

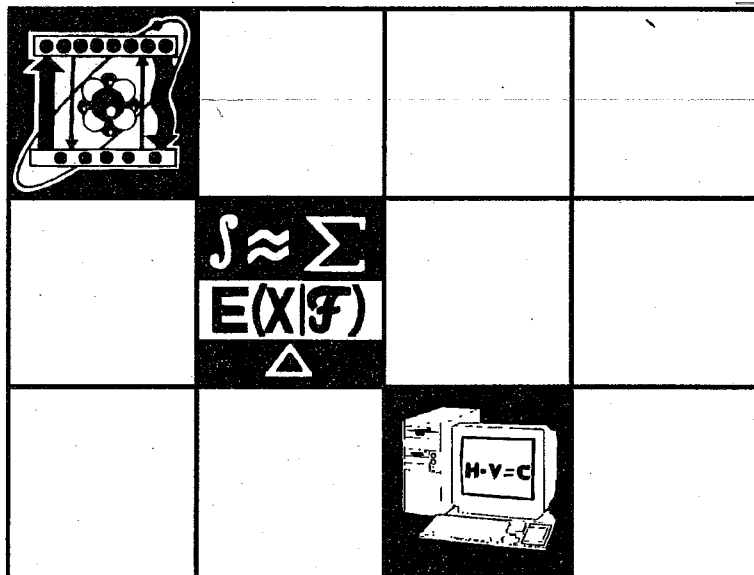
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

1'97



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

1'97

ЯНВАРЬ



МИНСК
"УНІВЕРСІТЭЦКАЕ"

Главный редактор В.Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П.Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

П.Д. КУХАРЧИК (*ответственный редактор*),
В.М. АНИЩИК, Л.М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*),
В.Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А.М. БЕЛЬСКИЙ (*ответственный секретарь*),
В.В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), Е.С. ВОРОПАЙ,
Р.Ф. ГАБАСОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Л.Н. КИВАЧ, Н.И. КОЗЛОВСКИЙ,
Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КОМЯК, В.И. КОРЗЮК, В.И. МИРОНЕНКО,
С.Г. МУЛЯРЧИК, И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,
Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:
Белорусский государственный университет.

Регистрационный №805.

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 1997. №1

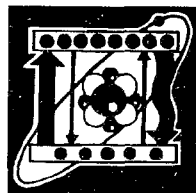
Редактор *И.А. Лешкевич*
Художественный редактор *Ю.С. Сергачев*
Технический редактор и корректор *Г.И. Хмарун*

Набор и верстка выполнены в редакции журнала *Г.М. Добыш* и *В.А. Семеновым*

Подписано в печать 03.02.97. Формат 70x108 1/16. Бумага офс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отг. 7,35. Уч. изд. л. 8,19. Тираж 610 экз. Заказ 232. Цена 16000 р.

Издательство "Універсітацкае". 220048, Минск, пр. Машерова, 11. Адрес редакции:
220080, Минск, Университетский городок, тел. 220-65-42.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства "Белорусский Дом
печати". 220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 535.37

И.М. ГУЛИС, В.А. ЦВИРКО

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПОЛЯРНЫХ МОЛЕКУЛ, ВНЕДРЕННЫХ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ МАТРИЦУ

Analysis of the spontaneous polarazation effect on frequencies of electronic transitions in a polar molecule embedded in ferroelectric crystals was conducted. The spectral variations of the order of 10^3 cm^{-1} due to polarization switching were predicted.

Устройства, оптические характеристики которых могут изменяться путем воздействия на некоторую функциональную среду электрическим полем, являются основными элементами в широком круге систем (модуляторы и дефлекторы света, дисплеи, элементы систем оптической обработки информации и др.). При этом в зависимости от области применения к устройству предъявляется комплекс требований по функциональным характеристикам (управляющие напряжения, энергопотребление, контраст, возможность реализации многоэлементной системы, долговечность, технологичность изготовления, апертурные характеристики и т. п.). Анализ достигнутых к настоящему времени результатов позволяет заключить, что названные характеристики нуждаются в улучшении. В то же время перспективными представляются поиски новых принципов управления оптическими характеристиками.

В основе функционирования абсолютного большинства электроуправляемых устройств лежит изменение коэффициента преломления среды при приложении поля. Альтернативный подход, базирующийся на изменении под действием электрического поля спектроскопических характеристик некоторой среды (например, спектров поглощения и испускания), не получил практического применения. Имеются сообщения [1] об экспериментах с электрохромными ячейками, в которых под действием поля (а точнее, при прохождении тока) изменяется состояние ионизации поглощающих центров, что сопровождается достаточно значительными изменениями в спектрах поглощения; однако, по-видимому, устойчивость такого рода устройств к многократным циклам переключения ограничена, что суживает область применения. Использование же наиболее очевидного подхода, основывающегося на сдвигах частот переходов атомов или молекул во внешнем электрическом поле (эффекта Штарка), в практическом плане нереалистично, так как поля, требующиеся для существенного сдвига полосы поглощения (например, на величину, сопоставимую с шириной полосы $\Delta\nu_{\text{п}}$), неприемлемо велики. Так, в газовой фазе, где доплеровски уширенные полосы поглощения сравнительно узки ($\sim 10^8 - 10^9$ Гц для переходов в видимой области), сдвиги порядка $\Delta\nu_{\text{п}}$ могут достигаться в полях $\sim 10^3 - 10^4$ В/см, однако практическая применимость Штарк-управляемых газовых ячеек с низкой концентрацией поглощающих центров и соответственно низкой оптической плотностью при технически приемлемых габаритах представляется проблематичной. В конденсированной же фазе, где полосы переходов существенно уширены как однородно, так и неоднородно, требуются еще более высокие поля.

Поглощающие центры, находящиеся в конденсированной фазе, испытывают со стороны окружения воздействие полей, измеряемых $10^7 - 10^8$ В/см. Например, для полярных молекул в полярных растворителях обусловленные такими полями сдвиги частот электронных переходов (относительно их значений для изолированных молекул) могут составлять $1 \div 5 \cdot 10^3$ см⁻¹ для молекул с дипольными моментами порядка единиц Дебай; уширения же частот переходов, обусловленные флуктуациями полей микроокружения в неупорядоченной матрице, измеряются в таких системах сотнями см⁻¹. Очевидно, что реализуемые внешние электрические поля не могут конкурировать по эффектам (сдвигам) с обсуждаемыми внутренними полями. Однако если воздействием внешнего поля можно существенно изменить структуру микроокружения молекулы, то откроется возможность эффективного управления спектроскопическими характеристиками молекулы "опосредованным через матрицу" путем.

Возможность существенного изменения структуры матрицы внешним полем имеет место в сегнетоэлектриках в процессе переключения спонтанной поляризации [2]. Анализ возможности управления спектроскопическими характеристиками полярных молекул, внедренных в диэлектрик, путем переключения поляризации и посвящена настоящая работа.

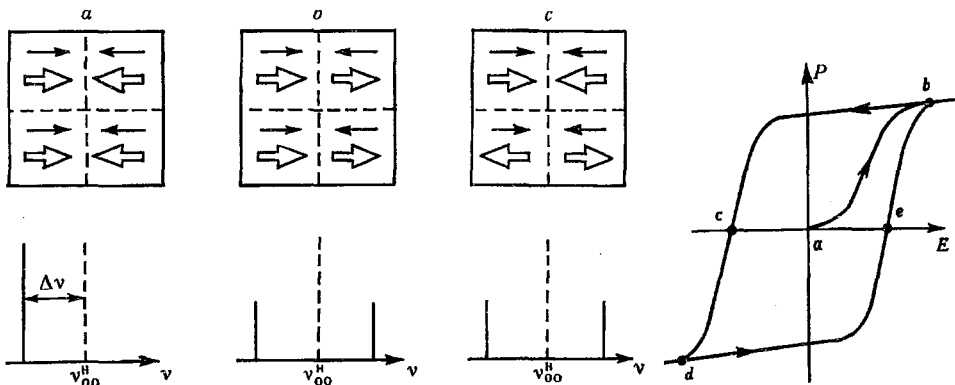
Проведем простейшие оценки величин спектральных сдвигов, ожидаемых в результате переключения поляризации в сегнетоэлектрике. Считаем, что в исходном состоянии молекула внедрена в сегнетоэлектрик таким образом, что вектор μ_g ее дипольного момента ориентирован по вектору спонтанной поляризации в пределах доменов, на которые разбит макроскопически неполяризованный сегнетоэлектрический монокристалл. Отметим, что при выращивании легированного кристалла из раствора, содержащего в качестве добавки сложные полярные молекулы, именно такая ориентация представляется энергетически выгодной. Внешнее поле будет прикладываться вдоль электрической оси кристалла. Считаем также, что в кристалле реализуются только 180-градусные домены [2,3].

В сегнетоэлектриках доминирующий вклад в величину локального поля, как известно [2,3], дает член, обусловленный зарядами на поверхности выделяемой в диэлектрике сферы (лорентцево поле), пропорциональный поляризации среды, т. е. $E_{\text{лок}} = \beta P$. Примем для оценок величину фактора Лорентца $\beta = 1/3\epsilon_0$ (осознавая, что это значение, строго говоря, отвечает модели точечных диполей в кубической решетке). Типичные значения величин спонтанной поляризации P_s для сегнетоэлектриков составляют сотые доли Кл/м² (например, для нитрита натрия $P_s = 8 \cdot 10^{-2}$ Кл/м², для триглицинульфата (ТГС) — $2,8 \cdot 10^{-2}$ Кл/м² [2]). Приняв первое из приведенных значений, получаем оценку для создаваемого в сегнетоэлектрике за счет спонтанной поляризации $E_{\text{лок}} = 3 \cdot 10^9$ В/м. При переводе внедренной в диэлектрик полярной молекулы в электронно-возбужденное состояние ее дипольный момент изменится от μ_g до μ_e . Для простоты положим, что $\mu_e \uparrow \mu_g$ и $\mu_e > \mu_g$. Изменение энергии взаимодействия дипольной молекулы с полем $E_{\text{лок}}$ при переводе молекулы в возбужденное состояние определит величину сдвига частоты электронного перехода за счет обсуждаемого взаимодействия:

$$\Delta W = -(\Delta \mu \cdot E_{\text{лок}}) = -(\mu_e - \mu_g) \cdot E_{\text{лок}}$$

В последнем выражении учтено, что $\mu_e \uparrow \mu_g \uparrow E_{\text{лок}}$. Примем типичные значения μ_e и μ_g для сложных дипольных молекул $\mu_g = 1D = 3,336 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, $\mu_e = 2D$. В итоге получаем оценку $\Delta W \approx 10^{-20}$ Дж, что соответствует $\Delta \nu \approx 500$ см⁻¹. Отметим, что здесь обсуждается компонента сдвига спектра, обусловленная только спонтанной поляризацией, в общий же сдвиг будет давать вклад взаимодействие с реактивным полем [4]. Однако будем полагать, что это взаимодействие можно считать неизменным при переключении поляризации. Тогда в рамках анализируемой простой модели при переключении поляризации (изменении вектора P_s в пределах домена на $-P_s$) частота перехода в молекуле сместится на величину $2\Delta \nu$ в синюю область. Таким образом, сдвиг спектра на $\sim 10^3$ см⁻¹ (что сопоставимо с шириной полос электронного спектра) может рассматриваться как основа для механизма управления электрическим полем спектральными характеристиками молекулы и соответственно для реализации устройств с изме-

няемым пропусканием света либо с электроуправляемой люминесценцией (рисунок). Отметим, что поля, требующиеся для переключения поляризации, невелики (типичные значения коэрцитивного поля $0,5 \div 2 \cdot 10^3$ В/см [2,3], что дает для управляющих напряжений при слое 100 мкм 5–20 В).



Схемы взаимной ориентации векторов дипольного момента молекулы (малые стрелки) и векторов спонтанной поляризации в пределах домена (большие стрелки) для точек a , b и c гистерезисной кривой (справа). Разбиение на домены дано пунктиром, под схемами приведено ожидаемое расположение полос 0-0-переходов в ансамбле (ν_{00}^H отвечает неориентированному окружению).

В то же время вопрос о наблюдаемости изменения спектра при переключении поляризации в полидоменном кристалле требует дополнительного рассмотрения. Обратимся к рисунку, где схематично приведены варианты разбиения кристалла на домены в различных точках (a , b , c) гистерезисной кривой, описывающей переключение спонтанной поляризации. Точка a отвечает исходному состоянию кристалла (после выращивания), в котором, как обсуждалось, направления дипольных моментов молекулы (малые стрелки) совпадают с направлением вектора поляризации в пределах определенного домена. Частота 0-0-перехода в такой системе сдвинута на величину $\Delta\nu$ в низкочастотную область относительно положения для разупорядоченной системы (параэлектрической фазы). В точке b устанавливается единое для всего кристалла значение вектора спонтанной поляризации, в результате чего половина доменов переполаризуется и спектр будет состоять из двух полос со сдвигами $\pm\Delta\nu$. В точке c суммарная поляризация диэлектрика вновь становится равной нулю, однако разбиение на домены может не совпадать с таковым для исходной точки a . В случае полной утраты корреляции в разбиении на домены в состояниях a и c , как нетрудно видеть, спектр будет также состоять из двух полос, т. е. совпадать со спектром в точке b . Таким же он останется в точке d (аналог b) и e (аналог c), т. е. при условии полной утраты корреляции в разбиении на домены между исходным и последующими состояниями изменений спектра при последующих циклических переключениях не будет.

Проанализируем возможные варианты преодоления этого препятствия, не позволяющего реализовать электроуправляемое переключение спектра в макроскопическом (полидоменном) образце. Прежде всего, при частичном сохранении упомянутой выше корреляции (чего можно ожидать в силу неидеальности кристалла, в котором примесные полярные молекулы могут рассматриваться как дефекты, в той или иной мере влияющие на состояние спонтанной поляризации в пределах своего окружения) переключение спектра должно иметь место. Действительно, в предельном случае полного сохранения корреляции в точке c структура (и спектр) идентична таковой в точке a . Более того, в качестве дефектов, обеспечивающих "восстановление" исходной доменной структуры при обращении средней по объему спонтанной поляризации в нуль, могут выступать и иные структурные дефекты кристалла.

Нетрудно также убедиться, что спектр макроскопического полидоменного образца будет изменяться при переключении поляризации и в том

случае, если исходное состояние образца является монокристаллическим, что может быть, в принципе, достигнуто при выращивании легированного кристалла в электрическом поле. Из анализа, аналогичного проведенному выше, для этого случая следует, что спектр системы в точке c будет двухполосным с частотами $\pm\Delta\nu$, а в точках b и d — однополосным с частотами $-\Delta\nu$ и $+\Delta\nu$ соответственно.

Для молекул, у которых направление момента электронного перехода не совпадает с направлением дипольных моментов для основного и возбужденного состояний, при переключении спонтанной поляризации должна возникать существенная спектральная зависимость дихроизма (и анизотропии испускания) в пределах длинноволновых полос поглощения и испускания соответственно, в результате чего эффект переключения спектра также будет наблюдаться.

Кроме того, переключение должно наблюдаться для кристаллов с доменами, отличными от 180-градусных. Анализ в этом случае также может быть проведен для различных конкретных вариантов взаимных ориентаций векторов поляризации и дипольных моментов на основе рассмотренного подхода.

В заключение подчеркнем, что приведенное в статье рассмотрение базируется на допущении о слабом возмущающем действии молекулы примеси на структуру локального окружения. Выполнимость данного допущения может, в принципе, быть проанализирована путем детального моделирования пространственной структуры конкретной системы сегнетоэлектрика — сложная молекула. Очевидно, что проведение такого рода расчетов на настоящий момент представляет чрезвычайно сложную задачу. Кроме того, результаты таких расчетов, выполненные для конкретной системы, не будут, по-видимому, позволять делать заключения общего характера. В то же время предложенные в настоящей работе оценки характера ожидаемых эффектов могут служить основой для постановки и интерпретации результатов экспериментов по управлению положением электронных спектров в сегнетоэлектриках с полярными примесными центрами.

1. Спектроскопия и динамика возбужденных состояний в конденсированных молекулярных системах / Под ред. В. М. Аграновича, Р. М. Хохштрассера. М., 1987.
2. Лайкс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М., 1981.
3. Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применение. М., 1981.
4. Бахшиев Н. Г. Спектроскопия межмолекулярных взаимодействий. Л., 1972.

Поступила в редакцию 03.12.96.

УДК 535.338.42:539.194

М. Б. ШУНДАЛОВ, Г. А. ПИЦЕВИЧ

РАСЧЕТ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЕ ПЕРОКСИДА ВОДОРОДА

The torsional vibrations frequency of the hydrogen peroxide molecule has been calculated on the basis of the solution of the Schrodinger internal rotation equation. An influence of the form of the potential energy function on the arrangement of the torsional energy levels is studied.

Расчет частоты торсионных колебаний молекул осуществляется, как правило, в рамках обычной колебательной задачи. Для молекул, торсионные колебания которых имеют малую амплитуду (сравнимую с амплитудами нормальных колебаний), такой подход во многом оправдан. Однако для молекул с внутренними движениями большой амплитуды (внутренним вращением, инверсионным туннелированием) приближение классической колебательной задачи уже не является правомерным, так как формирование торсионного спектра определяется формой всей функции потенциальной энергии, а не только значением второй производной в точке минимума.

Пероксид водорода — простейшая из молекул с внутренним вращением. Это объясняет повышенное внимание исследователей к данному соединению [1–6].

Как известно [1], уравнение для внутреннего вращения записывается в виде:

$$\mu(\varphi) \frac{d^2 \Psi(\varphi)}{d\varphi^2} + V(\varphi) \Psi(\varphi) = E \Psi(\varphi),$$

где φ — угол внутреннего вращения, $\mu(\varphi)$ — инерционный коэффициент, $V(\varphi)$ — функция потенциальной энергии (рис.1).

Инерционный коэффициент $\mu(\varphi)$ представляет собой комбинацию вращательных постоянных [5] и в нулевом приближении предполагается независящим от угла φ . Функция $V(\varphi)$ в общем случае представляется в виде ряда Фурье:

$$V(\varphi) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos k\varphi. \quad (1)$$

При расчете от ряда (1) оставляют обычно только четыре слагаемых, исходя из трех параметров кривой $V(\varphi)$ — экспериментально определяемого значения угла φ_{\min} и двух варьируемых высот барьеров — V_{cis} и V_{trans} . Тогда функция $V(\varphi)$ имеет вид:

$$V(\varphi) = V_0 + V_1 \cos \varphi + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 3\varphi. \quad (2)$$

В работе использовалось также иное представление функции потенциальной энергии, основанное на следующем предположении. В [7] выделены два основных эффекта, вносящих доминирующие вклады в формирование функции потенциальной энергии молекулы H_2O_2 :

1) взаимодействие между двумя несвязанными парами p -электронов атомов кислорода, обладающее периодом π по φ и представленное функцией:

$$V'(\varphi) = V'_0 + V'_2 \cos 2\varphi + V'_4 \cos 4\varphi + V'_6 \cos 6\varphi + \dots \quad (3)$$

2) взаимодействие между дипольными моментами ОН-групп с периодом 2π и функцией:

$$V''(\varphi) = V''_0 + V''_1 \cos \varphi + V''_2 \cos 2\varphi + V''_3 \cos 3\varphi + \dots \quad (4)$$

Из предположения примерного равенства вкладов обоих эффектов следует соизмеримость коэффициентов V'_2 и V''_1 , а также V'_4 и V''_2 и т.д.

Так как для сходимости ряда необходимо последовательное уменьшение $|V_k|$, то $V''_3 < V'_4$, и, суммируя (3) и (4) и оставляя в результирующей функции четыре слагаемых, получим:

$$V(\varphi) = V_0^* + V_1^* \cos \varphi + V_2^* \cos 2\varphi + V_4^* \cos 4\varphi, \quad (5)$$

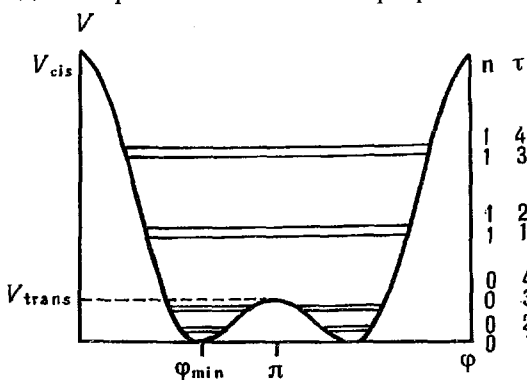
где $V_0^* = V'_0 + V''_0$, $V_1^* = V''_1$, $V_2^* = V'_2 + V''_2$, $V_4^* = V'_4$.

Собственные значения энергии E_i вычислялись путем составления и диагонализации матрицы гамильтониана для четырех видов торсионных волновых функций. Для осуществления расчета был создан комплекс программ, реализованных на языке FORTRAN.

Расчет с функцией вида (5) дает хорошее согласие с экспериментом, однако при этом высота cis-барьера меньше на 335 см^{-1} , чем указанная в [5].

Каждый торсионный уровень классифицируется двумя квантовыми числами — n и τ [1,5]. Квантовое число n принимает значения $0, 1, 2, 3, \dots$, каждому из которых соответствуют четыре значения τ : $1, 2, 3, 4$. Расщепление между уровнями с $\tau = 1$ и 2 (3 и 4) связано с туннелированием через высокий cis-барьер, а расщепление между парами $\tau = 1$ и 2 и $\tau = 3$ и 4 — через более низкий trans-барьер.

Вращательные постоянные и, следовательно, инерционный коэффициент $\mu(\varphi)$ зависят также от квантового числа n .



Функция потенциальной энергии молекулы пероксида водорода

Результаты расчета нижних торсионных уровней энергии молекулы H_2O_2 приведены в табл.1 в сравнении с экспериментальными данными и расчетом из [5].

Таблица 1

Нижние торсионные уровни энергии молекулы пероксида водорода

$n \tau$	Эксперимент [5], $E, \text{см}^{-1}$	Расчет [5], $E, \text{см}^{-1}$	Расчет (данная работа), $E, \text{см}^{-1}$			
			$\mu = \text{const}$		$\mu \neq \text{const}$	
			$V_3 \neq 0$	$V_3 = 0$	$\mu = \mu(\varphi)$	$\mu = \mu(n)$
0 1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0 2	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0002	0,2387
0 3	11,4372	11,4477	11,4370	11,4375	11,4413	11,7477
0 4	11,4372	11,4477	11,4373	11,4376	11,4415	12,1039
1 1	254,5499	254,5710	254,1928	254,6914	253,4692	254,3196
1 2	254,5499	254,5710	254,1931	254,6913	253,4694	255,0744
1 3	370,8932	370,8666	371,6031	374,2410	370,2572	370,3333
1 4	370,8932	370,8666	371,6032	374,2417	370,2575	371,9161
2 1	569,7427	569,6945	570,5419	571,3611	568,6099	565,9893
2 2	569,7442	569,6957	570,5432	571,3614	568,6108	568,6691
2 3	776,1148	776,1927	778,0719	777,3585	775,2480	768,1242
2 4	776,1215	776,1990	778,0786	777,3765	775,2543	771,5269
3 1	1000,8820	1000,8890	1003,5830	997,9325	999,8315	983,3641
3 2	1000,9300	1000,9210	1003,6170	998,0329	999,9447	989,2285
$V_{\text{cis}}, \text{см}^{-1}$		$2562,8 \pm 60$	2559	2224	2559	2559
$V_{\text{trans}}, \text{см}^{-1}$		$387,07 \pm 0,2$	386	386	382	386
φ_{min}		$111,90 \pm 0,40$	$111,5^0$	$111,5^0$	$112,5^0$	$111,5^0$
$V(\varphi), \text{см}^{-1}$		$V_0 = 814,9 \pm 15,4$ $V_1 = 1036,97 \pm 23,1$ $V_2 = 657,53 \pm 5,2$ $V_3 = 50,89 \pm 3,3$ $V_4 = 2,524 \pm 0,83$	$V_0 = 814,57$ $V_1 = 1035,43$ $V_2 = 657,93$ $V_3 = 51,07$ —	$V_0 = 754,83$ $V_1 = 919,00$ $V_2 = 569,71$ $V_3 = 0,00$ $V_4 = -19,54$	$V_0 = 820,96$ $V_1 = 1046,49$ $V_2 = 649,54$ $V_3 = 42,01$ —	$V_0 = 814,57$ $V_1 = 1035,43$ $V_2 = 657,93$ $V_3 = 51,07$ —

Как показывает расчет, на точность определения собственных значений E_i существенное влияние оказывают следующие взаимосвязанные факторы:

- 1) размеры матрицы гамильтониана,
- 2) число коэффициентов V_k и
- 3) их абсолютная величина.

Для молекулы пероксида водорода ($V_k^{\text{max}} \sim 1000 \text{ см}^{-1}$) порядок m матрицы гамильтониана не превышает 20, при увеличении V_k (F_2O_2 и другие молекулы) для получения устойчивых значений E необходимы матрицы с $m \geq 80$.

Для сравнения с классической колебательной задачей была рассчитана

силовая постоянная $k_{\text{тор}} = \left. \frac{d^2 \Psi(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \varphi_{\text{min}}}$, которая затем использовалась

при расчете частоты торсионного колебания по программе, описанной в [8]. Отсутствие недиагональных силовых постоянных оправдано тем, что частоты нормальных колебаний молекулы H_2O_2 лежат значительно выше $\nu_{\text{тор}}$. Кроме того, молекула H_2O_2 при нулевом trans- (cis-) барьере обладает симметрией C_{2h} (C_{2v}), и тип симметрии торсионного колебания A_u (A_2), а остальных нормальных колебаний — A_g (A_1) и B_u (B_2). Следовательно, в этих случаях такой подход оправдан полностью.

В табл.2 приведены результаты расчетов расположения торсионных уровней энергии молекулы H_2O_2 для разных высот барьеров, а также частоты торсионных колебаний. Как следует из таблицы, частота $\nu_{\text{тор}}$ торсионного колебания, рассчитанная в рамках колебательной задачи при нулевом trans-барьере, согласуется с квантово-механическим расчетом. При $n \leq 3$ уровни с $\tau = 1,2$ и $\tau = 3,4$ образуют дваждывырожденные со-

стояния, с ростом n вырождение снимается, выше cis-барьера уровни энергии опять становятся вырожденными, но их образуют уже другие пары: $n = k, \tau = 2$ и $3, n = k, \tau = 4$ и $n = k + 1, \tau = 1$. Появление даже минимального trans-барьера оказывает очень сильное влияние на расположение уровней энергии и приводит к кардинальному различию ΔE и ν_{top} .

Таблица 2

Нижние торсионные уровни энергии молекулы пероксида водорода для разных высот барьеров

$n \tau$	$V_{\text{cis}}, \text{cm}^{-1} / V_{\text{trans}}, \text{cm}^{-1}$												
	2559 0	2559 0,0001	2559 1	2559 10	2559 25	2559 100	2559 172	2559 386	2559 1000	2559 2559	386 2559	0 2559	
0 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	11,43	307,99
0 3	307,99	107,83	100,63	94,36	87,50	60,48	41,05	11,43	0,36	0,00	0,00	0,00	0,00
0 4	307,99	107,83	100,63	94,36	87,50	60,48	41,05	11,43	0,36	0,00	11,43	307,99	
1 1	605,29	264,30	251,53	244,22	238,12	219,11	213,39	254,19	438,00	593,87	254,19	605,29	
1 2	605,29	264,30	251,53	244,22	238,12	219,11	213,39	254,19	438,00	593,89	371,60	891,22	
1 3	891,22	450,98	434,53	426,07	419,36	394,85	379,39	371,60	451,01	593,89	254,19	605,29	
1 4	891,22	450,98	434,53	426,07	419,36	394,85	379,39	371,60	451,01	593,91	371,60	891,22	
$\Delta E^1, \text{cm}^{-1}$	307,99	107,83	100,63	94,36	87,5	60,48	41,05	11,43	438,01 ²⁾	593,87 ²⁾	0,00	0,00	
$\nu_{\text{top}}, \text{cm}^{-1}$	310,13	22,28	75,87	132,23	170,63	255,37	299,14	376,68	488,13	620,26	376,68	310,13	

Примечание: 1) $\Delta E = E_{n\tau} - E_{n'\tau} = E_{01} - E_{03}$ или $E_{02} - E_{04}$; 2) $\Delta E = E_{01} - E_{13}$ или $E_{02} - E_{14}$

В табл.3 приведены результаты расчетов разностей энергий ΔE и частоты торсионного колебания ν_{top} при $V_{\text{trans}} = V_{\text{cis}}$. Соответствие между ΔE и ν_{top} достигается при высотах барьеров $\approx 15000 \text{ cm}^{-1}$. Можно предположить, что такое значение служит своеобразной границей, ниже которой необходимо учитывать взаимодействие потенциальных ям, а выше наличие двукратного барьера проявляется лишь в четырехкратном вырождении нижних торсионных состояний.

Таблица 3

Разность энергий и частота торсионного колебания при равных cis- и trans-барьерах

$V_{\text{cis}} = V_{\text{trans}}, \text{cm}^{-1}$	1400	2000	2559	5000	10000	15000	25000	50000
$\Delta E^1, \text{cm}^{-1}$	426,76	519,60	593,89	848,07	1217,22	1500,24	1948,92	2773,18
$\nu_{\text{top}}, \text{cm}^{-1}$	458,78	548,34	620,26	867,01	1228,14	1501,70	1938,69	2741,72

Примечание: 1) $\Delta E = E_{01} - E_{13}$ или $E_{02} - E_{14}$

При $V_{\text{cis}} \ll V_{\text{trans}}$ состояние с $\tau = 2$ и $\tau = 3$ меняются местами. С ростом V_{cis} и $V_{\text{trans}} \ll V_{\text{cis}}$ торсионный спектр приближается к спектру ангармонического осциллятора — каждое состояние дважды вырождено, расстояние между последовательными уровнями постепенно уменьшается.

На основе проведенных расчетов сделан следующий вывод: торсионные колебания могут быть корректно рассмотрены в рамках колебательной задачи лишь в двух экстремальных приближениях.

1) При наличии только одного барьера, причем его высота должна превышать 1500 cm^{-1} ;

2) при равенстве барьеров, когда их высота составляет $15000 \pm 1000 \text{ cm}^{-1}$.

Функция потенциальной энергии молекулы пероксида водорода такова, что расчет частоты торсионного колебания необходимо осуществлять квантово-механическими методами.

1. Hunt R.H., Leacock R.A., Peters C.W., Hecht K.T. // J. Chem. Phys. 1965. V.42. P.1931.

2. Helminger P., Bowman W.C., DeLucia F.C. // J.Mol.Spectrosc. 1981. V.85. P.120.

3. Bowman W.C., DeLucia F.C., Helminger P. // Ibid. V.87. P.571.

4. Olson W. B., Hunt R. H., Young B. W., Maki A. G., Brault J. W. // *Ibid.* 1988. V.127. P.12.
 5. Flaud J.-M., Camy-Peyret C., Johns J.W.C., Carli B. // *J.Chem.Phys.* 1989. V.91. P.1504.
 6. Беломытцева Е. А., Виноградова В. Н., Годнева М. И., Виноградов А. А. // Молекулярная структура. Иваново, 1990. С.72.
 7. Penney W. G., Sutherland G. B. V. M. // *J.Chem.Phys.* 1934. V.2. P.492.
 8. Сивчик В. В., Грушецкий К. М. // *ЖПС.* 1973. Т.19. С.317.

Поступила в редакцию 25.11.96.

УДК 538.21

В.В. ГРИГОРЬЕВ, А.И. ИВАНОВ, Ф.Ф. КОМАРОВ, И.В. КОНЬШИН,
 А.С. КАМЫШАН, А.В. ЛЕОНТЬЕВ, В.А. ЮРЧЕНКО

ПРОФИЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ АЗОТА И ФОСФОРА, ИМПЛАНТИРОВАННЫХ В ПММА

Spatial distribution profiles for N^+ and P^+ ions implanted into PMMA have been obtained by the methods of secondary ion mass spectrometry and Rutherford back scattering. Experimental trajectory parameters have been compared to the theoretical calculations carried out by the Monte-Carlo method.

1. Введение

В настоящее время основным методом расчета параметров профилей пространственного распределения (R_p , ΔR_p , γ и β) ускоренных ионов, внедренных в органические материалы, является метод Монте-Карло (МК) [1]. Развитый в работах [2,3] TRIM-алгоритм считается наиболее подходящей процедурой численной реализации метода МК для моделирования ионной имплантации. Вместе с тем в работах [4,5] показано, что в ряде случаев значения R_p^e и ΔR_p^e , определенные из эксперимента, существенно отличаются как от аналитических, так и от численных расчетов. Так, в [4] отмечалось, что в области максимума неупругих потерь энергии $V_{\max} = 3 \cdot V_0 \cdot Z_1^{2/3}$ разница в теоретически рассчитанном и экспериментально определенном сечении торможения $S_f(V)$ может достигать 50%. Для улучшения сходимости предложен так называемый САВ-метод [5]. Второй областью, где расхождения между R_p^e , ΔR_p^e и R_p^T , ΔR_p^T достаточно хорошо изучены, является низкоэнергетичная имплантация тяжелых ионов [6]. Считается, что в данном случае необходимо учитывать зависимость неупругих потерь энергии от прицельного параметра [7]. Улучшение сходимости расчетов достигается путем введения возбужденного потенциала $V_{exc}(r)$ ион-атомного взаимодействия на уходящей части траектории налетающей частицы и соответствующей корректировке угла рассеяния $\theta(\varepsilon, b)$, где ε — приведенная энергия, b — прицельный параметр. Данная проблема существует не только при имплантации тяжелых ионов в органические материалы (ОМ), но и вообще в легкие мишени.

Параметры профилей пространственного распределения (ППР), внедренных в ОМ ускоренных ионов, исследовались в очень ограниченном числе работ [8–13]. Так, в [8–10] методом резерфордского обратного рассеяния (РОР) определены параметры ППР ионов Bi (20–300 кэВ) и Au (20–200 кэВ) в AZ 1350 [8], ионов благородных газов (Ar, Kr, Xe) в AZ 111 [9–11]. В работах [12,13] указано на аномалии пространственного распределения ионов B^+ (200 кэВ) и ионов F^+ . По мнению авторов [12], аномальные профили распределения имплантированных ионов B^+ (200 кэВ), определенные методом ядерных реакций $^{10}B(n, \alpha)^7Li$, наблюдаются в том случае, если величина $W = [\partial E / \partial x]_e / [\partial E / \partial x]_n > 6$. В [14] представлены результаты анализа методом ВИМС ППР примерно 40 ионов, имплантированных в ПММА и полиимид. Результаты расчетов сравниваются с данными моделирования с использованием программ TRIM 91 и ISPC.

Подводя итоги имеющихся литературных данных по параметрам пространственного распределения ускоренных ионов в ОМ, можно отметить

весьма ограниченное количество экспериментальных данных для определенного сорта ионов в широком диапазоне энергий. Так, в [14] энергия почти всех имплантированных ионов составляла 300 кэВ. Методологически более важно исследовать соответствие расчетов методом МК экспериментальным данным в зависимости от энергии внедряемых ионов, т.е. получение соотношений: $R_p = F(Z_1, E)$, $\Delta R_p = F(Z_1, E)$.

В настоящей работе нами представлены параметры профилей пространственного распределения ионов N^+ и P^+ , имплантированных в ПММА. Теоретический расчет параметров ППР осуществлялся методом МК. Соотношение теоретически рассчитанных и экспериментально определенных значений R_p и ΔR_p в данном случае представляет особый интерес: выбран тот диапазон энергий ионов азота и фосфора, в котором нет теоретических предпосылок для существенных расхождений.

2. Эксперимент

Имплантация ионов N^+ и P^+ проводилась в полиметилметакрилат $[C_5H_8O_2]_n$, синтезированный в лаборатории ФХОС НИИ ПФП. Пленки ПММА толщиной 1–3 мкм наносились методом центрифугирования на очищенные подложки монокристаллического кремния и затем проходили термообработку. Имплантация ионов N^+ (100–300 кэВ) проводилась в лаборатории элионики НИИ ПФП на ускорителе на базе ЭГ-2. Плотность тока пучка ионов $j = 0,3\text{--}0,4$ мкА/см², $D = 5 \cdot 10^{16}$ см⁻². Облучение ионами P^+ выполнялось в Минском НИИ радиоматериалов.

Профили распределения имплантированных ионов N^+ и P^+ получены методом вторичной ионной масс-спектропии (ВИМС) на установке САМЕСА IMS 4F. В качестве первичных частиц использовались ионы O_2^+ с энергией 12,3 кэВ. Скорость травления составляла для образцов, облученных ионами N^+ , 3,3 нм/с. При анализе распределения внедренного фосфора (для всех энергий доза облучения примерно составляла $D = 5 \cdot 10^{15}$ см⁻²) скорость травления была на порядок меньше. Профили распределения ионов P^+ определялись также методом РОР ионов He^+ с энергией 1,0 и 1,5 мэВ в нормальной геометрии. Теоретический расчет параметров пространственного распределения названных ионов проводился с помощью программы TRIM 95 и модифицированной нами версии TRIM 85. В последнем случае для улучшения сходимости расчетных и экспериментальных данных применена процедура расчета угла рассеяния, описанная в [7].

3. Результаты и их обсуждение

Профили пространственного распределения внедренных в ПММА ионов N^+ и P^+ приведены на рис. 1, 2. Теоретически рассчитанные на основе программы TRIM 95 и экспериментально определенные значения R_p и ΔR_p совместно с потерями энергии на упругие $[dE/dx]_n$ и неупругие $[dE/dx]_e$ столкновения даны в табл. 1. Погрешность разрешения по глубине, связанная с каскадным перемешиванием Δx [15], оценивалась по формуле (1) и рассчитывалась на основе метода МК:

$$\Delta x = 2 \cdot R_d \cdot \left[\frac{U_0}{4 \cdot E_d} \cdot \frac{\pi^2 \cdot (1 + A^2)}{3 \cdot A \cdot \alpha} \right]^{1/2} \quad (1)$$

Здесь: $A = M_2/M_1$, U_0 – поверхностная энергия связи (аппроксимируемая энергией сублимации графита, равной 7,41 эВ), α – безразмерная функция отношения M_2/M_1 , E_d – пороговая энергия смещения, $R_d \approx 10 \text{ \AA}$. Формула (1) дает величину $\Delta x \approx 50 \text{ \AA}$, что существенно меньше значения Δx , определенного методом МК – $\Delta x^{МК} = 150 \text{ \AA}$, которое мы будем учитывать при расчете траекторных параметров. В качестве величины R_p мы фактически приводим значение R_m (модальный пробег), но в рамках погрешности проводимого эксперимента эти величины практически совпадают. Траекторные параметры R_p^T , ΔR_p^T , γ , β соответствуют числу историй $N = 10^4$.

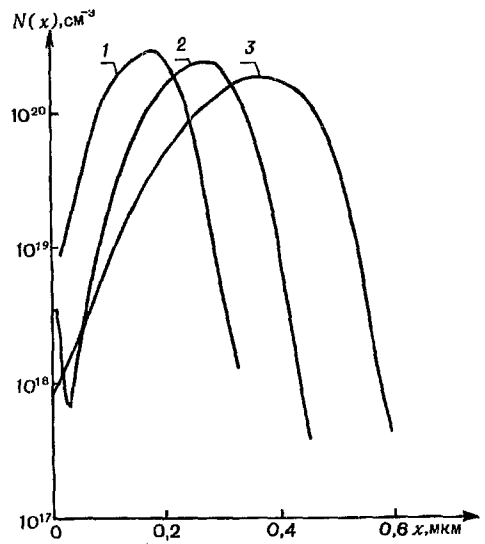
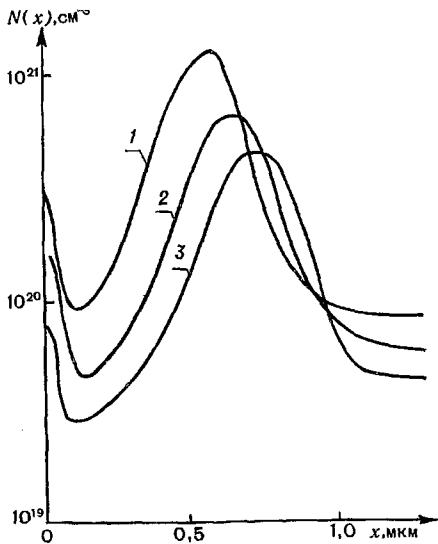


Рис.1 Профили пространственного распределения ионов N^+ , имплантированных в ПММА, полученные методом ВИМС: 1 - $E = 100$ кэВ, 2 - $E = 125$ кэВ, 3 - $E = 150$ кэВ

Рис.2 Профили пространственного распределения ионов P^+ , имплантированных в ПММА, полученные методом ВИМС: 1 - $E = 60$ кэВ, 2 - $E = 110$ кэВ, 3 - $E = 145$ кэВ

Обсуждение полученных результатов начнем с формы профилей пространственного распределения ионов N^+ . Из табл.1 видно, что для ионов азота значение $W > 6$ уже при $E = 125$ кэВ и поэтому, согласно [12], можно ожидать появления так называемых "нерегулярных" профилей. Такие профили обнаружены при имплантации легких ионов Li^+ , B^+ , Be^+ . Нерегулярными их называют потому, что при $R < R_m$ профиль распределения ионов соответствует рассчитанному методом МК профилю потерь энергии налетающих частиц на ионизацию. При $R > R_m$ экспериментальные профили, описанные в [12], хорошо аппроксимируются TRIM - распределением внедренных ионов. Отмечается, что процесс образования "нерегулярных" профилей носит пороговый характер, т.е. трансформация гауссовского профиля происходит, начиная с определенного значения энергии $E_{пор}$, зависящей от массы налетающей частицы - $E_{пор} = F(M_1)$. До сих пор не дано точного объяснения природы этого эффекта. Качественно образование "нерегулярных" профилей можно представить следующим образом. Во-первых, "нерегулярные" профили характерны для ионов, не вступающих в химическую связь с атомами мишени. Во-вторых; при внедрении высокоэнергетичных легких ионов в резист в силу его высокой чувствительности к неупругим потерям энергии (радиационно-химический выход деструкции G_e как минимум вдвое [16] выше G_n) в приповерхностной области возникает большое количество подвижных "фрагментов", что облегчает диффузию внедренных атомов в направлении поверхности.

Приведенные на рис.1 профили имплантированных в ПММА ионов N^+ имеют вид распределения гаусса с небольшой асимметрией. В табл.1 приведены рассчитанные по программе TRIM 95 значения γ и β . Видно, что качественно поведение $\gamma(E)$ и $\beta(E)$ правильное. Распределений, подобных описанным в [12], нами не обнаружено. Следовательно, соотношение упругих и неупругих потерь энергии налетающих ионов является необходимым, но недостаточным критерием формирования "нерегулярных" профилей. Кроме того, анализ распределения ионов азота при больших дозах имплантации ($D = 5 \cdot 10^{17}$ см $^{-2}$) показал существование распределений, характерных для образования химических соединений. Поэтому к энергетическому критерию образования "нерегулярных" распределений следует добавить химическую инертность внедряемых ионов по отношению к полимерной матрице.

Обнаружено наличие существенных расхождений между экспериментально определенными и теоретически рассчитанными значениями R_p и ΔR_p . Из табл.1 видно, что для всего диапазона энергий имплантированных ионов N^+ $R_p^3 > R_p^T$, $\Delta R_p^3 > \Delta R_p^T$. Величина расхождений $\Delta = (R_p^3 - R_p^T)/R_p^3$ составляет 40–50 %. Вместе с тем наше экспериментальное значение R_p^3 (N^+ 300 кэВ) хорошо согласуется с аналогичным результатом [14].

Таблица 1

Траекторные параметры $R_p, \Delta R_p, \gamma, \beta$, потери энергии на упругие $[dE/dx]_n$ и неупругие $[dE/dx]_e$ столкновения ионов N^+ , имплантированных в ПММА

Энергия, кэВ	R_p^T , нм	ΔR_p^T , нм	R_p^3 , нм	ΔR_p^3 , нм	γ	β	$[dE/dx]_e$ эв/Å	$[dE/dx]_n$ эв/Å	γ'
100	317	56,7	550	167	-1,28	5,6	28,5	4,9	0,051
125	385	53,8	650	185	-1,24	5,4	31,0	4,2	0,042
150	451	56,3	720	181	-1,39	6,0	33,4	3,8	0,034
200	569	64,4	800	—	-1,72	8,0	37,5	3,1	0,030
250	680	67,9	860	—	-1,85	9,0	40,6	2,8	0,025
300	783	71,3	1100	—	2,10	10,7	44,1	2,4	0,020

Таблица 2

Траекторные параметры $R_p, \Delta R_p, \gamma, \beta$, потери энергии на упругие $[dE/dx]_n$ и неупругие $[dE/dx]_e$ столкновения ионов P^+ , имплантированных в ПММА

Энергия, кэВ	R_p^T , нм	ΔR_p^T , нм	R_p^3 , нм	ΔR_p^3 , нм	γ	β	$[dE/dx]_e$ эв/Å	$[dE/dx]_n$ эв/Å	γ'
60	90	21,2	180	130	-0,48	3,0	20,3	30,7	0,26
80	119	26,7	230	84	-0,55	3,1	22,8	27,8	0,24
110	162	34,7	257	170	-0,67	3,4	25,3	24,5	0,22
145	211	43,3	365	244	-0,80	3,7	28,5	21,8	0,22

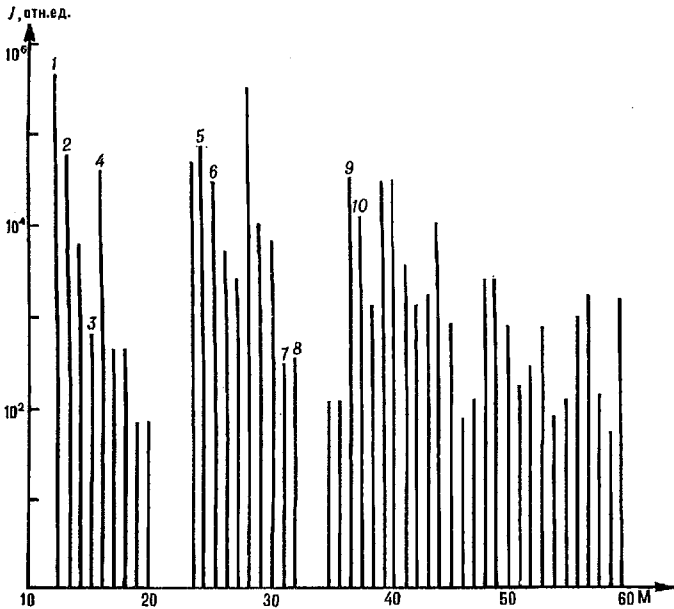


Рис.3 Выход продуктов распыления при травлении ПММА, имплантированного ионами P^+ (145 кэВ), ионами O^{2+} с энергией 12,3 кэВ: 1 – C^+ , 2 – CH^+ , 3 – CH_3^+ , 4 – O^+ , 5 – C_2^+ , 6 – C_2H^+ , 7 – P^+ , 8 – O_2^+ , 9 – C_3^+ , 10 – C_3H^+

На рис.2 приведены определенные методом ВИМС профили пространственного распределения ионов P^+ , имплантированных в ПММА. Значения соответствующих траекторных параметров приведены в табл.2. В данном случае $W \cong 1$ и распределение внедренной примеси должно быть близко к гауссовскому. Наблюдается та же тенденция, что и в вышеописанном случае: $R_p^2 > R_p^T$, $\Delta R_p^2 > \Delta R_p^T$. Обращаясь к имеющимся экспериментальным данным по пробегам ускоренных ионов в ОМ, можно отметить систематическое занижение проецированного пробега и страгглинга при использовании известных программ TRIM. Моделирование ионного легирования ОМ с помощью модифицированной нами базовой версии TRIM 85 показало, что результаты расчета слабо зависят как от конкретной модели неупругих потерь энергии (локальные, нелокальные, полуполокальные), так и от вида потенциала ион-атомного взаимодействия (универсальный, Мольера, С-Кг).

На форме спектров (рис.2) сказывается также распыление мишени при ионной бомбардировке. Причем рассчитанный на основе программы TRIM 95 коэффициент физического распыления Y^f (табл.1,2) не может объяснить наблюдаемое при имплантации ионов N^+ и P^+ изменение толщины Δd пленок. Так, при имплантации ионов N^+ (150 кэВ) дозой $D = 1,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$ в ПММА величина Δd , найденная из эллипсометрических измерений, составляет $\Delta d \cong 500 \text{ \AA}$. В [17] показано, что при облучении пленок полиимида ионами N^+ (100 кэВ, $D = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$) $\Delta d = 500 \text{ нм}$. Составляющая Δd , связанная с физическим распылением Δd^f , есть: $\Delta d^f = (Y^f / N_0) \cdot D$, N_0 — плотность атомов мишени. Подставляя $N_0 = 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $Y^f = 1$, получаем, что при $D = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ $\Delta d = 10 \text{ \AA}$. Следовательно, физическое распыление в данном случае не является доминирующим процессом, приводящим к потере толщины пленки. При проведении ВИМС нами анализировался состав продуктов распыления (рис.3) ионами O^{2+} (12,3 кэВ). Видно, что доминирующими продуктами травления являются заряженные "фрагменты". Причем, не вдаваясь в детали масс-спектров, можно сразу указать их более сложный характер, чем при радиолизе того же ПММА (H_2 — 18%, CH_4 — 15%, CO — 36%, CO_2 — 25%, C_3H_8 — 5,3%) [18]. Таким образом, коэффициент физического распыления Y^f , рассчитанный на основе программы TRIM 95, является только малой составляющей суммарного значения Y^t , величина которого должна определяться экспериментально для широкого набора комбинаций ион (энергия) — мишень.

Профили внедренных в ПММА ионов P^+ восстанавливались также из спектров ROP ионов He^+ с использованием программы HEAD 6. С методической точки зрения, имеется проблема применения ROP-анализа для получения профилей внедренных в ОМ ускоренных ионов. При переводе шкалы энергий в шкалу глубин необходимо знать атомную плотность материала мишени N_{AT} , которая изменяется в зависимости от условий облучения $N_{AT} = f(E, D, Z_1)$. Для определения N_{AT} мы подгоняли рассчитываемое из ROP-спектров R_p к соответствующему значению, полученному методом ВИМС. Найденное таким образом значение атомной плотности составляет для всех энергий ионов фосфора величину $N_{AT} = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, что меньше N_{AT} графита.

Таким образом, в результате проведенной работы можно сделать следующие выводы.

1. Несмотря на ряд методологических трудностей, метод ВИМС может успешно применяться для определения основных траекторных параметров ускоренных ионов, имплантированных в ОМ, а также дает возможность исследовать механизмы травления полимеров ионными пучками.

2. Экспериментально определенные и рассчитанные методом МК величины R_p и ΔR_p ионов N^+ и P^+ , имплантированных в ПММА, существенно различаются. Анализ имеющихся расхождений показывает их систематический характер.

3. При имплантации ионов азота не образуется "нерегулярных" профилей распределения и вопросы их формирования требуют дальнейших исследований.

Настоящая работа была частично поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук, а также Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Комаров Ф.Ф., Леонтьев А.В., Туровец О.Л. // Микроэлектроника. 1992. Т.21. Вып.1. С.75.
2. Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. // The stopping and ranges of ions in solids. New York, 1985.
3. Moller W., Eckstein W., Biersack J.P. // Comput. Phys. Comm. 1988. V.51. P.355.
4. Tennant D.M., Dayem A.H., Howard R.E. // J. Vac.Sci.Techn. B.3(1). 1985. P.458.
5. Sabin J.R., Oddershede J. // NIM. 1987. B.27. P.280.
6. Grande P.L., Fichtner P.F.P., Behar M., Zawislak F.C. // Ibid. 1988. B.33. P.122.
7. Grande P.L., Zawislak F.C., Fink D., Behar M. // NIM (B). 1991. V.61. P.282.
8. Behar M., Grande P.L., Amaral L., Kashny J.P., Zawislak F.C. // Phys.Rev.(B).1990. V.41. N10. P.6145.
9. Ke-Ming Wang at all. // J.Appl.Phys. 68(7).1990. P.3187.
10. Guimaraes R.B., Behar M., Livi R.P. at all. // NIM. 1987. B.19/20. P.882.
11. Leontyev A.V., Ostretsov E.F., Grigoryev V.V., Komarov F.F. // Ibid. 1992. B.65. P.438.
12. Fink K.D., Muller M., Stettner U. // Ibid. (B).1988.V.32. P.150.
13. Guimaraes R.B., Amaral L., Behar M., Zawislak F.C., Fink D. // Ibid. 1989. B.39. P.800.
14. Wilson R.G. // J. Appl.Phys. 73.(5).1993. P.2215.
15. Вудраф Д., Делчар Т. Современные методы исследования поверхности. 1989.
16. Валиев К.А., Раков А.В. Физические основы субмикронной литографии в микроэлектронике. М.,1984.
17. Trigaud T., Moliton J.P., Jussiaux C., Maziere B. // NIM. 1996. B.107. P.323.
18. Иванов В.С. Радиационная химия полимеров. М.,1988.

Поступила в редакцию 02.09.96.

УДК 621.315.592

А.А. КОМАРОВ

ТЕРМИЧЕСКИЕ ПИКИ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ИОНОВ В КРИСТАЛЛАХ И ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕКОВ

On the basis of the "thermal spike" model consideration was given to effects of high-energy ion implantation into targets with different types of conductivity (Ge,Cu,Pb). Numerical calculation of excited region temperature as a function of time and distance from track axis is presented.

К настоящему времени существует несколько моделей описания дефекто- и трекообразования в процессе высокоэнергетической ионной имплантации. Одними из основных являются модель кулоновского взрыва и модель термического, или теплового, пика. Первая удовлетворительно описывает эффекты имплантации ионов в легкие мишени (такие, как нитрид бора, кремний, углерод и т.п.). Причем согласие с экспериментом тем лучше, чем ближе скорость падающих ионов к скорости электронов самой близкой к ядру К-оболочки в атомах мишени. В этом случае движущийся ион создает в мишени высокоионизованную среду цилиндрической формы, неустойчивую из-за расталкивания одноименных зарядов [1].

В литературе обсуждается также модель термического пика. Наблюдается соответствие теоретических и экспериментальных результатов в МэВ-диапазоне энергий. В рамках этой модели обычно рассматривают передачу энергии от возбуждаемой налетающим ионом электронной подсистемы в решетку главным образом через электрон-фононные взаимодействия. Кроме двух указанных моделей можно отметить еще одну — модель формирования ударных волн.

Впрочем, авторы [2] небезосновательно указывают на то, что все эти три модели имеют свои специфические и не всегда второстепенные недостатки и соответственно требуют дальнейшей проверки и развития. Так, например, они указывают на то, что нет никакой необходимости привлекать возбуждение К-оболочек атомов мишени к объяснению процессов создания дефектов структуры. Механизм формирования ударных волн также пока остается дискуссионным.

В настоящей работе используется модель термических пиков в применении к случаю высоких энергий имплантируемых ионов. При торможении в кристалле быстрый ион теряет свою энергию главным образом на возбуждение и отрыв электронов атомов решетки. Так, для кремния, принимая величину потерь энергии на единицу пути в образце $dE/dx \approx 10$ кэВ/нм, получаем, что плотность возбужденных электронов в области диаметром 10 нм составляет 10^{20} см⁻³ и более [3]. При столь высоких уровнях возбуждения действуют сразу несколько каналов релаксации. Передача энергии в решетку происходит через электрон-фононные и фон-фон-фононные взаимодействия. Все эти процессы идут с огромными скоростями. Так, характерное время электрон-электронной релаксации $t_{e-e} = 10^{-10} \div 10^{-7}$ с для Si и $10^{-15} \div 10^{-12}$ с для Al; электрон-фононной релаксации $t_{e-ph} = 10^{-11} \div 10^{-10}$ с для Si и $10^{-12} \div 10^{-11}$ с для Al [4]. Время фон-фон-фононной релаксации t_{ph-ph} составляет $\approx 10^{-12}$ с [3]. Следует отметить, что существует ярко выраженная зависимость t_{e-e} , t_{e-ph} , t_{ph-ph} от энергии налетающих ионов и возбужденных электронов. К примеру, при увеличении средней энергии "горячих" электронов от 0,1 до 3 эВ t_{e-e} увеличивается на 2 порядка ($8 \cdot 10^{-10} \rightarrow 1,1 \cdot 10^{-7}$ с) для Si и уменьшается на 3 порядка ($4,2 \cdot 10^{-12} \rightarrow 5,2 \cdot 10^{-15}$ с) для Al.

Таким образом, в зависимости от материала мишени характерное время взаимодействия может существенно изменяться в ту или иную сторону при изменении энергии налетающего высокоэнергетического иона.

Сразу же после образования ионом перегретой цилиндрической области радиуса r_0 электронная температура уменьшается в основном за счет диффузии нагретых электронов. На этой стадии теплопередачей от электронов решетке можно пренебречь и рассчитать r_0 согласно выражению [5]:

$$r_0 = \frac{I^2}{4\pi Z_b N e^4}, \quad (1)$$

где I — средний потенциал ионизации атомов мишени, $e = e_0 / \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ (e_0 — заряд электрона, ϵ_0 — электрическая постоянная) — приведенный заряд электрона, N — атомная плотность мишени, Z_b — число связанных электронов на один атом мишени.

Для радиального температурного распределения используем формулу, предложенную в [6]:

$$T(r, t) = \frac{T_0}{1 + 4\delta t / r_0^2} \exp \left[-\frac{(r / r_0)^2}{1 + 4\delta t / r_0^2} \right],$$

где δ — коэффициент термической диффузии среды, r_0 — радиус трека (см.(1)), r — расстояние от оси трека, t — промежуток времени от момента возникновения трека, T_0 — начальная температура в области трека, которая рассчитывается по [6]:

$$T_0 = \frac{\alpha (dE / dx)}{\pi N C_V r_0^2},$$

где C_V — удельная теплоемкость вещества мишени, α — доля выделенной энергии, превращающейся в тепло, (dE / dx) — потери энергии иона на единицу пути, рассчитываются по формуле, получаемой из классических соображений [7]:

$$(dE / dx) = \frac{4\pi N e^4 Z_{eff}^2}{m_e v^2} Z_b \text{Ln} \left[\frac{2m_e v^2}{I} \right],$$

где m_e — масса электрона, Z_{eff} — эффективный заряд налетающего иона, зависящий от его начальной энергии:

$$Z_{eff} = Z(1 - \exp[-v / (v_0 Z^{2/3})]),$$

где Z – атомный номер иона, v – начальная скорость иона,

$$v_0 = 2\pi e^2 / h,$$

где h – постоянная Планка.

С помощью созданной программы был проведен расчет температурного распределения в мишенях разного типа проводимости (Ge, Cu, Pb) при высокоэнергетической ионной имплантации. Автора прежде всего интересовало время, непосредственно следующее за моментом образования возбужденной налетающим ионом области, так как скорость релаксации по энергии очень велика. В зависимости от температуры плавления мишени, начальной энергии иона и подвижности электронов в мишени могут формироваться либо нет (за счет резкой закалки дефектов) пространственные дефектные образования, в том числе и скрытые треки. Если доза достаточно велика, то можно ожидать большого разупорядочения или аморфизации материала мишени.

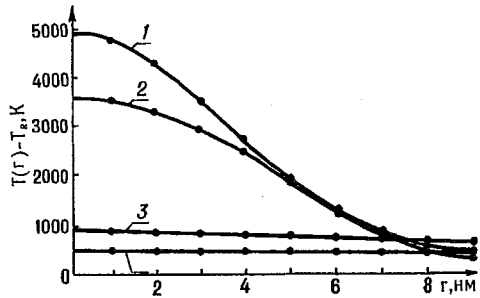
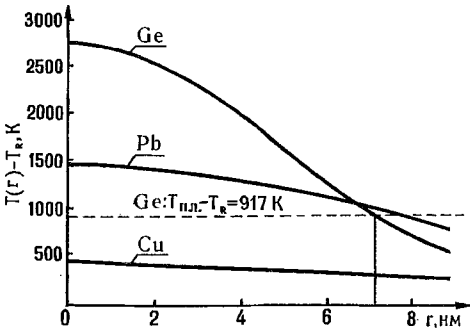


Рис.1. Результаты расчета локального температурного поля в образцах Ge, Pb, Cu как функции расстояния от оси возбужденной области, возникающей при прохождении частиц высоких энергий (осколков ядерного деления с характеристиками: $Z=20$, $E=80$ МэВ, $M=100$ а.е.м.) в момент времени $t=10^{-12}$ с

Рис.2. Временная эволюция локального температурного поля в образцах Ge, облученного частицами высоких энергий. Кривые 1–4 соответствуют моментам времени: $t_1=1 \cdot 10^{-13}$ с, $t_2=5 \cdot 10^{-13}$ с, $t_3=5 \cdot 10^{-12}$ с, $t_4=1 \cdot 10^{-11}$ с. Спецификация частиц та же, что и для рис.1

Так, для меди температура в центре трека мала по сравнению с температурой плавления ($T_{пл} \approx 1350\text{K}$), а для свинца велика ($T_{пл} \approx 600\text{K}$). Сравнивая радиальное температурное распределение (рис.1) с температурой плавления Ge ($T_{пл} \approx 1210\text{K}$) и принимая T_R равной комнатной, можно оценить радиус трека (для Ge: $r_0 \approx 7$ нм). Видно также, что существует ярко выраженная зависимость времени релаксации трека по энергии от типа проводимости рассматриваемого материала (для меди оно меньше 10^{-12} с, а для Ge и Pb превышает 10^{-12} с). Полученные результаты (рис.1,2) объясняют, например, отсутствие треков значительного разупорядочения в мишенях с высокой электропроводностью и совершенной структурой, для которых единственным эффективным механизмом создания разупорядочения, по-видимому, является механизм упругих столкновений (Cu) и их присутствие в таких материалах, как Pb и Ge.

Автор выражает благодарность проф. Ф.Ф.Комарову за обсуждение и критические замечания, немало способствовавшие улучшению данной работы.

1. Комаров Ф. Ф. //Изв. вузов. Физика. 1994. №5. С.23.
2. Toulemonde M., Bouffard S., Studer F. // Nucl.Instr. and Meth. 1994. B91. P.108.
3. Глушцов А.И., Комаров Ф.Ф., Новиков А.П. и др. // Докл. АН БССР. 1987. Т.31. №7. С.609.
4. Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Хоанг А. Т. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. №5. С.81.
5. Калиниченко А.И., Лазурик В.Т. //ЖЭТФ. 1973. Т.65. С.2364.
6. Bitensky I.S., Demirev P., Sundqvist B.U.R. // Nucl.Instr. and Meth. 1993. B82. P.356.
7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.,1989. Т.5. Ч.2.

Поступила в редакцию 15.02.96.

ВЛАГОСТОЙКОСТЬ ПРИМЕСНОСИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

Moisture resistance of doped silicate glasses used in planarization of integrated circuits has been experimentally studied. It has been shown that leaching of a dopant can take place under the effect of moisture. The measures aimed at the improvement of moisture resistance of the above glasses are demonstrated.

Одним из обязательных требований, предъявляемых к изделиям электронной техники, является их эксплуатационная надежность и стабильность рабочих параметров при воздействии на них разнообразных климатических факторов, в том числе и влаги. Поскольку в качестве межуровневой и пассивирующей изоляции в технологии интегральных схем используются пленки примесносиликатных стекол, то их влагостойкость во многом будет определять качество изделий микроэлектроники. Эти соображения побудили нас к детальному исследованию устойчивости боро-, фосфо- и борофосфосиликатных стекол (БСС, ФСС, БФСС) к воздействию влаги.

Исследуемые образцы представляли собой пластины монокристаллического кремния марки КЭФ-4,5 с осажденными на них пленками примесносиликатных стекол методом вакуумного пиролиза элементоорганических соединений и низкотемпературного окисления моносилана при атмосферном давлении [1,2]. Температура осаждения пленок БСС и БФСС составляла 325°C, а для ФСС – 320–690°C. Термическая обработка данных пленок проводилась в атмосфере сухого кислорода при $T=850^\circ\text{C}$ в течение 45 мин. Воздействие влаги моделировалось кипячением пластин в деионизованной воде при атмосферном давлении в течение 60 мин. Влагостойкость исследуемых образцов оценивалась путем сравнения таких параметров, как толщина пленки, массовое содержание легирующих примесей и содержание воды до и после воздействия влаги. Кроме того, в процессе кипячения отслеживался рН водного раствора. Для определения указанных параметров использовались известные методики. Так, толщина пленок определялась спектрофотометрическим методом на спектрометре MPV-SP Leitz [3]. Массовое содержание бора в пленках определялось ИК-спектрометрическим методом [4], а фосфора – методом рентгеновской флуоресценции [5]. Запись ИК-спектров пропускания производилась через 2 ч после осаждения пленок с помощью ИК-спектрофотометра "Specord 80M" в диапазоне частот 4000–400 см⁻¹.

Изменение состава пленок при испытаниях на влагостойкость

Диэлектрик	Т осаждения, °С	Состояние образца	Содержание легирующей примеси, масс. %				Содержание влаги, масс. %			
			Свежеосажденные пленки		После воздействия влаги		Свежеосажденные пленки		После воздействия влаги	
			СВ	СР	СВ	СР	H ₂ O	ОН	H ₂ O	ОН
ФСС	320	а	–	6,30	–	4,85	–	–	7,87	1,34
		б	–	6,28	–	6,25	–	–	–	–
ФСС	435	а	–	6,40	–	5,90	–	–	–	–
		б	–	6,15	–	6,13	–	–	–	–
ФСС	480	а	–	5,17	–	5,05	–	–	–	–
		б	–	5,15	–	5,14	–	–	–	–
ФСС	690	а	–	5,51	–	5,51	–	–	–	–
		б	–	5,51	–	5,51	–	–	–	–
БСС	325	а	5,90	–	5,00	–	3,40	6,22	6,69	4,17
		б	5,40	–	5,38	–	–	–	0,43	1,55
БФСС	325	а	5,65	5,03	3,75	3,15	2,71	0,07	5,20	0,92
		б	5,00	4,99	5,0	4,93	–	–	0,50	1,67

Примечание: а – свежеосажденный диэлектрик, б – после термоотжига при $T=850^\circ\text{C}$.

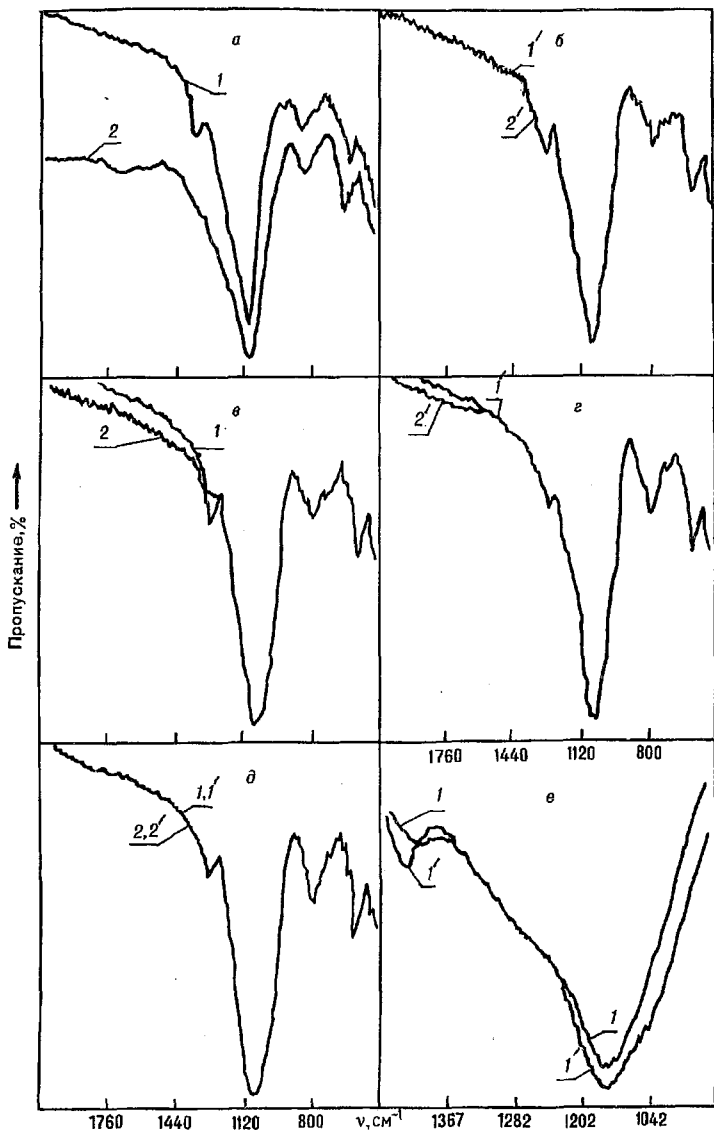


Рис.1. ИК-спектры пропускания пленок ФСС:
 температура осаждения: а, б – 325°C; в, г – 435°C, д – 690°C;
 е – 390°C; 1 – свежеосажденные пленки, 1' – термоотожженные
 пленки при $T=850^{\circ}\text{C}$, 2 – свежеосажденные пленки после кипячения
 в воде, 2' – термоотожженные пленки после кипячения в воде

Следует отметить, что для всех исследованных образцов, как свежеосажденных, так и после термоотжига, не обнаружено сколько-нибудь существенного изменения толщины пленок после воздействия влаги. Водная среда во всех случаях сохраняла нейтральную реакцию ($\text{pH}=7$).

Данные по изменению массового содержания легирующих примесей бора и фосфора до и после кипячения представлены в таблице. Как следует из анализа данных таблицы, в свежеосажденных пленках влагостойкость определяется в основном температурой их формирования. При температурах осаждения ниже 480°C во всех исследованных пленках БСС, ФСС и БФСС наблюдается эффект выщелачивания легирующих примесей. И только в пленках, осажденных при $T=690^{\circ}\text{C}$, указанный эффект, т.е. уменьшение содержания фосфора, не наблюдается. Значительно повышает влагостойкость отжиг пленок при $T_{\text{отж}}=850^{\circ}\text{C}$.

Эти данные коррелируют с результатами расчетов влагосодержания в данных пленках, представленных в таблице. Массовое содержание влаги

оценивалось по методике, использованной в работе [6], позволяющей рассчитать процент содержания воды и ОН-комплексов по оптическим плотностям характеристических полос поглощения на частотах 3330 см^{-1} и 3650 см^{-1} соответственно. Данная методика не отличается высокой точностью, однако позволяет отследить тенденцию изменения содержания влаги в пленках до и после кипячения.

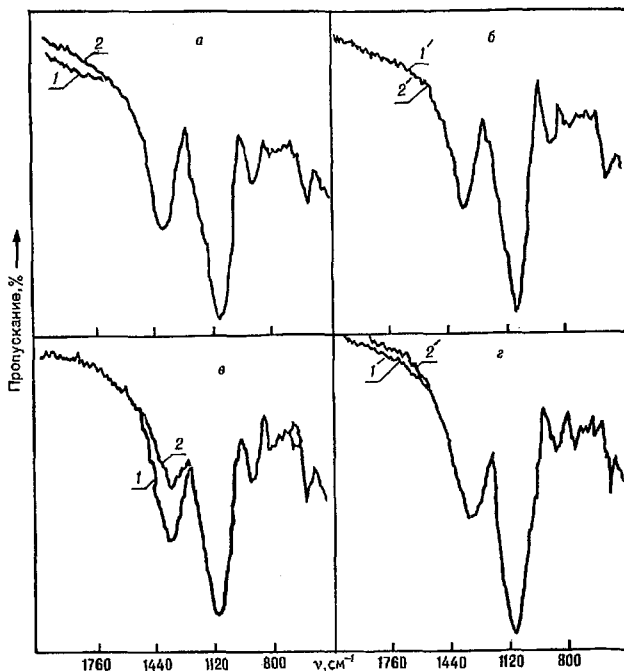
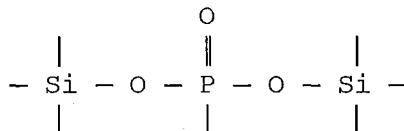


Рис.2. ИК-спектры пропускания БСС (а,б) и БФСС (в,г): 1 - свежесажденные пленки, 1' - термоотожженные пленки при $T=850^\circ\text{C}$, 2 - свежесажденные пленки после кипячения в воде, 2' - термоотожженные пленки после кипячения в воде

Зарегистрированные ИК-спектры пропускания представлены на рис.1 и рис.2. Анализ ИК-спектров свежесажденных при $T < 500^\circ\text{C}$ пленок ФСС показывает, что характеристическая полоса поглощения связи фосфор-кислород смещена в низкочастотную область 1306 см^{-1} и не может быть классифицирована, как связь $P=O$, которая характеризуется частотой 1320 см^{-1} [7]. Можно предположить, что фосфор в данных пленках входит в структуру стекла в состоянии, отличном от приведенного [8]:



и, вероятно, валентность его в свежесажденной пленке равна III. Нахождение в таком метастабильном состоянии может явиться причиной выщелачивания фосфора из пленок, осажденных при температурах $320\text{--}480^\circ\text{C}$ при кипячении. В пленках ФСС, осажденных при температурах порядка 690°C или отожженных при $T=850^\circ\text{C}$, весь фосфор сохраняется и находится в состоянии $P=O$ [1,7,11]. Этим можно объяснить влагостойкость пленок ФСС. На рис.1,е показана трансформация ИК-спектра пленки ФСС, осажденной при 300°C , а затем отожженной при 850°C .

Интенсивная адсорбция влаги неотожженными пленками БСС и БФСС может быть связана с большим количеством разорванных силоксановых групп на границе раздела диэлектрик-атмосфера, что делает поверхность более гигроскопичной [9]. Кроме того, гигроскопичность, а следовательно,

и низкая влагостойкость пленок, осажденных при низких температурах, может быть обусловлена микрошероховатостью и рыхлостью поверхности, что увеличивает контактирующую с атмосферой поверхность пленок. Термический отжиг уменьшает количество разорванных связей путем упорядочения системы, что увеличивает влагостойкость, а происходящий при термоотжиге процесс оплавления примесносилкатного стекла дополнительно стабилизирует его параметры путем минимизации площади поверхности.

Таким образом, осажденные при средних температурах пленки БСС, ФСС и БФСС с последующим отжигом при $T=850^{\circ}\text{C}$ удовлетворяют требованиям современной технологии по влагостойкости. Однако в случае осаждения указанных пленок на алюминиевую металлизацию термоотжиг при $T=850^{\circ}\text{C}$ недопустим. Альтернативой может быть применение "плазменных" пленок диоксида и оксинитрида кремния с присадкой фосфора [12], отличающихся повышенной влагостойкостью.

Процесс выщелачивания легирующих примесей возможен также при химических обработках свежесажденных стекол, сформированных при температурах ниже 480°C , что значительно ухудшает их способность к оплавлению.

Работа выполнена при финансовой поддержке НПО "Интеграл". Запись ИК-спектров произведена Г.М.Сороко. Помощь в обработке данных ИК-спектроскопии оказал С.Н. Шашков.

1. Лабуда А.А., Сидерко А.А. // Вакуумная техника и технология. 1994. №2. Т.4. С.52.
2. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №1. С.25.
3. Быстров Ю.А., Колчин Е.А., Котлецов Б.Н. Технологический контроль размеров в микроэлектронном производстве. М., 1988. С.168.
4. Hudhes M. C., Wondsidler D. B. // J. Electrochem. Soc. 1987. V.134. №6. P.1488.
5. Вилков Л.В., Пентин Ю.А. Физические методы исследования в химии. М., 1989. С. 288.
6. Pliskin W. A. // J. Vac. Sci. Technol. 1977. V.14. №5. P.1064.
7. Tenney A. S., Chezzo M. // J. Electrochem. Soc. 1973. V.120. №9. P.1279.
8. Гончакова Н.Н., Левнева В.А., Тулин В.А. // Электронная техника. Сер.6. Материалы. 1986. Вып.5. С.46.
9. Моро У. Микролиитография: В 2 ч. М., 1991. С.1240.
10. Турцевич А.С., Зайцев Д.А., Кабанов М.М. // Электронная техника. Сер.3. Микроэлектроника. 1992. Вып.1,146. С.24.
11. Грибов Л.А., Деменьтьев В.А. Методы и алгоритмы вычислений в теории колебательных спектров молекул. М., 1981. С.355.
12. Плазменная технология в производстве СБИС / Под ред. Н.Айспрука, Д.Брауна. М., 1987. С.470.

Поступила в редакцию 11.11.96.

УДК 535.337

С.В. БАРАРЬ, А.П. ЗАЖОГИН, М.Н. КОВАЛЕНКО

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ИОНОВ Cr^{3+} ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ И КОНЦЕНТРАЦИЯХ ЕГО В САПФИРЕ

The temperature effect on spectral characteristics of luminescence of chromium ions with varying concentrations in sapphire has been investigated. It has been determined that the change in spectral characteristics (halfwidths and shift of R-lines) in the crystals depending on temperature is adequately governed by the power law. The possibility for using ruby crystals with the concentration of chromium ions of the order of 0,7–0,75% as contactless temperature detectors for samples has been demonstrated.

Большой интерес для таких разделов физики, как материаловедение, физика твердого тела, представляют рентгеноструктурные исследования материалов при очень высоких давлениях и температурах. Прогресс в методах получения и измерения высокого давления и температуры позволил произвести обширные исследования структуры твердых веществ, причем измерение давлений и температур в этих экспериментах производилось по

спектрам люминесценции рубина. В то же время в литературе имеются противоречия в оценке возможности использования рубина для измерения тех или иных значений давления и температуры. По-видимому, это обусловлено тем, что в различных установках использованы рубины с различной концентрацией ионов хрома [1–3].

Поэтому в настоящей работе была поставлена задача исследовать влияние температуры на спектральные характеристики люминесценции ионов Cr^{3+} при различных его концентрациях в сапфире, определить область концентрации, наиболее оптимальную для использования в упомянутых экспериментах.

В ходе работы изучались спектры люминесценции трех образцов рубина, концентрация хрома в которых была определена с помощью атомно-эмиссионного спектрального анализа.

При исследовании в области температур от комнатной и выше каждый образец устанавливался в камере с регулируемой температурой, а при низких температурах помещался в сосуд Дюара. Люминесценция кристаллов рубина регистрировалась полихроматором MDD 500×2, на выходе которого установлен оптический многоканальный анализатор (ОМА). Обратная линейная дисперсия прибора 0,84 нм/мм.

Спектры люминесценции образцов рубина изучались при изменениях температуры от 77 до ~523 К.

При комнатной температуре спектр люминесценции образца №1 (0,75% Cr^{3+}) состоит из двух хорошо разрешенных R_1 и R_2 -линий, расположенных в области 6943,0 Å и 6928,2 Å соответственно (рис.1,б). При увеличении температуры до 323 К происходит сдвиг R -линий в более длинноволновую область спектра. Уже при $T=423$ К, как видно на рис.1,в, R_1 и R_2 -линии практически сливаются в одну, а их интенсивность падает при тех же условиях снятия спектра.

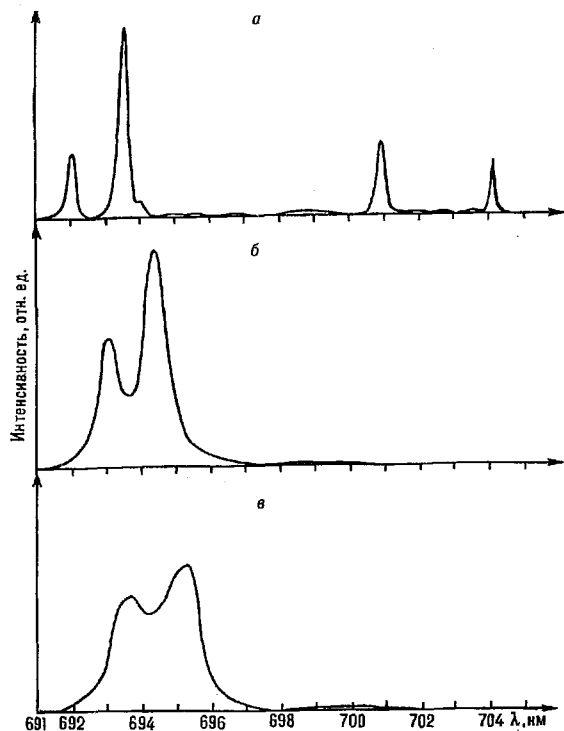


Рис.1. Спектры люминесценции кристалла рубина с содержанием хрома 0,75% при различной температуре (T ,К):

a – 77; b – 290; v – 423

При температуре жидкого азота максимумы R_1 и R_2 -линий находятся в области 6934,8 и 6921,1 Å соответственно. На длинноволновом крыле линии R_1 наблюдается небольшой пик в области 6938,5 Å (рис.1,а). При этой же температуре на длинах волн 7008,6 и 7040,3 Å наблюдаются N -линии. При $T=198$ К (температура сухого льда) эти линии в спектре еще проявляются, хотя интенсивность их существенно уменьшается. По положению они смещаются в длинноволновую сторону спектра на 0,1 нм. При комнатной температуре N -линии не наблюдаются. Поэтому в практических целях для нас имеет большее значение исследование температурной зависимости люминесценции R -линий.

Зависимости длины волны, полуширины и интенсивности R_1 -линии от температуры представлены в табл.1. Следует отметить, что значения интенсивности линии, полученные при нагревании образца от комнатной температуры и выше, можно считать сопоставимыми друг с другом, так как измерения спектров проводились на одной и той же установке. Исследования кристаллов при низких температурах происходили на другой установке, при другой ширине щели полихроматора, поэтому эти величины сопоставлять с данными при высоких температурах нельзя. В скобках указаны интенсивности линий при увеличенном числе считываний в 5 раз.

Таблица 1

Положение $\lambda(R_1)$, интенсивность I (отн. ед.) и полуширина $\Delta\nu(R_1)$ линии R_1 для образцов рубина

Образец	Параметр	Температура, К					
		77	198	290	323	373	423
1	$\lambda(R_1), \text{Å}$	6934,8	6935,2	6943,5	6948,5	6949,7	6953,3
	Интенсивность R_1	2354	6171	2968	2535	2006	(1931)
	$\Delta\nu(R_1), \text{см}^{-1}$	3,3	7,41	19,7	21,0	29,7	32,1
2	$\lambda(R_1), \text{Å}$	6934,2	6936,9	6943,3	6945,5	6947,6	6952,1
	Интенсивность R_1	2217	1688	3227	2107	1514	1476
	$\Delta\nu(R_1), \text{см}^{-1}$	4,4	11,1	14,9	17,1	25,0	29,9
3	$\lambda(R_1), \text{Å}$	6934,1	6937,3	6943,0	6946,2	6949,4	6955,6
	Интенсивность R_1	5526	1460	3415	2159	1275	446
	$\Delta\nu(R_1), \text{см}^{-1}$	2,7	4,1	15,6	23,0	25,1	55,0

Концентрация ионов Cr^{3+} в образце №2 составляет 0,71%, однако, по сравнению со спектром предыдущего образца, спектр люминесценции его в области R -линий имеет уже более широкие полосы, хотя и несколько большей интенсивности: $\lambda(R_1)=6942,3$ Å, $\lambda(R_2)=6928,8$ Å. Разрешенность этих линий уменьшается уже при $T=323$ К, сдвиг R_1 -линии в длинноволновую область спектра составляет примерно 3,2 Å. При $T=373$ К R_1 и R_2 -линии практически сливаются в одну общую линию (R_1+R_2). Следует отметить, что R -линии этого образца при температуре сухого льда так же, как и при комнатной, шире линий в спектре описанного ранее кристалла. При $T=77$ К очень хорошо наблюдаются N -линии, интенсивность которых превышает интенсивность R -линий. Зависимости интенсивности, полуширины и сдвига R_1 -линии от T также приведены в табл.1.

Образцом №3 является типичный генерационный рубин с содержанием хрома в корунде 0,05%. При комнатной температуре максимумы R_1 и R_2 -линий находятся на длинах волн 6943,0 и 6929,6 Å соответственно. При увеличении температуры до 323 К максимумы этих линий смещаются в длинноволновую область и равны соответственно 6946,2 и 6932,9 Å. При $T=423$ К интенсивность линий резко (приблизительно в три раза) падает, по сравнению с интенсивностью их при предыдущей температуре, поэтому дальнейшее нагревание кристалла не производилось. Значения интенсивности, длины волн и полуширины R -линий при различных температурах представлены в табл.1.

При низких температурах в спектрах люминесценции данного образца не наблюдается N -линий. При $T=77$ К $\lambda(R_1)=6934,8$ Å и $\lambda(R_2)=6921,1$ Å линии обладают хорошей интенсивностью и имеют малую ширину.

Как видно из приведенных результатов, при увеличении концентрации ионов Cr^{3+} в рубине спектр люминесценции изменяется. При малых концентрациях ($\sim 0,05\%$) абсолютный квантовый выход люминесценции рубина равен 0,47, причем на долю R -дублета приходится около 60% всего выхода люминесценции [4]. При увеличении концентрации хрома квантовый выход люминесценции в R -линиях падает, возникают N -линии и ряд других узких полос в красной области спектра. Исследование концентрационной зависимости этих и других дополнительных линий, указанных в [5,6], показывает, что их интенсивность нелинейно зависит от концентрации, что свидетельствует о принадлежности этих линий к спектру пар (или более сложных комплексов) обменно связанных друг с другом ионов хрома. Представляется вероятным, что многочисленные одиночные ионы хрома поглощают энергию возбуждающего излучения и передают ее гораздо более редким парам ионов хрома, которые испускают N -линии.

Появление двух R -линий, соответствующих одному переходу ${}^2E \rightarrow {}^4A_2$ объясняется расщеплением уровня 2E на два подуровня, отстоящих на 29 см $^{-1}$ друг от друга. При более низких температурах они сдвигаются в более коротковолновую область спектра и сильно сужаются. Вероятно, основным фактором, определяющим ширину линии при низкой температуре, являются неоднородные внутренние напряжения в кристалле [7]. Чем меньше напряжения, тем уже линия. Из работ [7,8] известно, что у типичного розового рубина ширина линии составляет $0,3$ см $^{-1}$ при 77 К. Образец №3 был вырезан из такого же генерационного рубина, однако из экспериментальных данных следует, что ширина линии при $T=77$ К составляет $2,7$ см $^{-1}$. Такое расхождение можно объяснить более низкой разрешающей способностью нашего прибора по сравнению с установками, указанными в [9].

Из табл.1 видно, что наиболее быстрое увеличение полуширины линии происходит в образце №3 ($0,05\%$ Cr^{3+}), причем, как было замечено, при $T > 373$ К наблюдается также резкий спад интенсивности. Значит, кристаллы с такой концентрацией примесных ионов невыгодно использовать при измерении высоких давлений и температур. Большой рост полуширины при увеличении температуры наблюдается в образце №1 ($0,75\%$), по сравнению с образцом №2 ($0,71\%$). Однако следует обратить внимание на то, что при этом интенсивность спектров люминесценции рубина с большей концентрацией хрома остается значительно выше, чем у образца №2 вплоть до $T=423$ К. Вследствие этого из исследуемых кристаллов наиболее пригодным рубином для регистрации температуры по его спектрам люминесценции является образец №1.

Смещение максимумов спектров люминесценции рубинов в длинноволновую область при увеличении как температуры, так и концентрации объясняется изменениями, происходящими в кристаллических решетках образцов: параметры кристаллической решетки a и c увеличиваются.

С помощью ПЭВМ и программы GPRO были найдены функции, описывающие зависимость длины волны, интенсивности и полуширины R_1 -линии от температуры в образцах рубина с различной концентрацией хрома. Изменение полуширины от температуры можно описать функцией вида:

$$\Delta\nu(T) = \Delta\nu_0 + (AT)^b, \quad (1)$$

где $\Delta\nu$ — полуширина R_1 -линии (см $^{-1}$); $\Delta\nu_0$ — полуширина линии для данного кристалла при 0 К; A — const, определяемая для каждого образца отдельно; T — температура (К); b — показатель степени, определяющий скорость роста $\Delta\nu$ при изменении температуры.

Постоянные $\Delta\nu_0$, A и b приведены в табл.2. По параметру b можно говорить о скорости уширения R -линии при увеличении температуры.

В ряде работ [8–10] измерение высоких температур предлагается производить также и по сдвигу R -линии. Для оценки этого предложения в работе была построена еще одна показательная функция, но описывающая теперь зависимость сдвига R_1 -линии от температуры:

$$\Delta\lambda_{R_1}(T) = (DT)^n, \quad (2)$$

где $\Delta\lambda_{R_1}$ – сдвиг максимума R_1 -линии относительно максимума при $T=77$ К; D – const, определяемая для каждого образца отдельно; n – показатель степени, определяющий скорость роста $\Delta\lambda$ при изменении температуры.

При высоких температурах, когда R_1 и R_2 -линии полностью перекрываются, сдвиг измерялся относительно максимума общей (R_1+R_2)-линии, по методике, предложенной в работах [8–10].

Значения D и n для каждого образца приведены в табл.2. Графическая зависимость сдвига линии от температуры показана на рис.2. При сравнении графиков каждого образца видно, что быстрее сдвигается в длинноволновую область спектр кристалла с большей концентрацией хрома.

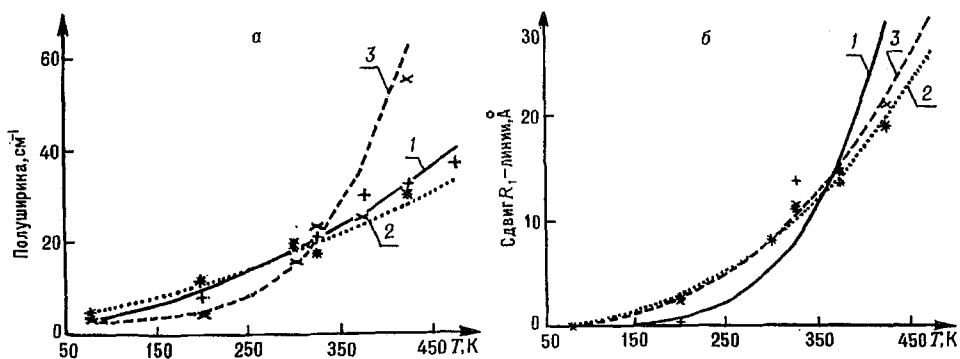


Рис.2. Температурные зависимости полуширины (а), смещения (б) R_1 -линии люминесценции кристаллов рубина; номера кривых соответствуют номерам образцов; экспериментальные точки образцов: 1 – +, 2 – *, 3 – x

Как было указано ранее, в выборе наиболее пригодного из исследуемых кристаллов рубина большую роль играет интенсивность их спектров люминесценции. Для ее описания в нашем случае можно использовать только значения интенсивности линий при высоких температурах (299 К $< T < 423$ К), так как экспериментальные исследования только в этом диапазоне проводились при неизменных условиях. При этом зависимость интенсивности от температуры оказалась практически линейной и ее можно описать функцией:

$$I(T) = h + k \cdot T, \quad (3)$$

где $I(T)$ – интенсивность линий; T – температура; h и k – постоянные коэффициенты, которые определены и приведены в табл.2. Коэффициенты h и k показывают скорость падения интенсивности линии люминесценции в различных образцах рубина.

Таблица 2

Параметры функций, описывающих поведение полуширины, интенсивности и сдвига линий люминесценции трех образцов рубина

Образец	$\Delta\nu_0$ см ⁻¹	A	b	D	n	h	k
1	2,80	0,0096	2,53	0,0046	5,29	2,543	-0,005
2	2,68	0,0057	4,64	0,0077	2,52	2,737	-0,062
3	3,40	0,0160	1,65	0,0072	2,75	2,743	-0,063

На основании экспериментальных данных по исследованию поведения спектров люминесценции различных кристаллов рубина от температуры можно сделать следующие выводы: зависимость полуширины и сдвига линий рубина от температуры описывается показательной функцией, наиболее устойчивые и интенсивные линии люминесценции при изменении температуры принадлежат кристаллу рубина с содержанием хрома 0,75%, наличие *N*-линий сильной интенсивности в низкотемпературных спектрах кристаллов с большим содержанием Cr^{3+} дает возможность использовать спектр люминесценции этой области в таких установках, где необходимо измерение очень низких температур при высоких давлениях.

1. Свиридов Д.Т., Смирнов Ю.Ф. Теория оптических спектров ионов переходных металлов. М., 1977.
2. Свиридов Д.Т., Свиридова Р.К., Смирнов Ю.Ф. Оптические спектры ионов переходных металлов в кристаллах. М., 1976.
3. Арсеньев П.А., Свиридов Д.Т. Кристаллография. 1969. №14. С.687.
4. Феофилов П.П., Тимофеева В.А., Толстой М.К., Беляев Л.М. // Оптика и спектроскопия. 1965. Т.19. С.817.
5. Свиридов Д.Т., Севастьянов Б.К. и др. // Там же. 1973. Т.35. Вып.1. С.102.
6. Бокша О.Н., Варина Т.М., Попова А.А. Кристаллография. 1972. Т.15. С.5.
7. Прингсхейм П., Фогель М. Люминесценция жидких и твердых тел. М., 1948.
8. Гёттель, Мао, Белл. // ПНИ. 1985. №7. С.127.
9. Hiroshi Iwasaki, Shiego Sueno, Osamu Shimomura. New modification of the high-temperature X-rays diamond-anvil press and an accurate method of pressure-temperature determination. Tokyo, 1986.
10. Павловский А.И., Таценко О.М. и др. // Письма в ЖТФ. 1986. Т.12. Вып.22. С.35

Поступила в редакцию 24.06.96.

УДК 621.382.537.33:621.317

А.Д.АНДРЕЕВ, А.М.БЕЛЬСКИЙ, А.А.ВАЛИЕВ

ОСОБЕННОСТИ ВАХ МОП-ПТ С ВЫСОКОЛЕГИРОВАННОЙ ПОДЛОЖКОЙ

The current-voltage characteristics of the MOSFET with a highly-doped substrate have been measured. It has been shown that the onset voltage for the channel current saturation is smaller than the effective gate voltage, and it increases with temperature. These peculiarities may be caused by an increase in the electrical field, decrease in the electron mobility near the drain region or by the drift velocity saturation.

Необходимость исследования параметров МОП-ПТ с высоким уровнем легирования подложки может быть вызвана следующими факторами: применением транзисторов в качестве тестовых элементов при измерении концентрации примесей в высоколегированных компонентах интегральных схем и конструктивно-технологическими требованиями повышения уровня легирования для предотвращения сквозного обеднения в короткоканальных приборах. Одним из таких параметров является напряжение стока, при котором ток в канале транзистора насыщается. Как показано в [1], это напряжение на порядок меньше эффективного напряжения затвора для уровня легирования подложки ($\sim 10^{24} \text{ м}^{-3}$). В данной работе измеренные значения напряжения насыщения тока в канале сравниваются с расчетными при различных концентрациях примесных атомов.

Уравнение вольтамперной характеристики (ВАХ) МОП-ПТ в омической области имеет вид [2,3]:

$$I = \mu C_0 \frac{W}{L} \left[(V_G - V_T) V_D - \frac{V_D^2}{2} \right], \quad (1)$$

где μ — подвижность электронов в проводящем канале, W, L — ширина и длина канала соответственно, V_G, V_D, V_T — напряжение затвора, стока и пороговое соответственно при заземленном истоке.

На рис.1 показаны зависимости тока I от напряжения V_D транзистора, изготовленного на кремниевой подложке p -типа, ориентированной в направлении (111), с концентрацией примесей $N_A = 2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$, толщина окисла под затвором $\sim 0,6$ мкм, глубина диффузионных n^+ -областей $\sim 0,8$ мкм, электрод затвора алюминиевый. Как видно из рис.1, ток насыщается при напряжении $V_D = V_{DS} \ll (V_G - V_T)$, $V_T = 140 \text{ В}$, начало участка насыщения смещается в сторону более высоких напряжений V_D при увеличении $(V_G - V_T)$ и ВАХ практически параллельна оси абсцисс. В заданном интервале изменения стокового напряжения пренебрежимо мало влияние механизмов электростатической обратной связи и подавления инверсии типа электропроводности. Величина поверхностной плотности инверсионных электронов вдоль границы раздела кремний — диоксид кремния изменяется незначительно из-за действующего неравенства $(V_G - V_T) \gg V_D$ и насыщение тока не сопровождается перекрытием канала в точке, ближайшей к стоку.

При инверсии электроны образуют проводящий канал, который в структуре с резкими n^+ - p -переходами включает области пространственного заряда (ОПЗ) с размером обедненного p -слоя

$$d_1 = \sqrt{2\epsilon(V_0 - V_1) / eN_A}, d_2 = \sqrt{2\epsilon(V_0 + V_2) / eN_A}$$

прямо и обратно смещенных переходов истока и стока соответственно [2], где участок $L - d_1 - d_2$, $V_0 = (kT/e) \ln(N_D N_A / n_i^2)$ — встроенный потенциал N_D, N_A — концентрация донорной и акцепторной примесей соответственно, n_i — собственная концентрация носителей заряда, V_1, V_2 — падение напряжения на переходе истока и стока соответственно. Полное сопротивление проводящего канала равно [3]:

$$\frac{V_D}{I} = \frac{d_1}{W\mu_1 Q_N} + \frac{d_2}{W\mu_2 Q_N} + \frac{L - d_1 - d_2}{W\mu_3 Q_N}, \quad (2)$$

где I — ток в канале, μ_1, μ_2, μ_3 — подвижность электронов в обедненной области истока, стока и собственно канала соответственно, $Q_N = C_0(V_G - V_T)$, C_0 — удельная емкость окисла. Электроны, движущиеся вдоль канала, как только они достигают стока, замещаются инжектируемыми электронами из истока, в результате поддерживается равновесная плотность заряда Q_N при заданной величине напряжения $(V_G - V_T)$ [4]. При инжекции из истока электроны проходят через ОПЗ в подложке, преодолевая силы сопротивления электрического поля встроенного потенциала, замедляются и теряют направленную скорость. В канал могут поступать электроны, имевшие в момент инжекции скорость, в предельном случае равную скорости v_{DS} в режиме насыщения. Они проходят участок d_1 со средней скоростью $v_{DS}/2$ и создают ток $V_1/R \approx Q_N W v_{DS}/2$ в пониженном электрическом поле [5], где R — сопротивление прямо смещенного перехода истока $\sim 100 \text{ Ом}$ [6]. Величина $V_1 = 0,015 \text{ В}$ (для $C_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Ф/м}^2$, $V_G - V_T = 10 \text{ В}$, $v_{DS} = 10^6 \text{ м/с}$), которой можно пренебречь ($V_1 \ll V_D$) и записать $V_D = V_2 + V_3$. Так как ток вдоль канала $I = \text{const}$ [4], то из (2) $V_2 \mu_2 / d_2 = V_3 \mu_3 / (L - d_1 - d_2)$, V_3 — падение напряжения на участке $(L - d_1 - d_2)$.

В области резкого перехода стока напряженность электрического поля $E_m = \sqrt{eN(V_0 + V_2) / 2\epsilon}$ [2] превышает напряженность электрического поля $V_D/L = E$, создаваемого стоковым напряжением. Для $N_A = 2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$,

$L=10$ мкм, $V_D=0,2$ В, $E_m=4 \cdot 10^7$ В/м, $E=2 \cdot 10^4$ В/м и $E_m \gg E$. Из условия постоянства тока вдоль канала $E_m \mu_2 \cong E \mu_3$ и $V_2 = (V_0/2) \left[\sqrt{1 + 4V_D/V_0} - 1 \right]$ при $d_2 \ll L$: $V_D=0,2$ В, или более 80% напряжения, приложенного между истоком и стоком, падает на области обеднения d_2 (высокий градиент канального потенциала вблизи стокового перехода [7]). Напряжение $V_2 > V_1, V_3$ и ток в проводящем канале будет определяться в основном сопротивлением участка d_2 с подвижностью электронов μ_2 . Как видно из рис.1, переход ВАХ к насыщению происходит на сравнительно малом интервале изменения напряжения V_D , поэтому в предельном случае $V_D=V_{DS}$, $I=I_S$, $v_D=v_{DS} \approx \mu_2 E_m (\mu_2 \approx \mu, E_m > E)$ из (1) получим

$$V_{DS} \cong \frac{I_S \sqrt{e N_A (V_0 + V_2)} / 2\epsilon}{v_{DS} C_0 (W/L) (V_G - V_T)} \quad (3)$$

На рис.1 знаком (*) отмечены значения V_{DS} , рассчитанные по формуле (3). По этой же формуле получены напряжения V_{DS} при $N_A=10^{23}, 7 \cdot 10^{23}$ [1], $2 \cdot 10^{24}$ м⁻³ и соответственно $I_S=2 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-6}, 4 \cdot 10^{-7}$ А; $(V_G - V_T)=10, 20, 15$ В, $W/L=2,5; 3; 2$, $v_{DS}=10^5$ м/с [2]. Величина $V_{DS}=2,5; 1,5; 0,25$ В в порядке возрастания указанных концентраций N_A . На рис.1 точками показаны рассчитанные по (1) значения тока. Подвижность электронов $\mu = \mu_0$ на омическом участке определялась по формуле $\frac{\partial I}{\partial V_D} \Big|_{V_D \rightarrow 0} = \mu_0 C_0 (W/L) (V_G - V_T)$ [2].

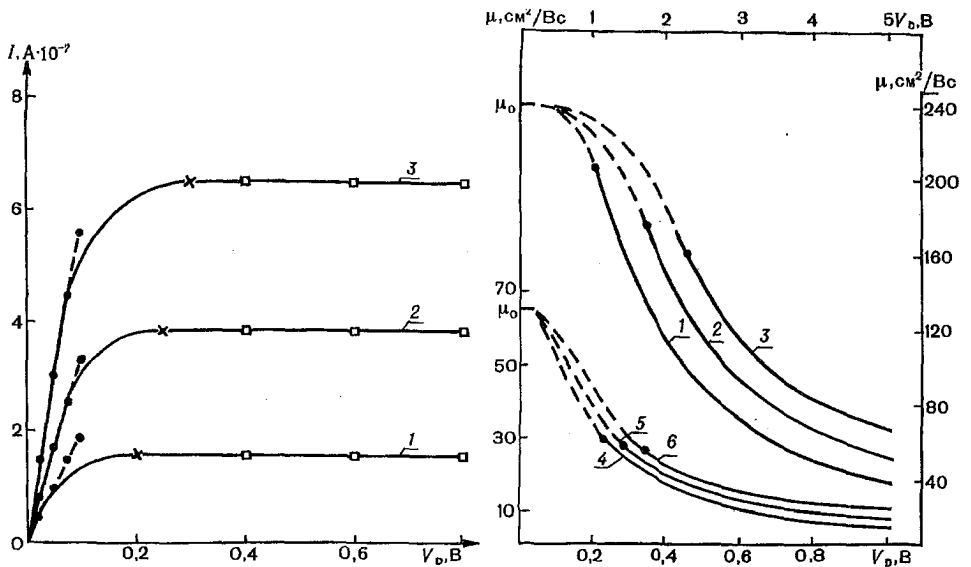


Рис.1. Зависимости тока стока от напряжения на стоке: 1-3 соответствуют $(V_G - V_T)=5, 10, 15$ В, $V_T=140$ В, $N_A=2 \cdot 10^{24}$ м⁻³, $T=300$ К

Рис.2. Зависимости подвижности электронов от напряжения на стоке при насыщении тока: 1-3 по шкале $V_D=(0 \div 5)$ В, $\mu=0 \div 240$ соответствуют $(V_G - V_T)=20, 30, 50$ В, $N_A=7 \cdot 10^{23}$ м⁻³ [1]; 4-6 по шкале $V_D=(0 \div 0,8)$ В, $\mu=0 \div 70$ для $(V_G - V_T)=5, 10, 15$ В (рис.1). Точками отмечены значения $V_D=V_{DS}$

При увеличении напряжения V_D ВАХ изгибаются вниз вследствие роста сопротивления на участке канала, ближайшем к стоку, и ток насыщается [3]. Рост сопротивления может быть обусловлен уменьшением числа электронов под воздействием напряжения V_D и деградацией подвижности. Так как канал не перекрывается, то формально уравнение (1) может быть приме-

нено для расчета тока и подвижности электронов на горизонтальной ветви ВАХ при условии $\partial I / \partial V_D = 0$ [8], $\mu = f(V_D)$. Дифференцируя (1) по напряжению V_D , получим $d\mu/\mu = -[(V_G - V_T) - V_D] dV_D / [(V_G - V_T)V_D - V_D^2/2]$ и найдем изменение подвижности в пределах $\mu_S \div \mu$, $V_{DS} \div V_D$:

$$\mu = \mu_S \frac{V_{DS}[2(V_G - V_T) - V_{DS}]}{V_D[2(V_G - V_T) - V_D]}, \quad (4)$$

где μ_S — подвижность электронов в точке ВАХ $V_D = V_{DS}$. На рис.1 знаком (□) отмечены расчетные значения тока по формулам (1), (4). Характер изменения подвижности $\mu = f(V_D)$ при различных концентрациях N_A и напряжениях $(V_G - V_T)$ показан на рис.2.

Приведенные в данной работе экспериментальные результаты дают основание предполагать, что в n -канальном МОП-ПТ с повышением уровня легирования подложки ($N_A > 10^{23} \text{ м}^{-3}$ и $L > 3 \text{ мкм}$) насыщение тока не сопровождается перекрытием канала и может быть вызвано уменьшением подвижности в области стокового перехода и насыщением дрейфовой скорости электронов. При анализе механизма насыщения необходимо использовать зависимость от температуры тока I_S и напряжения V_{DS} , которые уменьшаются при охлаждении транзистора: $I_S = 2,1; 3,9; 11 \cdot 10^{-7} \text{ А}$, $V_{DS} = 0,2; 0,35; 0,65 \text{ В}$, $V_T = 145, 140, 135 \text{ В}$ соответственно при $T = -100, +20, +100^\circ\text{С}$, $V_G = 150 \text{ В}$. Расчет по формуле (3) дает согласующиеся с измеренными значениями V_{DS} . Более подробные результаты с учетом зависимости от температуры концентрации ионизированных примесных атомов [9], насыщенной дрейфовой скорости [10] и встроенного потенциала [2] будут представлены в последующей публикации.

1. Андреев А. Д., Бельский А. М., Валиев А. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №1. С.26.
2. Маллер Р., Кейминс Г. Элементы интегральных схем. М., 1989
3. Россато Л. Физическая электроника и микроэлектроника. М., 1991.
4. Sigfridsson В. // Solid-State electron. 1991. 34. №9. P.937.
5. Yamaguchi K. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1983. 30. №6. P.658.
6. Narayanan M. // Solid-State Technol. 1978. 21. №8. P.80.
7. Yeow Y. T. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1988. 35. №12. P.2368.
8. Dike R. S. // Int. J. Electron. 1994. 76. №3. P.403.
9. Андреев А. Д., Борзлов В. М., Дитковский В. М. // Вестн. АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 1994. №3. С.81.
10. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М., 1984. Т.1.

Поступила в редакцию 01.04.96.

УДК 536.425

Л.О. МЕЛЕШКО

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЗАРОДЫШЕЙ АЛМАЗА В ОБЛАСТИ ЕГО МЕТАСТАБИЛЬНОСТИ

It is established that in the process of diamond synthesis in the metastable state with increasing oversaturation the pressure in nucleation centres of a new phase also increases, and might achieve the value associated with the system's diamond stability state, where the formation of its structure takes place at the initial stage.

В соответствии с общими принципами статистической механики в системах, находящихся даже в равновесном состоянии, вследствие флуктуации непрерывно возникают и исчезают очаги новых фаз. Однако их рост становится возможным лишь при некотором отступлении от равновесия в пересыщенном паре, растворе или переохлажденной жидкости после достижения достаточного развития. Если скорость возникновения новой фазы мала, то в этом неравновесном (метастабильном) состоянии исходная фаза может долго сохраняться. Движущей силой, ведущей к образованию новой фазы при заданных температуре T и объеме V (или других экстенсивных

параметрах), является свободная энергия $F(T, V)$, а при заданных значениях T и давления p (или других интенсивных параметрах) — термодинамический потенциал $Z(T, p)$. Эти функции выполняют роль потенциальной энергии, минимуму которой соответствует устойчивое равновесие. Термодинамические потенциалы определяются внутренним состоянием системы.

Кристалл и его пар представляют собой качественно различные фазы, каждой из которых присуща определенная температурная зависимость термодинамического потенциала. Направление Z -изобары для каждого из них можно определить из общего термодинамического тождества

$$dZ = -SdT - Vdp. \quad (1)$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p = -S,$$

где энтропия S является отрицательной величиной и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = -\frac{C_p}{T},$$

где C_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Форма кривой температурной зависимости термодинамического потенциала определяется теплоемкостью вещества и ее зависимостью от температуры, обусловленной изменением амплитуды и частоты колебаний атомов (атомная теплоемкость) и энергией электронов (электронная теплоемкость). По мере роста температуры вторая компонента увеличивается и может стать существенной. Поэтому изобары опускаются и изгибаются вогнутостью к оси T . Точка пересечения этих кривых соответствует условию равновесия фаз, что можно представить в виде

$$\mu_A(T, p) = \mu_B(T, p),$$

где μ_A и μ_B — химические потенциалы соответственно исходной фазы A и новой — B . Если система определяется термодинамическим потенциалом, химический потенциал i -ой компоненты μ_i равен

$$\mu_i = \left(\frac{\partial Z}{\partial N_i}\right)_{T, p}, \quad (2)$$

где N_i — число частиц i -ой компоненты, входящей в систему. Для системы, состоящей из одного сорта частиц, $Z = N\mu(T, p)$.

Когда $\mu_A > \mu_B$, зародыш новой фазы B , возникший в объеме старой A , после достижения критических размеров обладает тенденцией к росту, поскольку этот процесс ведет к уменьшению термодинамического потенциала. При $\mu_A < \mu_B$ основная фаза A является термодинамически устойчивой, и возникший в ней зародыш фазы B разрушается, что в данных условиях ведет к уменьшению термодинамического потенциала. При такой трактовке фазового превращения не раскрывается механизм формирования зародыша новой фазы. В самом деле, группировка атомов, возникшая вследствие флуктуации плотности, испытывает действие двух факторов: с одной стороны, сформировавшаяся при заданных p, T -параметрах электронная структура атомов стремится создать решетку кристалла, свойственную данному веществу, с другой — межфазное поверхностное натяжение — придать группировке форму, соответствующую наименьшей свободной энергии. На начальной стадии, пока размеры зародыша малы и отношение его поверхности к объему велико, преобладающая роль принадлежит поверхностному фактору. В этих условиях наиболее вероятной формой зародыша будет сфера. При возникновении его давление p в исходной фазе останется почти прежним, но внутри зародыша может существенно измениться. Вследствие этого формирование структуры новой фазы будет осуществляться внутри такого зародыша при давлении p_r , которое отличается от внешнего p на величину лапласовского $p_\sigma = \frac{2\sigma}{r}$. Соотношение

между радиусом сферического зародыша r и давлением в нем p_r , соответствующим равновесию его с окружающей средой, определяется уравнением [1]

$$p_r = p + \frac{2\sigma}{r}, \quad (3)$$

где p – внешнее давление, σ – поверхностное натяжение.

Уравнение (3) применено нами для оценки давлений, возникающих внутри зародышей при кристаллизации углерода в форме алмаза и графита. Результаты расчетов для температуры 1273 К и различных пересыщений газовой фазы приведены в таблице. Для других температур эти значения будут несколько отличаться. Так, например, при одном и том же пересыщении, равном 0,0953, для $T=1273$ К $p_\sigma=295,216$ ГПа, а для $T=1000$ К $p_\sigma=231,9$ ГПа. В таблице приведены результаты расчетов лишь лапласовского давления p_σ . В соответствии с формулой (3), для определения полного давления p_r необходимо прибавить к нему p , которое в каждом конкретном случае задается экспериментатором. Однако, учитывая оценочное значение данных расчетов и неравенство $p \ll p_\sigma$, для достаточно больших пересыщений во многих случаях значением p можно пренебречь.

Результаты расчетов радиусов критических зародышей r_k , избыточного давления внутри зародышей $p_\sigma = p_r - p$, при температуре 1273 К и различных пересыщениях газовой фазы

$\ln \frac{p}{p_0}$	Алмаз (поликристаллический)		Графит (поликристаллический)	
	$r_k \cdot 10^{10}$ м	p_σ ГПа	$r_k \cdot 10^{10}$ м	p_σ ГПа
0,0953	250,688	0,2952	331,069	0,1873
0,1823	131,051	0,5647	173,071	0,3582
0,3365	70,9973	1,0422	93,7619	0,6612
0,6931	34,4691	2,1468	45,5214	1,3620
1,0986	21,7464	3,4029	28,7191	2,1588
1,6094	14,8444	4,9850	19,6041	3,1626
2,3026	10,3754	7,1322	13,7022	4,5248
2,9957	7,9749	9,2791	10,5320	5,8868
3,9120	6,1070	12,1172	8,0651	7,6874
6,9078	3,4585	21,3965	4,5674	13,5745

Из таблицы следует, что по мере увеличения пересыщения размеры критических зародышей уменьшаются, лапласовское давление в них соответственно растет. Оно может достигать величины, при которой параметры синтеза окажутся в области стабильного существования алмаза. В этих условиях ($p_r > 1,35$ ГПа) произойдет процесс возбуждения электронов из $2s$ -оболочек на $2p$ -уровни и перераспределение плотностей орбиталей атомов при вступлении их в химическую связь. В результате сформируется электронная структура возбужденных атомов, обеспечивающих образование связей между атомами углерода в форме алмаза. По мере увеличения размеров зародышей давление p_r постепенно в них уменьшается и система переходит в область метастабильного состояния алмаза. При этом роль поверхностного фактора ослабевает и определяющее влияние на формирование кристалла станет оказывать электронная структура атомов. Однако она также претерпевает изменения, в результате чего создаются благоприятные условия для образования неалмазных модификаций углерода. Чтобы этого не произошло, необходимо задать в газовой фазе и на подложке такие параметры синтеза, которые обеспечили бы соответствие электронных структур присоединяющихся атомов с атомами кристалла-подложки. Анализ работ по наращиванию эпитаксиальных пленок алмаза на собственном монокристалле показывает, что эти условия выполнимы. Например, в работе [2] сообщается, что при невысоких пересыщениях и температуре $T=1000^\circ\text{C}$ на собственном монокристалле площадью 3×3 мм² получена алмазная пленка, являющаяся единственным монокристаллом. Автор работы [3] констатирует, что при $V \leq 0,5$

мкм/ч им получены совершенные (прозрачные, гладкие, бесцветные) эпитаксиальные слои алмаза толщиной в несколько мкм. В работе [4] сообщается, что при относительно низких пересыщениях и температуре 1000°C при скорости осаждения от нескольких сотых до 1 мкм/ч получены монокристаллические алмазные пленки. Большинство специалистов считают, что 1 мкм/ч — это типичный показатель скорости осаждения, после превышения которого появляются нежелательные нарушения в структурах алмазных пленок [5]. Однако до настоящего времени нет конкретных обоснованных решений этой задачи. Ввиду принципиальной важности этого вопроса возникает необходимость в проведении дополнительных исследований.

В условиях обеспечения полного соответствия электронных структур возбужденных атомов углерода создаются благоприятные возможности формирования на собственном монокристалле однородной эпитаксиальной пленки алмаза на всех стадиях процесса. При наращивании алмазной пленки на инородной подложке на начальной стадии у границы фаз партнеров неизбежно возникнут деформации несоответствия, но по мере удаления от подложки они будут постепенно уменьшаться и исчезать. Затем произойдет полное соответствие электронных структур атомов, обеспечивающих формирование однородной монокристаллической пленки алмаза на всей последующей стадии синтеза.

Несколько иначе происходит формирование структуры графита. На начальной стадии, пока давление внутри сферического зародыша велико ($p_r > 1,35$ ГПа), а система находится в области стабильного существования алмаза, вероятность возникновения новой фазы углерода в форме графита мала. Если же зародыш графита все же возникнет, то, находясь в области своей метастабильности, он может осуществить полиморфный переход в алмаз. В случае его сохранения до перехода системы в область стабильного существования графита ($p_r < 1,35$ ГПа) он будет продолжать свой рост. В этих условиях возрастает вероятность образования новых центров кристаллизации графита, которые после достижения критических размеров будут расти. Избавиться от графита при синтезе алмаза можно или путем создания такого пересыщения по отношению к алмазу, которое одновременно было бы равновесным по отношению к графиту, или путем введения травителя, который хорошо бы травил графит и не действовал на алмаз. Таким травителем, широко используемым на практике, является атомарный водород.

1. Френкель Я.И. Собр. избр. тр.: В 3т. Т.3. Кинетическая теория жидкостей. М.: Л., 1959.

2. Дерягин Б.В., Спицын Б.В. //Рост кристаллов. Ереван, 1977. Т.12. С.28.

3. Буйлов Л.Л. Физико-химические закономерности кристаллизации алмаза из газовой фазы на алмазных и неалмазных подложках: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1988.

4. Спицын Б.В., Дерягин Б.В. //Проблемы физики и технологии широкозонных полупроводников: II Всесоюз. совещание по широкозонным полупроводникам. Л., 1980. С.22.

5. В мире науки. 1989. №10. С.98.

Поступила в редакцию 15.02.96.

УДК 539.16

Д.И. ЛОБАЧ, А.Н. ПЕРЦЕВ, В.А. ЧУДАКОВ

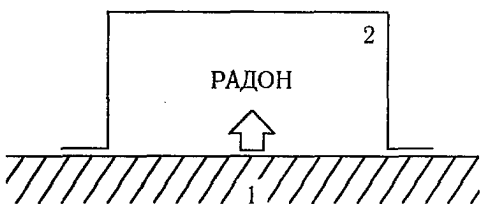
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЭКСХАЛЯЦИИ ИЗОТОПОВ РАДОНА ИЗ ОБРАЗЦОВ ПО ДОЧЕРНЕМУ ПОЛОНИЮ

Analytical expression for determination the radon isotopes exhalation rate out which based on the first radon progeny (Po isotopes) α -spectrometry is proposed. The formula is agreed with practical measurement in Japan and Belarus.

Изотопы радия, содержащиеся в почвогрунтах и строительных материалах, являются источниками радиоактивного газа радона, выделяющегося в окружающий воздух и атмосферу помещений. Концентрация радия в ве-

ществах не определяет однозначно скорость эксхалляции (СЭ) радона из них [1]. Существуют различные методики изучения этого процесса [2–5]. Наибольший интерес представляют методы, которые могут быть использованы для экспресс-анализа [2,6]. Разрабатываются подходы по определению СЭ ^{222}Rn и ^{220}Rn из образцов на основании детектирования излучений первых дочерних продуктов распада (ДПР) изотопов радона, ^{218}Po и ^{216}Po соответственно [2]. Образующиеся ДПР являются свободными положительно заряженными ионами [7] или входят в состав заряженных аэрозольных частиц, что позволяет собирать их на детекторе, используя электростатический метод [2,6].

Применение этого метода позволяет определить СЭ ^{222}Rn и ^{220}Rn из образцов. Атомы радона эксхалируют в пространство камеры сбора (см. рисунок) из поверхности пробы. Далее, в результате радиоактивного распада они образуют ионы ДПР, которые могут присоединяться к аэрозолям. Заряженные частицы собираются электрическим полем на поверхности детектора. В [2] предложен подход определения СЭ радона из образца площадью S по известному количеству N_1 зарегистрированных первых ДПР в течение времени экспозиции t . Однако выражение для получения конечного результата отсутствует.



Блок-схема установки:
1 – образец (проба); 2 – камера сбора

Введем следующие обозначения:
 N_0 – количество атомов радона;
 λ_0 – постоянная распада радона;
 λ_1 – постоянная распада 1-го ДПР радона (полония); n – скорость поступления атомов радона в камеру сбора, атом/с; V – СЭ радона с поверхности образца, $\text{Бк} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$;
 A_1 – активность полония.

Начальные условия: $N_0(t=0)=0$, $N_1(t=0)=0$, эффективность сбора дочернего полония 100%.

Значение N_0 для любого момента времени t можно получить из уравнения:

$$dN_0 = -\lambda_0 N_0 \cdot dt + n \cdot dt. \quad (1)$$

Оно имеет решение:

$$N_0(t) = \frac{n}{\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_0 t}). \quad (2)$$

Для N_1 аналогично, с учетом последовательного распада и (2):

$$dN_1 = -\lambda_1 N_1 \cdot dt + \lambda_0 N_0(t) \cdot dt, \quad (3)$$

$$N_1(t) = \frac{n}{\lambda_1} \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} e^{-\lambda_0 t} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \right], \quad (4)$$

$$A_1(t) = N_1(t) \cdot \lambda_1. \quad (5)$$

В ходе эксперимента за время экспозиции t_0 регистрируется N_1 положительных ионов и аэрозольных частиц, содержащих полоний, поэтому, интегрируя (4) по времени от $t=0$ до $t=t_0$, получим:

$$N_1 = n \left[t_0 + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_0)\lambda_0} (e^{-\lambda_0 t_0} - 1) - \frac{\lambda_0}{(\lambda_1 - \lambda_0)\lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_0} - 1) \right]. \quad (6)$$

Из (6), выразив n , получим выражение для V_+ (это значение V , но с учетом только положительно заряженных частиц, содержащих полоний) в стандартных единицах:

$$V_+ = \frac{n}{S} = \frac{N_1 \lambda_0}{[\text{из (6)}] S}, \quad \text{поэтому } V = \frac{V_+}{\alpha}, \quad (7)$$

где α – доля положительно заряженных частиц с полонием.

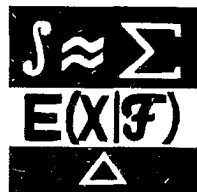
В работах по этой тематике указываются разные значения соотношений между количеством всех ДПР и продуктов, образованных в виде положительных ионов. Так, например, авторы [7] отмечают, что в 88% случаев ^{218}Po формируется как положительная частица, а количество образующихся нейтральных атомов пренебрежимо мало.

Проведенные эксперименты обнаружили, что число положительных ^{218}Po составляет $\approx 50\%$ ($\alpha = 0,5$) от их общего количества, а для ^{216}Po $\approx 99\%$ ($\alpha = 1$). На основании (7) были определены СЭ ^{222}Rn и ^{220}Rn в $\text{Бк} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$: для белого кирпича $5,2 \cdot 10^{-5}$ и $5,7 \cdot 10^{-3}$, для красного — $2,0 \cdot 10^{-5}$ и $2,3 \cdot 10^{-3}$ соответственно, с ошибкой $< 10\%$.

Значения V для белого кирпича больше, чем для красного. Это объясняется тем, что образование закрытых пор при обжиге красного кирпича затрудняет эксхалляцию радона из него [1]. Выражение (7) согласуется с [2]. Эта формула может быть использована в экспериментах, где для определения СЭ изотопов радона из почвогрунтов и строительных материалов применяется α -спектрометрия первых их ДПР.

1. Крисюк Э.М. Радиационный фон помещений. М. 1989.
2. Shiraishi F. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1990. V.37. №2. Pt.1. P.878.
3. Kurata T. // Geochim. J. Tokyo, 1986. V.20(2). P.81.
4. Моере Н. Reference instrument for radon measurements / National Inst. of Radiation Protection. Stockholm, 1990.
5. Measurement of Radon and Radon Daughters in Air, NCRP Report. Bethesda, 1989. V.97.
6. Pereira E.B. // San Paulo Univ., Brazil. Proceedings of the 4. International Symposium of Radiation Physics. 1988. P.186.
7. Paoletti D. // Rev. Phys. Appl. 1990. V.25. P.1259.

Поступила в редакцию 27.11.95.



УДК 621.313

АБДАЛРАХМАН САИД ОМАР (СИРИЯ), А.А.СЕМЧЕНКО, А.С.МИХАЛЕВ

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОНТУРА РЕГУЛИРОВАНИЯ МОМЕНТА СЛЕДЯЩЕГО АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

In this paper we are studying the questions of control asynchronous electric-drive systems depending on the voltage inverter with pulse-width modulation and the proposed its module.

Electromagnetic torque to produce by the law provides for linearity mechanic characteristics motor over the entire range.

In the result modeling controller torque we may take tracking asynchronous electric-drive systems.

Бесконтактные электродвигатели представляются наиболее перспективными для использования в следящих электроприводах различного типа. Одним из возможных вариантов реализации бесконтактного следящего привода является система автономный инвертор напряжения с широтно-импульсной модуляцией (АИНШИМ) – асинхронный трехфазный двигатель с короткозамкнутым ротором (АД).

Упрощенная структурная схема следящего электропривода по системе АИНШИМ-АД представлена на рис.1. В состав электропривода входят: неуправляемый выпрямитель (НВ), емкостный фильтр C_0 , блок сброса рекуперированной энергии в тормозных режимах работы (БТ), датчик напряжения на конденсаторе (ДН), датчик положения ротора АД (ДП), система управления преобразователем (СУП), регулятор момента (РМ), блок управления следящим приводом (БУ), мост возвратных диодов в составе АИНШИМ.

Трехфазный АИНШИМ (см. рис.1) содержит шесть полностью управляемых ключей K_1-K_6 . Выходные сигналы СУП, обеспечивающие управление силовыми ключами, формируются путем совмещения во времени двух алгоритмов: алгоритма управления частотой выходного напряжения преобразователя частоты в соответствии с задающим сигналом f_s и алгоритма управления амплитудой основной гармонической составляющей выходного напряжения в соответствии с сигналом U_s .

Амплитуда основной гармоники напряжения на статоре регулируется путем однополярной широтно-импульсной модуляции, частота которой выбирается исходя из условия минимизации потерь в системе АИНШИМ-АД. Модуляция осуществляется путем периодического включения и отключения полупроводниковых ключей без изменения схемы подключения АД к звену постоянного тока при замкнутом состоянии ключей. Одновременно замыкаются три ключа, а время между изменениями схемы подключения составляет $T_2/6$, где $T_2=1/f_s$.

Процесс формирования токов в фазах нагрузки, включенных “в звезду”, близок к процессу формирования выходных токов в АИН при 180-градусной модуляции и регулировании напряжения U_d в звене постоянного тока. Среднее значение выходного напряжения АИНШИМ на интервале $T_2/6$ определяется скважностью λ -модуляции в соответствии с заданным сигналом U_s . Низкочастотная огибающая выходного напряжения имеет трехступенчатую форму с высотой ступеней $2U_{dcp}/3$ и $U_{dcp}/3$, где $U_{dcp}=\lambda U_d$, U_d – напряжение на конденсаторе C_0 .

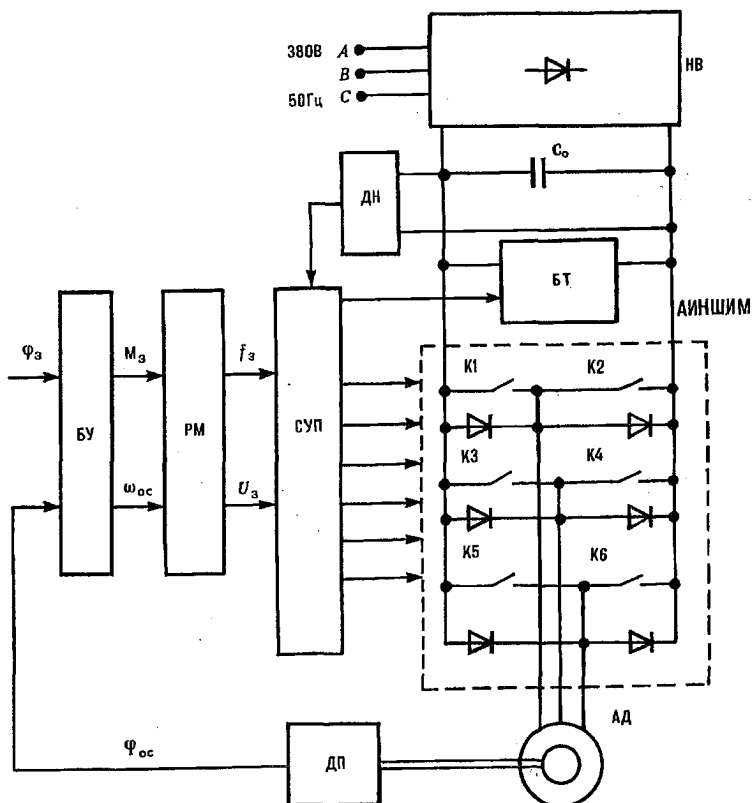


Рис.1

Для низкочастотной огибающей фазного напряжения АИНШИМ разложение в ряд Фурье имеет вид [1]:

$$U_s = \frac{3}{\pi} U_m \left(\sin \omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f_3$, $U_m = 2U_{dcp}/3$.

Исходя из (1) для основной гармоники выходного напряжения АИНШИМ получим:

$$U_{2(0)} = \frac{2}{\pi} \lambda U_d \sin 2\pi f_3 t = k U_3 \sin 2\pi f_3 t, \quad (2)$$

где $k = \frac{2U_d}{\pi U_{3 \max}}$, $U_{3 \max}$ — максимальное значение сигнала задания напряжения U_3 .

Задающие сигналы U_3 и f_3 формируются блоком РМ в соответствии с задающим сигналом M_3 . Связь между U_3 и f_3 определяется из условия стабилизации потокосцепления ротора АД, т.е. законом частотного управления, обеспечивающим линеаризацию механических характеристик электропривода в соответствии с выражением

$$M = K_m S_a, \quad (3)$$

где K_m — коэффициент, определяемый уровнем стабилизации потокосцепления ротора; S_a — абсолютное скольжение, $S_a = \frac{\omega_o - \omega}{\omega_{он}}$, $\omega_o = 2\pi f_3$, $\omega = \omega_{oc}$,

$\omega_{он} = 2\pi f_{ном}$, $f_{ном}$ — номинальное значение частоты напряжения питания АД, ω_{oc} — сигнал обратной связи по скорости, формируемый в БУ.

В соответствии с (3) для определения f_3 получим следующее выражение:

$$f_3 = f_{ном} \left(\frac{M}{K_m} + \frac{\omega_{о\epsilon}}{\omega_{он}} \right). \quad (4)$$

На основании схемы замещения АД [2] можно получить зависимость действующего значения напряжения от частоты и скольжения, обеспечивающую стабилизацию потокацепления ротора:

$$U_\phi = \alpha S_a \sqrt{\frac{K_m \omega_{он} Z'_{АД} Z_2'^2}{3 Z_B^2 R_2'}}, \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{f_3}{f_{ном}}$ — относительное значение частоты;

$$Z_{АД} = \sqrt{R_{АД}^2 + X_{АД}^2}; \quad Z_2' = \sqrt{(R_2'/S_a)^2 + X_2'^2};$$

$$R_{АД} = R_1 + R_B; \quad X_{АД} = \alpha X_1 + X_B;$$

$$Z_B = \sqrt{R_B^2 + X_B^2};$$

$$R_B = \alpha \frac{(R_2' / S_a) X_M}{(R_2' S_a)^2 + (X_M + X_2')^2};$$

$$X_B = \alpha \frac{X_2' X_M^2 + X_M ((R_2' / S_a)^2 + X_2'^2)}{(R_2' S_a)^2 + (X_M + X_2')^2};$$

R_1, R_2' — активные сопротивления соответственно статора и ротора;

X_1, X_2' — индуктивные сопротивления рассеяния статора и ротора;

X_M — индуктивное сопротивление взаимной индукции.

Представляет существенный интерес анализ динамических характеристик описанного контура регулирования момента АД с учетом реальной формы выходного напряжения АИНШИМ-АД. Для облегчения моделирования системы АИНШИМ-АД принимаем следующие допущения:

1. Напряжение на емкостном фильтре C_0 неизменно во всех режимах работы АД.

2. Коммутация токов в ключах инвертора мгновенна.

3. Частота и фаза сигналов, обеспечивающих широтно-импульсную модуляцию, задается независимо от задающих низкочастотных модулирующих напряжений.

4. Индуктивности и активные сопротивления в ветвях инвертора и звена постоянного тока равны нулю.

5. Насыщение главной магнитной цепи и путей рассеяния АД отсутствует.

6. Эффект вытеснения тока в обмотке ротора отсутствует.

7. Обеспечена точная симметрия фаз АД.

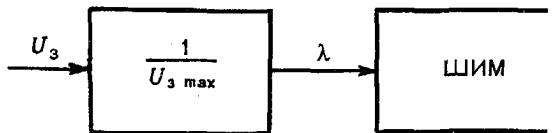
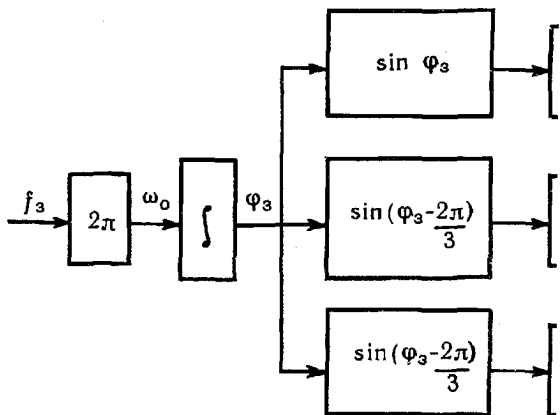
8. Волны магнитной индукции в воздушном зазоре АД распределены синусоидально (высшие гармонические магнитного поля не учитываются).

При моделировании АИНШИМ учтем, что статорные обмотки АД включены в звезду и, следовательно, для фазных напряжений справедливо

$$U_a + U_b + U_c = 0. \quad (6)$$

С учетом (6) моделирование АИНШИМ производим на основе структурной схемы, представленной на рис.2. На основе сигнала задания частоты f_3 с помощью блока интегрирования формируется сигнал задания фазы φ_3 выходных напряжений в соответствии с выражением

$$\varphi_3 = 2\pi \int_0^t f_3(t) dt. \quad (7)$$



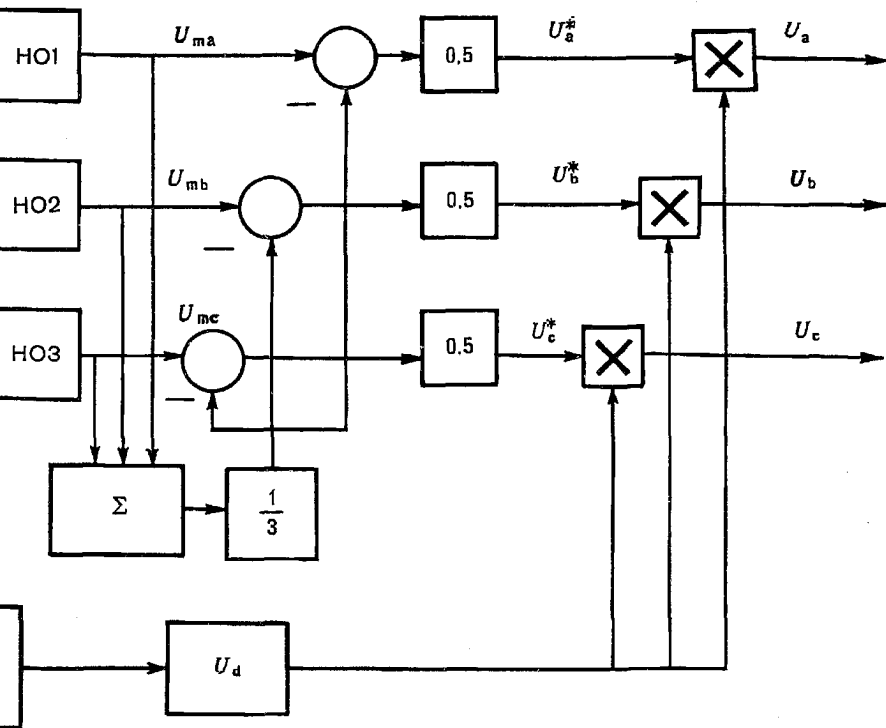


Рис. 2

Сигнал φ_3 преобразуется в трехфазную систему периодических сигналов с помощью тригонометрических блоков. Эти периодические сигналы поступают на нуль-органы НО1, НО2, НО3, формирующие модулирующие напряжения $U_{ма}$, U_{mb} , $U_{мс}$ с единичной амплитудой и частотой f_3 . Для напряжений $U_{ма}$, U_{mb} , $U_{мс}$ не выполняется условие (6). Для напряжений нулевой последовательности справедливо

$$U_0 = U_{ма} + U_{mb} + U_{мс}. \quad (8)$$

Преобразуем (6) с учетом симметрии выходных напряжений в установленном режиме работы

$$\left(U_{ма} - \frac{1}{3} U_0 \right) + \left(U_{mb} - \frac{1}{3} U_0 \right) + \left(U_{мс} - \frac{1}{3} U_0 \right) = 0. \quad (9)$$

На основании (9) получим выражения для вычисления относительных значений низкочастотных огибающих выходных фазных напряжений АИНШИМ с единичной амплитудой

$$\begin{aligned} U_a^* &= 0,5 \left(U_{ма} - \frac{1}{3} U_0 \right), \\ U_b^* &= 0,5 \left(U_{mb} - \frac{1}{3} U_0 \right), \\ U_c^* &= 0,5 \left(U_{мс} - \frac{1}{3} U_0 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Базовым значением для относительных величин U_a^* , U_b^* , U_c^* в выражении (10) является $U_{дпр}$.

Канал регулирования напряжения содержит широтно-импульсный модулятор (ШИМ), формирующий сигнал прямоугольной формы, принимающий значения "0" или "1", с постоянной частотой и скважностью λ . Перемножение ШИМ-сигнала и низкочастотных моделирующих напряжений обеспечивает формирование выходных напряжений АИНШИМ.

На основе математического описания двухфазной обобщенной машины [2], обеспечивающего устранение периодически изменяющихся коэффициентов в уравнениях математического описания, моделируется трехфазный АД. Трехфазная система выходных напряжений АИНШИМ преобразуется в систему двухфазных напряжений U_α , U_β следующим образом:

$$U_\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} U_a; \quad U_\beta = \sqrt{\frac{3}{2}} U_b + \frac{\sqrt{2}}{2} U_a. \quad (11)$$

В неподвижной системе координат α, β АД описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{d\Psi_{1\alpha}}{dt} = U_\alpha - i_{1\alpha} R_1; \quad \frac{d\Psi_{1\beta}}{dt} = U_\beta - i_{1\beta} R_1; \quad (12)$$

$$\frac{d\Psi_{2\alpha}}{dt} = -i_{2\alpha} R_2 - \omega_{\text{эл}} \Psi_{2\beta}; \quad \frac{d\Psi_{2\beta}}{dt} = -i_{2\beta} R_2 + \omega_{\text{эл}} \Psi_{2\alpha};$$

$$M = P_n (\Psi_{1\alpha} i_{1\beta} - \Psi_{1\beta} i_{1\alpha}); \quad \frac{d\omega_{\text{эл}}}{dt} = \frac{P_n}{J} (M - M_c); \quad i_{\mu\alpha} = i_{1\alpha} + i_{2\alpha};$$

$$i_{\mu\beta} = i_{1\beta} + i_{2\beta}; \quad \Psi_{\mu\alpha} = L_m i_{\mu\alpha}; \quad \Psi_{\mu\beta} = L_m i_{\mu\beta};$$

$$i_{1\alpha} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} (\Psi_{1\alpha} - \Psi_{\mu\alpha}); \quad i_{1\beta} = \frac{1}{L_{\sigma 1}} (\Psi_{1\beta} - \Psi_{\mu\beta});$$

$$i_{2\alpha} = \frac{1}{L_{\sigma 2}} (\Psi_{2\alpha} - \Psi_{\mu\alpha}); \quad i_{2\beta} = \frac{1}{L_{\sigma 2}} (\Psi_{2\beta} - \Psi_{\mu\beta}),$$

где $\Psi_{1\alpha}$, $\Psi_{1\beta}$, $\Psi_{2\alpha}$, $\Psi_{2\beta}$ — мгновенные значения потокосцеплений фаз α, β статора и ротора; $i_{1\alpha}$, $i_{1\beta}$, $i_{2\alpha}$, $i_{2\beta}$ — мгновенные значения токов фаз α, β статора и ротора; $\Psi_{\mu\alpha}$, $\Psi_{\mu\beta}$ — мгновенные значения фазных составляющих потоко-

сцепления взаимной индукции; $i_{\alpha\alpha}, i_{\beta\beta}$ — мгновенные значения фазных составляющих тока намагничивания; $L_{\sigma 1}, L_{\sigma 2}$ — индуктивности рассеяния статора и ротора; L_m — индуктивность взаимной индукции; $L_1 = L_m + L_{\sigma 1}$; $L_2 = L_m + L_{\sigma 2}$; $\omega_{эл}$ — электрическая скорость ротора, $\omega_{эл} = P_p \omega$, где ω — угловая скорость ротора, P_p — число пар полюсов АД; M — электромагнитный момент; J — суммарный приведенный момент инерции электропривода.

Для определения мгновенных значений токов в фазах АД производятся следующие преобразования:

$$i_a = \sqrt{\frac{2}{3}} i_{\alpha}; \quad i_b = \frac{1}{\sqrt{2}} i_{\beta} - \frac{1}{\sqrt{6}} i_{\alpha}; \quad i_c = -\frac{1}{\sqrt{2}} i_{\beta} - \frac{1}{\sqrt{6}} i_{\alpha}. \quad (13)$$

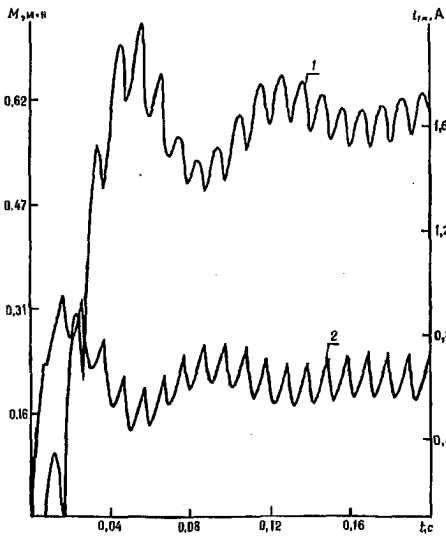


Рис. 3

В результате моделирования системы АИНШИМ-АД получены переходные характеристики контура регулирования момента. На рис. 3 представлены графики зависимостей от времени амплитуды результирующего вектора тока статора i_{1m} (2) и электромагнитного момента M (1) электропривода при неизменном значении скорости ротора 50 рад/с. Анализ переходных характеристик показывает, что контур регулирования момента обладает удовлетворительными динамическими свойствами: перерегулирование 14,3%, время регулирования 0,09 с. В модели использован двигатель 4АА50В4УЗ мощностью 90Вт.

Проведенные исследования на имитационной модели АИНШИМ-АД показывают, что на основе разработанного контура регулирования момента может быть создан следящий электропривод широкого применения.

1. Бернштейн А. Я., Гусяцкий Ю. М., Кудрявцев А. В. и др. Тиристорные преобразователи частоты в электроприводе. М., 1980.
2. Ключев В. И. Теория электропривода. М., 1985.

Поступила в редакцию 29.11.95.

УДК 519.1

О.И. МЕЛЬНИКОВ, Ю.Г. КОЗЛОВСКИЙ

РЕАЛИЗАЦИЯ ГИПЕРГРАФА ГУСЕНИЦЕЙ

The necessary and sufficient conditions of a hypergraph realized by a caterpillar are formulated and proved in the paper. An algorithm consisting of 4 steps checking the possibility of

caterpillar realization of hypergraph is presented, complexity $O\left(|VH| \sum_{e \in EH} |e|\right)$.

Пусть задан гиперграф $H=(VH, EH)$. Реализацией гиперграфа H называется любой граф G , удовлетворяющий следующим условиям: 1) $VG = VH$; 2) любое ребро графа G содержится в некотором гиперребре гиперграфа H ; 3) для любого ребра $e \in E$ порожденный подграф $G(e)$ является связным. Пусть $|VH|=n$, $|EH|=m$.

Необходимость построения реализаций с различными свойствами является при решении целого ряда практических вопросов, в частности при проектировании и изготовлении радиоэлектронной аппаратуры и интегральных схем возникают задачи: 1) построения планарных реализаций и 2) построения реализаций с минимальным числом ребер [3,5].

Как показано в [1,2,10], эти задачи являются NP -полной и NP -трудной соответственно. Поэтому возникает вопрос о выделении таких классов гиперграфов, для которых эти задачи полиномиально разрешимы. Один из таких классов образуют так называемые древовидные гиперграфы — гиперграфы, для которых существует реализация деревом. Необходимые условия такой реализации были получены в [6,7,9], достаточные — в [8,11]. В настоящей работе рассматриваются необходимые и достаточные условия реализации гиперграфа гусеницей.

Гусеницей называется дерево, после удаления из которого всех висячих вершин получается цепь.

Вершины u и v гиперграфа H называются *эквивалентными*, если $E(u)=E(v)$, где $E(u)$ — множество ребер, инцидентных вершине u . Если в гиперграфе есть эквивалентные вершины, то удалим одну из них. Такую операцию будем проводить до тех пор, пока в гиперграфе не останется ни одной пары эквивалентных вершин. Полученный гиперграф обозначим через \tilde{H} .

Теорема 1. Гиперграф H можно реализовать гусеницей тогда и только тогда, когда можно реализовать гусеницей гиперграф \tilde{H} .

Необходимость. Пусть существует реализация гиперграфа H гусеницей T . Если одна из эквивалентных вершин u и v , например v , является висячей вершиной гусеницы T , то реализация гиперграфа $H_1=H-v$ получается удалением из T вершины v . Если же две эквивалентные вершины u и v не являются висячими, то все вершины цепи (a, u, \dots, b, v, c) принадлежат $E(u)$ и $E(v)$ и гусеница $T-bv-vc+bc$ является реализацией гиперграфа $H_1=H-v$. Таким же образом можно удалить из T оставшиеся эквивалентные вершины.

Достаточность. Пусть гиперграф \tilde{H} реализован гусеницей \tilde{T} , и вершина $u \in \tilde{T}$. Реализация гиперграфа H_1 , порожденного множеством вершин $V\tilde{H} \cup \{v\}$ получается при добавлении к гусенице \tilde{T} вершины v и соединении ее ребром с вершиной u , если u принадлежит диаметральной цепи гусеницы, или с той вершиной, которой смежна вершина u , если u не принадлежит диаметральной цепи гусеницы. Таким же образом можно перейти к реализации гиперграфа H , содержащего все эквивалентные вершины.

Теорема доказана.

Вершина $v \in VH$ будет называться *предвисячей*, если существует вершина $u \in \tilde{V}(v)$, такая, что $E(u) \subseteq E(v)$, $\tilde{V}(v)$ — множество вершин, принадлежащих гиперребрам из $E(v)$. В этом случае вершина u будет называться *соседней с предвисячей*. Множество вершин, соседних с v , будем обозначать через $V(v)$.

Пусть v — предвисячая вершина гиперграфа H и $\{u_1, \dots, u_p\}$ — множество вершин, соседних с ней. Рассмотрим гиперграф $H(v) = (VH(v), EH(v))$, где $VH(v) = VH \setminus \{u_1, \dots, u_p\}$, $E(H(v)) = \{e'_i\} = \{e_i \setminus \{u_1, \dots, u_p\}, e_i \in EH\}$. Будем говорить, что гиперграф $H(v)$ получается из гиперграфа H с помощью преобразования γ , примененного к вершине v .

Алгоритм

0. Полагаем $H_1 := H$.

k . Пусть построен гиперграф H_k . Находим в нем предвисячую вершину v_k , соседние с ней вершины $\{u_1^k, \dots, u_p^k\}$ и применяем преобразование γ к вершине v_k . Полагаем $H_{k+1} := H_k(v_k)$.

Если гиперграф H_k не имеет предвисячих вершин, то обозначаем его через \tilde{H} .

Таким образом построена последовательность гиперграфов $H=H_1, H_2, \dots, H_k=\tilde{H}$, предвисячих и соседних с ними вершин $v_1, \{u_1^1, \dots, u_{p_1}^1\}, \dots, v_{k-1}, \{u_1^{k-1}, \dots, u_{p_{k-1}}^{k-1}\}$.

Теорема 2. Если гиперграф H не имеет эквивалентных вершин, то множество $V\tilde{H}$ не зависит от порядка выполнения операций γ .

Доказательство. Поскольку не существует двух таких вершин u и v , что $E(u)=E(v)$, то никакие две вершины не могут быть соседними друг для друга.

Пусть вершина v является соседней для предвисячей вершины u , которая не будет соседней ни для какой другой вершины. Так как операция γ лишь удаляет вершины из гиперребер, но не удаляет сами получившиеся гиперребра, то соотношение $E(v)\subseteq E(u)$ будет выполняться после применения преобразования γ к любой вершине, отличной от u . Следовательно, после любого такого преобразования вершина v будет являться соседней с предвисячей вершине u . Если же вершина v является соседней с вершиной u , а та — соседней с вершиной w , то $E(v)\subseteq E(u)\subseteq E(w)$, т.е. вершина v является соседней с предвисячей вершиной w . Следовательно, применение операции γ к вершинам u и v в разном порядке приводит к одному результату.

Теорема доказана.

Теорема 3. Гиперграф H без эквивалентных вершин реализуется гусеницей тогда и только тогда, когда гиперграф \tilde{H} реализуется цепью.

Необходимость. Пусть гиперграф H реализован гусеницей T . Через V_0 обозначим множество $VH/V\tilde{H}$. Предположим, что некоторая висячая вершина v гусеницы T не принадлежит v_0 . Пусть вершина v смежна в гусенице с вершиной u . Тогда $E(v)\subseteq E(u)$ и вершина v является соседней с предвисячей вершиной u , т.е. $v\in V_0$. Значит, любая висячая вершина гусеницы T принадлежит V_0 .

Телом гусеницы называется цепь, получающаяся после удаления из гусеницы всех висячих вершин.

Пусть некоторая вершина $v\in V_0$ принадлежит телу гусеницы и для нее предвисячей является вершина u . Так как $E(v)\subseteq E(u)$, то вершины a и b , смежные с v в теле гусеницы, принадлежат некоторому гиперребру из $E(w)$. Поэтому гусеница $T-av-vb+ab+vu$ также является реализацией гиперграфа H , и вершина v в этой реализации будет висячей. Прделав такие перестройки для всех вершин из V_0 , принадлежащих телу гусеницы, получим гусеницу \tilde{T} , которая является реализацией гиперграфа H и все вершины из V_0 являются висячими вершинами гусеницы \tilde{T} . Удалив вершины, принадлежащие V_0 , из гусеницы получим реализацию гиперграфа \tilde{H} цепью.

Достаточность. Пусть гиперграф $\tilde{H} = H_k$ реализуется цепью L , состоящей из предвисячих вершин. Пусть построена реализация гиперграфа H_p гусеницей T_p , в которой все предвисячие вершины принадлежат цепи L . Добавив к гусенице T_p вершины, соседние с предвисячей вершиной v_{p-1} , и соединив эти вершины с v_{p-1} , получим реализацию гиперграфа H_{p-1} гусеницей. В этой реализации все предвисячие вершины будут принадлежать цепи L .

Прделав подобную процедуру необходимое число раз, получим реализацию гиперграфа H гусеницей.

Теорема доказана.

Оценим трудоемкость проверки возможности реализации гиперграфа гусеницей. Гиперграф задан матрицей инцидентности, списками гиперребер, инцидентных каждой вершине, причем гиперребра будут пронумерованы и упорядочены в каждом списке относительно нумерации и для каждой вершины v_i будет вычислена ее степень $\deg v_i$. Алгоритм состоит из четырех этапов: определение и удаление эквивалентных вершин; определение последовательности предвисячих вершин и вершин, соседних с ними; построение гиперграфа \tilde{H} , проверка возможности реализации гиперграфа \tilde{H} цепью.

1. *Определение и удаление эквивалентных вершин.* Рассмотрим вершины v_1 и v_i и проверим, являются ли они эквивалентными. Для этой цели сравним списки $E(v_1)$ и $E(v_i)$. Так как гиперребра в этих списках упорядочены, то для того, чтобы выполнялось равенство $E(v_1)=E(v_i)$, необходимо и достаточно, чтобы $\deg v_1=\deg v_i$ и элементы списков, стоящие на одинаковых местах, были одинаковы. Это значит, что проверка равенства $E(v_1)=E(v_i)$ производится за $O(\deg v_1)$ операций, а поиск всех вершин, эквивалентных вершине v_1 , — за $O(n \deg v_1)$. Так как такую процедуру нужно произвести для каждой вершины, то суммарная трудоемкость этапа будет $O\left(\sum_{i=1}^n n \deg v_i\right) = O\left(n \sum_{i=1}^n \deg v_i\right) = O\left(n \sum_{i=1}^m |e_i|\right)$. Удаление эквивалентных вершин из гиперграфа заключается в удалении соответствующих списков и соответствующих строк из матрицы инцидентности и не приводит к увеличению трудоемкости.

2. *Определение последовательности предвисячих вершин и вершин, соседних с ними.* Теорема 2 показывает, что не имеет значения, в каком порядке выполнять преобразование γ . Это значит, что все предвисячие вершины и, следовательно, вершины из множества v_0 можно выбрать в исходном гиперграфе. Рассмотрим вершину v_1 и проверим, является ли соседней с ней вершина v_i . Для этой цели сравним списки $E(v_1)$ и $E(v_i)$. Так как гиперребра в этих списках упорядочены одинаково, то каждый раз сравниваются первые элементы списков и после каждого сравнения вычеркивается из них не менее одного элемента. Таким образом проверка условия $E(v_i) \subset E(v_1)$ производится за $O(\deg v_1 + \deg v_i)$ операций, а поиск

всех вершин, соседних с вершиной v_1 , — за $O\left((n-1)\deg v_1 + \sum_{i=2}^n \deg v_i\right)$.

Так как данную процедуру нужно выполнить для каждой вершины гиперграфа, то общая трудоемкость этапа составляет $O\left(n \sum_{i=1}^n \deg v_i\right) = O\left(n \sum_{i=1}^m |e_i|\right)$.

3. *Построение гиперграфа \tilde{H}* заключается в удалении списков, соответствующих вершинам из V_0 , и соответствующих строк из матрицы инцидентности и выполняется за $O(nm)$ операций.

4. *Проверка возможности реализации гиперграфа \tilde{H} цепью* выполняется за $O(nm)$ операций [12].

Таким образом проверка возможности реализации гиперграфа H гусеницей выполняется за $O\left(n \sum_{i=1}^m |e_i|\right)$.

1. Азаренок А.С., Сарванов В.И. // ДАН БССР. 1986. Т.30. №10. С.887.

2. Они же. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. №4. С.10.

3. Амбарян С.Л., Мовсесян А.А., Пилипосян Т.Э. О минимальных реализациях гиперграфов // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1981. Вып.16. С.37.

4. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.

5. Петренко А.И., Тетельбаум А.Я., Шрамченко Б.Л. Автоматизация проектирования электронной аппаратуры (топологический аспект). Киев, 1980.

6. Berge C. Graphs and Hypergraphs. Amsterdam, 1973.

7. Buneman P. // Discrete mathematics. 1974. V.9. №3.

8. Flament C. // Ibid. 1978. V.21. №3. P.223.

9. Gavril F. // J. Combinatorial Theory. 1974. V.B.16.Pt.1.

10. Jonson D.S., Pollak H.O. // J. Graph. Theory. 1987. V.11. №3. P.309.

11. Slater P. // Canad. Math. Bull. 1978. V.21.:3. P.335.

12. Kellogg S. Booth. // J. of computer and system sciences. 1976. V.13. P.335.

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Linear extremal problem on direct product of finite-dimensional and infinite-dimensional spaces is considered. The optimal criterion is formulated and proved.

Пусть x — n -вектор, $u(\bullet) = (u(t), t \in T)$, $T = [0, z]$, — кусочно-непрерывная функция. Под значением функции $u(\bullet)$ в точке $t \in \text{int } T$ будем понимать величину $u(t) = (u(t+0) + u(t-0))/2$, где $u(t+0)$ и $u(t-0)$ — правый и левый пределы функции в точке t .

На множестве пар $v = (x, u(\bullet))$ рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(v) = c'x + \int_0^z c(t)u(t)dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$Ax + \int_0^z h(t)u(t)dt = g, \quad (2)$$

$$d_* \leq x \leq d^*, \quad (3)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T, \quad (4)$$

где $c(t)$, $h(t)$, $t \in T$ — непрерывные скалярная и m -векторная функции соответственно, $A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$ — $m \times n$ -матрица, $c = c(J) = (c_j, j \in J)$, $d_* = d_*(J) = (d_{*j}, j \in J)$, $d^* = d^*(J) = (d^*_j, j \in J)$ — n -векторы, $g = g(I) = (g_i, i \in I)$ — m -вектор, f_* , f^* — скалярные величины, $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$.

Будем считать, что ограничение (2) задачи управляемо, т.е. для любого m -вектора g найдется пара v , на которой выполняется равенство (2).

Определения.

1. Пару $v = (x, u(\bullet))$ из n -вектора x и кусочно-непрерывной функции $u(\bullet)$ назовем расширенным управлением.

2. Расширенное управление будем называть допустимым, если на нем выполняются основные (2) и прямые (3), (4) ограничения.

3. Решение v^0 задачи (1)–(4) назовем оптимальным управлением.

4. Совокупность $S_{on} = \{T_{on}, J_{on}\}$ из l , $0 \leq l \leq m$, изолированных моментов $T = \{\tau_k, \tau_k \in T, k = 1, \dots, j\}$ и $m-l$ индексов $J = \{j_1, \dots, j_{m-l}\} \subset J$, назовем опорой, если невырождена $m \times m$ -матрица

$$P = (a_j = A[I, j], j \in J_{on}; h(t), t \in T_{on}).$$

5. Пару $\{v, S_{on}\}$ из допустимого управления и опоры назовем опорным управлением.

6. Опорное управление $\{v, S_{on}\}$ назовем невырожденным, если опорные значения расширенного управления не критические:

$$d_{*j} < x_j < d^*_j, j \in J_{on}; f_* < u(t) < f^*, t \in T_{on}.$$

Наряду с опорным управлением $\{v, S_{on}\}$ рассмотрим допустимое управление $\bar{v} = v + \Delta v$, состоящее из $\bar{x} = x + \Delta x$, $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$. Вычислим приращение критерия качества на управлениях \bar{v} и v :

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = c'\Delta x + \int_0^z c(t)\Delta u(t)dt. \quad (5)$$

Поскольку

$$A\Delta x + \int_0^z h(t)\Delta u(t)dt = 0, \quad (6)$$

то, умножив последнее равенство на m -вектор ν и вычтя из (5), получим

$$\Delta J(\nu) = (c' - \nu'A)\Delta x + \int_0^z (c(t) - \nu'h(t))\Delta u(t)dt.$$

Обозначим $\Delta' = \nu'A - c'$, $\Delta(t) = \nu'h(t) - c(t)$, $t \in T$. Вектор ν найдем из условия равенства нулю опорных оценок $\Delta_j = 0$, $j \in J_{on}$, и опорных значений коуправления $\Delta(t) = 0$, $t \in T_{on}$. Построенный таким образом вектор ν назовем вектором потенциалов. Он равен $\nu' = b'_{on}Q$, где $b'_{on} = (c_j, j \in J_{on}; c(t), t \in T_{on})$, $Q = P^{-1}$. В новых обозначениях формула приращения критерия качества примет вид

$$\Delta J(\nu) = -\Delta'_n \Delta x_n - \int_0^z \Delta(t)\Delta u(t)dt, \quad (7)$$

где $\Delta_n = \Delta(J_n) = (\Delta_j, j \in J_n)$, $\Delta x_n = \Delta x(J_n) = (\Delta x_j, j \in J_n)$, $J_n = J \setminus J_{on}$.

В качестве оценки субоптимальности $\beta(\nu, S_{on})$ опорного управления $\{v, S_{on}\}$ возьмем максимальное значение приращения критерия качества, полученное как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta J(\nu) \rightarrow \max, \\ d_{*n} - x_n \leq \Delta x_n \leq d_n^* - x_n, \\ f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), t \in T, \\ c_j, j \in J_{on}; c(t), t \in T_{on} \quad d_n^* = d^*(J_n) = (d_j^*, j \in J_n), \\ x_n = x(J_n) = (x_j, j \in J_n). \end{aligned} \quad (8)$$

Задача (8) отличается от задачи (1)–(4) тем, что в ней отсутствуют прямые ограничения по опорным компонентам вектора Δx . Тогда

$$\begin{aligned} \beta = \beta(\nu, S_{on}) = \sum_{\Delta_j > 0, j \in J_n} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{\Delta_j < 0, j \in J_n} \Delta_j (x_j - d_j^*) + \\ + \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - f_*)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - f^*)dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $T^+ = \{t \in T: \Delta(t) > 0\}$, $T^- = \{t \in T: \Delta(t) < 0\}$.

Исходя из (8) и (9), докажем следующий

Критерий оптимальности. Для оптимальности допустимого управления ν достаточно существования такой опоры S_{on} , что для опорного управления $\{v, S_{on}\}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_j \geq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \Delta_j \leq 0 \text{ при } x_j = d_j^*; \\ \Delta_j = 0 \text{ при } d_{*j} < x_j < d_j^*, j \in J_n; \Delta(t) \geq 0 \text{ при } u(t) = f_*; \\ \Delta(t) \leq 0 \text{ при } u(t) = f^*; \Delta(t) = 0 \text{ при } f_* < u(t) < f^*, t \in T. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть ν – оптимальное управление, а $\{v, S_{on}\}$ – невырожденное опорное управление. Для оптимальности расширенного управления ν необходимо, чтобы для опорного управления $\{v, S_{on}\}$ выполнялись соотношения (10).

Доказательство. Достаточность. Для оптимального управления ν^0 и опорного управления $\{v, S_{on}\}$ в силу (8) выполнится неравенство

$$J(\nu^0) - J(\nu) = \Delta J(\nu) \leq \beta(\nu, S_{on}),$$

где $\beta(\nu, S_{on})$ определяется соотношением (9). Отсюда ясно, что если опорное управление $\{v, S_{on}\}$ удовлетворяет соотношениям (10), то $\beta(\nu, S_{on}) = 0$ и $J(\nu^0) = J(\nu)$.

Необходимость. Пусть $\{v, S_{on}\}$ – невырожденное опорное управление с оптимальным расширенным управлением ν , но, вопреки утверждению,

нарушаются соотношения (10). Для определенности предположим, что существует такой момент $t_* \in T$, что $\Delta(t_*) > 0$ при $u(t_*) > f_*$. В силу непрерывности коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$, и кусочной непрерывности управления $u(t)$, $t \in T$, найдется такое достаточно малое число $\lambda_0 > 0$, что для всех λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, имеем:

- 1) момент t_* не является опорным;
- 2) $t_* \notin T_j^\lambda$, $T_j^\lambda = [\tau_j - \lambda, \tau_j + \lambda]$, $j = \overline{1, l}$;
- 3) $\Delta(t) > 0$ при $u(t) > f_*$, $t \in T_*^\lambda$, $T_*^\lambda = [t_* - \lambda, t_* + \lambda]$;
- 4) $T_*^\lambda \cap T_j^\lambda = \emptyset$, $j = \overline{1, l}$;
- 5) момент t_* можно считать точкой непрерывности управления $u(t)$, $t \in T_*^\lambda$.

Выберем достаточно малое λ_0 . Для каждого λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, построим вариацию расширенного управления $\Delta u(t) = \Delta u(t, \lambda)$, $t \in T$; Δx , положив $\Delta u(t) = -\theta$, $t \in T_*^\lambda$, где $0 < \theta = \theta(\lambda) = k\lambda \leq 1$, $k > 0$ и не зависит от λ ; $\Delta u(t) \equiv 0$, $t \in T \setminus \left(\bigcup_{j=1}^l T_j^\lambda \cup T_*^\lambda \right)$; $\Delta x_j \equiv 0$, $j \in J_n$.

В окрестности опорных моментов τ_j заменим $u(t)$, $t \in T$, на новое $\bar{u}(t)$, $t \in T$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin T_j^\lambda; \\ (u(\tau_j - 0) + u(\tau_j + 0))/2 = u(\tau_j), & t \in T_j^\lambda, j = \overline{1, l}. \end{cases}$$

В силу невырожденности опорного управления имеем: $|\bar{u}(\tau_j)| < 1$, $j = \overline{1, l}$.

Для любой непрерывной функции $h(t)$, $t \in T$, справедливо разложение

$$\begin{aligned} \int_{T_j^\lambda} h(t)u(t)dt &= \int_{\tau_j - \lambda}^{\tau_j} h(t)dt u(\tau_j - 0) + \int_{\tau_j}^{\tau_j + \lambda} h(t)dt u(\tau_j + 0) = \\ &= \lambda h(\tau_j)u(\tau_j - 0) + o_1(\lambda) + \lambda h(\tau_j)u(\tau_j + 0) + o_2(\lambda) = 2\lambda h(\tau_j)u(\tau_j) + o(\lambda). \end{aligned}$$

При замене управления $v = (x; u(t), t \in T)$ на управление $\bar{v} = (x; \bar{u}(t), t \in T)$ в основные ограничения (2) вносится погрешность порядка $o(\lambda)$

$$\begin{aligned} Ax + \int_0^z h(t)\bar{u}(t)dt - Ax - \int_0^z h(t)u(t)dt &= \int_0^z h(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt = \\ &= \sum_{j=1}^l \int_{T_j^\lambda} h(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt = \\ &= 2\lambda \sum_{j=1}^l h(\tau_j)u(\tau_j) + o_1(\lambda) - 2\lambda \sum_{j=1}^l h(\tau_j)u(\tau_j) + o_2(\lambda) = o(\lambda). \end{aligned}$$

По теореме о неявной функции скорректируем управление $\bar{u}(t)$, $t \in T$ так, чтобы на управлении $\bar{u}(t)$, $t \in T$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin T_j^\lambda; \\ u(\tau_j) + o(\lambda), & t \in T_j^\lambda, j = \overline{1, l} \end{cases}$$

основные ограничения (2) выполнялись точно.

При замене управления $v = (x; u(t), t \in T)$ на управление $\bar{v} = (x; \bar{u}(t), t \in T)$ критерий качества изменяется следующим образом:

$$J(\bar{v}) - J(v) = \int_0^z c(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt = \sum_{j=1}^l \int_{T_j^\lambda} c(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt =$$

$$= 2\lambda \sum_{j=1}^l c(\tau_j)u(\tau_j) + o_1(\lambda) - 2\lambda \sum_{j=1}^l c(\tau_j)u(\tau_j) + o_2(\lambda) = o(\lambda).$$

Вариацию управления на отрезках T_j^λ , $j = \overline{1, l}$ будем строить в виде постоянных функций $\Delta u(t) = \Delta u(\tau_j)$, $t \in T_j^\lambda$, $j = \overline{1, l}$.

Из равенства (6), справедливого для каждой допустимой вариации расширенного управления, следует

$$A_{on}\Delta x_{on} + \sum_{j=1}^l \int_{T_j^\lambda} h(t)\Delta u(t)dt = \theta \int_{T_*^\lambda} h(t)dt,$$

$$A_{on}\Delta x_{on} + \sum_{j=1}^l 2\lambda h(\tau_j)\Delta u(\tau_j) + o(\lambda) = \theta \int_{T_*^\lambda} h(t)dt.$$

Матрица коэффициентов этой системы

$$\Phi_{on} = (a_j = A[I, j], j \in J_{on} : h(t), t \in T_{on})$$

совпадает с опорной матрицей P . Введя вектор $\Delta u_{on} = (\Delta u(\tau_j), j = \overline{1, l})$ и матрицы $Q_1 = (q_{(j)} = Q[j, I], j = \overline{1, m-l})$, $Q_2 = (q_{(j)} = Q[j, I], j = \overline{m-l+1, m})$, где q_j — j -я строка матрицы Q , получим

$$\Delta x_{on} = 2k\lambda^2 Q_1 h(t_*) + o(\lambda),$$

$$\Delta u_{on} = k\lambda Q_2 h(t_*) + O(\lambda).$$

Для всех достаточно малых λ норма вектора $(\Delta x_{on}, \Delta u_{on})$ может быть сколь угодно мала. Следовательно, будут выполняться неравенства:

$$d_{*j} \leq x_j + \Delta x_j \leq d_j^*, j \in J_{on}; \quad \bar{f}_* \leq \bar{u}(\tau_j) + \Delta u(\tau_j) \leq \bar{f}^*, j = \overline{1, l}.$$

Тогда расширенное управление $\bar{v} = (\bar{x}; \bar{u}(t), t \in T)$ вида

$$\bar{u}(t) = u(t), t \in T \setminus \left(\bigcup_{j=1}^l T_j^\lambda \cup T_*^\lambda \right); \quad \bar{u}(t) = \bar{u}(t) + \Delta u(\tau_j), t \in T_j^\lambda, j = \overline{1, l};$$

$$\bar{u}(t) = u(t) - \theta, t \in T_*^\lambda; \quad \bar{x} = x + \Delta x$$

является допустимым.

Подсчитаем приращение критерия качества на управлениях \bar{v} и v . При достаточно малых λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, имеем

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = - \sum_{j=1}^l \int_{T_j^\lambda} \Delta(t)(u(\tau_j) + \Delta u(\tau_j) - u(t))dt +$$

$$+ \theta \int_{T_*^\lambda} \Delta(t)dt = k\lambda \int_{T_*^\lambda} \Delta(t)dt + o(\lambda) > 0.$$

Полученное неравенство противоречит оптимальности v и доказывает необходимую часть критерия оптимальности. Остальные случаи нарушения соотношений (10) доказываются аналогично. Теорема полностью доказана.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. Мн., 1983.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 09.01.96.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ПОДВИЖНЫМ НАЧАЛЬНЫМ СОСТОЯНИЕМ

Optimal control problem with phase constraints and non-fixed initial state is investigated. The optimal criterion is formulated and solution method is constructed.

Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к классу сложнейших экстремальных задач. Она исследовалась ранее в работах [1–2]. В данной работе рассматривается линейная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями с нефиксированным начальным состоянием. Сформулирован критерий оптимальности и на его основе построен метод решения.

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных функций рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} J(x_0, u) &= c'x(t^*) \rightarrow \max, \\ \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \in X = \{x \in R^n, Gx = f, d_* \leq x \leq d^*\}, \quad (1) \\ \alpha_*(t) &\leq d'x(t) \leq \alpha^*(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*], \end{aligned}$$

где $A \in R^{n \times n}$, $G \in R^{r \times n}$, $c, b, d, d_*, d^* \in R^n$, $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R$, $\alpha_*(t), \alpha^*(t) \in R$, $t \in T$, — достаточно гладкие функции.

Введем обозначение $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$.

Определения допустимой, оптимальной и субоптимальной пары $(x_0, u(\cdot))$ и соответствующих ей траекторий вводятся стандартно.

Будем считать, что $d'b \neq 0$ и ограничения задачи (1) удовлетворяют условию Слейтера, т.е. существуют такие вектор $\bar{x}_0 \in X$, управление $\bar{u}(\cdot)$, что вдоль них и соответствующей им траектории $\bar{x}(\cdot)$ выполняются неравенства

$$|\bar{u}(t)| < 1, \quad t \in T; \quad \bar{\beta}_* = \max_{i \in T} (d'\bar{x}(t) - \alpha_*(t)) > 0, \quad \bar{\beta}^* = \max_{i \in T} (d'\bar{x}(t) - \alpha^*(t)) < 0.$$

2. Опора ограничений. Опорная совокупность. На отрезке T выделим подмножество $T_{\text{он}} \subset T$, состоящее из отрезков $T_i = [\tau_i, \tau^i]$, $\tau_i \leq \tau^i < \tau_{i+1}$, $i \in N = \{1, \dots, p\}$, $N_* = \{i \in N, \tau_i < \tau^i\}$, $N_0 = N \setminus N_*$, $T_H = T \setminus \bigcup_{i \in N_*} T_i$.

Обозначим через $\Phi(t, \tau)$, $t \geq \tau$, фундаментальную матрицу решений системы $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = A, \quad t \in T_H; \quad A(t) = \bar{A} = (E - bd'/d'b)A = SA, \quad t \in T_i, \quad i \in N_*. \quad (2)$$

Считаем, что $\Phi(t, \tau) \equiv 0$, при $t < \tau$.

Определение 1. Совокупность $S_{\text{он}} = \{T_{\text{он}}, t_{\text{он}}, J_{\text{он}}\}$ из опорных отрезков $T_{\text{он}} = \{T_i, i \in N_*\}$, опорных моментов $t_{\text{он}} = \{t_j, j \in J_*\}$, $t_j \in T \setminus \bigcup_{i \in N_*} T_i$ и l опорных индексов $J_{\text{он}} = \{j_1, \dots, j_l\} \subset J = \{1, 2, \dots, n\}$, $l = |N| + r - |J_*|$, называется опорой, если невырождена матрица

$$P_{\text{он}} = \left[\begin{array}{c|c} d'\Phi_j(\tau_i, 0), j \in J_{\text{он}} & d'\Phi(\tau_i, t_j), j \in J_* \\ \hline i \in N & i \in N \\ \hline G_j, j \in J_{\text{он}} & 0 \end{array} \right].$$

Определение 2. Совокупность $\{(x_0, u(\cdot)), S_{\text{он}}\}$ из допустимой пары $(x_0, u(\cdot))$ и опоры $S_{\text{он}}$ называется опорной совокупностью.

3. Формула приращения критерия качества. Рассмотрим допустимую пару $(x_0, u(\cdot))$ и соответствующую ей траекторию $x(\cdot)$. Построим множества

$$\begin{aligned} T_0 &= \{t \in T: d'x(t) = \alpha_*(t) \vee \alpha^*(t)\}, T_i = [\tau_i, \tau^i], \\ \tau_i &\leq \tau^i < \tau_{i+1}, i \in N = \{1, 2, \dots, n_0\}, \tau^0 = 0, \tau_{n_0+1} = t^*; \\ N^+ &= \{i \in N: d'x(t) = \alpha^*(t), t \in T_i\}, \\ N^- &= \{i \in N: d'x(t) = \alpha_*(t), t \in T_i\}, N_*^+ = \{i \in N^+, \tau_i < \tau^i\}, \\ N_0^+ &= N^+ \setminus N_*^+, N_*^- = \{i \in N^-, \tau_i < \tau^i\}, N_0^- = N^- \setminus N_*^-, \\ N_* &= N_*^+ \cup N_*^-, N_0 = N_0^+ \cup N_0^-, T_H = T \setminus \bigcup_{i \in N} T_i; \\ J_0 &= \{j \in J: x_{0j} = d_{*j} \vee d_j^*\}, J_0^+ = \{j \in J_0: x_{0j} = d_j^*\}, \\ J_0^- &= \{j \in J_0: x_{0j} = d_{*j}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Допустимая пара $(x_0, u(\cdot))$ называется регулярной, если на множестве $T_{ок} = \bigcup_{i \in N} T_i$ равенство $|\mu(t)| = 1$ возможно лишь в конечном числе точек.

Наряду с допустимой парой $(x_0, u(\cdot))$ и соответствующей ей траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим допустимую пару $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ и соответствующую ей траекторию $\bar{x}(\cdot)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \bar{x}(t) - x(t), \Delta x_0 = \bar{x}_0 - x_0, \omega_*(t) = \alpha_*(t) - d'x(t), \\ \omega^*(t) &= \alpha^*(t) - d'x(t), \bar{\omega}_*(t) = \alpha_*(t) - d'\bar{x}(t) = \omega_*(t) - \Delta\omega(t), \\ \bar{\omega}^*(t) &= \alpha^*(t) - d'\bar{x}(t) = \omega^*(t) - \Delta\omega(t), \Delta\omega(t) = d'\Delta x(t), t \in T. \end{aligned} \quad (4)$$

По аналогии с [2], можно показать, что формула приращения критерия качества имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(x_0, u) &= \int_{T_H} \psi'(t) b \Delta u(t) dt + \sum_{j \in J} \Delta_{x_j} \Delta x_{0j} + \sum_{i \in N_0} \bar{v}_i \Delta \omega(\tau_i) + \\ &+ \sum_{i \in N} \left(\frac{\psi'(\tau^i) b}{d'b} \Delta \omega(\tau^i) + \left(\bar{v}_i - \frac{\psi'(\tau_i + 0) b}{d'b} \right) \Delta \omega(\tau_i) + \int_{\tau_i} \frac{\psi'(t) \bar{A} b}{d'b} \Delta \omega(t) dt \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\psi(\cdot) = (\psi(t), t \in T)$, — решение системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A'(t)\psi, \psi(t^*) = c, \\ \psi(\tau_i - 0) &= \psi(\tau_i + 0) - d'\bar{v}_i, i \in N, \\ \Delta_x &= \psi(0) + G'\gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

$\bar{v}_i, i \in N, \gamma$ — произвольные числа и вектор; $A(t)$ построена согласно (2).

4. Критерий оптимальности. Справедлива следующая

Теорема. Пусть в задаче (1) выполняется условие Слейтера. Тогда для оптимальности регулярной пары $(x_0, u(\cdot))$ необходимо и достаточно существование такого вектора $\bar{v} = \{\bar{v}_i, i \in N, \gamma\}$, что вдоль соответствующего ему решения $\psi(\cdot)$ системы (6) и допустимой пары $(x_0, u(\cdot))$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \psi'(t) b u(t) &= \max_{|u| \leq 1} \psi'(t) b u, t \in T \setminus T_0; \\ \frac{\psi'(\tau^i) b}{d'b} &\begin{cases} \geq 0, i \in N_*^+, \\ \leq 0, i \in N_*^-, \end{cases} \quad \bar{v}_i - \frac{\psi'(\tau_i + 0) b}{d'b} \begin{cases} \geq 0, i \in N_*^+, \\ \leq 0, i \in N_*^-, \end{cases} \\ \frac{\psi'(t) \bar{A} b}{d'b} &\begin{cases} \geq 0, t \in T_i, i \in N_*^+, \\ \leq 0, t \in T_i, i \in N_*^-, \end{cases} \quad \bar{v}_i \begin{cases} \geq 0, i \in N_0^+, \\ \leq 0, i \in N_0^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta_{xj} \begin{cases} \geq 0, x_{0j} = d_j^*, j \in J_0^+, \\ \leq 0, x_{0j} = d_{*j}, j \in J_0^-. \end{cases}$$

Рассмотрим допустимую пару $(x_0, u(\cdot))$ и соответствующие ей множества (3). Обозначим

$$T_{\text{но}} = \{t \in T_{\text{н}} : |u(t-0) + u(t+0)|/2 < 1\} = \{t_j, j \in \bar{J}\}, \bar{J} = \{1, 2, \dots, \bar{p}\};$$

$$J_{\text{но}} = \{j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_0 : \Delta_{xj} = 0\}.$$

Регулярная пара $(x_0, u(\cdot))$ называется невырожденной, если найдутся такие множества $J_* \in \bar{J}$ и $J_{\text{оп}} \in J_{\text{но}}$, что $\det P_{\text{оп}} \neq 0$.

Пусть $(x_0, u(\cdot))$ – невырожденная пара. Подсчитаем вектор

$$\hat{v} = (\bar{v}_i, i \in N; \gamma)' = (c' \Phi_j(t^*, 0), j \in J_{\text{оп}}; c' \Phi(t^*, t_j), j \in J_*)' P_{\text{оп}}^{-1}. \quad (8)$$

Следствие. Для оптимальности невырожденной пары в задаче (1) необходимо и достаточно, чтобы вдоль пары $(x_0, u(\cdot))$ и решения $\psi(t)$, $t \in T$, системы (6), соответствующего вектору \hat{v} (8), выполнялись соотношения (7).

5. Структура и определяющие элементы. Алгоритм. Без ограничения общности, с целью упрощения выкладок будем считать, что в задаче (1), $\alpha_*(t) = -\infty$, $\alpha^*(t) = \alpha(t)$, $t \in T$.

Пусть $(x_0^0, u^0(\cdot))$, $x^0(\cdot)$ – оптимальная пара и соответствующая ей траектория. Им соответствуют множества

$$T^0 = \{t \in T : d'x^0(t) = \alpha(t)\} = \bigcup_{i \in N_a} T_{0i}, T_{0i} = [\tau_i^0, \tau^{0i}], i \in N_a,$$

$$N_*^0 = \{i \in N_a : \tau_i^0 < \tau^{0i}\}, N_0^0 = \{i \in N_a : \tau_i^0 = \tau^{0i}, u^0(\tau_i - 0) = u^0(\tau_i + 0)\},$$

$$N^0 = N_0^0 \cup N_*^0 = \{1, \dots, p^0\};$$

$$N_{*R}^0 = \{i \in N_*^0 : u^0(\tau_i - 0) \neq u^0(\tau_i + 0)\}, N_{HR}^0 = N^0 \setminus N_{*R}^0,$$

$$N_*^{0R} = \{i \in N_*^0 : u^0(\tau^i - 0) \neq u^0(\tau^i + 0)\}, N_{*H}^{0R} = N_*^0 \setminus N_*^{0R},$$

$$J_+^0 = \{j \in J : x_{0j}^0 = d_j^*\}, J_-^0 = \{j \in J : x_{0j}^0 = d_{*j}\}, J^0 = J \setminus (J_+^0 \cup J_-^0).$$

Согласно критерию оптимальности существуют такие параметры \bar{v}_i^0 , $i \in N^0$, γ^0 , что вдоль соответствующего им решения $\psi(t)$, $t \in T$, системы (6) и $(x_0^0, u^0(\cdot))$ выполняются соотношения (7). Обозначим

$$\{t_{ij}^0, j = \overline{1, p_i}\} = \{t \in J : \tau_{i+1}^0 [: u^0(t_{ij} - 0) \neq u^0(t_{ij} + 0) \}, t_{ij}^0 < t_{ij+1}^0,$$

$$j = \overline{1, p_i - 1}, p_i \geq 0, i = \overline{0, p^0}, \tau^{00} = 0, \tau_{p^0+1}^0 = t^*, k_i = u^0(\tau^i + 0).$$

Совокупность

$$\{p^0, N_*^0, N_0^0, p_i, k_i, i = \overline{0, p^0}, N_{*R}^0, N_*^{0R}, J_-, J_+\} \quad (9)$$

назовем структурой решения задачи (1).

Введем совокупность параметров

$$\theta^0 = \left\{ \begin{array}{l} t_{ij}^0, j = \overline{1, p_i}, i = \overline{0, p^0}; \tau_i^0, i \in N^0, \tau^{0i}, i \in N_*^0; \\ \bar{v}_i^0, i \in N^0, x_{0j}^0, j \in J^0, \gamma^0 \end{array} \right\}, \quad (10)$$

которую назовем определяющими элементами решения задачи (1).

Совокупность параметров (9), (10) представляет собой конечномерную, полную информацию о решении задачи (1), так как позволяет однозначно найти прямое и двойственное решение исходной задачи.

Элементами структуры (9) являются целые числа и для их определения не обязательно точно знать оптимальное управление. Достаточно знать хорошее приближение $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ к $(x_0^0, u^0(\cdot))$.

Имея приближенное решение задачи, можно построить только приближенное значение определяющих элементов (10).

Основываясь на этих рассуждениях, можно предложить следующий алгоритм, состоящий из двух процедур: а) процедуры формирования и анализа решения опорных задач (ФАРОЗ); б) процедуры доводки.

Цель процедуры ФАРОЗ – построить приближенное решение (достаточно грубое) исходной задачи и по нему определить структуру (9) и приближенное значение определяющих элементов (10).

Цель процедуры доводки – осуществить построение точных значений совокупности (10) (со сколь угодно высокой точностью), исходя из найденной структуры и приближенного значения определяющих элементов, путем решения специальной системы уравнений методом Ньютона.

ФАРОЗ. Пусть $S_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}^x, t_{\text{оп}}^u, J_{\text{оп}}\}$ – начальная опора задачи (1). Выберем параметр $h > 0$ и построим h – аппроксимацию задачи (1). Используя формулу Коши, получим линейную дискретную задачу оптимального управления вида

$$c'x(n^* + 1) \rightarrow \max, \\ x(t + 1) = \overline{G}(t)x(t) + \overline{b}(t)u(t), \quad t = 0, n^*, \quad Gx_0 = f, \quad d_* \leq x_0 \leq d^*, \quad (11) \\ d'x(t) \leq \alpha(t), \quad t = 1, n^* + 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t = 0, n^*.$$

Эта задача эквивалентна задаче линейного управления больших размеров. Выберем параметр h таким (достаточно малым), что ограничения задачи (11) совместны. Решим задачу (11), исходя из опоры

$$S_{\text{доп}} = \{T_{\text{оп}}^x, T_{\text{оп}}^u, J_{\text{оп}}\},$$

$$T_{\text{оп}}^x = \left\{ k \in K_* : \tau_{(k)} \in \bigcup_{i \in N_{(*)}} T_i \right\} \cup \left\{ k \in K_* : \exists T_i \subset [\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)}], i \in N_{(0)} \right\},$$

$$T_{\text{оп}}^u = \left\{ k \in K : \exists t_j \in [\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)}], j \in J_* \right\} \cup \left\{ k \in K : [\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)}] \subset \bigcup_{i \in N_{(*)}} T_i \right\},$$

$$N_{(*)} = \{i \in N : \exists \tau_{(*)} \subset T_i\}, \quad N_{(0)} = N \setminus N_{(*)}.$$

Получим оптимальную пару $(x_0, \omega(t))$, $t \in K$, и $S_{\text{доп}}^* = \{\tau_i, k_i, i \in N; t_j, j \in J_*; J_i, i = \overline{1, l}\}$ задачи (11). Строим новую опору $S_{\text{оп}}^{(*)} = \{T_{\text{оп}}^{(*)}, t_{\text{оп}}^{(*)}, J_{\text{оп}}^{(*)}\}$ задачи (1):

$$T_{\text{оп}}^{(*)} = \bigcup_{i \in N} T_i^{(*)}, \quad T_i^{(*)} = [\tau_{(\tau_i)}, \tau_{(\tau_i + k_i)}], \quad i \in N, \quad T_i^{(*)} = \tau_{(\tau_i)}, \quad i \in N_0; \\ t_{\text{оп}}^{(*)} = \{\tau_{(t_j)}, j \in J_*\}, \quad J_{\text{оп}}^{(*)} = \{j_1, \dots, j_l\}, \quad (12)$$

исходя из которой пытаемся осуществить доводку.

Доводка. Пусть $S_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, t_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ – опора задачи (11), построенная первой процедурой. По правилам (8) подсчитаем числа \overline{v}_i , $i \in N$, вектор γ и соответствующее им решение $\psi(t)$, $t \in T$. Обозначим

$$\{t_{ij}, j = \overline{1, p_i}\} = \{t \in \tau^i, \tau_{i+1} : \psi'(t)b = 0\}, \quad p_i \geq 0, \quad i = \overline{0, p}, \quad k_i = \text{sign} \Delta(\tau^i), \\ N_{*R} = \{i \in N_* : v_i = 0\}, \quad N_{HR} = N \setminus N_{*R}, \quad N_*^R = \{i \in N_* : v^i = 0\}, \quad N_{*H}^R = N_* \setminus N_*^R, \\ J_+ = \{j \in J : \Delta_j \geq 0\}, \quad J_- = \{j \in J : \Delta_j \leq 0\}, \quad J^0 = J \setminus (J_+ \cup J_-).$$

По данной информации построим структуру (9) оптимальной пары

$$\{p, N_*, N_0, p_i, k_i, i = \overline{0, p}, N_{*R}^R, N_*^R, J_+, J_-\}.$$

Введем вектор параметров

$$\theta = \{t_{ij}, i = \overline{1, p_i}, i = \overline{0, p}; \tau_i, i \in N, \tau^i, i \in N_*; \overline{v}_i, i \in N, x_{0j}, j \in J^0, \gamma\}.$$

Построим функции $\overline{A}(\theta, t)$, $\beta(\theta, t)$ следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{A}(\theta, t) &= A, \quad t \in T \setminus \bigcup_{i \in N} [\tau_i, \tau^i], \\ \bar{A}(\theta, t) &= SA, \quad t \in [\tau_i, \tau^i], \\ \beta(\theta, t) &= \alpha(t), \quad t \in [\tau_i, \tau^i].\end{aligned}\tag{13}$$

Через $\psi(\theta, t)$, $t \in T$, обозначим решение системы

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\bar{A}(\theta, t)\psi, \quad \psi(t^*) = c, \\ \psi(\tau_i - 0) &= \psi(\tau_i + 0) - d^* \bar{v}_i, \quad i \in N;\end{aligned}\tag{14}$$

через $\nu(\theta, t)$, $t \in T$, — управление, построенное по правилам

$$\begin{aligned}\nu(\theta, t) &= \dot{\beta}(\theta, t) / d^* b, \quad t \in [\tau_i, \tau^i], \quad i \in N_*, \\ \nu(\theta, t) &= (-1)^j k_j, \quad t \in [t_{ij}, t_{ij+1}], \quad j = \overline{1, p_i - 1}, \quad i = \overline{0, p};\end{aligned}\tag{15}$$

через $\chi(\theta, t)$, $t \in T$, — траекторию системы

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= \bar{A}'(\theta, t)\chi + b\nu(\theta, t), \\ \chi(0) &= \chi_0 = (\chi_{0j}, j \in J^0, \chi_{0j} = d_j^*, j \in J_+, \chi_{0j} = d_{*j}, j \in J_-),\end{aligned}\tag{16}$$

соответствующую управлению $\nu(\theta, t)$, $t \in T$.

Используя известную структуру оптимальной пары, составим систему уравнений

$$\begin{aligned}G_{1i}(\theta) &= d'\chi(\theta, \tau_i) - \beta(\theta, \tau_i) = 0, \quad i \in N; \\ G_{2i}(\theta) &= G\chi_0 - f = 0; \\ G_{3i}(\theta) &= d'\dot{\chi}(\theta, \tau_i) - \dot{\beta}(\theta, \tau_i) = 0, \quad i \in N_{HR}; \\ G_{4i}(\theta) &= \bar{v}_i - \psi'(\theta, \tau_i + 0)b / d^* b = 0, \quad i \in N_{*R}; \\ G_{5i}(\theta) &= d'\dot{\chi}(\theta, \tau^i) - \dot{\beta}(\theta, \tau^i) = 0, \quad i \in N_{*H}^R; \\ G_{6i}(\theta) &= \psi'(\theta, \tau^i)b / d^* b = 0, \quad i \in N_{*}^R; \\ G_{7i}(\theta) &= \Delta_x(\theta) = \psi(\theta, 0) + G\gamma = 0; \\ G_{8i}(\theta) &= \psi'(\theta, t_{ij})b = 0, \quad j = \overline{1, p_i}, \quad i = \overline{0, p}.\end{aligned}\tag{17}$$

Систему уравнений (17) назовем уравнениями доводки. Процедура доводки состоит в поиске решений θ^* системы (17). Пусть

$\theta^* = \{t_{ij}^*, j = \overline{1, p_i}, i = \overline{0, p}, \tau_i^*, i \in N, \tau^i, i \in N_*; \bar{v}_i^*, i \in N; \chi_{0j}^*, j \in J^0, \gamma^*\}$ — решение системы уравнений доводки (17), $\nu^*(t) = \nu^*(\theta^*, t)$, $\chi^*(t) = \chi^*(\theta^*, t)$, $\psi^*(t) = \psi^*(\theta^*, t)$, $t \in T$, — соответствующие ему функции (13)–(16). Положим $\omega^*(t) = (\dot{\beta}(\theta^*, t) - d^* \bar{A}'\chi^*(t)) / d^* b$, $\xi^*(t) = -\psi^{*'}(t) \bar{A}b / d^* b$, $t \in [\tau_i^*, \tau^{*i}] = T_i$, $i \in N_*$. Если $|\omega^*(t)| \leq 1$, $t \in T_i^*$, $i \in N_*$; $d^* \chi^*(t) \leq \alpha(t)$, $t \in T_H$, и вдоль $\psi^*(t)$, $t \in T$, \bar{v}_i^* , $i \in N$, γ^* выполняются (7), то прекращаем решение задачи (1). В противном случае доводку считаем преждевременной. С целью улучшения опоры $S_{оп}$ переходим к первой процедуре, заменив h на $h^* = h/3$.

Можно показать, что предложенный алгоритм является конечным, т.е. он, используя конечный объем оперативной памяти ЭВМ и интегрируя прямую и сопряженную системы на интервале конечной длины, строит решение задачи (1) любой точности, исходя из любой допустимой пары.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления. Мн., 1984.

2. Костюкова О.И. Оптимизация линейных динамических систем с фазовыми ограничениями. Мн., 1989. (Препринт. АН БССР. Ин-т математики; №29(379)).

Поступила в редакцию 07.02.96.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С МИНУС-БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

The necessary and sufficient solvability conditions are given in the form of orthogonality of the right hand side with the weight to the constructed base of the co-kernel of the corresponding operator.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}^0 \varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t) \frac{t+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = f(t), t \in L = \mathbf{R}, \quad (1)$$

в предположениях:

$$i) a(t) - b(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} g_1(t) e^{i\alpha t},$$

$$ii) a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} g_2(t) e^{i\beta t},$$

iii) α, β – вещественные постоянные, $\alpha \neq \beta$ (при $\alpha = \beta$ индекс оператора \mathbf{K}^0 конечен), a_k, b_j – вещественные числа, $a_k \neq b_j$, $k = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, \nu}$,

$$m_k, p_j \in \mathbf{N}, \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m, \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p,$$

$$iv) f(t) \in \mathbf{H}_{[L]}(\eta), 0 < \eta \leq 1,$$

$$v) g_k(t) \in \mathbf{H}_{[L]}(\eta_k), 0 < \eta_k \leq 1, g_k(t) \neq 0, t \in L, k = \overline{1, 2},$$

v) функции $f(t), g_1(t), g_2(t)$ дифференцируемы $m_k - 1$ и $p_j - 1$ раз в точках a_k и b_j соответственно ($k = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, \nu}$), а производные максимальных порядков удовлетворяют условию Гельдера в окрестностях этих точек.

Здесь через $\mathbf{H}_{[L]}(\eta)$, $0 < \eta < 1$, обозначен класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на сомкнутой прямой (см. [1], с.20,48).

Будем искать решение уравнения (1) в классе \mathbf{H} функций, ограниченных для $-\infty \leq t \leq +\infty$, удовлетворяющих условию Гельдера на любом конечном промежутке.

Подобно тому, как это сделано в [1], сведем интегральное уравнение (1) к краевой задаче Римана с бесконечным индексом:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

где $\Phi^\pm(t)$ – предельные значения интеграла типа Коши:

$$\Phi^\pm(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^\pm = \{z | \pm \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$G(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j}} G_0(t) e^{2i\sigma t}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j) g_2(t) e^{i\beta t}}, \quad G_0(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)},$$

$2\sigma = a - b$. Обозначим $\kappa = \operatorname{Ind} G_0(t)$.

Исчерпывающее исследование разрешимости уравнения (1) в случае $\sigma > 0$ приводится в работе [2].

Пусть $\sigma > 0$.

Рассмотрим однородное уравнение, союзное к уравнению (1):

$$\mathbf{K}^0 \psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{t+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau) b(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = 0, \quad t \in L = \mathbf{R}. \quad (3)$$

Построим решение уравнения (3) в классе \tilde{H} .

С помощью кусочно-аналитической функции

$$\Psi^{\pm}(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau)b(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm}, \quad (4)$$

используя формулы Сохоцкого, получим соответствующую краевую задачу Римана с бесконечным индексом:

$$\Psi^{+}(t) = \frac{1}{G(t)} \Psi^{-}(t), \quad t \in L. \quad (5)$$

При $\sigma < 0$ индекс этой задачи плюс-бесконечный, следовательно, к уравнению (3) и задаче (5) применимы рассуждения [2, с.9]. Согласно этим рассуждениям, уравнение (3) в классе \tilde{H} равносильно задаче (5) в классе

$$B^{\pm} = \{f^{\pm} \in A(D^{\pm}) \cap C(D^{\pm} \cup L), \text{ограниченных в } D^{\pm}\}.$$

Уравнение (3) имеет бесконечно много решений в классе \tilde{H} . С учетом формулы (4) общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{1}{b(t)} (\Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t)),$$

где $\Psi^{\pm}(t)$ – предельные значения решений краевой задачи (5) в классе B^{\pm} (общая формула решений установлена в [2]):

$$\Psi^{+}(z) = \frac{e^{-i\sigma z} F(z)}{X_0^{+}(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k}},$$

$$\Psi^{-}(z) = \frac{e^{i\sigma z} F(z)}{X_0^{-}(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j}},$$

где $X_0^{\pm}(z)$ – каноническая функция [2, с.6]:

$$X_0^{\pm}(z) = \exp \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G_0(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)},$$

$F(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho \leq 1$, типа $\sigma_F \leq |\sigma|$, контурные значения которой удовлетворяют для всех $t \in R$ неравенству [2, с.9–11]:

$$|F(t)| \leq C \max \left\{ \left| \Psi^{+}(t) X_0^{+}(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \right|, \left| \Psi^{-}(t) X_0^{-}(t) \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} \right| \right\}.$$

Тогда общее решение уравнения (3) в классе \tilde{H} имеет вид

$$\psi(t) = \frac{2F(t)}{X_0^{+}(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} e^{i(\sigma+\beta)t} g_2(t)}. \quad (6)$$

Для обратимых слева сингулярных интегральных операторов в случае бесконечномерного коядра в [3, с.44] установлено, что разрешимость уравнения с такими операторами равносильна выполнению некоторой счетной системы равенств. Последние, по существу, представляют собой условия ортогональности с некоторым весом правой части уравнения (1) базису e_{ℓ} пространства решений однородного уравнения, союзного данному:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)e_{\ell}(t)dt}{(t+i)^2} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Поскольку доказательство этого утверждения основано на общих свойствах сингулярных операторов, а рассматриваемые нами пространства совпадают с изучаемыми в [3], то аналогичное утверждение имеет место и в нашем случае. Для построения базиса пространства решений уравнения

(3) достаточно применить технику, предложенную в работе [3, с.31]. Элементами базиса являются функции, задаваемые формулой (6):

$$e_\ell = \frac{2F_\ell(t)}{X_0^+(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (t - b_j)^{p_j} e^{i(\sigma+\beta)t} g_2(t)}, \quad (8)$$

где $\ell \in I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, $I_1 = \{r = \overline{1, m_k}, k = \overline{1, \mu}\}$, $I_2 = \{q = \overline{1, p_j}, j = \overline{1, \nu}\}$, $I_3 = \{s \in \mathbf{Z}\}$, для которых

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - a_k)^r (t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_1,$$

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - b_j)^q (t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_2,$$

$$F_\ell(t) = \frac{F_*(t)}{(t - \frac{\pi s}{\sigma} - i)(t + i)^{\kappa-1}}, \quad \ell \in I_3,$$

где $F_*(z) = \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j} \sin \sigma(z - i)$ при $\kappa+1 > 0$ и $F_*(z) = \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j} (z + i)^{\kappa+1} \sin \sigma(z - i)$ при $\kappa+1 \leq 0$.

Установим следующий результат.

Теорема 1. При $\sigma < 0$ уравнение (1) в предположениях $i) - iv)$ в классе $\tilde{\mathbf{H}}$ равносильно краевой задаче Римана в классе \mathbf{B}^\pm .

Доказательство. Покажем сначала, что каждому решению задачи (2) $\Phi^\pm(t) \in \mathbf{B}^\pm$ соответствует по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \quad (9)$$

решение уравнения (1) в классе $\tilde{\mathbf{H}}$.

Как было показано в [2, с.23], единственное решение задачи (2), ограниченное в окрестности бесконечности, имеет вид:

$$\Phi_1^+(z) = \frac{e^{i\sigma z} X_0^+(z) \Omega^+(z)}{V_0(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_j)^{p_j}}, \quad (10)$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{e^{-i\sigma z} X_0^-(z) \Omega^-(z)}{V_0(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - a_k)^{m_k}},$$

где

$$\Omega^-(z) = \frac{(z + i)^{\kappa+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i(\sigma+\beta)\tau} V_0(\tau) d\tau}{2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + i)^{\kappa+1} X_0^+(\tau) g_2(\tau) (\tau - z)}, \quad z \in D^\pm,$$

$V_0(z)$ — целая функция, двоякоограниченная на вещественной оси, такая что функции $V_0(z)e^{i\sigma z}$, $V_0(z)e^{-i\sigma z}$ имеют порядок $\rho \leq 1$ и неположительные индикаторы в D^+ и D^- соответственно. Несложно убедиться, что можно выбрать целую функцию $V_0(z)$, в частности, следующим образом:

$$\text{при } \kappa+1 > 0 \quad V_0(z) = \sin \sigma(z - i),$$

$$\text{при } \kappa+1 \leq 0 \quad V_0(z) = (z + i)^{\kappa+1} \sin \sigma(z - i).$$

Полученное решение принадлежит классу \mathbf{B}^\pm , если нули функции $\Omega^\pm(z)$ совпадают с нулями функции $V_0(z)$ и точки a_k и b_j являются нулями

кратностей m_k и p_j функций $\Omega^-(z)$ и $\Omega^+(z)$ соответственно. Отсюда вытекают условия разрешимости задачи (4) в классе \mathbf{B}^\pm :

$$\begin{aligned}\Omega^\pm\left(\frac{\pi\ell}{\sigma} + i\right) &= 0, \ell \in \mathbf{Z}, \\ \Omega^{+(q)}(b_j) &= 0, q = \overline{0, p_j - 1}, j = \overline{1, \nu}, \\ \Omega^{-(r)}(a_k) &= 0, r = \overline{0, m_k - 1}, k = \overline{1, \mu}.\end{aligned}\quad (11)$$

Предположим, что выполнены условия (11). Тогда задача (2) в классе \mathbf{B}^\pm имеет единственное решение.

Обозначим $\varphi_1(t) := \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$, где $\Phi_1^\pm(t)$ – предельные значения функции $\Phi_1^\pm(z)$, задаваемые равенствами (10). Очевидно, $\varphi_1(t) \in \tilde{\mathbf{H}}$. Проводя рассуждения, аналогичные [2, с.4], получаем, что $\varphi_1(t)$ – решение интегрального уравнения в классе $\tilde{\mathbf{H}}$. Это означает, что выполнены условия (7).

Докажем теперь, что если не выполнено хотя бы одно из условий (11), то не выполняются и условия (7). Иными словами, в случае, когда неразрешима задача (2) в классе \mathbf{B}^\pm , неразрешимо и уравнение (1) в классе $\tilde{\mathbf{H}}$. Предположим противное: пусть хотя бы одно из условий (11) не выполнено, но выполнены условия (7). Если в качестве базиса пространства решений однородного союзного уравнения (3) выбрать базис (8), то получим, что условия (7) в точности совпадают с равенствами (11). Значит, разрешима задача (2), что противоречит предположению.

Замечание. В действительности, существует связь между решениями уравнения (1) и задачи (2). При доказательстве теоремы уже использовалось, что каждому решению задачи (2) в классе \mathbf{B}^\pm , удовлетворяющему условиям разрешимости, отвечает по формуле (9) решение уравнения (1) из класса $\tilde{\mathbf{H}}$. Верно и обратное: для решения уравнения (1) $\varphi_1(t) \in \tilde{\mathbf{H}}$ существует решение задачи (2) $\Phi_1^\pm(z) \in \mathbf{B}^\pm$ такое, что

$$\varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t).$$

Пусть уравнение (1) разрешимо, тогда задача (2) имеет решение, задаваемое формулой (10).

Функция $\Phi_1^\pm(z)$ – кусочно-аналитическая, удовлетворяющая условию $\Phi_1^-(-i) = 0$. Она представима интегралом типа Коши с плотностью $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$. С другой стороны, предельные значения функции, задаваемой интегралом типа Коши

$$\Phi^\pm(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^\pm,$$

удовлетворяют краевому условию (2) по построению. Используя формулы Сохоцкого, несложно установить, что

$$\varphi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t). \quad (12)$$

Из теоремы непосредственно вытекает результат о разрешимости уравнения (1):

Следствие. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение (1) в предположениях $i) - iv)$ при $\sigma < 0$ в классе $\tilde{\mathbf{H}}$, вообще говоря, неразрешимо. При выполнении счетного числа условий разрешимости вида (7) его единственное решение дается формулой (12), в которой $\Phi_1^\pm(t)$ – предельные значения функций $\Phi_1^\pm(z)$, задаваемых равенствами (10).

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

2. Дубатовская М. В., Рогозин С. В. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае. Мн., 1995. Деп. в ВИНТИ 01.08.95, № 2343-В95.

3. Дыбин Д. В. Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов-на-Дону, 1988.

АЛГЕБРА СЛУЧАЙНЫХ МНЕМОПРОЦЕССОВ

Algebra of stochastic mnemonic processes which is used for investigation differential equations depending on random parameter are constructed in this paper.

В данной работе на основании конструкции алгебры мнемофункций из [1] строится алгебра случайных мнемопроцессов, которая может быть использована при исследовании дифференциальных уравнений, зависящих от случайного параметра. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Рассмотрены уравнения, содержащие обобщенный пуассоновский случайный процесс, и найдены ассоциированные решения этих уравнений.

Пусть $G_M(T, \Omega)$, $T=[0, a] \subseteq \mathbb{R}$, – векторное пространство над \mathbb{R} вещественнозначных функций $u_{q,n}(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $q, n \in \mathbb{N}$, таких, что

1) при фиксированных q, n, t $u_{q,n}(t, \omega)$ – случайная величина, определенная на полном вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) ;

2) для почти всех $\omega \in \Omega$ при фиксированных q, n $u_{q,n}(t, \omega)$ бесконечно дифференцируема по t ;

3) для любого компакта $K \subseteq T$ и любого $k=0, 1, 2, \dots$ существуют $C=C(\omega)$, $m=m(\omega) > 0$, $n_0=n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ такие, что для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\max_{t \in K} \left| \frac{d^k}{dt^k} u_{q,n}(t, \omega) \right| \leq C n^m, \quad n > n_0.$$

Через Γ обозначим множество неубывающих последовательностей $m=m(q)$ таких, что $m(q) \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$.

Выделим в $G_M(T, \Omega)$ векторное подпространство

$$N(T, \Omega) = \{u_{q,n}(t, \omega) : \text{для почти всех } \omega \in \Omega \quad \forall K \subset \subset T, \quad \forall k=0, 1, 2, \dots$$

$$\exists C_q > 0, \exists m(q) \in \Gamma, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \max_K \left| \frac{d^k}{dt^k} u_{q,n}(t, \omega) \right| \leq C_q / n^{m(q)}, \quad n > n_0 \}.$$

Положим по определению

$$G(T, \Omega) = G_M(T, \Omega) / N(T, \Omega).$$

Утверждение 1. Для почти всех $\omega \in \Omega$ пространство $G_M(T, \Omega)$ с операцией поточечного умножения является алгеброй с дифференцированием, $N(T, \Omega)$ – идеалом в этой алгебре, фактор-пространство $G(T, \Omega)$ обладает естественной структурой алгебры с дифференцированием D .

Алгебру $G(T, \Omega)$ назовем алгеброй случайных мнемопроцессов, а ее элементы – случайными мнемопроцессами.

Зафиксируем последовательность $\Phi=(\phi_q)$ основных функций из пространства Шварца $D(T)$ [2, с.17], таких, что

$$\int_T \phi_q(y) dy = 1, \quad \int_T \phi_q(y) y^k dy = 0, \quad k = \overline{1, q}; \quad \int_T \phi_q(y) y^{q+1} dy \neq 0.$$

Множество таких последовательностей обозначим R . Пусть

$$\phi_{q,n}(y) = n \phi_q(ny).$$

Через $D'(T, \Omega)$ обозначим множество обобщенных случайных функций $v = v_\phi(\omega)$, таких, что при фиксированном $\phi \in D(T)$ v – случайная величина на (Ω, \mathcal{A}, P) , а при фиксированном $\omega \in \Omega$ v – элемент $D'(T)$.

Обобщенной случайной функции $v \in D'(T, \Omega)$ поставим в соответствие семейство гладких функций

$$R_\phi v = v_\phi = v_{q,n} = v * \phi_{q,n}, \quad n > n_0, \quad q=1, 2, 3, \dots,$$

где $*$ – операция свертки [2, с.66].

Утверждение 2. Для $\forall \Phi \in R$ и почти всех $\omega \in \Omega$ отображение $R_\Phi: v \rightarrow v_\Phi$ порождает линейное вложение R_Φ пространства $D'(T, \Omega)$ в $G(T, \Omega)$, для которого выполняется

$$R_\Phi(v') = D(R_\Phi v), \quad v \in D'(T, \Omega),$$

$$R_\Phi(u \circ v) = R_\Phi(u) R_\Phi(v), \quad u, v \in C^\infty(T, \Omega),$$

где $C^\infty(T, \Omega)$ состоит из таких случайных функций $u = u(t, \omega)$, что для почти всех $\omega \in \Omega$ $u \in C^\infty(T)$.

Доказательство утверждений 1 и 2, по существу, повторяет доказательства аналогичных утверждений из [3].

Определение. Говорят, что мнемпроцесс $u = [(u_{q,n})] \in G(T, \Omega)$ и обобщенная случайная функция $v \in D'(T, \Omega)$ ассоциированы, если для $\forall \phi \in D(T)$, $\forall q \in \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$ $\int u_{q,n}(t, \omega) \phi(t) dt \rightarrow \langle v, \phi \rangle$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Для $v \in D'(T, \Omega)^T$ случайный мнемпроцесс $R_\Phi v$ ассоциирован с v . Заметим, что если взять другой набор функций Φ , $\Phi \in R$, то случайный мнемпроцесс $R_\Phi v$ также ассоциирован с v . Таким образом, с каждой обобщенной случайной функцией из $D'(T, \Omega)$ ассоциировано целое семейство случайных мнемпроцессов из $G(T, \Omega)$.

Не для каждого случайного мнемпроцесса из $G(T, \Omega)$ существует ассоциированный обобщенный случайный процесс из $D'(T, \Omega)$. Поэтому для каждой случайной мнемфункции поставим в соответствие линейный функционал на $D(R, \Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}_m \times \Omega$, где

$$\tilde{\mathbb{R}}_m = G_m / Z,$$

$$G_m = \left\{ a_{q,n} \in \mathbb{R} : \text{существуют } C, m > 0, n_0 \in \mathbb{N} : |a_{q,n}| \leq C n^m, n > n_0 \right\},$$

$$Z = \left\{ a_{q,n} \in G_m : \exists C_q > 0, \exists m(q) \in \Gamma, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{q,n}| \leq C_q / n^{m(q)}, n > n_0 \right\}.$$

Несложно видеть, что алгебра $\tilde{\mathbb{R}}_m$ естественно вкладывается в $G(T, \Omega)$, если $a_{q,n}$ рассматривать как постоянные функции для почти всех $\omega \in \Omega$. В частности, определено произведение λu , где $u \in C(T, \Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}_m$.

На пространстве $G(T, \Omega)$ введем подпространство, такое, чтобы на его представителях была определена экспонента от обобщенного случайного процесса:

$\text{Exp}^+(T, \Omega) = \{u \in G(T, \Omega)\}$: для почти всех $\omega \in \Omega$ $\exists \exists L > 0, C > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для \forall представителей $(u_{q,n})$ $u_{q,n}(t, \omega) \leq L + C \ln n, n > n_0, t \in T$.

Утверждение 3. Для того чтобы для $u \in G(T, \Omega)$ был корректно определен обобщенный случайный процесс $\text{exp } u$, необходимо и достаточно, чтобы $u \in \text{Exp}^+(T, \Omega)$.

Определим в $G(T, \Omega)$ еще несколько подмножеств:

$$\text{Exp}^-(T, \Omega) = \{u \in G(T, \Omega) : -u \in \text{Exp}^+(T, \Omega)\},$$

$$\text{Exp}(T, \Omega) = \text{Exp}^+(T, \Omega) \cap \text{Exp}^-(T, \Omega),$$

$\text{Exp}^s(T, \Omega) = \{u \in \text{Exp}(T, \Omega) : \text{для почти всех } \omega \in \Omega \text{ существуют } m = m(\omega) > 0, C = C(\omega) > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ такие, что для любого представителя } (u_{q,n})$

$$\left. \int_T |\exp(-u_{q,n}(t, \omega))| dt \leq C n^m, n > n_0 \right\}.$$

Теорема. 1). Если

$$\int_0^t a(\tau, \omega) d\tau \in \text{Exp}^+(T, \Omega),$$

то задача Коши для однородного дифференциального уравнения

$$Du = au, \quad u(0) = b$$

имеет решение в $G(T, \Omega)$ вида

$$u(t, \omega) = b \exp \int_0^t a(\tau, \omega) d\tau$$

для $\forall b \in \bar{\mathbb{R}}_m$.

2). Если

$$\int_0^t a(\tau, \omega) d\tau \in \text{Exp}^S(T, \Omega),$$

то задача Коши для неоднородного дифференциального уравнения

$$Du = au + f, u(0) = b$$

имеет и притом единственное решение в $G(T, \Omega)$ для $\forall f \in G(T, \Omega)$, $\forall b \in \mathbb{R}_m$ и это решение имеет вид

$$u(t, \omega) = b \exp \int_0^t a(\tau, \omega) d\tau + \int_0^t f(\tau, \omega) \exp \int_0^\tau -a(s, \omega) ds d\tau \exp \int_0^t a(\tau, \omega) d\tau.$$

Доказательство. Первая часть очевидна. Также несложно видеть, что решение неоднородного уравнения принадлежит $G(T, \Omega)$. Докажем единственность. Для этого достаточно показать, что при $f=0$, $b=0$ для почти всех $\omega \in \Omega$ задача Коши имеет только нулевое решение. Пусть $u_{q,n}(t, \omega)$ – произвольный представитель решения задачи Коши с нулевым условием, а $a_{q,n}(t, \omega)$ – произвольный представитель a . Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} u'_{q,n}(t, \omega) &= a_{q,n}(t, \omega) u_{q,n}(t, \omega) + v_{q,n}(t, \omega), \\ u_{q,n}(0, \omega) &= b_{q,n}, \end{aligned}$$

где $v_{q,n}(t, \omega) \in N(T, \Omega)$, $b_{q,n} \in Z$.

Решение данного уравнения для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_{q,n}(t, \omega) &= b_{q,n} \exp \left\{ \int_0^t a_{q,n}(\tau, \omega) d\tau \right\} + \exp \left\{ \int_0^t a_{q,n}(\tau, \omega) d\tau \right\} \times \\ &\times \int_0^t v_{q,n}(\tau, \omega) \exp \left\{ - \int_0^\tau a_{q,n}(s, \omega) ds \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Легко убедиться в справедливости следующих оценок для почти всех $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} b_{q,n} &\leq C_q \frac{1}{n^{m_1(q)}}, \quad m_1(q) \in \Gamma, \\ \left| \exp \left\{ \int_0^t a_{q,n}(\tau, \omega) d\tau \right\} \right| &\leq Cn^{m_2}, \quad t \in T, \\ \left| \exp \left\{ - \int_0^\tau a_{q,n}(s, \omega) ds \right\} \right| &\leq Cn^{m_3}, \quad \tau \in T, \\ |v_{q,n}(\tau, \omega)| &\leq C_q \frac{1}{n^{m_4(q)}}, \quad m_4(q) \in \Gamma, \quad \tau \in T, \\ |a_{q,n}(\tau, \omega)| &\leq Cn^{m_5}, \quad \tau \in T, \end{aligned}$$

группируя которые, получаем

$$u_{q,n}(t, \omega) \in N(T, \Omega),$$

что и требовалось доказать.

Пример. В алгебре $G(T, \Omega)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Du = buD\bar{I}, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0, \omega) = 1 \text{ (для почти всех } \omega \in \Omega), & (2) \end{cases}$$

где $b \in \mathbb{R}$, $\tilde{\Pi}$ — обобщенный случайный процесс Пуассона, представитель которого не зависит от q и определяется из соотношения

$$\Pi_{q,n} = \Pi * \phi_n,$$

$$\phi_n(t) = n\phi(nt), \phi \in D(\mathbb{R}), \phi \geq 0, \text{supp } \phi \subset [-1, 1], \int_{-1}^1 \phi(t) dt = 1;$$

$$D\tilde{\Pi} = \left[\left(\Pi'_{q,n}(t, \omega) \right) \right], \quad \Pi'_{q,n}(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\Pi(t, \omega)} \phi_n(t - \mu_i(\omega)),$$

где $\mu_i(\omega)$ — точки разрыва траекторий случайного процесса Пуассона $\Pi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$.

Так как

$$\int_0^t b \Pi'_{q,n}(\tau, \omega) d\tau, \quad t \in T,$$

принадлежит $\text{Exp}^S(T, \Omega)$ при $t \in T$, а значит, согласно теореме, решение задачи (1)–(2) существует и единственно.

Решение в $G(T, \Omega)$ имеет вид

$$u_{q,n}(t, \omega) = \exp \left\{ b \sum_{i=1}^{\Pi(t, \omega)} \int_0^t n \phi((\tau - \mu_i(\omega))n) d\tau \right\}$$

или, после замены переменной $\xi = \tau n - \mu_i n$,

$$u_{q,n}(t, \omega) = \exp \left\{ b \sum_{i=1}^{\Pi(t, \omega)} \int_{-\mu_i n}^{(t - \mu_i)n} \phi(\xi) d\xi \right\}.$$

Несложно заметить, что для почти всех $\omega \in \Omega$ и $t \in T$

$$u_{q,n}(t, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{b \bar{\Pi}(t, \omega)},$$

где $\bar{\Pi}(t, \omega) = \begin{cases} \Pi(t, \omega), & t \neq \mu_i, \\ \Pi(t, \omega) - 1 + \int_{-1}^0 \phi(\xi) d\xi, & t = \mu_i, i = 1, \overline{\Pi(a, \omega)}. \end{cases}$

Положим $b=1$, а класс $D\tilde{\Pi}$ зададим следующим представителем:

$$\Pi'_{q,n}(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\Pi(t, \omega)} \phi_n(t - \mu_i(\omega)) + n \cos nt.$$

Это возможно, так как $n \cos nt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в $D'(T)$.

В результате представителем решения u задачи (1)–(2) будет

$$u_n(t, \omega) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\Pi(t, \omega)} \int_0^t n \phi((\tau - \mu_i(\omega))n) d\tau \right\} \exp \{ \sin nt \}.$$

Можно показать, что данное выражение ассоциировано со следующим классическим случайным процессом:

$$v(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sin \tau} d\tau e^{\Pi(t, \omega)}.$$

Автор признателен Н.В.Лазаквичу за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

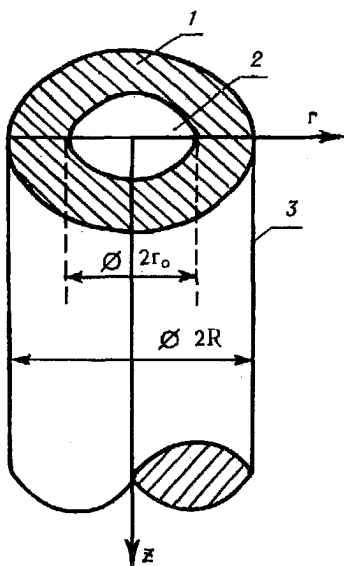
1. Антоневиц А.Б., Турло А.В. // Диф. уравнения. 1994. Т.30. №5. С.758.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
3. Colombeau J.F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam, 1985.

Поступила в редакцию 02.04.96.

МЕТОД ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ТЕПЛООБМЕНА ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

It is require to find the axisymmetric solution $\theta(r,z,\tau)$ of the heat conductivity equation in the semi-infinite cylinder $0 \leq r < R, z \geq 0, \tau > 0$, under mixed boundary condition.

With the help of Laplace transform and apply method separation of variables, the general solution of the given problem introduce to the Fredholm integral equation of the second order.



Постановка задачи. Требуется найти температурное поле $\theta(r,z,\tau) = T(r,z,\tau) - T_0$ в полуограниченном сплошном цилиндре радиуса $r=R, z \geq 0$ (см. рисунок). Начальная температура тела равна T_0 .

На торцевой поверхности полуограниченного цилиндра $z=0, 0 \leq r < r_0$ задается нормальная производная $\theta_z(r,0,\tau) = -q^*(r,\tau)$, а вне круга $r_0 \leq r < R, z=0$ поддерживается начальная температура T_0 . На боковой поверхности цилиндра $r=R, z > 0, \tau > 0$ поддерживается начальная температура T_0 .

Требуется решить уравнение нестационарной теплопроводности в цилиндрических координатах при наличии осевой симметрии

$$\theta_{rr}(r,z,\tau) + \frac{1}{r} \theta_r(r,z,\tau) + \theta_{zz}(r,z,\tau) = \theta_\tau(r,z,\tau) / a \quad (1)$$

где $0 \leq r < R, z > 0, \tau > 0$, соответственно цилиндрические координаты и τ — время; a — коэффициент температуропроводности (диффузии).

Начальное условие: $\theta(r,z,0) = T(r,z,0) - T_0 = 0$.

Граничные условия:

$$\theta_z(r,0,\tau) = q(r,\tau) / \lambda = -q^*(r,\tau), \quad 0 \leq r < r_0, \quad z=0, \quad (2)$$

$$\theta(r,0,\tau) = 0, \quad r_0 < r < R, \quad z=0, \quad (3)$$

$$\theta(R,z,\tau) = 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad r=R, \quad (4)$$

$$\theta_r(0,z,\tau) = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad r=0, \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$\theta_z(r,\infty,\tau) = 0, \quad 0 \leq r < R, \quad z \rightarrow \infty. \quad (6)$$

После применения интегрального преобразования Лапласа

$$\theta(r,z,s) = L[\theta(r,z,\tau)] = \int_0^\infty \theta(r,z,\tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad (7)$$

к выражениям (1–6) и метода разделения переменных к уравнению (1) представим общее решение для изображения $\theta(r,z,s)$ в виде следующего ряда:

$$\theta(r,z,s) = T(r,z,s) - T_0 / s = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) \exp\left(-\left|\frac{z}{r_0}\right| \sqrt{\lambda_n^2 + s r_0^2 / a}\right) J_0(\lambda_n, \rho), \quad (8)$$

в котором λ_n — корни уравнения

$$J_0(\lambda_n \alpha) = 0, \quad (9)$$

причем $\rho = \frac{r}{r_0}$, $\alpha = \frac{R}{r_0}$, $\alpha > 1$.

При решении (8) использованы граничные условия (5), (6).

Применяя разрывные граничные условия (3) и (4) на поверхности $z=0$, из (8) получаем следующие парные сумматорные уравнения (парные ряды) вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) \sqrt{\lambda_n^2 + s r_0^2 / a} J_0(\lambda_n, \rho) = \bar{q}^*(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) J_0(\lambda_n, \rho) = 0, \quad 1 < \rho < \alpha, \quad (11)$$

из которых требуется определить $\bar{C}_n(\lambda_n, s)$.

При $s \rightarrow 0$ (стационарный вариант рассматриваемой задачи) парные ряды (10), (11) и решение (8) переходят в известные [1,2].

Введем обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) J_0(\lambda_n, \rho) = \bar{h}(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (12)$$

Тогда по формуле обращения для ряда Фурье–Бесселя

$$\bar{C}_n(\lambda_n, s) = \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha)} \int_0^1 \bar{h}(u, s) J_0(u, s) (\lambda_n u) u du. \quad (13)$$

При этом считалось, что поскольку соответствующий интеграл на промежутке $1 < \rho < \alpha$ равен нулю, то одно из парных уравнений (11) уже удовлетворено.

Введем теперь вместо $\bar{h}(\rho, s)$ новую неизвестную функцию $\bar{\Phi}(t, s)$ с помощью формулы

$$\bar{h}(\rho, s) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^1 \bar{\Phi}(t, s) \sqrt{t^2 - \rho^2} dt, \quad (14)$$

подставим (14) в (13) и преобразуем выражение (13)

$$\begin{aligned} \bar{C}_n(\lambda_n, s) &= \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha)} \int_0^1 J_0(\lambda_n u) \left[\frac{d}{du} \int_{\rho}^1 \bar{\Phi}(t, s) \sqrt{t^2 - u^2} dt \right] du = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n}} = \int_0^1 \sqrt{t} \bar{\Phi}(t, s) J_{1/2}(\lambda_n t) dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя значение $\bar{C}_n(\lambda_n, s)$ из (15) в первое из парных уравнений (10), получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \sqrt{t} J_{1/2}(\lambda_n t) \left[\bar{\Phi}(t, s) \sqrt{\lambda_n^2 a / r_0^2 + s} \right] dt = \bar{q}^*(\rho, s), \quad (16)$$

$$0 \leq \rho < 1.$$

Введем другую неизвестную функцию $\bar{F}(t, s)$:

$$\lambda_n \bar{F}(t, s) = \bar{\Phi}(t, s) \sqrt{\lambda_n^2 a / r_0^2 + s}, \quad (17)$$

где $\bar{F}(t, s) = \int_0^{\infty} F(t, \tau) \exp(-s\tau) d\tau$.

Тогда связь между изображениями функций $\bar{F}(t, s)$ и $\bar{\Phi}(t, s)$ будет

$$\bar{\Phi}(t, s) = \frac{\lambda_n \bar{F}(t, s)}{\sqrt{\lambda_n^2 a / r_0^2 + s}} \quad (18)$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 a / r_0^2 + s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \exp \left[-\lambda_n \frac{a \tau}{r_0^2} \right],$$

связь между оригиналами $\Phi(t, \tau)$ и $\bar{F}(t, \tau)$

$$L^{-1} \left[\frac{\lambda_n \bar{F}(t, s)}{\sqrt{s + a \lambda_n^2 r_0^2}} \right] = \Phi(t, \tau) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{F(t, \xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp \left[-a(\tau - \xi) \lambda_n^2 / r_0^2 \right] d\xi. \quad (19)$$

Подставив (17) в уравнение (16), получим

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} J_0(\lambda_n \rho)}{J_1^2(\lambda_n \alpha)} \int_0^1 \sqrt{t} J_{1/2}(\lambda_n t) \bar{F}(t, s) dt = \bar{q}^*(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (20)$$

Введем обозначение

$$S(\rho, t) = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} J_0(\lambda_n \rho) J_{1/2}(\lambda_n t)}{J_1^2(\lambda_n \alpha)}. \quad (21)$$

Тогда (20) запишется в виде

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} \int_0^1 \sqrt{t} S(\rho, t) \bar{F}(t, s) dt = \bar{q}^*(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (22)$$

Применяя способ, основанный на специальном контурном интегрировании (см. [2]), сумму (21) можно представить в следующем виде:

$$S(\rho, t) = \int_0^{\infty} J_0(\rho x) J_{1/2}(tx) (x)^{3/2} dx + \frac{2}{\pi} L(\rho, t), \quad (23)$$

$$L(\rho, t) = \int_0^{\infty} \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)} I_0(\rho y) J_{1/2}(tx) (y)^{3/2} dy. \quad (24)$$

Первая квадратура, стоящая в формуле (23), может быть выражена через функцию Хевисайда [1]:

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho x) J_{1/2}(tx) (x)^{3/2} dx = \frac{2^{3/2} t^{1/2} (\rho^2 - t^2)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} H(\rho - t), \quad (25)$$

$$\text{где } H(\rho - t) = \begin{cases} 0, & \rho < t, \\ 1, & \rho > t. \end{cases} \quad (26)$$

С учетом формул (23)–(26) уравнение (22) запишется в виде:

$$\frac{4\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)} \int_0^\rho \frac{\bar{F}(t, s)t}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt = \bar{q}^*(\rho, s) - \frac{2}{\pi} \sqrt{2}\Gamma(3/2) \int_0^1 \bar{F}(t, s) \sqrt{t} L(\rho, t) dt. \quad (27)$$

Рассматривая (27) как интегральное уравнение Абеля, находим

$$t \bar{F}(t, s) = \frac{2^{-1}}{[\Gamma(3/2)]^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u \bar{q}^*(u, s) du}{(t^2 - u^2)^{-1/2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{\pi \Gamma(3/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u du}{(t^2 - u^2)^{-1/2}} \int_0^1 \bar{F}(y, s) \sqrt{y} L(u, y) dy. \quad (28)$$

Последнее уравнение есть интегральное уравнение относительно иско-
мой функции $\bar{F}(t, s)$, однако его ядро представляется двукратной квадра-
турой. С помощью несложных преобразований уравнение (28) можно
привести к виду:

$$\bar{F}(x, s) - \frac{2x}{\pi} \int_0^1 (t/x)^{1/2} K(x, t) \bar{F}(t, s) dt = \bar{Q}(x, s),$$

где

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)} I_{1/2}(ty) I_{1/2}(xy) y dy,$$

$$\bar{Q}(x, s) = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \int_0^x u \bar{q}^*(u, s) \sqrt{x^2 - u^2} du.$$

После того, как определена функция $\bar{F}(x, s)$, по формулам (18) и (19)
находим функцию и $\bar{\Phi}(t, s)$ и $\Phi(t, \tau) = L^{-1}[\Phi(t, s)]$, затем находим коэф-
фициент $\bar{C}_n(\lambda_n, s)$:

$$\bar{C}_n(\lambda_n, s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \sqrt{t} \Phi(t, \tau) J_{1/2}(\lambda_n t) dt.$$

Во временной области запишется в виде

$$\bar{C}_n(\lambda_n, \tau) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \sqrt{t} \Phi(t, \tau) J_{1/2}(\lambda_n t) dt.$$

1. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. 1977.
2. Sneddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразо-
вания Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды
специальных функций. М., 1983.

Поступила в редакцию 30.05.95.

УДК 517.925.42

В.В. АМЕЛЬКИН, А.В. ЛЕВИН

КОНВЕРГЕНТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The criterion of the convergence of the two-dimensional autonomous systems of the ordinary
differential equations is deduced. Questions of the stability of motion are considered.

Рассмотрим двумерную автономную вещественную систему обыкновен-
ных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где функции P и Q принадлежат классу C^1 и имеют единственный общий
нуль в начале координат $O(0,0)$ фазовой плоскости.

Обозначим через \mathcal{M} некоторое однопараметрическое семейство траек-
торий системы (1) и предположим, что каждая траектория из этого се-
мейства пересекается прямой

$$L: y = kx (x = ky), -1 \leq k \leq 1.$$

Определение 1. Семейство траекторий $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ будем называть конвер-
гентным на интервале ICL семейством (или, короче, конвергенцией), если
направление поля, определяемое системой (1), изменяется вдоль I строго
монотонно.

Условимся далее под движением вдоль интервала I понимать такое движение точки $N \in I$, при котором проекция N на ось абсцисс движется в положительном направлении. В случае, когда L задается уравнением $x=0$, под движением вдоль интервала I условимся понимать такое движение точки $N \in I$, при котором она движется в положительном направлении оси ординат.

Определение 2. Конвергенция называется положительной (отрицательной), если при движении вдоль интервала I направление поля, определяемое системой (1), строго возрастает (убывает).

Определение 3. Положительная и отрицательная конвергенции называются противоположными конвергенциями.

Определение 4. Если семейство траекторий \mathcal{F} является конвергенцией, то прямую L и конвергенцию будем называть инцидентными друг другу.

Замечание 1. Определения 1–4 эквивалентны соответствующим определениям работы [1].

Определение 5. Траекторию $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ назовем конвергентной траекторией, если для некоторого k на прямой L в окрестности точки A пересечения L с \mathcal{T} по разные стороны от A имеются соседние конвергенции, т.е. такие конвергенции \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 , что $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$.

Замечание 2. В случае, когда \mathcal{T} — изолированная замкнутая траектория, определение 5 эквивалентно определению альфарегулярного предельного цикла [1], но по сравнению с последним более удобно с точки зрения его практического использования. Отметим при этом, что основные утверждения работы [1] требуют уточнений.

Так, например, рассмотрим приведенную в [1] систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + xy(x^2 + y^2 - 1)^2, \quad (2)$$

удовлетворяющую требованиям лемм 3 и 5 упомянутой работы. Эта система, как утверждается в [1], имеет альфарегулярный предельный цикл, заданный уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Но векторное поле системы (2) симметрично относительно оси ординат фазовой плоскости xOy и поэтому (2) не может иметь не только альфарегулярных, но и вообще никаких других предельных циклов.

Из определения 5 вытекает

Теорема 1. Для того чтобы траектория $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ была конвергентной траекторией, необходимо и достаточно, чтобы она либо принадлежала конвергенции, инцидентной при некотором k прямой L , либо была границей двух соседних противоположных конвергенций, также инцидентных при некотором k прямой L .

Обратимся теперь к выводу критерия, позволяющего практически решать вопрос о конвергентности траекторий системы (1).

$$\text{Пусть } \frac{Q(x, kx)}{P(x, kx)} = f(x, kx) \equiv f(X) \left[\frac{Q(ky, y)}{P(ky, y)} = f(ky, y) \equiv f(Y) \right].$$

Лемма 1. Для того чтобы траектория $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ принадлежала конвергенции, инцидентной при некотором k прямой L , необходимо и достаточно, чтобы на прямой L в некоторой окрестности Δ точки A пересечения L с \mathcal{T} производная $f'(X)(f'(Y))$ не обращалась в нуль ни на одном интервале из Δ и была по разные стороны от A или знакоположительной, или знакоотрицательной функцией.

Лемма 2. Для того чтобы траектория $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ была границей двух соседних противоположных конвергенций, инцидентных при некотором k прямой L , необходимо и достаточно, чтобы на прямой L в некоторой окрестности Δ точки A пересечения L с \mathcal{T} производная $f'(X)(f'(Y))$ не обращалась в нуль ни на одном интервале из Δ и была по одну сторону от A функцией знакоположительной, а по другую — функцией знакоотрицательной.

Справедливость лемм вытекает из определений 3–5 и критерия строгой монотонности функций.

Теорема 2. Для того чтобы траектория $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$ была конвергентной траекторией, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого k на прямой L в некоторой окрестности Δ точки A пересечения L с \mathcal{T} производная $f'(X)(f'(Y))$ не обращалась в нуль ни на одном интервале из Δ и была по разные стороны от A функцией знакпостоянной.

Справедливость теоремы 2 вытекает из определения 5 и лемм 1,2.

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 1$$

и

$$\frac{dx}{dt} = -y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x, \text{ если } x^2 + y^2 = 1.$$

Эта система имеет счетное число конвергентных предельных циклов $x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и неконвергентную замкнутую траекторию $x^2 + y^2 = 1$.

Отметим, что свойство конвергентности траекторий использовалось, например, в [2] при доказательстве единственности изолированного периодического решения уравнения Лъенара

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Теорема 3. Если P и Q — голоморфные в некоторой области $D(O(0,0) \in D)$ функции, то любой предельный цикл системы (1), лежащий в D , является конвергентным предельным циклом.

Доказательство. Так как $O(0,0)$ — единственная особая точка системы (1), то отношение Q/P является в $D \setminus O(0,0)$ функцией голоморфной за исключением, быть может, конечного или счетного множества полюсов. При этом функция $f(x,y)$ может быть тождественной константой лишь на изолированных кривых. Отсюда следует, что всегда существует прямая $L_0: y = k_0x$, в точках которой функция $f'(X)(f'(Y))$ может иметь только изолированные нули и точки разрыва. Таким образом, производная $f'(X)(f'(Y))$ также может иметь на указанной прямой только изолированные нули и точки разрыва. А это означает, что на L_0 в некоторой достаточно малой окрестности Δ точки A пересечения прямой L_0 с предельным циклом (если таковой существует) системы (1) указанная выше производная будет по разные стороны от точки A функцией знакпостоянной, не обращающейся в нуль ни на одном интервале из Δ . Завершает доказательство ссылка на теорему 2.

Замечание 3. Из теоремы 3 следует, в частности, положительный ответ на гипотезу, выдвинутую в [1], — любой предельный цикл полиномиальной системы (1) является альфарегулярным предельным циклом. Что же касается траекторий из области центра, то они могут быть как конвергентными, так и неконвергентными. Примером последних являются, в частности, замкнутые траектории из области центра однородных дифференциальных уравнений.

Подчеркнем и тот, хотя и очевидный, факт, что если предельный цикл принадлежит конвергенции, инцидентной при некотором k_1 прямой L_1 , то он не может быть границей двух соседних противоположных конвергенций, инцидентных при некотором k_2 другой прямой L_2 .

Наконец, отметим, что точки, в которых производная $f'(X)(f'(Y))$ обращается в нуль и претерпевает разрыв, могут образовывать замкнутые траектории. Этот факт относится и к точкам, в которых

$$f'(x) = -\frac{1}{k} \quad (f'(y) = -\frac{1}{k}) \quad [1].$$

Обратимся теперь к вопросам устойчивости.

Определение 6. Предельный цикл назовем конвергентно устойчивым, если он принадлежит конвергенции, инцидентной при некотором k прямой L , и конвергентно полуустойчивым, если он является границей двух соседних противоположных конвергенций, также инцидентных при некотором k прямой L .

Замечание 4. Конвергентно полуустойчивые предельные циклы являются полуустойчивыми в классическом смысле.

Покажем теперь, когда конвергентно устойчивые предельные циклы будут устойчивыми в классическом смысле.

Положительным направлением обхода предельного цикла условимся называть направление движения против хода часовой стрелки и отрицательным соответственно по ходу часовой стрелки.

Проведем касательные к траекториям, расположенным в некоторой окрестности конвергентно устойчивого предельного цикла по обе его стороны в точках пересечения их с рассматриваемой прямой L . В пересечении касательные образуют некоторый угол. Если конвергентно устойчивый предельный цикл \mathcal{J} расположен внутри конвергенции таким образом, что при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки A пересечения цикла \mathcal{J} с прямой L , движется в направлении к вершине указанного угла, то предельный цикл будет устойчивым в классическом смысле. Если же конвергентно устойчивый предельный цикл \mathcal{J} расположен внутри конвергенции таким образом, что при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки пересечения цикла \mathcal{J} с прямой L , движется в направлении от указанного угла, то предельный цикл будет неустойчивым.

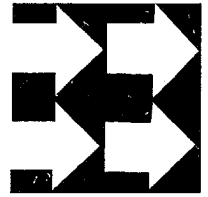
Для наглядности рассмотрим следующие ситуации. Пусть конвергентно устойчивый предельный цикл \mathcal{J} принадлежит положительной конвергенции, инцидентной при некотором k прямой L , которая делит фазовую плоскость на две полуплоскости. При движении вдоль прямой L одна из них будет находиться справа (условимся называть ее правой полуплоскостью), а другая — слева от L (левая полуплоскость). Тогда предельный цикл \mathcal{J} с положительным направлением обхода будет устойчивым (неустойчивым), если при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки A пересечения цикла \mathcal{J} с прямой L , начинает свое движение по траектории, входя в левую (правую) полуплоскость. Аналогично, предельный цикл с отрицательным направлением обхода будет устойчивым (неустойчивым) в том случае, когда при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки A , начинает свое движение по траектории, входя в правую (левую) полуплоскость.

Пусть теперь конвергентно устойчивый предельный цикл \mathcal{J} принадлежит отрицательной конвергенции. Тогда предельный цикл \mathcal{J} с положительным направлением обхода будет устойчивым (неустойчивым), если при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки A пересечения цикла \mathcal{J} с прямой L , начинает свое движение по траектории, входя в правую (левую) полуплоскость. Аналогично, предельный цикл с отрицательным направлением обхода будет устойчивым (неустойчивым) в том случае, когда при возрастании времени t изображающая точка, выходящая из точки A , начинает свое движение по траектории, входя в левую (правую) полуплоскость.

Замечание 5. Если система (1) обладает конвергентно устойчивым предельным циклом, то прямая L при любом k инцидентна по меньшей мере двум противоположным конвергенциям, расположенным с разных сторон от начала координат $O(0,0)$, за исключением, быть может, счетного числа прямых, вдоль которых направление поля, определяемое системой (1), остается постоянным в некоторой окрестности предельного цикла. Очевидно, что предельный цикл \mathcal{J} входит в указанные конвергенции таким образом, что по любой из них можно однозначно определить устойчив он или нет в классическом смысле.

1. Макаров И. П. // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. №5. С.900.

2. Massera J. L. // Boll. Un. Mat. Ital. 1954. V.9. P.367.



УДК 539.1.08

О.М.АНШАКОВ, Г.А.ФИЛЬ, В.А.ЧУДАКОВ

К РАСЧЕТУ СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ НАД ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Express-analysis of the radionuclide content in soil on large territories is performed with the use of gamma-spectrometry method above the soil surface. The relations between the registered spectra and the radioactive contamination level, it's in-depth profile are of great importance to work out appropriate apparatus. In this paper the above relations have been investigated by Monte-Carlo simulation. The developed program tools can be used when determining the dependance of the spectrum form and the character of radionuclide vertical distribution.

Для экспрессного контроля содержания радионуклидов в почве на обширных территориях используются дистанционные методы, основанные на спектрометрии гамма-полей над поверхностью земли. Важным этапом при создании соответствующей измерительной аппаратуры является решение задачи по установлению зависимостей регистрируемых спектров от уровня радиоактивного загрязнения и профиля его заглубления.

В работе рассмотрен подход к численному решению этой задачи путем имитационного моделирования на примере расчета спектров над полубесконечным объемным гамма-источником с конкретными характеристиками его вещества и зависимостью объемной активности от глубины. Разработана моделирующая программа GAM.MOR, позволяющая определять требуемую геометрию вычислительного эксперимента, энергию гамма-квантов и вертикальный профиль распределения радионуклидов. Программа построена на основе комплекса EGS4 [1], представляющего собой специализированную систему для программирования задач моделирования широкого класса ядерно-физических процессов методом Монте-Карло. Программа позволяет задавать любые размеры и взаимное расположение источника излучения, поглощающих сред и детектора. Может устанавливаться различный изотопный состав источника, разный элементный состав и другие характеристики материалов, составляющих детектор и окружающую среду.

Расчет проводился для двух характерных форм заглубления "старых" радиоактивных выпадений: экспоненциального и двойного экспоненциального при определенных значениях параметров профиля:

$$f(g) = A_0 e^{-\alpha g}, \text{ при } A_0=1, \alpha=0,1, \quad (1)$$

$$f(g) = A_0 e^{-\alpha g} \left(1 - A_1/A_0 e^{-(\beta-\alpha)g}\right), \quad (2)$$

при $A_1/A_0 = 0,9$, $\beta/\alpha = 4$ и $A_1/A_0 = 1$, $\beta/\alpha = 2$, где A_0 – объемная активность нуклида на поверхности; A_1 – коэффициент для второй составляющей двойной экспоненты; α и β – параметры заглубления; g – глубина от поверхности.

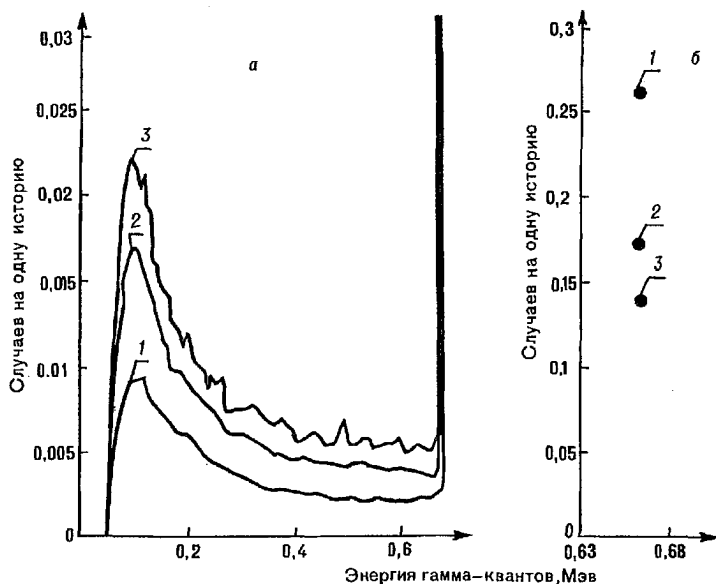
Моделировалась регистрация гамма-квантов идеальным спектрометрическим детектором, имеющим форму куба с ребром 4 см, размещенным на высоте 1 м от плоского полубесконечного источника с близким к почве элементным составом. В источнике были заданы по (1), (2) профили рас-

пределения объемной активности радионуклида Cs^{137} с энергией излучения 0,66 МэВ. Координата g изменялась от 0 до 20 см (около двух длин свободного пробега квантов первичного излучения).

По заданным исходным данным в системе EGS4 вырабатывается определенная математическая модель ослабления потока фотонов за счет эффекта Комптона, которая в дальнейшем используется программой в розыгрыше истории жизни каждого кванта. История каждого кванта разыгрывается до потери им энергии ниже определенного уровня (0,001 МэВ) или до выхода за пределы рассматриваемой геометрии.

Расчет проводился для одного миллиона историй квантов. Оцененная статистическая погрешность при этом составляет от 15 до 20% в зависимости от энергии кванта. Время расчета одного спектра составляет около 1 ч на ПЭВМ типа IBM 386DX40.

Рассчитанные при указанных данных спектры представлены на рисунке (а, б). В таблице приведены количественные данные по этим спектрам.



Относительное изменение интенсивности рассеянного излучения (а) и изменение интенсивности в пике полного поглощения (б) при профилях 1, 2 и 3

Количественные данные по спектрам 1, 2 и 3

Интенсивность	1	2	3
$I_{\text{рас-е}}$, случаев	142911	112812	71421
$I_{\text{пик}}$, случаев	50617	23553	11539
$I_{\text{рас-е}}/I_{\Sigma}$	0,74	0,83	0,86
$I_{\text{пик}}/I_{\Sigma}$	0,26	0,17	0,14

Здесь $I_{\text{пик}}$ – число зарегистрированных фотонов в пике полного поглощения,

$I_{\text{пик}}/I_{\Sigma}$ – отношение их числа к суммарному спектру;

$I_{\text{рас-е}}$ – число зарегистрированных фотонов рассеянного излучения,

$I_{\text{рас-е}}/I_{\Sigma}$ – отношение их числа к суммарному спектру.

Полученные результаты не противоречат качественной картине формирования поля гамма-излучения над объемным источником с разной степенью заглупления радионуклидов, согласуются с результатами аналитических расчетов для пика нерассеянного (прямого) излучения [2] и с данными аналогичных статистических испытаний [3,4].

Разработанный программный инструментарий может быть использован для решения практических задач, требующих установления зависимостей

между формой спектра и характером вертикального распределения радионуклидов в почве.

1. R.L.Ford, W.R.Nelson. The EGS Code System: Computer Programs for the Monte Carlo Simulation of Electromagnetic Cascade Showers (Version 3). Stanford Linear Accelerator Center Report Number SLAC-210 (1978).

2. Бергельсон Б.Р., Зориков Г.А. Справочник по защите от излучения протяженных источников. М., 1965.

3. Арутюнян Р.В., Большов Л.А., Гуло В.Г., Зенич Т.С., Решетин В.П. // Атомная энергия. 1993 (март). Т.74. Вып.3.

4. Ремаев В.В., Кузьменко В.А., Гончаров К.С., Быков В.Т. // Там же. 1993 (январь). Т.74. Вып.1.

Поступила в редакцию 02.09.96.

УДК 519.24:681.5.015

В.В. КАЗАЧЕНОК

ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНОВОЙ РЕГРЕССИИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

The methods of estimation of generalized splines are given.

Введение. Пусть наблюдения y_i в моменты времени t_i , $i=1, \dots, n$, описываются сплайном m -го порядка дефекта k

$$y_i = \sum_{\nu=0}^m c_{\nu} (t_i - t_0)^{\nu} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} (t_i - t_i^*)_{+}^{m-j} + u_i \quad (1)$$

с узлами в точках t_i^* , $i = 1, \dots, N-1$ [1].

Здесь c_{ν} , $\nu=0, \dots, m$, и a_{ij} , $i=1, \dots, N-1$, $j=0, \dots, k-1$, — неизвестные параметры; u_i , $i=1, \dots, n$, — независимые случайные величины с нулевым средним и неизвестной дисперсией σ^2 ($0 < \sigma^2 < +\infty$);

$$(t_i - t_i^*)_{+} = \begin{cases} t_i - t_i^*, & t_i - t_i^* > 0, \\ 0, & t_i - t_i^* \leq 0. \end{cases}$$

Дефект k означает, что сплайн (1) имеет непрерывные производные во всех точках до $(m-k)$ порядка включительно.

Для оценки неизвестных коэффициентов модели (1) можно использовать метод наименьших квадратов. При $k \in \{1, 2, \dots\}$ модель (1) не позволяет адекватно описывать результаты некоторых экспериментов, в частности, в математической физике [2].

Обобщенные сплайны. Обобщенным сплайном m -го порядка дефекта k будем называть сплайн (1) при условии, что значения $(k+1)$ -ых производных в узлах t_i^* , $i = 1, \dots, N-1$, для соседних полиномов могут отличаться на величину v , где v — в общем случае случайная величина с математическим ожиданием r и дисперсией Ψ^2 . Подобно [3] можно показать, что при $r=0$ и $\Psi^2 \rightarrow 0$ обобщенный сплайн дефекта k превращается в обычный сплайн дефекта $(k-1)$, а при $\Psi^2 \rightarrow +\infty$ получаем обычный сплайн дефекта k .

Таким образом, обобщенный сплайн дефекта k является промежуточным звеном между обычными сплайнами дефектов k и $(k-1)$, что позволяет строить сплайновые модели, адекватно описывающие результаты более широкого класса экспериментов.

Для оценивания методом наименьших квадратов неизвестных коэффициентов c_{ν} , $\nu=0, \dots, m$; a_{ij} , $i=1, \dots, N-1$, $j=0, \dots, k-1$, обобщенного сплайна дефекта k предлагается минимизировать выражение

$$\hat{P} = \min_{c_v, a_{ij}} \left\{ \hat{Q} + \frac{\sigma^2}{\psi^2} \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i,k-1} \cdot (m-k+1)! - r)^2 \right\}, \quad (2)$$

где $\hat{Q} = \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \sum_{v=0}^m c_v (t_i - t_0)^v - \sum_{i=1}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{m-j} a_{ij} (t_i - t_i^*)^{m-j} \right)^2$. Обоснование формулы (2) приводится методом, предложенным в [4].

Таким образом можно получить обобщенные сплайны дефекта k , приближающиеся к обычным сплайнам дефекта k или $(k-1)$ в зависимости от задаваемого значения $\frac{\sigma^2}{\psi^2}$.

При неизвестном расположении узлов $t_i^*, i = 1, \dots, N-1$, их поиск можно осуществить одним из методов, изложенных в [4-7].

Результаты численных экспериментов. В таблице приведены результаты численных экспериментов при следующих исходных данных: $t_l = (l-1) \cdot 0,1, l = 1, \dots, n, t^* = 3,9, N = 2, n = 60, m = 3, k = 2, c_0 = 5, c_1 = 4, c_2 = -3, c_3 = 2, a_{10} = -1, a_{11} = 0,5$. Значения $u_l, l = 1, \dots, n$, генерировались с помощью стандартной программы GAUSS при $\sigma = 0,5$, и далее $y_l, l = 1, \dots, n$, вычислялись по формуле (1). Каждый эксперимент воспроизводился 50 раз при различных выборочных значениях $u_l, l = 1, \dots, n$. Средние по всем экспериментам значения $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n+1)-6} \hat{P}$ при различных отношениях $\frac{\sigma^2}{\psi^2}$ приведены в таблице. В таблице также приведены усредненные значения $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n-6)} \hat{Q}$ и $\hat{S}^2 = \frac{1}{(n-5)} \hat{Q}$, вычисленные для обычных сплайнов дефекта $k=2$ и $k=1$ соответственно.

Оценки неизвестных параметров для обычных и обобщенных сплайнов

σ^2/ψ^2	\hat{S}^2	\hat{c}_0	\hat{c}_1	\hat{c}_2	\hat{c}_3	\hat{a}_{10}	\hat{a}_{11}
		5,0	4,0	-3,0	2,0	-1,0	0,5
0,001	0,247	5,24	3,63	-2,88	1,99	-0,62	-0,34
0,01	0,246	5,25	3,66	-2,88	1,99	-0,62	-0,33
0,1	0,252	5,25	3,63	-2,86	1,98	-0,65	-0,17
1,0	0,296	5,31	3,38	-2,71	1,96	-0,84	0,45
10,0	0,273	5,33	3,35	-2,70	1,96	-0,84	0,50
100,0	0,250	5,34	3,34	-2,68	1,96	-0,84	0,50
1000,	0,256	5,31	3,38	-2,70	1,96	-0,85	0,50
$k=2$	0,247	5,24	3,36	-2,88	1,99	-0,62	-0,34
$k=1$	0,256	5,27	3,52	-2,81	1,98	-0,72	-

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений. М., 1984.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.
3. Казаченок В. В. // ЭВМ - учебному процессу, науке и технике. Мн., 1985. С.44.
4. Медведев Г., Казаченок В. // Статистические проблемы управления. Вильнюс, 1984. Вып.65. С.128.
5. Казаченок В. В., Фомина Т. Н. // Конференция математиков Беларуси. Тез. докл. Гродно, 1992. Ч.4. С.59.
6. Казаченок В. В. // New Venture in the Process of Grand Europe Economic Development: II congress AEDEM. Мн., 1993. С.160.
7. Казаченок В. В. // Автоматизация проектирования дискретных систем: Международный конференция. Мн., 1995. С.78.

Наши юбиляры



ЭДМУНД ИВАНОВИЧ ЗВЕРОВИЧ



Исполнилось 60 лет видному белорусскому ученому-математику, заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктору физико-математических наук, профессору Эдмунду Ивановичу Зверовичу.

Э.И.Зверович родился 30 декабря 1936 г. в станице Нововладимирской Краснодарского края. В 1960 г. закончил физико-математический факультет Ростовского государственного университета, а в 1963 г. аспирантуру в Институте теоретической и экспериментальной физики (Москва). Работал в вузах Ростова и Одессы.

В 1975 г. доктор физико-математических наук Э.И.Зверович переехал в Минск и приступил к работе в Белгосуниверситете, где возглавил кафедру теории функций. Эдмунд Иванович — известный специалист в области математического анализа. Им получен ряд фундаментальных результатов в теории краевых задач для аналитических функций, ставших к настоящему времени классическими. Это относится в первую очередь к построенной им теории краевых задач для этих функций на римановых поверхностях. Э.И.Зверовичем разработан обладающий большими возможностями метод локально-конформного склеивания, с помощью которого, в частности, решены в наиболее общей постановке все основные известные двухэлементные краевые задачи. В более чем 110 научных работах Э.И.Зверовича исследован широкий спектр математических вопросов: сингулярные интегральные уравнения, топология поверхностей, задачи теории упругости и электродинамики, многое другое.

Профессору Э.И.Зверовичу присущ подлинный талант педагога. Он прочитал десятки основных и специальных курсов по многим разделам математики. Его лекционные и семинарские занятия со студентами, аспирантами, школьниками отличаются высоким методическим уровнем, глубиной изложения материала, безупречным стилем.

Много времени и сил отдает Эдмунд Иванович подготовке высококвалифицированных специалистов, передавая им свою увлеченность математикой. Под его руководством защищена одна докторская и 19 кандидатских диссертаций. Принципиальность и честность своего учителя, щедрость его души, беззаветную преданность науке ценят и уважают математики Беларуси, России, Украины, Молдовы, Таджикистана, ряда стран дальнего зарубежья.

С 1980 г. Э.И.Зверович руководит минским городским семинаром “Краевые задачи и особые интегральные уравнения” им. Ф.Д.Гахова. Это один из наиболее авторитетных математических семинаров в Беларуси. Выступление на семинаре — хорошая школа для молодых ученых и вместе с тем большая честь даже для известных специалистов.

Общение с Эдмундом Ивановичем — это счастливая возможность быть рядом с подлинно интеллигентным человеком. Высокая требовательность к себе и другим, широкая эрудиция, талант организатора снискали ему глубокое уважение.

Коллектив механико-математического факультета, редколлегия первой серии журнала “Вестник БГУ”, членом которой он является, сердечно поздравляют Эдмунда Ивановича с юбилеем и желают крепкого здоровья, семейного благополучия и новых творческих успехов.

ВАЛЕНТИН НИКОЛАЕВИЧ РУСАК

Исполнилось 60 лет со дня рождения заведующего кафедрой высшей математики и математической физики Белгосуниверситета, доктора физико-математических наук, профессора Валентина Николаевича Русака.

В.Н.Русак родился 10 августа 1936 г. в деревне Затурия Несвижского района Минской области. В 1959 г. с отличием окончил механико-математический факультет БГУ и был рекомендован к поступлению в аспирантуру на кафедру вычислительной математики. В 1962 г. приступил к преподавательской работе на кафедре ВМ и МФ. Прошел путь от ассистента до заведующего кафедрой. В 1963 г. в Институте механики АН Беларуси защитил кандидатскую диссертацию, а в 1988 г. в Институте математики АН Украины – докторскую диссертацию.

В процессе преподавания В.Н.Русаком подготовлен и прочитан ряд оригинальных лекционных курсов по теории аппроксимации и ее приложениям; теории меры и интегрирования; математическому, векторному и тензорному анализу; по методам вычислительной физики. В своих лекциях профессор В.Н.Русак всегда достигал эффективного сочетания в изложении классических и современных математических методов и их приложений к физическим процессам. Конкретный опыт преподавания современной теории аппроксимации отражен в его монографии “Рациональные функции как аппарат приближения”, опубликованной в 1979 г.

Профессор В.Н.Русак является сторонником перехода на белорусский язык в системе образования Беларуси. Под его руководством на кафедре ВМ и МФ работает авторский коллектив по написанию систематического курса высшей математики и математической физики. Первый учебник В.Н.Русака, Л.И.Шломы, В.К.Ахраменко, А.П.Крачковского “Курс высшей математики” был опубликован в 1994 г. Издание второго учебника по названному курсу запланировано на 1997 г. Здесь отражены практический опыт и методические находки в преподавании математических дисциплин на кафедре высшей математики и математической физики.

Доктор физико-математических наук В.Н.Русак возглавляет в Беларуси научное направление, связанное с рациональными аппроксимациями и их приложениями. Им получен ряд окончательных результатов, касающихся зависимости структурных свойств функций и скорости убывания последовательности наилучших рациональных аппроксимаций. В терминах мажорирующих функций, зависящих от полюсов, доказаны экстремальные оценки для производных рациональных функций в различных метриках. Разработаны способы построения положительных рациональных операторов и исследования их уклонений. Решена проблема построения оператора, осуществляющего аппроксимацию порядка наилучшего рационального приближения с предписанными полюсами. Созданы прямые методы в рациональной аппроксимации со свободными полюсами. Найдены точные порядки для наилучших рациональных приближений на свертках ядер Вейля и функций ограниченной вариации. Исследованы строки и параболические последовательности рациональных таблиц Чебышева для аналитических функций с гладкими тэйлоровскими коэффициентами. В.Н.Русак – автор 108 научных работ, которые получили широкую известность и признание специалистов по теории аппроксимации. Профессор В.Н.Русак был участником шести международных конференций по теории аппроксимации, выступал с лекциями и докладами в Гаванском, Ягеллонском и Бохумском университетах. Под его научным руководством подготовлены шесть кандидатских и одна докторская диссертации.

Плодотворную педагогическую и научную деятельность В.Н.Русак сочетает с организаторской и общественной работой, участвует в работе секции математики научно-методического совета Министерства образования и науки Беларуси и двух специализированных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций.

За заслуги в области высшего образования и многолетний добросовестный труд В.Н.Русак награжден медалью “Ветеран труда” и знаком Минвуза СССР “За отличные успехи в работе”.

Сердечно поздравляя Валентина Николаевича с юбилеем, преподаватели, сотрудники и студенты физического факультета, редколлегия журнала “Вестник БГУ” желают ему крепкого здоровья, счастья, новых творческих свершений.



РЕФЕРАТЫ

УДК 535.37

Гулис И.М., Цвирко В.А. **Управление спектральными характеристиками полярных молекул, внедренных в сегнетоэлектрическую матрицу** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Проведен анализ влияния спонтанной поляризации на частоты электронных переходов полярной молекулы, внедряемой в полидоменный сегнетоэлектрический кристалл. Показано, что для типичных сегнетоэлектрических материалов за счет переключения спонтанной поляризации возможно изменение частоты электронного перехода порядка 10^3 см^{-1} .

Библиогр. 4 назв., ил.1.

УДК 535.338.42:539.194

Шундалов М.Б., Пицевич Г.А. **Расчет торсионных колебаний в молекуле пероксида водорода** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Рассчитана частота торсионных колебаний молекулы пероксида водорода на основе решения уравнения Шредингера для внутреннего вращения. Изучено влияние формы функции потенциальной энергии на расположение торсионных уровней энергии.

Библиогр. 8 назв., табл. 3, ил.1.

УДК 538.21

Григорьев В.В., Иванов А.И., Комаров Ф.Ф., Коньшин И.В., Камышан А.С., Леонтьев А.В., Юрченко В.А. **Профили пространственного распределения ионов азота и фосфора, имплантированных в ПММА** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Методом вторичной ионной масс-спектрометрии и резерфордовского обратного рассеяния получены профили пространственного распределения ионов N^+ и P^+ , имплантированных в ПММА. Анализируется соотношение экспериментально определенных траекторных параметров с результатами расчетов методом Монте-Карло.

Библиогр. 18 назв., табл.2, ил.3.

УДК 621.315.592

Комаров А.А. **Термические пики при прохождении высокоэнергетических ионов в кристаллах и формирование треков** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

На основе модели "термических пиков" были рассмотрены некоторые эффекты высокоэнергетической ионной имплантации в мишени с различными типами проводимости (Ge, Cu, Pb). Был проведен расчет температуры возбужденной области как функции радиальной координаты и времени.

Библиогр. 7 назв., ил.2.

УДК 621.396.181

Лабуда А.А., Сидерко А.А. **Влагостойкость примесносиликатных стекол** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Экспериментально показано, что под воздействием влаги в пленках примесносиликатных стекол, используемых в планаризации поверхности интегральных схем, может происходить выщелачивание легирующих примесей. Повысить влагостойкость этих пленок можно путем повышения температуры осаждения с последующим термоотжигом.

Библиогр. 12 назв., табл. 1, ил.2.

УДК 535.337

Барарь С.В., Зажогин А.П., Коваленко М.Н. **Спектральные характеристики люминесценции ионов Cr^{3+} при различных температурах и концентрациях его в сапфире** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Исследовано влияние температуры на спектральные характеристики люминесценции ионов хрома при различных его концентрациях в сапфире. Установлено, что изменения спектральных характеристик (полуширины и сдвига R -линий) кристаллов от температуры хорошо подчиняются степенному закону. Показана возможность использования кристаллов рубина с концентрацией ионов хрома порядка (0,7–0,75%) в качестве бесконтактных датчиков температуры образцов.

Библиогр. 10 назв., табл. 2, ил. 2.

УДК 621.382.537.33:621.317

Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. **Особенности ВАХ МОП-ПТ с высоколегированной подложкой** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Измерены вольтамперные характеристики МОП-ПТ с высоким уровнем легирования подложки. Напряжение начала насыщения тока много меньше эффективного напряжения затвора и возрастает при нагревании прибора, что может быть вызвано увеличением электрического поля, уменьшением подвижности электронов в области стокового перехода и насыщением дрейфовой скорости.

Библиогр. 10 назв., ил.2.

УДК 536.425

Мелешко Л.О. **Об особенностях формирования кристаллических зародышей алмаза в области его метастабильности** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Установлено, что при синтезе алмаза в области его метастабильности по мере роста пересыщения давление внутри зародышей новой фазы увеличивается и может достигнуть таких значений, при которых система окажется в области устойчивого состояния алмаза, где на начальной стадии происходит формирование его структуры.

Библиогр. 5 назв., табл. 1.

УДК 539.16

Лобач Д.И., Перцев А.Н., Чудаков В.А. **Определение скорости эксхалляции изотопов радона из образцов по дочернему полонию** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Приводится аналитическое выражение для определения скорости эксхалляции изотопов радона, базирующееся на измерении первого дочернего продукта распада газа (изотопа полония). Формула согласуется с экспериментальными данными, полученными учеными Японии и Беларуси.

Библиогр. 7 назв., ил.1.

УДК 621.313

Саид Омар Абдалрахман (Сирия), Семченко А.А., Михалев А.С. **Анализ динамических показателей контура регулирования момента следящего асинхронного электропривода** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Рассматриваются вопросы управления моментом асинхронного электропривода на основе автономного инвертора напряжения с широтно-импульсной модуляцией. Разработана имитационная модель асинхронного электропривода.

Электромагнитный момент формируется путем задания частоты и амплитуды основной гармоники выходного напряжения по закону, обеспечивающему линеаризацию механической характеристики двигателя во всем диапазоне частотного управления.

В результате моделирования контура управления моментом установлено, что статические и динамические свойства системы обеспечивают построение на основе этого контура следящего асинхронного электропривода.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 519.1

Мельников О.И., Козловский Ю.Г. **Реализация гиперграфа гусеницей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Сформированы и доказаны необходимые и достаточные условия реализуемости гиперграфа гусеницей. Построен алгоритм проверки возможности реализуемости гиперграфа H

гусеницей трудоемкости $O\left(\sum_{e \in EH} |e|\right)$.

Библиогр. 12 назв.

УДК 517.977

Ружицкая Е.А. **Критерий оптимальности для одной линейной полубесконечной экстремальной задачи** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Рассматривается линейная экстремальная задача на прямом произведении конечномерного и бесконечномерного пространств. Формулируется и доказывается критерий оптимальности.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.95

Карасева Г.Л. **Метод решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и подвижным начальным состоянием** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. №1.

Рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями и подвижным начальным состоянием. Формулируется критерий оптимальности и на его основе строится метод решения.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.948

Дубатовская М. В. **Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с минус-бесконечным индексом в исключительном случае** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

Построены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения в форме ортогональности с весом его правой части некоторой счетной системе функций, являющейся базисом коядра соответствующего оператора.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.9

Сташуленок С. П. **Алгебра случайных мнемпроцессов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

На основании конструкции алгебры мнемфункций вводится алгебра случайных мнемпроцессов, в которой рассмотрены дифференциальные уравнения, содержащие обобщенный пуассоновский случайный процесс, и найдены ассоциированные решения этих уравнений.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.968

Абдельразак Н. А. (Иордания) **Метод парных сумматорных уравнений для решения двумерных осесимметричных задач нестационарной теплопроводности на примере теплообмена полуограниченного сплошного цилиндра** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

Рассматривается метод парных рядов сумматорных уравнений для решения задач нестационарной теплопроводности в цилиндрических координатах с помощью преобразования Лапласа в полуограниченном сплошном цилиндре радиуса $r=R$. На торцевой поверхности цилиндра $z=0$, $0 \leq r < r_0$ задается нормальная производная, т.е. $\theta_z(r,0,\tau) = q(r,\tau)/\lambda = -q^*(r,\tau)$ (где $q(r,\tau)$ – плотность теплового потока), а вне круга на поверхности $r_0 \leq r < R$, $z=0$ и на всей боковой поверхности цилиндра ($r=R$, $z>0$) на всем протяжении теплообмена ($\tau>0$) поддерживается начальная температура T_0 , т.е. $\theta(r,0,\tau) = T(r,0,\tau) - T_0 = 0$. Получены решения парных рядов в области L -изображения, которые в области оригиналов (L^{-1}) приводятся к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Библиогр. 4 назв., 1 ил.

УДК 517.925.42

Амелькин В. В., Левин А. В. **Конвергентные траектории двумерных динамических систем** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

Вводится понятие и выводится критерий конвергентности траекторий двумерных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются вопросы устойчивости движений.

Библиогр. 2 назв.

УДК 539.1.08

Аншаков О. М., Филь Г. А., Чудаков В. А. **К расчету спектрального распределения гамма-излучения над полубесконечным источником** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

Для экспрессного контроля содержания радионуклидов в почве на обширных территориях используются дистанционные методы, основанные на спектрометрии гамма-полей над поверхностью почвы. Важным этапом при создании соответствующей аппаратуры является установление зависимостей регистрируемых спектров от уровней радиоактивного загрязнения и профиля его заглубления. В работе рассмотрено численное решение этой задачи путем моделирования методом Монте-Карло. Разработанный программный инструментарий может быть использован для решения практических задач установления зависимостей между формой спектра и характером вертикального распределения радионуклидов.

Библиогр. 4 назв., табл. 1, ил. 1.

УДК 519.24:681.5.015

Казаченок В. В. **Построение сплайновой регрессии по экспериментальным данным** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1997. №1.

Приводится определение обобщенных сплайнов. Исследуются методы их построения.

Библиогр. 7 назв., табл. 1.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1996 г. в "Вестнике
Белорусского государственного университета".

Серия 1: Физика. Математика. Механика

БЕЛОРУССКОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ УНИВЕРСИТЕТУ 75 ЛЕТ

Богущ А.А. Аб ролі Белдзяржуніверсітэта у развіцці фізічнай навукі і адукацыі на Беларусі	3	3
Гусак А.А., Тышкевич Р.И., Юрчук Н.И. Из истории развития математики в Белорусском государственном университете	3	10

НАШИ ЛАУРЕАТЫ

Антоневич А.Б., Лебедев А.В. Структура C^* -теории функционально-дифференциальных операторов	2	3
--	---	---

ФИЗИКА

Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А. Влияние уровня легирования на насыщение тока в n -канальном МОП-ПТТ	1	26
Бельский А.М. Структура поля когерентных световых пучков вблизи преломляющей поверхности	3	18
Болтушкин В.И., Гольцев В.П., Гольцев М.В., Чаевский В.В. Корреляция параметра решетки и состава в многокомпонентных соединениях типа нитридов переходных металлов	1	17
Воропай Е.С., Самцов М.П., Луговский А.П., Жаврид Э.А., Журавкин И.Н., Александрова Е.Н. Свойства новых полиметиновых красителей для фотодинамической терапии	3	23
Гулис И.М., Комяк А.И., Саечников К.А., Цвирко В.А. Спектроскопия сложных органических молекул, охлажденных в сверхзвуковой струе	3	41
Данилькевич М.И., Маковед И.И. О механизмах диэлектрической поляризации $Ni_{0,6}Zn_{0,2}Fe_2O_4$ -феррита	1	15
Ермаков В.В., Карней И.Б., Сташкевич И.В. Термооптический затвор и его влияние на режимы генерации импульсного твердотельного лазера	3	33
Ермолаев О.П. Особенности перехода диэлектрик-металл в германии, "легированном" радиационными дефектами	1	19
Ермолаев О.П., С.А.Хаким (Египет). Скейлинговый подход к переходу диэлектрик-металл в германии, "легированном" радиационными дефектами	3	36
Карпук С.М., Романов О.Г., Толстик А.Л. Исследование угловых характеристик невырожденного четырехволнового взаимодействия в резонансных средах	1	8
Комаров Л.И., Феранчук И.Д. Двухуровневый атом в одномодовом квантовом поле: нулевое приближение операторного метода	1	3
Кулак Г.В., Кулак В.И. Обратное брэгговское рассеяние света на гиротропных фазовых сверхрешетках фотоупругости	1	12
Лабуда А.А., Сидерко А.А., Простов И.В. Зарядовая стабильность боро- и борофосфоросиликатных стекол	2	14
Мелешко Л.О. Гетерогенное зародышеобразование алмаза в области его метастабильности	2	22
Мелешко Л.О. Гомогенное зародышеобразование алмаза в области его метастабильности	1	21
Новиков А.П., Василевич О.И., Шилова Е.А. Характеристики алмазных детекторов мягкого рентгеновского и низкоэнергетического γ -излучения	2	18
Новиков А.П., Шилова Е.А., Буйко Л.Д., Зайков В.А. Термическая стабильность границы раздела металла-С в условиях вакуумного отжига	1	24
Ревинский А.Ф. Корреляция между температурными зависимостями ширины запрещенной зоны и энтальпии кристалла	2	27
Ревинский А.Ф. Об электронной структуре сверхпроводящей системы $Ba_{1-x}K_xBiO_3$	3	40
Савенко В.С., Пинчук А.И., Злотник В.Б., Шаверей С.Д., Понарядов В.В. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного полей в области больших плотностей тока	2	25
Халупко А.П. Новое определение δ -функции Дирака	2	9
Шепелевич В.Г. Структура и электрические свойства фольги тройных сплавов Bi-10 ат. % Sb-Sn, полученной сверхбыстрой закалкой из расплава	3	37
Шишкин Г.В., У.Х.Абдель Салам (Палестина). Точные решения проблемы Волкова на фоне гравитации	3	27

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Амелькин В.В., Жавнерчик В.Э.</i> О существовании периодических решений уравнения Лъенара	2	36
<i>Антоневич А.Б., Радыно Я.В.</i> О теории мнемофункций и ее приложениях	3	46
<i>Барвенов С.А.</i> Влияние переменной вязкости на периодические дрейфовые течения	1	55
<i>Велеско С.Е.</i> Процесс разрешения для не сохраняющих длину функторов на свободных от контекста грамматиках	2	52
<i>Глушцов А.И.</i> Методы интегральных уравнений и дискретных источников в задачах экранирования	1	61
<i>Долгополова О.Б.</i> Построение всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности	1	32
<i>Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П.</i> О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации	1	48
<i>Зеврович Э.И., Шейла Т.А.</i> Интеграл типа Коши в классах E	1	30
<i>Капанин А.И., Грибковская И.В.</i> Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости	3	52
<i>Каретко Н.П., Медведев Д.Г.</i> Об одном решении уравнений упругого равновесия ортотропного тела в перемещениях	2	63
<i>Корзюк В.И.</i> Лемма Фридрикса для операторов осреднения с переменным шагом	2	32
<i>Корзюк В.И.</i> Метод энергетических неравенств и операторов осреднения	3	55
<i>Маташов В.И., Михайловская Л.В.</i> Необходимые условия однозначности подвижных особенностей кубических систем двух дифференциальных уравнений	1	39
<i>Новиков С.П.</i> Связь β -профраттиниевых подалгебр с β -нормализаторами мультиколец	1	46
<i>Размыслович Г.П.</i> Алгоритм вычисления передаточной матрицы для сингулярных систем с запаздыванием	1	52
<i>Размыслович Г.П.</i> Управляемость каузальных линейных дискретных дескрипторных систем с запаздыванием	3	72
<i>Ровба Е.А.</i> Рациональные интегральные операторы на отрезке	1	34
<i>Савчук В.П., Савенков В.А., Вярвьильская О.Н.</i> Колебания натянутого пролета под действием движущихся нагрузок	1	58
<i>Саид Омар Абдалрахман (Сирия), Михалев А.С.</i> Управление моментом асинхронного двигателя в следящем электроприводе	2	58
<i>Совпель И.В.</i> Разработка и приложения корпуса виртуальных текстов в ММ-системе (англ.яз.)	3	74
<i>Сонец Е.Б.</i> Устойчивый способ нахождения коэффициентов в методах численного решения жестких систем с локально взаимосогласованными операторами перехода	2	41
<i>Тимохович О.В.</i> Явное решение задачи о модуле голоморфной функции для кругового кольца	2	68
<i>Труш Н.Н., Марковская Н.В.</i> Оценка ковариационной функции стационарных случайных процессов	2	45
<i>Шилин А.П.</i> О решении интегральных уравнений с двумя ядрами на симметричном интервале	1	66
<i>Ширяев В.М.</i> Полугруппы с единственным базисом	1	43

ХРОНИКА

<i>Анищик В.М., Комаров Ф.Ф., Драко В.М.</i> 1-я Межгосударственная конференция "Взаимодействие излучений с твердым телом" (Interaction of radiation with solids)	2	72
<i>Сташкевич Ігар.</i> Конференція па дыфракцыйнай оптыцы	1	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Рафаил Габасов</i>	1	74
-----------------------------	---	----

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Дмитрий Алексеевич Супруненко	2	74
Михаил Александрович Ельяшевич	2	73

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Гулис И.М., Цвирко В.А.</i> Управление спектральными характеристиками полярных молекул, внедренных в сегнетоэлектрическую матрицу	3
<i>Шундалов М.Б., Пищевич Г.А.</i> Расчет торсионных колебаний в молекуле пероксида водорода	6
<i>Григорьев В.В., Иванов А.И., Комаров Ф.Ф., Коньшин И.В., Камышан А.С., Леонтьев А.В., Юрченко В.А.</i> Профили пространственного распределения ионов азота и фосфора, имплантированных в ПММА	10
<i>Комаров А.А.</i> Термические пики при прохождении высокоэнергетических ионов в кристаллах и формирование треков	15
<i>Лабуда А.А., Сидерко А.А.</i> Влагостойкость примесносиликатных стекол	18
<i>Барарь С.В., Зажогин А.П., Коваленко М.Н.</i> Спектральные характеристики люминесценции ионов Cr^{3+} при различных температурах и концентрациях его в сапфире	21
<i>Андреев А.Д., Бельский А.М., Валиев А.А.</i> Особенности ВАХ МОП-ПТ с высоколегированной подложкой	26
<i>Мелешко Л.О.</i> Об особенностях формирования кристаллических зародышей алмаза в области его метастабильности	29
<i>Лобач Д.И., Перцев А.Н., Чудаков В.А.</i> Определение скорости эксхалляции изотопов радона из образцов по дочернему полонию	32

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Саид Омар Абдалрахман (Сирия), Семченко А.А., Михалев А.С.</i> Анализ динамических показателей контура регулирования момента следящего асинхронного электропривода	35
<i>Мельников О.И., Козловский Ю.Г.</i> Реализация гиперграфа гусеницей	40
<i>Ружицкая Е.А.</i> Критерий оптимальности для одной линейной полубесконечной экстремальной задачи	44
<i>Карасёва Г.Л.</i> Метод решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и подвижным начальным состоянием	48
<i>Дубатовская М.В.</i> Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с минус-бесконечным индексом в исключительном случае	53
<i>Сташуленок С.П.</i> Алгебра случайных мнемопроцессов	57
<i>Абдельразак Н.А. (Иордания)</i> Метод парных сумматорных уравнений для решения двумерных осесимметричных задач нестационарной теплопроводности на примере теплообмена полуограниченного сплошного цилиндра	61
<i>Амелькин В.В., Левин А.В.</i> Конвергентные траектории двумерных динамических систем	64

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Аншаков О.М., Филь Г.А., Чудаков В.А.</i> К расчету спектрального распределения гамма-излучения над полубесконечным источником	68
<i>Казаченок В.В.</i> Построение сплайновой регрессии по экспериментальным данным	70

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Эдмунд Иванович Зверович</i>	72
<i>Валентин Николаевич Русак</i>	73

CONTENTS

PHYSICS

<i>Gulis I.M., Tsoirko V.A.</i> Control of spectral characteristics of polar molecules in ferroelectric matrices	3
<i>Shundalov M.B., Pitseovich G.A.</i> A torsional vibrations calculation in hydrogen peroxide molecule	6
<i>Grigor'ev V.V., Ivanov A.I., Komarov F.F., Kamyshan A.S., Kon'shin I.V., Leont'ev A.V., Yurchenko V.A.</i> Spatial distribution profiles of nitrogen and phosphorus ions implanted into polymethylmethacrylate (PMMA)	10
<i>Kamarou A.A.</i> Thermal spikes upon high-energy ion implantation in crystals, and track formation	15
<i>Labuda A.A., Siderko A.A.</i> Moisture resistance of doped silicate glasses	18
<i>Barar S.V., Zazhogin A.P., Kovalenko M.N.</i> Spectral of luminescence of chromium ions with varying concentrations in sapphire and at different temperatures	21
<i>Andreev A.D., Belsky A.M., Valiev A.A.</i> The Peculiarities of Current-Voltage Characteristics of the MOSFET with a Highly-Doped Substrate	26
<i>Meleshko L.O.</i> Peculiarities of the Diamond Nucleation Centres Formation in the Metastable State	29
<i>Lobach Dm.I., Perceev A.N., Chudakov V.A.</i> The determining of the radon exhalation rate out from samples by the daughter polonium	32

MATHEMATICS AND INFORMATICS

<i>Abdalahman Saied Omar, Semshenka A.A., Mikhalev A.S.</i> Analysis dynamic indicators controller torque in the tracking asynchronous electric-drive systems	35
<i>Melnikov O.I., Kozlovsky U.G.</i> The realization of hypergraph by caterpillar	40
<i>Ruzhitskaja E.A.</i> Optimal criterion for one linear semi-infinite extremal problem	44
<i>Karaseva G.L.</i> Solution method for optimal control problem with phase constraints and non-fixed initial state	48
<i>Dubatovskayja M.V.</i> Characteristic singular integral equation with minus-infinity index in the exceptional case	53
<i>Stashulenok S.P.</i> Algebra of stochastic mnemonic processes	57
<i>Abdelrazzak N.A.</i> Dual series method to solve two dimensional heat conductivity problem for example of a heat exchange on the half-space entire cylinder	61
<i>Amel'kin V.V., Levin A.V.</i> Convergent trajectories of the two-dimensional dynamical systems	64

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Anshakov O.M., Fil G.A., Chudakov V.A.</i> Calculation of gamma-radiation spectral distribution above a semi-infinite source	68
<i>Kasachenok V.V.</i> Construction of spline regression on experimental data	70

OUR JUBILEE

<i>Edmund Ivanovich Zverovich</i>	72
<i>Valentin Nickolaevich Rusak</i>	73

Вниманию работников библиотек, преподавателей и специалистов!

Подобрать компьютерную литературу для учебного процесса и комплектования библиотеки Вам поможет

МП "Информационная галерея"

В нашем ассортименте лучшая компьютерная литература, в том числе новинки, по самым разным направлениям:

- ✓ языки программирования
- ✓ базы данных
- ✓ электронные таблицы
- ✓ аппаратная часть
- ✓ ремонт и модернизация компьютеров
- ✓ модемы, Internet, сети
- ✓ Windows 3.1, Windows 95, Windows NT
- ✓ MS Word, MS Office
- ✓ графика
- ✓ операционные системы
- ✓ и многое другое...

Полный перечень книг, включающий около 140 наименований, можно получить по электронной почте, по факсу или письмом.

На отдельные книги можно получить аннотации.

**Учебным заведениям литература отпускается
по оптовым ценам!**

При желании Вы можете получить книги по почте (стоимость пересылки одной книги 4000 руб.)

Доставка литературы по Минску бесплатно.

За более подробной информацией обращайтесь:

тел/факс (017)245-59-00, 246-84-76

e-mail: root@mitzura.belpak.minsk.by

МП "Информационная галерея" !