = \frac{v_j}{p_j^0 - p_j^*} + \frac{d_j}{p_j^{**} - p_j^0} - r_j q_j^0 \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

После замены переменных $x_j = p_j - p_j^0$, $j = \overline{1, n}$, исследуемая система принимает вид

$$\frac{dx_j}{dt} = - \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ji} (x_j - x_i) - S_j x_j - r_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ji} (x_j - x_i) x_j + \frac{v_j x_j}{(p_j^0 - p_j^*)(x_j + p_j^0 - p_j^*)} - \frac{d_j x_j^2}{(p_j^0 - p_j^{**})(x_j + p_j^0 - p_j^{**})}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Теорема 2. При выполнении (1) равновесные цены $p_j = p_j^0$, $j = \overline{1, n}$, будут асимптотически устойчивыми, когда хотя бы одна цена имеет строго положительный запас прочности, т.е. выполняется неравенство

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n > 0. \quad (3)$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении неравенств (1), (3) система линейного приближения для системы (2)

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. С этой целью покажем сначала, что матрица $(-A)$ невырождена и ее определитель строго больше нуля. Действительно, как известно, определитель $\det(-A)$ представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых есть произведение элементов этой матрицы из различных строк и столбцов. Разобьем эти слагаемые на две группы. К первой группе отнесем те из них, которые получаются из произведения ее

диагональных элементов: $\alpha = \prod_{j=1}^n (\sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ji} + S_j)$, а ко второй — все остальные

слагаемые. Нетрудно видеть, что в выражении для α слагаемые, не содержащие множителей S_j , представляют собой сумму слагаемых второй группы, взятую с обратным знаком. Следовательно, все слагаемые второй группы уничтожаются с определенной частью слагаемых первой группы. Оставшаяся часть слагаемых в выражении для α содержит все формы набора S_1, S_2, \dots, S_n :

* Продолжение темы, начало разработки которой см. №2 за 1997 г.

линейные, квадратичные, кубические и вплоть до однородной формы n -ой степени вида S_1, S_2, \dots, S_n с положительными коэффициентами. Таким образом, если хотя бы одна из величин $S_j \neq 0$, то $\det(-A) > 0$. Далее, каждый из последовательных главных миноров $\det A_j$ матрицы $(-A)$ имеет точно такую же структуру, как и $\det(-A)$, т.е. соответствующая j -му минору матрица имеет вид

$$A_j = \begin{bmatrix} -\sum_{i=2}^j c_{1i} - S_1^j & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1j} \\ c_{12} & -\sum_{i=1, i \neq 2}^j c_{2i} - S_2^j & c_{23} & \dots & c_{2j} \\ c_{13} & c_{23} & -\sum_{i=1, i \neq 3}^j c_{3i} - S_3^j & \dots & c_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1j} & c_{2j} & c_{3j} & \dots & -\sum_{i=1, i \neq j}^j c_{ji} - S_j^j \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $S_k^j = S_k + \sum_{i=j+1, i \neq k}^n c_{ki} \quad \forall k = 1, 2, \dots, j$. По только что доказанному $\det(-A) > 0$

$\forall j = \overline{1, n}$. Таким образом, матрица $(-A)$ является, согласно критерию Сильвестра, определенно положительной, а в силу ее симметрии линейная система (4) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Последнее, по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [2], и дает асимптотическую устойчивость равновесия цен.

Изучим теперь ситуацию с нулевым запасом прочности всех рыночных цен. Пусть

$$S_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

В этом случае матрица A имеет нулевое собственное значение и мы имеем дело с критическим случаем системы в смысле [2]. При этом все миноры матрицы $(-A)$, определяемые матрицами $A_j, j = 1, 2, \dots, n-1$, строго положительны. Это означает, что у матрицы $(-A)$ только одно собственное значение равно нулю, а остальные отрицательны. Для исследования выделенного критического случая преобразуем последовательно систему (2) к виду, позволяющему воспользоваться известными результатами об устойчивости [2,3]. С этой целью сделаем в системе (2) замену переменных

$$y_j = x_j \text{ для } j = 1, 2, \dots, n-1 \text{ и } y_n = \sum_{j=1}^n x_j. \quad (7)$$

Тогда (2) перепишется в виде

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f}(y), \quad y \in R^n, \quad (8)$$

где вектор-функция $\tilde{f} = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ определяется равенствами

$$f_j(y) = -r_j \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} (y_j - y_i) y_j - r_j \alpha_{jn} (y_j - y_n) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k y_j + \frac{v_j y_j^2}{(p_j^0 - p_j^*)(y_j + p_j^0 - p_j^*)} - \frac{d_j y_j^2}{(p_j^0 - p_j^{**})(y_j + p_j^0 - p_j^{**})}, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
f_n(y) = & \sum_{j=1}^{n-1} r_j \left(\sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} \alpha_{ji} (y_j - y_i) y_j + \alpha_{jn} y_j (y_j - y_n + \sum_{k=1}^{n-1} y_k) \right) + \\
& + r_n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni} (y_j - y_n + \sum_{k=1}^{n-1} y_k) (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{v_j y_j^2}{(p_j^0 - p_j^*) (y_j + p_j^0 - p_j^*)} + \\
& + \frac{v_n (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k)}{(p_j^0 - p_j^*) (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k + p_j^0 - p_j^*)} - \frac{d_j y_j^2}{(p_j^0 - p_j^{**}) (y_j + p_j^0 - p_j^{**})} \\
& - \frac{d_n (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k)}{(p_j^0 - p_j^{**}) (y_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k + p_j^0 - p_j^{**})},
\end{aligned} \tag{10}$$

а матрица \tilde{A} имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
-\sum_{i=2}^{n-1} c_{1i} - 2c_{1n} & c_{12} - c_{1n} & c_{13} - c_{1n} & \dots & c_{1,n-1} - c_{1n} & c_{1n} \\
c_{12} - c_{2n} & -\sum_{i=1, i \neq 2}^{n-1} c_{2i} - 2c_{2n} & c_{23} - c_{2n} & \dots & c_{2,n-1} - c_{2n} & c_{2n} \\
c_{13} - c_{3n} & c_{23} - c_{3n} & -\sum_{i=1, i \neq 3}^{n-1} c_{3i} - 2c_{3n} & \dots & c_{3,n-1} - c_{3n} & c_{3n} \\
\hline
c_{1,n-1} - c_{n-1,n} & c_{2,n-1} - c_{n-1,n} & c_{3,n-1} - c_{n-1,n} & \dots & -\sum_{i=1, i \neq n-1}^{n-1} c_{n-1,i} - 2c_{n-1,n} & c_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Выпишем матрицу \tilde{A} в блочном виде, выделив из нее матрицу B размерности $(n-1) \cdot (n-1)$ путем вычеркивания последней строки и последнего столбца: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} B & C \\ O & O \end{bmatrix}$, где $C = \text{colon}(c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{n-1,n})$. Согласно сказанному,

у матрицы B все собственные значения вещественны и строго отрицательны. Перепишем систему (8) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{z} = Bz + cy_n + f(z, y_n), \\ \dot{y}_n = f_n(z, y_n), \end{cases} \tag{11}$$

где $z = \text{colon}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, а $f = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$, причем функции $f_j(z, y_n)$, $j=1, 2, \dots, n-1$, и $f_n(z, y_n)$ определяются равенствами (9), (10) и не содержат линейных членов.

Воспользуемся известным правилом исследования критического случая с одним нулевым корнем [2,3]. Для этого найдем функции $y_j = Y_j(y_n)$, $j=1, 2, \dots, n-1$, как решение алгебраической системы

$$Bz + cy_n + f(z, y_n) = 0. \tag{12}$$

По теореме о неявных функциях такое решение существует, поскольку $\det B \neq 0$. Оно представляется сходящимися рядами

$$Y_j(y_n) = \beta_j^{(1)} y_n + \beta_j^{(2)} y_n^2 + \beta_j^{(3)} y_n^3 + \dots, \quad j=1, 2, \dots, n-1. \tag{13}$$

Сделаем в системе (11) замену переменных $\xi = z - Y(y_n)$, где $\xi = \text{colon}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, $Y = \text{colon}(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = B\xi + f(\xi + Y(y_n), y_n) - f(Y(y_n), y_n) - \frac{dY(y_n)}{dy_n} f_n(\xi + Y(y_n), y_n), \\ \dot{y} = f_n(\xi + Y(y_n), y_n), \end{cases} \quad (14)$$

где учтено тождество (12) при $z = Y(y_n)$. Последнее уравнение системы (14) не содержит линейных членов. Подставляя в это уравнение ряды (13), получим

$$y_n = g_n y_n^m + g_{m+1} y_n^{m+1} + g_{m+2} y_n^{m+2} + \dots + f_n(\xi, y_n). \quad (15)$$

Здесь положено $f_n(\xi + Y(y_n), y_n) = f_n(Y(y_n), y_n) + \bar{f}_n(\xi, y_n)$, а g_k — коэффициенты в разложении функции $f_n(Y(y_n), y_n)$ по степеням переменной y_n в окрестности точки $y_n = 0$. От коэффициентов g_k зависит свойство устойчивости системы (14). Они в свою очередь зависят от коэффициентов $\beta_j^{(k)}$ в разложении (13). Для исследования характера указанной зависимости рассмотрим два случая.

А) Предположим сначала, что в изучаемой модели отсутствуют силы влияния продавцов на цены собственных товаров (совершенная конкуренция), т.е. выполняются равенства

$$v_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

В этом случае, как нетрудно сосчитать, коэффициенты ряда (13) имеют простой вид:

$$\beta_j^{(1)} = 1/n \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad \text{и} \quad \beta_j^{(k)} \equiv 0 \quad \forall k = 2, 3, \dots \quad (17)$$

Это означает, что все коэффициенты g_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, в разложении функции $f_n(Y(y_n), y_n)$ тождественно равны нулю. Такая ситуация, согласно [3, с.108], называется особым случаем. Он характеризуется тем, что система (14) обладает решением $\xi_j = 0$, $j = \overline{1, n}$; $y_n = y_n^0 = \text{const}$. Но тогда система (11) имеет семейство точек покоя

$$y_j = (1/n) y_n^0, \quad j = \overline{1, 2, \dots, n-1}; \quad y_n = y_n^0, \quad (18)$$

зависящее от произвольной постоянной y_n^0 , среди которых находится и тривиальное решение $y_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, при $y_n^0 = 0$. Более того, согласно теореме [3, с.113], всякая точка покоя (18) системы (14), достаточно близкая к началу координат, устойчива. При этом каждое начальное состояние, достаточно близкое к началу, порождает решение, неограниченно приближающееся к одному из состояний равновесия (18), если только время $t \rightarrow +\infty$. Возвращаясь к переменным вектора x по формулам (7), приходим к тому, что система (2) имеет однопараметрическое семейство точек покоя $x_j = a$, $j = \overline{1, n}$; $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. Предположим, что рынок имеет нулевой запас прочности и ни один из продавцов не может влиять на цены своих товаров, т.е. выполняются соответственно условия (6) и (16). Тогда существует множество равновесных цен вида

$$\bar{p}_j = p_j^0 + a, \quad j = \overline{1, n}; \quad a \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

каждое из которых устойчиво неасимптотически при достаточно малых значениях числа a . Более того:

(а) разность $p_j - p_i$ между любой парой цен p_j и p_i , $i, j = \overline{1, n}$, является асимптотически устойчивой величиной;

(в) равновесное количество единиц q_j^0 , $j = \overline{1, n}$, продаваемого товара асимптотически устойчиво.

Все три утверждения теоремы вытекают непосредственно из предшествующих рассуждений об исследовании критического случая системы (2) в так называемом особом случае [3]. При этом утверждение (а) учитывает тот факт, что всякая разность $p_j - p_i$ для точек покоя (19) постоянна. А утверждение (в) следует из (а) по определению величин объемов продаж $q_j(p)$ в модели (2).

Б) Пусть теперь (16) не выполняется, т.е. по крайней мере один из продавцов в состоянии воздействовать на цену одного из своих товаров. В этом случае вектор $\beta^{(1)} = (\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_1^{(n-1)})$ коэффициентов при линейных слагаемых в разложении (13) остается таким же, как и в случае А), и определяется соотношениями (17). Анализируя вид функции (10), нетрудно заметить, что при подстановке ряда (13) в эту функцию мы получим правую часть представления

$$(15) \text{ со значением } m=2, \text{ причем } g_2 = -\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{v_j}{(p_j^0 - p_j^*)^2}. \text{ Следовательно,}$$

если (16) не выполняется, то разложение (15) по переменной u_n начинается всегда с четной (точнее, второй) степени. А значит, опираясь на общую теорию [3, с.94], нулевое решение системы (14) в данном случае неустойчиво. Это равносильно следующему утверждению.

Теорема 5. Если рынок имеет нулевой запас прочности, т.е. выполняется (6), и хотя бы один из продавцов может влиять на цену хотя бы одного из своих товаров, то равновесные цены $p_j = p_j^0, j = 1, 2, \dots, n$, в модели (2) неустойчивы.

Замечание. Отметим, что запас прочности S_j j -го конкурента оправдывает свое название по следующим причинам. Если $S_j > 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, то даже при слабой (или неактивной) конкуренции, т.е. при достаточно малых или равных нулю значениях коэффициентов c_{ji} , равновесные цены рынка остаются асимптотически устойчивыми. Это следует непосредственно из структуры матрицы линейного приближения модели (2). Наличие конкуренции в данном случае лишь усиливает эффект устойчивости рыночного равновесия. Неустойчивость, таким образом, может возникать только тогда, когда некоторая часть из набора величин $S_j, j = \overline{1, n}$, является отрицательной. Если для некоторых товаров запас прочности S_j отрицателен, то для сохранения свойства устойчивости равновесия рынка в целом существенную роль играет понятие суммарного запаса прочности $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ (запас прочности рынка). Действительно, здесь помимо уже полученных выше утверждений об устойчивости при $S > 0$ мы можем доказать, что обратное неравенство

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n < 0, \quad (20)$$

вообще говоря, соответствует неустойчивости равновесия в модели (2). Покажем это. Рассмотрим функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x) = -\frac{1}{2} x'Ax = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < i \leq n} c_{ji} (x_j - x_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n S_j x_j^2. \text{ При выполнении (20) форма}$$

$V(x)$ принимает отрицательные значения в любой окрестности начала координат R^n . Кроме того, ее производная по времени, вычисленная в силу системы

линейного приближения (4), равна $\dot{V}_4(x) = -\sum_{j=1}^n (c'_j x)^2$, где c'_j — j -ая строка

матрицы A . Если $\det A \neq 0$, то форма $\dot{V}_4(x)$ определенно отрицательная и поэтому производная по времени, вычисленная от той же формы $V(x)$, но теперь уже, в силу исходной нелинейной системы (2), будет также определенно отрицательной функцией в некоторой окрестности начала R^n (см. лемма 5 [6]). Отсюда по теореме Ляпунова [6, с.26] следует

Теорема 6. Если для системы (2) имеет место отрицательный запас прочности рынка, т.е. выполняется (20), и матрица A невырождена, то равновесные цены $p_j = p_j^0, j = \overline{1, n}$, неустойчивы.

1. Калитин Б. С. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер.1. 1997. №2. С.68.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
4. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.

Поступила в редакцию 25.03.97.

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Linear extremal dual problem of special structures is considered. An optimality criterion is formulated and proved.

Рассмотрим конечную ориентированную сеть $S=(I, U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U . Будем считать, что $I=I^c \cup I^*$, $I^c \cap I^* = \emptyset$, где I^c – множество узлов с постоянными интенсивностями a_i , I^* – множество узлов с переменными интенсивностями $\pm x_i$. Через $I^{\Pi} \subset I^*$ обозначим множество узлов (пунктов производства) с интенсивностями x_i и через $I^* \setminus I^{\Pi}$ – множество узлов с интенсивностями x_i , где $a_{*i} \leq x_i \leq a_i^*$, $a_{*i} > 0$.

Введем для узлов $i \in I^*$ характеристику c_i , которая для узлов из I^{Π} означает затраты, связанные с увеличением производства на единицу продукта, для узлов из $I^* \setminus I^{\Pi}$ – затраты на хранение единицы продукта. Остальные характеристики оставим традиционными: d_{ij} – пропускная способность дуги (i, j) ; x_{ij} – дуговой поток; c_{ij} – стоимость перевозки единицы потока по дуге (i, j) .

На сети S рассмотрим задачу:

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I^*} c_i x_i \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} a_i, i \in I^c \\ x_i, i \in I^{\Pi} \\ -x_i, i \in I^* \setminus I^{\Pi}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I^*} \alpha_i^k x_i = b_k, k = \overline{1, l}, \quad (3)$$

$$a_{*i} \leq x_i \leq a_i^*, i \in I^*; 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, (i, j) \in U. \quad (4)$$

Обозначим через $S^p = \{I^p, U^p\}$, $p = \overline{1, s}$ компоненты связности сети $S = (I, U)$. Будем считать, что $I^p \cap I^* \neq \emptyset$ для $1 \leq p \leq s$, ибо в противном случае в задаче (1)–(4) можно выделить независимую подзадачу, соответствующую компоненте связности S^p , $I^p \cap I^* = \emptyset$, которая сводится к решению классической транспортной задачи.

Двойственная задача для (1)–(4) имеет вид:

$$\sum_{i \in I^c} a_i y_i + \sum_{k=1}^l b_k g_k + \sum_{i \in I^*} a_{*i} v_i - \sum_{i \in I^*} a_i^* t_i - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} w_{ij} \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$y_i - y_j - w_{ij} \leq c_{ij}, w_{ij} \geq 0, (i, j) \in U, \quad (6)$$

$$-y_i \text{sign}[i] + \sum_{k=1}^l \alpha_i^k g_k - t_i + v_i = c_i, t_i \geq 0, v_i \geq 0, i \in I^*, \quad (7)$$

где $\text{sign}[i] = \begin{cases} 1, i \in I^{\Pi} \\ -1, i \in I^* \setminus I^{\Pi}. \end{cases}$

Определение 1. Двойственным планом задачи (1)–(4) называется совокупность $y = (y_i, i \in I; g_k, k = \overline{1, l}; v_i, t_i, i \in I^*; w_{ij}, (i, j) \in U)$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (5)–(7).

Каждому двойственному плану y поставим в соответствие копоток δ задачи (1)–(4):

$$\delta = (\delta_{ij}, (i, j) \in U; \delta_i, i \in I^*),$$

где $\delta_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}, (i, j) \in U$, $\delta_i = -y_i \text{sign}[i] + \sum_{k=1}^l \alpha_i^k g_k - c_i, i \in I^*$.

Введем условия согласования компонент копотока $\delta = (\delta_{ij}, (i,j) \in U, \delta_i, i \in I^*)$ с компонентами векторов w, t, v : $w = (w_{ij}, (i,j) \in U), t = (t_i, i \in I^*), v = (v_i, i \in I^*)$, которые должны выполняться для оптимального двойственного плана, ибо при их нарушении можно, изменяя соответствующие компоненты векторов w, t, v , добиться увеличения двойственной целевой функции (5).

Условия согласования имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \delta_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, (i,j) \in U; \\ w_{ij} &= 0, \text{ если } \delta_{ij} \leq 0, (i,j) \in U; \\ t_i &= 0, v_i = 0, \text{ если } \delta_i = 0, i \in I^*; \\ t_i &= \delta_i, v_i = 0, \text{ если } \delta_i > 0, i \in I^*; \\ t_i &= 0, v_i = -\delta_i, \text{ если } \delta_i < 0, i \in I^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Следуя [1], определим опору сети S как совокупность множеств $S_{on} = \{I_{on}, U_{on}\}, I_{on} \subseteq I^*, U_{on} \subseteq U$, таких, что:

1) каждая компонента связности $S_{on}^p = \{J^p, U_{on}^p\}, p = \overline{1, q}$ частичной сети $\{I, U_{on}\}$ не содержит циклов;

2) в каждой компоненте связности $\{J^p, U_{on}^p\}$ содержится хотя бы один опорный узел, т.е. $J_{on}^p = J^p \cap I_{on} \neq \emptyset, p = \overline{1, q}$;

3) имеет место равенство $q + l = |I_{on}|$ и $\det D(I_{on}) \neq 0$. Здесь $D(I_{on})$ — квадратная матрица размера $(q+l) \times |I_{on}|$,

$$D(I_{on}) = \begin{bmatrix} \hat{D} \\ D_\alpha \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_q \end{bmatrix}$$

и блок D_p представляет собой строку из $|I_{on}^p|$ элементов, каждый из которых равен $-\text{sign}[i], i \in J_{on}^p, p = \overline{1, q}$, а $D_\alpha - l \times |I_{on}|$ — матрица, k -ая строка которой состоит из элементов $\alpha_i^k, i \in I_{on}, k = \overline{1, l}$.

Определение 2. Пара $\{\delta, S_{on}\}$ из копотока и опоры сети называется опорным копотоком.

Компоненты копотока δ_{ij} по опорным дугам $(i,j) \in U_{on}$ и δ_i по опорным узлам $i \in I_{on}$ называют опорными дуговыми и узловыми копотоками соответственно. Остальные компоненты $\delta_{ij}, (i,j) \in U_n = U \setminus U_{on}$ и $\delta_i, i \in I_n = I^* \setminus I_{on}$, неопорные дуговые и узловые компоненты копотока δ соответственно.

Пусть $\{\delta, S_{on}\}$ — некоторый опорный копоток. Построим по нему опорный псевдопотокплан $\chi = (\chi_{ij}, (i,j) \in U; \chi_i, i \in I^*)$. Неопорные компоненты псевдопотокплана χ положим равными:

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= 0, \text{ если } \delta_{ij} \leq 0; \chi_{ij} = d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij} > 0, (i,j) \in U_n, \\ \chi_i &= a_i, \text{ если } \delta_i \leq 0; \chi_i = a_i^*, \text{ если } \delta_i > 0, i \in I_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Опорные дуговые и узловые компоненты псевдопотокплана χ найдутся однозначно из системы:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_i^+(U_{on})} \chi_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{on})} \chi_{ji} &= a_i - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji}, i \in I^c, \\ \sum_{j \in I_i^+(U_{on})} \chi_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{on})} \chi_{ji} &= - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji} + \chi_i \text{sign}[i], i \in I^* \setminus I_{on}, \\ \sum_{j \in I_i^+(U_{on})} \chi_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{on})} \chi_{ji} - \chi_i \text{sign}[i] &= - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji}, i \in I_{on}, \\ \sum_{i \in I_{on}} \alpha_i^k \chi_i &= b_k - \sum_{i \in I^* \setminus I_{on}} \alpha_i^k \chi_i, k = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (10)$$

Укажем способ решения системы (10). Обозначим $f = (f_i, i \in I; t_k, k = \overline{1, l})$ — вектор правых частей системы (10), где

$$f_i = \begin{cases} a_i - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji}, & i \in I^c; \\ - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji} + \chi_i \text{sign}[i], & i \in I^* \setminus I_{on}; \\ - \sum_{j \in I_i^+(U_n)} \chi_{ij} + \sum_{j \in I_i^-(U_n)} \chi_{ji}, & i \in I_{on}; \end{cases}$$

$$t_k = b_k - \sum_{i \in I \setminus I_{on}} \alpha_i^k \chi_i, \quad k = \overline{1, l}.$$

Для каждой компоненты связности $S_{on}^p = \{J^p, U_{on}^p\}$, $p = \overline{1, q}$, сложим уравнения системы (10), соответствующие узлам множества J^p и рассмотрим полученные в результате указанных преобразований уравнения в совокупности с последними l уравнениями системы (10). Полученная система линейных уравнений $D(I_{on}) \cdot r = \bar{f}$, где $r = (\chi_i, i \in I_{on})$, $\bar{f} = (\bar{f}_p, p = \overline{1, q}; t_k, k = \overline{1, l})$, $\bar{f}_p = \sum_{j \in J^p} f_j$, $p = \overline{1, q}$ имеет единственное решение, так как $\det D(I_{on}) \neq 0$.

Остальные компоненты опорного псевдопотокосплана χ_{ij} , $(i, j) \in U_{on}^p$, соответствующие компонентам связности $S_{on}^p = \{J^p, U_{on}^p\}$, $p = \overline{1, q}$, вычисляем согласно [2].

Определение 3. Опорный копоток $\{\delta, S_{on}\}$ называется вырожденным, если среди его неопорных компонент имеются нулевые.

Приведем и докажем критерий оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{on}\}$ двойственной задачи (5)–(7).

Теорема (критерий оптимальности). Соотношения

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= 0 \text{ при } \delta_{ij} < 0, \chi_{ij} = d_{ij} \text{ при } \delta_{ij} > 0, \\ 0 \leq \chi_{ij} \leq d_{ij} \text{ при } \delta_{ij} = 0, (i, j) &\in U_{on} \text{ на дугах и} \\ \chi_i &= a_i \text{ при } \delta_i < 0, \chi_i = a_i^* \text{ при } \delta_i > 0, \\ a_i \leq \chi_i \leq a_i^* \text{ при } \delta_i = 0, i &\in I_{on} \text{ на узлах} \end{aligned} \quad (11)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{on}\}$. Опорный псевдопотокосплан, соответствующий оптимальному опорному копотoku $\{\delta, S_{on}\}$, является оптимальным потокоспланом задачи (1)–(4).

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\{\delta, S_{on}\}$ — некоторый опорный копоток. Построим по нему опорный псевдопотокосплан $\chi = (\chi_{ij}, (i, j) \in U; \chi_i, i \in I^*)$. Неопорные компоненты псевдопотокосплана $\chi_{ij}, (i, j) \in U_H$ на дугах и $\chi_i, i \in I_H$ в узлах положим равными (9). Опорные компоненты псевдопотокосплана однозначно найдем из системы (10).

Соотношения критерия оптимальности (11) для опорного копотока $\{\delta, S_{on}\}$ с учетом значений неопорных компонент псевдопотокосплана (9) и опорных компонент псевдопотокосплана (11) означает, что вектор $\chi = (\chi_{ij}, (i, j) \in U; \chi_i, i \in I^*)$ удовлетворяет ограничениям (2)–(4) прямой задачи. Оптимальность χ следует из равенства значений целевых функций прямой (1)–(4) и двойственной (5)–(7) задач на χ и δ :

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \chi_{ij} + \sum_{i \in I^*} c_i \chi_i = \sum_{(i, j) \in U} (y_i - y_j - \delta_{ij}) \chi_{ij} + \sum_{i \in I^*} (-y_i \text{sign}[i] + \sum_{k=1}^l \alpha_i^k g_k - \delta_i) \chi_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in J} y_i \left(\sum_{j \in I_i^+(U)} \chi_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \chi_{ji} \right) - \sum_{(i,j) \in U} \delta_{ij} \chi_{ij} - \sum_{i \in I^*} y_i \text{sign}[i] \chi_i + \sum_{i \in I^*} \sum_{k=1}^l \alpha_i^k g_k \chi_i - \sum_{i \in I^*} \delta_i \chi_i = \\
&= \sum_{i \in I^*} a_i y_i + \sum_{k=1}^l b_k g_k + \sum_{i \in I^*} a_{+i} v_i - \sum_{i \in I^*} a_i^* t_i - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} w_{ij}.
\end{aligned}$$

Необходимость. Пусть δ^0 – оптимальный невырожденный копоток, построенный по оптимальному двойственному плану $y^0 = (y_i^0, i \in I; g_k^0, k = \overline{1, l}; v_i^0, t_i^0, i \in I^*; w_{ij}^0, (i, j) \in U)$. Согласно теории двойственности существует оптимальный потокоплан $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ задачи (1)–(4) и пара x^0, y^0 удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости, где:

$$\begin{aligned}
x_{ij}^0 (y_i^0 - y_j^0 - w_{ij}^0 - c_{ij}) &= 0, w_{ij}^0 (x_{ij}^0 - d_{ij}) = 0, (i, j) \in U; \\
x_i^0 (-y_i^0 \text{sign}[i] + \sum_{k=1}^l a_i^k g_k^0 - t_i^0 + v_i^0 - c_i) &= 0; \\
t_i^0 (x_i^0 - a_i^*) &= 0, v_i^0 (a_{+i} - x_i^0), i \in I^*.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из условий согласования (8) и соотношений (12) для неопорных дуг и узлов имеем:

$$\begin{aligned}
x_{ij}^0 &= 0, \text{ если } \delta_{ij}^0 < 0; x_{ij}^0 = d_{ij}, \text{ если } \delta_{ij}^0 > 0; \\
x_{ij}^0 &= a_{+i}, \text{ если } \delta_i^0 < 0; x_{ij}^0 = a_i^*, \text{ если } \delta_i^0 > 0.
\end{aligned}$$

Поскольку опорные компоненты вектора x^0 однозначно вычисляются из (2), (3) по заданным неопорным компонентам вектора x^0 , то заключаем, что $x^0 = \chi$. Соотношения (11) справедливы для опорных компонент вектора x^0 в силу условий дополняющей нежесткости (12) и ограничений задачи (1)–(4). Теорема доказана.

1. Пилипчук Л. А., Командина Л. В. // Numerical Methods and Applications: Proceeding of the International Methods and Applications. Sofia, 1989. P. 370.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 2. Транспортные задачи. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 17.02.97.

УДК 519.2

М. С. АБРАМОВИЧ

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА "РАЗЛАДКИ" ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

The problem of asymptotic analysis of power of criterion, which is based on spectral density estimators, is investigated for disorder detection test in time series.

Для обнаружения моментов "разладки" временных рядов широко используются методы, основанные на модели авторегрессии и скользящего среднего [1], и метод кумулятивных сумм [2]. В меньшей мере для решения этой проблемы исследовано применение методов спектрального анализа [3].

В [4] построен критерий для обнаружения момента "разладки" с использованием оценок спектральных плотностей, найдено асимптотическое распределение статистики критерия и построен тест для обнаружения момента "разладки". В настоящей работе исследуется мощность этого теста.

1. Математическая модель. Пусть $\xi_t, t \in Z$ – стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой спектральной плотностью $S_1^0(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$, $\eta_t, t \in Z$ – стационарный временной ряд с нулевым средним и некоторой другой спектральной плотностью $S_2^0(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$, отличной от $S_1^0(\cdot): S_1^0(\cdot) \neq S_2^0(\cdot)$. Наблюдаемый временной ряд $X = \{x_t; t = 1, 2, \dots, T\}$ длительностью T имеет "разладку" в неизвестный момент времени $t_0 \in \{\tau_-, \tau_- + 1, \dots, \tau_+, T + 1\}$, которая порождается "скачкообразным изменением" спектральной плотности:

$$x_t = \begin{cases} \xi_t, & t \in \{1, 2, \dots, t_0 - 1\}, \\ \eta_t, & t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, T\}; \end{cases}$$

$1 < \tau_- < \tau_+ < T$ — некоторые априорно заданные граничные значения.

Если $t_0 = T + 1$, то наблюдаемый временной ряд — однородный.

Задача обнаружения "разладки" заключается в оценивании момента "разладки" t_0 . Для $\tau \in \{\tau_-, \tau_- + 1, \dots, \tau_+\}$ осуществим разбиение наблюдаемого временного ряда X на два фрагмента $X_1 = (x_1, \dots, x_{\tau-1})$, $X_2 = (x_\tau, \dots, x_T)$ с длинами T_1 и T_2 соответственно:

$$X = (X_1; X_2), \quad T_1 = \tau - 1, \quad T_2 = T - \tau + 1, \quad T_1 + T_2 = T.$$

Определим гипотезу $H_{1\tau}: t_0 = \tau$, означающую, что наблюдаемый временной ряд имеет "разладку" в момент τ , и гипотезу $H_{0\tau}: t_0 = T + 1$, означающую, что наблюдаемый временной ряд — однородный.

Оценка спектральной плотности по j -му фрагменту запишется в виде [6]:

$$\hat{S}_j(f_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T_j-1)}^{T_j-1} W_{kT_j}^* \hat{R}_j(k) \cos(f_i k), \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

где $i \in \{1, \dots, m\}$ — номер частоты, m — число частот f_1, \dots, f_m , для которых вычисляются оценки спектральной плотности, $\hat{R}_j(k)$ — значение выборочной ковариационной функции для лага k :

$$\hat{R}_j(k) = \frac{1}{T_j} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_{j-1}+T_j-k} x_t x_{t+k} (T_0 ::= 0),$$

$$W_{kT_j}^* = \begin{cases} r\left(\frac{k}{K_{T_j}}\right), & k = 0, \pm 1, \dots, \pm K_{T_j}, \\ 0, & k = \pm(K_{T_j} + 1), \dots, \pm(T_j - 1), \end{cases} \quad (2)$$

$r(x)$ — весовая функция, $K_{T_j} \in N$ — параметр сглаживания, $K_{T_j} < T_j$.

В соответствии с [6] введем параметр h :

$$h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - r(x)}{|x|^q}, \quad q > 0. \quad (3)$$

Обозначим:

$$U = (u_k) \in R^{2m}, \quad u_k = \hat{S}_1(f_k), \quad u_{m+k} = \hat{S}_2(f_k),$$

$$U^0 = (u_k^0) \in R^{2m}, \quad u_k^0 = S_1^0(f_k), \quad u_{m+k}^0 = S_2^0(f_k), \quad k = \overline{1, m},$$

$$Q = \int_0^1 r^2(x) dx.$$

Определим статистику для обнаружения момента "разладки" как меру различия выборочных спектральных плотностей $\hat{S}_1(\cdot)$ и $\hat{S}_2(\cdot)$:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^m (u_{m+k} - u_k)^2}{\sum_{k=1}^m (u_{m+k}^2 + u_k^2)}. \quad (4)$$

В [4] построен спектральный критерий обнаружения момента "разладки" в момент τ :

$$\text{принимается: } \begin{cases} H_{0\tau}, & \text{если } G < \Delta, \\ H_{1\tau}, & \text{если } G \geq \Delta, \end{cases} \quad (5)$$

где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ — пороговое значение, соответствующее заданному уровню значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

2. Асимптотический анализ мощности критерия. Для исследования мощности спектрального критерия обнаружения "разладки" (4), (5) найдем асимптотическое при $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ распределение вспомогательной статистики

$$\tilde{G} = \frac{\sum_{k=1}^m (u_{m+k} - u_k)^2}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)}. \quad (6)$$

Для оценки мощности критерия воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведено в [5].

Лемма. Пусть случайный k -вектор $X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически распределен по нормальному закону $N_k(\mu, b_n^2 \Sigma)$, где μ — математическое ожидание, Σ — ковариационная матрица и $b_n^2 \rightarrow 0$. Пусть $g(x)$, $x = (x_1, \dots, x_k)$ — функция, имеющая ненулевой k -вектор частных производных в точке $x = \mu$:

$D = \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)_{x=\mu}$, ($i = 1, k$). Тогда асимптотическое распределение статистики $Y_n = g(X_n)$ есть $N_1(g(\mu), b_n^2 D^T \Sigma D)$.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия ($j = 1, 2$):

- 1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_j(k)| < \infty$, где $R_j(k)$ — ковариационная функция временного ряда;
- 2) $\sum_{k, s, t=-\infty}^{\infty} |\kappa_j(k, s, t)| < \infty$, где $\kappa_j(k, s, t)$ — семинвариант четвертого порядка;
- 3) временные ряды $\{\xi_t\}$ и $\{\eta_t\}$ представляются в виде:

$$\xi_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k v_{t-k}, \quad \eta_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \tilde{v}_{t-k},$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\beta_k| < \infty$, а $\{v_t\}, \{\tilde{v}_t\}$ — последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с

$$E\{v_t\} = E\{\tilde{v}_t\} = 0; \quad E\{v_t^2\} = E\{\tilde{v}_t^2\} = \sigma^2, \quad E\{v_t^4\} = E\{\tilde{v}_t^4\} < \infty;$$

- 4) имеет место асимптотика:

$$T_1, T_2 \rightarrow \infty, \quad K_{T_1}, K_{T_2} \rightarrow \infty, \quad \text{и} \quad \frac{K_{T_1}}{T_1} \rightarrow 0, \quad \frac{K_{T_2}}{T_2} \rightarrow 0,$$

$$m = O(T^{1-\mu}), \quad 0 < \mu < 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда при выполнении гипотезы H_0 статистика \tilde{G} распределена асимптотически нормально:

$$L \left\{ \frac{\tilde{G} - a(T_1, T_2)}{\sqrt{B(T_1, T_2)}} \right\} \rightarrow N_1(0, 1),$$

$$\text{где} \quad a(T_1, T_2) = \frac{\sum_{k=1}^m \left(u_{m+k}^0 - u_k^0 + \frac{1}{K_{T_1}^q} h(u_k^0)^{[q]} - \frac{1}{K_{T_2}^q} h(u_{m+k}^0)^{[q]} \right)^2}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)}, \quad (7)$$

$$B(T_1, T_2) = \frac{4Q \left(\sum_{k=1}^m (u_{m+k}^0 - u_k^0)^2 \left((u_k^0)^2 \frac{K_{T_1}}{T_1} + (u_{m+k}^0)^2 \frac{K_{T_2}}{T_2} \right) \right)}{\left(\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right) \right)^2} \quad (8)$$

Доказательство. В соответствии с [6] определим асимптотические выражения для математического ожидания оценки спектральной плотности

$$E\{\tilde{S}_j(\lambda)\} = S_j^0(\lambda) - \frac{1}{K_{T_j}^q} h(S_j^0)^{[q]}(\lambda), \quad (9)$$

где

$$(S_j^0)^{[q]}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^q \cos(\lambda k) R_j(k),$$

и для дисперсии оценки спектральной плотности

$$D\{\tilde{S}_j(\lambda)\} = \frac{K_{T_j}}{T_j} (S_j^0(\lambda))^2 Q. \quad (10)$$

С учетом того, что в силу условий 1), 2) и 4) данной теоремы спектральные оценки $\hat{S}_1(f_1), \dots, \hat{S}_1(f_m), \hat{S}_2(f_1), \dots, \hat{S}_2(f_m)$ асимптотически независимы, и принимая во внимание (10), приходим к выводу, что асимптотическая $(2m \times 2m)$ -ковариационная матрица оценок спектральных плотностей будет иметь диагональный вид:

$$\Sigma = Q \cdot \text{diag} \left\{ \frac{K_{T_1}}{T_1} (u_1^0)^2, \dots, \frac{K_{T_1}}{T_1} (u_m^0)^2, \frac{K_{T_2}}{T_2} (u_{m+1}^0)^2, \dots, \frac{K_{T_2}}{T_2} (u_{2m}^0)^2 \right\}. \quad (11)$$

Согласно (6), \tilde{G} является функцией от $U = \{u_k\}$. Воспользуемся леммой для вычисления математического ожидания и дисперсии этой статистики.

В силу условий 3) и 4) теоремы оценки спектральных плотностей асимптотически нормальны. С учетом (9) значение математического ожидания $a\{T_1, T_2\}$ этого асимптотического распределения равно:

$$a(T_1, T_2) = \frac{\sum_{k=1}^m \left(u_{m+k}^0 - u_k^0 + \frac{1}{K_{T_1}^q} h(u_k^0)^{[q]} - \frac{1}{K_{T_2}^q} h(u_{m+k}^0)^{[q]} \right)^2}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)}, \quad (12)$$

что совпадает с (7).

Вектор-столбец производных D запишется в виде:

$$D = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial u_s} \Big|_{U=U^0} = \begin{cases} \frac{-2(u_{m+s}^0 - u_s^0)}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)}, & s = \overline{1, m} \\ \frac{2(u_s^0 - u_{s-m}^0)}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)}, & s = \overline{m+1, 2m}. \end{cases} \quad (13)$$

В силу условия 4) теоремы значение параметра $b_n^2 = \frac{K_{T_j}}{T_j} \rightarrow 0$. Тогда, учитывая (11) и (13), дисперсия асимптотического распределения $B(T_1, T_2)$ вычисляется следующим образом:

$$B(T_1, T_2) = D\Sigma D^T = \frac{4Q}{\left(\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)\right)^2} \left(\sum_{k=1}^m (u_{m+k}^0 - u_k^0)^2 (u_k^0)^2 \frac{K_{T_1}}{T_1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=m+1}^{2m} (u_k^0 - u_{k-m}^0)^2 (u_k^0)^2 \frac{K_{T_2}}{T_2} \right) = \frac{4Q \left(\sum_{k=1}^m (u_{m+k}^0 - u_k^0)^2 \left((u_k^0)^2 \frac{K_{T_1}}{T_1} + (u_{m+k}^0)^2 \frac{K_{T_2}}{T_2} \right) \right)}{\sum_{k=1}^m \left((u_{m+k}^0)^2 + (u_k^0)^2 \right)^2}, \quad (14)$$

что совпадает с (8).

Теорема доказана.

Следствие. Справедлива следующая аппроксимация мощности теста

$$W = P_{H_1} \{G \geq \Delta\} \approx 1 - \Phi \left(\frac{\Delta - a(T_1, T_2)}{\sqrt{B(T_1, T_2)}} \right), \quad (15)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. Мощность теста, основанного на статистике \tilde{G} , определяется следующим образом:

$$W_1 = P_{H_1} \{\tilde{G} \geq \Delta\} \approx 1 - \Phi \left(\frac{\Delta - a(T_1, T_2)}{\sqrt{B(T_1, T_2)}} \right). \quad (16)$$

Статистика \tilde{G} — непрерывное функциональное преобразование от оценок спектральных плотностей (1), которые являются состоятельными [6]. Поэтому для статистики \tilde{G} имеет место сходимость по вероятности $\tilde{G} - G \xrightarrow{P} 0$. Следовательно, (16) можно переписать в виде (15), что и доказывает следствие.

1. Клигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. №10. С.5.

2. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М., 1983.

3. Giraitis L., Leipus R. // Liet Matem. Rink. 1992. Vol.32. №1. P.20.

4. Абрамович М.С. // Компьютерный анализ данных и моделирование. Мн., 1995.

5. Serfling R.J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. New York, 1980.

6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1971.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 519.872

А.У.БАБИЦКИ

ОПТИМІЗАЦІЯ УВАХОДНОЇ ПЛІНИ АДНАЛІНЕЙНОЇ СІСТЭМИ МАСАВАГА АБСЛУГОЎВАННЯ

The paper treats the steady state of a single server queue with infinite capacity and input flow which consists of several filtrated Poisson input processes. The queue suffers loss caused by maintenance of accepted customers and by refusals of acceptance. A problem for the total loss minimizing by setting optimal values for acceptance probabilities is investigated. The structure of the optimal decision is determined and an algorithm for its search is proposed.

1. **Мадэль.** Даследуецца адналінейная сістэма масавага абслугоўвання з неабмежаванай чаргой. На прыбор паступае n стацыянарных пуасонаўскіх плыняў з інтэнсіўнасцямі λ_i , $i=1, \dots, n$. Заяўкі i -га тыпу характарызуюцца: першым і другім пачатковымі момантамі часу абслугоўвання b_i і d_i , штрафам a_i за адмову прыняцця заяўкі, штрафам $c_i > 0$ за адзінку часу знаходжання патрабавання ў сістэме. Пры паступленні патрабавання i -га тыпу прымаецца ў сістэму з імавернасцю q_i , а з імавернасцю $1 - q_i$ пакідае сістэму неабслужаным. Мяркуюцца, што дапушчаныя ў сістэму патрабаванні трапляюць на прыбор

у парадку паступлення. Трэба знайсці такія велічыні q_i , які забяспечаюць найменшую суму страт, што нясе сістэма ў адзінку часу.

Адразу адзначым, што абслугоўванне заяўкі некаторага i -га тыпу, для якога выконваецца няроўнасць $a_i < b_i c_i$, заўсёды з'яўляецца нявыгадным, а значыцца, адпаведная кампанента q_i аптымальнага развязку будзе роўна 0.

У адпаведнасці з уласцівасямі прасцейшай плыні, уваходны працэс у гэтай сістэме з'яўляецца стацыянарнай пуасонаўскай плыню з інтэнсіўнасцю

$\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i$. А ўся сістэма ў сукупнасці з'яўляецца сістэмай $M/G/1$, у якой першы і другі пачатковыя моманты часу абслугоўвання роўны $\left(\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i \right)$ і $\left(\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i d_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i \right)$ адпаведна.

Разгледзім стацыянарны стан работы сістэмы. Умовай яго існавання з'яўляецца выкананне няроўнасці $\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i < 1$.

Сярэдняе час чакання ў чарзе заяўкі любога тыпу (W) можна вызначыць па формуле Полячэка—Хінчына:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i d_i}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i \right)},$$

а сярэдняе значэнне агульнага часу знаходжання заяўкі i -га тыпу — ў сістэме як $b_i + W$.

Такім чынам, можна запісаць наступны выраз для велічыні страт, якія нясе сістэма ў адзінку часу:

$$F(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[q_j c_j \left(b_j + \frac{\sum_{i=1}^n q_i \lambda_i d_i}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i \right)} \right) + (1 - q_j) a_j \right], \quad (1)$$

а задача аптымізацыі набудзе тады выгляд:

$$\begin{cases} F(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \min_{q_i} \\ \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i < 1, \\ 0 \leq q_i \leq 1, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

2. Структура аптымальнага развязку. Тэарэма. Існуе такі развязак задачы (2) ($\bar{q}_i, i=1, \dots, n$), у якога не больш чым адна кампанента \bar{q}_i мае значэнне, адрнае ад 0 і ад 1.

Доказ. Няхай $q_i^0, i=1, \dots, n$ — некаторы развязак задачы (2). Абазначым

$B^0 = \sum_{i=1}^n q_i^0 \lambda_i b_i$ і $D^0 = \sum_{i=1}^n q_i^0 \lambda_i d_i$. Няцяжка бачыць, што $q_i^0, i=1, \dots, n$, з'яўляецца таксама развязкам наступнай задачы лінейнага праграмавання:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[q_j c_j \left(b_j + \frac{D^o}{2(1-B^o)} \right) + (1-q_j) a_j \right] \rightarrow \min_{q_i} \\ 0 \leq q_i \leq 1, i=1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i b_i = B^o, \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i d_i = D^o, \end{array} \right. \quad (3)$$

а таксама і тое, што любы развязак задачы (3) з'яўляецца развязкам задачы (2). Паводле [1], сярод развязкаў задачы (3) існуе такі (абазначым яго \bar{q}_i , $i=1, \dots, n$), у якога не больш дзвюх велічынь \bar{q}_i (не парушаючы агульнасці, будзем лічыць, што гэта \bar{q}_1 і \bar{q}_2), адрозных ад 0 і ад 1, а ўсе астатнія роўны 0 або 1.

Пакажам далей, што не больш чым адна з велічынь \bar{q}_1 , \bar{q}_2 адрозна ад 0 і ад 1. Для гэтага наладзім зменным задачы (2) q_i , $i=3, \dots, n$, адпаведныя значэнні \bar{q}_i і перайдзем да наступнай задачы шляхам замены зменных $x_1 = q_1 \lambda_1$, $x_2 = 2(b - q_1 \lambda_1 b_1 - q_2 \lambda_2 b_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2) = \frac{(v + v_1 x_1 + v_2 x_2)(u + u_1 x_1 + u_2 x_2)}{x_2} + w_1 x_1 + w_2 x_2 \rightarrow \min_{x_1, x_2} \\ x_2 > 0, \\ 0 \leq x_1 / \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \frac{2b - 2b_1 x_1 - x_2}{2b_2 \lambda_2} \leq 1, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{дзе } v = \sum_{i=3}^n \bar{q}_i \lambda_i c_i + \frac{bc_2}{b_2}, v_1 = c_1 - \frac{b_1 c_2}{b_2}, v_2 = -\frac{c_2}{2b_2}, u = \sum_{i=3}^n \bar{q}_i \lambda_i d_i + \frac{bd_2}{b_2},$$

$$u_1 = d_1 - \frac{b_1 d_2}{b_2}, u_2 = -\frac{d_2}{2b_2}, b = 1 - \sum_{i=3}^n \bar{q}_i \lambda_i b_i, w_1 = c_1 b_1 - a_1 - \frac{b_1(c_2 b_2 - a_2)}{b_2},$$

$$w_2 = -\frac{c_2 b_2 - a_2}{2b_2}.$$

Знойдзем стацыянарныя пункты функцыі $f(x_1, x_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{x_1}(x_1, x_2) = (2v_1 u_1 x_1 + (v_1 u_2 + u_1 v_2 + w_1)x_2 + v_1 u + u_1 v) / x_2 = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2) = (-v u_1 x_1^2 + (v_2 u_2 + w_2)x_2^2 - (v_1 u + u_1 v)x_1 - uv) / x_2^2 = 0, \end{array} \right.$$

адкуль $x_2 = \pm (v_1 u - u_1 v) / \sqrt{(v_1 u_2 + u_1 v_2 + w_1)^2 - 4v_1 u_1 (v_2 u_2 + w_2)}$. Гэта азначае, што функцыя $f(x_1, x_2)$ можа мець стацыянарны пункт, які задавальняе ўмовам задачы (4), толькі калі $v_1 u \neq u_1 v$. Даследуем $f(x_1, x_2)$ на наяўнасць мінімуму.

Няцяжка пераканацца, што выраз $f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2) f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - (f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2))^2$ роўны $-(v_1 u - u_1 v)^2 / x_2^4$, значыцца, ён з'яўляецца адмоўным, калі $v_1 u \neq u_1 v$, і тады ў адпаведнасці з [2] даследуемая функцыя не мае экстрэмуму.

Такім чынам, развязак задачы (4) трэба шукаць на мяжы абсягу, зададзенага няроўнасцямі. Мяжу $x_2 = 0$ можна адразу выключыць з разгляду, паколькі пры $x_2 \rightarrow +0$ $f(x_1, x_2) \rightarrow +\infty$. Значыцца, выконваецца прынамсі адна з нястрогіх няроўнасцяў задачы (4), адкуль вынікае, што хаця бы адна з аптымальных велічынь \bar{q}_1 , \bar{q}_2 зыходнай задачы (2) роўна 0 ці 1. Тэарэма даказана.

Няхай вядома, што \bar{q}_i , $i=1, \dots, n$, $i \neq j$, роўны 0 або 1, тады для аптымальнай велічыні \bar{q}_j маем наступную задачу:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{F}(q_j) &= \frac{(C + \lambda_j q_j c_j)(D + \lambda_j q_j d_j)}{2(B - \lambda_j q_j b_j)} + \lambda_j q_j (c_j b_j - a_j) \rightarrow \min_{q_j} \\ &\lambda_j q_j b_j < B, \\ &0 \leq q_j \leq 1, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\text{дзе } D = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \bar{q}_i d_i, \quad C = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \bar{q}_i c_i, \quad B = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \bar{q}_i d_i.$$

Знойдзем стацыянарны пункт функцыі $\bar{F}(q_j)$:

$$\begin{aligned} \bar{F}'(q_j) &= -\frac{\lambda_j (c_j d_j + 2(a_j - c_j b_j) b_j)}{2(B - \lambda_j q_j b_j)^2} \times \\ &\times \left[\lambda_j^2 b_j q_j^2 - 2B \lambda_j q_j + \frac{2(a_j - c_j b_j) B^2 - b_j C D - B(c_j D + d_j C)}{c_j d_j + 2(a_j - c_j b_j) b_j} \right] = 0. \end{aligned}$$

З двух развязкаў гэтага раўнання выбіраем той, які задавальняе ўмове $q_j \lambda_j b_j < B$, гэта $q_j = \left(B - \sqrt{(c_j B + b_j C)(d_j B + b_j D)} / c_j d_j + 2(a_j - c_j b_j) b_j \right) / \lambda_j b_j$.

Гэта пункт мінімуму, бо

$$\bar{F}''(q_j) = \lambda_j^2 (c_j B + b_j C)(d_j B + b_j D) / (B - \lambda_j q_j b_j)^3 > 0.$$

Паколькі на прамежку $(-\infty, \bar{q}_j)$ функцыя $\bar{F}(q_j)$ з'яўляецца спадальнай, а на $(\bar{q}_j, B / (\lambda_j b_j))$ — нарастальнай, то развязак задачы (5) можа быць запісаны як

$$\bar{q}_j = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{\lambda_j b_j} \left(B - \sqrt{\frac{(c_j B + b_j C)(d_j B + b_j D)}{c_j d_j + 2(a_j - c_j b_j) b_j}} \right) \right\} \right\}. \quad (6)$$

3. Алгарытм знаходжання аптымальнага развязку. У адпаведнасці з тэарэмай, аптымальны развязак шукаецца сярод такіх набораў $q_i, i=1, \dots, n$, дзе толькі адна кампанента адрозніваецца ад 0 і ад 1. Прапануецца будаваць такія наборы наступным чынам:

Сярод мноства ўсіх уваходных плыняў $P = \{1, \dots, n\}$ вылучаецца падмноства Q плыняў, прынятых у сістэму палкам ($q_i = 1, i \in Q$), даследаванне Q працягваецца, калі выконваецца ўмова $\sum_{i \in Q} \lambda_i b_i < 1$.

Для кожнай плыні j з мноства $P \setminus Q$ развязваецца задача (5), знаходзіцца аптымальнае значэнне \bar{q}_j па формуле (6) і адпаведнае значэнне функцыянала $F(q_1, \dots, q_n)$ па формуле (1).

Набор, на якім атрымана найменшае значэнне функцыянала $F(q_1, \dots, q_n)$, і з'яўляецца развязкам задачы (2).

Было бы абгрунтавана паставіць пытанне аб змяншэнні колькасці перабіраных набораў, напрыклад упаралкаваць усе плыні па меры ўкладу, які яны ўносяць у мінімізацыю функцыянала. Аднак гэта ўяўляецца даволі праблематычным.

№ прикладу	№ пльні	λ	b	d	a	c	Разв'язок q
1	1	0,30	1	4,3	8	2	0
	2	0,65	1	1,0	4	1	0,957
2	1	0,30	1	4,3	8	2	0,651
	2	0,65	1	1,0	4	1	0
	3	0,10	1	10	20	3	1
3	1	0,30	1	4,3	8	2	0
	2	0,65	1	1,0	4	1	0,238
	3	0,30	1	3,0	10	2	1

У таблиці приведено дані і розв'язки задачі (2). На їх прикладі можна переконатися, що перевага однієї пльни над другою у сенсі забезпечення мінімуму функціонала (1) з'являється одночасно і швидко з чим залежить від наявності цієї адгезивності інших пльн.

1. Данциг Г. Линейное программирование. М., 1966.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т. 1.

Поступила в редакцию 04.05.97.

УДК 517.946

В. И. ЧЕСАЛИН

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

In this paper the existence and uniqueness of the strong solution of unlocal boundary problem for abstract hyperbolic equations of the second order is established.

На ограниченном интервале (O, T) переменной t рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{d^2 u}{dt^2} + A(t)u = f(t). \quad (1)$$

Здесь u и f — функции переменной $t \in (O, T)$ со значением в гильбертовом пространстве H , норму и скалярное произведение в котором обозначим $|\cdot|_H$ и $(\cdot, \cdot)_H$ соответственно.

Условие (A). $A(t)$ — линейный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t и плотной в H , и существует постоянная $a > 0$, не зависящая от v и t , что для любого $v \in D(A)$ выполняется неравенство

$$(Av, v)_H \geq a|v|_H^2. \quad (2)$$

Для оператора A можно корректно определить дробные степени, и в частности оператор $A^{\frac{1}{2}}$ с областью определения $D(A^{\frac{1}{2}}) \supset D(A)$ (см. [1]).

Введем гильбертово пространство $W = D(A^{\frac{1}{2}})$ со скалярным произведением $(u, v)_W = (A^{\frac{1}{2}}(u), A^{\frac{1}{2}}(v))_H$.

Условие (AI). Оператор $A(t)$ дважды сильно непрерывно дифференцируем по $t \in [O, T]$ на $D(A)$ и

$$\left| A'(t)A^{-1}(t) \right|_{L(H)} \leq C_1, \quad \left| A''(t)A^{-1}(t) \right|_{L(H)} \leq C_2, \quad (3)$$

где $A' = \frac{dA(t)}{dt}$, $A'' = \frac{d^2 A(t)}{dt^2}$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от t .

Заметим, что для таких операторов имеет место оценка

$$\left| \left(A^{\frac{1}{2}}(t) \right)' A^{-\frac{1}{2}}(t) \right|_{L(H)} \leq C_3 \left| A'(t)A^{-1}(t) \right|_{L(H)}, \quad (4)$$

где $C_3 = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} dt}{(1+t)^2}$. Доказательство имеется в работе [1]. Кроме того, в работе [2] установлена оценка

$$a_1 |v|_W \leq \left| A^{\frac{1}{2}}(t)v \right|_H \leq a_2 |v|_W, \quad (5)$$

где $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ не зависят от t и v .

К уравнению (1) присоединим нелокальные условия вида

$$\left. \begin{aligned} l_{0\mu} u &\equiv \mu_1 u(o) + \mu_2 u(T) = \varphi, \\ l_{1\mu} u &\equiv \mu_3 \frac{du(o)}{dt} + \mu_4 \frac{du(T)}{dt} = \psi \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где $\varphi \in W$, $\psi \in H$, μ_k — комплексные числа, удовлетворяющие следующему условию.

Условие (μ). Либо выполняется неравенство

$$\mu = \max \left\{ \left| \mu_2 \mu_1^{-1} \right|, \left| \mu_4 \mu_3^{-1} \right| \right\} < a_1^2 \exp(-2\alpha T), \quad (7)$$

либо

$$\mu = \max \left\{ \left| \mu_1 \mu_2^{-1} \right|, \left| \mu_3 \mu_4^{-1} \right| \right\} < a_2^2 \exp(-2\alpha T), \quad (8)$$

где $\alpha = C_1 C_3$.

В данной работе для поставленной задачи (1), (6) докажем существование, единственность и непрерывную зависимость сильного решения от f , φ , ψ и μ_k .

Пусть $H^2((O, T), D(A))$ — гильбертово пространство, полученное пополнением множества $C^\infty([O, T], D(A))$ по норме

$$\|v\|_2^2 = \int_0^T \left(\left| \frac{dv}{dt} \right|_H^2 + \left| A(t) \frac{dv}{dt} \right|_H^2 + |A(t)v|_H^2 \right) dt.$$

Пополняя это же множество по норме

$$\|v\|_E^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left| \frac{dv}{dt} \right|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t)v \right|_H^2 \right),$$

получим банахово пространство E . Пусть $F = L_2((O, T), H) \times W \times H$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\|_F = \left[\|\mathcal{F}\|^2 + |\varphi|_W^2 + |\psi|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ где } \mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \text{ и } \|\cdot\| - \text{норма в } L_2((O, T), H).$$

При доказательстве энергетического неравенства будет использована следующая

Лемма 1. Пусть символ $\|\cdot\|$ обозначает норму в одном из пространств H и W , и пусть для некоторой функции со значением в соответствующем пространстве выполняется одно из следующих двух равенств

$$g(o) + \mu g(T) = \varphi \text{ либо } \mu g(o) + g(T) = \varphi. \quad (9)$$

Тогда при $0 \leq \mu < 1$

$$\left. \begin{aligned} |g(o)|^2 - \mu |g(T)|^2 &\leq \frac{|\varphi|^2}{1 - \mu} \\ |g(T)|^2 - \mu |g(o)|^2 &\leq \frac{|\varphi|^2}{1 - \mu} \end{aligned} \right\} \text{ либо соответственно} \quad (10)$$

Доказательство. При $\mu = 0$ данные неравенства очевидны. Пусть теперь $\mu \neq 0$. Из первого соотношения в (9) имеем

$$|g(o)|^2 \leq \mu^2 (1 + \varepsilon) |g(o)|^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) |\varphi|^2.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{\mu} - 1$, получаем требуемое неравенство. Доказательство во втором случае аналогично.

Для оператора $L_\mu = (\mathcal{L}, l_{0\mu}, l_{1\mu}): E \rightarrow F$ с областью определения $D(L_\mu) = H^2((O, T), D(A))$ имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A), (A1) и (μ). Тогда для любой функции $u \in D(L_\mu)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_E^2 \leq C \|L_\mu u\|_F^2, \quad (11)$$

где $C > 0$ не зависит от u .

Доказательство. Умножая (1) скалярно в H на $2 \frac{du}{dt}$, получаем тождество

$$\frac{d}{dt} \left[\left| \frac{du}{dt} \right|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|_H^2 \right] = 2 \operatorname{Re}(\mathcal{L}u, \frac{du}{dt})_H + 2 \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}(t)u, (A^{\frac{1}{2}}(t))'u)_H. \quad (12)$$

Пусть выполняется условие (7). Интегрируя тождество (12) по t от 0 до τ , используя (3)–(5) и применяя элементарные оценки, получаем неравенство

$$v(\tau) \leq 2\alpha \int_0^\tau v(t) dt + 2 \int_0^\tau \left| \mathcal{L}u \right|_H \cdot \left| \frac{du}{dt} \right|_H dt + v(0), \quad (13)$$

$$\text{где } v(\tau) = \left[\left| \frac{du}{dt} \right|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|_H^2 \right]_{t=\tau}.$$

Далее, применяем к неравенству (13) лемму (7.1) из [3]. В результате получаем неравенство

$$v(\tau) \leq \exp(2\alpha T) \left[2 \int_0^\tau \left| \mathcal{L}u \right|_H \cdot \left| \frac{du}{dt} \right|_H dt + v(0) \right]. \quad (14)$$

Теперь умножаем тождество (12) на $a_1^{-2}\mu \exp(2\alpha T)$, интегрируем полученное равенство по t от τ до T , а затем сложим его с неравенством (14) и к полученному результату применим (5), лемму 1, лемму вида (7.1) из [3] и элементарные оценки. В результате получаем требуемое неравенство (11). В случае выполнения условия (8) доказательство аналогично.

Стандартным образом доказывается, что оператор $L_\mu: E \rightarrow F$ с областью определения $D(L_\mu)$ допускает замыкание \bar{L}_μ . Решение уравнения

$$\bar{L}_\mu u = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in F \quad (15)$$

назовем сильным уравнением задачи (1), (6). Неравенство (11) распространяется на $u \in D(\bar{L}_\mu)$, т.е.

$$\|u\|_E^2 \leq C \|\bar{L}_\mu u\|_F^2, \quad \forall u \in D(\bar{L}_\mu). \quad (16)$$

Из неравенства (16) непосредственно вытекают

Следствие 1. Сильное решение задачи (1), (6) единственно, если оно существует.

Следствие 2. Множество значений $R(\bar{L}_\mu)$ оператора \bar{L}_μ замкнуто в F и $R(\bar{L}_\mu) = \overline{R(L_\mu)}$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда множество $R(L_\mu)$ плотно в F .

Доказательство. Заметим, что значения $l_{0\mu}u$ и $l_{1\mu}u$ независимы и множество значений данных операторов плотно в W и H соответственно. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно установить плотность $R(\mathcal{L})$ в $L_2((0, T), H)$. Итак, пусть для некоторого $v \in L_2((0, T), H)$

$$\int_0^T (\mathcal{L}u, v)_H dt = 0 \quad (17)$$

для любых $u \in D(L_\mu)$, таких что $l_{0\mu}u = 0$ и $l_{1\mu}u = 0$. Покажем, что $v = 0$. Полагаем в равенстве (17) $u = A_\varepsilon^{-1}h$, где $A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $h(t) \in H^2([0, T], H)$, $\varepsilon > 0$ и $h(t)$ удовлетворяет однородным условиям (6). Производя дифференцирование по t и переходя к сопряженным операторам, получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2 h}{dt^2} + B_{1\epsilon}^* \frac{dh}{dt} + B_{2\epsilon}^* h, w \right)_H dt + \int_0^T (h, Aw)_H dt = 0, \quad (18)$$

где $w = A_\epsilon^{-1} v$, $B_{1\epsilon}^* = -\epsilon A' A_\epsilon^{-1}$ и $B_{2\epsilon}^* = [-\epsilon A'' A_\epsilon^{-1} + 2\epsilon^2 (A' A_\epsilon^{-1})^2]$.

Вводя интегральные операторы вида

$$G_1(v) = \int_0^t v(\tau) d\tau - \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} \int_0^T v(\tau) d\tau,$$

$$G_2(v) = \int_0^t (t-\tau)v(\tau) d\tau + \bar{\mu}_3 \left[\frac{\bar{\mu}_1 T - t(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)}{(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4)} \right] \int_0^T v(\tau) d\tau - \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} \int_0^T (T-\tau)v(\tau) d\tau,$$

производя интегрирование по частям и переходя к сопряженным операторам в равенстве (18), получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2 w}{dt^2}, w - G_1(B_{1\epsilon} w) + G_2(B_{2\epsilon} w + Aw) \right)_H dt = 0,$$

из которого следует, что функция удовлетворяет следующей однородной задаче

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{d}{dt} (B_{1\epsilon} w) + B_{2\epsilon} w + Aw = 0, \quad (19)$$

$$\bar{\mu}_2 w(0) + \bar{\mu}_1 w(T) = 0, \quad \bar{\mu}_4 \frac{dw(0)}{dt} + \bar{\mu}_3 \frac{dw(0)}{dt} = 0. \quad (20)$$

Используя аналогичную методику, как и при доказательстве неравенства (11), для задачи (19), (20) получаем априорную оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |v(t)|_H^2 \leq C^* \int_0^T |\epsilon A A_\epsilon^{-1} v(t)|_H^2 dt,$$

где $C^* > 0$ не зависит от ν и ϵ . Устремляя $\epsilon \rightarrow +0$, получаем $v \equiv 0$, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда если $\mu(n) \rightarrow \mu_0$ (т.е. $\mu_i(n) \rightarrow \mu_i$, $i=1-4$) при $n \rightarrow \infty$, то $(\bar{L}_{\mu(n)})^{-1} \rightarrow (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}$ в пространстве $L(F, E)$, наделенном топологией простой сходимости.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [4].

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. С.133.

2. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. // Диф. уравнения. 1971. Т.7. №6. С.1017.

3. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. С.23.

4. Чесалин В. И. // Диф. уравнения. 1977. Т.13. №3. С.475.

Поступила в редакцию 15.05.97.

УДК 517.944

МУСА АБАБНА (ИОРДАНИЯ)

РЕГУЛЯЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider a control initial condition problem for evolution differential-operator equations which is non-correct in sense of Hadamar-Petrovski. It is solved with help of a regularization of the initial conditions by non-local conditions.

1. Пусть на отрезке $(0, T)$ задано дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \quad (1)$$

где u — функция переменной $t \in [0, T]$, принимающая значения в гильбертовом пространстве H ; A — самосопряженный положительно определенный оператор в H .

Известно, что уравнение (1) при начальном условии

$$u(0) = \xi, \xi \in H, \quad (2)$$

имеет единственное сильно обобщенное решение $u(t; \xi)$, которое является непрерывной функцией по t со значением в H . Если (2) $\xi \in D(A^{1/2})$, то решение $u(t; \xi)$ является непрерывной функцией по t со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет уравнению почти везде.

Рассмотрим следующую задачу управления. Требуется для заданных $T > 0$ и элемента $\chi \in H$ минимизировать функционал

$$J(\xi) = \|u(T; \xi) - \chi\|^2, \quad \xi \in H, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в H . Если элементы $\chi \in D(A^{1/2})$, то вместо минимизации функционала (3) будем исследовать задачу минимизации функционала

$$J_1(\xi) = \|u(T; \xi) - \chi\|_1^2, \quad \xi \in D(A^{1/2}), \quad (4)$$

где $\|g\|_1 = \|A^{1/2}g\|$, $g \in D(A^{1/2})$.

"Идеальным" решением поставленной задачи было бы положить $\xi = u(0)$, где $u(t)$ — "решение" уравнения (1) при условии $u(T) = \chi$ вместо начального условия (2). Однако задача с обратным направлением времени для эволюционного уравнения (1) не является корректной.

Для решения поставленной задачи в [1] разработан метод квазиобращения. По своей идее данный метод восходит к методу регуляризации А.Н. Тихонова и состоит в замене эволюционного оператора регуляризованным оператором

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} + A - \alpha A^2, \quad \alpha > 0, \text{ корректным для обратного направления времени.}$$

В данной работе вместо регуляризации эволюционного оператора предлагается регуляризация рассматриваемой задачи нелокальными условиями. Суть ее заключается в следующем. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{dv}{dt} + Av = 0 \quad (5)$$

с нелокальными граничными условиями

$$\alpha v(0) + (1 - \alpha)v(T) = \chi, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

Задача (5), (6) при $\chi \in H$ будет иметь сильно обобщенное решение $v(t; \chi, \alpha)$, которое является непрерывной функцией по $t \in [0, T]$ со значением в H . Если в (6) $\chi \in D(A^{1/2})$, то решение $v(t; \chi, \alpha)$ является непрерывной функцией по $t \in [0, T]$ со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет условию (5) почти везде. Положим $\xi_\alpha = v(0; \chi, \alpha)$. Тогда при выбранном ξ_α решение задачи (1), (2) $u(t; \xi_\alpha) = v(t; \chi, \alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J(\xi_\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(T; \xi_\alpha) - \chi\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|v(T; \chi, \alpha) - \chi\| = 0, \quad \chi \in H, \quad (7)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_1(\xi_\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(T; \xi_\alpha) - \chi\|_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|v(T; \chi, \alpha) - \chi\|_1 = 0, \quad \chi \in D(A^{1/2}). \quad (8)$$

2. Изучим задачу (5), (6). Не ограничивая общности рассуждений, здесь и в дальнейшем будем предполагать, что спектр оператора A дискретен.

Определение. Функция $v = v(t; \chi, \alpha)$ называется сильно обобщенным в $C([0, T], H)$ решением задачи (5), (6), если существует последовательность функций $v_n \in C^1([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$ такая, что

$$\frac{dv_n}{dt} + Av_n = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|v_n(t) - v(t; \chi, \alpha)\| = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha v_n(0) + (1 - \alpha)v_n(T) - \chi\| = 0. \quad (11)$$

Теорема 1. Если $\chi \in H$, то существует единственное сильно обобщенное в $C([0, T], H)$ решение $v(t; \chi, \alpha)$ задачи (5), (6).

Доказательство. Оператор A имеет счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ и полную в H систему ортонормальных собственных векторов $\{w_k\}_{k \geq 1}$. Вектор $\chi \in H$ представим в виде

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \quad c_k = (w_k, \chi), \quad (12)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в H . Решение $v(t; \chi, \alpha)$ уравнения (5) будем искать в виде

$$v(t; \chi, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k t} w_k. \quad (13)$$

Подставляя это выражение в условие (6) и воспользовавшись представлением (12), найдем значения $\varphi_k = [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} c_k$.

Подставляя значения φ_k в (13), получим

$$v(t; \chi, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) e^{-\lambda_k t} w_k. \quad (14)$$

Покажем, что ряд (14) является сильно обобщенным в $C([0, T], H)$ решением задачи (5), (6). В качестве последовательности v_n из определения возьмем последовательность частичных сумм

$$v_n(t; \chi, \alpha) = \sum_{k=1}^n [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) e^{-\lambda_k t} w_k. \quad (15)$$

Функции $v_n \in C^1([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$ и удовлетворяют уравнению (9), так как этими свойствами обладает каждое слагаемое конечной суммы (15). Так как

$$\alpha v_n(0) + (1-\alpha)v_n(T) = \sum_{k=1}^n (w_k, \chi),$$

то в силу (12) выполняется (11). Далее, поскольку

$$\left[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T} \right]^{-1} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad (16)$$

то

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) w_k \right\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} (w_k, \chi)^2$$

и ряд (14) сходится в норме пространства $C([0, T], H)$ непрерывных на $[0, T]$ функций, принимающих значения в H . Следовательно, выполняется (10), так как v_n есть частичные суммы ряда (14).

Единственность решения следует из полноты в H системы собственных векторов $\{w_k\}_{k \geq 1}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\chi \in D(A^{1/2})$, то решение $v(t; \chi, \alpha)$ является непрерывной функцией по $t \in [0, T]$ со значением в $D(A^{1/2})$ и удовлетворяет уравнению (5) почти везде.

Доказательство. Если $\chi \in D(A^{1/2})$, то из (12) следует равенство

$$\|\chi\|_1^2 = \|A^{1/2} \chi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (w_k, \chi)^2. \quad (17)$$

В силу неравенства (16) справедливы оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) w_k \right\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k (w_k, \chi)^2, \quad (18)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left\| \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) w_k \right\|^2 dt \leq \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda(w_k, \chi)^2, \quad (19)$$

$$\int_0^T \left\| A \sum_{k=m}^{m+p} e^{-\lambda_k t} [\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}]^{-1} (w_k, \chi) w_k \right\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda(w_k, \chi)^2. \quad (20)$$

На основании равенства (17) из (18) заключаем, что функция $v(t; \chi, \alpha)$ является непрерывной по $t \in [0, T]$ со значением в $D(A^{1/2})$, а из (19) и (20) следует, что $v(t; \chi, \alpha)$ удовлетворяет условию (5) почти везде. Теорема доказана.

3. Перейдем к задаче (1), (2). Положим в (2) $\xi = \xi_\alpha = v(0; \chi, \alpha)$. При выбранном ξ_α в силу единственности решения задачи (1), (2) $u(t; \xi_\alpha) = v(t; \chi, \alpha)$.

Теорема 3. Пусть $\chi \in H$. Тогда справедливо соотношение (7).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\chi - u(T; \xi_\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T} - e^{-\lambda_k T}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}} (w_k, \chi) w_k. \quad (21)$$

Для всех $\alpha \in [0, T]$ величина

$$\frac{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T} - e^{-\lambda_k T}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}} = \frac{\alpha(1 - e^{-\lambda_k T})}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda_k T}} \quad (22)$$

неотрицательна и не убывает по α , так как ее производная по α неотрицательна. Величина (22) принимает наибольшее значение при $\alpha=1$, которое не превосходит 1. Поэтому равномерно на $\alpha \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$\|\chi - u(T; \xi_\alpha)\|^2 \leq \|\chi\|^2. \quad (23)$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\chi - u(T; \xi_\alpha)\|^2 = 0, \quad \forall \chi \in M, \quad (24)$$

где M — некоторое плотное в H множество. Тогда из (23) и (24) в силу теоремы Банаха—Штейнгауза следует (7). В качестве M возьмем все χ , представимые в виде (см. (12))

$$\chi = \sum_{k=1}^N c_k w_k = \sum_{k=1}^N (w_k, \chi) w_k, \quad \forall N < \infty. \quad (25)$$

Тогда

$$\|\chi - u(T; \xi_\alpha)\|^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha^2 (1 - e^{-\lambda_k T})^2}{\alpha + (1 - e^{-\lambda_k T})^2} (w_k, \chi)^2 \leq \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2} \sum_{k=1}^N (w_k, \chi)^2 \leq \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2} \|\chi\|^2 \quad (26)$$

и, следовательно, выполняется (24). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\chi \in D(A^{1/2})$. Тогда справедливо соотношение (8).

Доказательство. Аналогично, как и (23), устанавливается оценка

$$\|\chi - u(T; \xi_\alpha)\|_1^2 \leq \|\chi\|_1^2. \quad (27)$$

На основании (27) и того, что для $\chi \in M$ (см. (25) и (26))

$$\|\chi - u(T; \xi_\alpha)\|_1^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha^2 (1 - e^{-\lambda_k T})^2}{\alpha + (1 - e^{-\lambda_k T})^2} \lambda_k (w_k, \chi)^2 \leq \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2} \lambda_k (w_k, \chi)^2 \leq \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_N T}}{(1-\alpha)^2} \|\chi\|_1^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0,$$

заключаем в силу теоремы Банаха—Штейнгауза, что справедливо соотношение (8). Теорема доказана.

1. Латтес Р., Лионс Ж. — Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.

Поступила в редакцию 24.09.97.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЧЕРНЫХ И КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ

In this article the autor gives a new inequalities, which containe best approximation for the function $f \in L_2$, and the modul of continuity for this function. Also autor determine a Kolmogoroff diameter for a new class functions in space L_2 .

Через $L_2 = L_{2(0,2\pi)}$, обозначается пространство 2π -периодических измеримых функций, квадрат которых суммируем по Лебегу на $(0, 2\pi)$ с нормой:

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$, где $(\rho_k \geq 0)$ — ряд Фурье функции $f(x)$.

Хорошо известно свойство минимальности частичных сумм этого ряда:

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

которое заключается в том, что наилучшее приближение $E_n(f)$ функции $f(x)$ в L_2 тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$

$$T_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

реализуется на $S_{n-1}(f, x)$, т.е.

$$E_n(f) = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\| = \|f - S_{n-1}\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь мы использовали равенство Парсеваля.

Говоря о функции $f(x) \in L_2$, у которой $f^{(r)}(x) \in L_2$, $(r=1, 2, \dots)$ будем предполагать, что производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна.

Модуль непрерывности $\omega(f^{(r)}, \delta)$ определяется равенством:

$$\omega(f^{(r)}, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x)\|; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

В 1967 г. Н.И. Черных [4] доказал точное неравенство:

$$E_n(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

в котором n — любое натуральное число, а r — неотрицательное целое число. Это неравенство послужило отправным пунктом для многих работ (см., напр., [5]–[8]).

Каждое неравенство, имеющее вид

$$E_n^2(f) \leq K \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f^{(r)}, t) \psi_n(t) dt,$$

будем называть неравенством типа Черных.

В этой работе доказывается новое точное неравенство с $\psi_n(t) = \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\}$.

Пусть $W \subset L_2$ — класс функций из пространства L_2 , и пусть $L^N \subset L_2$ — некоторое подпространство пространства L_2 заданной размерности N . Величина

$$E_N(W) = \sup_{f \in W} \inf_{g \in L^N} \|f - g\|$$

называется наилучшим приближением класса W подпространством L^N в пространстве L_2 .

Колмогоровский поперечник [1] класса W определяется равенством:

$$d_N(W) = \inf_{L^N} \sup_{f \in W} \inf_{g \in L^N} \|f - g\|,$$

где последний раз \inf берется по всем подпространствам пространства L_2 размерности N .

Следуя [2], в работе определяется новый класс функции W'_Φ с помощью некоторой мажорантной $\Phi(u)$ и вычисляются точные значения его поперечников. Наряду с колмогоровскими поперечниками в работе рассматриваются и другие поперечники, такие, как $b_N(W)$, $d^N(W)$, $\lambda_N(W)$, $\gamma_N(W)$ и $\Pi_N(W)$. Они обозначают, соответственно, поперечник по Бернштейну, по Гельфанду, непрерывный, линейный и проекционный поперечники. Их точные определения можно найти в [3].

Отметим следующее.

Предложение 1.[3] Пусть P_N — любой из перечисленных выше поперечников, и $d_{2n-1}(W) \leq R$. Если шар размерности не меньше $2n+1$ содержится в классе W и имеет радиус R , то при $N=2n-1$ или $N=2n$ $b_N(W) \geq R$ и $P_N(W) = R$.

Теорема 1. Для любой функции $f(x) \in L_2$ и любого натурального n выполняется точное неравенство:

$$E_n^2(f) \leq \frac{n^2}{\pi^2 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt, \quad (1)$$

которое обращается в равенство, например, для функции $f(x) = \cos nx$.

Доказательство. Из определения модуля непрерывности имеем

$$\omega^2(f, t) \geq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 (1 - \cos kt) = 2E_n^2(f) - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kt,$$

откуда получаем

$$E_n^2(f) \leq \frac{1}{2} \omega^2(f, t) + \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kt.$$

Умножим обе части этого неравенства на вес $\left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} > 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{n}$) и проинтегрируем по t

$$E_n^2(f) \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt + \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} \cos ktdt. \quad (2)$$

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} \cos ktdt = \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{n}}{k^2} \leq \frac{2}{n^2}, \quad \forall k \geq n$$

и так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2},$$

то отсюда и из неравенства (2) получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2} E_n^2(f) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt + \frac{2}{n^2} E_n^2(f).$$

Откуда будем иметь неравенство:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}\right) E_n^2(f) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt,$$

которое можно записать в виде

$$E_n^2(f) \leq \frac{n^2}{\pi^2 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt.$$

Для функции $f_*(x) = \cos nx$ имеем

$$\omega^2(f_*, t) = 2(1 - \cos nt)$$

и

$$E_n^2(f_*) = 1.$$

Вычисляя интеграл в правой части неравенства (1), находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f_*, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt = \frac{\pi^2 - 4}{n^2}.$$

Отсюда уже видно, что неравенство (1) обращается в равенство для функции $f_*(x)$.

Следствие 1. Для любой функции $f(x) \in L_2$, $f^{(r)}(x) \in L_2$ и для любых натуральных n и r выполняется точное неравенство:

$$E_n^2(f) \leq \frac{1}{n^{2r}} \frac{n^2}{\pi^2 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega^2(f^{(r)}, t) \left\{ \frac{\pi}{n} - t \right\} dt, \quad (3)$$

которое обращается в равенство, например для функции $f_*(x) = \cos nx$.

Пусть $\Phi(u)$ произвольная непрерывная возрастающая при $u > 0$ функция: $\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$.

Употребляем обозначение

$$(1 - \cos v)_* = \begin{cases} 1 - \cos v, & v < \pi, \\ 2, & v \geq \pi. \end{cases}$$

Предположим существование производной $f^{(r)}(x) \in L_2$ некоторого порядка $r \geq 0$ и определим класс функций:

$$W_\Phi^r = \left\{ f \in L_2 : \int_0^u \omega^2(f^{(r)}, t) \{u - t\} dt \leq \Phi^2(u) \right\},$$

где функция $\Phi(u)$ ($u > 0$) удовлетворяет при любом $\lambda > 0$ условию:

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\lambda}\right) \int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v)_* \{ \pi\lambda - v \} dv \leq \frac{\pi^2 - 4}{n^2} \Phi^2(u). \quad (4)$$

Теорема 2. Для любого натурального n выполняется равенство

$$P_N(W_\Phi^r) = \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}(\pi^2 - 4)^{1/2}},$$

где P_N — любой из поперечников b_N , d^N , d_N , γ_N , λ_N , Π_N и $N=2n$ или $N=2n-1$.

Доказательство. Из определения колмогоровского поперечника и из неравенства (3) получаем оценку сверху

$$d_{2n-1}(W_\Phi^r) \leq \sup_{f \in W_\Phi^r} E_n(f) \leq \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}(\pi^2 - 4)^{1/2}}. \quad (5)$$

Ниже мы покажем, что класс W_Φ^r содержит шар

$$S_{2n+1} = \left\{ T_n(x) : \|T_n\|^2 \leq \frac{\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{2r-2}(\pi^2 - 4)} \right\}.$$

Оценим модуль непрерывности $\omega(T_n^{(r)}, t)$ произвольного тригонометрического полинома порядка n :

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k \cos(kx + \varphi_k).$$

Применяя равенство Парсеваля, можем написать

$$\|T_n^{(r)}(x+t) - T_n^{(r)}(x)\|^2 = 2 \sum_{k=1}^n k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos kt) \leq 2n^{2r} \sum_{k=1}^n \rho_k^2 (1 - \cos kt).$$

Так как

$$(1 - \cos kt) \leq (1 - \cos nt), \quad \forall t > 0, k \leq n,$$

и так как

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^2 = \|T_n\|^2,$$

то

$$\|T_n^{(r)}(x+t) - T_n^{(r)}(x)\|^2 \leq 2n^{2r} \|T_n\|^2 (1 - \cos nt).$$

Отсюда и из определения модуля непрерывности имеем:

$$\omega^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2n^{2r} \|T_n\|^2 (1 - \cos nt).$$

Пусть теперь $T_n(x) \in S_{2n+1}$. Тогда

$$\omega^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2n^{2r} \frac{\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{2r-2}(\pi^2 - 4)} (1 - \cos nt) = \frac{2n^2 \Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2 - 4} (1 - \cos nt).$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\{u-t\} > 0$ ($0 < t < u$) и проинтегрируем по t

$$\int_0^u \omega^2(T_n^{(r)}, t) \{u-t\} dt \leq \frac{2n^2 \Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2 - 4} \int_0^u (1 - \cos nt) \{u-t\} dt.$$

Сделав замену $nt = v$, получим

$$\int_0^u \omega^2(T_n^{(r)}, t) \{u-t\} dt \leq \frac{2n \Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2 - 4} \int_0^{nu} (1 - \cos v) \left\{u - \frac{v}{n}\right\} dv.$$

Обозначим $\frac{\pi}{nu} = \frac{1}{\lambda}$ и воспользуемся условием (4), получаем:

$$\int_0^u \omega^2(T_n^{(r)}, t) \{u-t\} dt \leq \frac{2}{\pi^2 - 4} \Phi^2\left(\frac{u}{\lambda}\right) \int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v) \{\pi\lambda - v\} dv \leq \Phi^2(u),$$

т.е. $T_n(x) \in W_{\Phi}^r$, и мы доказали включение $S_{2n+1} \subseteq W_{\Phi}^r$.

Отсюда и из неравенства (5) по предложению (1) имеем:

$$P_N(W_{\Phi}^r) = \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{r-1}(\pi^2 - 4)^{1/2}}.$$

Теорема 3. Для того чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v)_* \{ \pi\lambda - v \} dv \leq \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^\alpha \quad (6)$$

с любым $\lambda > 0$, необходимо и достаточно, чтобы α приняло значение $\alpha = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}$.

Доказательство. Необходимость. Положим

$$\psi(\lambda) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^\alpha - \int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v)_* \{ \pi\lambda - v \} dv,$$

функция $\psi(\lambda)$ непрерывна по λ на $(0, \infty)$ и не меняет знак на этом интервале ($\psi(\lambda) \geq 0, \forall \lambda > 0$). Кроме того, $\psi(1) = 0$, поэтому производная от функции $\psi(\lambda)$ должна принять в точке $\lambda = 1$ значение нуль, т.е. $\psi'(1) = 0$, и так как

$$\psi'(\lambda) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \alpha \lambda^{\alpha-1} - \pi \int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v)_* dv, \text{ то } \psi'(1) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \alpha - \pi^2, \text{ отсюда}$$

уже видно, что $\psi'(1) = 0$, когда $\alpha = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}$.

Достаточность. Покажем, что неравенство

$$\int_0^{\pi\lambda} (1 - \cos v)_* \{ \pi\lambda - v \} dv \leq \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}}$$

выполняется с любым $\lambda > 0$.

Для $0 < \lambda \leq 1$ это неравенство примет вид:

$$\frac{\pi^2 \lambda^2}{2} + \cos \pi \lambda - 1 \leq \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}}.$$

Так как $\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} < 4$, то это неравенство имеет место в малой окрестности нуля. Обозначим через $\psi(\lambda)$ разность обеих частей неравенства

$$\psi(\lambda) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}} - \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} - \cos \pi \lambda + 1,$$

тогда в малой окрестности нуля имеем $\psi(\lambda) > 0$. Если бы функция $\psi(\lambda)$ сменила знак на интервале $(0, 1)$, то, поскольку $\psi(0) = \psi(1) = 0$, функция

$$\psi'(\lambda) = \pi^2 \lambda^{\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4}} - \pi^2 \lambda + \pi \sin \pi \lambda$$

имела бы не менее двух нулей на интервале $(0, 1)$. И так как $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, то функция

$$\psi''(\lambda) = \pi^2 \frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} \lambda^{\frac{8}{\pi^2 - 4}} - \pi^2 + \pi^2 \cos \pi \lambda$$

имеет не менее трех нулей на интервале $(0, 1)$, кроме того, $\psi''(0) = 0$ и

$$\psi''(1) = \pi^2 \frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} - 2\pi^2 = \pi^2 \frac{12 - \pi^2}{\pi^2 - 4} > 0.$$

Значит, на интервале $(0, 1)$ существуют три нуля функции

$$\psi'''(\lambda) = \pi^2 \left(\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} \right) \left(\frac{8}{\pi^2 - 4} \right) \lambda^{\frac{12 - \pi^2}{\pi^2 - 4}} - \pi^3 \sin \pi \lambda.$$

Кроме того, $\psi'''(0) = 0$. Откуда, следовательно, существуют четыре нуля функции

$$\psi^{(4)}(\lambda) = \pi^2 \left(\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} \right) \left(\frac{8}{\pi^2 - 4} \right) \left(\frac{12 - \pi^2}{\pi^2 - 4} \right) \lambda^{\frac{16 - 2\pi^2}{\pi^2 - 4}} - \pi^4 \cos \pi \lambda$$

на интервале $(0, 1)$. И так как $\psi^{(4)}(\lambda) > 0$ на интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, то существуют четыре нуля функции $\psi^{(4)}(\lambda)$ на полуинтервале $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, что невозможно, поскольку на этом полуинтервале функция $\psi^{(4)}(\lambda)$ есть разность между выпуклой сверху и выпуклой снизу функциями и, значит, $\psi^{(4)}(\lambda)$ не может иметь больше двух нулей на этом полуинтервале. Мы пришли к противоречию.

Для $\lambda > 1$ неравенство (6) примет вид

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos v) \{\pi\lambda - v\} dv + 2 \int_{\pi}^{\pi\lambda} \{\pi\lambda - v\} dv \leq \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^{\alpha}. \quad (7)$$

Вычисляем интегралы в левой части неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (1 - \cos v) \{\pi\lambda - v\} dv + 2 \int_{\pi}^{\pi\lambda} \{\pi\lambda - v\} dv &= \int_0^{\pi} \{\pi\lambda - v\} d(v - \sin v) + 2 \left[\pi\lambda v - \frac{v^2}{2} \right]_{\pi}^{\pi\lambda} = \\ &= \left[\{\pi\lambda - v\} (v - \sin v) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (v - \sin v) dv + 2 \left[\pi^2 \lambda^2 - \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} - \pi^2 \lambda^2 + \frac{\pi^2}{2} \right] = \\ &= \pi^2 \lambda - \pi^2 + \left[\frac{v^2}{2} + \cos v \right]_0^{\pi} + \pi^2 \lambda^2 - 2\pi^2 \lambda + \pi^2 = \pi^2 \lambda - \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - 2 + \pi^2 \lambda^2 - 2\pi^2 \lambda + \pi^2 = \\ &= \pi^2 \lambda^2 - \pi^2 \lambda + \frac{\pi^2 - 4}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (7) эквивалентно неравенству:

$$\pi^2 \lambda^2 - \pi^2 \lambda + \frac{\pi^2 - 4}{2} \leq \frac{\pi^2 - 4}{2} \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}}.$$

Обозначим через $\psi(\lambda)$ разность обеих частей последнего неравенства, т.е.

$$\psi(\lambda) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \left(\lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}} - 1 \right) - \pi^2 \lambda^2 + \pi^2 \lambda,$$

и докажем, что $\psi(\lambda) \geq 0 \forall \lambda > 1$.

Так как

$$\psi'''(\lambda) = \pi^2 \left(\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 1 \right) \left(\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 2 \right) \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 3} > 0; \quad \forall \lambda > 1,$$

то функция

$$\psi''(\lambda) = \pi^2 \left(\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 1 \right) \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 2} - 2\pi^2$$

возрастет по $\lambda > 1$. Откуда

$$\psi''(\lambda) > \psi''(1) = \pi^2 \left(\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 1 \right) - 2\pi^2 = \pi^2 \frac{12 - \pi^2}{\pi^2 - 4} > 0.$$

Значит,

$$\psi'(\lambda) = \pi^2 \lambda^{\frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 1} - 2\pi^2 \lambda + \pi^2$$

есть возрастающая при $\lambda > 1$ функция и поэтому $\psi'(1) > \psi'(1) = 0$.

Следовательно, функция $\psi(\lambda)$ возрастет при $\lambda > 1$ и так как $\psi(1) = 0$, то $\psi(\lambda) > 0 \forall \lambda > 1$.

Теорема 3 доказана.

Определим класс W_u^r равенством:

$$W_u^r = \left\{ f \in L_2; \int_0^u \omega^2(f^\omega, t) \{u-t\} dt \leq u^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}} \right\}; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Следствие. Для любого натурального n выполняется равенство:

$$P_N(W_u^r) = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}}}{n^{r-1}(\pi^2-4)^{1/2}},$$

где P_N — любой из поперечников $b_N, d^N, d_N, \gamma_N, \lambda_N, \pi_N$ и $N=2n$ или $N=2n-1$.

Доказательство. Если положить $\Phi^2(u) = u^{\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}}$, то из теоремы 3 следует, что неравенство (4) выполнено. Это вытекает из теоремы 2.

1. Колмогоров А. Н. *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklassen*, Ann. of Math., 37 (1936). P.107.
2. Тайков Л. В. // *Мат. заметки*. 20. №3 (1976). С.433.
3. Тихомиров В. М. *Некоторые вопросы теории приближений*. М., 1976.
4. Черных Н. И. // *Мат. заметки*. 2. №5 (1967). С.513.
5. Юссеф Х. *Некоторые аппроксимативные свойства периодических функций в пространстве L_2* : Автореф. канд. дис. Мн., 1989.
6. Бабенко А. Г. // *Мат. заметки*. 60. №3. С.333.
7. Иванов В. И., Смирнов О. И. // *Там же*. 60. №3. С.390.
8. Maayada Shikh Othman. *N-Widths of some classes of functions in L_2* . Dis., Univ. Of Aleppo, Faculty of sciences, 1996.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 517.948

В. С. МАСТЯНИЦА, Д. С. ШУЛЯЕВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

A method for approximate solution of complete Prandtl's singular integrodifferential equation is described. The algorithm is based on the use of quadrature rules for the integrals of equation with logarithmic singularity, being equivalent to Prandtl's equation. Secondly, the convergence rate is obtained and one numerical example is given.

Рассмотрим обобщенное интегродифференциальное уравнение Прандтля

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 K(x,t) \Gamma(t) dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где $\Gamma(x)$ — искомая функция, $B(x)$, $f(x)$ — известные функции из класса $C[-1,1]$, а функция $K(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по обеим переменным. Поставим граничную задачу для уравнения (1) — наложим на $\Gamma(x)$ условия

$$\Gamma(1) = \beta, \quad \Gamma(-1) = \alpha. \quad (2)$$

В настоящей статье предлагается и обосновывается вычислительная схема для задачи (1), (2), являющаяся развитием подхода М. А. Шешко [1]. Схема основана на применении квадратурных формул к интегралам, входящим в уравнение с логарифмической особенностью, которое равносильно исходной задаче (1), (2). Эти формулы строятся путем интерполирования решения уравнения с логарифмической особенностью по узлам Чебышева первого рода.

Обозначая

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = u(x), \quad (3)$$

сведем граничную задачу (1), (2) к уравнению

$$u(x) + G(u; x) + R(u; x) = F(x), \quad (4)$$

$$\text{где } G(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt, \quad H(x, t) = \ln \frac{1 - xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|},$$

$$R(u; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x, t) u(t) dt, \quad K_*(u; x) = \int_{-1}^1 K(x, \tau) H(\tau, t) d\tau,$$

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{B(x)} \left\{ \frac{1}{\pi} (\alpha - \beta) \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) - \alpha \right\} + \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\pi} (\alpha - \beta) \left(\arcsin t + \frac{\pi}{2} \right) - \alpha \right\} K(x, t) dt.$$

Функции $\Gamma(x)$ и $u(x)$ связаны между собой соотношением

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \frac{1}{\pi} (\beta - \alpha) \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) + \alpha.$$

Интегродифференциальное уравнение (1) при граничных условиях (2) эквивалентно интегральному уравнению с логарифмической особенностью

$$u(x) + \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x, t) u(t) dt = F(x). \quad (5)$$

Введем класс функций H^* . Функция $\psi(x) \in H^*$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, она удовлетворяет условию Гельдера

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq A |x_1 - x_2|^\mu,$$

где A, μ — положительные постоянные и $0 \leq \mu < 1$, а в окрестностях точек $c = \pm 1$ допускает интегрируемую особенность, т.е. представима в виде

$$\psi(x) = \frac{\psi^*(x)}{|x-c|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha = \text{const} < 1, \quad \text{а } \psi^*(x) \text{ удовлетворяет условию Гельдера в}$$

окрестности c .

Теорема 1. Пусть ядро $K(x, t)$, входящее в регулярный интеграл уравнения (1), удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным. Пусть $B(x)$

и $K(x, t)$ такие, что $\rho + \mu < 1$, где $\rho = \max_{|x| \leq 1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}$, $\mu = \frac{\pi M}{2}$, ($|K(x, t)| \leq M$).

Тогда граничная задача (1), (2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma(x) \in H^*$ при любой правой части $f(x) \in C[-1, 1]$.

Построим приближенное решение уравнения (5), используя интерполяционную формулу

$$u(x) \approx u_n(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x) u(x_k), \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_k(x) = \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{n(x-x_k)} T_n(x),$$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен Чебышева первого рода и

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно [1], квадратурная формула для интеграла с логарифмической особенностью уравнения (5) имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k(x) u(x_k),$$

$$\text{где } A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) \omega_k(t) dt. \quad (7)$$

а квадратурная формула для регулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x, t) u(t) dt \approx \sum_{k=1}^n C_k(x) u(x_k),$$

где

$$C_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_*(x, t) \omega_k(t) dt. \quad (8)$$

Приближенное решение уравнения (5) в узловых точках определяется из системы линейных алгебраических уравнений

$$y_j + \frac{1}{B_j} \sum_{k=1}^n A_{kj} y_k + \sum_{k=1}^n C_{kj} y_k = F_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $B_j = B(x_j)$, $F_j = F(x_j)$, $A_{kj} = A_k(x_j)$, $C_{kj} = C_k(x_j)$, $y_j = u(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$, $j=1, 2, \dots, n$.

Приближенное решение граничной задачи (1), (2) найдем по формуле

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x) y_k + \frac{1}{\pi} (\beta - \alpha) \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) + \alpha, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть функции $B(x)$, $f(x)$, $K(x, t)$, входящие в уравнение (1), принадлежат классу $H(\nu)$, $\nu \geq \frac{1}{2}$ (последняя по обоим переменным) и выполнено условие $(\rho + \mu) < 1$. Тогда система (9) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение задачи (1), (2), построенное по формуле (10), сходится к точному решению со скоростью

$$\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_c = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Построим модельный пример для иллюстрации метода. Задан $B(x)$, $f(x)$, $K(x, t)$, α , β , учитывая условие $0 < (\rho + \mu) < 1$. Положим $K(x, t) \equiv \text{const} = M$,

$a = b \equiv 0$, $f(x) \equiv x$, тогда $F(x) = x$. Пусть $M = \frac{1}{5\pi}$ и, удовлетворяя условию

$0 \leq (\rho + \mu) < 1$, выберем функцию $B(x) = 10\sqrt{1-x^2}$.

Для коэффициентов $C_k(x)$, $A_k(x)$ при выбранных $f(x)$, $K(x, t)$, α , β имеем

$$C_k(x) = \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{5n} \sin(\arccos x_k),$$

$$A_k(x) = \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n} \left[2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \sin(m \arccos x) \sin(m \arccos x_k) + \frac{(-1)^{k-1}}{n} \sin(n \arccos x) \right].$$

Таким образом, вычислительная схема для уравнения

$$u(x) + \frac{1}{10\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(\tau, t) u(t) dt \right\} d\tau = x$$

имеет вид

$$y_j + \frac{1}{10\sqrt{1-x_k^2}} \sum_{k=1}^n A_{kj} y_k + \sum_{k=1}^n C_{kj} y_k = x_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Приближенное решение граничной задачи

$$\frac{\Gamma(x)}{10\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t) dt = x, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\Gamma(1) = 0, \quad \Gamma(-1) = 0$$

определяется по формуле

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x) y_k, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Результаты вычислений поместим в таблицу.

x	$\Gamma_n(x)$			
	n=5	n=10	n=15	n=20
-0,95	-0,134189	-0,133550	-0,133523	-0,133562
-0,85	-0,198521	-0,197199	-0,197379	-0,197350
-0,65	-0,211584	-0,211989	-0,211938	-0,211969
-0,15	-0,060556	-0,061960	-0,061902	-0,061872
0,05	0,020340	0,020854	0,020832	0,020796
0,35	0,135516	0,137575	0,137632	0,137633
0,45	0,167712	0,169506	0,169677	0,169681
0,75	0,215969	0,215364	0,215338	0,215392
0,95	0,134189	0,133550	0,133523	0,133562

1. Шешко М. А., Расолько Г. А., Мастяница В. С. // Диф. уравнения. 1993. Т.29. № 9. С.1550.

Поступила в редакцию 24.04.97.

УДК 517.948.32:517.544

С.Л.ШТИН

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ЯДРА КОШИ НА ЧЕТЫРЕХЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

It is constructed an analogue of Cauchy kernel for 4-sheeted Riemann manifold described by an equation. Some special bases (normal and complement) of the corresponding field of algebraic functions are found for it.

При решении краевых задач теории аналитических функций на римановых поверхностях необходимо иметь некоторый аналог ядра Коши, которое в случае плоскости имеет вид $\frac{d\tau}{\tau-z}$. Аналоги ядра Коши на римановых поверхностях можно построить, если известен некоторый нормальный базис поля алгебраических функций, соответствующего римановой поверхности. В связи с этим напомним некоторые определения и алгоритм построения фундаментального и нормального базисов в общей ситуации. Пусть риманова поверхность определяется уравнением

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0,$$

где $a_i(z)$ — некоторые рациональные функции из $\mathbf{C}(z)$.

Рассмотрим конечное расширение полей $\mathbf{C}(z, w) \supset \mathbf{C}(z)$. Его базис $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ называется фундаментальным, если выполнены следующие условия:

- 1) все его элементы целые над $\mathbf{C}(z)$,
- 2) каждый целый над $\mathbf{C}(z)$ элемент представляется в виде

$$a_1(z)\omega_1 + \dots + a_n(z)\omega_n,$$

где $a_i(z)$ — некоторые многочлены.

Построение фундаментального базиса поля $\mathbf{C}(z, w)$ осуществляется следующим образом. Обозначим через $\Omega_{z=a_k}$ кольцо алгебраических функций, которые при $z=a_k$ принимают конечные значения. Пусть W образует вместе с z примитивную пару поля $\mathbf{C}(z, w)$, а $D(z)$ является дискриминантом степенного базиса $\{1, w, \dots, w^{n-1}\}$. Известно [1], что элементы фундаментального базиса имеют вид:

$$\omega_k = \frac{c_{k0}(z) + c_{k1}(z)w + \dots + c_{k,k-2}(z)w^{k-1} + w^k}{d_k(z)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $d_k(z)$ являются делителями $D(z)$. Если $z-a_1, z-a_2, \dots, z-a_s$ — линейные множители многочлена $D(z)$, то находят целые функции вида

$$\frac{c_{k0}(z) + c_{k1}(z)w + \dots + w^k}{(z-a_\nu)^\mu}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad \text{где } \mu - \text{возможно более высокий}$$

показатель. Для этого функции $1, w, \dots, w^{n-1}$ разлагаются по степеням $z-a_\nu$,

а затем находятся такие комбинации этих функций, все разложения которых начинались бы с возможно более высоких степеней z^{-a_v} . Это достигается с помощью следующего алгоритма. Пусть все разложения функции w (а с ней и w^2, \dots, w^{n-1}) распадаются на k циклов, и каждому циклу соответствуют общие знаменатели показателей b_1, b_2, \dots, b_k . При этом $b_1 + b_2 + \dots + b_k = n$. Каждому элементу базиса сопоставляется k чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, где μ_i — наиболее низкий из показателей его разложения i -го цикла. Поэтому μ_i — некоторая дробь со знаменателем b_i , возможно сократимая. В силу целостности элементов базиса все $\mu_i \geq 0$. Если для некоторого элемента все $\mu_i \geq 1$, то, разделив его на z^{-a_v} , получим целый элемент, у которого все μ_i будут на единицу меньше. Таким образом, базис можно привести к такому виду, что среди показателей μ_i каждого его элемента хотя бы один будет меньше единицы. Если не для каждого цикла в базисе есть элемент с числом $\mu_i < 1$, то для какого-то (i -го) цикла таких элементов будет больше b_i . Но так как значениями $\mu_i < 1$ могут быть только числа

$$0, \frac{1}{b_i}, \frac{2}{b_i}, \dots, \frac{b_i-1}{b_i}, \quad (1)$$

то в базисе будут два элемента с одним и тем же μ_i .

Один из элементов заменяется их линейной комбинацией так, чтобы в ней пропал член $(z^{-a_v})^{\mu_i}$. Тогда для комбинации значение μ_i повысится. После этого значения μ_i пересматриваются сначала, причем, если все $\mu_i \geq 1$, опять производится деление на z^{-a_v} . После конечного числа шагов получаем базис, в котором для некоторого (i -го) цикла имеется b_i элементов с числами μ_i , совпадающими с системой (1). Пусть $i=1$ и w_1, w_2, \dots, w_{b_1} — элементы базиса, для которых значения μ_i совпадают с системой (*). Прибавляя к остальным элементам базиса комбинации элементов w_1, w_2, \dots, w_{b_1} , умноженные на подходящие степени z^{-a_v} , можно добиться того, чтобы значения μ_i для остальных элементов базиса были сколь угодно велики. Продолжая процесс, можно разделить все элементы базиса на k категорий, в каждой из которых будет по b_1, b_2, \dots, b_k элементов соответственно, причем для элементов i -ой категории значения μ_i будут равны числам (*). Полученный базис будет фундаментальным для кольца $\Omega_{z^{-a_v}}$. Последовательно преобразуя базис относительно множителей $z^{-a_1}, \dots, z^{-a_n}$, получим фундаментальный базис кольца целых элементов поля $\mathbb{C}(z, w)$.

Если через Ω_1 обозначить кольцо целых элементов от $z_1 = \frac{1}{z}$, то можно доказать следующее утверждение: всякий элемент u кольца Ω (целых элементов от z) можно умножением на некоторую степень $z_1^r = z^{-r}$ сделать элементом кольца Ω_1 . Причем наименьшим таким значением является $r = \max\{k_1/1, k_2/2, \dots, k_n/n\}$, где k_i — степень многочлена i -го коэффициента целого уравнения для элемента u : $y^n + a_1(z)y^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$ [1].

Это число r называется дробным показателем элемента u , а ближайшее к r справа целое число — целым показателем u .

Нормальный базис кольца Ω определяется следующим образом. В качестве первого элемента всегда выбирается $\lambda_1 = 1$; в качестве λ_2 берется целый элемент, не входящий в $\mathbb{C}(z)$, возможно более низкого показателя; в качестве λ_3 берем целый элемент, не представимый в форме $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$, $c_i \in \mathbb{C}(z)$, снова возможно более низкого показателя и т.д. Для показателей r_i элементов λ_i будет выполнено соотношение:

$$r_1 = 0, 1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_n.$$

Наконец, дополнительный базис $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ для базиса $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ определяется равенствами $S_p(\lambda_i, \mu_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$, δ_{ij} — символ Кронекера).

Рассмотрим теперь риманову поверхность, определяемую уравнением

$$w^4 = (z^2 - 1)^3(z^2 - a^2), \quad a > 1.$$

В нашем случае процедура построения нормального базиса значительно упрощается ввиду простоты алгебраического уравнения, которое является двучленным. Будет только один цикл.

Сначала преобразуем степенной базис в фундаментальный базис кольца $\Omega_{z=1}$. Решение уравнения $w^4 = (z^2 - 1)^3(z^2 - a^2)$ ищем в виде

$$w = \alpha(z-1)^\varepsilon + \alpha'(z-1)^{\varepsilon'} + \dots \quad (\varepsilon < \varepsilon' < \dots).$$

Разлагаем по степеням $z-1$ многочлен $(z-1)^3(z+1)^3(z-a)(z+a)$:

$$8(1-a^2)(z-1)^3 + \text{младшие члены}.$$

Сравнивая младшие члены, находим:

$$(1-z)^3 8(1-a^2) + a^4(z-1)^{4\varepsilon} = 0, \quad \text{откуда } \varepsilon = \frac{3}{4}, \quad \alpha = \sqrt[4]{8(a^2-1)}.$$

Таким образом, $w = \sqrt[4]{8(a^2-1)}(z-1)^{3/4} + w_1$.

Тогда $w^2 = \sqrt[4]{8(a^2-1)^2}(z-1)^{6/4} + \dots$; $w^3 = \sqrt[4]{8(a^2-1)^3}(z-1)^{9/4} + \dots$

Все члены в разложениях w^2 и w^3 имеют показатели > 1 , поэтому их нужно заменить на элементы

$$\frac{w^2}{z-1} = \sqrt[4]{64(a^2-1)^2}(z-1)^{2/4} + \dots \quad \text{и} \quad \frac{w^3}{(z-1)^2} = \sqrt[4]{512(a^2-1)^3}(z-1)^{1/4} + \dots$$

У преобразованного базиса числа μ_i совпадают с системой

$$\left\{ 0, \frac{1}{b_i}, \frac{2}{b_i}, \dots, \frac{b_i-1}{b_i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right\}.$$

Точно так же преобразуем базис относительно множителя $z+1$.

В результате преобразований базис будет иметь вид

$$1, w, \frac{w^2}{(z-1)(z+1)}, \frac{w^3}{(z-1)^2(z+1)^2}.$$

Преобразование относительно множителя $z=a$ базис не изменит.

Действительно, пусть $w = \alpha(z-a)^\varepsilon + \alpha'(z-a)^{\varepsilon'} + \dots$, $w^4 = \alpha^4(z-a)^{4\varepsilon} + \dots$; $(z^2-1)^3(z^2-a^2) = -(z-a)[2a(1+a)^3(a-1)^3 + \dots]$.

Сравнивая младшие члены, получаем

$$\alpha^4(z-a)^{4\varepsilon} - (z-a)[2a(a-1)^3 + \dots] = 0.$$

Отсюда $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\alpha = \sqrt[4]{2a(a^2-1)^3}$, т.е.

$$w = \sqrt[4]{2a(a^2-1)^3}(z-a)^{1/4} + \dots, \quad w^2 = \sqrt[4]{4a^2(a^2-1)^6}(z-a)^{2/4} + \dots, \quad w^3 = \sqrt[4]{8a^3(a^2-1)^9}(z-a)^{3/4} + \dots$$

Таким образом, система чисел сразу совпадает с $\left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right\}$ без дополнительных преобразований.

Аналогично, не меняет базиса и преобразование относительно точки $z=-a$. Итак, фундаментальный базис кольца целых элементов поля $\mathbb{C}(z, w)$ имеет вид:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = w, \lambda_3 = \frac{w^2}{(z-1)(z+1)}, \lambda_4 = \frac{w^3}{(z-1)^2(z+1)^2}.$$

В нашем случае для показателей r_i базисных элементов λ_i имеем: $r_1=0$, $r_2=r_3=r_4=2$. Поэтому полученный базис является не только фундаментальным, но и нормальным.

Для определения дополнительного базиса $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, где $\mu_i = \sum_{j=1}^4 e_{ji} \lambda_j$,

нужно решить четыре системы линейных уравнений

$$\begin{cases} e_{1i} s_p(\lambda_1 \lambda_1) + e_{2i} s_p(\lambda_2 \lambda_1) + e_{3i} s_p(\lambda_3 \lambda_1) + e_{4i} s_p(\lambda_4 \lambda_1) = \delta_{1i}, \\ e_{1i} s_p(\lambda_1 \lambda_{21}) + e_{2i} s_p(\lambda_2 \lambda_2) + e_{3i} s_p(\lambda_3 \lambda_2) + e_{4i} s_p(\lambda_4 \lambda_2) = \delta_{2i}, \\ e_{1i} s_p(\lambda_1 \lambda_3) + e_{2i} s_p(\lambda_2 \lambda_3) + e_{3i} s_p(\lambda_3 \lambda_3) + e_{4i} s_p(\lambda_4 \lambda_3) = \delta_{3i}, \\ e_{1i} s_p(\lambda_1 \lambda_4) + e_{2i} s_p(\lambda_2 \lambda_4) + e_{3i} s_p(\lambda_3 \lambda_4) + e_{4i} s_p(\lambda_4 \lambda_4) = \delta_{4i}, \end{cases}$$

где $i=1, \dots, 4$.

Дополнительный базис имеет вид:

$$\mu_1 = e_{11} \lambda_1 = \frac{1}{4};$$

$$\mu_2 = e_{42} \lambda_4 = \frac{1}{4(z^2-1)(z^2-a^2)} \frac{w^3}{(z^2-1)^2} = \frac{w^3}{4(z^2-1)(z^2-a^2)};$$

$$\mu_3 = e_{33} \lambda_3 = \frac{(z^2-1)^3}{4(z^2-a^2)(z^2-1)(z^2-1)^4} \frac{w^2}{(z^2-1)^2} = \frac{w^2}{4(z^2-a^2)(z^2-1)^2};$$

$$\mu_4 = e_{24} \lambda_2 = \frac{w}{4(z^2-1)(z^2-a^2)}.$$

Поскольку базисы $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$ известны, рассмотрим дифференциальное выражение

$$K(\tau, s; z, w) d\tau = \sum_{k=1}^4 \lambda_k(z, w) \mu_k(\tau, s) \frac{d\tau}{\tau - s}.$$

Легко проверяется, что $K(\tau, s; z, w) d\tau$ обладает свойствами, которыми должен обладать любой аналог ядра Коши на римановой поверхности, а именно:

$$1) K(\tau, s; z, w) d\tau \xrightarrow{(\tau, s) \rightarrow (z, w)} \frac{d\tau}{\tau - s};$$

$$2) K(\tau, s; z, w) d\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow z, s \rightarrow w} O(1) d\tau.$$

Найденное ядро может быть, например, использовано при решении задачи о скачке: найти такую кусочно-аналитическую на поверхности $w^4 = (z^2-1)^3(z^2-a^2) \setminus L$ функцию $\Phi(z, w)$, чтобы во всех точках замкнутого контура L выполнялось граничное условие $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$, $t(\tau, \varepsilon) \in L$.

Решением этой задачи будет $\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(\tau, s) K(\tau, s; z, w) d\tau$ [2].

1. Чеботарев Н. Г. Теория аналитических функций. М., 1948.

2. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. XXVI. Вып. 1.

Поступила в редакцию 10.07.97.

Наши юбиляры



АНТОН АНТОНОВИЧ ЛАБУДА



Исполнилось 75 лет Антону Антоновичу Лабуде – заслуженному работнику народного образования Республики Беларусь, доктору физико-математических наук, профессору кафедры физической электроники Белорусского государственного университета.

А.А.Лабуда родился 9 апреля 1923 г. в Западной Белоруссии в д.Бокуны Пружанского района Брестской области в семье крестьянина. До 1939 г. учился в польской начальной школе, а затем – в гимназии г.Пружаны. После освобождения Белоруссии от немецко-фашистских захватчиков с 1944 по 1947 г. служил в Советской Армии. В составе полковой разведки участвовал в боях в Восточной Пруссии, а затем в Манчжурии в частях 3-го Белорусского и Забайкальского фронтов. За проявленные героизм и мужество награжден

орденами Славы III степени, Красной Звезды, Отечественной войны II степени и многими медалями.

После демобилизации работал учителем начальной школы, с отличием окончил Пружанское педучилище, физический факультет БГУ (1954 г.), очную аспирантуру и с 1957 г. по настоящее время трудится в Белгосуниверситете на преподавательской работе.

В 1959 г. А.А.Лабуда защитил кандидатскую, а в 1988 – докторскую диссертацию в области физики плазмы. С 1960 по 1976 г. исполнял обязанности зам.декана физического факультета, а с 1976 по 1980 г. он – первый декан образованного нового факультета радиофизики и электроники. С 1980 по 1992 г. заведовал кафедрой физической электроники, профессором которой является в настоящее время.

Область педагогических и научных интересов А.А.Лабуды – физика плазмы и ее применение в электронике и микроэлектронике. Свой первый научный доклад ученик профессора И.Г.Некрасевича, студент 3-го курса А.А.Лабуда сделал на юбилейной научной сессии университета в 1951 г.

Начиная с 1950 г. в БГУ активно велись диагностические исследования низкотемпературной плазмы и плазменных потоков. Результаты фундаментальных исследований газоразрядной плазмы явились научной базой для создания в республике в 80-х гг. плазменной технологии в микроэлектронике, что было весьма своевременным для развития электронной промышленности в республике. По инициативе А.А.Лабуды в 1980 г. был открыт филиал кафедры физической электроники на НПО "Интеграл" и началась подготовка специалистов в области плазменной электроники для работы непосредственно на производстве. Таким образом была решена кадровая проблема для новой отрасли. В то же время создается госбюджетная НИЛ спектрального контроля в плазменной технологии, организатором и руководителем которой был А.А.Лабуда. Коллективом кафедры и лаборатории за сравнительно короткий срок разработаны и внедрены на предприятиях республики многие технологические процессы по размерному плазменному травлению и нанесению тонких пленок широкого назначения: барьерных,

просветляющих, защитных, антикоррозионных, упрочняющих и декоративных. Для этих же целей были разработаны спектральные приборы контроля и автоматического управления этими процессами, которые демонстрировались на многих выставках, в том числе и за рубежом.

Научная деятельность А.А.Лабуды отражена в более чем 200 публикациях и 10 авторских свидетельствах на изобретения. Под его руководством подготовлены и защищены одна докторская и шесть кандидатских диссертаций. С докладами и лекциями по плазменной тематике А.А.Лабуда выступал на многих международных конференциях, в научных центрах бывшего Союза и за рубежом, в том числе в Йенском, Ягеллонском и Софийском университетах, а в последнее время — по приглашению с докладами перед слушателями международной школы по плазменной инженерии поверхности в техническом университете в Кошалине (Польша).

Результатом плодотворного научного сотрудничества с рядом зарубежных университетов явилось признание А.А.Лабуды в научных кругах как авторитетного специалиста в области физики плазмы. Он избран членом Польского вакуумного научного общества, корреспондентом Международного радиофизического общества (URSI).

А.А.Лабуда активно участвует в общественной жизни, являясь членом двух специализированных советов по защите диссертаций, членом экспертного совета Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, членом совета факультета радиофизики и электроники. За большие заслуги в научно-педагогической деятельности А.А.Лабуда награжден грамотами университета, Минвуза БССР и СССР, грамотой Верховного Совета БССР. Указом Президиума Верховного Совета Республики Беларусь ему присвоено почетное звание "Заслуженный работник народного образования Республики Беларусь".

Профессор А.А.Лабуда — человек неутомимой энергии и постоянного поиска новых решений научных проблем в избранной им области деятельности.

Личная скромность, высокая культура и доброжелательность с коллегами снискали ему заслуженное уважение и авторитет в коллективе кафедры и среди студентов.

Коллеги юбиляра, сотрудники и многочисленные ученики желают Антону Антоновичу крепкого здоровья, счастья и больших творческих успехов.

РЕФЕРАТЫ

УДК 543.422.541.65

Алексеевко Н.А., Зажогин А.П. **Электропно-колебателные спектры поглощения и строение комплексов уранилхлорида в растворах** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Представлены основные результаты исследования электронных спектров поглощения растворов уранилхлорида в воде и некоторых органических растворителях. Изучено строение первой координационной сферы комплексов уранила в растворах. Получена корреляционная зависимость между положением максимума полосы первого чисто электронного перехода и характеристиками растворителей.

Библиогр. 6 назв., табл.1, ил.1.

УДК 621.378.34

Грузинский В.В., Кухто А.В., Галькин В.В. **Зависимость эффективности генерации от частоты излучения накачки в лазерах на сложных органических соединениях в квазистационарном режиме** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Методом математического моделирования в квазистационарном режиме генерации исследована зависимость эффективности генерации лазеров на сложных органических соединениях от длины волны накачки. Показано, в частности, что максимальное значение эффективности генерации в ряде случаев достигается не в максимуме спектра поглощения, а на длинноволновом крыле этого спектра.

Библиогр. 13 назв., ил.3.

УДК 53.072:621.397.132

Карапетян О.Э., Кухарчик Л.В., Сагайдак Д.И., Тимофеева Г.И. **Прогнозирование цветовых характеристик ЖК экранов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Проведено компьютерное моделирование процесса формирования цвета в ЖК экране. На основании разработанной модели проведено оптическое проектирование RGB матриц ЖК экрана. Определены оптимальные конструкции ЖК экрана и RGB фильтров.

Библиогр. 5 назв., ил.4.

УДК 539.292

Сухвало С.В., Власов В.В., Рудь В.Г. **Глобальная и локальная устойчивость магнитных фаз в магнетиках кубической сингонии** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Проведен математический анализ условий глобальной и локальной устойчивости магнитных фаз в магнетиках кубической сингонии на основе рассмотрения инвариантного полинома энергии магнитокристаллической анизотропии. Установлены параметры, отвечающие за глобальную устойчивость магнитных фаз, построена фазовая диаграмма устойчивости спиновой конфигурации магнитной системы в целом. Рассмотрена равновесность и устойчивость локальных составляющих спиновых конфигураций, их соотношение.

Библиогр. 5 назв., табл.1, ил.1.

УДК 621.382.323-416

Андреев А.Д., Комаров Ф.Ф., Михей В.Н. **Эмиссия горячих электронов в подзатворный диэлектрик МОП-ПТ с высоколегированной подложкой** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Измерены ионизационные потоки подложки, определена средняя длина свободного пробега и энергия электронов в МОП-ПТ с уровнем легирования подложки $7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$; рассчитаны зависимости высоты потенциального барьера на границе кремний – диоксид кремния и тока эмиссии электронов от напряжения затвора. Градиенты токов подложки, эмиссии имеют противоположные знаки, что может быть связано с увеличением интенсивности ионизации.

Библиогр. 9 назв., ил.3.

УДК 621.315

Пономарь В.Н., Пилипенко В.А., Горушко В.А., Тарасик М.И. **Планирование поверхности изолирующего диэлектрика с использованием быстрой термической обработки** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. № 2.

Проведены исследования процесса оплавления фосфоросиликатного и борофосфоросиликатного стекол с применением быстрой термической обработки. Установлено, что разработанный метод обработки стекол позволяет улучшить электрические характеристики элементов интегральных схем.

Библиогр. 3 назв., ил.3.

УДК 535.37

Клищенко А.П., Сенюк М.А., Тихомиров С.А., Толсторожев Г.Б. **Свободные радикалы: фотодиссоциация одиарных связей в органических молекулах и сопутствующие релаксационные процессы** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. №2.

Методами пикосекундной кинетической спектроскопии исследованы динамика внутримолекулярного переноса заряда в аминопроизводных оксадиазолов и кетонов и механизмы сверхбыстрых процессов, приводящих к образованию свободных радикалов. В рамках современных представлений о механизмах образования ТГСТ-состояний дана интерпретация наблюдаемых спектрально-кинетических характеристик исследуемых соединений.

Библиогр. 30 назв., ил.6.

УДК 33:517.925

Калитин Б.С. **Динамическая модель рынка типа "эффективная конкуренция". Неотрицательный запас прочности** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Исследуется проблема устойчивости равновесных цен в критическом случае одного нулевого корня. Приведены достаточные условия устойчивости и неустойчивости в зависимости от исходных параметров системы.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.21

Пилипчук Л.А., Пилипчук А.С. **Критерий оптимальности для одной двойственной линейной экстремальной задачи** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Рассматривается двойственная линейная экстремальная задача специальной структуры. Формулируется и доказывается критерий оптимальности.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.2

Абрамович М.С. **Оценка мощности спектрального критерия обнаружения момента "разладки" временных рядов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Решена задача асимптотического анализа мощности критерия обнаружения момента "разладки" временных рядов, основанного на оценках спектральных плотностей.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.872

Бабицкий А.В. **Оптимизация входного потока однопоточной системы массового обслуживания** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

В статье исследуется стационарное состояние однопоточной системы массового обслуживания с неограниченной очередью и входным потоком, который представляет собой суперпозицию нескольких простейших потоков. Система несет потери при содержании принятых заявок и при отказе их принятия. Ставится задача минимизации суммы потерь путем выбора оптимальных значений вероятностей допуска заявок в систему. Определена структура оптимального решения и предложен алгоритм его нахождения.

Библиогр. 2 назв., табл 1.

УДК 517.946

Чессалин В. И. Задача с нелокальными граничными условиями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

С использованием априорных оценок устанавливается существование, единственность и непрерывная зависимость сильного решения нелокальной граничной задачи для абстрактного гиперболического уравнения второго порядка.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.944

Абабна Муса (Иордания). Регуляризация нелокальными условиями задачи управления начальным условием для эволюционных дифференциально-операторных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Некорректная в смысле Адамара-Петровского задача управления начальным условием для эволюционных дифференциально-операторных уравнений решена с помощью регуляризации начальных условий нелокальными условиями.

Библиогр. 1 назв.

УДК 517.5

Юссеф Х. (Сирия). Неравенства типа Черных и колмогоровские поперечники // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Доказывается новое точное неравенство типа неравенства Черных, в котором наилучшие приближения индивидуальной функции $f(x) \in L_{210, 2^m}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ оцениваются через интегральный модуль непрерывности самой приближаемой функции или некоторой ее производной, домноженной на некоторый вес.

Также определяется новый класс функций и вычисляются точные значения его поперечников.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.948

Мастяница В. С., Шуляев Д. С. Приближенное решение обобщенного интегродифференциального уравнения Прадтля // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2

Предлагается и обосновывается вычислительная схема для обобщенного интегродифференциального уравнения Прадтля с заданными граничными условиями. Предлагаемая схема основана на применении квадратурных формул к интегралам, входящим в уравнение с логарифмической особенностью, которое равносильно исходной граничной задаче. Эти формулы строятся путем интерполирования решения уравнения с логарифмической особенностью по узлам Чебышева первого рода. Получена оценка отклонения приближенного решения от точного, построен пример.

Библиогр. 1 назв., табл.1.

УДК 517.948.32:517.544

Штин С. Л. Построение аналога ядра Коши на четырехлистной римановой поверхности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1998. №2.

Для четырехлистной римановой поверхности, заданной уравнением, строится один из возможных аналогов ядра Коши. Построение осуществляется с помощью нахождения некоторых специальных базисов (нормального и дополнительного) поля, соответствующего поверхности поля алгебраических функций.

Библиогр. 3 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Alekseenko N.A., Zazhigin A.P.</i> Absorption electronic-vibrational spectra and composition of uranyl chloride complexes in solutions	3
<u>Gruzinskiĭ V.V.</u> , <i>Kukhto A.V., Galkin V.V.</i> The dependence of lasing efficiency of dye lasers on the pumping wavelength in quasi-steady state	6
<i>Karapetyan O.E., Kukharchik L.V., Sagaidak D.I., Timofeeva G.I.</i> Optical projection of RGB filters of liquid crystal display (LCD)	12
<i>Sukhvalo S.V., Vlasov V.V., Rudj V.G.</i> Global and local stability of magnetic phase in magnetic of cubic system	17
<i>Andreev A.D., Komarov F.P., Mikhei V.N.</i> Hot electron emission into gate dielectric of high dopant substrate MOSFET	23
<i>Ponomar V.N., Pilipenko V.A., Gorushko V.A., Tarasik M.I.</i> Surface planarization of isolating dielectric using rapid thermal processing	26
<i>Klishchenko A.P., Senyuk M.A., Tikhomirov S.A., Tolstorozhev G.B.</i> Free radicals: photodissociation ordinary bonds in organic molecules and the associated relaxation processes	29

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Kalitin B.S.</i> The dynamic model of market of type "effective competition": Nonnegativity strength beyond	41
<i>Pilipchuk L.A., Pilipchuk A.S.</i> Optimality criterion for one dual linear extremal problem	46
<i>Abramovitch M.S.</i> The estimator of power of spectral criterion for disorder detection in time series	49
<i>Babitski A.V.</i> Optimization of input flow of single server queue	53
<i>Chesalin V.I.</i> Unlocal boundary problem for abstract hyperbolic equations	57
<i>Ababneh M.</i> Regularization by non-local conditions of the control initial conditions problem for evolution differential-operator equations	60
<i>Youssef H.</i> Chernikh's type inequalities and Kolmogoroff's diameters	64
<i>Mastyanitsa V.S., Shulyaev D.S.</i> Numerical solution of Prandtl's complete integro-differential equation	70
<i>Stin S.L.</i> The construction of an analogue of Cauchy kernel for 4-sheeted Riemann surface	73

OUR JUBILEE

Anton Antonovich Labuda	77
-------------------------------	----