

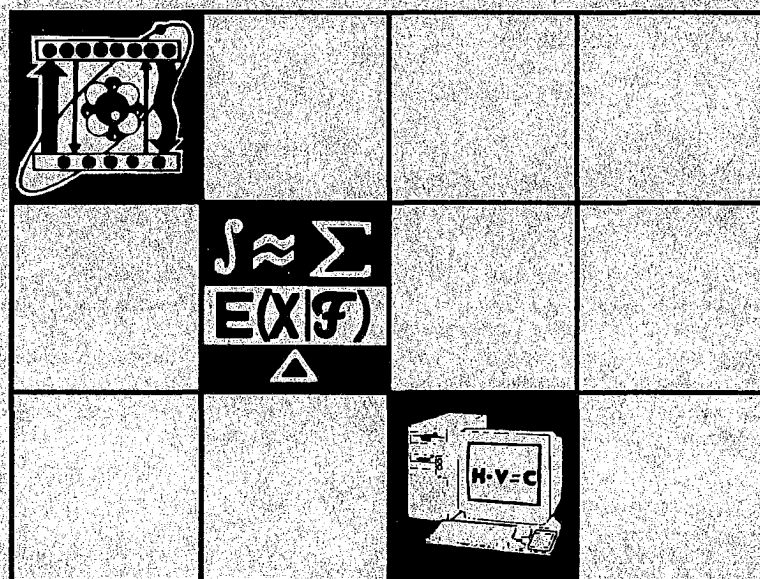
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

2'97



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Гринчук А.В., Ушаков Е.А. Некоторые аспекты влияния кривизны на распространение волн	3
Рудницкий А.С. Дифракция симметричной суперпозиции парциальных волн на полуплоскости	6
Килина С.В., Зажогин А.П., Шарашкин С.Н. Температурная зависимость спектров люминесценции лазерных кристаллов, активированных ионами Nd^{3+}	8
Углов В.В., Федотова Ю.А., Ходасевич В.В. Последовательная имплантация бора и азота в тонкие пленки железа	12
Акимов А.Н., Григорьев В.В., Комаров Ф.Ф., Коньшин И.В., Леонтьев А.В., Сагайдак Д.И., Францевич А.В. Профили распределения внедренных в ПММА ионов индия	17
Захаров А.Г., Вариченко В.С. Особенности дефектообразования в алмазе, облученном ионами бора	19
Филипп А.Р. Высокоэнергетичная ионная имплантация в алмаз	22
Колковский И.И., Лугаков П.Ф. Ограниченная диффузией рекомбинация носителей заряда на ростовых дефектах в р-кремнии	27
Кухаренко Е.Л., Шепелевич В.Г. Структура и термо-ЭДС быстрозатвердевшей фольги соединений $Bi_{1-x}Sb_xTe$	29
Самуйлов В.А., Стельмах В.Ф., Яновский А.М., Бука П.П., Крылов Д.Ф. Спектральные характеристики сильно легированных пленок поликристаллического кремния	32
Анишаков О.М., Филь Г.А., Чудаков В.А. Анализ спектрального распределения гамма-излучения полубесконечного источника с различными профилями заглубления радионуклида ^{137}Cs	36
Кухарчик П.Д., Сидорович Д.В. Выбор оптимального критерия при исследовании трехмерной антенной решетки	40

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Мельников О.И., Левин Ю.Г. Реализация гиперграфа k-гусеницей	43
Жевнова Н.Г. Внешняя характеристика класса конечных p-разложимых групп	46
Степанова Т.С. О нелинейных системах второго порядка без подвижных многозначных особых точек	48
Бобков В.В., Бобкова Н.А. Проблема разномасштабности и требования к методам численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	52
Шилин А.П. Явное решение одного парного интегрального уравнения	55
Фурса Р.А. Устойчивость метода прогнозирования временных рядов с использованием оценки Хьюбера	58
Ружижская Е.А. Стабилизация динамических систем управлениями, ограниченными по значениям и производным	61

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Михаил Михайлович Ковалев	66
Петр Ильич Монастырский	67

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Калитин Б.С. Динамическая модель рынка типа "эффективная конкуренция"	68
Лебедев В.И., Оранский А.М., Коляда А.А. Алгоритмы вращения векторов на основе методов "цифра за цифрой" и модулярной арифметики	70
Кашникова И.В. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений Ито решениями конечно-разностных	72
Матальцкий М.А. Исследование замкнутых сетей массового обслуживания с произвольным обслуживанием заявок в одной из систем сети	74

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Николай Павлович Еругин	76
Владимир Сергеевич Конюх	77

ВЕСТНИК

**Белорусского государственного
университета**

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Информатика**

2'97

МАЙ



МИНСК
"УНІВЕРСІТЭЦКАЕ"

Главный редактор В.Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П.Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

П.Д. КУХАРЧИК (ответственный редактор),
В.М. АНИЩИК, Л.М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В.Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А.М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный секретарь),
В.В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), Е.С. ВОРОПАЙ,
Р.Ф. ГАБАСОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КОМЯК,
В.И. КОРЗЮК, М.Д. МАРТЫНЕНКО, В.И. МИРОНЕНКО, С.Г. МУЛЯРЧИК,
И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДOTOV, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:
Белорусский государственный университет.

Регистрационный №805.

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 1997. №2

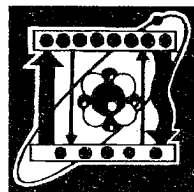
Редактор И.А. Лешкевич
Художественный редактор Ю.С. Сергачев
Технический редактор и корректор Г.И. Хмарун

Набор и верстка выполнены в редакции журнала Г.М. Добыш и В.А. Семеновым

Подписано в печать 06.06.97. Формат 70х108 1/16. Бумага офс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7.0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч. изд. л. 8,26. Тираж 1115 экз. Заказ 1175. Цена 16000 р.

Издательство "Універсітэцкае". 220048, Минск, пр. Матвеева, 11. Адрес редакции:
220080, Минск, Университетский городок тел 220-65-42.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства "Белорусский Дом
печати". 220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 530.12

А.В.ГРИНЧУК, Е.А.УШАКОВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

A new approach to the problem of wave propagation in curved space is proposed. The result is applied to construct Feynman propagator of vector field.

1. Решение волнового уравнения в пространстве Римана имеет как качественные, так и количественные отличия от решения в плоском пространстве. Только отчасти это объясняется изменением вида уравнения вследствие некоммутативности ковариантных производных для скалярного, спинорного и векторного полей соответственно: $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + m^2 \phi = 0$, $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \frac{R}{4} \psi + m^2 \psi = 0$, $\nabla_\mu \nabla^\mu A^\alpha + R^\alpha_\beta A^\beta + m^2 A^\alpha = 0$ (здесь и далее сигнатура -2).

Действительно, в силу уравнений Эйнштейна в тех областях пространства-времени, где $R^\alpha_\beta \neq 0$, имеем также и $T^\alpha_\beta \neq 0$. Взаимодействие с источником энергии-импульса зачастую значительно превышает гравитационные эффекты. Поэтому имеет смысл ограничиться решением в областях с $T^\alpha_\beta = 0$.

Тогда приведенные нами уравнения примут вид, схожий со случаем плоского пространства:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi + m^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где Ψ рассматривается как матрица-столбец. Традиционно [1] влияние гравитационного поля учитывается следующим образом. Уравнение (1) записывается в форме:

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu \nabla_\nu \Psi + \Gamma_\mu \nabla_\nu \Psi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda \Psi) + m^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

здесь Γ_μ — квадратные матрицы, $\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi$ [2].

В искривленном пространстве принципиально невозможно избавиться в конечной области от дополнительных членов, пропорциональных $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, Γ_μ .

Такая точка зрения имеет определенные недостатки. Во-первых, отсутствует явная ковариантность, во-вторых, трудно проследить непосредственное влияние кривизны на распространение волн.

2. Предлагаемый подход основан на некоторых свойствах параллельного переноса и методе вторичных волн [3]. Для упрощения промежуточных вычислений перейдем к нормальным римановым координатам $\{y^\alpha\}$ с началом в точке x_0^μ . Оператор параллельного переноса вдоль геодезической из точки $y=0$ в y^α с точностью до второго порядка имеет вид [4]:

$$P(y, 0) = 1 - y^\mu \Gamma_\mu(0) - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu (\partial_\mu \Gamma_\nu(0) - \Gamma_\mu(0) \Gamma_\nu(0)) + \dots \quad (3)$$

Можно легко проверить следующие соотношения:

$$\nabla_\mu P(y, 0) = O(y), \quad (4a)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu P = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \left((\partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} + (\Gamma_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\nu}} + \Gamma_{\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\mu}}) + \Gamma_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \Gamma_{\hat{\nu}}^{\hat{\beta}} + \partial_{\hat{\nu}} \Gamma_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}}) P - \Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}} (\partial_{\hat{\alpha}} + \Gamma_{\hat{\alpha}}) P \right) = O(y), \quad (4б)$$

откуда с учетом $\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}} = O(y)$ следует, что подстановка $\tilde{\Psi} = P(y, 0) \Psi_0 \exp(-ik_{\hat{\mu}} y^{\hat{\mu}})$ в волновое уравнение даст результат:

$$(\nabla^2 + m^2) \tilde{\Psi} = (m^2 - g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(0) k_{\hat{\alpha}} k_{\hat{\beta}}) \tilde{\Psi} + O(y) O(\tilde{\Psi}), \quad (5)$$

т.е. $\tilde{\Psi}$ при $k^2 = m^2$ является решением (1) с точностью до $O(y^3)$.

В методе вторичных волн используются фундаментальные решения, т.е. решения уравнения (1) с сингулярными начальными условиями:

$$\text{при } t = t' \quad K(t, r; t', r') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} K(t, r; t', r') = 1 \delta_{(3)}(r - r'), \quad (6a)$$

$$K_0(t, r; t', r') = 1 \delta_{(3)}(r - r'), \quad \frac{\partial}{\partial t} K_0(t, r; t', r') = 0. \quad (6б)$$

Решение (1) представляет собой суперпозицию вторичных волн, выражаемых посредством фундаментальных решений K, K_0 :

$$\Psi(t, r) = \int \left(K(t, r; t', r') \frac{\partial \Psi(t', r')}{\partial t'} + K_0(t, r; t', r') \Psi(t', r') \right) d^3 r'. \quad (7)$$

Если x_0^μ — точка на начальной гиперповерхности Σ , то, направляя ось $y^{\hat{0}}$ вдоль нормали к Σ , получим:

$$1) \quad K(x, x_0) = P(x, x_0) \int \frac{\sin k_{\hat{0}} y^{\hat{0}}}{k_{\hat{0}}} \exp(-k_i y^i) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (8a)$$

$$K_0(x, x_0) = P(x, x_0) \int \cos k_{\hat{0}} y^{\hat{0}} \exp(-ik_i y^i) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (8б)$$

— решения (1) с точностью до $O(y^3)$, так как каждая из компонент Фурье-разложения ($\sim \text{Re}^{-iky}$) удовлетворяет (5);

2) при $y^{\hat{0}} = 0$ выполняются начальные условия вида (6).

Следовательно, формула (7) переходит в выражение:

$$\Psi(x') = \int_{\Sigma} \left(K(x', x) \frac{D\Psi}{\partial \Sigma} + K_0(x', x) \Psi \right) d^3 \Sigma, \quad (9)$$

справедливое в малой окрестности Σ . Для спиноров предлагается рассматривать квадратированное уравнение Дирака, но нужно учитывать, что производная по нормали к гиперповерхности не является независимой величиной.

Как можно описать вторичные волны? Из (8a, 8б) следует, что амплитуды волн $\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \Sigma}$ переносятся параллельно вдоль геодезических, выходящих из начальной точки x_0^μ . Фазы парциальных квазиплоских волн ($k_{\hat{\mu}} y^{\hat{\mu}}$ — в Римановых координатах) в произвольных координатах выражаются как $\int k_{\hat{\mu}} dx^{\hat{\mu}}$,

где интегрирование ведется вдоль геодезической $\frac{D^2 x^{\hat{\mu}}}{ds^2} = 0$ при $\frac{Dk_{\hat{\mu}}}{ds} = 0$ [6].

Естественно, наши построения справедливы только в малой окрестности x_0 . При этом ограничении можно утверждать, что вторичные волны вида (8) дают физическую реализацию параллельного переноса. Хотя данное утверждение важно уже само по себе, оно не позволяет увидеть различие в поведении волн в искривленном и плоском пространствах. Действительно, в плоском пространстве единичная матрица является также и оператором параллельного переноса, причем не только в малой окрестности. Различие решений обусловлено изменением условий интерференции вторичных волн. При наличии кривизны результат параллельного переноса зависит от начальной и конечной точки и соединяющего их пути. Эта зависимость искажает интерференционную картину и может быть положена в основу описания взаимодействия поля с кривизной.

Например, анализ движения волнового пакета на основании фазовых сдвигов [8] приводит к выводу, что кривизна является источником дополнительного сдвига фаз между вторичными волнами, который компенсируется разностью хода. Это, в свою очередь, приводит к отклонению пакета от геодезической [9]:

$$\frac{D p_\mu}{ds} = -\frac{1}{2} R_{\mu\alpha\beta} u^\alpha \sigma^{\beta}, \quad (10)$$

где $p_\mu, \sigma^{\alpha\beta}$ — средние значения импульса и спина. Уравнение такого вида для классических систем приведено в [10].

3. При выводе формул (4), (8) совершенно не использовались свойства Γ_μ , характерные только для гравитационного поля. Поэтому все заключения будут справедливы и для калибровочных полей. Как известно, Ψ может рассматриваться как вектор некоторого касательного векторного пространства. В этом случае связность Γ_ν выражается через генератор группы симметрии и потенциалы поля, а $R_{\mu\nu}$ приобретает смысл тензора напряженности поля [2]. Уравнение вида (10) можно получить аналогичным образом. Например, для заряженных частиц в электромагнитном поле

$\Gamma_\mu \sim A_\mu, R_{\mu\nu} \sim F_{\mu\nu}, \frac{dp_\mu}{ds} = q F_{\mu\nu} u^\nu$. Дело заключается в том, что независимо от вида Γ_μ оператор параллельного переноса является в некотором смысле обратным по отношению к оператору $\nabla_\mu \nabla^\mu$ (см. напр. (46)).

Этим свойством можно воспользоваться для построения фейнмановского пропагатора векторного поля в пространстве Римана $G_{\beta'}^\alpha(x, x')$ при $R=0, R_\beta^\alpha=0$. В формализме Швингера–Девитта [11] уравнение Клейна–Гордона приводится к виду:

$$i \frac{\partial f(x, s; x', 0)}{\partial s} = \nabla_\mu \nabla^\mu f(x, s; x', 0), \quad (11)$$

а затем — к интегралу Фейнмана [12] при помощи соотношения:

$$f(x, s+\epsilon; x', 0) = \frac{1}{N} \int \exp \left[-i \left(\frac{\sigma(x, x'')}{2\epsilon} + \frac{R(x'')}{3} \epsilon \right) \right] f(x'', s; x', 0) \sqrt{-g(x'')} d^4 x'' + O(\epsilon^2).$$

Здесь и далее $\sigma(x, x')$ — мировая функция Синга [7], N — нормировочный множитель. В случае векторного поля сделаем подстановку:

$$G_{\beta'}^\alpha(x, x') = \int_0^\infty F_{\beta'}^\alpha(x, s; x', 0) e^{-im^2 s} ds,$$

$$i \frac{\partial F_{\beta'}^\alpha}{\partial s} = \nabla_\mu \nabla^\mu F_{\beta'}^\alpha, \lim_{s \rightarrow 0} F_{\beta'}^\alpha(x, s; x', 0) = \delta_{\beta'}^\alpha \delta_{(4)}(x, x').$$

Естественно предположить, что:

$$F_{\beta'}^\alpha(x, s+\epsilon; x', 0) = \int P_{\gamma'}^\alpha(x, x'') \exp \left[\frac{-i\sigma(x, x'')}{2\epsilon} \right] F_{\beta'}^{\gamma'}(x'', s; x', 0) \frac{\sqrt{-g(x'')} d^4 x''}{N} + O(\epsilon^2). \quad (12)$$

Действительно, в нормальных Римановых координатах с началом в x

$$\sigma(x, x'') = \frac{1}{2} \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} y^{\hat{\alpha}} y^{\hat{\beta}}, \quad P_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}}(0, y) = \delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} \left(\delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} - \frac{1}{6} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} y^{\hat{\mu}} y^{\hat{\nu}} \right) + O(y^3),$$

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^{\hat{\alpha}} = \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \left(\partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\nu}} A^{\hat{\alpha}} - \frac{1}{3} R_{\hat{\mu}\hat{\beta}\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} A^{\hat{\beta}} \right) + O(y), \quad (-g)^{\frac{1}{2}} = 1 + O(y^3),$$

и подстановка в (12) с разложением $F_{\beta'}^\alpha$ по степеням ϵ и y^α доказывает справедливость сделанного предположения.

Следовательно

$$G_{\beta'}^\alpha = \int_0^\infty ds \exp(-im^2 s) \int_{x'}^x D\{x(s)\} P_{\beta'}^\alpha(x(s)) \exp \left[-\frac{i}{4} \int g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds \right], \quad (13)$$

где $P_{\Gamma}^{\alpha}(x(s))$ — оператор параллельного переноса по пути $x(s)$, $\int D\{x(s)\}$ — обозначает интеграл по путям, точка — дифференцирование по s . Подынтегральное выражение естественным образом разбивается на два множителя: "динамический" ($\sim \exp(-i/4 \int g(x) ds)$) и "геометрический", явно реализующий параллельный перенос. Зависимость результата переноса от пути напрямую связана с наличием кривизны и позволяет оценивать гравитационные эффекты как следствие нетождественности оператора переноса по замкнутому контуру.

4. Отметим наиболее существенные черты предлагаемого подхода. Во-первых, изменение вида решения волнового уравнения во внешнем поле обусловлено, в первую очередь, не искажением вторичных волн ($\sim \Delta x^3$), а изменением условий их интерференции ($\sim \Delta x^2$ — площадь характерного замкнутого контура [7]). Поэтому качественно взаимодействие волны с гравитационным полем можно представить так: вторичные волны практически не изменяются, но по-другому выглядит результат их суперпозиции из-за наличия кривизны. Во-вторых, параллельный перенос (в том числе и по замкнутому контуру) является не только неким абстрактным понятием. Существуют его конкретные физические реализации, и один из подобных примеров приведен в данной работе. Более того, свойства параллельного переноса в искривленном пространстве могут быть положены в основу изучения влияния гравитации на распространение волн.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988. С.295.
2. Kibble T. W. D. // J. of Math. Phys. 1961. V.2. P.212.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.183.
4. Постников М. М. Дифференциальная геометрия. М., 1988. С.327.
5. Там же. С.380.
6. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С.64.
7. Там же. С.50.
8. Anandan J. // Nuovo Cimento. 1979. V.53A. P.221.
9. Greenchuk A. V., Ushakov E. A. // Advances in synergetics. 1996. V.8. P.421.
10. Dixon W. G. // Nuovo Cimento. 1964. V.34. P.317.
11. Девитт Б. Динамическая теория групп и полей. М., 1987. С.168.
12. Parker L., Bekenstein S. // Phys. Rev. 1981. V.23D. P.2850.

Поступила в редакцию 21.01.97.

УДК 537.874.6.

А. С. РУДНИЦКИЙ

ДИФРАКЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

The results of investigation of the diffraction by a half-plane for symmetric waves superposition are presented.

Клиновидные или угловые области представляют собой удобную модель для широчайшего класса ключевых структур в электродинамике, акустике, гидродинамике, оптике, сейсмологии и других областях науки и техники. При исследовании поведения волновых полей в таких областях в настоящее время применяют разные методы, в том числе и различные варианты метода отражений [1–5]. В калейдоскопических угловых областях точные решения для дифракционного поля в виде суперпозиции парциальных волн находятся методом геометрической оптики [6–8]. В данной работе изучается возможность представления дифракционного поля в угловых областях в виде суперпозиции дифракционных полей на полуплоскости.

Ограничимся для начала двумерной задачей, в которой поля не зависят от координаты z . В этом случае система уравнений Максвелла распадается на две подсистемы. Решением одной из них являются волны E -поляризации, а другой — H -поляризации. Рассмотрим суперпозицию E -поляризованных плоских волн

$$E_z^{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} \exp \left[-ikr \cos \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi}{N} j \right) \right] \quad (1)$$

при нечетном N . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен. В (1) использованы общепринятые обозначения для волнового числа k и круговой частоты ω . Полярные координаты r и θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Компоненты магнитного поля выражаются через компоненту электрического поля:

$$H_x = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z^{(i)}}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z^{(i)}}{\partial x}. \quad (2)$$

Считаем, что α является вещественной величиной и, следовательно, волны в суперпозиции однородны. Суперпозиция волн (1), (2) представляет собой частный случай осесимметричных решений, рассмотренных, например, в [7,8]. Она инвариантна относительно преобразований поворота на углы $4\pi j/N$ с собственным значением оператора преобразования, равным единице.

Задача дифракции данной суперпозиции на полуплоскости $\theta=0$ ($y=0$, $x>0$) можно сформулировать через дуальные интегральные уравнения. В [5] приведены решения этих уравнений в случае дифракции плоской волны. Поскольку задача линейная, то воспользуемся этими решениями и представим дифракцию суперпозиции (1) на полуплоскости в виде суммы дифракций парциальных волн на той же полуплоскости:

$$E_z = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \exp \left[-ikr \cos \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \times \right. \\ \times F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi j}{N} \right) \right] - \exp \left[-ikr \cos \left(\theta + \alpha + \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \times \\ \left. \times E \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} \left(\theta + \alpha + \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$F(a) = \int_a^{\infty} \exp(i\mu^2) d\mu.$$

Дифракция на полуплоскости суперпозиции волн H -поляризации с

$$H_z^{(i)} = \sum \exp \left[-ikr \cos \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \quad (4)$$

рассчитывается аналогичным образом. Для полного дифракционного поля получается выражение

$$H_z = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \exp \left[-ikr \cos \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \times \right. \\ \times F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi j}{N} \right) \right] + \exp \left[-ikr \cos \left(\theta + \alpha + \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \times \\ \left. \times F \left[-\sqrt{2kr} \cos \frac{1}{2} \left(\theta + \alpha + \frac{4\pi j}{N} \right) \right] \right\}, \\ E_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (5)$$

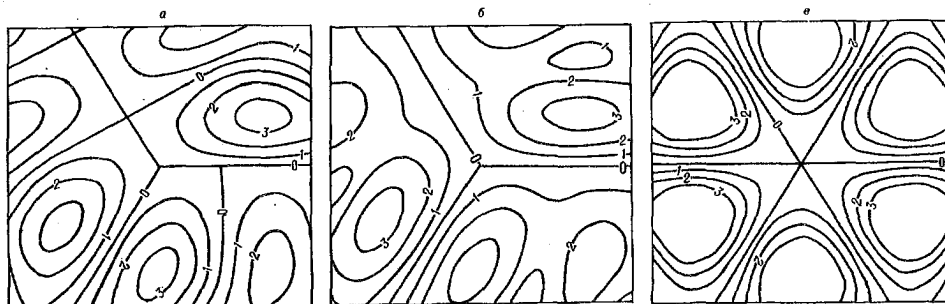
Вместе с тем первый случай можно вывести из последнего с помощью точной электромагнитной теории Бабины, так как электромагнитным экраном к полуплоскости служит также полуплоскость.

Полученные решения (3), (5) инвариантны относительно преобразований поворота. Это означает, что граничные условия выполняются не только на полуплоскостях $\theta=0$, но и на полуплоскостях $\frac{2\pi}{N}j$. Поэтому данные

решения можно интерпретировать как дифракцию плоской волны в углу $2\pi/N$. Они имеют периодичность 4π по θ . Поэтому замена в них α на $\alpha+2\pi$ приводит к новым решениям. Сумма этих двух решений представляет собой суперпозицию $2N$ плоских волн

$$E_z(\alpha) + E_z(\alpha + 2\pi) = \sum_{j=0}^{N-1} \exp \left[-ikr \cos \left(\theta - \alpha - \frac{4\pi}{N} j \right) \right] - \sum_{j=0}^{N-1} \exp \left[-ikr \cos \left(\theta + \alpha + \frac{4\pi}{N} j \right) \right]. \quad (6)$$

Граничные значения для (6) выполняются на плоскостях, делящих пространство на $2N$ равных π/N двугранных углов. Таким образом, в угловых областях $2\pi/N$ с четным N (калейдоскопических областях) дифракционное поле представляется суперпозицией $2N$ плоских волн и может быть рассчитано методом геометрической оптики. В угловых областях с нечетным N существуют два типа полей. Одни из них представляются суперпозицией конечного числа плоских волн, другие — (3), (5) имеют более сложную структуру. Некоторое наглядное представление о характере этих решений дает рисунок. На нем изображены изолинии $|\operatorname{Im} E_z|$ при $N=3$, $\alpha=\pi/2$ (а), $|E_z|$ (б) и $|\operatorname{Im} [E_z(\alpha) + E_z(\alpha+2\pi)]|$ (в) в области $|ky| \leq 5$, $|kx| \leq 5$ и единичных значениях амплитуд парциальных волн.



Изолинии компоненты E_z при дифракции симметричной суперпозиции волн на полуплоскости

Таким образом, существует простой способ расчета и исследования дифракционных полей в угловых областях $2\pi/N$ путем суммирования парциальных дифракционных полей на полуплоскости. В дальнейшем предполагается провести более детальное изучение структуры таких решений.

1. Франк Ф., Мозес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.; Л., 1957. С.849.
2. Малюжин Г. Д. // УФН. 1959. Т.69. №2. С.321.
3. Нсфелов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М., 1979.
4. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М., 1982.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.
6. Корнейчик В. В., Процко С. В., Хапалюк А. П. // Радиотехника и электроника. 1982. Т.27. №8. С.1493.
7. Рудникий А. С., Хапалюк А. П. // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29. Вып.6. С.1199.
8. Рудникий А. С. // Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. Вып.1. С.2417.

Поступила в редакцию 12.02.97.

УДК 535.337

С. В. КИЛИНА, А. П. ЗАЖОГИН, С. Н. ШАРАШКИН

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРОВ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ЛАЗЕРНЫХ КРИСТАЛЛОВ, АКТИВИРОВАННЫХ ИОНАМИ Nd^{3+}

Temperature dependences of the luminescence spectra of YAG and GSGG laser crystals activated by Nd^{3+} have been studied. It has been found that the bands in luminescence spectra become shifted to the long-wavelength region and their halfwidths are growing with increase in

temperature. Analytical dependences relating the position and width of luminescence bands with temperature have been introduced. The possibility of using the afore-mentioned crystals for measurement of temperature over the interval 77 to 560 K by the contactless method has been demonstrated.

Кристаллографические исследования при высоких давлениях и температурах вызывают в настоящее время большой интерес, поскольку дают возможность точнее определить структуру твердого тела и обнаружить фазовые переходы в различных системах. В связи с этим значительное внимание уделяется установкам, сочетающим рентгеноструктурное оборудование с нагревателями и прессами, позволяющими создать необходимые температуры и давления. Однако в таких установках нельзя простым способом измерить температуру образца, так как структура пресса не позволяет поместить обычный температурный датчик в контакте с образцом. Для устранения этого недостатка необходима разработка методов бесконтактного измерения температуры.

Одним из таких методов является метод определения температуры по сдвигу и уширению R_1 , R_2 линий флюоресценции в рубине. Именно таким способом предлагают измерять температуру авторы статьи [1] в своей рентгеноструктурной установке с прессом с алмазными наковальнями. Однако у рубиновой температурной шкалы есть существенный недостаток, на который указывается в работах [1,2], — низкий предел измеряемой температуры (420 K). В связи с этим было бы желательно найти другие материалы с похожими на рубин спектроскопическими и механическими свойствами, для которых линии люминесценции оставались бы достаточно узкими при высоких температурах. Для этого нами были проведены исследования спектральных свойств кристаллов АИГ: Nd^{3+} и ГСГГ: $\text{Nd}^{3+}:\text{Cr}^{3+}$, оценены смещения максимумов интенсивности и уширения линий в спектрах люминесценции этих кристаллов в зависимости от температуры, а также найдены аналитические представления этих зависимостей.

Для указанных исследований были выбраны два монокристалла: АИГ — $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$, активированный 1,1% Nd^{3+} , и кристалл ГСГГ — $[(\text{Gd}_{1-x}\text{Nd}_x) \times (\text{SeGa})_{1-y}\text{Cr}_y]_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$, активированный 3,95% Nd^{3+} , размером $5 \times 5 \times 3$ мм. Спектры люминесценции снимались при помощи монохроматора МДР-23, модифицированного для работы в ИК-области, с решеткой 600 шт./мм и обратной дисперсией 2,6 нм/мм. Для регистрации спектров использовался оптический многоканальный анализатор, передающий сигнал на ПЭВМ. Возбуждение люминесценции осуществлялось лампой накаливания на 30 Вт. Чтобы создать необходимые температуры, использовался нагреватель (40 Вт), внутри которого устанавливался специальный держатель для образца. Нагревание производилось от 293 до 600 K. Оптическая часть установки включала двухлинзовый конденсор и световод. Для получения спектров люминесценции образцов при низких температурах использовался жидкий азот (77 K). Температура 200 K достигалась использованием смеси сухого льда с ацетоном. Возбуждение спектров люминесценции образцов при температуре 77 и 200 K осуществлялось ртутной лампой.

Для АИГ: Nd^{3+} в диапазоне от 1056 до 1078 нм при комнатной температуре (рис. 1, б) зарегистрировано шесть линий с длинами волн $\lambda_1=1058,828$ нм, $\lambda_2=1069,210$, $\lambda_3=1071,806$, $\lambda_4=1076,314$, $\lambda_5=1082,326$, $\lambda_6=1086,492$ нм. Самая интенсивная из которых λ_3 имеет полуширину 1,5 нм. В спектре люминесценции ГСГГ при комнатной температуре наблюдаются похожие, как у АИГ: Nd^{3+} , три полосы λ_1 , λ_2 , λ_3 , смещенные в коротковолновую область, с длинами волн: $\lambda_1=1058,554$ нм, $\lambda_2=1065,500$ нм, $\lambda_3=1068,800$ нм. Самая интенсивная λ_3 имеет полуширину 1,4 нм. Последующие линии $\lambda_4=1073,514$ нм и $\lambda_5=1076,382$ уже существенно отличаются полушириной и интенсивностью от аналогичных линий в АИГ, а λ_6 в ГСГГ появляется вообще только при азотной температуре. Исходя из полученных результатов, а также из анализа работы [3] исследуемым полосам люминесценции можно сопоставить переходы $^4\text{F}_{3/2} \rightarrow ^4\text{I}_{11/2}$ (рис. 2).

С понижением температуры от 293 до 77 K структура полос люминесценции обоих кристаллов проявляется лучше (рис. 1, а). Возрастает как раз-

решение, так и интенсивность большинства линий в спектре. Уменьшение полуширины линий, вызванное снижением тепловых колебаний решетки от комнатной до азотной температуры, происходит незначительно (на 0,1–0,2 нм), что говорит о большом остаточном уширении, связанном с наличием ионов примесей и дефектов в кристаллической решетке.

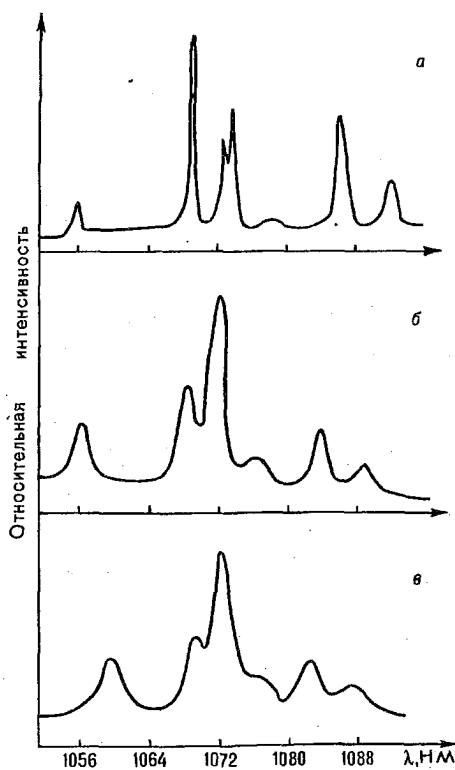


Рис.1. Спектры люминесценции АИГ:Nd³⁺ при T, К:
а – 77, б – 293, в – 523

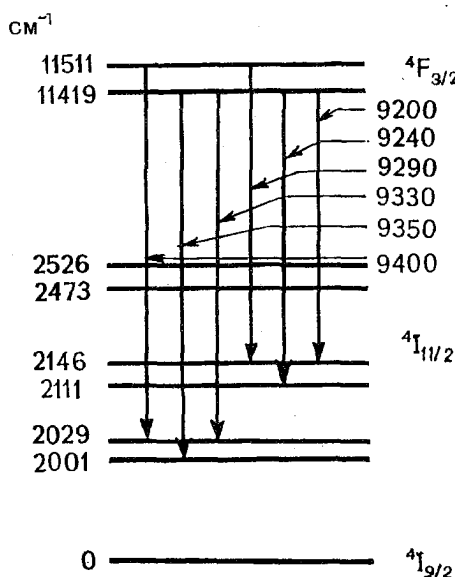


Рис.2. Схема переходов ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ иона Nd³⁺ в АИГ

С ростом температуры от 293 до 563 К линии смещаются в длинноволновую область и уширяются (рис.1, б). Причем как смещение, так и уширение линий в спектре ГСГГ происходит более интенсивно по сравнению с АИГ. Ввиду того, что наиболее интенсивной и наиболее узкой линией в спектрах как АИГ, так и ГСГГ является λ_3 , то погрешность при определении для нее полуширины и смещения при высоких температурах была минимальной. Поэтому все температурные зависимости, описанные ниже, приводятся только для λ_3 . Так для ГСГГ в указанном интервале λ_3 сместилась на 1,2 нм и уширилась на 0,8 нм, в то время как для той же линии в спектре АИГ смещение составляет 1 нм, полуширина изменилась на 0,4 нм.

Полученные результаты были обработаны на ЭВМ, и были найдены две функции, каждая из которых хорошо описывает зависимость полуширины от температуры в интервале от 77 до 563 К. Одна из них – показательная, вида:

$$y = y_0 + (AT)^n,$$

где T – температура; y – полуширина линии; y_0 – полуширина линии при $T = 0$ К; A – коэффициент, определяющийся методом наименьших квадратов; другая – сигмоидальная:

$$y = (A_1 - A) / (1 + \exp\{[T - T_0]/dT\}) + A_2,$$

где y – полуширина; T_0 – температура, при которой наблюдается перегиб функции; dT – интервал между температурами, при которых наблюдается насыщение функции; A_1 , A_2 – коэффициенты, определяющиеся методом наименьших квадратов.

Сигмоидальная функция дает менее точное приближение для температурной зависимости полуширин линий люминесценции в области температур, больших 563 К, так как в этом интервале у функции существует насыщение, которое реально не наблюдается, так как линии продолжают уширяться с ростом температуры. Поэтому для описания зависимости смещения полос люминесценции как для АИГ, так и для ГСГГ нами была вы-

брана показательная функция. Графическое представление зависимостей полуширины от температуры для линии λ_3 кристаллов АИГ и ГСГГ показано на рис.3, кривая 1,3 соответственно. Параметры найденной показательной функции для λ_3 приведены в таблице.

Параметры показательных и сигмоидальной функций, описывающих зависимости полуширины и смещения линий люминесценции от температуры для кристаллов ГСГГ:Nd³⁺:Cr³⁺ и АИГ:Nd³⁺

Показательная	Полуширина, нм		Смещение, нм		
	АИГ:Nd ³⁺ , $\lambda_3=1071,806$ нм	ГСГГ:Nd ³⁺ :Cr ³⁺ , $\lambda_3=1068,800$ нм	АИГ:Nd ³⁺ , $\lambda_3=1071,806$ нм	Сигмоидальная	ГСГГ:Nd ³⁺ :Cr ³⁺ , $\lambda_3=1068,800$ нм
y_0	1,48	1,15	-0,15	A_1	-2,13
A	0,0018	0,0022	0,0022	A_2	1,73
n	3,52	2,70	2,95	T_0	289,75
				dT	69,8

Характер кривых, описывающих температурную зависимость полуширины линий при высоких температурах, отличается от вида кривых в области низких температур. Для обоих кристаллов в интервале от 77 до 300 К наклон кривых незначителен из-за наличия неоднородного уширения линий. Начиная с 300 и до 400–450 К зависимости носят приблизительно линейный характер, что можно объяснить преобладанием прямых однофоновых процессов рассеяния на уровнях энергии примесного иона. Более крутой ход кривых в области температур свыше 400 К указывает на основную роль комбинационного рассеяния фононов. Для всех линий кристалла ГСГГ кривые идут круче, чем для АИГ.

Зависимость смещения максимума полосы люминесценции от температуры тоже может быть описана обеими функциями. Однако для АИГ наиболее хорошее приближение дает показательная функция (рис.3, кривая 2), а для ГСГГ – сигмоидальная (рис.3, кривая 4), так как у ГСГГ при температуре 500 К наблюдается насыщение, когда полосы люминесценции перестают смещаться с дальнейшим ростом температуры. При построении графиков за начало отсчета смещения полос в спектрах люминесценции обоих кристаллов принималось их положение при 293 К (см. таблицу).

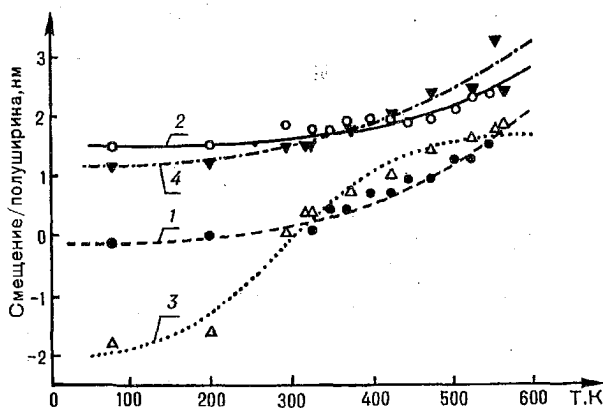


Рис.3. Температурные зависимости смещения и полуширины полосы люминесценции λ_3 : 1,2 – для АИГ:Nd³⁺, 3,4 – для ГСГГ:Nd³⁺:Cr³⁺ соответственно

При низких температурах смещение полос по отношению к их положению при комнатной температуре для обоих образцов происходит в коротковолновую область. Причем наклон кривой незначителен. Такое смещение можно объяснить усилением кристаллического поля при температурном сжатии, вызывающим увеличение интервалов между штарковскими компонентами (см. рис.2), а значит, и уменьшением длины волны излучения. В областях высоких температур смещение максимумов полос для ГСГГ происходит более заметно, чем для АИГ, кривые имеют больший наклон, а начиная с 500 К, как уже указывалось, смещение полос с ростом температуры прекращается.

Объяснить поведение кривых можно тем, что суммарным эффектом влияния теплового расширения решетки и фононных процессов рассеяния является сдвиг уровней термов ${}^4F_{3/2}$ и ${}^4I_{11/2}$ (см. рис.2) при повышении температуры в сторону малых энергий, причем верхние компоненты уровней смешаются сильнее нижних. Из анализа работ [4,5], в которых рассмотрены спектры поглощения и люминесценции, соответствующие переходам ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$, видно, что при низких температурах все уровни смешаются почти синхронно, т.е. зазор между уровнями уменьшается очень слабо, этим и объясняется малый наклон кривых в нашем случае. Вероятно, аналогично поведению уровней ${}^4F_{3/2}$, ${}^4I_{9/2}$, начиная с 300 К штарковские компоненты уровней ${}^4F_{3/2}$ и ${}^4I_{11/2}$, между которыми осуществляется переход, соответствующий той или иной полосе люминесценции, могут смешаться неодинаково: верхняя — сильнее, нижняя — слабее. Соответственно на графиках наблюдается увеличение наклона кривой, а линии люминесценции смешаются в длинноволновую область. Для некоторых расщеплений есть свой порог температур (500–800 К), когда оба уровня вообще перестают смешаться. В этом случае наблюдается процесс насыщения, когда при больших температурах смещения линий не происходит. Эффект насыщения в нашем случае проявляется только для ГСГГ, поэтому его и лучше описывать сигмоидальной функцией (рис.3, кривая 4).

Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что по полуширине и смещению полос люминесценции кристаллов АИГ:Nd³⁺ и ГСГГ: Cr³⁺:Nd³⁺ возможно определить температуру с точностью 1–3°C в интервале от 293 до 563 К. Причем точность определения температуры по спектрам люминесценции ГСГГ: Cr³⁺:Nd³⁺ выше (1°C), т.е. этот кристалл в дальнейшем можно использовать для определения температуры при изучении физико-химических свойств вещества при высоких давлениях и температурах, когда другой метод невозможен.

1. Iwasaki H., Sueno S., Shimomura O. New modification of the high-temperature x-ray diamond anvil press and an accurate method of pressure-temperature determination. Tokyo, 1986.

2. Павловский А.И., Таценко О.М. Письма в ЖТФ. 1986. 12. №22.

3. Свиридов Д.Т., Свиридова Р.К., Смирнов Ю.Ф. Оптические спектры ионов переходных металлов в кристаллах. М. 1976.

4. Koningstein J.A., Geusic J.E. Phys. Rev. 1964. 136. A 711.

5. Корневский Л.М., Островская А.К., Сазонова С.Н., Скоробогатов К.В. // Спектроскопия кристаллов. М. 1970.

Поступила в редакцию 24.06.96.

УДК 539.12.04

В.В.УТЛОВ, Ю.А.ФЕДОТОВА, В.В.ХОДАСЕВИЧ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ИМПЛАНТАЦИЯ БОРА И АЗОТА В ТОНКИЕ ПЛЕНКИ ЖЕЛЕЗА

Thin iron films were subjected to monoelemental and successive nitrogen and boron implantation and investigated using Mössbauer and Auger spectroscopy. In-bulk redistribution of implanted elements after successive implantation in comparison with monoelemental one was observed.

Введение

Для улучшения твердости и износостойкости железа и сталей широко (однако сравнительно недавно) используется моноэлементная имплантация азота и бора [1–5]. Исследование происходящих при этом процессов свидетельствует о формировании боридов и нитридов различного состава в имплантированных материалах. Установлено также, что формирование новых фаз и распределение имплантированных элементов по глубине определяется дозой, плотностью тока, энергией и температурой образца. Последовательная имплантация указанных элементов улучшает механические характеристики материалов по сравнению с моноэлементной имплантацией. Однако, в отличие от моноэлементной имплантации, процессы, происходящие при последовательной имплантации, носят более сложный характер и

изучены значительно меньше. Обычно с целью модификации свойств железа и сталей используются дозы имплантации $\geq 1 \cdot 10^{17}$ ион/см² для достижения концентраций бора и азота более 10 ат.%, что приводит к формированию нитридных, боридных и боронитридных фаз в имплантированных слоях [1,5–7]. Влияние малых концентраций бора (<10 ат.%) на фазовый состав при последовательной имплантации изучено мало. Задачей исследований, представленных в данной работе, является изучение влияния малых концентраций бора на распределение азота и формирование нитридов в железе при последовательной имплантации бора и азота.

Материал и методика

Тонкие пленки железа (80 нм), нанесенные методом электронно-лучевого осаждения на подложки кремния, были имплантированы ионами бора и азота дозами $1 \cdot 10^{16}$ ион/см² и $2 \cdot 10^{17}$ ион/см² соответственно с энергией 40 кэВ при средней плотности тока $< 4 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Проведена как последовательная, так и моноэлементная имплантация ионов бора и азота.

Фазовый состав исследовался методом конверсионной электронной мессбауэровской спектроскопии (КЭМС). Метод позволяет анализировать область глубиной до 100 нм, что определило толщину пленок железа (80 нм), используемую в данном эксперименте. Полученные спектры обрабатывались на основе сверхтонких параметров (изомерный сдвиг, квадратное расщепление и магнитное поле) по методу наименьших квадратов в приближении лоренцевой формы линии.

Распределение имплантированных элементов по глубине контролировалось методом электронной Оже-спектроскопии (ОЭС).

Результаты и их обсуждение

Фазовый состав. Мессбауэровские спектры исходного и облученного бором образцов представлены на рис.1. Как следует из рис.1б, имплантация бора дозой $1 \cdot 10^{16}$ ион/см² не приводит к заметным изменениям фазового состава имплантированного образца по сравнению с исходным. Мессбауэровский спектр образца, облученного азотом (рис.1а), свидетельствует о существенном изменении его фазового состава в результате имплантации. Указанный спектр представляет собой суперпозицию отдельных спектров, соответствующих магнитным фазам α -Fe ($H=330$ кГс [8]), α' -мартенсита ($H=304$ кГс [1]), ϵ -Fe_{3-x} ($x=0,3$, $H=273$ кГс, 205 кГс 70 кГс [9]) и парамагнитной фазе ϵ -Fe₂N [9], образующимся при имплантации азота. Парциальные вклады каждой из указанных фаз в рассматриваемый спектр представлены в таблице.

Спектр образца, последовательно имплантированного бором и азотом, приведен на рис.1г. Данный спектр может быть также разложен на компоненты, соответствующие фазам α -Fe, α' -мартенсита, ϵ -Fe_{3-x} ($x=0,3$) и ϵ -Fe₂N. Из рисунка видно, что спектр данного образца существенно отличается от спектра, полученного в случае моноэлементной имплантации азота (см. рис.1а). Это различие объясняется значительным уменьшением парциального вклада образующихся нитридных фаз и исчезновением мартенситной фазы в результате последовательной имплантации (см. таблицу).

Относительное содержание фаз, образующихся при моноэлементной и последовательной имплантации бора и азота дозами соответственно $1 \cdot 10^{16}$ ион/см² и $2 \cdot 10^{17}$ ион/см²

Фазовый состав	Режим облучения	
	$2 \cdot 10^{16}$ N'/см ²	$1 \cdot 10^{16}$ B'/см ² + $2 \cdot 10^{16}$ N'/см ²
α -Fe	24	40
α' -мартенсит	5	—
ϵ -Fe ₂ N	11	6
ϵ Fe _{3-x} N ($x=0,3$)	64	54

Распределение бора и азота. Концентрационные профили распределения элементов по глубине в исходном и имплантированных образцах представ-

лены на рис.2. Как следует из рис.2а, исходный образец представляет собой пленку железа толщиной 80 нм на подложке кремния. В поверхностном слое исходного образца (<5 нм) зафиксировано высокое содержание углерода (~ 15 ат.%), которое на глубине ~ 5 нм уменьшается до 1,5 ат.%. Концентрационный профиль бора после моноэлементной имплантации представлен на рис.2б. Максимальная концентрация бора (~ 7 ат.%) отмечена на глубине ~ 65 нм, что практически совпадает со средним проективным пробегом R_p , равным 60 нм и рассчитанным с использованием программы TRIM [10]. При этом теоретически рассчитанное значение среднеквадратичного разброса пробегов ΔR_p составило 36 нм. Распределение азота в пленке железа после моноэлементной имплантации представлено на рис.2в. Максимум концентрационного пика, составляющий 13 ат.%, расположен на глубине ~ 40 нм, что совпадает с теоретически рассчитанными данными ($R_p=42$ нм, $\Delta R_p=26$ нм). Однако близкая к гауссовой форма распределения азота нарушается в поверхностной области ~ 10 нм, где наблюдается резкое увеличение концентрации азота до 10 ат.%. Следует отметить, что после моноэлементной имплантации бора и азота наблюдалось увеличение толщины слоя с высоким содержанием углерода до ~ 15 нм и ~ 10 нм соответственно по сравнению с исходным образцом (рис.2а–в).

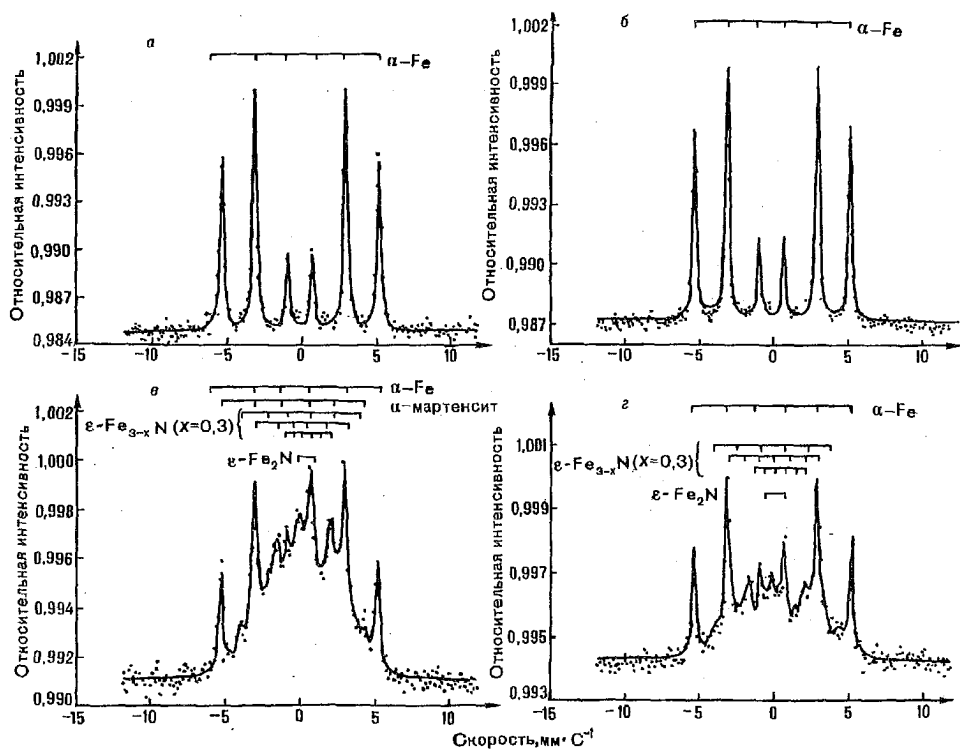


Рис.1. Мессбауэровские спектры исходной пленки железа (а) и пленок, облученных бором и азотом дозами $1 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2$ (б), $2 \cdot 10^{17} \text{ N}^+/\text{см}^2$ (в) и $1 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2 + 2 \cdot 10^{17} \text{ N}^+/\text{см}^2$ (г)

Распределение бора и азота в случае последовательной имплантации представлено на рис.2г. Как следует из рисунка, при последовательной имплантации значения концентраций и распределения бора и азота существенно отличаются от случая моноэлементной имплантации (см. рис.2б и в). Максимум концентрации имплантированного азота в этом случае смещается в направлении границы Fe/Si на глубину 80 нм и составляет 9 ат.%. Внедренный азот расположен в поверхностном слое толщиной ~ 140 нм в отличие от ~ 90 нм, наблюдаемом при его моноэлементной имплантации. Наблюдается также перераспределение бора в глубь образца и уменьшение его концентрации с 7 ат.% при моноэлементной имплантации до 1,5 ат.%.

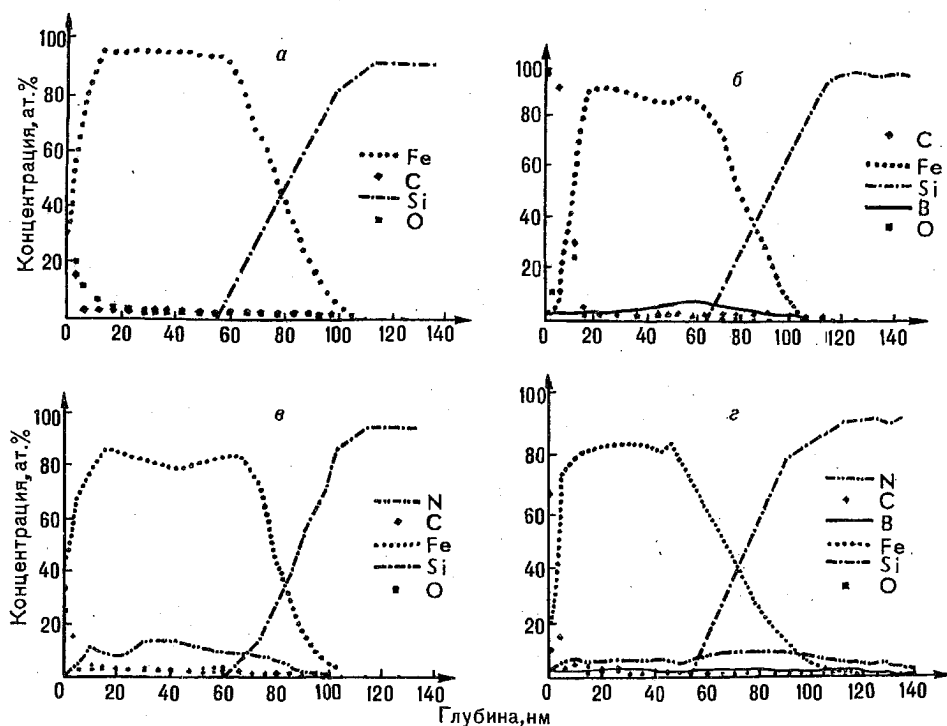


Рис.2. Профили распределения элементов по глубине в исходной пленке железа (а) и пленках, облученных бором и азотом дозами $1 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2$ (б), $2 \cdot 10^{17} \text{ N}^+/\text{см}^2$ (в) и $1 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2 + 2 \cdot 10^{17} \text{ N}^+/\text{см}^2$ (г)

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что распределение бора и азота по глубине, а также формирование нитридов железа имеют существенные различия в зависимости от последовательной и моноэлементной имплантации указанных элементов. В случае моноэлементной имплантации концентрационные профили бора и азота имеют форму, близкую к гауссовой. Однако в случае моноэлементной имплантации азота наблюдалось увеличение концентрации азота в приповерхностной области ($\sim 10 \text{ nm}$). В литературе обсуждается три возможных причины диффузии имплантированного азота к поверхности: повышенные температуры в процессе имплантации [8], внедрение имплантируемых атомов азота в поверхностный углеродный слой, который осаждается в процессе имплантации из остаточной атмосферы на поверхности образца, и образование карбонитридов [11], а также создание приповерхностной области с высокой концентрацией радиационных дефектов, являющихся стоками для имплантируемых ионов азота [8,11]. В данном эксперименте имплантация проводилась при комнатной температуре, не было обнаружено и формирования карбонитридных фаз типа $\text{Fe}(\text{C},\text{N})$ [1], несмотря на присутствие поверхностного слоя с высокой концентрацией углерода. Таким образом, можно предположить, что именно радиационно-стимулированная сегрегация азота является причиной увеличения его концентрации вблизи поверхности в случае моноэлементной имплантации. Следует отметить, что высокое содержание углерода и кислорода, наблюдаемое как в исходном, так и в облученных образцах, является результатом их осаждения из остаточной атмосферы в процессе приготовления пленок и их имплантации. Уменьшение толщины слоя с высокой концентрацией углерода при моноэлементной имплантации азота и последовательной имплантации бора и азота ($\sim 10 \text{ nm}$), по сравнению с моноэлементной имплантацией бора ($\sim 15 \text{ nm}$), связано, вероятно, с процессами распыления, происходящими более интенсивно при облучении ионами азота.

Установлено, что моноэлементная имплантация азота приводит к формированию α' -мартенсита, $\epsilon\text{-Fe}_{1-x}(\text{x}=0,3)$ и $\epsilon\text{-Fe}_3\text{N}$. При этом моноэлементная имплантация бора не приводит к изменениям фазового состава имплан-

тированных пленок. Можно предположить, что внедренная концентрация бора (~7 ат.%) является недостаточной для формирования боридов либо аморфизации пленок железа. Как считают авторы работ [5,6], оба процесса начинаются при концентрации бора не менее 10 ат.%, причем фазовый состав железа зависит от энергии и плотности тока в процессе имплантации.

Наиболее интересные результаты были получены для случая последовательной имплантации ионов бора и азота. Предварительная имплантация бора уменьшает количество образовавшихся нитридных фаз. Исследования концентрационных профилей имплантированных элементов показали, что подобное различие в фазовом составе связано с распределением бора и азота в пленках после моноэлементной и последовательной имплантации. Показано, что имплантация бора инициирует диффузию азота в глубь образца к границе Fe/Si. Максимум концентрации азота в отличие от случая его моноэлементной имплантации зафиксирован на границе Fe/Si. Снижение концентрации азота в пленке железа и приводит к уменьшению количества образующихся нитридных фаз.

Как указывалось ранее, толщина пленок, используемых в данных экспериментах, была подобрана с учетом глубины, зондируемой методом КЭМС. Существование границы Fe/Si усложняет интерпретацию полученных результатов. Сама по себе граница раздела является областью высокой концентрации дефектов и может служить стоком для имплантированного бора и азота, одновременно стимулируя проникновение примеси на глубину, большую теоретически рассчитанной. В этом случае, однако, диффузия бора и азота в направлении границы раздела Fe/Si должна наблюдаться и при моноэлементной имплантации. Поскольку в данном эксперименте подобной диффузии не наблюдалось, то можно предположить, что перераспределение азота и бора происходит в результате радиационно-стимулированных процессов. В частности, диффузия азота может быть связана с наличием радиационных дефектов, созданных предварительной имплантацией бора, в то время как существование границы раздела Fe/Si может усиливать радиационно-стимулированную диффузию азота в глубь образца.

Следует отметить, что природа увеличения глубины проникновения бора в пленку в результате последующей имплантации азота ясна недостаточно и требует дополнительных исследований.

Результаты данной работы можно обобщить следующим образом:

1. Предварительная имплантация бора дозой $1 \cdot 10^{16}$ ион/см² приводит к уменьшению количества формирующихся фаз α' -мартенсита, ϵ -Fe_{3-x} ($x=0,3$) и ϵ -Fe₃N по сравнению с моноэлементной имплантацией азота.

2. Предварительное внедрение малых концентраций бора (~7 ат.%) в пленку железа инициирует диффузию азота в глубь образца. Перераспределение азота, вероятнее всего, связано с наличием области высокой концентрации дефектов, образованной предварительной имплантацией бора.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант № Ф95-231).

1. Marest G. // Defect Diffusion. Paris, 1988.

2. Nakajima K., Okamoto S., Okada T. // J. Appl. Phys. 1989. V.65. №11. P.3711.

3. Terwagne G., Riette M., Bertrand P., Bodart F. // Mater. Sci. Eng. B2. 1989. V.195. P.253.

4. Faussemagne A., Marest G., Benyagoub A., Moncoffre N. // Conference Proceeding ICAME-95. Bologna, 1996. P.691.

5. Millard N.M., Marest G., Moncoffre N., Tousset J. // Surf. & Coat. Tech. 1992. V.51. P.446.

6. Jagielski J., Kopcewicz M., Thome L. // J. Appl. Phys. 1993. V.73. №10. P.4820.

7. Ohtani S., Mizutani Y., Takagi T. // Nucl. Instr. Meth. 1993. B80/81. P336.

8. Kopcewicz M., Jagielski J., Williamson D.L. // J. Appl. Phys. 1992. V.71. №09. P.2647.

9. Chen Q.M., Jaggi N.K., Butt J.B., Yeh E.B. et al. // J. Phys. Chem. 1983. V.87. P.5326.

10. Biersack J.P., Yaggmark L.G. // Nucl. Instr. Meth. 1980. V.174. P.257.

11. Moncoffre N., Jagielski J. // Surf. Coat. Tech. 1994. V.65. P.30.

Поступила в редакцию 21.01.97.

А.Н.АКИМОВ, В.В.ГРИГОРЬЕВ, Ф.Ф.КОМАРОВ, И.В.КОНЬШИН,
А.В.ЛЕОНТЬЕВ, Д.И.САГАЙДАК, А.В. ФРАНЦКЕВИЧ

ПРОФИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕДРЕННЫХ В ПММА ИОНОВ ИНДИЯ

Depth profiles of In ions implanted into PMMA were obtained by SIMS-method. Some features of their distribution were found, due to creation of the chemical bindings of the In ions with matrix atoms.

Имплантация тяжелых высокоэнергетических ионов в органические материалы (ОМ) позволяет сформировать в приповерхностной области диэлектрической пленки высокопроводящие ($\rho < 100 \text{ ом/}\square$) слои толщиной 0,05–0,5 мкм, что представляется весьма важным для решения ряда задач современной микроэлектроники [1]. Свойства таких пленок, в том числе и электрофизические, во многом определяются первоначальным профилем внедренных ионов. Имеющиеся данные по профилям распределения тяжелых ионов, имплантированных в ОМ, обычно получены при внедрении малых доз ($D = 5 \cdot 10^{14} - 10^{15} \text{ см}^{-2}$). Для получения высокопроводящих органических слоев ионной имплантацией требуются дозы $D > 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$. Информация об особенностях распределения больших доз внедренных в ОМ тяжелых ионов практически отсутствует [2].

В настоящей работе представлены профили пространственного распределения ионов In^+ , имплантированных в полиметилметакрилат $[\text{C}_5\text{H}_8\text{O}_2]_n$. Имплантация ионов индия в ПММА с энергией 100, 200, 270 кэВ проводилась на ускорителе Люблинского технического университета. Доза облучения составляла $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$, плотность тока пучка ионов 0,3–0,5 мкА/см². Имплантация ионов индия приводит к резкому ухудшению морфологии поверхности имплантированных пленок ПММА: появляются многочисленные трещины, видны следы выхода пузырей газа. Это происходит из-за высокой плотности энергии ΔG , выделенной в приповерхностной области. Величину ΔG обычно рассчитывают по формуле: $\Delta G = E D / R_p$, где E — энергия имплантированных ионов. Для приведенных выше условий облучения величина ΔG составляет примерно 100 эВ/Å³. Например, при имплантации ионов бора с такой же энергией и дозой значение $\Delta G \approx 20 \text{ эВ/Å}^3$. К тому же при облучении ионами индия доминируют в основном упругие потери энергии, что и приводит в конечном итоге к интенсивному разрушению поверхности. Изменение режимов задубливания, вплоть до самых жестких для ПММА (200°C, 4 ч), не привело к заметному улучшению качества поверхности пленок после имплантации.

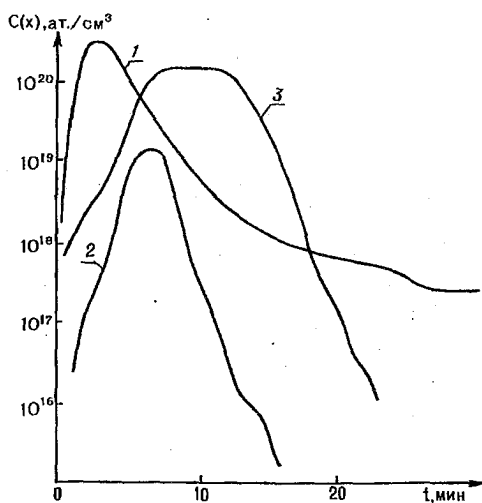
Траекторные параметры ($R_p^T, \Delta R_p^T, \gamma, \beta$) потери энергии на упругие $[\partial E / \partial x]_e$ и неупругие $[\partial E / \partial x]_n$ столкновения ионов In^+ , имплантированных в ПММА

Энергия, кэВ	R_p^T , нм	ΔR_p^T , нм	R_n , мкм	γ	β	$[\partial E / \partial x]_e$, эВ/Å	$[\partial E / \partial x]_n$, эВ/Å	γ'
100	81,7	16,3	0,090	0,22	2,8	33,9	131,9	1,1
200	142,0	25,8	0,210	0,08	3,0	44,5	131,2	1,0
270	186,1	35,3	0,350	-0,14	2,5	49,5	128,1	0,9

В таблице приведены рассчитанные на основе модифицированной программы TRIM 85 (учет корреляционных эффектов [2]) траекторные параметры ($R_p^T, \Delta R_p^T, \gamma, \beta$), а также потери энергии на упругие и неупругие столкновения. Как видно из таблицы, имплантация ионов индия сопровождается интенсивным распылением мишени $Y^f = 1$. Отметим, что Y^f — это только небольшая составляющая суммарного коэффициента распыления, соответствующая столкновительному распылению. Расчет Y^f выполнялся методом МК. Плохая морфология поверхности имплантированных пленок отрицательно сказалась на проведении ВИМС-анализа внедренного индия. Профили распределения имплантированных ионов In^+ получены на уста-

новке CAMECA IMS 4F, травление проводилось ионами O_2^+ с энергией 12,3 кэВ, скорость распыления составляла 3–5 нм/с. Для снятия заряда на поверхность имплантированных образцов подпыляли тонкий слой платины. Ошибка профилирования в данном случае может быть очень велика. На рисунке приведена зависимость концентрации внедренного индия от времени травления.

Распределение имплантированных ионов In^+ (100 кэВ) характеризуется протяженным хвостом в глубь мишени. Максимум распределения соответствует примерно 0,2–0,3 мкм, что в 2–3 раза больше величины R_p из (см. таблицу). Для случая имплантации ионов In^+ (200 кэВ) оцененная из профилей ВИМС величина $R_m \approx 0,4–0,5$ мкм, что тоже значительно больше результатов TRIM-расчетов. Но самый интересный профиль внедренных в ПММА ионов индия наблюдался при наибольшей энергии имплантации (кривая 3). На профиле отчетливо наблюдается плато шириной не менее 0,2–0,3 мкм с практически постоянной ($\approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$) концентрацией имплантированных ионов. Отметим, что на профиле распределения ионов In^+ (200 кэВ) также имеется небольшое плато. Причиной появления таких плато может быть образование химического соединения внедренного индия, вероятно, с углеродом.



Профили распределения ионов индия, имплантированных в ПММА:

1 – In^+ (100 кэВ), 2 – In^+ (200 кэВ), 3 – In^+ (270 кэВ)

с энергиями 100 и 200 кэВ профили распределения характеризуются, как и при ВИМС-анализе, протяженными хвостами в глубь мишени. Значения R_m приведены в таблице. Профиль распределения ионов In^+ (270 кэВ) качественно похож на аналогичный профиль, полученный методом ВИМС, — четко выделяется плато. Мы не можем в данном случае определить значение K_m . Вместо него в таблице приведена координата начала плато.

Таким образом, распределение внедренных в ПММА ионов индия характеризуется появлением специфических профилей, свойственных образованию химических соединений между имплантируемыми ионами и атомами матрицы. Особенность состоит в том, что доза внедренного индия недостаточна для образования стехиометрических соединений с кислородом или углеродом, имеющимися в полимерной матрице.

Настоящая работа была частично поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук, а также Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Brunner S., Ruck D.M., Frank W.F.X. // NIM. 1994. V.B.89. P.373.
2. Grande P.L., Fichtner P.F.P., Behar M. // Ibid. 1988. V.B.33. P.122.
3. Venkatesan T., Wolf T., Allara D. et al. // Appl. Phys. Lett. 1983. V.43. №10. P.34.

Поступила в редакцию 20.03.97.

ОСОБЕННОСТИ ДЕФЕКТООБРАЗОВАНИЯ В АЛМАЗЕ, ОБЛУЧЕННОМ ИОНАМИ БОРА

Peculiarities of defect production in Ia diamond subjected to high energy boron implantation and keV boron polyenergetic implantation are studied and discussed.

Введение

Ионная имплантация в алмаз, помимо формирования ионно-легированного слоя, приводит к возникновению слоя, содержащего радиационные дефекты. Образование радиационных дефектов в кристаллах, облученных ионами высоких энергий (>1 МэВ/а.е.м.), значительно отличается от дефектообразования при ионной имплантации килоэлектронвольтового диапазона [1–5]. Отличительной особенностью высокоэнергетичной имплантации является слоистость дефектной структуры, возникающая вследствие того, что на разных глубинах доминируют различные механизмы взаимодействия ионов с решеткой. Помимо этого для высокоэнергетичной имплантации характерно наличие радиационных дефектов в облученных кристаллах на глубинах, значительно превышающих среднеквадратичный пробег имплантированных ионов. И, наконец, такая имплантация создает области сильных упругих напряжений, в том числе и на глубине, превышающей положение слоя внедренной примеси. Так, например, даже при имплантации ионов Li, C, P при энергиях до 200 кэВ глубина слоя напряжений может достигать уже 200 мкм [6]. Характерным является также и то, что радиационные дефекты, образующиеся при высокоэнергетичной имплантации, оказываются более термостабильными, чем дефекты, образованные при обычной имплантации.

В настоящей работе рассматриваются особенности дефектообразования в кристаллах природного алмаза типа Ia, облученных высокоэнергетичными ионами бора и подвергнутых полиэнергетичной имплантации ионами бора килоэлектронвольтового диапазона.

Материал и методика

В работе использовались пластины природного алмаза типа Ia, вырезанные по плоскости {111} и облученные ионами B^+ с энергией 13,6 МэВ и дозой $1,25 \cdot 10^{15}$ см⁻², ионами B^+ с распределенной энергией 20–300 кэВ и суммарной дозой $3 \cdot 10^{14}$ см⁻². Нагрев образцов в процессе облучения не превышал 100°C. Высокотемпературный отжиг образцов проводился в графитовом контейнере в вакууме 10^{-4} Па. Запись спектров фотопроводимости выполнялась на установке с использованием СВЧ-резонатора с перестраиваемой собственной частотой и регулируемым отверстием связи, частота СВЧ-поля составляла 10 ГГц. Неравновесные носители заряда возбуждались модулированным с частотой 300 Гц светом от ксеноновой лампы, прошедшим через монохроматор МДР-12, в спектральном диапазоне 200–700 нм. Регистрация фотоотклика осуществлялась в режиме синхронного детектирования. Исследование оптического поглощения проводилось на спектрофотометре SPECORD M-40 в спектральной области 200–850 нм. Измерения СВЧ-фотопроводимости и оптического поглощения выполнялись при температуре 300 К.

Результаты и их обсуждение

При рассмотрении полученных результатов выделим две спектральные области: собственную, в диапазоне длин волн 200–250 нм, и примесную — 250–700 нм.

Ионное облучение приводит к изменениям интенсивности сигнала и спектрального распределения СВЧ-фотопроводимости при измерениях как с облученной стороны алмазных пластин, так и с необлученной. Поэтому рассмотрим влияние формируемых при облучении радиационных дефектов на спектры СВЧ-фотопроводимости с обеих сторон облученных пластин.

Сравнение спектров СВЧ-фотопроводимости для образцов, подвергнутых полиэнергетической имплантации ионами B^+ с энергией 20–300 кэВ, регистрируемых с облученных сторон алмазных пластин до и после облучения, показало, что интенсивность сигнала в области 200–250 нм упала более чем на порядок. Положение максимума собственной СВЧ-фотопроводимости при этом сдвинулось с 215–219 нм в длинноволновую область 225–235 нм (рис. 1). В спектральном диапазоне 250–700 нм при измерениях с облученной стороны образцов после имплантации фотоотклик перестает регистрироваться.

Регистрация спектров собственной СВЧ-фотопроводимости с необлученной стороны показала, что в образцах, подвергнутых полиэнергетической имплантации, интенсивность собственной фотопроводимости возросла (см. рис. 1). Это может быть обусловлено пассивацией центров рекомбинации в объеме кристалла такими радиационными дефектами, как собственные междоузельные атомы, которые подвижны уже при температуре 320 К [7]. Другие радиационные дефекты (например, вакансии, атомы бора) являются неподвижными при температурах измерения и имплантации [7–9] и поэтому могут быть исключены из рассмотрения.

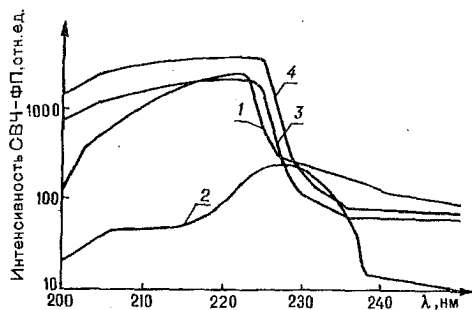


Рис. 1. Спектры СВЧ-фотопроводимости образца алмаза до облучения — 1, 3 и после облучения ионами B^+ с распределенной энергией 20–300 кэВ и дозой $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$:

2 — при регистрации с облученной стороны,
4 — при регистрации с необлученной стороны

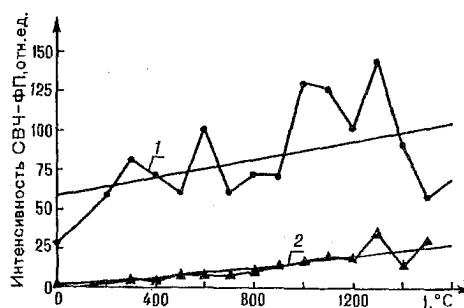


Рис. 2. Зависимость интенсивности СВЧ-фотопроводимости облученных образцов: 1 — (20–300 кэВ, $3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$), 2 — (13,6 МэВ, $1,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$) от температуры отжига при регистрации с облученной стороны

При измерениях СВЧ-фотопроводимости с необлученной стороны в области 250–700 нм до и после имплантации с распределенной энергией было установлено, что облучение не повлияло на форму спектра и интенсивность СВЧ-фотопроводимости.

В спектрах поглощения облучение приводит к возрастанию поглощения во всем диапазоне исследования и появлению широкой полосы, обусловленной центром GR (530–730 нм), и центра 3Н.

Изучение СВЧ-фотопроводимости алмазов, облученных ионами B^+ с энергией 13,6 МэВ и распределенной энергией 20–300 кэВ, с облученной стороны в процессе изохронного отжига до температуры 1600°C показало, что с ростом температуры интенсивность фотопроводимости в спектральном диапазоне 200–250 нм плавно возрастала (рис. 2), а ее максимум на различных образцах либо смещался в длинноволновую область, либо оставался примерно на одном месте. Это обусловлено отжигом радиационных дефектов, приводящим к увеличению времени жизни носителей заряда, и деградацией поверхности за счет графитизации облученной поверхности алмаза. Графитизация приводит к тому, что даже при температуре отжига 1600°C начало фотопереходов зона-зона на длине волны 225 нм зарегистрировать не удастся. Отжит также не приводит к восстановлению интенсивности сигнала в области примесной фотопроводимости (250–700 нм).

Изучение собственной СВЧ-фотопроводимости с необлученной стороны кристаллов, облученных ионами B^+ с энергией 13,6 МэВ и распределенной энергией 20–300 кэВ, показало, что с ростом температуры отжига наблюдается увеличение интенсивности фотопроводимости, т.е. преобладают тенденции, увеличивающие время жизни носителей заряда в приповерхност-

ном слое образца. Однако если в образце, облученном ионами высоких энергий, рост интенсивности наблюдается вплоть до температуры отжига 900°C , то в образцах, облученных с энергией 20–300 кэВ, — только до 700°C , а в неимплантированном образце — до 400°C .

При температуре отжига $900\text{--}950^{\circ}\text{C}$ происходит резкое уменьшение интенсивности собственной СВЧ-фотопроводимости во всех исследованных образцах. Одновременно с этим при температуре отжига $950\text{--}1000^{\circ}\text{C}$ происходит качественное изменение распределения СВЧ-фотопроводимости в спектральном диапазоне 200–250 нм, что проявляется в сдвиге максимума фотопроводимости в длинноволновую область. При этом спектры оптического поглощения необлученного образца при температурах отжига 200–1100 $^{\circ}\text{C}$ практически не изменялись, а в спектрах поглощения облученных образцов регистрировалось уменьшение коэффициента поглощения, что обусловлено процессами, связанными с отжигом радиационных дефектов. Резкое уменьшение интенсивности собственной СВЧ-фотопроводимости наиболее вероятно обусловлено реконструкцией (все исследуемые алмазные пластины имели две плоскости {111}, имеющие отрицательное электронное сродство) поверхности. Представляется вполне вероятным, что действие возбуждающего света с энергией кванта $>5,47$ эВ приводит к увеличению числа свободных носителей заряда не только в приповерхностном слое образца, но и над поверхностью [10,11,12]. Процесс реконструкции приводит к тому, что электронное сродство алмазной поверхности становится положительным и появляются дополнительные электронные состояния [13,14,15]. Это, в свою очередь, обуславливает уменьшение времени жизни носителей заряда в приповерхностном слое.

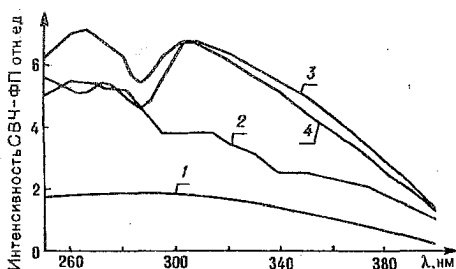


Рис.3. Спектры СВЧ-фотопроводимости образца алмаза, облученного ионами B^{3+} : 1 — с энергией 13,6 МэВ и дозой $1,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ при различных температурах отжига: 2 — 400°C , 3 — 500°C , 4 — 800°C при регистрации с необлученной стороны

Изменение спектрального распределения СВЧ-фотопроводимости в процессе отжига до температуры $\sim 900\text{--}1000^{\circ}\text{C}$ в примесной области при регистрации с необлученной стороны обусловлено отжигом и коагуляцией различных радиационных дефектов (рис.3). Наиболее вероятно, что это дефекты междоузельного типа и собственные дефекты, которые располагаются глубже слоя остановки имплантированных атомов бора. Основанием для такого предположения служит тот факт, что примесная фотопроводимость и ее изменения с отжигом наиболее ярко выражены в образце, подвергнутом высокоэнергетичной имплантации. Поскольку высокоэнергетичное облучение приводит к образованию радиационных дефектов и широкой области сильных упругих напряжений, которые располагаются значительно глубже слоя внедренных ионов примеси, то в имплантированном ионами высоких энергий образце слой внутренних напряжений оказывается намного шире, чем при обычной имплантации. В то же время ширина легированного ионами бора слоя при использовании высокоэнергетичной и ширина этого слоя при использовании полиэнергетичной имплантации оказываются сравнимыми.

При увеличении температуры отжига до 1000°C на всех образцах, кроме облученного высокоэнергетичными ионами, примесная фотопроводимость перестает регистрироваться. На образце, подвергнутом высокоэнергетичной ионной имплантации, при этой температуре фотопроводимость фиксируется лишь начиная с 310 нм и менее. Ни вид спектра, ни интенсивность фототклика не изменяются при увеличении температуры отжига до 1500°C . Исчезновение примесной фотопроводимости в образцах, имплантированных ионами бора с распределенной энергией при 1000°C , обусловлено отжигом дефектов и одновременным снижением общей фоточувствительности образцов, обусловленной реконструкцией поверхности. Возмож-

ность регистрации в примесной области фотоотклика образца, облученного ионами высоких энергий, определяется тем, что при высокоэнергетичной имплантации дефекты оказываются более термостойкими и ширина нарушенного слоя больше, чем при имплантации ионами бора килоэлектрон-вольтового диапазона.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что облучение алмаза приводит к тому, что интенсивность СВЧ-фотоотклика при измерениях с облученной стороны в спектральном диапазоне 200–250 нм уменьшается более, чем на порядок, в то время как при регистрации с необлученной стороны интенсивность СВЧ-фотопроводимости после облучения может увеличиваться. Изохронный отжиг до температуры 900°C приводит к возрастанию интенсивности собственной СВЧ-фотопроводимости с обеих сторон алмазной пластины, что обусловлено отжигом радиационных и структурных дефектов. При этом наиболее значительные изменения в спектрах СВЧ-фотопроводимости в течение отжига происходят в образце, облученном ионами высоких энергий, что обусловлено существенным вкладом в фотопроводимость дефектного слоя, который располагается глубже слоя торможения ионов. Резкое уменьшение интенсивности фотоотклика при температуре отжига 950–1000°C при регистрации с необлученной стороны определяется, наиболее вероятно, процессами реконструкции поверхности алмаза {111} и отжигом радиационных и структурных дефектов.

Данная работа частично была профинансирована в рамках проекта INTAS-94-1982.

1. Zaitsev A.M., Fedotov S.A., Melnikov A.A. et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1993. B82. P.421.
2. Varichenko V.S., Zaitsev A.M., Melnikov A.A. et al. // Ibid. 1994. B94. P.259.
3. Varichenko V.S., Zaitsev A.M., Kazutchits N.M. et al. // Ibid. 1996. B107. P.268.
4. Вариченко В.С., Дидык А.Ю., Зайцев А.М. и др. // Дефектообразование в алмазе при высокоэнергетичной ионной имплантации. Дубна, 1988.
5. Зайцев А.М. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1991. №10. С.56.
6. Вавилов В.С. // Алмаз в электронной технике. М., 1990. С.14.
7. Derry T.E., Prins J.F., Madiba C.C.P. et al. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1988. B35. P.431.
8. Вавилов В.С., Гиппиус А.А., Конорова Е.А. // Электронные и оптические процессы в алмазе. М., 1985.
9. Конорова Е.А., Сергиенко В.Ф., Ткаченко С.Д. и др. // Сверхтвердые материалы. 1984. №6. С.3.
10. Himpel F.J., Knapp J.A., Van Vechten, Eastman D.E. // Phys. Rev. B. 1979. V.20. №2. P.624.
11. Квасков В.Б. // Алмаз в электронной технике. М., 1990. С.92.
12. Моряков О.С., Квасков В.Б., Горбачев В.В. и др. // Обзоры по электронной технике. Сер.2. Полупроводниковые приборы. 1988. Вып.4(1342).
13. Pate B.B. // Surface Science. 1986. V.165. P.83.
14. Lurie P.G., Wilson J.M. // Ibid. 1977. V.65. P.453.
15. Pate B.B., Waclawski B.J., Stefan P.M. et al. // Phys. 1983. 117B & 118B. P.783.

Поступила в редакцию 02.03.97.

УДК 537.635:546.273

А.Р.ФИЛИПП

ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧНАЯ ИОННАЯ ИМПЛАНТАЦИЯ В АЛМАЗ

Some peculiarities of defect production in diamond irradiated with high energy ions have been investigated. Defect structure in subsurface layer and in the layer located deeper than projected ion range are considered on a basis of ion track production and defect diffusion, respectively.

Введение

Образование радиационных дефектов в кристаллах, облученных ионами с энергиями более 1МэВ/а.е.м., существенно отличается от дефектообразования при ионной имплантации с энергией десятки и сотни кэВ. Это про-

является в том, что высокоэнергетичные ионы более глубоко проникают в облучаемый материал, при этом средний проективный пробег частиц значительно превышает среднеквадратичный разброс пробегов, что приводит к формированию заглубленного ионно-легированного слоя. Высокая плотность удельных ионизационных потерь энергии вдоль траектории торможения высокоэнергетичного иона обуславливает формирование протяженных одномерных структурных дефектов — треков. Образование первичных точечных дефектов, определяемое упругими потерями энергии за счет рассеяния быстрых ионов, приводит к сильно неоднородной дефектной структуре по глубине облученного слоя.

Высокоэнергетичная ионная имплантация в настоящее время представляет собой достаточно эффективный способ легирования полупроводников, в том числе и таких, как алмаз, где обычная диффузия примеси практически отсутствует. Изменяя энергию ионов, можно формировать легированные слои практически на любой глубине, что позволяет создавать трехмерные электронные структуры. Развитие этого способа легирования полупроводников обуславливает необходимость исследования процессов дефектообразования во всем объеме облученного кристалла.

В настоящей работе рассматриваются особенности формирования дефектно-примесной структуры облученного высокоэнергетичными ионами алмаза в тонкой приповерхностной области, в слое доминирующего электронного торможения ионов, а также на глубинах, превышающих средний проективный пробег ионов.

Материал и методика

Образцы для исследований представляли собой пластинки природного алмаза типа IIa (концентрация азота менее 10^{17}см^{-3}) и типа Ia (содержание азота $10^{18}-10^{19}\text{см}^{-3}$), вырезанные в плоскости (100).

Образцы подвергались имплантации ионами бора с энергией 13,6 МэВ дозой 10^{15}см^{-2} , ионами углерода с энергией 82 МэВ дозой 10^{15}см^{-2} , ионами никеля с энергией 59 МэВ дозой 10^{15}см^{-2} и 335 МэВ дозой $5 \times 10^{12}\text{см}^{-2}$, ионами меди с энергией 64 МэВ дозой 10^{14}см^{-2} на циклотронах ИЦ-100, У-300 Объединенного института ядерных исследований (Дубна, Россия) и VICSИ Хан-Майтнеровского института (Берлин, ФРГ).

Изохронный двадцатиминутный отжиг образцов проводился в графитовом контейнере в вакууме 10^{-4}Па при температурах до 1400°C . Отжиг под давлением (термобарическая обработка) осуществлялся при температурах 1700 и 2200°C под давлением $8,5 \times 10^9\text{Па}$ в аппарате высокого давления в течение 2 ч.

После отжига образовавшийся на поверхности образцов слой графита удалялся травлением в кипящем хромпике с последующей промывкой в дистиллированной воде.

Катодоллюминесценция алмаза возбуждалась пучком электронов с энергией 12 кэВ и плотностью тока 6мкА/мм^2 при температуре 80 К и регистрировалась в спектральном диапазоне 300–800 нм.

Пространственное распределение концентрации дефектов и примеси по глубине облученного слоя изучалось при послойном удалении ионно-облученной области.

Результаты и их обсуждение

Широкая полоса с максимумом в области 440 нм (А-полоса), наблюдающаяся в спектрах исходных образцов, обусловлена дефектами нерадикационного происхождения — дислокациями [1] или донорно-акцепторными парами, расположенными в ядрах дислокаций. В азотсодержащих образцах, кроме того, в спектрах катодоллюминесценции регистрируются центры НЗ с длиной волны бесфоновой линии 503,2 нм. Высокоэнергетичная имплантация ионами бора с энергией 13,6 МэВ, углерода — 82 МэВ, никеля с энергиями 59 и 335 МэВ, меди — 64 МэВ приводит к появлению в спектрах катодоллюминесценции узких линий 415, 575 нм и НЗ (503,2 нм), обуслов-

ленных азотсодержащими дефектами, включающими различное количество атомов азота.*

Исследование распределения интенсивности А-полосы по глубине облученного высокоэнергетичными ионами бора и никеля слоя показало, что в приповерхностной области толщиной соответственно 0,5 и 1 мкм наблюдается участок с пониженной интенсивностью. Если центр НЗ регистрировался в исходном образце, то распределение его интенсивности имеет тот же характер. Очевидно, что такое распределение обусловлено большой концентрацией радиационных дефектов в приповерхностной области кристалла и, следовательно, образованием каналов безызлучательной рекомбинации неравновесных носителей заряда, влияющих на интенсивность люминесценции. Нарушения кристалла в приповерхностном слое создаются в результате неравновесных процессов, сопровождающих внедрение ускоренного иона в кристаллическую решетку, и могут быть обусловлены, например, потерей высокоэнергетичным ионом электронов при установлении его зарядового состояния. Отжиг при температуре 1400°C уменьшает дефектность в приповерхностном слое облученного алмаза, и интенсивность люминесценции восстанавливается до уровня, характерного для более глубоких слоев кристалла.

В слое максимума ядерного торможения, где также велика концентрация радиационных нарушений, наблюдается участок с уменьшенной интенсивностью оптических центров. Однако отжиг при температуре 1400°C не приводит к восстановлению интенсивности люминесценции. Это свидетельствует о том, что уровень дефектности в приповерхностной области кристалла намного ниже, чем в области максимума ядерного торможения.

Отжиг под давлением облученных ионами углерода с энергией 82 МэВ и ионами никеля с энергией 59 МэВ алмазов приводит к изменению примесного состава приповерхностной области. Так, в спектрах катодолуминесценции присутствуют линии 415 и 575 нм. При этом в глубине кристалла эти центры не регистрируются. Аналогичным является и распределение центра НЗ в кристалле, облученном ионами никеля, тогда как в кристалле, облученном ионами углерода, в приповерхностном слое наблюдается рост его интенсивности, затем резкое уменьшение и монотонный рост на больших глубинах до исходной интенсивности, регистрируемой в необлученном кристалле (рис. 1). Вид профиля азотсодержащих центров коррелирует с кривой распределения электронных потерь высокоэнергетичного иона по глубине кристалла. Наблюдаемые особенности распределения азотсодержащих центров в приповерхностной области облученных кристаллов являются результатом диффузионного проникновения из окружающей среды (шихты) атомов азота по трекам, созданным высокоэнергетичными ионами.

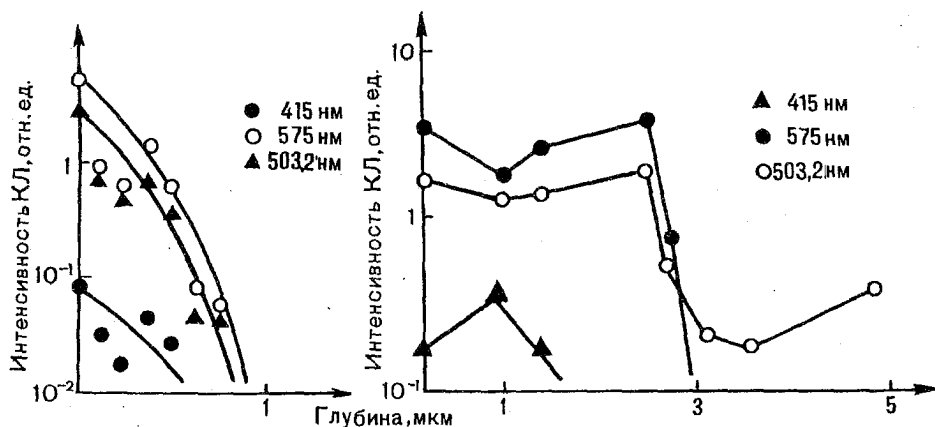


Рис. 1. Распределение интенсивности центров катодолуминесценции по глубине приповерхностной области алмаза, облученного ионами никеля с энергией 59 МэВ (а), ионами углерода с энергией 82 МэВ (б) и отожженного при температуре 2200°C

* Зайцев А.М. Люминесценция ионно-имплантированных алмаза и кубического нитрида бора: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1993.

Специфической особенностью дефектной структуры слоя, в котором преобладали процессы электронного торможения ионов никеля с энергией 335 МэВ и ионов меди с энергией 64 МэВ, является наличие в спектрах катодolumинесценции линии, обусловленной центром 638 нм. Обычно этот центр наблюдается только в фотolumинесценции. При возбуждении электронным пучком, в силу высокого уровня возбуждения, заброшенные в зону проводимости неравновесные носители заряда не могут рекомбинировать через соответствующие уровни этого центра, поскольку они слабо взаимодействуют с зоной проводимости (о таком строении электронных орбиталей центра 638 нм свидетельствует тот факт, что спектр его возбуждения не содержит межзонных переходов [2]). Необходимо принять во внимание также и то, что линия 638 нм присутствует в спектрах фотolumинесценции всего радиационно-нарушенного слоя и, следовательно, соответствующие дефекты образуются вдоль всей траектории ионов. Исходя из этого, можно предположить, что возбуждение данного центра в катодolumинесценции стало возможным благодаря искривлению его электронных орбиталей под воздействием специфического дефектного окружения, созданного при участии ионизационных эффектов, сопровождавших процессы электронного торможения иона.

Некоторые авторы [3] указывают на существование зависимости между концентрацией дефектов на определенной глубине и интенсивностью процессов электронного и ядерного торможений высокоэнергетичного иона. В алмазе, имплантированном ионами углерода с энергией 82 МэВ, на глубине 30–35 мкм наблюдается широкий максимум на профиле центра НЗ, тогда как теоретически рассчитанная зависимость величины электронного торможения от глубины облученного слоя не имеет особенностей в указанной точке. Это подтверждает предположение о том, что распределение радиационных дефектов в кристалле, коррелируя с величиной энергетических потерь иона, может еще дополнительно зависеть от других факторов. В частности, вероятнее всего, от особенностей процессов перезарядки быстрых ионов при их торможении.

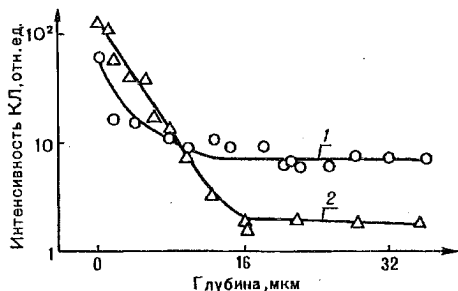


Рис. 2. Распределение интенсивности центра НЗ с длиной волны бесфоновой линии 503,2 нм по глубине:

1 — алмаз, облученного ионами бора с энергией 13,6 МэВ,
2 — алмаз, облученного ионами меди с энергией 64 МэВ
В качестве точки отсчета выбрана глубина, соответствующая теоретически рассчитанному среднeproективному пробегу ионов:
 $R_p \approx 0$

На глубине, превышающей средний проективный пробег ионов бора с энергией 13,6 МэВ и ионов меди с энергией 64 МэВ, регистрируется уменьшающееся по интенсивности распределение оптического центра НЗ (рис. 2). Авторы [4] считают, что причиной появления радиационных нарушений в этом слое кристалла может быть каналирование части имплантируемых ионов по трекам, созданным в матрице ранее пролетевшими ионами. В работе [5] предполагается, что радиационные дефекты в этом слое создаются в результате вторичного облучения глубоких слоев кристалла продуктами ядерных реакций (протекание которых возможно при

высокоэнергетичной ионной имплантации, поскольку энергия налетающих ионов превышает величину кулоновского барьера таких реакций). Необходимо, однако, отметить, что наличие радиационно-нарушенного слоя на глубине, превышающей средний проективный пробег ионов, не является отличительной особенностью только высокоэнергетичной имплантации. Так, аналогичное распределение дефектов было обнаружено после облучения алмаза ионами лития с энергией 40 кэВ [6].

В настоящее время известны два основных альтернативных механизма, способных обеспечить возникновение таких заглубленных дефектов в ионно-облученных кристаллах. Первый из них — диффузионный — предполагает диффузию первичных радиационных дефектов в процессе имплантации из

облученного слоя в глубь кристалла [7]. Второй механизм связан с участием акустических волн в образовании заглубленных дефектов при облучении [8]. Согласно существующим представлениям, в случае реализации второго механизма глубина проникновения дефектов была бы значительно больше при облучении ионами меди, поскольку более тяжелые частицы способны передавать решетке больше энергии в процессе упругих соударений и, следовательно, порождать более мощный поток фононов в кристалле. Тот факт, что в эксперименте глубина проникновения дефектов приблизительно одинакова после облучения ионами бора и ионами меди, дает основания рассматривать первую модель — диффузионную — как наиболее вероятную для данного случая. Осуществление диффузионных процессов в ходе высокоэнергетичной ионной имплантации в значительной мере облегчено теми условиями, которые складываются при облучении: высокие уровни ионизации и нагрева решетки, потоки фононов.

1. Облучение алмаза высокоэнергетичными ионами обуславливает формирование приповерхностного радиационно-нарушенного слоя толщиной 1–2 мкм с повышенным содержанием дефектов, что приводит к уменьшению интенсивности люминесценции оптических центров. Образование этого слоя обусловлено неравновесными процессами, сопровождающими начало движения ускоренной частицы в кристаллической решетке.

2. Термобарическая обработка кристаллов алмаза, предварительно облученных высокоэнергетичными ионами, приводит к тому, что в приповерхностный слой из окружающей среды проникают атомы азота. Это связано с существованием вблизи поверхности облученного кристалла протяженных дефектных областей — треков, по которым диффузия атомов азота облегчена.

3. Распределение радиационных дефектов по глубине слоя, в котором доминировали электронные столкновения высокоэнергетичного иона, определяется не только интенсивностью потерь энергии, но также и особенностями процессов перезарядки быстрых ионов при их торможении.

4. При облучении алмаза высокоэнергетичными ионами никеля и меди в области доминирующего электронного торможения иона формируется специфическая дефектная структура. Искривление энергетических зон кристалла в этом слое приводит к тому, что наблюдается эффективное возбуждение электронным пучком центров люминесценции с длиной волны бесфононной линии 638 нм, обычно регистрируемых только в фотолюминесценции.

5. Возникновение радиационных дефектов в алмазе, облученном высокоэнергетичными ионами, на глубинах, значительно превышающих среднепроективный пробег ионов, имеет диффузионную природу и объясняется проникновением в эту область части первичных радиационных дефектов в процессе имплантации.

Данная работа была частично профинансирована в рамках проекта INTAS-94-1982.

1. Ruan J., Kobaschi K., Choyke W. // Appl. Phys. Lett. 1992. V.60. P.3138.
2. Винс В.Г., Елисеев А.П., Малоголовец В.Г. // Сверхтвердые материалы. 1988. №4. С.18.
3. Varichenko V., Zaitsev A., Melnikov A. et al. // Nucl. Instr. and Methods in Phys. Res. B.94 (1994). P.259.
4. Zaitsev A.M., Fedotov S.A., Melnikov A.A. et al. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1993. B.82. P.421.
5. Зайцев А.М. // Поверхность. Физ. Хим. Мех. 1991. №10. С.5.
6. Вавилов В.С., Конорова Е.А. // Ионная имплантация в полупроводниках и др. материалах. Вильнюс, 1985. С.155.
7. Морозов Н.П., Тетельбаум Д.И. // ФТП. 1983. Вып.5. С.838.
8. Вайткус Ю., Гедрис Т., Гривикас В., Рагаускас А. // Ионная имплантация в полупроводниках и других материалах. Вильнюс, 1985. С.169.

Поступила в редакцию 02.03.97.

ОГРАНИЧЕННАЯ ДИФфуЗИЕЙ РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА НА РОСТОВЫХ ДЕФЕКТАХ В p-КРЕМНИИ

The recombination of the charge carrier in p-Si ($p_0 \sim 1,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$) grown by Chochralski method has been studied. The temperature and injection dependences of the charge-carrier lifetime were measured. The results were interpreted assuming that the charge-carrier lifetime is limited by the diffusion velocity to grown-in defects of structure surrounded by the potential barrier.

Процессы безызлучательной рекомбинации носителей заряда (НЗ) на структурных нарушениях в кремнии обычно объясняют, используя известную модель Холла—Шокли—Рида [1,2] или так называемые "барьерные" модели [3–6], базирующиеся на статистике рекомбинации [1,2]. Необходимо отметить, что все эти модельные представления [1–6] справедливы, если, как предполагается, длина l свободного пробега НЗ превосходит размеры d (диаметр сечения захвата) рекомбинационного центра (РЦ). Для многих ситуаций такое допущение вполне оправдано, но в некоторых случаях размеры РЦ, в роли которых могут выступать ростовые нарушения структуры (например, окруженные примесной атмосферой микродефекты, кислородные преципитаты и т.д.), оказываются сравними или больше l ($l/d < 1$), а скорость рекомбинации НЗ на них велика [7]. В данной работе исследовались особенности рекомбинации НЗ на ростовых дефектах в бездислокационном кислородосодержащем кремнии p-типа большого диаметра.

Эксперименты выполнены на образцах, вырезанных из пластин различной толщины l ($l = 0,4\text{--}5 \text{ мм}$) p-Si диаметром $\sim 150 \text{ мм}$. Монокристаллы были легированы бором до концентрации $\sim 1,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при вытягивании из расплава по методу Чохральского со скоростью $\sim 1,2 \text{ мм/мин}$. Во всех исследованных кристаллах не было выявлено ростовых микродефектов А- и В-типов. Концентрация фоновых примесей кислорода и углерода в используемых материалах, по данным инфракрасного поглощения, была равной соответственно $\sim 9 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $< 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Результаты получены из измерений времени жизни (τ) НЗ методом модуляции проводимости в точечном контакте при различных температурах в интервале $T_{\text{meas}} = 273\text{--}400 \text{ К}$ и уровнях возбуждения (инжекции) НЗ $\gamma = \Delta p/p_0 = 10^{-3}\text{--}10^{-1}$ (Δp , p_0 — концентрации неравновесных и равновесных дырок). Измеряемое при этом на опыте эффективное время жизни τ_{eff} определяется рекомбинацией НЗ в объеме кристалла и на поверхности и связано с объемным τ_v и поверхностным τ_s временами жизни соотношением [8]:

$$\tau_{\text{eff}}^{-1} = \tau_v^{-1} + \tau_s^{-1}, \quad (1)$$

где

$$\tau_s = l/2s + t^2/\pi^2 D. \quad (2)$$

Здесь s — скорость поверхностной рекомбинации НЗ, а D — коэффициент их диффузии. Величина τ_s в экспериментах варьировалась за счет изменения толщины l и состояния поверхности образцов (полировка, шлифовка, мелкоструйная обработка песком).

На рис.1 приведены инжекционные зависимости относительного $(\tau_{\text{eff}}^\gamma/\tau_{\text{eff}}^0)$ изменения τ_{eff} с ростом γ , полученные в кристаллах различной толщины при $T_{\text{meas}} = 300 \text{ К}$ (τ_{eff}^0 , τ_{eff}^γ — это значения τ_{eff} при низком и произвольном уровнях возбуждения НЗ). Видно, что характер этих зависимостей неодинаков для кристаллов различной толщины. Так, при увеличении γ в образцах толщиной $l = 0,4 \text{ мм}$ τ_{eff} остается практически постоянным, а при $l = 5 \text{ мм}$ τ_{eff} достаточно сильно возрастает.

На рис.2. представлены температурные зависимости τ_{eff} измеренные при $\gamma = 1,6 \cdot 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-2}$ на образцах толщиной $l = 0,4 \text{ мм}$ и 5 мм . Во всех случаях τ_{eff} как видно, не очень сильно растет при увеличении температуры.

К тому же, независимо от толщины образцов и уровня возбуждения НЗ наклоны всех кривых (1–4) одинаковы, хотя абсолютная величина τ_{eff} при конкретной температуре определяется значениями t и γ : с их ростом τ_{eff} увеличивается. При этом зависимость τ_{eff} от t подчиняется квадратичному закону, что, согласно соотношениям (1) и (2), возможно, если τ_s определяется вторым слагаемым в выражении (2). Необходимо подчеркнуть, что ни инжекционные, ни температурные зависимости τ_{eff} , как следует из анализа полученных результатов (см. рис.1,2), не подчиняются статистике рекомбинации Холла–Шокли–Рида [1,2].

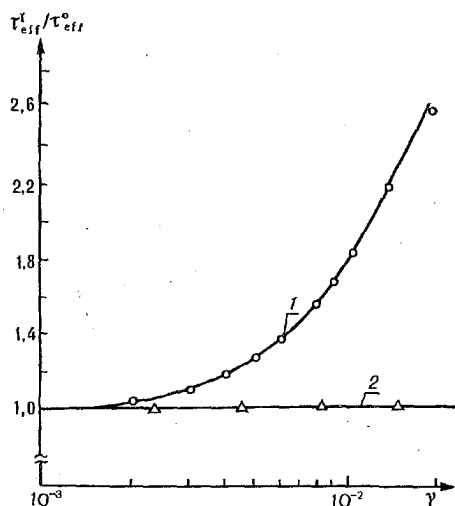


Рис.1. Инжекционные зависимости от носителя времени жизни носителей заряда для образцов толщиной 5 мм (кривая 1) и 0,4 мм (кривая 2)

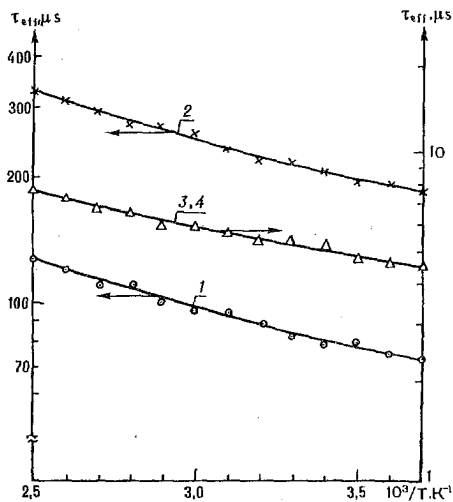


Рис.2. Температурные зависимости времени жизни носителей заряда. Толщина образца, мм: кривые 1,2 – 5; кривые 3,4 – 0,4. Уровень возбуждения γ : кривые 1,3 – $1,6 \cdot 10^{-3}$; кривые 2,4 – $2 \cdot 10^{-2}$

В образцах при $t = 0,4$ мм измеряемое на опыте τ_{eff} определяется в основном величиной τ_s , т.е. обусловлено рекомбинацией носителей заряда на поверхности кристалла. Так как τ_s определяется вторым слагаемым в выражении (2), то зависимость τ_{eff} от температуры представляется логичным объяснить изменением коэффициента диффузии D неосновных НЗ (электронов) при возрастании температуры. Иначе обстоит дело в образцах толщиной 5 мм. Здесь рекомбинация НЗ происходит преимущественно на структурных нарушениях в объеме кристалла и $\tau_{eff} \approx \tau_v$. Подтверждением этому может служить тот факт, что после дополнительной обработки поверхности образцов, приводящей к значительному изменению скорости поверхностной рекомбинации НЗ, заметного уменьшения τ_{eff} не наблюдалось.

Наклон кривых на рис.2 одинаков для образцов толщиной $t = 0,4$ и 5 мм. В первых из них изменение τ_{eff} от T определяется температурной зависимостью коэффициента D при диффузии электронов к РЦ на поверхности образцов. Поэтому можно сделать заключение, что и при $t = 5$ мм τ_{eff} растет при увеличении T из-за зависимости от температуры коэффициента D при диффузии неосновных носителей заряда к РЦ, локализованным в объеме кристалла. Подобный характер температурной зависимости τ_{eff} имеет место в случае, если процессы рекомбинации НЗ ограничены их диффузией к стокам с высокой локальной скоростью рекомбинации [7,9,10]. В данном случае в роли таких стоков могут выступать формирующиеся на этапе посткристаллизационного охлаждения слитка окруженные потенциальным барьером для НЗ ростовые структурные нарушения (микродефекты, примеснодефектные скопления и т.д.).

Наличием потенциального барьера для НЗ можно объяснить и наблюдаемые на опыте инжекционные зависимости τ_{eff} . Действительно, при уров-

нях возбуждения $\gamma < 10^{-3}$ высота потенциального барьера, по существу, не изменяется, а поэтому величина τ практически постоянная. При увеличении γ неосновные НЗ нейтрализуют часть фиксированного заряда, в силу чего уменьшаются амплитуда потенциального барьера и размеры области пространственного заряда, что приводит к возрастанию $\tau_{eff} \approx \tau_v$.

Таким образом, наблюдаемые экспериментально особенности рекомбинации НЗ в кислородсодержащем р-кремнии представляется возможным объяснить с учетом того, что время жизни носителей заряда в исследуемых кристаллах ограничено скоростью их диффузии к окруженным потенциальным барьером структурным нарушениям, образующимся при выращивании кристалла. Локальная скорость рекомбинации НЗ на таких нарушениях велика. Поэтому изменение времени жизни носителей заряда при увеличении температуры определяется температурной зависимостью коэффициента диффузии электронов к ростовым дефектам. Наличием окружающего их потенциального барьера для НЗ обусловлен характер наблюдаемых на опыте инжекционных зависимостей времени жизни носителей заряда.

1. Hall R.N. // Phys. Rev. 1952. V.87. №2. P.387.
2. Shockley W., Read W. // Phys. Rev. 1952. V.87. №4. P.835.
3. Curtis O.L., Srouf J.R. // IEEE Trans. of Nucl. Sci. 1973. NS-17. №6. P.110..
4. Коноплева Р.Ф., Литвинов Н.Л., Ухин Н.А. Особенности радиационного повреждения полупроводников частицами высоких энергий. М., 1971.
5. Покотило Ю.М., Ткачев В.Д., Явид Ю.Д. // ФТП. 1980. №14. С.2223.
6. Lugakov P.F., Shusha V.V. // Rad. Eff. 1982. V.62. №3-4. V.197.
7. Kimerling L.C., Leamy H.J., Patel J.R. // Appl. Phys. Lett. 1976. V.30. P.217.
8. Grivickas V., Noreika D., Tellesen J. A. // Liet. Fiz. Rink. 1989. V.29. №5. P.591.
9. Концовой Ю.А. // ФТП. 1970. №4. С.1184.
10. Dharival S.R., Mehrotra D.R. // Solid State Commun. 1988. V.67. P.1007.

Поступила в редакцию 20.03.97.

УДК 669.76.537.3

Е.Л.КУХАРЕНКО, В.Г.ШЕПЕЛЕВИЧ

СТРУКТУРА И ТЕРМО-ЭДС БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШЕЙ ФОЛЬГИ СОЕДИНЕНИЙ $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$

The rapidly quenched foils of $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ are characterized by the $(10\bar{1}2)$ texture. Thermoelectric force of foils depends on concentration of Sb and annealing.

Из диаграммы состояния системы Bi-Te [1] следует, что возможно образование инконгруэнтной фазы BiTe , которая исследована недостаточно по сравнению с соединением Bi_2Te_3 [2,3]. Фаза BiTe получается в результате перитектической реакции: жидкость + $\text{Bi}_2\text{Te}_3 \rightarrow \text{BiTe}$. Но часто перитектическая реакция завершается не полностью и, поскольку закристаллизовавшийся сплав является многофазным, это ухудшает свойства материала.

В последнее десятилетие для получения полупроводниковых соединений используют методы сверхбыстрой закалки из расплава [3-5]. При этом было установлено, что из-за сильного переохлаждения расплава происходит вырождение перитектической реакции и выделение инконгруэнтных фаз идет непосредственно из жидкой фазы. В связи с этим представляет интерес провести синтез и исследование структуры и физических свойств соединения BiTe и твердых растворов $(\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te})$, полученных сверхбыстрой закалкой из жидкости.

Фольга соединений $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ ($x=0; 0,1; 0,3; 0,4$ и $0,5$) получена при затвердевании капли расплава (0,2-0,3 г), инжестируемой на внутреннюю полированную поверхность вращающегося медного цилиндра. Для исследования структуры и свойств из полученной фольги толщиной 30-50 мкм вырезались образцы необходимого размера. Скорость охлаждения расплава при получении фольги достигала 10^6 К/с [6].

Рентгенографический анализ структуры фольги выполнен с помощью дифрактометра ДРОН-3 в медном излучении. Текстура исследована с приме-

нением "обратных" полосных фигур. Расчет полосных плотностей дифракционных линий 0007 , $10\bar{1}4$, $10\bar{1}8$, $11\bar{2}0$, $20\bar{2}4$, $20\bar{2}6$, $11\bar{2}.12$ и $30\bar{3}0$ проведен по методу Харриса [7]. Параметр элементарной ячейки a определен по положению дифракционной линии $2\bar{2}40$. Измерение дифференциальной термо-ЭДС α быстрозатвердевшей фольги осуществлялось с помощью термозонда при комнатной температуре. Изохронный отжиг проводился через 15–20 градусов с выдержкой по 10 мин в интервале 290–675 К. Изотермический отжиг выполнялся в течение нескольких часов при различных температурах.

Полосные плотности дифракционных линий
быстрозатвердевших фольг соединений

Дифракционные линии	Содержание сурьмы в соединении $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$				
	$x=0$	$x=0,1$	$x=0,3$	$x=0,4$	$x=0,5$
0007	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$10\bar{1}4$	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2
$10\bar{1}8$	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2
$11\bar{2}0$	0,4	0,5	0,6	0,5	0,6
$20\bar{2}4$	6,9	7,0	6,5	6,2	6,2
$20\bar{2}6$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$11\bar{2}.12$	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1
$30\bar{3}0$	0,3	0,2	0,2	0,4	0,5

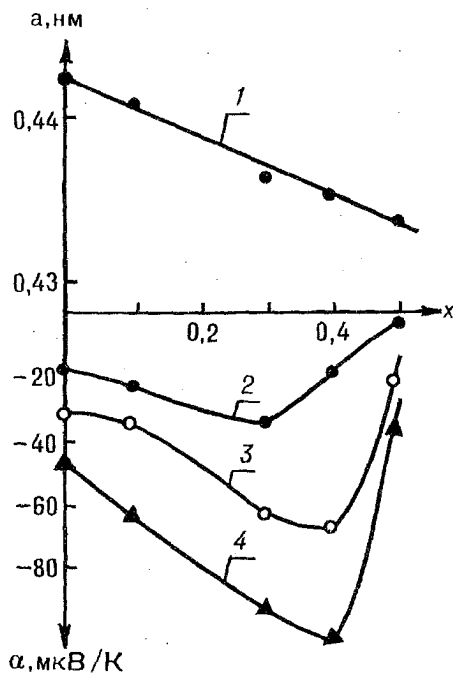


Рис.1. Зависимость параметра элементарной ячейки a (1) и дифференциальной термо-ЭДС α (2 – после кристаллизации, 3,4 – после отжига при 630 и 670 К) быстрозатвердевшей фольги $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ от состава

Рентгенографический анализ показал, что с увеличением содержания сурьмы в тройных соединениях $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ происходит уменьшение параметра элементарной ячейки по закону: $a(x) = 4,425 - 0,160x$ (рис.1). Линейный закон изменения параметра элементарной ячейки свидетельствует об образовании твердых растворов BiTe-SbTe .

Быстрозатвердевшая фольга $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ имеет мелкокристаллическую структуру с размером зерен в несколько микрон. Исследуемая фольга является текстурированной. В таблице представлены полосные плотности дифракционных линий для фольги с различным содержанием сурьмы и висмута. Наибольшей полосной плотностью характеризуется дифракционная линия $20\bar{2}4$. В фольге $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ на долю кристаллитов с ориентировкой $\{10\bar{1}2\}$ приходится не менее 80% объема.

Формирование текстуры в исследуемых материалах целесообразно связать с их кристаллической структурой и ориентацией ковалентных связей. Известно [8], что в элементарной ячейке BiTe содержится двенадцать простых слоев, атомы которых представляют собой плоские, гексагональные сетки. Эти двенадцать слоев образуют конфигурации из 2 квинтетов типа Bi_2Te_3 , между которыми располагается

двойной слой атомов висмута. Последовательность слоев такова: $\text{—Te}^{(1)}\text{—Bi—Te}^{(2)}\text{—Bi—Te}^{(1)}\text{—Bi—Bi—Te}^{(1)}\text{—Bi—Te}^{(2)}\text{—Bi—Te}^{(1)}\text{—}$. В квинтете атомы теллура $\text{Te}^{(2)}$ имеют в качестве ближайших соседей шесть атомов висмута (по три из каждого слоя). Угол между связями $\text{Bi—Te}^{(2)}$ равен $85^\circ 30'$. Атомы теллура $\text{Te}^{(1)}$ связаны с тремя атомами висмута. Угол между связями $\text{Bi—Te}^{(1)}$ равен $89^\circ 20'$. Связи $\text{Bi—Te}^{(2)}$ и $\text{Bi—Te}^{(1)}$ имеют в основном ковалентный характер [2]. Кристаллографический анализ показывает, что часть связей располагается в плоскостях $\{10\bar{1}2\}$, часть связей соединяет атомы, находящиеся в соседних плоскостях. Поэтому на межфазной границе кристалл-жидкость, совпадающей с одной из плоскостей $\{10\bar{1}2\}$, имеется высокая плотность активных центров в виде ненасыщенных ковалентных связей, к которым легко присоединяются атомы из расплава, образуя ступеньки атомного размера. Атомы края ступенек имеют ненасыщенные ковалентные связи, ориентированные вдоль межфазной границы, которые способствуют присоединению атомов из жидкости, вызывая тем самым боковое перемещение ступенек и рост кристаллитов с указанными ориентировками.

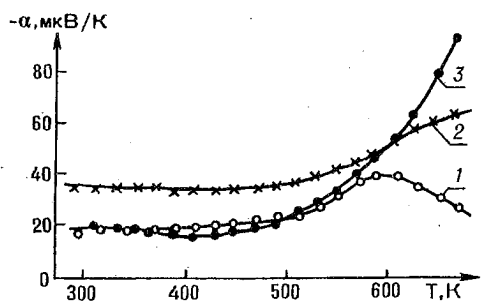


Рис. 2. Изменение дифференциальной термо-ЭДС фольги BiTe (1), $\text{Bi}_{0.7}\text{Sb}_{0.3}\text{Te}$ (2) и $\text{Bi}_{0.6}\text{Sb}_{0.4}\text{Te}$ (3) при изохронном отжиге

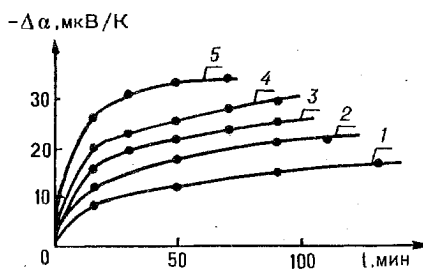


Рис. 3. Изменение дифференциальной термо-ЭДС фольги $\text{Bi}_{0.6}\text{Sb}_{0.4}\text{Te}$ при изотермическом отжиге: 1 — 513; 2 — 533; 3 — 553; 4 — 573; 5 — 593 К

На рис. 1 представлена концентрационная зависимость дифференциальной термо-ЭДС $\alpha(x)$ фольги $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ после ее получения. Для фольги исследуемых составов $\alpha < 0$. С увеличением содержания сурьмы $|\alpha|$ сначала растет, а затем уменьшается. Экстремальное значение дифференциальной термо-ЭДС наблюдается для фольги $\text{Bi}_{0.7}\text{Sb}_{0.3}\text{Te}$.

Фольга соединений $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$, полученная сверхбыстрой закалкой из расплава, находится в неустойчивом состоянии. Об этом свидетельствуют графики изменения дифференциальной термо-ЭДС при изохронном отжиге (рис. 2). Незначительные изменения α наблюдаются уже при нагреве выше 390 К. Нагрев фольги выше 510 К приводит к значительному изменению α . Быстрозатвердевшая фольга $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ подвергалась и изотермическому отжигу. На рис. 3 представлены графики изменения дифференциальной термо-ЭДС фольги $\text{Bi}_{0.6}\text{Sb}_{0.4}\text{Te}$ от времени отжига при различных температурах отжига. По временным зависимостям $\Delta\alpha(t)$, полученным при различных температурах отжига, определена энергия активации процесса. Ее значение для фольги с различным содержанием висмута и сурьмы находится в пределах $1,6 \div 1,8$ эВ.

Аналогичные изменения дифференциальной термо-ЭДС наблюдались при изохронном и изотермическом отжиге быстрозатвердевшей фольги и других соединений, например антимонида цинка [4] и халькогенидов полуметаллов [9], и объяснялись отжигом антиструктурных дефектов. Следует учесть, что получение соединений сверхбыстрой закалкой из расплава способствует образованию антиструктурных дефектов. Поэтому также целесообразно связать наблюдаемые изменения дифференциальной термо-ЭДС быстрозатвердевшей фольги $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ при изохронном и изотермическом отжиге с уменьшением концентрации антиструктурных дефектов.

На рис. 1 также приведены значения дифференциальной термо-ЭДС фольги исследуемых материалов $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ после отжига в течение одного

часа при 630 и 670 К. Отжиг смещает положение экстремумов зависимости $\alpha(x)$. Экстремальное значение дифференциальной термо-ЭДС отожженной фольги наблюдается для сплава $\text{Bi}_{0,6}\text{Sb}_{0,4}\text{Te}$ и достигает 100 мкВ/К. Данное тройное соединение может рассматриваться как перспективный термоэлектрический материал.

1. Полупроводниковые халькогениды и сплавы на их основе // Н.Х.Абрикосов, В.Ф.Банкина, Л.В.Порецкая и др. М., 1975.
2. Гольцман Б.М., Кудюнов В.А., Смирнов И.А. Полупроводниковые материалы на основе Bi_2Te_3 . М., 1972.
3. Глазов В.М., Ятманов Ю.В. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. 1986. Т.22. №1. С.36.
4. Шепелевич В.Г. // Неорганические материалы. 1993. Т.29. №7. С.1011.
5. Шепелевич В.Г., Прокошин В.И., Зу Хен Чер // Докл. АН БССР. 1991. Т.35. №2. С.148.
6. Мирошниченко И.С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
7. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов. М., 1969.
8. Пирсон У. Кристаллохимия и физика металлов и сплавов. М., 1977. Т.1.
9. Шепелевич В.Г. // Неорганические материалы. 1996. Т.32. №6. С.680.

Поступила в редакцию 27.01.97.

УДК 621.315.592

В.А.САМУЙЛОВ, В.Ф.СТЕЛЬМАХ, А.М.ЯНОВСКИЙ, Л.П.БУКА, Д.Ф.КРЫЛОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЬНО ЛЕГИРОВАННЫХ ПЛЕНОК ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ

The spectral dependences of coefficient of absorption and refractive index in highly phosphorus doped polycrystalline silicon in the IR wavelength region were considered with allowance for the dispersion of real part of refractive index. The existence of three different branches of the coefficient of absorption connected with different absorption mechanisms of electromagnetic energy by the medium was shown. The spectral dependence of the dielectric constant of polycrystalline silicon was analysed.

Поликристаллический кремний как материал современной полупроводниковой электроники широко используется в технологии изготовления элементов интегральных схем [1]. Пленки сильно легированного поликристаллического кремния применяют для формирования активных областей биполярных и МДП-транзисторных структур, резисторов и омических контактов, многоуровневых систем межсоединений, программируемых постоянных и оперативных запоминающих устройств с резервными элементами [2]. Расширение области использования таких пленок требует изучения фундаментальных свойств, определяющих особенности процесса переноса заряда, поглощения электромагнитной энергии, поведения примесных атомов при различных термообработках. Особое значение придается неразрушающим методам исследования, и в частности ИК-спектроскопии [2].

Ранние попытки определения электрофизических свойств сильно легированных пленок поликристаллического кремния из ИК-спектроскопических измерений [3] основаны на некорректном предположении отсутствия дисперсии действительной части комплексного показателя преломления $n(\lambda)$. Кроме того, не изучены спектральные зависимости коэффициентов поглощения и преломления и диэлектрическая проницаемость сильно легированных пленок поликристаллического кремния в спектральном диапазоне, соответствующем плазменному краю. Решению данных задач посвящена настоящая работа.

Сильно легированные фосфором в процессе наращивания пленки поликристаллического кремния толщиной $\sim 0,45$ мкм были получены пиролизическим разложением смеси газов SiH_4 — PH_3 в Аг при атмосферном давлении и температуре около 800°C на монокристаллических кремниевых подложках n -типа с удельным сопротивлением $\rho \approx 20$ Ом·см. После наращивания основная часть атомов фосфора в пленках на границах кристаллитов находится в электрически неактивном состоянии [4]. Для электрической активации атомов фосфора производилась термообработка. Образцы подвергались термическому отжигу при температурах 900÷1150°C в течение 15 мин.

Спектры пропускания регистрировались на двухлучевых спектрофотометрах UR-20 и Sresord 751R в диапазоне длин волн 2÷25 мкм при температуре образцов 300 и 80К, а отражения — 300К.

Спектры пропускания и отражения сильно легированных пленок поликристаллического кремния на монокристаллических кремниевых подложках не проявили интерференционной структуры, поэтому расчет спектральных зависимостей оптических констант нами проводился в предположении аддитивности интенсивностей световых потоков. С учетом того, что подложка не поглощает, формулы для связи спектров пропускания (T) и отражения (R) структур с коэффициентами поглощения пленки (α_2) и отражения границ раздела (R_1, R_2, R_3) имеют вид [5]:

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)(1 - R_3) \exp(-\alpha_2 d_2)}{1 - R_2 R_3 + (2 R_1 R_2 R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3) \exp(-2 \alpha_2 d_2)}, \quad (1)$$

$$R = R_1 + \frac{(1 - R_1)^2 \exp(-2 \alpha_2 d_2) (R_2 + R_3 - 2 R_2 R_3)}{1 - R_2 R_3 + (2 R_1 R_2 R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3) \exp(-2 \alpha_2 d_2)},$$

где коэффициенты отражения границ раздела воздух-пленка, пленка-подложка, подложка-воздух соответственно равны:

$$R_1 = \frac{(n_2^* - 1)^2 + k_2^{*2}}{(n_2^* + 1)^2 + k_2^{*2}}, \quad R_2 = \frac{(n_3^* - n_2^*)^2}{(n_3^* + n_2^*)^2}, \quad R_3 = \frac{(1 - n_3^*)^2}{(1 + n_3^*)^2}, \quad (2)$$

здесь d_2 — толщина пленки, n_i^* и k_i^* — коэффициенты преломления и экстинкции соответствующей среды для воздуха и подложки (принято: $k_1^* = 0$, $n_1^* = 1$, $k_3^* = 0$, $n_3^* = 3,42$ [3]).

Действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости ϵ' и ϵ'' определялась из соотношения [6]:

$$\epsilon' = n_2^{*2} - k_2^{*2}, \quad \epsilon'' = \alpha n_2^* k_2^*. \quad (3)$$

В результате численного решения системы (1) из экспериментальных спектров пропускания и отражения были получены спектральные зависимости оптических констант сильно легированного поликристаллического кремния n^* , k^* , α , ϵ' , ϵ'' .

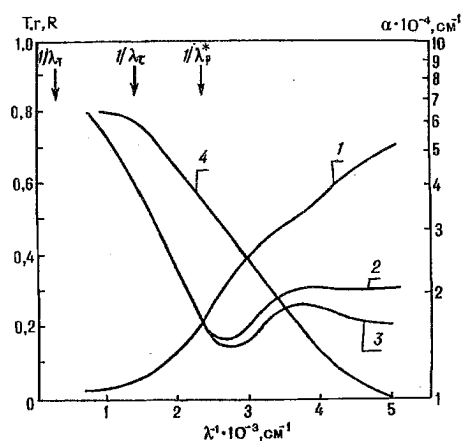


Рис.1. Спектры пропускания (1) и отражения (2) структуры — сильно легированная пленка поликристаллического кремния на монокристаллической кремниевой подложке, спектр отражения границы раздела воздух-поликристаллический кремний (3), спектр поглощения поликристаллического кремния с концентрацией электронов $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (4). Стрелками указаны значения волновых чисел

$$1/\lambda_T = \frac{k_B T}{hc}, \quad 1/\lambda_i = \frac{\omega_i}{2\pi c}, \quad 1/\lambda_p = \frac{\omega_p}{2\pi c}$$

Типичные спектры пропускания и отражения сильно легированной поликристаллической пленки кремния на монокристаллической подложке представлены на рис.1. Спектры пропускания и отражения не имеют интерференционной структуры.

На рис.1 кроме экспериментальных спектров пропускания и отражения типичной структуры пленка-подложка представлены рассчитанные из них спектральные зависимости коэффициентов поглощения сильно легированного поликристаллического кремния и отражения границы воздух — поликристаллический кремний. Поскольку толщина пленки поликристаллического кремния $d \approx 0,45 \text{ мкм}$, то оптическая плотность $\alpha d \geq 1$ при 2500 см^{-1} . Именно в спектральной области $\lambda^{-1} \approx 2000 \div 2500 \text{ см}^{-1}$ начинает наблюдаться (усиливаясь в коротковолновой части спектра) отличие коэффициентов отражения границы воздух-пленка от спектров отражения всей структуры. Здесь же наблюдается перегиб на спектрах пропуска-

ния и отражения. Такое поведение спектров соответствует плазменному краю, обусловленному поглощением ИК-излучения плазмой свободных электронов [6].

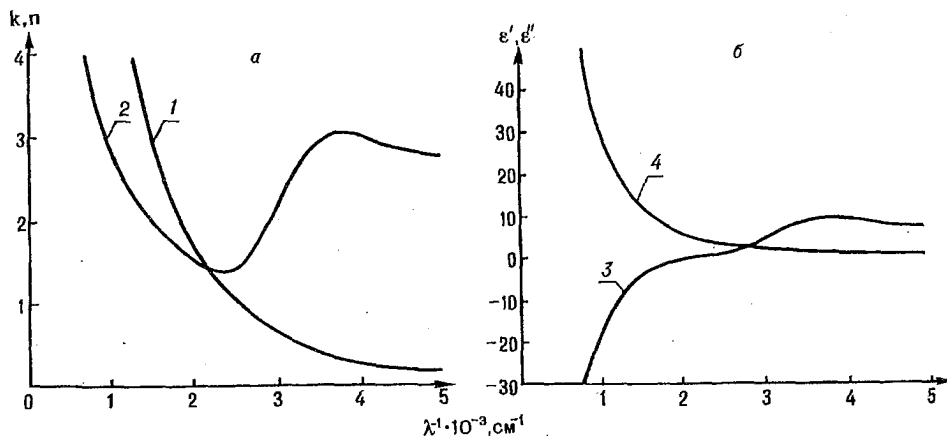


Рис.2. Спектральные зависимости: а) — действительной n^* и мнимой k^* частей комплексного показателя преломления; б) — действительной ϵ' и мнимой ϵ'' частей диэлектрической функции в области плазменного края поликристаллического кремния с концентрацией электронов $\sim 5 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3}$

Результаты проведенного нами расчета действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления n^* и k^* представлены на рис.2а, а диэлектрической функции ϵ' и ϵ'' — на рис.2б. Как видно из рисунков, при $\lambda^{-1} \geq 2200 \text{ см}^{-1}$ $n^* > k^*$ и $\epsilon' > 0$, а при $\lambda^{-1} \leq 2200 \text{ см}^{-1}$ $n^* < k^*$ и $\epsilon' < 0$. Мнимая часть диэлектрической функции ϵ'' больше нуля во всем исследованном спектральном диапазоне. Смена знака действительной части диэлектрической функции является причиной появления на спектре отражения сильно легированной пленки поликристаллического кремния плазменного края. Однако плазменный край сильно "размыт". Как нами было установлено [7], в сильно легированном мелкодисперсном поликристаллическом кремнии "размытие" плазменного края происходит из-за того, что константа затухания ω_t , оставаясь меньше плазменной частоты ω_p^* , сравнима с ней по величине. Значения волновых чисел, соответствующие ω_t и ω_p^* , обозначены на рис.1 стрелками. Положение $1/\lambda_p^*$ оценивается по области перегиба S-образной кривой спектра отражения, а $1/\lambda_t$ — по области перехода коэффициента поглощения к насыщению. Положение $1/\lambda_p^*$ определяется, кроме того, из рис.2а волновым числом, при котором действительная и мнимая части коэффициента преломления равны друг другу, а из рис.2б — когда действительная часть диэлектрической функции обращается в нуль.

На рис.3 представлены спектральные зависимости коэффициента поглощения исходной и отожженных термически структур с пленками поликристаллического кремния. Как видно из рис.3, возрастание температуры отжига, проявляющееся в увеличении концентрации свободных электронов при термообработке за счет электрической активации примесных атомов, приводит к росту поглощения. Рассмотрим особенности дисперсии коэффициента поглощения в поликристаллическом кремнии. В теории Друде связь между α и угловой частотой падающего излучения ω дается соотношением [8]:

$$\alpha = \frac{1}{n^* e \epsilon_0} \cdot \frac{e n \mu}{1 + \left(\frac{\omega \mu m_e}{e} \right)^2}, \quad (4)$$

где $n, \mu, e, m_e, \epsilon_0, n^*$ — концентрация свободных электронов, их подвижность, заряд, эффективная масса электрона, диэлектрическая проницаемость вакуума, показатель преломления поглощающей среды соответственно. Если

$\frac{\omega \mu m_*}{e} \gg 1$, то α будет возрастать пропорционально λ^2 . Для полупроводника с $\mu = 1000 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ и $m_* \approx 10^{-30} \text{ кг}$ (что приблизительно соответствует массе свободного электрона m_0) $\frac{\omega \mu m_*}{e} = 1$ при $\lambda = 1000 \text{ мкм}$, так что можно

ожидать, что квадратичная зависимость будет выполняться вплоть до длин волн в несколько сотен микрон [9]. При больших значениях длины волны коэффициент поглощения перестает зависеть от длины волны излучения,

что связано с выполнением соотношения $\frac{\omega \mu m_*}{e} \leq 1$.

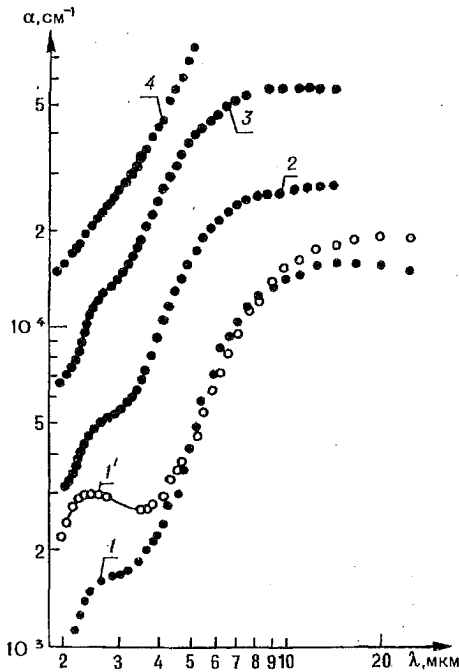


Рис.3. Спектральные зависимости коэффициента поглощения сильно легированного в процессе наращивания поликристаллического кремния:

1 — исходная структура, 300К; 1' — исходная структура, 80К; 2 — термический отжиг при 900°C, 15 мин.; 3 — термический отжиг при 1000°C, 15 мин.; 4 — термический отжиг при 1150°C, 15 мин.

проявляется при больших длинах волн, что указывает на то, что рассеяние на фононах в поликристаллическом кремнии нужно учитывать при комнатных температурах, наряду с рассеянием на ионизированных примесях и на границах кристаллитов [12], при этом зависимость от температуры учитывается через зависимость сечения рассеяния [10].

Выводы

1. Из спектров пропускания и отражения сильно легированных фосфором ($n = 5 \cdot 10^{19} \div 2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$) пленок поликристаллического кремния проведен расчет спектральных зависимостей оптических констант в диапазоне $2 \div 25 \text{ мкм}$, показавший, что частота плазменного резонанса больше, но одного порядка по величине с константой затухания, что приводит к сильной "размытости" края плазменного отражения. При частотах меньших плазменной коэффициент преломления сильно легированного поликристаллического кремния становится меньше коэффициента экстинкции, а действительная часть диэлектрической проницаемости — отрицательной.

2. Экспериментально установлено, что в диапазоне $\lambda = 2 \div 25 \text{ мкм}$ спектральная зависимость коэффициента поглощения, обусловленная высокой

В полученных нами экспериментальных зависимостях коэффициента поглощения от длины волны на рис.3 соотношение $\alpha \sim \lambda^S$, где $S=2$, выполняется только в промежуточной области от 3 до 6 мкм. Поскольку в сильно легированном фосфором поликремнии подвижность электронов $20 \div 30 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ [4], а $m_* = 0,26m_0$ [3], отклонение от квадратичного закона и выход α на плато может проявиться в спектральном диапазоне $6 \div 20 \text{ мкм}$.

В коротковолновой области спектра ($\lambda \sim 2 \div 3,5 \text{ мкм}$) нами зарегистрировано еще одно отклонение от степенного закона — широкая полоса поглощения. Природа полосы с максимумом при $\lambda \sim 2,5 \text{ мкм}$ заключается в разрешенных электронных переходах между минимумами С-зоны в к-пространстве [10,11], т.е. из долин в минимум энергии в центре зоны Бриллюэна. На рис.3 представлены спектры поглощения, записанные как при $T=300\text{К}$, так и при $T=80\text{К}$. Видно, что при понижении температуры внутризонное поглощение, связанное с переходами между минимумами С-зоны, усиливается, а в длинноволновой области насыщение поглощения

концентрацией электронов ($n=5 \cdot 10^{19} \div 2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$) в сильно легированных фосфором пленках поликристаллического кремния толщиной $\sim 0,4 \text{ мкм}$ и размером кристаллита $\sim 0,2 \text{ мкм}$, имеет три спектральные области. В области $\lambda \approx 3,5 \div 6 \text{ мкм}$ наблюдается неселективное поглощение на свободных носителях, удовлетворяющее степенному закону $\alpha \sim \lambda^S$, где $S=2,0 \div 2,5$. При меньших длинах волн ($2,0 \div 3,5 \text{ мкм}$) проявляется поглощение, обусловленное переходами между соседними в k -пространстве минимумами C -зоны. В области $\lambda=6 \div 25 \text{ мкм}$ наблюдается отклонение от степенного закона и насыщение зависимости коэффициента поглощения от длины волны, обусловленное малым значением подвижности электронов в мелкодисперсном сильно легированном поликристаллическом кремнии.

1. Таруп Я. Основы технологии сверхбольших интегральных схем. М., 1985.
2. Баринов В. В., Косых М. А. // Зарубежная электронная техника. 1984. №3. С.3.
3. Mishima Y., Hirose V., Osaka Y. // J. Appl. Phys. 1980. V.51. №2. P.1157.
4. Borisenko V.E., Gribkovskii V.V., Labunov V.A. et al // Phys. Stat. Sol. (a). 1983. V.75. №1. P.117.
5. Самуйлов В. А. // Исследования в области спектроскопии и квантовой электроники: Тез. докл. VI Респ. конфер. мол. ученых. Вильнюс, 1983. С.57.
6. Гроссе П. Свободные электроны в твердых телах. М., 1982.
7. Самуйлов В. А., Стельмах В. Ф., Яновский А. М. // II Всесоюзная конференция по физике и технологии тонких пленок (проблемные вопросы): Тез. докл. Иваново-Франковск, 1984. Ч.1. С.168.
8. Zubbert G., Burkey B. C., Mosor F., Trabka E. Q. // J. Appl. Phys. 1981. V.52. №11. P.6870.
9. Мосс Т., Баррел Г., Эллис Б. Полупроводниковая оптоэлектроника. М., 1976.
10. Уханов Ю. И. Оптические свойства полупроводников. М., 1977.
11. Вавилов В. С. Действие излучения на полупроводники. М., 1963.
12. Solmi S., Severi M., Angelucci R., Baldi L., Bilendi B. // J. Electrochem. Soc. 1982. V.129. №8. P.1811.

Поступила в редакцию 13.02.97.

УДК 539.1.08

О.М.АНШАКОВ, Г.А.ФИЛЬ, В.А.ЧУДАКОВ

АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ИСТОЧНИКА С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОФИЛЯМИ ЗАГЛУБЛЕНИЯ РАДИОНУКЛИДА ^{137}Cs

Express-analysis of radioactive contamination in soil at large territories is performed with the use of gamma-spectrometry method above the soil surface. The relations between the registered spectra and in-depth distribution parameters of source are of great importance in working out the appropriate apparatus. In this paper the above relations have been investigated by Monte Carlo simulation method. Using apriori information about the technogenous contamination character and measured intensivity ratio of in-medium scattered radiation and the non-scattered one, it is possible to determine the profile of the radionuclide in-depth distribution. Usage of this information improves reliability of express-analysis of the gamma-radionuclide content in soil.

При исследовании радиоактивных загрязнений на обширных площадях перспективным является использование дистанционных беспроботборных методов спектрометрии. Для определения условий проживания и хозяйственной деятельности людей на пострадавших от аварии на ЧАЭС территориях наиболее значимой является гамма-спектрометрия изотопа ^{137}Cs , распространенного на значительной части территории Беларуси, России и Украины.

При создании методик и аппаратуры экспрессного контроля содержания радионуклидов в почве важной задачей является установление зависимости регистрируемых гамма-спектров от профиля заглубления радиоактивного загрязнения. Эта информация необходима для решения обратной задачи гамма-съемки — определения по характеристикам получаемых спектров плотности поверхностного загрязнения почв.

В данной статье рассматриваются результаты анализа зависимости интенсивностей регистрируемого идеальным детектором прямого и n -кратного рассеянного гамма-излучения над поверхностью полубесконечного

источника, полученные путем имитационного моделирования переноса излучения по численному методу статистических испытаний (методу Монте-Карло). Комплекс моделирующих программ построен на основе системы EGS4 [1], представляющей собой основу для решения задач переноса излучений. Комплекс позволяет проводить на ЭВМ теоретический эксперимент по моделированию поля гамма-излучения над источником с желаемым химическим составом, формой и физическими характеристиками (плотность, влажность), различной геометрией эксперимента, а также с различными законами распределения радионуклида по толщине исследуемого слоя.

Расчет проводился для радионуклида ^{137}Cs с энергией квантов 0,662 МэВ для нескольких характерных профилей заглабления (пленка, линейно убывающее распределение, равномерное, экспоненциальное и обратное экспоненциальное). При моделировании приняты следующие функции описания характерных профилей:

$$\text{Пленка: } A(g) = \begin{cases} A_0, & \text{при } g = 0 \\ 0, & \text{при } g > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Равномерное: } A(g) = A_0, \text{ при } g \geq 0. \quad (2)$$

$$\text{Линейно убывающее: } A(g) = A_0 (1 - g/h), 0 \leq g \leq h. \quad (3)$$

$$\text{Экспоненциальное: } A(g) = A_0 e^{-\alpha g} \text{ (при заданных параметрах } A_0=1, \alpha=0,1). \quad (4)$$

$$\text{Обратное экспоненциальное: } A(g) = A_0 (1 - e^{-\alpha g}), \quad (5)$$

где A_0 — объемная активность нуклида на поверхности; α — параметр заглабления; g — расстояние от поверхности; h — толщина слоя заглабления.

В работе была использована модель абсолютно сухой почвы с плотностью 1,2 г/см³ и адекватным реальному объекту элементным составом. По исходным данным в системе EGS4 выработана определенная математическая модель ослабления потока гамма-квантов за счет преимущественно комптоновского взаимодействия в среде, которая в дальнейшем используется программой при розыгрыше истории жизни каждого кванта.

Моделировалась регистрация гамма-квантов идеальным спектрометрическим детектором, имеющим форму куба с ребром 4 см, размещенным на высоте 1 м над плоским полубесконечным источником. Каждая история разыгрывается до потери квантом энергии ниже 0,1 МэВ, до выхода за пределы рассматриваемой геометрии или до попадания в детектор. В последнем случае гамма-квант считается зарегистрированным. Для каждого профиля (2–5) расчет проводился при четырех значениях параметра заглабления с единичной плотностью загрязнения при локализации 95%-ной активности радионуклида в слое 5, 10, 15 и 20 см от поверхности. С целью повышения производительности расчетов (путем исключения точек вылета квантов с пренебрежимо малой вероятностью попадания в детектор) источник считается ограниченным окружностью с радиусом 10 м. Вылетающие кванты имеют равномерное распределение по поверхности круга, соответствующее конкретному профилю распределения по толщине слоя и равномерное угловое распределение. Для расчета каждого спектра разыграно по 5 млн историй жизни квантов. Статистическая погрешность определения интенсивностей рассеянного и прямого излучений, попавших в детектор, не превышает 5%.

В ходе вычислений система осуществляет накопление четырех отдельных спектров — прямого (нерассеянного) излучения, одно-, двух- и трехкратно рассеянного, а также их сумму. На рис.1 приведен характерный вид спектров для случая экспоненциального распределения нуклида в слое толщиной 5 см.

В зависимости от энергии кванта, попадающего в детектор, каждый из них относится к одному из двухсот энергетических каналов в диапазоне 0..0,662 МэВ. На рис.1 частота попадания квантов в каждый канал нормирована по числу разыгранных историй, т.е. по вертикальной оси отложена относительная интенсивность счета в каждом канале.

При подходе к определению информационных параметров полученных спектров в качестве исходного факта принята явная зависимость отношения интенсивности рассеянного излучения к интенсивности прямого от изменения формы и параметров заглабления источника [2].

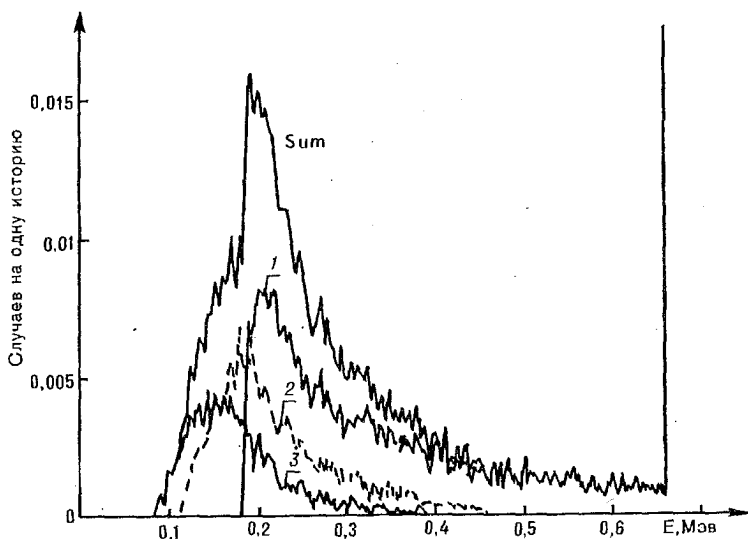


Рис.1. Расчетные гамма-спектры ^{137}Cs для случая экспоненциального распределения нуклида в слое 5 см:

1 – спектр однократного рассеяния; 2 – двукратного; 3 – трехкратного; Sum – их сумма

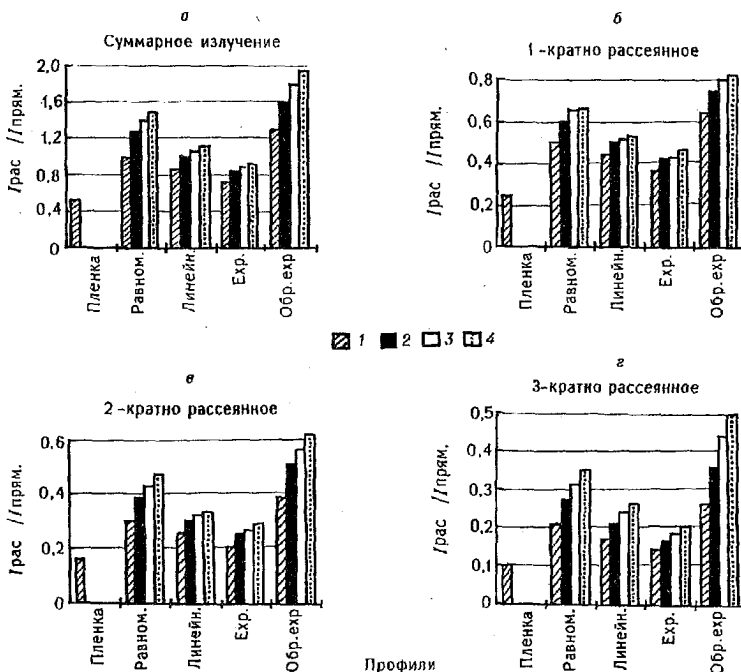


Рис.2. Изменение значения $I_{\text{расс.}}/I_{\text{прям.}}$ для различных профилей и глубин залегания:

1 – 5, 2 – 10, 3 – 15, 4 – 20 см

Из диаграмм на рис.2 видно, как отношение интенсивностей рассеянного (первых трех порядков) и прямого излучения меняется при изменении формы и параметра заглубления нуклида. Картины изменения этого отношения сходны для рассеяний всех трех порядков (см. рис.2 б, в и г). Из их анализа следует, что если известна толщина слоя заглубления радионуклида, то форма профиля определяется практически однозначно. Аналогично при неизвестной толщине слоя, но известной форме профиля, по значению $I_{\text{расс.}}/I_{\text{прям.}}$ можно определить степень заглубления. Вопрос решается не столь однозначно (за исключением обратного экспоненциального распределения), если неизвестна ни толщина слоя, ни форма заглубления (рис.3).

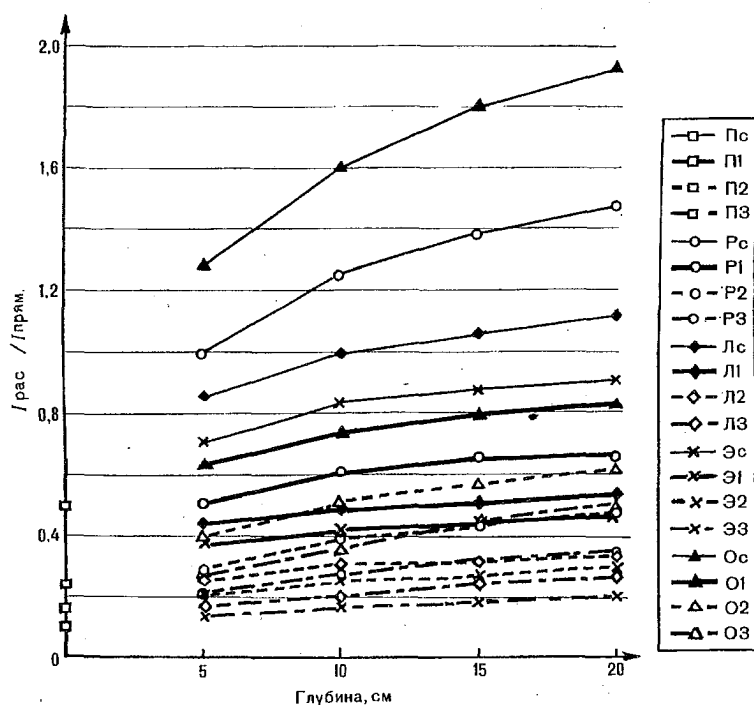


Рис.3. Семейство графиков значения $I_{\text{рас}}/I_{\text{прям.}}$ для каждого профиля в зависимости от толщины слоя. Здесь обозначение Пс соответствует суммарной интенсивности рассеянного излучения первых трех порядков для пленочного распределения нуклида; П1 — однократное рассеяние для пленки, П2 — двукратное, П3 — трехкратное; аналогично Рс, Р1, Р2 и Р3 соответствующие случаи для равномерного распределения; Лс, Л1, Л2 и Л3 — для линейного; Эс, Э1, Э2 и Э3 — для экспоненциального; Ос, О1, О2 и О3 — для обратного экспоненциального

Следует заметить, что не все рассмотренные профили встречаются в реальных условиях. В частности, равномерное и линейное распределения, как правило, не возможны для техногенных выпадений. Равномерное распределение характерно только для естественных радионуклидов, пленочное — для свежих выпадений. Практическую значимость имеют главным образом экспоненциальное распределение, соответствующее “старым” выпадениям, и обратное экспоненциальное, соответствующее культивированным загрязненным почвам. При этом обратная экспонента встречается только на глубине 15 см и более (глубина переворачивания слоя при вспашке). Оба этих случая хорошо различаются (см. рис.2 и 3).

Совпадение характера изменения $I_{\text{рас}}/I_{\text{прям.}}$ для рассеянного излучения всех трех порядков позволяет сделать вывод о том, что при создании спектрометрической аппаратуры для наземной гамма-съемки нет необходимости выделять рассеяния определенных порядков. Достаточно обеспечить разделение прямого и рассеянного излучений в диапазоне энергии 0,1..0,662 МэВ (для ^{137}Cs). Это сравнительно просто достигается при использовании стандартных сцинтилляционных детекторов, которые могут иметь большой рабочий объем, что гарантирует необходимую статистическую обеспеченность экспрессных измерений. Следовательно, нет необходимости использовать дорогостоящие и сложные в эксплуатации полупроводниковые детекторы.

На основе априорных сведений о характере техногенных загрязнений и данных инструментальных измерений значения $I_{\text{рас}}/I_{\text{прям.}}$ в большинстве практических случаев возможно определение профиля и глубины залегания радионуклидов. Дополнительное использование этой информации позволяет повысить достоверность экспрессного дистанционного определения запаса гамма-излучающих радионуклидов в почвах.

1. Ford R.L., Nelson W.R. The EGS Code System: Computer Programs for the Monte Carlo Simulation of Electromagnetic Cascade Showers (Version 3). Stanford Linear Accelerator Center Report Number SLAC-210 (1978).

2. Ремаев В.В., Кузьменко В.А., Гончаров К.С., Быков В.Т. // Атомная энергия. Т.74. Вып.1. Янв. 1993.

Поступила в редакцию 02.09.97.

УДК 621.396

П.Д. КУХАРЧИК, Д.В. СИДОРОВИЧ

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХМЕРНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

In this contribution we have used an approximate ML procedure for estimation of wave parameters taking into account polarization of the waves. A strategy for maximization of the loglikelihood function has been outlined and the proposed algorithm has been successfully applied to simulated and real seismic data. Summarizing, parametric methods are very attractive for applications because of the possibility to develop physically motivated models and because of the availability of a handable estimation procedure with statistically desirable properties.

В настоящее время интенсивно ведутся работы по оптимальной и адаптивной обработке сигналов в антенных решетках, чувствительных к поляризации волн. Это обусловлено как важностью приложений в сейсмологии и радиолокации, так и прогрессом электроники, позволившим реализовать адаптивные системы. В работах [1,2,3] отмечено, что трехмерные антенные решетки, чувствительные к поляризации волн, могут с успехом применяться в шумовой обстановке, которая зачастую находится в непрерывном изменении. Но при этом возникают следующие проблемы: во-первых, введение дополнительных параметров предоставляет новую информацию о сигналах; во-вторых, увеличивается сложность алгоритма обработки сигналов в антенной решетке. Компромиссное решение в этом случае можно получить, исследуя среднеквадратичную ошибку оценивающего устройства максимального правдоподобия. Целью данной работы является изучение абсолютно нижней границы средней квадратичной ошибки, достижимой в трехмерных антенных решетках, чувствительных к поляризации волн. Для наглядности используется метод концентрических эллипсов [4,5].

Пусть θ — единственный неизвестный параметр. Устройство, определяющее его значение, является оптимальным, когда оно максимизирует функцию правдоподобия $P(x/\theta)$. Обычно указанная задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log P(x/\theta) = 0. \quad (1)$$

Ясно, что это уравнение имеет много решений, из которых одно обеспечивает глобальный максимум.

Когда оценивается несколько параметров (т.е. θ — вектор), то задача сводится к решению системы уравнений, аналогичных (1). В работе [1] показано, что оптимальное оценивающее устройство, реализующее максимум функции правдоподобия, базируется на двух важных свойствах:

- 1) оценка является асимптотически несмещенной;
- 2) оценка является асимптотически эффективной.

Используя этот факт, можно записать элементы информационной матрицы Фишера в виде

$$J_{ij}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln P(x/\theta) \right]. \quad (2)$$

Так как в нашем случае вектор измерения x — гауссов с ковариационной матрицей C , то формула (2) принимает относительно простой вид

$$J_{ik}(\theta) = \sum_{j=1}^J \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\partial C_x(\omega_j, \theta(\omega_j))}{\partial \theta_i} C_x(\omega_j, \theta(\omega_j))^{-1} \frac{\partial C_x(\omega_j, \theta(\omega_j))}{\partial \theta_k} C_x(\omega_j, \theta(\omega_j))^{-1} \right) \right]. \quad (3)$$

Неравенство Крамера-Рао непосредственно обобщается на случай одновременной обработки n -параметров. Тогда набор нижних границ ковариационной матрицы ошибок оценки векторного параметра θ дается соотношением

$$C \geq J^{-1}.$$

Используя это неравенство, получим уравнение эллипса, определяющее границу максимальной точности оценки:

$$r^2 = (\hat{\theta} - \theta_0)' J (\hat{\theta} - \theta_0).$$

Определим теперь диагональную матрицу размерности $[p_{\eta} \times M]$ на $[p_{\eta} \times M]$:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{\eta} \times M}).$$

В этом случае информационная матрица Фишера может быть диагонализирована следующим образом:

$$Q' J Q = \Lambda, \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{\eta} \times M}$ — собственные значения матрицы J и $Q = [q_1, q_2, \dots, q_{p_{\eta} \times M}]$ — матрица собственных векторов J .

При этих предположениях границы максимальной точности оценки можно записать в виде:

$$r^2 = (\hat{\theta} - \theta_0)' J (\hat{\theta} - \theta_0) = \sum_{j=1}^{p_{\eta} \times M} \lambda_j \mu_j^2, \quad (6)$$

где $\mu = Q' (\hat{\theta} - \theta_0)$.

Но формула (6) в случае одновременной обработки n -параметров описывает эллипсоид, который называется эллипсоидом рассеяния и интерпретируется как мера разброса ошибок.

Новые переменные μ_i определяют координатные оси эллипсоида, повернутого матрицей Q , и величина $r/\sqrt{\lambda_i}$ указывает длину соответствующей оси эллипса.

Для упрощения анализа полученных выражений будем рассматривать случай приема только одного источника сигналов. Однако даже в этой ситуации для сейсмической модели имеем 5 параметров $\eta = (\xi_x, \xi_y, \xi_z, \gamma, \kappa)$.

Для наглядности мы будем рассматривать только два из них, т.е. двумерный срез пятимерного эллипсоида. Для этой цели определим следующую проекционную матрицу (надо заметить, что были произвольно выбраны параметры ξ_x и ξ_y):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

и произведем проектирование эллипсоида в плоскость параметров ξ_x и ξ_y

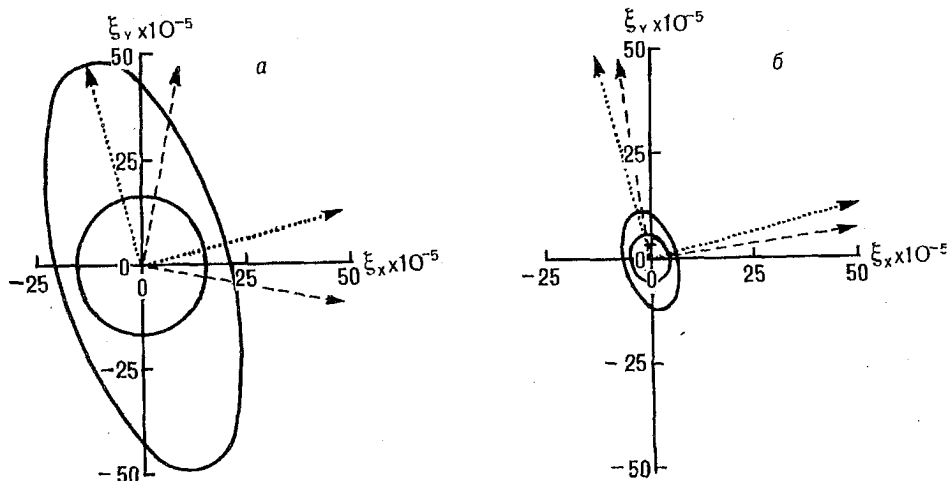
$$r^2 = (P(\hat{\theta} - \theta_0))' (P J^{-1} P')^{-1} (P(\hat{\theta} - \theta_0)). \quad (8)$$

Это уравнение описывает эллипс, полученный из пятимерного эллипсоида.

Разберем теперь результаты численного эксперимента и математического моделирования рассмотренных выражений. В нашем случае сейсмические данные записываются антенной решеткой, состоящей из четырех станций, каждая из которых, в свою очередь, имеет три перпендикулярно поляризованных приемника. Диаметр антенной решетки составляет 3 км, вертикальная апертура — 200 м. Все последующие вычисления были произведены для этой решетки.

Для сравнения результатов рассмотрим также модель без учета поляризационных параметров. Лучший способ определить каким образом корре-

ляционная матрица обеспечивает меру рассеивания ошибок — рассмотреть частный случай, когда параметры имеют совместное нормальное распределение.



Концентрические эллипсы: отношение сигнал/шум равно $a - 10$ дБ и $b - 20$ дБ, $\xi = (0,12; 0,167; 0,13)$ с/км

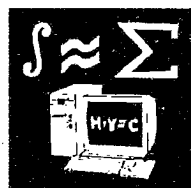
На рисунке показаны контуры равной вероятности, которые были вычислены для двух моделей. Равновысотные контуры в случае двух параметров представляют собой уравнение эллипса (8). Эллипсы раздвигаются монотонно с увеличением r^2 . Они также обладают тем интересным свойством, что вероятность нахождения внутри эллипса является функцией только r^2 . По этой причине эллипсы, определяемые уравнением (8), будем называть эллипсами концентрации (эллипсами рассеивания), так как они служат мерой концентрации плотности. Их можно интерпретировать как меру разброса ошибок. При этом видно, что модели с поляризационными параметрами соответствуют эллипсы с меньшими размерами осей, поэтому они обладают минимальными разбросами ошибок.

Рассматривая эти рисунки, можно наглядно изобразить преимущества учета поляризации для сейсмических волн. Таким образом, формула (8) может быть использована в качестве критерия оптимальной параметризации физической модели.

1. Bohme J. F. // Englewood Cliffs N. J. 1991. V.II.
2. Brillinger D. R. // Time Series: Data Analysis and Theory. San Francisco, 1981.
3. Christofferson A. et. al. // Geophysycal J. 1988. V.93. P.197.
4. Maiwald D., Sidorovitch D. V., Bohme J. F. // Proc. ICASSP. Minneapolis, 1993.
5. Sharf L. L. Statistical Signal Processing. Adisson-Wesley, 1991. P.225.

Поступила в редакцию 27.01.97.

Математика и информатика



УДК 519.1

О.И.МЕЛЬНИКОВ, Ю.Г.ЛЕВИН

РЕАЛИЗАЦИЯ ГИПЕРГРАФА k -ГУСЕНИЦЕЙ

The necessary and sufficient conditions of a hypergraph realized by a k -caterpillar are formulated and proved in the paper. An algorithm, consisting of two stages, checking the possibility of k -caterpillar realization of hypergraph, is presented. The complexity of this algorithm is

$$O\left(k|VH| \sum_{e \in EH} |e|\right).$$

В настоящей статье используются определения и обозначения, введенные в работе [1].

K -гусеницей ($k > 0$) называется дерево, при удалении из которого всех его висячих вершин получается $(k-1)$ -гусеница, при этом под 0-гусеницей понимается цепь.

Телом $B(T)$ k -гусеницы T называется 0-гусеница, получаемая из T последовательностью k преобразований, описанных в предыдущем определении.

Веткой $w(v)$ k -гусеницы T , порожденной вершиной $v \in B(T)$, называется ее максимальное по включению поддереву, имеющее с $B(T)$ в точности одну общую вершину v , называемую *корнем* этого поддерева.

Длиной ветки $w(v)$ будем называть длину ее максимальной цепи, содержащей вершину v .

Вершина u' называется *потомком* вершины u в k -гусенице T , если эти вершины принадлежат одной ветке $w(v)$ k -гусеницы T , смежны в T и u' не принадлежит цепи, соединяющей v и u .

Пусть $H=(V, E)$ — связный гиперграф.

Введем обозначения: $n=|V|$; $v < u$, если вершина u является предвисячей, а вершина v — соседней с ней; $v \equiv u$, если вершины u и v эквивалентны.

Пусть: ξ — множество деревьев $T=(V, R)$, являющихся реализацией гиперграфа H ; ξ^k — множество k' -гусениц из ξ , $k' \leq k$; $T(e)$ — подграф дерева T , порожденный вершинами ребра $e \in E$.

Лемма 1. Пусть $T=(V, R) \in \xi$; $u, v \in V$; $E(v) \cap E(u) = E^* \neq \emptyset$ и $z=(v_0=v, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n=u)$ — цепь в T . Тогда $E^* \subseteq E(v_i)$ для всех $i=1, n$.

Доказательство. Пусть существует $i \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что $E^* \subseteq E(v_i)$. Тогда существует ребро $e \in E^* \setminus E(v_i) \neq \emptyset$ такое, что $v_0 v_n \in e$ и $v_i \notin e$. Так как в дереве T цепь z единственная, связывающая вершины u и v , то подграф $T(e)$ не связан, что противоречит требованию к дереву T .

Лемма доказана.

Следствие 1.1. В условиях леммы 1, если $v < u$, то $v < v_i$ для всех $i=1, n-1$; если $v \equiv u$, то $v_i \equiv v$ для всех $i=1, n-1$.

Пусть гиперграф H не содержит одноэлементных ребер.

Следствие 1.2. Если v — висячая вершина дерева T и u — смежная с ней вершина в T , то $v < u$.

Обозначим через V_0 множество таких вершин $v \in V$, для которых существует $u \in V$ такое, что $v < u$, но $u < v$. Пусть $V_1, \dots, V_p$ — семейство классов эквивалентных вершин из $V \setminus V_0$, и V_j , $j = 1, p$ — множество, полученное удалением из V_j одной из его вершин. Положим $V^* = V_0 \cup \bigcup_{j=1}^p V_j$.

Следствие 1.3. Если существует реализация гиперграфа деревом, то число висячих вершин в этом дереве не превосходит $|V^*|$.

Следствие 1.4. Если существует реализация гиперграфа цепью, то $|V^*| \geq 2$; если существует реализация гиперграфа деревом, отличным от цепи, то $|V^*| \geq 3$.

Лемма 2. Пусть $T \in \xi^k$, $k > 0$; v — не висячая вершина T ; u — такая смежная с v в T вершина, что $v < u$; P — множество смежных с v вершин, отличных от u . Тогда $T' = (T \setminus \{vp | p \in P\}) \cup \{up | p \in P\} \in \xi^k$, причем множество W' висячих вершин дерева T' определяется условием $W' = (W \setminus \{u\}) \cup \{v\}$, где W — множество висячих вершин дерева T .

Доказательство. Очевидно, что для каждого $p \in P$ существует гиперребро $e_p \in E(V) \subseteq E(u)$ такое, что $u, p \in e_p$. Покажем, что для любого ребра $e \in E(V)$ подграф $T'(e)$ остался связным.

Пусть $w, t \in e$ и z — цепь, связывающая эти вершины в T . Если z не содержит v , то эта цепь сохранилась в T' . Цепь $z = (w, \dots, p_1, v, p_2, \dots, t)$, $p_1, p_2 \in P$, заменяется цепью $z = (w, \dots, p_1, v, p_2, \dots, t)$. Аналогично цепь $z = (w, \dots, v, u, \dots, t)$ заменяется цепью $z = (w, \dots, u, \dots, t)$.

Очевидно, что длины веток T' не увеличиваются по сравнению с T . Следовательно, $T' \in \xi^k$. При этом множество W' висячих вершин T' определяется условием $W' = W \setminus \{u\} \cup \{v\}$, где W — множество висячих вершин T .

Лемма доказана.

Теорема 1. Если ξ^k не пусто, то существует гусеница $T \in \xi^k$ такая, что множество ее висячих вершин совпадает с V^* .

Доказательство. Пусть $T \in \xi^k \neq \emptyset$ и v — висячая вершина T . Согласно следствию 1.2, либо $v \in V^*$, либо эквивалентная v вершина $u \in V^*$. В последнем случае v является потомком в T вершины u' , такой, что $v \equiv u'$. k -гусеница T' , полученная из T перестановкой вершин u' и v , принадлежит ξ^k . Таким образом, в ξ^k существует гусеница, все висячие вершины которой принадлежат V^* .

Пусть T^* — одна из таких гусениц и существует вершина $w' \in V^*$, не являющаяся висячей в T^* . Тогда существует вершина $w' \in V$ такая, что $w < w'$. По следствию 1.1, существует такая вершина u , смежная с v , что $w < u$. Тогда, согласно лемме 2, существует гусеница $T' \in \xi^k$, у которой множество висячих вершин состоит из множества висячих вершин k -гусеницы T и вершины w . Повторяя рассуждения, приходим к существованию k -гусеницы, удовлетворяющей утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Пусть $\Gamma(H)$ — гиперграф $H' = (V', E')$, где $V' = V \setminus V^*$, и множество E' получено из множества $\{e \setminus V^* | e \in E\}$ удалением одноэлементных и отождествлением кратных ребер; $S(H)$ — множество пар $v'v'' \in V' \times (V \setminus V^*)$, таких, что $v' < v''$, содержащее в точности по одному элементу для каждого $v' \in V'$.

Лемма 4. Пусть $V' \subset V \setminus V^*$. Тогда существуют смежные в H вершины $v' \in V'$ и $v'' \in (V \setminus V^*) \setminus V' = VV$.

Доказательство. Так как H — связный гиперграф, то любая пара вершин $v' \in V'$ и $v'' \in VV$ соединена цепью, соседние вершины которой являются смежными в H . Из этой цепи можно выделить подцепь $v_0, \dots, v_n$ такую, что $v_0 \in V'$, $v_n \in VV$ и $v_i \in V^*$ для всех $i = \overline{1, n-1}$. Если $n=1$, то лемма доказана.

Пусть $n > 1$. Для любой v_i , $i = \overline{1, n-1}$ существует $u_i \in VV \cup V'$ такая, что $E(v_i) \subseteq E(u_i)$. Пусть для определенности $u_i \in V'$. Тогда вершины u_i и v_{i+1} смежны в H , и, следовательно, существует цепь $u_i, v_{i+1}, \dots, v_n$, обладающая теми же свойствами, что и исходная, но меньшей длины. Повторяя рассуждения, приходим к существованию пары вершин, для которых утверждение леммы выполняется.

Лемма доказана.

Следствие 4.1. Граф $\Gamma(H)$ — связный.

Из доказанного вытекает

Теорема 2. Гиперграф H реализуем k -гусеницей тогда и только тогда, когда гиперграф $\Gamma(H)$ реализуем $(k-1)$ -гусеницей.

Из сказанного вытекает следующий конструктивный алгоритм проверки реализуемости гиперграфа k -гусеницей, включающий два этапа.

Первый этап состоит не более чем из $(k-1)$ итераций. На i -ой итерации формируется множество $S_i = S(H_i)$ и строится гиперграф $H_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1}) = \Gamma(H_i)$, где $H_i = H$. Алгоритм прерывается, если для текущего i значение $|S_i| < 2$, поскольку в этом случае на основании следствия 1.4 и теоремы 2 гиперграф H не реализуем деревом, а следовательно, и k -гусеницей. В противном случае переходим ко второму этапу — проверке возможности реализации гиперграфа H_k гусеницей и построению одной из таких реализаций T_k , если таковые существуют.

В соответствии с доказанным $T_k \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i \in \xi^k$.

Оценим трудоемкость алгоритма в предположении, что $|E| \leq n$.

Пусть исходный и все последующие гиперграфы представляются списком гиперребер, а также списком гиперребер, инцидентных каждой вершине. Будем предполагать также, что вершины начального гиперграфа нумеруются в порядке неубывания их степеней, а гиперребра — в порядке неубывания их мощностей (т.е. чисел вершин в ребрах), причем вершины в списке соответствующего ребра упорядочены по возрастанию их номеров, а ребра в списке ребер, инцидентных вершине — также по возрастанию номеров вершин.

Построение списков S_i сводится к проверке включений $E(u) \subseteq E(v)$ для всех пар вершин, общая трудоемкость которой, согласно [1], — $O\left(n \sum_{e_j \in E_i} |e_j|\right)$.

Построение гиперграфа H_{i+1} на i -ой итерации первого этапа состоит из следующих шагов:

— Удаление вершин множества V_i^* из всех ребер гиперграфа H_i и корректировка мощностей ребер. Трудоемкость удаления вершины из гиперребра $e_j \in E_i$ — $O(|e_j|)$. Тем самым трудоемкость удаления всех вершин не превосходит $O\left(|V_i| \sum_{e_j \in E_i} |e_j|\right)$.

— Удаление одноэлементных ребер. Трудоемкость шага — $O(|E_i|)$.

— Поиск и отождествление кратных ребер. Трудоемкость этого шага — $O\left(|E_i| \sum_{e_j \in E_i} |e_j|\right)$.

Таким образом, трудоемкость первого этапа не превосходит $O((k-1)n \sum_{e_j \in E} |e_j|)$.

Так как второй этап можно выполнить за $O(n \sum_{e_j \in E} |e_j|)$ операций [1], то в целом проверку возможности реализации гиперграфа k -гусеницей можно произвести за $O(kn \sum_{e_j \in E} |e_j|)$ операций.

1. Мельников О.И., Левин Ю.Г. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. С.40.

Поступила в редакцию 07.02.96.

УДК 512.542

Н.Г. ЖЕВНОВА

ВНЕШНЯЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КЛАССА КОНЕЧНЫХ p -РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

The purpose of this paper is the outer characterization of class finite p -decomposable groups.

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Напомним, что формация группы Ω называется p -насыщенной [1], если всегда из $G/(O_p(G) \cap \Phi(G)) \in \Omega$ следует, что $G \in \Omega$. Символом $\text{form}_p(G)$ обозначим пересечение всех p -насыщенных формаций, содержащих группу G . Через Δ_p обозначим класс всех p -групп, через $\Delta_{p'}$ — класс всех p' -групп. Формация группы называется насыщенной, если она p -насыщена для любого простого числа p . Подформация Ψ формации Ω называется дополняемой в Ω [2], если Ψ дополняема в решетке подформаций формации Ω , т.е. если в Ω имеется такая подформация Z , что

$$\Psi \cap Z = (1), \Psi \vee Z = \text{form}(\Psi \cup Z) = \Omega.$$

Напомним, что одна из идей работы [3] состоит в изучении внутреннего строения группы G в зависимости от свойств формаций, порожденных этой группой. В связи с этим в работе [3] была дана внешняя характеристика нильпотентных и метанильпотентных групп, а в работе [4] — разрешимых групп с заданной нильпотентной длиной. В данной статье мы даем следующую характеристику p -разложимых групп.

Теорема. Группа G p -разложима тогда и только тогда, когда в формации $\text{form}_p(G)$ дополняема подформация $\Delta_p \cap \text{form}_p(G)$.

Доказательству теоремы предположим следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть Z и Ψ — подформации формации Ω , и пусть для любого $p \in \pi(\Psi)$ формация Ω p -насыщена. Тогда, если формация Ψ наследственна и Z — дополнение к Ψ в Ω , то $\pi(\Psi) \cap \pi(Z) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $p \in \pi(\Psi) \cap \pi(Z)$. Тогда в Z найдется такая неединичная группа G , у которой некоторый главный фактор H/K имеет порядок, делящийся на p . Пусть $T = G/K$ и $L_1 \times \dots \times L_{i-1} \times L_i \times \dots \times L_t$ — цокль группы T , где L_j — минимальная нормальная в T подгруппа ($1 \leq j \leq t$) и $L_i = H/K$. Обозначим через M нормальную подгруппу наибольшего порядка среди тех ее нормальных подгрупп, которые содержат подгруппу $L_1 \times \dots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \dots \times L_t$, но не содержат подгруппу L_i . Тогда группа $A = T/M$ очевидно, монолитична, и ее монолит совпадает с $L_i M/M$. Так как $L_i M/M \cong H/K$, то $O_p(A) = 1$.

Пусть V — тривиальный неприводимый $F_p A$ -модуль, и P_V — такой неразложимый проективный $F_p A$ -модуль, что $V \cong P_V/P_V J$, где J — радикал Джекобсона групповой алгебры $F_p A$. Пусть $G = [P_V]A$, $M = P_V J$. Понятно, что $M \subseteq \Phi(G) \cap O_p(G)$.

Пусть L — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если L не содержится в P_ν , то $L \subseteq C_G(P_\nu)$ и $P_\nu L/P_\nu$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/P_\nu \cong A$. Значит, $L \cong H/K$, т.е. p делит $|L|$. Пусть $C = C_G(P_\nu)$. Тогда $P_\nu \subseteq C$. Значит,

$$C = C \cap P_\nu A = P_\nu (C \cap A).$$

Отсюда следует, что $C \cap A \neq 1$. Но, согласно теореме Вильямса (см. [5, с.195]),

$$C_A(P_\nu) = O_p(C_A(V)) = O_p(A) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $L \subseteq P_\nu$. Таким образом, L является неприводимым $F_p A$ -модулем. Хорошо известно, что в P_ν имеется единственный неприводимый $F_p A$ -подмодуль, который изоморфен $F_p A$ -модулю V . Кроме того, P_ν имеет единственный неприводимый фактормодуль P_ν/M , который также изоморфен V . Значит, $|P_\nu/M| = |L| = |V| = p$ и $L \subseteq Z(G)$. Заметим, что

$$G/M = (P_\nu/M)(MA/M) \cong (P_\nu/M) \times (MA/M).$$

Так как $p \in \pi(\Psi)$ и формация Ψ по условию наследственна, то $P_\nu/M \in \Psi \subseteq \Omega$. Кроме того, очевидно, $MA/M \cong A \in \Omega$. Значит, $G/M \in \Omega$. Ввиду того, что формация Ω по условию p -насыщена и $M \subseteq \Phi(G) \cap O_p(G)$, имеем $G \in \Omega = \text{form}(\Psi \cup Z)$. Заметим, что $G \notin \Psi \cup Z$. Действительно, если $G \in \Psi$, то $G/P_\nu \cong A \in \Psi \cup Z = (1)$. Противоречие. Пусть $G \in Z$. Тогда, согласно лемме 3.32 [6],

$$L \cong |L|(G/C_G(L)) \in \text{form } G \subseteq Z.$$

Но $L \in \Psi$. Значит, $L \in \Psi \cup Z$. Вновь полученное противоречие показывает, что $G \notin \Psi \cup Z$. Понятно, что класс $\Psi \cup Z$ — полуформация. Значит, согласно теореме 3.11 [6], в Ω найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \dots, N_t, M_1, \dots, M_t$ ($t \geq 2$), что выполняются следующие условия:

- 1) $G \cong H/N$ и $M/N = \text{Soc}(H/N)$;
- 2) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$;
- 3) группа H/N_i монолитична, $\text{Soc}(H/N_i) = M_i/N_i$ и $H/N_i \in \Psi \cup Z$, $i = 1, \dots, t$;
- 4) $L_i = N_1 \cap \dots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap N_{i+1} \cap \dots \cap N_t$ — минимальная нормальная подгруппа в H , причем L_i не содержится в N и $M_i = N_i L_i$.

Если при всех $i \in \{1, \dots, t\}$ фактор-группа H/N_i принадлежит Ψ , то ввиду 2) имеет место $H \in \Psi$ и поэтому $G \in \Psi$, что невозможно. Таким образом, найдется такое i , что $H/N_i \in Z$. Из условия 4) следует, что H -главные факторы NL_i/N и M_i/N_i H -изоморфны и поэтому их централизаторы в H совпадают. Но ввиду 1) фактор NL_i/N централен.

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_i/N_i &\cong |M_i/N_i| ((H/N_i)/C_{H/N_i}(M_i/N_i)) = \\ &= |M_i/N_i| ((H/N_i)/(H/N_i)) \in \text{form}(H/N_i) \subseteq Z. \end{aligned}$$

Итак, $M_i/N_i \in \Psi \cup Z = (1)$. Полученное противоречие показывает, что $p \notin \pi(Z)$. Лемма доказана.

Для произвольной совокупности групп X через $\alpha(X)$ будем обозначать класс всех тех групп, которые изоморфны главным факторам групп из X .

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2. Пусть $\alpha(\Psi) \cap \alpha(Z) = \emptyset$. Тогда $\text{form}(\Psi \cup Z) = \Psi \times Z$.

Доказательство. Допустим, что группа G p -разложима, т.е. $G = G_p \times G_{p'}$, $G_p \in \Delta_p \times \Delta_{p'}$. Тогда $\text{lform}_p(G) = (\Delta_p \cap \text{lform}_p(G)) \times (\Delta_{p'} \cap \text{lform}_p(G))$.

Применяя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \text{lform}_p(G) &= (\Delta_p \cap \text{lform}_p(G)) \times (\Delta_{p'} \cap \text{lform}_p(G)) = \\ &= \text{form}((\Delta_p \cap \text{lform}_p(G)) \cup (\Delta_{p'} \cap \text{lform}_p(G))). \end{aligned}$$

Таким образом, подформация $\Delta_p \cap \text{lform}_p(G)$ дополняема в $\text{lform}_p(G)$.

Пусть теперь подформация $\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)$ дополняема в $\text{Iform}_p(G)$. Тогда в $\text{Iform}_p(G)$ найдется такая подформация Z , что $\text{Iform}_p(G) = \text{form}((\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \cup Z)$, $(\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \cup Z = (1)$.

По лемме 1,

$$\pi(\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \cap \pi(Z) = \emptyset.$$

Следовательно,

$$\alpha(\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \cap \alpha(Z) = \emptyset.$$

Применяя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \text{Iform}_p(G) &= \text{form}((\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \cup Z) = \\ &= (\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \times Z \subseteq (\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \times (\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)). \end{aligned}$$

Обратное включение очевидно. Итак,

$$\text{Iform}_p(G) = (\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)) \times (\Delta_p \cap \text{Iform}_p(G)).$$

Теорема доказана.

Следствие [7,8]. Тогда и только тогда насыщенная формация нильпотентна, когда в ней дополняемы все подформации вида Δ_p .

1. D'Arcy P. On formations on finite groups. Arch. Math. Basel, 1974. V.25. P.3.
2. Скиба А. Н., Шметков Л. А. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т.39. №3. С.17.
3. Скиба А. Н. // Мат. заметки. 1980. Т.27. №3. С.345.
4. Он же // Вопр. алгебры. 1987. №3. С.21.
5. Huppert B., Blackburn N. Finite groups II. Berlin; Heidelberg; New York, 1982.
6. Шметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. 1989.
7. Ведерников В. А. // Международная математическая конференция, посвященная 25-летию Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины: Тез. докл. Гомель, 1994. Ч.1. С.26.
8. Скиба А. Н. // Изв. вузов. Математика. 1994. №10. С.1.

Поступила в редакцию 18.09.96.

УДК 517.925.6

Т.С. СТЕПАНОВА

О НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

In this work for solutions of the special nonlinear second-order systems of differential equations the necessary and sufficient conditions are obtained for the case when the movable critical singularities are absent.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = R(t, x, y), \\ \dot{y} = Q(t, x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } R = \sum_{j=0}^l p_j(t, x) y^j, \quad Q = \sum_{j=0}^m q_j(t, y) x^j, \quad (2)$$

$p_j(t, x)$ ($j = \overline{0, l}$) и $q_j(t, y)$ ($j = \overline{0, m}$) — функции, рациональные по x и y соответственно и аналитические по t .

Найдем необходимые условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1), т.е. условия принадлежности данной системы к системам P -типа.

Предположим, что функция R имеет полюс порядка k относительно x , Q — полюс порядка n относительно y . Тогда в окрестности полюсов имеем:

$$R(t, x, y) = \frac{R_1(t, x, y)}{[x - a(t)]^k}, \quad Q(t, x, y) = \frac{Q_1(t, x, y)}{[y - b(t)]^n}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где R_1, Q_1 — функции, аналитические по t, x и y .

Введем параметр λ следующим образом:

$$x = a(t) + \lambda^{n+1} X, \quad y = b(t) + \lambda^{k+1} Y, \quad t = t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)} T. \quad (4)$$

Тогда система (1) с учетом (3) и (4) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \frac{R_1(t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)}T, a(t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)}T) + \lambda^{n+1}X, b(\dots) + \lambda^{k+1}Y)}{X^k - a'(t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)}T)\lambda^{k(n+1)}}, \\ \frac{dY}{dT} = \frac{Q_1(t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)}T, a(\dots) + \lambda^{n+1}X, b(\dots) + \lambda^{k+1}Y)}{Y^n - b'(t_0 + \lambda^{(n+1)(k+1)}T)\lambda^{n(k+1)}}, \end{cases} \quad (5)$$

где a' , b' — производные функций a и b по t .

Положив в (5) $\lambda=0$, получим упрощенную систему

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \frac{R_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{X^k}, \\ \frac{dY}{dT} = \frac{Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{Y^n}. \end{cases} \quad (6)$$

Откуда

$$\begin{aligned} X &= \sqrt[k+1]{(k+1)R_1(t_0, a(t_0), b(t_0))T + C_1}, \\ Y &= \sqrt[n+1]{(n+1)Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))T + C_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

Функции X и Y не будут иметь подвижных многозначных особых точек только при $k=n=0$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была системой без подвижных многозначных особых точек, необходимо, чтобы функции $p_j(t, x)$ ($j = \overline{0, l}$) и $q_j(t, y)$ ($j = \overline{0, m}$) из (2) являлись полиномами по x и y соответственно.

Далее перейдем к рассмотрению системы (1) при $l=m=1$, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(t, x) + yQ(t, x), \\ \dot{y} = R(t, y) + xS(t, y), \end{cases} \quad (8)$$

где P, Q, R, S — полиномы степеней m_1, m_2, n_1, n_2 по x и y соответственно.

Пусть

$$P = a_{m_1}(t) + \dots + a_0(t)x^{m_1}, \quad Q = b_{m_2}(t) + \dots + b_0(t)x^{m_2}, \quad (9)$$

$$R = c_{n_1}(t) + \dots + c_0(t)y^{n_1}, \quad S = d_{n_2}(t) + \dots + d_0(t)y^{n_2}.$$

Обозначим $m = \max\{m_1, m_2\}$, $n = \max\{n_1, n_2\}$. (10)

Справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы система (8) была системой P -типа, необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_2(t) + a_1(t)x + a_0(t)x^2 + y(b_2(t) + b_1(t)x + b_0(t)x^2), \\ \dot{y} = c_2(t) + c_1(t)y + c_0(t)y^2 + x(d_2(t) + d_1(t)y + d_0(t)y^2). \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство проведем при помощи метода малого параметра Пенлеве.

Перепишем систему (8), учитывая (9) и (10):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{j=0}^m [a_j(t) + b_j(t)y]x^{m-j}, \\ \dot{y} = \sum_{j=0}^n [c_j(t) + d_j(t)x]y^{n-j}, \end{cases} \quad (12)$$

причем в системе (12) при $m_1 \neq m_2$, $n_1 \neq n_2$ для коэффициентов имеем следующие возможности:

- а) если $m=m_1$, то $b_j=0$, $0 \leq j \leq m_1 - m_2 - 1$,
- б) если $m=m_2$, то $a_j=0$, $0 \leq j \leq m_2 - m_1 - 1$,
- в) если $n=n_1$, то $d_j=0$, $0 \leq j \leq n_1 - n_2 - 1$,
- г) если $n=n_2$, то $c_j=0$, $0 \leq j \leq n_2 - n_1 - 1$.

Пусть

$$x = \frac{X}{\lambda^p}, y = \frac{Y}{\lambda^q}, t = t_0 + \lambda' T, \quad (13)$$

где целые неотрицательные числа p, q и r пока не определены.

Далее возможны следующие случаи:

1. $m=m_1, n=n_1$. Тогда система (12) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = a_0 X^{m_1} \lambda^{r+p(1-m_1)} + \dots + (a_{m_1-m_2} \lambda^q + b_{m_1-m_2} Y) X^{m_2} \lambda^{r+p(1-m_2)-q} + \dots + (a_{m_1} \lambda^q + b_{m_1} Y) \lambda^{r+p-q}, \\ \frac{dY}{dT} = c_0 Y^{n_1} \lambda^{r+q(1-n_1)} + \dots + (c_{n_1-n_2} \lambda^p + d_{n_1-n_2} X) Y^{n_2} \lambda^{r-p+q(1-n_2)} + \dots + (c_{n_1} \lambda^p + d_{n_1} X) \lambda^{r-p+q}. \end{cases} \quad (14)$$

Возьмем $p=n_1-1, q=m_1-1, r=(m_1-1)(n_1-1)$ (считаем $m_1>1, n_1>1$).

Положив $\lambda=0$, получим упрощенную систему

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = a_0(t_0) X^{m_1}, \\ \frac{dY}{dT} = c_0(t_0) Y^{n_1}. \end{cases}$$

Отсюда, для того чтобы уравнения полученной системы были уравнениями P -типа, необходимо, чтобы $m_1 \leq 2, n_1 \leq 2$.

2. $m=m_1, n=n_2$. Положим числа $p=n_2-1, q=m_1-2, r=(n_2-1)(m_1-1)$ (считаем $m_1>1, n_2>1$). Тогда упрощенная система, соответствующая системе (12), запишется так

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = a_0(t_0) X^{m_1}, \\ \frac{dY}{dT} = d_0(t_0) X Y^{n_2}, \end{cases} \quad \text{для } m_1 > 2 \text{ и}$$

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = a_0(t_0) X^2, \\ \frac{dY}{dT} = X(d_0(t_0) Y^{n_2} + \dots + d_{n_2}(t_0)), \end{cases} \quad \text{для } m_1 = 2.$$

Отсюда, очевидно, необходимо, чтобы $m_1 \leq 2, n_2 \leq 2$.

3. $m=m_2, n=n_1$. Этот случай сводится к случаю 2 перестановкой x и y .

4. $m=m_2, n=n_2$. (Здесь возможно $m_1=m_2, n_1=n_2$.) Возьмем $p=n_2-2, q=m_2-2, r=(m_2-1)(n_2-1)-1$, если $n_2>2$ и $m_2>2$, или $p=q=1, r=2$, если $m_2=n_2=2$. В этом случае упрощенная система примет вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = b_0(t_0) Y X^{m_2}, \\ \frac{dY}{dT} = d_0(t_0) X Y^{n_2}. \end{cases}$$

Исключив из системы переменную Y , находим ограничение $n_2 \leq 2$. Аналогично, исключая X , получаем $m_2 \leq 2$.

Для того чтобы доказательство теоремы было полным, остается рассмотреть случаи $m=\{0,1\}, n=\{0,1\}$.

а). Пусть $m=0$, тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0(t) + b_0(t)y, \\ \dot{y} = \sum_{j=0}^n [c_j(t) + d_j(t)x] y^{n-j}. \end{cases}$$

Исключив переменную y , получим уравнение

$$\ddot{x} = a'_0(t) + \frac{(\dot{x} - a_0(t))b'_0(t)}{b_0(t)} + b_0(t) \sum_{j=0}^n [c_j(t) + d_j(t)x] \left(\frac{\dot{x} - a_0(t)}{b_0(t)} \right)^{n-j},$$

отсюда необходимо, чтобы $n \leq 2$.

б). Пусть $m=1$, тогда система (12) запишется так

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + (b_0(t) + b_1(t)x)y, \\ \dot{y} = \sum_{j=0}^n [c_j(t) + d_j(t)x] y^{n-j}. \end{cases}$$

Исключая переменную y , находим условие на степень n : $n \leq 2$.

Случаи $n=0$ и $n=1$ сводятся к рассмотренным перестановкой x и y . В результате получаем $m \leq 2$.

Итак, теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 2 можно провести, сведя систему (8) к одному уравнению второго порядка и воспользовавшись результатами Пенлеве [1].

Рассмотрим систему (11), исключив из нее переменную y , получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = L(t, x)\dot{x}^2 + N(t, x)\dot{x} + M(t, x), \quad (15)$$

где

$$L(t, x) = \frac{b_1(t) + c_0(t) + (2b_0(t) + d_0(t))x}{B(t, x)},$$

$$N(t, x) = a_1(t) + c_1(t) + (2a_0(t) + d_0(t))x + \left[b'_2(t) + b'_1(t)x + b'_0(t)x^2 - \right. \\ \left. - (a_2(t) + a_1(t)x + a_0(t)x^2)(b_1(t) + c_0(t) + (2b_0(t) + d_0(t))x) \right] / B(t, x),$$

$$M(t, x) = a'_2(t) + a'_1(t)x + a'_0(t)x^2 + (c_0(t) + d_2(t)x)(b_2(t) + b_1(t)x + b_0(t)x^2) - \\ - (c_1(t) + d_1(t)x)(a_2(t) + a_1(t)x + a_0(t)x^2) + \left[(c_0(t) + d_0(t)x)(a_2(t) + a_1(t)x + a_0(t)x^2)^2 - \right. \\ \left. - (b'_2(t) + b'_1(t)x + b'_0(t)x^2)(a_2(t) + a_1(t)x + a_0(t)x^2) \right] / B(t, x).$$

$$B(t, x) = b_2(t) + b_1(t)x + b_0(t)x^2.$$

Для уравнения вида (15) необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек известны (см., напр., [2, с.426]).

Заметим, что из вида функции $L(t, x)$ следует, что шестое уравнение Пенлеве не входит в класс уравнений P -типа, описываемых уравнением (15), а следовательно, и системой (11).

Предположим, что эти необходимые и достаточные условия для уравнения (15) выполнены. Тогда и y -компонента решения системы (11) в качестве своих подвижных особых точек может иметь лишь полюсы, т.е. будет обладать P -свойством.

Заметим, что для уравнений Пенлеве P_2-P_5 построены эквивалентные системы вида (11) [3].

Таким образом, если система (11) является системой P -типа, то она интегрируется либо в элементарных, либо в известных классических трансцендентных функциях, либо в функциях, являющихся решениями уравнений Пенлеве P_2-P_5 .

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.

2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

3. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн.; 1990.

Поступила в редакцию 02.04.96.

ПРОБЛЕМА РАЗНОМАСШТАБНОСТИ И ТРЕБОВАНИЯ К МЕТОДАМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

For stiff systems of linear differential equations with constant matrix is constructed recurrent formulae for matrix elements of construction of family of explicit numerical methods, which secure accuracy to polynomial solutions.

При численном анализе динамических систем, описываемых эволюционными уравнениями вида

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (1)$$

наиболее значительные трудности возникают обычно в том случае, когда в рассматриваемом n -мерном векторном пространстве составляющие решения системы (1) могут существенно по-разному изменяться во времени (и качественно, и количественно). Уже даже в линейном случае

$$u'(t) = Au(t) + a(t) \quad (2)$$

с постоянной невырожденной матрицей A простой структуры подобная разномасштабность составляющих решения может быть связана не только с большим разбросом собственных значений этой матрицы, но и с возможной разнохарактерностью в поведении решений соответствующей (2) однородной системы и порождаемых вектором неоднородности $a(t)$ некоторых частных решений исходной системы (2). Например, задав $a(t)$ в виде

$$a(t) = \varphi'(t) - A\varphi(t), \quad (3)$$

где известная векторная функция $\varphi(t)$ связана с матрицей A лишь размерностью, легко заложить априори (выбором $\varphi(t)$) требуемый уровень такой разнохарактерности. Действительно, поскольку любое решение системы (2), (3) представимо в форме

$$u(t) = \varphi(t) + \exp[A(t-t_0)][u(t_0) - \varphi(t_0)], \quad (4)$$

то экспоненциальной составляющей решения, связанной с решением соответствующей (2) однородной системы, можно сопоставить выбором $\varphi(t)$ другую векторную составляющую с наперед заданным характером поведения.

Заметим, что в случае отрицательных по вещественной части собственных значений матрицы A характер поведения любого решения системы (2) при $t \gg 1$ уже будет определяться фактически лишь поведением частного решения $\varphi(t)$. Естественно, что при разработке вычислительных алгоритмов следует особо позаботиться об обеспечении высокого уровня опосредованного конструируемым численным методом приближения к $\varphi(t)$.

Экспоненциальным характером поведения нетривиальных решений соответствующей (2) однородной системы традиционно предопределяется ряд важных требований к методам их численного анализа. В дополнение к классическим требованиям устойчивости [1, с.27] здесь следует отметить также порождаемые разномасштабностью фундаментальных решений условия спектральной монотонности [2] и требования монотонности по шагу локальной погрешности (см. [3–5]). Эти требования особенно актуальны в случае так называемых жестких [1, с.117] систем, наиболее характерным признаком которых является большой разброс собственных значений матрицы A .

Для повышения уровня адекватности дифференциальной и соответствующей разностной задач названные ранее применительно к (2) требования к численным методам должны быть дополнены, очевидно, новыми условиями, порождаемыми фактором неоднородности. В общем случае неоднородности $a(t)$, опираясь на теорему Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами, естественно наряду с (2) рассматривать также системы

$$u'(t) = Au(t) + p_m(t) \quad (5)$$

с многочленной неоднородностью. Такие системы часто используются также (см., напр., [6]) для приближения на отрезке дискретизации систем нелинейных уравнений вида (1). Поэтому далее основным объектом нашего внимания будет система (5), при этом многочлен $p_m(t)$ станем задавать в форме

$$p_m(t) = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{i!} t^i. \quad (6)$$

Именно применительно к таким системам и будут сформулированы дополнительные требования к соответствующим численным методам.

На шаге дискретизации, как известно [7, с.127], для любого решения системы (5) справедливо соотношение

$$\hat{u} = \exp(A\tau)u + \int_t^{t+\tau} \exp[A(t+\tau-x)] p_m(x) dx,$$

которое нам удобнее будет записать в виде

$$\hat{u} = \exp(A\tau)u + \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \int_0^1 \exp(A\xi)(\tau-\xi)^i d\xi p_m^{(i)}(t). \quad (7)$$

Здесь $u = u(t)$, $\hat{u} = u(t+\tau)$, $\tau > 0$.

Ориентируясь на (7), соответствующий численный метод для системы (5) естественно искать в форме

$$\hat{y} = E(A, \tau)y + \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} S_i(A, \tau) p_m^{(i)}(t), \quad (8)$$

где $y \approx u$, $\hat{y} \approx \hat{u}$. Выбором операторов $E(A, \tau)$, $S_i(A, \tau)$, $i=0, 1, \dots, m$, и предопределяются наиболее важные свойства метода вида (8). Чтобы сформулировать дополнительные к упомянутому выше требования к такому выбору, обратим внимание на следующее.

В силу линейности системы (5) любое ее решение может быть (ср.(4)) представлено в форме

$$u(t) = g_m(t) + \exp(At)c, \quad (9)$$

где c есть произвольный вектор со скалярными компонентами, а $g_m(t)$ — некоторое частное решение этой системы. Учитывая (6), в качестве $g_m(t)$ в (9) можно взять алгебраический многочлен вида

$$g_m(t) = \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{i!} t^i, \quad (10)$$

коэффициенты α_i , $i=0, 1, \dots, m$, которого (что легко проверить непосредственно) могут быть определены с использованием рекурсивных формул

$$\alpha_m = -A^1 a_m, \alpha_{k-1} = -A^1(a_{k-1} - \alpha_k), k = m, m-1, \dots, 1. \quad (11)$$

Чтобы упростить обсуждавшиеся выше (см.(4)) проблемы опосредованной аппроксимации каждого из двух разнохарактерных слагаемых в правой части (9), потребуем дополнительно выполнения условия точности метода вида (8) на решении (10) системы (5). Это приводит к требованию тождественного по t выполнения равенства

$$g_m(t+\tau) = E(A, \tau)g_m(t) + \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} S_i(A, \tau) p_m^{(i)}(t) \quad (12)$$

при любых a_i и α_i ($i=0, 1, \dots, m$), связанных соотношениями (11).

Учитывая многочленный характер решения (10), равенство (12) запишем в виде

$$[I - E(A, \tau)]g_m(t) + \sum_{i=1}^m \frac{\tau^i}{i!} g_m^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} S_i(A, \tau) p_m^{(i)}(t), \quad (13)$$

где через I обозначена единичная матрица соответствующей размерности. Если в (13) при записи многочлена (6) и всех его производных по t коэффициенты a_p , $p=0, 1, \dots, m$, заменить по формулам (см. (11))

$$a_j = \alpha_{j+1} - A\alpha_j, \quad j=0, 1, \dots, m-1; \quad a_m = -A\alpha_m,$$

то непосредственно можно убедиться, что сформулированное выше дополнительное требование к методам вида (8) будет выполнено, когда имеют место равенства

$$E(A, \tau) = I + S_0(A, \tau)A, \quad S_{i-1}(A, \tau) = \frac{\tau^i}{i} I + \frac{1}{i} S_i(A, \tau)A, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Заметим, что формулами (14) ни один из искоемых операторов в конструкции метода (8) не задается, а определяются лишь условия взаимосвязи между этими операторами, обеспечивающие требование точности методов такого вида на многочленных решениях системы (5). Сохранившаяся свобода в выборе таких операторов теперь уже может быть использована для обеспечения указанных ранее требований к опосредованной аппроксимации второго слагаемого в представлении (9) без дополнительной их увязки с характером поведения первого слагаемого.

Отметим, что для классических разностных методов (как явных, так и неявных) обеспечение лишь упомянутых требований, порождаемых разномасштабностью экспоненциальных составляющих решения соответствующей (2) однородной системы, уже бывает обычно сопряжено с жесткими ограничениями на шаг дискретизации. Дополнительные условия, вообще говоря, не упрощают задачу конструирования. Поиск путей эффективного решения этой задачи может быть связан, скажем, с предложенными в [3, 5] подходами к построению численных методов с избирательной аппроксимацией спектральных составляющих решения. В случае системы (5) при $m=0$ в указанных работах были приведены примеры явных численных методов, точных на стационарном решении системы и не связанных с характерными для классических методов ограничениями на шаг численного интегрирования. Эти методы имеют форму (8) (при $m=0$), а их построение существенно опирается на условия согласованности операторов, являющиеся частным случаем соотношений (14). В общем случае (14) указанные рекурсивные соотношения позволяют по любому заданному оператору $S_m(A, \tau)$ последовательно находить все остальные элементы в соответствующей конструкции метода (8), точного на многочленных решениях (10). Выбором же способа приближения (см. (7), (8))

$$S_m(A, \tau) \approx \int_0^{\tau} \exp(A\xi)(\tau - \xi)^m d\xi$$

и должны быть заложены в (8) недостающие свойства согласованности дифференциальной и разностной задач, связанные уже с экспоненциальной структурой общего решения соответствующей (2) однородной системы.

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж.Холла, Дж.Уатта. М., 1979.
2. Бобков В.В. // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. С.С.Филиппова. М., 1988. С. 96.
3. Он же // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1174.
4. Он же // Красные задачи, специальные функции и дробное исчисление: Тр. междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения акад. Ф.Д.Гахова. Мн., 1996. С. 26.
5. Бобков В.В., Бобкова Н.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
6. Бобков В.В. // Там же. 1995. № 2. С. 41.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966.

Поступила в редакцию 21.05.96.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ПАРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

An integral equation is solved in quadratures.

На интервале $-1 < t < 1$ рассмотрим следующее уравнение, в котором все функции комплекснозначны:

$$\begin{cases} \varphi(t) + \int_0^1 \ell_1(t, s) \varphi(s) ds + \int_{t-1}^0 \ell_1(t-s, 0) \varphi(s) ds = g(t), & 0 < t < 1, \\ \varphi(t) + \int_0^{t+1} \ell_2(t-s, 0) \varphi(s) ds + \int_{-1}^0 \ell_2(t, s) \varphi(s) ds = g(t), & -1 < t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Заданная, искомая и используемая в дальнейшем вспомогательная функции соответственно $g(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат пространству $L_2(-1, 1)$. Ядра уравнения (1) характеризуются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ell_1(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} \ell_1(t, s) &= -\ell_1(t, 1) \ell_1(1, s), & 0 < t < 1, & 0 < s < 1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ell_2(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} \ell_2(t, s) &= \ell_2(t, -1) \ell_2(-1, s), & -1 < t < 0, & -1 < s < 0, \end{aligned}$$

в которых стоящие справа предельные значения заданы и принадлежат пространству L_1 на соответствующих интервалах. Класс ядер уточняется аналогично [1], где решено близкое уравнение с одним ядром на интервале $0 < t < 1$. Близкие уравнения с двумя ядрами решены в [2]. Возможность решить уравнение (1) анонсирована в [3].

Введем целые функции

$$L_1(1, z) = \int_0^1 \ell_1(1, 1-s) \exp(izs) ds, \quad L_2(-1, z) = \int_{-1}^0 \ell_2(-1, -1-s) \exp(izs) ds.$$

Легко обосновать, что существуют действительные числа a и b такие, что в полуплоскостях $\operatorname{Im} z \geq a$ и $\operatorname{Im} z \leq b$ не имеют нулей функции $1+L_1(1, z)$ и $1+L_2(-1, z)$ соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $a > b$ и что на прямых $\operatorname{Im} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ не имеют нулей функции $1+L_2(-1, z)$, $1+L_1(1, z)$ соответственно. Нули функции $1+L_2(-1, z)$ в полосе $b < \operatorname{Im} z < a$ обозначим z_k , их кратности — соответственно ν_k , $k=1, 2, \dots, n$. Для простоты в дальнейшем будем считать, что в указанной полосе функции $1+L_1(1, z)$, $1+L_2(-1, z)$ общих нулей не имеют.

Уравнение (1) решается благодаря проверяемой непосредственно возможности свести его к последовательности двух уравнений:

$$\begin{cases} \psi(t) + \int_t^1 \ell_1(t-s+1, 1) \psi(s) ds = g(t), & 0 < t < 1, \\ \psi(t) + \int_{-1}^t \ell_2(t-s-1, -1) \psi(s) ds = g(t), & -1 < t < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varphi(t) + \int_{t-1}^t \ell_1(1, s-t+1) \varphi(s) ds = \psi(t), & 0 < t < 1, \\ \varphi(t) + \int_t^{t+1} \ell_2(-1, s-t-1) \varphi(s) ds = \psi(t), & -1 < t < 0, \end{cases} \quad (3)$$

которые, в свою очередь, решаются благодаря разностным ядрам.

Остановимся лишь на решении более сложного уравнения (3).

Функции $\ell_1(1, s)$, $\ell_2(-1, s)$, $\psi(t)$, определенные соответственно на интервалах $0 < s < 1$, $-1 < s < 0$, $-1 < t < 1$, продолжим на всю действительную ось, доопределив их тождественными нулями, и продолженные функции обозначим соответственно $\tilde{\ell}_1(1, s)$, $\tilde{\ell}_2(-1, s)$, $\tilde{\psi}(t)$. Нетрудно обосновать, что решение уравнения (3) получается как сужение на интервал $-1 < t < 1$ взятого в классе $\{a, b\}$ решения уравнения

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\ell}_1(1, s-t+1) \tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\psi}(t), & t > 0, \\ \tilde{\varphi}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\ell}_2(-1, s-t-1) \tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\psi}(t), & t < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) в классе $\{a, b\}$ используется методика из [4]. Эта методика позволяет выписать решение в квадратурах. Вводя необходимые обозначения, мы приведем окончательный результат, получающийся после решения уравнений (2), (3).

Обозначим

$$L_1(z, 1) = \int_{-\infty}^0 \ell_1(t+1, 1) \exp(izt) dt, \quad L_2(z, -1) = \int_0^{\infty} \ell_2(t-1, -1) \exp(izt) dt \quad (5)$$

функции, аналитические соответственно в полуплоскостях $\text{Im } z < -c$, $\text{Im } z > c$. При этом в формулах (5) мы доопределили функции $\ell_1(t+1, 1)$, $\ell_2(t-1, -1)$ соответственно на лучи $t < -1$, $t > 1$ с тем лишь требованием, чтобы

$$\int_{-\infty}^{-1} |\ell_1(t+1, 1)| \exp(cs) ds < \infty, \quad \int_1^{\infty} |\ell_2(t-1, -1)| \exp(-cs) ds < \infty$$

для некоторого числа $c > 0$.

Пусть число $d > c$ таково, что в полуплоскостях $\text{Im } z \leq -d$, $\text{Im } z \geq d$ не имеют нулей функции $1 + L_1(z, 1)$, $1 + L_2(z, -1)$ соответственно. Обозначим

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - id}^{+\infty - id} \frac{L_1(\zeta, 1) \exp(-i\zeta, t) d\zeta}{1 + L_1(\zeta, 1)}, \\ \rho_2(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + id}^{+\infty + id} \frac{L_2(\zeta, -1) \exp(-i\zeta, t) d\zeta}{1 + L_2(\zeta, -1)}. \end{aligned}$$

Пусть a_{km} — коэффициенты в суммах

$$\sum_{m=1}^{v_k} \frac{a_{km} i^k (k-1)!}{(z - z_k)^m},$$

представляющих собой главные части разложений функции

$$\frac{F(z)}{(1 + L_1(1, z))(1 + L_2(-1, z))}$$

в ряд Лорана в окрестностях точек z_k , $k=1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 \exp(izt) dt \int_{t-1}^0 \ell_1(1, s-t+1) (g(s) + \int_{-1}^s \rho_2(s-\tau) g(\tau) d\tau) ds + \\ &+ \int_{-1}^0 \exp(izt) dt \int_0^{t+1} \ell_2(-1, s-t-1) (g(s) + \int_s^1 \rho_2(s-\tau) g(\tau) d\tau) ds. \end{aligned}$$

Наконец, обозначим

$$r_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{L_1(1, \zeta) + L_2(-1, \zeta) + L_1(1, \zeta)L_2(-1, \zeta)}{(1+L_2(1, \zeta))(1+L_2(-1, \zeta))} \exp(-i\zeta t) d\zeta,$$

$$r_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} \frac{L_2(-1, \zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta}{1+L_2(-1, \zeta)}, \quad h(t) = \sum_{k=1}^n \exp(-iz_k t) \sum_{m=1}^{v_k} a_{km} t^{k-1}.$$

Теорема. Уравнение (1) безусловно разрешимо, и его единственное решение имеет вид: при $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & g(t) + h(t) + \int (\rho_1(t-s) + \ell_2(-1, s-t-1)) g(s) ds + \int_1^t r_1(t-s) g(s) ds + \\ & + \int_1^t \ell_2(-1, s-t-1) ds \int_1^s \rho_1(s-\tau) g(\tau) d\tau - \int_{-1}^0 \ell_1(1, s-t+1) \left(g(s) + \int_1^s \rho_2(s-\tau) g(\tau) d\tau \right) ds + \\ & + \int_1^t r_1(t-s) (g(s) + \int_1^s (\rho_1(s-\tau) + \ell_2(-1, \tau-s-1)) g(\tau) d\tau - \int_{-1}^0 \ell_1(1, \tau-s+1) g(\tau) d\tau + \\ & + \int_1^s \ell_2(-1, \tau-s-1) d\tau \int_1^{\tau} \rho_1(\tau-\delta) g(\delta) d\delta - \int_{-1}^0 \ell_1(1, \tau-s+1) d\tau \int_1^{\tau} \rho_1(\tau-\delta) g(\delta) d\delta) ds, \end{aligned}$$

а при $-1 < t < 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & g(t) + h(t) + \int (\rho_2(t-s) + r_2(t-s)) g(s) ds + \int_{-1}^t r_2(t-s) ds \int_{-1}^s \rho_2(s-\tau) g(\tau) d\tau - \\ & - \int_1^t r_1(t-s) (g(s) + \int_1^s (\rho_1(s-\tau) + \ell_2(-1, \tau-s-1)) g(\tau) d\tau + \int_1^s \ell_2(-1, \tau-s-1) d\tau \times \\ & \times \int_1^{\tau} \rho_1(\tau-\delta) g(\delta) d\delta - \int_{-1}^0 \ell_1(1, \tau-s+1) g(\tau) d\tau - \int_{-1}^0 \ell_1(1, \tau-s+1) d\tau \int_{-1}^{\tau} \rho_2(\tau-\delta) g(\delta) d\delta) ds. \end{aligned}$$

Приведем пример уравнения (1):

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \frac{1}{6} \int_1^t (2-9t+3s+6ts+s^3-3ts^2) \varphi(s) ds + \\ + \frac{1}{6} \int_0^t (2-9s+3t+6ts+t^3-3st^2) \varphi(s) ds + \\ + \frac{1}{6} \int_{t-1}^0 (2+3(t-s)+(t-s)^3) \varphi(s) ds = \frac{3}{4} (t^2-2t+3), \quad 0 < t < 1, \\ \varphi(t) + \frac{1}{6} \int_0^{t+1} (2-3(t-s)-(t-s)^3) \varphi(s) ds + \\ + \frac{1}{6} \int_t^0 (2+9s-3t+6ts-t^3+3st^2) \varphi(s) ds + \\ + \frac{1}{6} \int_{-1}^t (2+9t-3s+6ts-s^3+3ts^2) \varphi(s) ds = \frac{3}{4} (t^2+2t+3), \quad -1 < t < 0. \end{aligned}$$

Найденное решение примера есть функция $\varphi(t) = 1$, $-1 < t < 1$.

1. Черский Ю. И. // Математические методы и физико-механические поля. 1982. Вып. 15. С. 3.

2. Шилин А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1996. № 1. С. 66.

3. Он же // Красные задачи, специальные функции и дробное исчисление. Междунар. конф. Мн., 1996. С. 111.

4. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.

Поступила в редакцию 01.10.96.

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНКИ ХЬЮБЕРА

The method of forecasting of time series with trend, that uses a Huber estimator, is presented. This method is investigated on robustness under distortions—"outliers". The comparison of the presented method and the classical OLS-method of forecasting in terms of robustness is given.

Введение

Задача статистического прогнозирования временных рядов является одной из важнейших в статистическом анализе данных и актуальна для различных областей человеческой деятельности: физики, биологии, социологии, медицины, экономики и т.д. К настоящему времени существует набор методов оптимального прогнозирования для так называемых "классических" моделей временных рядов — моделей, не подверженных искажениям [1,2]. Однако на практике анализируемые временные ряды зачастую содержат искажения различного типа. Поэтому одним из основных направлений в статистическом прогнозировании временных рядов является анализ устойчивости имеющихся методов прогнозирования и построение новых методов, устойчивых к искажениям разных типов [3].

В этой статье рассмотрен метод прогнозирования временных рядов с трендом с использованием оценки Хьюбера и проведено его исследование на устойчивость при наличии искажений типа "выбросов", а также дано сравнение этого метода и классического МНК-метода прогнозирования с точки зрения устойчивости.

Модель временного ряда с трендом при наличии "выбросов"

Модель временного ряда с трендом при наличии "выбросов" может быть записана следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} y_t &= f(t, \theta^0) + u_t, \\ x_t &= y_t + \xi_t v_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ — дискретное время, T — длина наблюдаемого временного ряда, $\{u_t\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$, $\{v_t\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону $N(0, K\sigma^2)$, $K > 1$, $\{\xi_t\}$, $\xi_t \in \{0, 1\}$ — последовательность независимых случайных величин Бернулли:

$$P\{\xi_t = 1\} = \varepsilon, \quad P\{\xi_t = 0\} = 1 - \varepsilon,$$

$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+$ — вероятность появления "выброса" в момент времени t (уровень искажений), $\varepsilon_+ < 1$ — известный максимальный уровень искажений, $f(t, \theta^0)$ — функция тренда временного ряда, $\theta^0 = (\theta_j^0) \in R^m$ — неизвестный m -вектор параметров модели (1), x_t — наблюдаемое значение временного ряда в момент времени t . Последовательности $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{\xi_t\}$ предполагаются взаимно независимыми.

Для модели (1) будем полагать, что функция тренда $f(t, \theta^0)$ может быть записана в виде разложения

$$f(t, \theta^0) = (\theta^0)' \psi(t) = \sum_{j=1}^m \theta_j^0 \psi_j(t) \quad (2)$$

по m линейно независимым функциям $\{\psi_j(t)\}$, где штрих означает транспонирование.

Меры устойчивости прогнозирования

Для проведения исследования устойчивости прогнозирования будем использовать следующие меры устойчивости [3]:

— риск прогнозирования, равный среднеквадратической ошибке прогноза на глубину τ :

$$r_{\varepsilon}(T, \tau) = E\left\{\left(\hat{y}_{T+\tau} - y_{T+\tau}\right)^2\right\}; \quad (3)$$

— гарантированный риск прогнозирования:

$$r_+(T, \tau) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+} r_{\varepsilon}(T, \tau); \quad (4)$$

— коэффициент неустойчивости риска:

$$\kappa(T, \tau) = \frac{r_+(T, \tau) - r_0}{r_0}, \quad (5)$$

где $r_0 = r_0(T, \tau) > 0$ — риск прогнозирования в случае отсутствия искажений.

Метод прогнозирования с использованием оценки Хьюбера и его устойчивость к искажениям типа "выбросов"

Опишем метод прогнозирования временных рядов с трендом с использованием оценки Хьюбера [4]:

$$\hat{y}_{T+\tau} = f(T + \tau, \hat{\theta}), \quad (6)$$

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{i=1}^T \rho(x_i - \theta' \psi(i)), \quad (7)$$

$$\varphi(z) = \rho'(z) = \max\{-L, \min\{L, z\}\}, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}$ — оценка вектора параметров θ^0 , τ — глубина прогноза, $\hat{y}_{T+\tau}$ — прогноз. Величина L определяется как корень следующего уравнения:

$$\frac{\sqrt{2}e^{-L^2/2}}{\sqrt{\pi}L} - 2\Phi(-L) = \varepsilon(1 - \varepsilon), \quad (9)$$

$\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Введем следующие обозначения: $(T \times m)$ -матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_m(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(T) & \psi_2(T) & \dots & \psi_m(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(1) \\ \psi'(2) \\ \dots \\ \psi'(T) \end{pmatrix},$$

$(T \times T)$ -матрица $H = \Psi(\Psi' \Psi)^{-1} \Psi'$, h — максимальный диагональный элемент матрицы H .

Теорема. Если прогнозируемый временной ряд удовлетворяет модели (1), (2) и выполнены следующие условия: $c_1)$ $T > m$; $c_2)$ $|\Psi' \Psi| \neq 0$; $c_3)$ имеет место асимптотика: $hm^2 \rightarrow 0$, то для риска прогнозирования (3) метода (6)–(8) верно следующее асимптотическое разложение:

$$r_{\varepsilon}(T, \tau) = \sigma^2 + \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} \psi'(T + \tau) (\Psi' \Psi)^{-1} \psi(T + \tau) + o_1, \quad (10)$$

где

$$A(\varepsilon) = \frac{L^2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} - \Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{2\sigma^2}{L^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) \right) + \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \left(L^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{L^2}{2(1+K)\sigma^2}\right) \right) + \right.$$

$$+ 2\sigma^2 \left((1+K) \Gamma \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2(1+K)\sigma^2} \right) - \Gamma \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{L^2}{2\sigma^2} \right) \right) \\ B(\varepsilon) = \left(2\Phi \left(\frac{L}{\sigma} \right) - 1 + 2\varepsilon \left(\Phi \left(\frac{L}{\sqrt{1+K}\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{L}{\sigma} \right) \right) \right)^2, \\ \Gamma(a, z_0, z_1) = \Gamma(a, z_0) - \Gamma(a, z_1),$$

$\Gamma(\cdot)$ — неполная гамма-функция, o_1 — остаточный член разложения более высокого порядка малости, чем главный член.

Доказательство проводится вычислением асимптотического разложения матрицы ковариаций оценки Хьюбера (7), (8), согласно [4], и последующей подстановкой полученного результата в формулу риска прогнозирования, полученную в [3].

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то для коэффициента неустойчивости риска (5) метода (6)–(8) верно следующее асимптотическое разложение:

$$\kappa(T, \tau) = \sigma^2 + \frac{A(\varepsilon_+)B(0) - A(0)B(\varepsilon_+)}{A(0)B(\varepsilon_+)} \psi'(T + \tau)(\Psi'\Psi)^{-1}\psi(T + \tau) + o_2,$$

где o_2 — остаточный член разложения более высокого порядка малости, чем главный член.

Сравнение метода прогнозирования с использованием оценки Хьюбера и классического метода прогнозирования

Для сравнения методов прогнозирования с точки зрения устойчивости были рассмотрены временные ряды, удовлетворяющие модели (1)–(2):

1) **Временной ряд 1.** $T=15$, $m=3$, $(\theta^0)'=(1; 0,1; 0,01)$, $\psi'(t)=(1;t;t^2)$, $\sigma^2=0,09$, $K=50$;

2) **Временной ряд 2.** $T=15$, $m=3$, $(\theta^0)'=(1; 0,5; 0,6)$, $\psi'(t)=(1;\cos(t);\cos(2t))$, $\sigma^2=0,09$, $K=50$.

Для этих временных рядов вычислены величины риска прогнозирования метода с использованием оценки Хьюбера (10) и классического МНК-метода [3] при уровне искажений $\varepsilon \in \{0; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3\}$ и глубине прогноза $\tau = 1,5$. Результаты вычислений риска для временных рядов 1, 2, а также величины отношения $\Delta = r_{OLS}/r_{Huber}$, где r_{OLS} и r_{Huber} — риск прогнозирования для МНК-метода и метода с использованием оценки Хьюбера, приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

Глубина прогноза	Показатель	Уровень искажений				
		0,00	0,10	0,20	0,25	0,30
1	r_{OLS}	0,161	0,518	0,875	1,054	1,233
	r_{Huber}	0,162	0,201	0,247	0,274	0,307
	Δ	0,994	2,577	3,543	3,847	4,016
5	r_{OLS}	0,485	2,460	4,435	5,422	6,410
	r_{Huber}	0,489	0,704	0,956	1,110	1,290
	Δ	0,992	3,494	4,639	4,885	4,969

Таблица 2

Глубина прогноза	Показатель	Уровень искажений				
		0,00	0,10	0,20	0,25	0,30
1	r_{OLS}	0,116	0,248	0,380	0,446	0,512
	r_{Huber}	0,117	0,131	0,148	0,158	0,170
	Δ	0,991	1,893	2,568	2,823	3,012
5	r_{OLS}	0,103	0,168	0,233	0,265	0,297
	r_{Huber}	0,103	0,110	0,118	0,123	0,129
	Δ	1,000	1,527	1,975	2,154	2,302

Данные таблиц свидетельствуют о преимуществе алгоритма (6)–(8) с точки зрения устойчивости.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. М., 1977.
3. Kharin Yu. S., Fursa R. A. // Proc. of the Inter. conference CDAM'95. V.1. 1995. P.47.
4. Хьюбер П. Дж. Робастность в статистике. М., 1984.

Поступила в редакцию 24.09.96.

УДК 517.977

Е.А.РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ И ПРОИЗВОДНЫМ

Stabilization of linear dynamic systems in inertial controls class presenting continuous functions with bounded derivatives is described. An auxiliary of optimal control is used for dynamic systems stabilization. The article proves that the optimal feedback auxiliary problem serves as stabilizing feedback for dynamic systems. Stabilization algorithm based on real time construction of positional solutions of optimal control auxiliary problem is described. The result are illustrated by examples dynamic system stabilization of the fourth order.

Введение

Проблема стабилизации является одной из центральных проблем теории управления. В классической теории управления стабилизация динамических систем осуществлялась линейными обратными связями, структура которых задавалась заранее, и при этом не накладывались ограничения на значения управляющих воздействий [1–3]. С возникновением теории оптимального управления появилась возможность не только не задавать заранее структуру обратной связи, но и учитывать ограничения на значения управляющих воздействий [4].

В реальных задачах используются ограниченные управления, которые могут менять свои значения лишь с ограниченной (иногда очень большой) скоростью. В данной работе подобные управления применяются для стабилизации динамических систем. Задача построения стабилизирующих обратных связей решается методами оптимального управления. В работе на примере стабилизации динамической системы четвертого порядка показывается, что для реализации обратных связей можно построить стабилизатор, эффективно решающий проблему стабилизации ограниченными управлениями с ограниченными производными.

Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния системы в момент времени t , $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, — постоянные матрица и вектор, такие что $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$.

Выберем числа $h > 0$, $0 < L < \infty$, $0 < L_1 < \infty$. Функцию $u(t)$, $t \geq 0$, назовем программным управлением, если она: 1) непрерывна; 2) кусочно-линейна: $u(t) = u(\tau) + v(\tau)(t - \tau)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; 3) ограничена: $|u(t)| \leq L$, $t \geq 0$; 4) имеет ограниченную производную: $|v(t)| \leq L_1$, $t \geq 0$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему управления вида:

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1} = v. \quad (2)$$

Функцию $v(t)$, $t \geq 0$, назовем программным управлением для системы (2), если она: 1) кусочно-постоянна: $v(t) = v_k$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$; 2) соответствующая ей компонента $x_{n+1}(t)$ траектории системы (2) удовлетворяет неравенству: $|x_{n+1}(t)| \leq L$, $t \geq 0$; 3) $|v(t)| \leq L_1$, $t \geq 0$.

Пусть G — некоторая окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1).

Функцию $v(x, x_{n+1})$, $x \in G$, $|x_{n+1}| \leq L$, назовем стабилизирующей обратной связью, если: 1) $v(0, 0) = 0$, $v(x, x_{n+1}) \leq L_1$, $x \in G$, $|x_{n+1}| \leq L$; 2) реализация $v(x(t), x_{n+1}(t))$, $t \geq 0$, вдоль каждой траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1} = v(x, x_{n+1}), \quad x(0) \in G, \quad |x_{n+1}(0)| \leq L, \quad (3)$$

является программным управлением; 3) траектория $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, системы (3) на промежутке $[kh, (k+1)h]$, $k=0, 1, 2, \dots$ совпадает с решением системы (2) при $v(t) = v(x(kh), x_{n+1}(kh))$; 4) система (3) асимптотически устойчива в $G \times [-L, L]$.

Из определения стабилизирующей обратной связи следует, что в процессе управления достаточно знать лишь значения $v(t) = v(x(t), x_{n+1}(t))$, $t \geq 0$, вдоль стабилизируемой траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t \geq 0$.

Устройство, которое при выбранном h способно в режиме реального времени в процессе стабилизации вычислять функции $v(kh) = v(x(kh), x_{n+1}(kh))$, $k=0, 1, 2, \dots$, назовем дискретным стабилизатором. Для построения стабилизирующей обратной связи привлекается задача оптимального управления.

Вспомогательная задача оптимального управления

Выберем натуральное число $N > 0$, $n < N < \infty$, и рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$B(z, z_{n+1}) = \min_0^{Nh} \int |x_{n+1}(t)| dt, \quad (4)$$

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1} = v, \quad x(0) = z, \quad x_{n+1}(0) = z_{n+1}, \quad (5)$$

$$x(Nh) = 0, \quad x_{n+1}(Nh) = 0, \quad (6)$$

$$|x_{n+1}(t)| \leq L, \quad (7)$$

$$|v(t)| \leq L_1, \quad t \in [0, Nh]. \quad (8)$$

Будем предполагать, что для задачи (4)–(8) выполняется условие

$$\text{rank}(b, Db, \dots, D^{n-1}b) = n, \quad (D = \exp Ah). \quad (9)$$

Функцию $v^0(kh|z, z_{n+1})$, $k=0, N$, удовлетворяющую ограничению (8), назовем оптимальным программным управлением задачи (4)–(8), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t|z)$, $x_{n+1}^0(t|z_{n+1})$, $t \in [0, Nh]$, системы (5) выполняются ограничения (6), (7) и критерий качества (4) достигает минимального значения.

Обозначим через G — множество таких векторов $z \in R^n$, при которых задача (4)–(8) имеет решение для начальных условий $z \in G$, $|z_{n+1}| \leq L$.

Функцию $v^0(z, z_{n+1}) = v^0(0|z, z_{n+1})$, $z \in G$, $|z_{n+1}| \leq L$, будем называть оптимальным стартовым управлением типа обратной связи.

Стабилизирующая обратная связь

Покажем, что функция

$$v(x, x_{n+1}) = v^0(x, x_{n+1}), \quad x \in G, \quad |x_{n+1}| \leq L, \quad (10)$$

является стабилизирующей обратной связью.

Из задачи (4)–(8) следует, что $v^0(0, 0) = 0$, каждая реализация $v(t) = v^0(x(t), x_{n+1}(t))$, $t \geq 0$, вдоль траектории $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, системы (3) является программным управлением.

Методом функций Ляпунова [5, 6] покажем, что обратная связь (10) является стабилизирующей. В качестве функции Ляпунова рассмотрим оптимальное значение критерия качества $B(z, z_{n+1})$ вспомогательной задачи (4)–(8). Ясно, что $B(z, z_{n+1})$ — непрерывная функция, $B(0, 0) = 0$, $B(z, z_{n+1}) > 0$, при $z \neq 0$, $z_{n+1} \neq 0$.

Рассмотрим замкнутую систему (3) с обратной связью (10) и обозначим через $x(\tau)$, $x_{n+1}(\tau)$, ее состояние в произвольный текущий момент $\tau = kv$, соответствующее произвольному начальному состоянию $x(0) = z$, $x_{n+1}(0) = z_{n+1}$.

$z \in G, |z_{n+1}| \leq L$. Функция Ляпунова $B(z, z_{n+1})$ на состоянии $x(\tau), x_{n+1}(\tau)$, принимает значение $B(x(\tau), x_{n+1}(\tau))$.

Задача (4)–(8) эквивалентна следующей задаче кусочно-линейного программирования:

$$B(z, z_{n+1}) = \min \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^j v_i h + z_{n+1} \right|, \\ \sum_{j=0}^{N-1} g_j v_j = -F(Nh)z - F^1(Nh)z_{n+1}, \quad \sum_{j=0}^{N-1} v_j h = -z_{n+1}, \quad (11) \\ \left| \sum_{j=0}^k v_j h + z_{n+1} \right| \leq L, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad |v_j| \leq L_1, \quad j = \overline{0, N-1},$$

где $g_j = \int_{jh}^{(j+1)h} F^1(Nh-t) dt$, $F(t) \in R^{n \times n}$, $t \geq 0$, — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = Ax$, матрица $F^1(t) \in R^{n \times 1}$, $t \geq 0$, является блочной компонентой фундаментальной матрицы $\bar{F}(t) \in R^{(n+1) \times (n+1)}$, $t \leq 0$, решений расширенной системы $\dot{x} = Ax + bx_{n+1}$, $\dot{x}_{n+1} = 0$:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F & F^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

($0 \in R^{1 \times n}$ — нулевая матрица), v_j — значение управления $v(t)$ на промежутке $[jh, (j+1)h]$, $j = \overline{0, N-1}$.

Обозначим: $v^0(\tau) = (v_j^0, j = \overline{0, N-1})$ — оптимальный план, $K^0(\tau, I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ — оптимальная опора [7] задачи (11), $I_{\text{оп}} \subset I = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+1+N\}$ — множество индексов опорных строк, $J_{\text{оп}} \subset J = \{1, \dots, N\}$ — множество индексов опорных столбцов, $|I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$.

Под действием управления $v(\tau) = v^0(x(\tau), x_{n+1}(\tau))$ система (5) в момент $\tau + h$ окажется в состоянии $(x(\tau + h), x_{n+1}(\tau + h))$. Управление $v(jh) = v^0((j+1)h | x(\tau), x_{n+1}(\tau))$, $j = \overline{0, N-2}$, $v((N-1)h) = 0$ является допустимым для задачи (11) с начальным условием $(z = x(\tau + h), z_{n+1} = x_{n+1}(\tau + h))$. Критерий качества

$$B(x(\tau + h), x_{n+1}(\tau + h)) = \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^j v_i^0 h + x_{n+1}(\tau) \right| \leq \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^j v_i^0 h + x_{n+1}(\tau) \right| = B(x(\tau), x_{n+1}(\tau)).$$

Значит, и на оптимальном управлении $v^0(kh)$, $k = \overline{0, N-1}$, выполнится неравенство: $B(x(\tau + h), x_{n+1}(\tau + h)) \leq B(x(\tau), x_{n+1}(\tau))$.

Покажем, что равенства

$$B(x(\tau), x_{n+1}(\tau)) = B(x(\tau + h), x_{n+1}(\tau + h)) = \dots = B(x(\tau + Nh), x_{n+1}(\tau + Nh)) \quad (12)$$

могут выполняться не более, чем в течение N шагов.

Пусть равенства (12) выполняются в течение N шагов. Для получения оптимального управления $v^0(x(\tau + Nh), x_{n+1}(\tau + Nh))$ в момент $\tau + Nh$ стабилизатор решает задачу (4)–(8) с $z = x(\tau + Nh)$, $z_{n+1} = x_{n+1}(\tau + Nh)$. Эта задача эквивалентна следующей задаче кусочно-линейного программирования:

$$B(z, z_{n+1}) = \min \sum_{j=0}^{2N-1} \left| \sum_{i=0}^j v_i h + z_{n+1} \right|, \\ \sum_{j=0}^{N-1} g_j v_j + \sum_{j=N}^{2N-1} g_j v_j = -F(Nh)z - F^1(Nh)z_{n+1}, \quad (13)$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1} v_j h = -z_{n+1}, \quad \left| \sum_{j=0}^k v_j h + z_{n+1} \right| \leq L, \quad k = \overline{0, 2N-1},$$

$$v^0(\tau + jh | z, z_{n+1}) \leq v_j \leq v^0(\tau + jh | z, z_{n+1}), \quad j = \overline{0, N-1}, \quad |v_j| \leq L_1, \quad j = \overline{N, 2N-1}.$$

Задачу (13) сведем к эквивалентной задаче линейного программирования и будем решать двойственным методом [7]. Начальную опору задачи (13) построим по оптимальной опоре $K^0(\tau, J_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ следующим образом: заменим во множестве индексов $J_{\text{оп}}$ индексы $\{0, \dots, N-1\}$ на индексы $\{N, \dots, 2N-1\}$. В этом случае опорный план будет невырожденным. Среди оценок Δ_j , $j = N, 2N-1$ обязательно найдутся ненулевые, так как тождество $\Delta_N = \dots = \Delta_{2N-1} = 0$ противоречит предположению (9). Поэтому на оптимальном плане задачи (13) выполнится неравенство:

$$B(x(\tau + Nh), x_{n+1}(\tau + Nh)) < B(x(\tau), x_{n+1}(\tau)).$$

Таким образом, последовательность $\{B(x(kh), x_{n+1}(kh))\} \rightarrow 0$ при $k=0, 1, 2, \dots$. Отсюда легко показать, что $\|x(t)\| \rightarrow 0$, $|x_{n+1}| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Этим завершается доказательство стабилизирующего свойства обратной связи (10).

Алгоритм работы стабилизатора

Согласно определению, стабилизатор в момент времени $\tau = kh$ должен знать значение $v^0(kh | x(kh), x_{n+1}(kh))$ оптимального программного управления задачи (4)–(8) для состояния $z = x(kh)$, $z_{n+1} = x_{n+1}(kh)$. Эта задача эквивалентна задаче (11). В момент $\tau + h$ для выработки управления $v(\tau + h)$ стабилизатор должен знать решение задачи (4)–(8) при $z = x((k+1)h)$, $z_{n+1} = x_{n+1}((k+1)h)$.

Задача (11) в различные моменты времени τ и $\tau + h$, как и эквивалентная ей задача линейного программирования, отличается лишь векторами правых частей, и это отличие тем меньше, чем меньше h . Согласно теории линейного программирования [8], наиболее эффективным методом решения задачи (11) является двойственный метод, так как он позволяет за небольшое количество итераций построить оптимальную опору задачи (11) в момент времени $\tau + h$, если в качестве начальной опоры взята оптимальная опора задачи (11) в момент времени τ . Итерации двойственного метода на современных вычислительных машинах осуществляются за небольшое время. Если время, затраченное конкретным вычислительным устройством на построение новой опоры по старой опоре, меньше чем h , то можно говорить, что для данной задачи с помощью данного вычислительного устройства можно реализовать стабилизирующую обратную связь в режиме реального времени [9, 10].

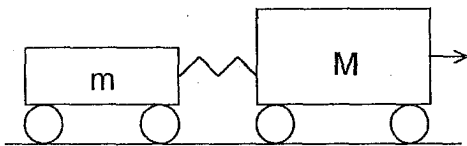


Рис.1.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации ограниченными инерционными управлениями двух материальных точек, соединенных упругой связью (рис.1).

Пусть поведение такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -9x_1 + 9x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = 3x_1 - 3x_3 + u, \quad \dot{u} = v \quad (14)$$

($x_1, x_2, x_3, x_4, u \in R$), где x_1, x_3 — отклонение первой и второй точек системы от состояний равновесия $x_1 = x_3 = 0$; x_2, x_4 — скорости этих точек; u — управляющее воздействие; v — скорость изменения управляющего воздействия.

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим задачу перевода двух материальных точек из произвольного состояния в состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $u = 0$ с минимальным расходом топлива.

Пусть в начальный момент $t=0$ рассматриваемая система находилась в состоянии $x_1(0)=0, 1$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0, 1$, $x_4(0)=0$, $u(0)=0$. Требуется перевести ее в момент Nh в состояние

$$x_1(Nh)=0, \quad x_2(Nh)=0, \quad x_3(Nh)=0, \quad x_4(Nh)=0, \quad u(Nh)=0. \quad (15)$$

При этом будем считать, что доступные управления представляют непрерывные кусочно-линейные функции $u(t)$, $t \geq 0$, с периодом квантования h , удовлетворяющие ограничениям

$$|u(t)| \leq L, \quad |\dot{u}(t)| \leq L_1, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Качество допустимых управлений будем оценивать по значению функционала

$$\int_0^{Nh} |u(t)| dt \rightarrow \min. \quad (17)$$

При решении задачи были выбраны следующие значения параметров: $L=1$, $L_1=3$. Приведем результаты вычислений.

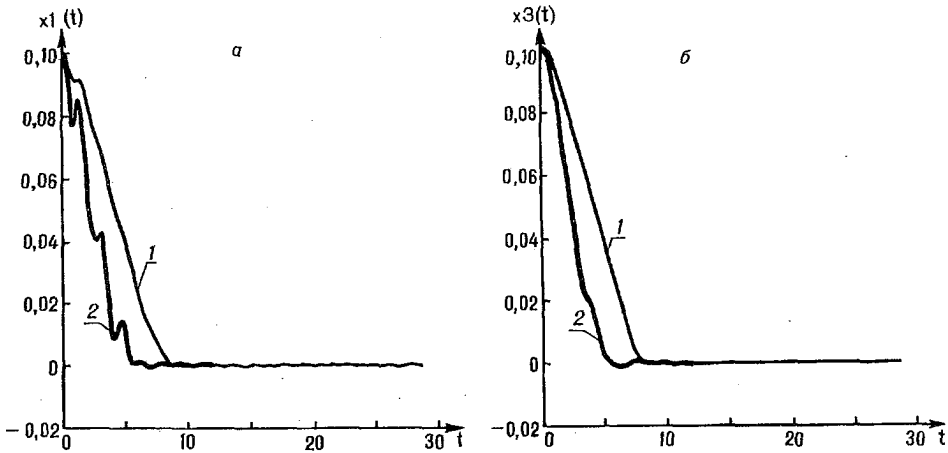


Рис.2.

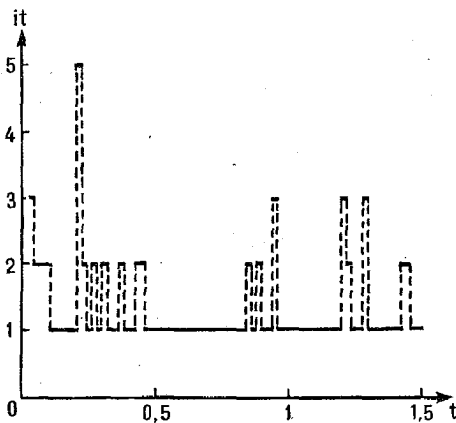


Рис.3.

На рис.2 представлены изменения первой и третьей координаты системы (14) по времени при фиксированном значении $N=20$ и различных значениях h . Кривая 1 соответствует $h=0,25$, кривая 2 — $h=0,15$. Процесс стабилизации останавливали в момент τ^* при выполнении условия $\|x(\tau^*), x_{n+1}(\tau^*)\| \leq 10^{-3} \|x_0, u_0\|$. При этом фиксировали момент τ_0 , при котором $\|x(\tau_0), x_{n+1}(\tau_0)\| \leq 10^{-2} \|x_0, u_0\|$. Для $h=0,25$ — $\tau^*=28,8$, $\tau_0=9,44$; для $h=0,15$ — $\tau^*=11,64$, $\tau_0=6,9$.

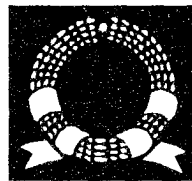
На рис.3 представлены данные о количестве итераций двойственного метода для решения вспомогательной задачи линейного программирования

в каждый момент времени $\tau=kh$, $k=1,2,\dots$ при $h=0,15$, $N=20$.

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
2. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., 1956.
3. Механика СССР за 50 лет. Теория оптимальных управляемых систем (Н.Н.Красовский). М., 1968.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. №3. С.67.
5. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
6. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного импульсного регулятора. М., 1967.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1: Линейные системы. Мн, 1984.
8. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., 1966.
9. Gabasov R., Kirillova F.M. // 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, June30-July5. San Francisco. 1996. V.D. P.231.
10. Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V. Optimal Feedback Control: Lecture Notes in Control and Information Sciences. London, 1995. V.207.

Поступила в редакцию 09.10.96.

Наши юбиляры



МИХАИЛ МИХАЙЛОВИЧ КОВАЛЕВ



Исполнилось 50 лет видному белорусскому ученому в области математической кибернетики, заведующему кафедрой математического обеспечения САПР Белорусского государственного университета, доктору физико-математических наук, профессору Михаилу Михайловичу Ковалеву.

М.М.Ковалев родился 2 мая 1947 г. в Новой веске Докшицкого района Витебской области. В 1969 г. окончил математический факультет Белгосуниверситета, в 1973 г. — аспирантуру. Кандидатскую диссертацию, посвященную методам оптимального планирования, выполнял под руководством проф. В.А.Емеличева. В 1980–1981 гг. М.М.Ковалев стажировался в Парижском, а в 1991 г. — в Монреальском университете, работал гостевым профессором в Германии, Польше, Болгарии, Голландии, Швеции, на Кубе, во Франции, с сотрудниками которых кафедра поддерживает научные контакты. Докторскую диссертацию, посвященную методам оптимального принятия решений, защитил в 1993 г. в Институте кибернетики (Киесв). Главные теоретические результаты: создание на основе матроидного подхода теории анализа точности алгоритмов и классификации задач дискретной оптимизации; существенное развитие полиэдральной комбинаторики; исследование моделей выпуклости в частично упорядоченных множествах.

С 1973 г. М.М.Ковалев работает в Белорусском государственном университете на должностях ассистента, доцента, заведующего кафедрой сначала АСУ, затем — САПР. В рамках методобъединения при Минвузе СССР М.М.Ковалев принимал активное участие в разработке учебных программ и становлении новой университетской специальности “прикладная математика”.

В период с 1984 по 1992 г. он руководил научными проектами в области создания экспертных систем анализа военно-экономических ситуаций, выполнявшихся по специальным постановлениям Совета Министров СССР (темы “Клен”, “Кедр”, “Коса”, “Раскат”), и создал ряд компьютерных систем анализа, экспертизы и прогноза развития ситуаций. В рамках конверсии системы внедрены на десятках предприятий, в организациях и банках стран СНГ и за рубежом, отмечены медалями различных выставок.

С 1993 г. М.М.Ковалев работал по совместительству в Верховном Совете — сначала в отделе стратегического анализа, затем советником Председателя Верховного Совета. Пять лет руководил методическим советом Минобразования Республики Беларусь по информационным технологиям, являлся членом Национального платежного комитета, членом экспертного Совета по экономическому развитию при Совете Министров Республики Беларусь, вице-президентом Ассоциации коммерческих банков, директором Центра банковских исследований, шеф-редактором журналов “Банковский бюллетень” и “Финансовый анализ”.

Он автор около 300 научных работ в области системного анализа, оптимального управления и проектирования макроэкономических, технических и информационных структур, в том числе автор и соавтор 6 монографий, 4 из которых переведены и изданы за рубежом.

М.М.Ковалев являлся руководителем 20 успешно защищенных кандидатских диссертаций и ряда научных проектов, выполненных по грантам зарубежных фондов.

Сердечно поздравляя Михаила Михайловича с юбилеем, преподаватели, сотрудники и студенты факультета прикладной математики и информатики, редколлегия журнала “Вестник БГУ” желают ему крепкого здоровья, счастья, новых творческих свершений.

ПЕТР ИЛЬИЧ МОНАСТЫРНЫЙ

14 апреля исполнилось 60 лет со дня рождения известного белорусского математика, заведующего кафедрой численных методов и программирования Белорусского государственного университета, доктора физико-математических наук, профессора Петра Ильича Монастырного.

П.И.Монастырный родился 14 апреля 1937 г. в семье рабочего в с. Крепь Калачевского района Сталинградской области.

В 1956 г. поступил на математический факультет Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина. Окончив его с отличием в 1961 г., продолжил учебу в аспирантуре Белгосуниверситета.

С 1964 по 1973 г. работал сначала в должности старшего преподавателя, а затем доцента кафедры вычислительной математики и заместителя декана математического факультета Белгосуниверситета. В 1973 г. на механико-математическом факультете была организована кафедра численных методов и программирования, которую возглавил Петр Ильич.

Основные научные работы профессора П.И.Монастырного посвящены актуальным вопросам построения, обоснования и применения численных методов для решения линейных и нелинейных граничных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, сеточных уравнений математической физики и других родственных граничных задач, важных в теоретическом и прикладном отношении. Научные результаты П.И.Монастырного определили новое перспективное направление в теории численных методов решения граничных задач для дифференциальных и сеточных уравнений. Практическое использование разработанных им методов показало их высокую эффективность. Научная деятельность ученого неоднократно получала высокую оценку академиков А.А.Самарского и Н.С.Бахвалова, член-корреспондентов А.Н.Коновалова и Г.А.Михайлова, академика АН Беларуси В.И.Крылова.

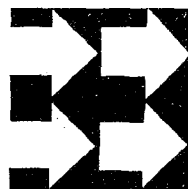
П.И.Монастырный — лауреат Государственной премии Беларуси в области науки и техники, соросовский профессор в области точных наук, член-корреспондент Международной славянской академии наук, образования, искусств и культуры, член Американского математического общества. Он является автором более 160 научных работ в области вычислительной математики, в том числе 11 монографий и учебников для студентов университетов, которые известны в Беларуси, странах ближнего и дальнего зарубежья.

П.И.Монастырный ведет большую педагогическую работу, он читает основные курсы, спецкурсы и спецсеминары, руководит курсовыми и дипломными работами, аспирантами и соискателями. Под его научным руководством защищено 9 кандидатских диссертаций.

Профессионализм ученого-математика, талант педагога, доброжелательность и внимание к коллегам по работе и студентам снискали П.И.Монастырному заслуженный авторитет у преподавателей и сотрудников коллектива кафедры, университета, широкого круга педагогов и ученых.

Коллектив механико-математического факультета и редколлегия журнала «Вестник БГУ» сердечно поздравляют Петра Ильича Монастырного с юбилеем и от всей души желают ему долгих лет жизни, крепкого здоровья, счастья, семейного благополучия, новых научных и творческих достижений.





УДК 33:517.925

Б. С. КАЛИТИН

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТИПА “ЭФФЕКТИВНАЯ КОНКУРЕНЦИЯ”

The mathematical model of the market of the n -competitors is represented in this paper.

Настоящая работа представляет собой попытку построения математической модели динамического развития цен на рынке товаров и услуг во времени, основанной на учете характера взаимодействия основных участников торговли — продавцов и покупателей, а также на учете результатов вмешательства внешних структур (государства, теневых группировок и т.п.). В отличие от известных моделей Вальраса—Леонтьева—Неймана [1] мы не используем соотношения типа “затраты—выпуск”, тесно связанные с производством и соответствующими условиями баланса. Предлагаемая модель касается акта торговли и общественных отношений между его участниками, порожденных преследуемыми каждой из сторон целями. В основу построения модели экономической системы отчасти положен метод динамических аналогий и в определенной степени проводится параллель со вторым законом Ньютона применительно к специально выбранной мере движения. В качестве такой меры выступает основное понятие рыночных отношений — цена единицы товара. Результат моделирования представлен в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих ряду заданных предположений относительно экономических взаимоотношений партнеров по рынку. При построении модели будем исходить из следующих допущений.

1) В каждый момент времени рынок обладает равновесием, т.е. существует фиксированный набор цен всех предлагаемых товаров, при которых планы покупателей и продавцов полностью совпадают.

2) На каждый товар “действуют” силы, порожденные каждым из участников рынка с целью изменения вектора цен в ту или иную сторону. К ним относятся: а) сила V_j , возникающая из-за естественного желания продавца j -го товара повысить цену, предлагая его по цене не ниже себестоимости; б) сила C_{ji} , характеризующая влияние i -го конкурента на цену j -го товара; в) сила D_j воздействия j -го товара на его цену в соответствии с законом спроса; г) сила G_j , отражающая эффект оказываемого влияния на цену j -го товара со стороны внешних структур (государственные налоги и законодательные акты, поборы в виде взяток, рэкет и т.п.). Список может быть продолжен. Сюда, к примеру, можно отнести силу, возникающую из-за такого явления, как недоверие покупателей к слишком низкой цене на вновь появившийся товар по сравнению с ценой товара общеизвестной марки такого

же назначения и не уступающий последнему по качеству (см. [2]). Это же относится и к силе воздействия рекламы на увеличение объемов продаж и т.п.

3) Имеет место **принцип независимости действия сил** для каждого товара, представленного на рынке. При этом результат изменения цены отдельного товара под действием сил зависит от величины их суммарного воздействия.

4) Выполняется следующий закон: скорость изменения цены на каждый товар равна взвешенной сумме всех действующих на этот товар сил. Таким образом, каждая сила имеет размерность скорости изменения цены товара в единицу времени.

Введем следующие обозначения: $p_j(t)$ — цена единицы j -го товара в момент времени t ; p_j^0 — равновесная цена j -го товара; $q_j(t)$ — количество единиц j -го товара, продаваемого в момент t ; q_j^0 — равновесное количество единиц j -го товара; p_j^* — пороговое значение цены j -го товара, связанное с осуществленными затратами; p_j^{**} — пороговое значение цены j -го товара, связанное с осуществленными затратами; p_j^* — пороговое значение цены j -го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать товар.

В соответствии с высказанными предположениями математическая модель принимает вид следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_j}{dt} = V_j(p_j^*, p_j^0, p_j) + \sum_{i=1, i \neq j}^n C_{ji}(p_j^0, p_j; p_i^0, p_i) + D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j) + G_j(q_j^0, q_j; p_j^0, p_j),$$

$$p_j^* < p_j < p_j^{**}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно требованиям 1) — 4), функции сил должны удовлетворять условиям:

$$V_j(p_j^*, p_j^0, p_j^0) = 0, \lim_{p_j \rightarrow p_j^{**} + 0} V_j(p_j^*, p_j^0, p_j) = +\infty, \frac{\partial V_j(p_j^*, p_j^0, p_j)}{\partial p_j} \leq 0;$$

$$\frac{\partial C_{ji}(p_j^0, p_j^0; p_i^0, p_i^0)}{\partial p_i} \geq 0 \text{ для } i \neq j \text{ и } \frac{\partial C_{ji}(p_j^0, p_j^0, p_i^0, p_i^0)}{\partial p_j} \leq 0; C_{ji}(p_j^0, p_j^0, p_i^0, p_i^0) = 0;$$

$$D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j^0) = 0, \lim_{p_j \rightarrow p_j^{**} - 0} D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j) = -\infty, \frac{\partial D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j)}{\partial p_j} < 0;$$

$$G_j(q_j^0, q_j^0; p_j^0, p_j^0) = 0, \frac{\partial G_j(q_j^0, q_j^0; p_j^0, p_j^0)}{\partial (q_j p_j)} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Среди функций-сил, удовлетворяющих этим условиям, простейшими, на наш взгляд, являются следующие:

$$V_j = -\frac{v_j(p_j - p_j^0)}{p_j - p_j^*}, C_{ji} = \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), D_j = -\frac{d_j(p_j - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j},$$

$$G_j = r_j q_j(p_j - p_j^0), q_j = q_j^0 - \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь коэффициенты $v_j, c_{ji}, d_j, r_j, \alpha_{ji}$ положительны.

Матрица системы линейного приближения в окрестности равновесия $p_j = p_j^0, j = 1, 2, \dots, n$, представляется в виде

$$A = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1, i \neq 1}^n c_{1i} - S_1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & -\sum_{i=1, i \neq 2}^n c_{2i} - S_2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{13} & c_{13} & -\sum_{i=1, i \neq 3}^n c_{3i} - S_3 & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \dots & -\sum_{i=1, i \neq n}^n c_{ni} - S_n \end{bmatrix}$$

Здесь использовано обозначение $S_j = \frac{v_j}{p_j^0 - p_j^*} + \frac{d_j}{p_j^{**} - p_j^0} - r_j q_j^0$.

Теорема. *Равновесные цены асимптотически устойчивы, если все главные последовательные миноры матрицы $-A$ строго положительны. Неустойчивость равновесных цен системы будет наблюдаться в том случае, когда один из этих миноров строго отрицателен.*

Можно показать, что необходимым условием определенной положительности матрицы $-A$ является неравенство $S_1 + S_2 + \dots + S_n > 0$. Условие же $S_j > 0$, $j=1, 2, \dots, n$, является достаточным условием определенной положительности матрицы $-A$. Последние неравенства можно трактовать, как **запас прочности** (стабильности) рыночных цен. Иначе говоря, запас прочности есть мера преобладания совместного действия сил сдерживания и сил торможения над действием сил роста цен. Отсутствие запаса прочности приводит к неустойчивости равновесия экономики рынка. Такая неустойчивость может возникнуть по следующим причинам: а) чрезмерно высокие налоги, т.е. большое значение r_j ; б) значительный объем продаж (большое значение q_j^0); в) недостаточно мощная конкуренция (малое значение v_j); г) относительно высокие доходы продавцов (большое значение разности $p_j^0 - p_j^{**}$); д) относительно высокая покупательная способность потребителей (большое значение $p_j^{**} - p_j^0$). И наоборот, при достаточно малом значении r_j система становится асимптотически устойчивой.

1. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост: Многоотраслевой анализ. М., 1972.

2. Долан Э. Дж., Линдсей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992. С.91.

Поступила в редакцию 09.01.96.

УДК 681.328:681.326.3

В.И.ЛЕБЕДЕВ, А.М.ОРАНСКИЙ, А.А.КОЛЯДА

АЛГОРИТМЫ ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ “ЦИФРА ЗА ЦИФРОЙ” И МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

The two- and three-dimensional vectors rotation based on the different-iterative and modular arithmetic methods is proposed.

Пусть $R(x_0, y_0)$ — исходный вектор, заданный проекциями x_0, y_0 в прямоугольной декартовой системе координат XOY . После его поворота на угол φ_i ($i=1, 2, \dots$) результирующий вектор $R(x_i, y_i)$ будет определяться составляющими

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & q_i \sin \varphi_i \\ -q_i \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $q_i = \pm 1$ — оператор направления вращения вектора.

При аппаратной реализации алгоритма (1) требуются большие затраты оборудования на вычисление синусно-косинусных функций. Уменьшить эти затраты позволяет такое вращение вектора, когда его конец перемещается не по окружности, а по некоторой траектории, близкой к ней. Для этого в формулах (1), описывающих поворот вектора $R_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ на угол φ_i , заменим функцию $\cos \varphi_i$ выражением $\cos \varphi_i = 1 - K_i \sin^2 \varphi_i$, где K_i ($1/2 < K_i < 1$) — некоторый коэффициент, зависящий от угла поворота вектора R_{i-1} . Положим для упрощения аппаратной реализации $\sin \varphi_i = 2^{-i}$. Тогда система (1) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & q_i B_i \\ -q_i B_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $A_i = 1 - K_i 2^{-2i}$; $B_i = 2^{-i}$; $K_i = 2^{2i} - 2^i \sqrt{2^{2i} - 1}$; $i = \overline{1, n}$.

Поворот вектора, согласно алгоритму (2), требует выполнения двух операций умножения (x_{i-1} и y_{i-1} на A_i) на каждом итерационном шаге. Эти операции можно заменить операциями сдвига и сложения, если разложить коэффициент A_i в биномиальный ряд:

$$A_i = 1 - K_i 2^{-2i} = \sqrt{1 - 2^{-2i}} = 1 - \frac{1}{2} 2^{-2i} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} 2^{-4i} - \dots$$

и вычислить коэффициенты ряда $C_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}$ по формуле Валлиса:

$$C_k \approx \sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}}. \text{ Округляя } C_k \text{ до ближайшей степени двойки: } C_k \approx 2^{-k'},$$

$$k' = \left\lceil \log_2 \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \right\rceil, \text{ получим}$$

$$A_i \approx 1 - 2^{-2i-1} + 2^{-4i-1} - 2^{-6i-2} + 2^{-8i-2} - \dots + (-1)^n 2^{-2ni-n'}. \quad (3)$$

Таким образом, с учетом разложения (3), алгоритм (2) требует выполнения $2(n+1)$ операций сдвига и $2(n+1)$ операций суммирования, что в 2 раза меньше, чем число операций, необходимое при вращении вектора согласно алгоритму, приведенному в работе [1].

Теорема. Для сходимости алгоритма (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1) \lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = 0; \quad 2) (|Q_i| - |Q_{i+1}|) / |Q_{i+1}| \leq 3; \quad 3) Q_i \leq 3 \sum_{l=2}^n Q_l,$$

$$\text{где } Q_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Доказательство теоремы аналогично приведенному в работе [1].

Неравенство (3) определяет область сходимости:

$$|Q_{\max}| \leq 3\sqrt{2}|R|(1 - (1/2)^{n-1}).$$

Она примерно в 2 раза шире областей сходимости алгоритма [1] и алгоритма КОРДИК [2], которые соответственно равны

$$|Q'_{\max}| \leq 2|R|(1 - (1/4)^{n-1}), \quad |Q''_{\max}| \leq 2|R|(1 - (1/2)^{n-1}).$$

При синхронной организации итерационных процессов максимальное и среднее число итераций для алгоритма (2) равны: $N_{\max} = 4n$, $N_{\text{mid}} = 5n/2$, для алгоритма [1] — $N'_{\max} = 7n$, $N'_{\text{mid}} = 4n$, а для алгоритма КОРДИК —

$N''_{\max} = 2n$, $N''_{\text{mid}} = 3n/2$, т.е. по скорости сходимости алгоритм (2) занимает промежуточное положение. Распространяя его на случай вращения трехмерного вектора $R(x_0, y_0, z_0)$, получим рекуррентные соотношения для составляющих x_i, y_i, z_i :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & \alpha_i C_i & B_i \\ -\alpha_i B_i & A_i & 0 \\ -\beta_i C_i & -\alpha_i \beta_i D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь α_i и β_i — операторы поворота; $A_i = 1 - K_i 2^{-2i}$; $B_i = 2^{-i}$; $C_i = 2^{-i} - K_i 2^{-3i}$; $D_i = 2^{-2i}$; $K_i = 2^{2i} - 2^i \sqrt{2^{2i} - 1}$; $i = 1, n$.

Для выполнения алгоритма (4) необходимо $5(n+1)$ операций сдвига и $5(n+1)$ операций суммирования. Это в 1,6 раза меньше числа операций, что требуется при выполнении алгоритма [1].

На ЭВМ было проведено исследование точностных характеристик алгоритмов применительно к вычислению модулей векторов $R(x_0, y_0)$ и $R(x_0, y_0, z_0)$. Эксперименты для различных значений их составляющих выявили существенные точностные преимущества способов кругового вращения векторов по отношению к способам их псевдовращения. Так, для алгоритма [2] относительная погрешность вычисления модуля вектора $R(x_0, y_0)$ с проекциями $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ составила на 16-й итерации 10^{-8} , а для алгоритмов [1] и (2) — 10^{-10} , 10^{-9} . Однако по затратам оборудования методы кругового вращения сложнее методов псевдовращения. Эффективна их реализация в виде специализированных БИС- или СБИС-процессоров, например, на базовых матричных кристаллах, которые могут быть использованы в качестве сопроцессоров к серийно выпускаемым микропроцессорам или арифметическим устройствам для специализированных ЭВМ и цифровых процессоров сигналов. Для повышения помехозащищенности и отказоустойчивости специализированных процессоров целесообразно применять модулярные системы счисления. Эти системы позволяют обнаруживать и исправлять ошибки как при хранении и передаче числовой информации, так и при ее обработке. Производительность соответствующих процессоров составляет 10^7 операций в секунду при обеспечении получения функциональных значений с частотой 50 МГц [3].

1. Lebedev V., Oransky A. // Proc. SPIE. 1993. V.1976. P.336.

2. Volder J.E. // IRE Trans. Electron. Comput. 1959. V.EC-8(3). P.330.

3. Высокоскоростные методы и системы цифровой обработки информации // А.Ф.Чернявский, В.В.Даниленич, А.А.Коляда, М.Ю.Селянинов. Мн., 1996.

Поступила в редакцию 05.03.96.

УДК 517.9

И.В.КАШНИКОВА

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО РЕШЕНИЯМИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ

The approximation of solution of stochastic differential equation in Ito's form is considered.

На основе аппарата алгебр обобщенных случайных процессов в статье [1] предложена методика аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. В данной работе с помощью этой методики исследуется вопрос аппроксимации решения стохастического дифференциального уравнения вида:

$$X(t, w) = x_0 + (I) \int_0^t f(s, X(s, w)) dB(s, w) + \int_0^t g(s, X(s, w)) ds, \quad x_0 \in R, \quad (1)$$

где $f(s, u) \in C_B^2(R^2)$, $g(s, u) \in C_B^1(R^2)$, а стохастический интеграл понимается в смысле Ито. (Доказательство существования и единственности решения уравнения (1) см., напр., в [2, с. 271].)

Пусть

$$B_n(t, w) = \int_0^{1/n} B(t+u, w) \rho_n(u) du, \quad f_n(t, x) = \int_0^{1/n1/n} \int_0^{1/n1/n} f(t+u, x+v) \rho_n(u, v) dudv, \\ g_n(t, x) = \int_0^{1/n1/n} \int_0^{1/n1/n} g(t+u, x+v) \rho_n(u, v) dudv,$$

где $\rho_n(u)$, $\rho_n(u, v)$ — стандартные “шапочки” [3].

Рассмотрим $0=t_0 < t_1 < \dots < t_m = a$ — разбиение отрезка $T=[0, a]$. Без ограничения общности будем считать, что $t_k - t_{k-1} = h_n$, $k=1, \dots, m$.

Решение уравнения (1) будем аппроксимировать решением конечно-разностного уравнения с осреднением:

$$\begin{cases} X_n(t+h_n, w) - X_n(t, w) = f_n(t, X_n(t, w)) [B_n(t+h_n, w) - B_n(t, w)] + g_n(t, X_n(t, w)) h_n, \\ X_n / [0, h_n] = X_{0n}(t, w). \end{cases} \quad (2)$$

Подобные исследования проводились в работах [4], [5] и оказалось, что существенную роль играет зависимость между h_n и $1/n$. Для решения стохастического дифференциального уравнения вида:

$$X(t, w) = x_0 + (I) \int_0^t f(X(s, w)) dB(s, w) + \int_0^t g(s, w) ds$$

и решения соответствующего конечно-разностного уравнения аппроксимация достигается при $1/n = o(h_n^2)$. В данной работе такая оценка получена для более широкого класса уравнений.

Теорема 1. Пусть $Y_n(t, w)$ — решение конечно-разностного уравнения с запаздыванием:

$$\begin{cases} Y_n(t+h_n, w) - Y_n(t, w) = f_n(t-h_n, Y_n(t-h_n, w)) [B_n(t+h_n, w) - B_n(t, w)] + g_n(t, Y_n(t, w)) h_n, \\ Y_n / [-h_n, h_n] = X_{0n}(t, w), \end{cases} \quad (3)$$

тогда справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t \in T} E |X(t, w) - Y_n(t, w)|^2 \leq c \sup_{t \in [-h_n, h_n]} E |x_0 - X_{0n}(t, w)|^2 + ch_n + c / (nh_n),$$

где $X(t, w)$ — решение стохастического дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. Если $X_n(t, w)$, $Y_n(t, w)$ — решения задач (2) и (3) соответственно, то

$$\sup_{t \in T} E |X_n(t, w) - Y_n(t, w)|^2 \leq ch_n + c / (nh_n^2).$$

Следствие. Пусть $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n^2)$ и $\sup_{t \in [-h_n, h_n]} E |x - X_{0n}(t, w)|^2 \rightarrow 0$,

тогда решение конечно-разностного уравнения (2) аппроксимирует решение стохастического дифференциального уравнения (1), т.е.

$$\sup_{t \in T} E |X(t, w) - X_n(t, w)|^2 \rightarrow 0.$$

1. Лазакович Н. В. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39. № 3. С. 20.

2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.73.
4. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Юферова И. В. // Дифф. уравнения. 1995. №12. С.2080.
5. Лазакович Н. В. // Вести АН Беларуси. 1996. №2. С.22.

Поступила в редакцию 09.10.1996.

УДК 519.872

М.А.МАТАЛЫЦКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК В ОДНОЙ ИЗ СИСТЕМ СЕТИ

The steady-state probabilities of closed queuing networks with an arbitrary message servicing in one system are obtained.

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания (СМО), которая состоит из $n-1$ однолинейных СМО $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ с экспоненциальным обслуживанием со средними $\mu_i^{-1}, i = 1, n-1$. В системе S_n обслуживание предполагается произвольным с функцией распределения (ф.р.) времени обслуживания заявок $B_n(t)$. Дисциплины обслуживания в системах сети — FIFO. В [1] доказано следующее утверждение: пусть $G(t)$ — ф.р. времени ожидания в однолинейной СМО, тогда вероятность того, что по истечении времени η обслуживание заявки еще не будет завершено, равна

$\varphi(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} [1 - G(t)] dt / \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt$. Из данного утверждения следует, что если заявка находится на обслуживании в системе S_n , то ф.р. времени, оставшегося до конца ее обслуживания, определяется по формуле

$$B_n^1(\eta) = \mu_n \int_0^{\eta} [1 - B_n(\tau)] d\tau, \quad (1)$$

где μ_n — интенсивность обслуживания заявок в системе S_n . Пусть $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$, где $k_i(t)$ — число заявок в i -й СМО в момент времени t , p_{ni} — вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_n в систему S_i , $\sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} = 1$. Пусть $P(k)$ — вероятность состояния k в стационарном режиме, $P^1(k)$ — вероятность состояния k в сети в любой момент времени, непосредственно следующий после перехода некоторой заявки из одной СМО в другую.

Будем считать, что выполняется следующее предположение [2]: если сеть открыта, распределение состояния сети $P^1(k)$, учитывающего только остальные заявки (кроме той, которая переходит из одной СМО в другую), совпадает со стационарным по времени распределением $P(k)$, если сеть замкнута, то распределение состояния сети, учитывающего только остальные заявки, совпадает со стационарным по времени распределением состояния сети с уменьшенным на единицу количеством заявок. Из него следует, что для замкнутых сетей $P^1(k) = P(k)$.

Теорема. Справедливо следующее соотношение:

$$P(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \int_0^{\infty} P(k(\theta + \eta - 0) + I_n - I_i / k_0) [1 - B_n(\eta)] d\eta, \quad (2)$$

где I_i — вектор размерности n с нулевыми компонентами, за исключением i -й компоненты, которая равна 1; η — время между моментами выхода заявки из системы S_n и моментом последнего перехода некоторой заявки из одной СМО в другую, который произошел непосредственно перед ним,

этот момент обозначен через θ , $k(\theta)=k_0$, вероятность $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ совпадает с вероятностью состояний экспоненциальной сети с $\mu_n=0$.

Доказательство. Поскольку $k(\theta+\eta+0)=k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i$, то по формуле полной вероятности имеем

$$P(k(\theta+\eta+0)/k_0) = \sum_{i=1}^{n-1} P_{k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i, k(\theta+\eta+0)} P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0),$$

где $P_{k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i, k(\theta+\eta+0)}$ есть вероятность перехода сети из состояния $k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i$ в состояние $k(\theta+\eta-0)$ (вероятность перехода заявки после завершения обслуживания из системы S_n в систему S_i), т.е. равна p_{ni} . Вероятность $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ совпадает с вероятностью состояний экспоненциальной сети с $\mu_n=0$, поскольку за время $(\eta-0)$ обслуживание заявки в системе S_n не завершится. Применяя опять формулу полной вероятности, получаем

$$P(k(\theta+\eta+0)) = \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0).$$

Усредняя это соотношение по η с учетом (1), будем иметь

$$P(k(\theta+0)) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \int_0^\infty P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0) d \int_0^\eta [1-B_n(\tau)] d\tau,$$

откуда следует (2).

В [3] разработан метод последовательных приближений для нахождения вероятностей состояний марковских сетей в любой момент времени t . Его можно использовать при получении приближенных соотношений для вероятностей $P(k)$. Пусть $P_m(k)$ — приближение для $P(k)$, полученное на m -й итерации. Используя для m -го приближения вероятности $P(k(\theta+\eta-0)+I_n-I_i/k_0)$ указанный метод [3] при $\mu_n=0$ и при условии $k(\theta)=k_0$, получим

$$P_m(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \sum_{j=0}^\infty a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0) \int_0^\infty \eta^j [1-B_n(\eta)] d\eta.$$

Нахождение величин $a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0)$ рекуррентным образом подробно описано в [3]. Поскольку

$$\int_0^\infty \eta^j [1-B_n(\eta)] d\eta = \frac{1}{j+1} \int_0^\infty \eta^{j+1} dB_n(\eta) = \frac{m_{j+1}}{j+1},$$

где m_j — j -й начальный момент случайной величины с ф.р. $B_n(\eta)$, то последнее соотношение принимает вид

$$P_m(k) = \mu_n \sum_{k_0} P(k_0) \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} \sum_{j=0}^\infty a_{mj}(k+I_n-I_i/k_0, \mu_n=0) \frac{m_{j+1}}{j+1}. \quad (3)$$

Рассмотренные примеры показали, что выражение (3) является хорошим приближением для стационарных вероятностей состояний $P(k)$ уже при небольших значениях m .

1. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., 1963.
2. Sevcic K., Mitranic I. // J. of ACM. 1981. V.28. №2. P.232.
3. Маталыцкий М. А. // Автоматика и телемеханика. 1996. №9. С.79.

Поступила в редакцию 25.01.97.

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ ЕРУГИН (1907–1990)

14 мая 1997 г. исполнилось бы 90 лет выдающемуся математику, академику АН Беларуси Николаю Павловичу Еругину.

Н.П.Еругин родился в станице Великокняжеской (ныне г.Пролетарск Ростовской области Российской Федерации). После окончания в 1926 г. школы 2-й ступени он учился в Новочеркасском индустриально-земледельческом техникуме, затем поступил на физико-математический факультет Ленинградского государственного университета, а в 1932 г. стал аспирантом кафедры дифференциальных уравнений ЛГУ.

Завершив учебу, Николай Павлович преподавал в Ленинградском металлургическом институте и в Ленинградском институте киноинженеров. С 1935 по 1941 г. он доцент ЛГУ, а с 1939 по 1941 г. совмещал преподавательскую работу с научной в Ленинградском отделении математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. В 1937 г. защитил кандидатскую диссертацию.

В сентябре 1941 г. Н.П.Еругин ушел на фронт и сражался под Ленинградом. После тяжелых ранения в сентябре 1942 г. прибыл в Елабужский филиал ЛГУ. Здесь им была завершена большая работа по построению теории приводимых систем, за которую в 1943 г. ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

В послевоенный период Н.П.Еругин — заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор, декан математического факультета ЛГУ, директор Ленинградского отделения Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР.

В 1956 г. Николай Павлович избирается академиком АН БССР и переезжает на постоянное место жительства в Белоруссию. Н.П.Еругин является создателем белорусской школы по дифференциальным уравнениям, под его непосредственным руководством был организован Институт математики Академии наук Беларуси, открыт известный во всем мире научный журнал “Дифференциальные уравнения”. Учениками Н.П.Еругина являются несколько десятков кандидатов и 9 докторов наук.

С 1958 по 1972 г. Н.П.Еругин возглавлял кафедру дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета, руководил научным семинаром по дифференциальным уравнениям. Он является одним из создателей факультета прикладной математики.

Николай Павлович внес выдающийся вклад в аналитическую и качественную теорию дифференциальных уравнений, в теорию устойчивости движения. Ему принадлежит полное решение проблемы Пуанкаре для системы дифференциальных уравнений любого порядка, серьезное продвижение в решении проблемы Смирнова–Соболева, нахождение целых классов признаков ограниченности и неограниченности решений, построение теории приводимых систем, содержащей, в частности, постановку известной проблемы Н.П.Еругина “О правильности по Ляпунову линейной системы с квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами” и решенной лишь в начале 70-х гг., постановка проблемы классификации систем дифференциальных уравнений по характеру их подвижных особых точек. Многие из его идей воплощены в работах, посвященных решению фундаментальных проблем математики. Первоклассные результаты получены академиком Н.П.Еругиным в качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний и в теории устойчивости движения. Им решены также и ряд важных прикладных задач.

За выдающуюся научную и научно-организационную деятельность Н.П.Еругину в 1969 г. было присвоено звание Героя Социалистического Труда, он награжден многими орденами и медалями. Н.П.Еругин — лауреат Государственной премии СССР, заслуженный деятель науки БССР.

Всю свою жизнь Николай Павлович отдал беззаветному служению Отечеству, приумножению его научных и интеллектуальных ценностей, становлению и развитию науки в Беларуси.

И.В.Гайшун, В.И.Громак, Н.А.Изобов,
А.В.Козулиц, Н.А.Лукашевич, Н.И.Юрчук

ВЛАДИМИР СЕРГЕЕВИЧ КОНЮХ

18 января 1997 г. скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета Владимир Сергеевич Конюх.

В.С.Конюх родился 6 августа 1943 г. в д.Турець Кореличского района Гродненской области в семье крестьян. Отец его в 1944 г. был расстрелян немцами. Детские, школьные и юношеские годы Владимира Сергеевича прошли в тяжелое военное и послевоенное время. После окончания средней школы В.С.Конюх в 1960 г. поступил на математический факультет Белорусского государственного университета имени В.И.Ленина. Трудовую деятельность начал в 1965 г. в Институте математики АН БССР, куда был направлен после учебы в университете. В 1970 г. защитил диссертацию на тему: "Разрешимые подгруппы классических групп" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1975 г. утвержден в звании старшего научного сотрудника. С 1973 по 1982 г. В.С.Конюх работал заместителем директора по научной работе Института математики АН БССР. В 1982–1990 гг. — старший научный сотрудник лаборатории алгебры этого института. С 1990 г. и до конца своей жизни В.С.Конюх работал на кафедре высшей математики факультета прикладной математики и информатики сначала в должности доцента, а затем — профессора. В 1991 г. В.С.Конюх защитил в Институте математики АН Беларуси докторскую диссертацию на тему "Разрешимые и локально нильпотентные линейные группы".



Область научных интересов В.С.Конюха — теория разрешимых и локально нильпотентных линейных групп. Построение этой теории в случае алгебраического замкнутого поля было завершено к середине 60-х гг. Д.А.Супруненко и его учениками, а для произвольного поля — в 80-е гг. В.С.Конюхом. В частности, им найден критерий конечности числа классов сопряженных максимальных разрешимых подгрупп и получена классификация, с точностью до сопряженности, абсолютно неприводимых максимальных локально нильпотентных подгрупп в полной линейной группе, получена классификация p -подгрупп Силова проективной линейной группы.

Свою плодотворную научную деятельность В.С.Конюх успешно сочетал с активной педагогической работой: много лет руководил школой юных математиков при Институте математики, являлся одним из организаторов летней физико-математической школы "Зубренок", действующей и поныне. Профессор В.С.Конюх был высококвалифицированным педагогом, его лекции вызывали живой интерес у студентов, он искал и привлекал к научной работе способную и одаренную молодежь.

Жизнь В.С.Конюха была достаточно сложной и многогранной и преждевременная смерть не позволила ему завершить все задуманное. Несмотря на все невзгоды Владимир Сергеевич даже в самых сложных жизненных ситуациях всегда оставался оптимистом, умел и другим вселить надежду на лучшее будущее. Он очень любил природу родной Беларуси, ее язык, поэзию, музыку, и в этом, как говорил сам В.С.Конюх, заслуга его матери. Многие знают его страсть к рыбалке, помнят вечера, проведенные вместе у костра на берегу реки или озера.

Заслуги В.С.Конюха как ученого и педагога отмечены орденом "Знак почета" (1981 г.), почетным знаком Министерства высшего и среднего специального образования БССР "Отличник народного образования" (1985 г.), грамотами Президиума АН БССР, ЦК ВЛКСМ, Минпроса БССР.

Светлая память о Владимире Сергеевиче Конюхе, достойном сыне белорусского народа, ученом-математике, педагоге, романтике навсегда сохранится в сердцах и памяти всех, кто его знал.

Р.Т.Вольвачев, Н.А.Изобов, В.И.Корзюк, П.А.Мандрик

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12

Гринчук А.В., Ушаков Е.А. Некоторые аспекты влияния кривизны на распространение волн // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Предлагается новый подход к проблеме распространения волн в пространстве с кривизной. Результаты применяются для построения фейнмановского пропагатора векторного поля на основании континуального интеграла и метода Швингера-Девитта.

Библиогр. 12 назв.

УДК 537.874.6

Рудницкий А.С. Дифракция симметричной суперпозиции парциальных волн на полуплоскости // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Решена двумерная задача по дифракции симметричной суперпозиции парциальных волн E -и H -поляризации на полуплоскости. Для найденных решений граничные условия выполняются дополнительно на симметрично расположенных полуплоскостях, образующих двугранные углы. Они могут быть использованы для анализа дифракционных явлений в угловых областях $2\pi/N$ (N — целое число). Показано, что при четных N все, а при нечетных только часть решений представляются суперпозицией конечного числа плоских волн.

Библиогр. 8 назв., ил.1.

УДК 535.337

Килина С.В., Зажогин А.П., Шарашкин С.Н. Температурная зависимость спектров люминесценции лазерных кристаллов, активированных ионами Nd^{3+} // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Изучены зависимости спектров люминесценции лазерных кристаллов, активированных ионами Nd^{3+} , от температуры. Установлено, что с повышением температуры полосы в спектрах люминесценции смещаются в длинноволновую область, а их полуширины увеличиваются. Выведены аналитические зависимости, связывающие положение и ширину полос люминесценции с температурой. Оценена возможность использования указанных кристаллов для измерения температуры в интервале от 77 К до 560 К бесконтактным способом.

Библиогр. 5 назв., табл.1, ил.3.

УДК 539.12.04

Углов В.В., Федотова Ю.А., Ходасевич В.В. Последовательная имплантация бора и азота в тонкие пленки железа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Проведены поли- и моноэлементная имплантации ионов бора и азота дозами $1 \cdot 10^{16}$ и $2 \cdot 10^{17}$ ион/см² соответственно в тонкие пленки железа (80 нм). Распределение внедренной примеси по глубине и изменения фазового состава имплантированных пленок были исследованы методами электронной Оже-спектроскопии и конверсионной электронной мессбауэровской спектроскопии. При последовательной имплантации наблюдалось радиационно-стимулированное перераспределение бора и азота в глубь образца. Установлено, что предварительная имплантация бора замедляет формирование нитридов железа в пленках.

Библиогр. 11 назв., табл.1, ил.2.

УДК 538.21

Акимов А.Н., Григорьев В.В., Комаров Ф.Ф., Коньшин И.В., Леонтьев А.В., Сагайдак Д.И., Францкевич А.В. / Профили распределения внедренных в ПММА ионов индия // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Методом вторичной ионной масс-спектроскопии и резерфордского обратного рассеяния получены профили пространственного распределения ионов индия, имплантированных в ПММА. Обнаружены распределения, характерные для образования химических соединений между имплантированными ионами и атомами полимерной матрицы.

Библиогр. 3 назв., табл.1, ил.1.

УДК 539.2

Захаров А.Г., Вариченко В.С. Особенности дефектообразования в алмазе, облученном ионами бора // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Изучены особенности дефектообразования и проведен их анализ в алмазе типа IIa, подвергнутом облучению ионами бора высоких энергий и полиэнергетичной имплантацией ионами бора килоэлектронвольтного диапазона.

Библиогр. 15 назв., ил.3.

УДК 537.635: 546.273

Филипп А.Р. Высокоэнергетичная ионная имплантация в алмаз // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Исследованы некоторые особенности процессов дефектообразования в алмазе, облученном высокоэнергетичными ионами. Формирование дефектной структуры приповерхностного слоя и слоя, расположенного глубже среднепроективного пробега ионов, объясняется образованием треков, расколов и диффузией дефектов соответственно.

Библиогр. 9 назв., ил.2.

УДК 521.315.592

Колковский И.И., Лугаков П.Ф. Ограниченная диффузией рекомбинация носителей заряда на ростовых дефектах в р-кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Изучалась рекомбинация носителей заряда (НЗ) в р-Si ($p_0 \sim 1,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$), выращенном методом Чохральского. Измерялись температурные и инжекционные зависимости времени жизни НЗ. Результаты интерпретируются в предположении, что время жизни НЗ ограничено скоростью их диффузии к окруженным потенциальным барьером ростовым нарушениям структуры.

Библиогр. 10 назв., ил.2.

УДК 669.76:537.3

Кухаренко Е.Л., Шепелевич В.Г. Структура и термо-ЭДС быстрозатвердевшей фольги соединений $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Установлено формирование текстуры (10 1 2) в фольге соединений $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$ ($0 \leq x \leq 0,5$), получаемой сверхбыстрой закалкой из расплава. Представлены результаты по влиянию химического состава, изохронного и изотермического отжига на дифференциальную термо-ЭДС быстрозатвердевшей фольги указанных соединений $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x\text{Te}$.

Библиогр. 9 назв., табл.1, ил.3.

УДК 621.315.592

Самуйлов В.А., Стельмах В.Ф., Яновский А.М., Бука П.П., Крылов Д.Ф. Спектральные характеристики сильно легированных пленок поликристаллического кремния // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Изучены спектральные зависимости коэффициентов поглощения и отражения пленок сильно легированного поликристаллического кремния с учетом дисперсии действительной части коэффициента отражения в инфракрасном диапазоне. Показано существование трех разных областей зависимости коэффициента поглощения, связанных с разными механизмами поглощения электромагнитной энергии. Дополнительно проанализирована спектральная зависимость диэлектрической постоянной поликристаллического кремния.

Библиогр. 12 назв., ил.3.

УДК 539.1.08

Аншаков О.М., Филь Г.А., Чудаков В.А. Анализ спектрального распределения гамма-излучения полубесконечного источника с различными профилями заглупления радионуклида ^{137}Cs // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Важной задачей при создании аппаратуры для оперативного контроля содержания радионуклидов в почве является установление зависимостей регистрируемых спектров от формы профиля и толщины слоя заглупления радиоактивного загрязнения. В работе рассмотрено решение этой задачи путем имитационного моделирования методом Монте-Карло. На основе априорных сведений о характере техногенных загрязнений и измерения характеристик спектров возможно определение профиля и глубины залегания радионуклидов. Дополнительное использование этой информации позволяет повысить достоверность экспрессного дистанционного определения запаса гамма-излучающих радионуклидов в почвах.

Библиогр. 2 назв., ил.3.

УДК 621.396

Кухарчик П.Д., Сидорович Д.В. Выбор оптимального критерия при исследовании трехмерной антенной решетки // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Исследуются влияние выбора параметров физической модели на дисперсию их оценок с использованием антенных решеток, чувствительных к поляризации волн.

Библиогр. 5 назв., ил.1.

УДК 519.1

Мельников О.И., Левин Ю.Г. Реализация гиперграфа k-гусеницей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия реализуемости гиперграфа H k-гусеницей. Построен алгоритм проверки возможности реализуемости трудоемкости $O\left(k|VH| \sum_{e \in EH} |e|\right)$.

Библиогр. 1 назв.

УДК 512.542

Жевцова Н.Г. Внешняя характеристика класса конечных p-разложимых групп // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

В статье доказано, что группа G p-разложима тогда и только тогда, когда в формации $\text{Hom}_p(G)$ дополняема подформация $\Delta_p \cap \text{Hom}_p(G)$.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.925.6

Степанова Т.С. О нелинейных системах второго порядка без подвижных многозначных особых точек // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №2.

Для специальных нелинейных дифференциальных систем второго порядка получены необходимые и достаточные условия отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.62

Бобков В.В., Бобкова Н.А. Проблема разномасштабности и требования к методам численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Для жестких систем линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей приведены рекурсивные соотношения между матричными элементами конструкции семейства явных численных методов, обеспечивающих свойство точности на многочленных решениях.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.968.23

Шилин А.П. Явное решение одного парного интегрального уравнения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Решено в квадратурах одно интегральное уравнение на интервале $(-1,1)$. Ядра уравнения характеризуются посредством некоторых дифференциальных соотношений.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.2

Фурса Р.А. Устойчивость метода прогнозирования временных рядов с использованием оценки Хьюбера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Рассмотрен метод прогнозирования временных рядов с трендом с использованием оценки Хьюбера и проведено его исследование на устойчивость при наличии искажений типа "выбросов", а также дано сравнение этого метода и классического МНК-метода прогнозирования с точки зрения устойчивости.

Библиогр. 4 назв., табл.2.

УДК 517.977

Ружижская Е.А. Стабилизация динамических систем управления, ограниченными по значениям и производным // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Рассматривается задача стабилизации линейных динамических систем в классе инерционных управляющих воздействий, представляющих непрерывные функции с ограниченными производными. Для стабилизации динамических систем привлекается вспомогательная задача оптимального управления. Доказывается, что оптимальная обратная связь вспомогательной задачи является стабилизирующей обратной связью для динамических систем. Описывается алгоритм работы стабилизатора, основанный на построении в режиме реального времени позиционных решений вспомогательной задачи оптимального управления. Результаты иллюстрируются на примере стабилизации динамической системы четвертого порядка.

Библиогр. 10 назв., ил.3.

УДК 33:517.925

Калигин Б.С. Динамическая модель рынка типа "эффективная конкуренция" // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Строится математическая модель рынка на основе метода динамических аналогий в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора цен; исследуются причины, нарушающие равновесие цен в зависимости от действия основных групп участников рыночных отношений: продавцов, покупателей, государства.

Библиогр. 2 назв.

УДК 681.328:681.326.3

Лебедев В.И., Оранский А.М., Коляда А.А. Алгоритмы вращения векторов на основе методов "цифра за цифрой" и модулярной арифметики // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 2.

Предложены разностно-итерационные алгоритмы вращения двух- и трехмерного векторов без изменения их длины. Исследована сходимость алгоритмов.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.9

Кашникова И.В. Аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений Ито решениями конечно-разностных // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Рассматривается вопрос аппроксимации решения стохастического дифференциального уравнения Ито решениями конечно-разностных уравнений с осреднением.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.872

Маталыцкий М.А. Исследование замкнутых сетей массового обслуживания с произвольным обслуживанием заявок в одной из систем сети // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №2.

Предлагается метод нахождения стационарных вероятностей состояния сетей с произвольным распределением времен обслуживания заявок в одной из систем обслуживания.

Библиогр. 3 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Greenchuk A.V., Ushakov E.A.</i> Some aspects of the curvature effect on wave propagation	3
<i>Rudnitsky A.S.</i> Diffraction of symmetric waves superposition by a half-plane	6
<i>Kilina S.V., Zazhagin A.P., Sharashkin S.N.</i> Temperature dependences of the luminescence spectra of laser crystals activated by Nd^{3+}	8
<i>Uglov V.V., Fedotova J.A., Khodasevich V.V.</i> Subsequent implantation of iron thin films by nitrogen and boron ions	12
<i>Akimov A.N., Grigoryev V.V., Komarov I.V., Leontyev A.V., Sagaydak D.I., Frankevich A.V.</i> Depth profiles of In ions implanted into PMMA	17
<i>Zacharov A.G., Varichenko V.S.</i> Peculiarities of defect production in diamond, irradiated with boron ions	19
<i>Filipp A.R.</i> High energy ion implantation in diamond	22
<i>Kolkovskii I.I., Lugakov P.F.</i> Diffusion limited of the charge carrier recombination at grown-in defects in p-silicon	27
<i>Kucharenko E.L., Shepelevich V.G.</i> Structure and thermoelectric force of rapidly solidified $Bi_{1-x}Sb_xTe$ foils	29
<i>Samuilov V.A., Stelmakh V.F., Janovski A.M., Buka P.P., Krylov D.F.</i> Spectral Characteristics of Heavily Doped Polycrystalline Silicon Films	32
<i>Anshakov O.M., Fil G.A., Chudakov V.A.</i> The analysis of gamma-radiation spectral distribution for semi-infinite source with different in-depth profiles of radionuclide ^{137}Cs	36
<i>Kukharchik P.D., Sidorovitch D.V.</i> The choice of an optimum criterion for investigation of three-dimensional arrays	40

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Melnikov O.I., Levin Y.G.</i> The realization of hypergraph by k-caterpillar	43
<i>Zhevnova N.G.</i> The outer characterization of class finite p-decomposable groups	46
<i>Stepanova T.S.</i> On nonlinear second-order systems without movable critical singularities	48
<i>Bobkov V.V., Bobkova N.A.</i> Scale diversity problem and requirements to methods of numerical solution of systems of ordinary differential equations	52
<i>Shilin A.P.</i> Explicit solution of a some pair integral equation	55
<i>Fursa R.A.</i> Robustness of time series forecasting method with Huber estimator	58
<i>Ruzhitskaja E.A.</i> Dynamic systems stabilization by controls bounded on meanings and derivatives	61

OUR JUBILEE

<i>Mikhail Mikhailovich Kovalev</i>	66
<i>Petr Ilyich Monastirny</i>	67

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Kalitin B.S.</i> The dynamic model of market of type "effective competition"	68
<i>Lebedev V.I., Oransky A.M., Kolyada A.A.</i> Algorithms rotation of the vectors based on the "digit-by-digit" and modular arithmetic methods	70
<i>Kashnikova I.V.</i> The approximation of solution of stochastic differential equations Ito by solution of finite-difference equations	72
<i>Matalytsky M.A.</i> Investigation of closed queuing networks with an arbitrary message servicing in one system	74

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

Nikolai Pavlovich Erugin	76
Vladimir Sergeevich Konukh	77