

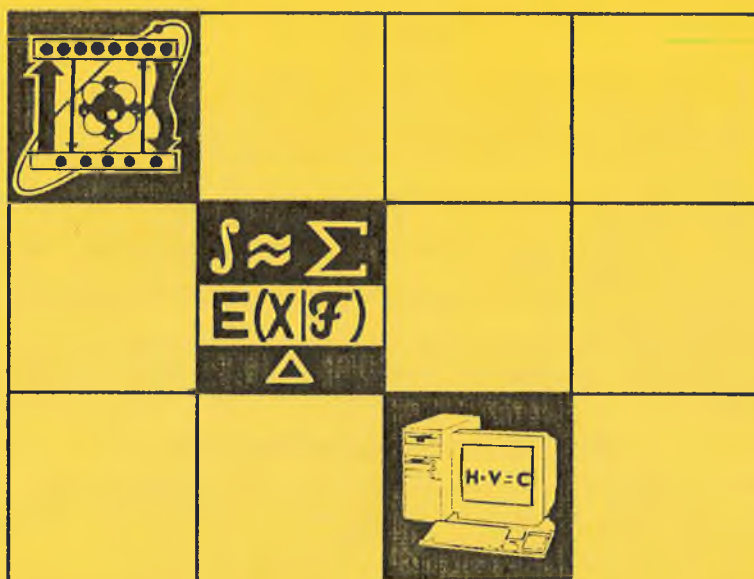
# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Информатика

3'96



# СОДЕРЖАНИЕ

## БЕЛОРУССКОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ УНИВЕРСИТЕТУ 75 ЛЕТ

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Богущ А.А.</i> Аб ролі Белдзяржуніверсітэта ў развіцці фізічнай навукі і адукацыі на Беларусі .....                       | 3  |
| <i>Гусак А.А., Тышкевич Р.И., Юрчук Н.И.</i> Из истории развития математики в Белорусском государственном университете ..... | 10 |

## ФИЗИКА

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Бельский А.М.</i> Структура поля когерентных световых пучков вблизи преломляющей поверхности .....                                                                       | 18 |
| <i>Воропай Е.С., Самцов М.П., Луговский А.П., Жаверид Э.А., Журавкин И.Н., Александрова Е.Н.</i> Свойства новых полиметиновых красителей для фотодинамической терапии ..... | 23 |
| <i>Шишкин Г.В., У.Х. Абдель Салам (Палестина)</i> Точные решения проблемы Волкова на фоне гравитации .....                                                                  | 27 |
| <i>Ермаков В.В., Карней И.Б., Сташкевич И.В.</i> Термооптический затвор и его влияние на режимы генерации импульсного твердотельного лазера .....                           | 33 |
| <i>Ермолаев О.П., С.А. Хаким (Египет)</i> Скейлинговый подход к переходу диэлектрик–металл в германии, "легированном" радиационными дефектами .....                         | 36 |
| <i>Шепелевич В.Г.</i> Структура и электрические свойства фольги тройных сплавов Bi-10 ат.% Sb-Sn, полученной сверхбыстрой закалкой из расплава .....                        | 37 |
| <i>Ревинский А.Ф.</i> Об электронной структуре сверхпроводящей системы $Ba_{1-x}K_xBiO_3$ .....                                                                             | 40 |
| <i>Гулис И.М., Комяк А.И., Саечников К.А., Цвирко В.А.</i> Спектроскопия сложных органических молекул, охлажденных в сверхзвуковой струе .....                              | 41 |

## МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

|                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Антоневич А.Б., Радыно Я.В.</i> О теории мнемифункций и ее приложениях .....                                                                                       | 46 |
| <i>Калинин А.И., Грибковская И.В.</i> Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости ..... | 52 |
| <i>Корзюк В.И.</i> Метод энергетических неравенств и операторов осреднения .....                                                                                      | 55 |
| <i>Размыслович Г.П.</i> Управляемость каузальных линейных дискретных дескрипторных систем с запаздыванием .....                                                       | 72 |
| <i>Совпель И.В.</i> Разработка и приложения корпуса виртуальных текстов в ММ-системе (англ. яз.) .....                                                                | 74 |

## CONTENTS

### THE BELARUSSIAN STATE UNIVERSITY IS 75

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Bogush A.A.</i> The role of Belarussian State University in progress of physical science and education in the Republic of Belarus .....  | 3  |
| <i>Gusak A.A., Tishkevich R.I., Yurchuk N.I.</i> On the history of the development of mathematics in the Belarussian State University ..... | 10 |

## PHYSICS

|                                                                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Belski A.M.</i> The field structure of coherent light beams at the interface .....                                                                                     | 18 |
| <i>Voropay E.S., Samtsov M.P., Lugovsky A.P., Zhavrid E.A., Aleksandrova E.N., Zhuravkin I.N.</i> Property of the new polymethine dyes for the photodynamic therapy ..... | 23 |
| <i>Shishkin G.V., W.H. Abdel Salam (Palestine)</i> Exact Solutions of the Volkov Problem on the background of gravitation .....                                           | 27 |
| <i>Ermakov V.V., Karnei I.B., Stashkevitch I.V.</i> Thermooptic Gate and its Effect on Generation Modes of a Pulsed Solid Laser .....                                     | 33 |
| <i>Ermolaev O.P., S.A. Hakim (Egypt)</i> A Scaling Approach to the Transition Dielectric–Metal in Germanium Doped with Radiation Defects .....                            | 36 |
| <i>Shepelevich V.G.</i> The Structure and Electrical Properties of Rapidly Quenched Foils of Bi–10at. per cent Sb–Sn Alloys .....                                         | 37 |
| <i>Revinsky A.F.</i> On Electronic Structure of Superconducting System $Ba_{1-x}K_xBiO_3$ .....                                                                           | 40 |
| <i>Gulis I.M., Komyak A.I., Saechnikov K.A., Tsvirko V.A.</i> Spectroscopy of jet-cooled complex organic molecules .....                                                  | 41 |

## MATHEMATICS AND INFORMATICS

|                                                                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Antonevich A.B., Radyno Y.V.</i> About the theory of mнемofunctions and its applications .....                                                                          | 45 |
| <i>Kalinin A.I., Gribkovskaia I.V.</i> Asymptotic optimization of linear dynamical systems with different order-infinitesimal parameters multiplying the derivatives ..... | 52 |
| <i>Korzyuk V.I.</i> The Method of Energetic Inequalities and Averaging Operators .....                                                                                     | 55 |
| <i>Razmyslovitch G.P.</i> Controllability of causal linear discrete descriptor system with delay .....                                                                     | 72 |
| <i>Sovpel I.V.</i> Development and Application of a Corpus of Virtual Texts in MM-system .....                                                                             | 74 |

---

# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года  
один раз в четыре месяца

---

**СЕРИЯ 1**

**Физика  
Математика  
Информатика**

**3'96**

СЕНТЯБРЬ



МИНСК  
"УНІВЕРСІТЭЦКАЕ"

**Главный редактор В.Г. РУДЬ**  
**Ответственный секретарь П.Н. БАРАНОВСКИЙ**

Редакционная коллегия серии:

П.Д. КУХАРЧИК (*ответственный редактор*),  
В.М. АНИЩИК, Л.М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*),  
В.Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А.М. БЕЛЬСКИЙ (*ответственный секретарь*),  
В.В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), Е.С. ВОРОПАЙ,  
Р.Ф. ГАБАСОВ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Л.Н. КИВАЧ, Н.И. КОЗЛОВСКИЙ,  
Ф.Ф. КОМАРОВ, А.И. КОМЯК, В.И. КОРЗЮК, В.И. МИРОНЕНКО,  
С.Г. МУЛЯРЧИК, И.В. СОВПЕЛЬ, А.К. ФЕДОТОВ, А.Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,  
Н.И. ЮРЧУК

Учредитель:  
Белорусский государственный университет

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ Мат Информ. 1996 №3

Редактор И.А. Лешкевич  
Художественный редактор Ю.С. Сергачев  
Технический редактор и корректор Г.И. Хмарун

Набор и верстка выполнены в редакции журнала Г.М. Добыш и В.А. Семеновым

Подписано в печать 11.10.96. Формат 70х108 1/16. Бумага офс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 7.0. Усл. кр.-отт. 7.52. Уч. изд. л. 8.78. Тираж 940 экз. Заказ 1490. Цена 15000 р.

Издательство "Універсітэцкае". 220048, Минск, пр. Машерова, 11. Адрес редакции 220080,  
Минск, Университетский городок, тел. 220-65-42. Регистрационный №547.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика в типографии издательства "Белорусский Дом  
печати", 220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.

© Вестник Белгосуниверситета, 1996

1921-1996

# Белорусскому государственному университету 75 лет

УДК 539.1

А.А.БОГУШ

## АБ РОЛІ БЕЛДЗЯРЖУНІВЕРСІТЭТА Ў РАЗВІЦЦІ ФІЗІЧНАЙ НАВУКІ І АДУКАЦЫІ НА БЕЛАРУСІ

Brief outline of progress in educational and scientific activities at the Physical Department of the Belarussian State University since its foundation is given. Particular attention is centered on advances in physics achieved due to the contribution made by the University graduates. The work is dedicated to the 75th anniversary of the Belarussian State University.

**Уводзіны.** Навуку робяць людзі. Яны вызначаюць і распрацоўваюць навукова-даследчую тэматыку, праводзяць эксперыментальныя і тэарэтычныя даследаванні, забяспечваюць няспыннасць, пераемнасць і эфектыўнасць навукова-даследчага працэсу. На падрыхтоўку сучаснага вучонага-даследчыка патрэбны доўгія гады сістэматычнага абучэння, накіраваныя не толькі на глыбокае засваенне ўжо назапашаных ведаў, але і на прывіццё навываў самастойнай навукова-даследчай працы, на авалоданне метадамі і сродкамі даследавання. Пры гэтым асаблівае, першараднае значэнне мае сам факт наяўнасці дастаткова шырокага кантынгенту прэтэндэнтаў у навуку, таленавітай моладзі, здольнай і гатовай прафесійна займацца навукова-даследчай дзейнасцю. Ад гэтага ў канчатковым выніку і залежыць поспех усёй справы.

Наша беларуская зямля аказалася надзвычай ураджайнай на таленавітых сыноў, у тым ліку і на буйных вучоных-фізікаў. Гэта, у першую чаргу, класікі фізічнай навукі Г.Мінкоўскі і А.І.Садоўскі, Нобелеўскія лаўрэаты Л.Ш.Глэшаў (Глухоўскі) і Л.Р.Прыгожын, акадэмікі Ж.І.Алфёраў, Л.А.Арцымовіч, А.І.Ахіезер, В.І.Гальданскі, Я.Б.Зельдовіч, Н.Кемер, Л.І.Мандэльштам, А.Б.Мірдал, З.Урублеўскі, Я.С.Фрадкін (гл. [1]).

Хаця ўсе названыя вучоных-фізікі звязаны з беларускай зямлёй толькі месцам свайго нараджэння або паходжаннем і фарміраванне іх як буйных вучоных-даследчыкаў, актыўная творчая дзейнасць у галіне фізічнай навукі, прызнанне іх поспехаў і дасягненняў навуковай грамадскасцю прайшлі за межамі нашай рэспублікі, мы, безумоўна, павінны ведаць гэтыя імёны і маем падставы ганарыцца такімі славутымі землякамі.

Сёння нічога нечаканага і здзіўляючага няма ў тым, што, калі на Беларусі склаліся адпаведныя спрыяльныя ўмовы, тут была створана наладжаная на высокім навуковым узроўні сістэма ўніверсітэцкай фізіка-матэматычнай адукацыі, расцвіла фізічная навука, выраслі свае выдатныя беларускія вучоных-фізікі.

У выніку наша невялікая краіна, у якой сістэматычныя шырокамаштабныя навуковыя даследаванні па сучаснай фізіцы пачалі разгортвацца зусім нядаўна, усяго 40 гадоў таму назад, здолела заваяваць высокае і пачэснае месца (дзесьці ў сярэдзіне другой дзесяцікі) сярод 50 "фізічных" дзяржаў нашай планеты. (У гэтым няцяжка пераканацца непасрэдна, калі прааналізаваць, напрыклад, размеркаванне па краінам 1250 вучоных-фізікаў свету, звесткі аб якіх былі прыведзены ў вядомым біяграфічным даведніку 1983 года [1]).

У сучаснай гісторыі развіцця вышэйшай адукацыі і навуковых даследаванняў па фізіцы на Беларусі можна вызначыць, зразумела, дастаткова ўмоўна тры асноўныя этапы [2].

Пераходзячы да канкрэтнай, па неабходнасці вельмі кароткай характарыстыкі гэтых этапаў, мы засяродзім сваю ўвагу галоўным чынам толькі на двух установах рэспублікі — Беларускім дзяржаўным універсітэце (яго фізічным факультэце) і Акадэміі навук Беларусі (перш за ўсё на Інстытуце фізікі), на іх справах і людзях. Такі агляд, безумоўна, нельга лічыць поўным і вычарпальным.

**Першы этап (1922–1937 гг.).** Станаўленне вышэйшай (універсітэцкай) фізіка-матэматычнай адукацыі. Семдзесяць пяць гадоў таму (1921 г.) у Мінску быў ад-

крыты Беларускай дзяржаўнай універсітэт. Ужо праз год, у 1922 г., у складзе яго педагогічнага факультэта было створана фізіка-матэматычнае аддзяленне. Гэтым, па сутнасці, і быў пакладзены пачатак станаўлення сістэматычнай вышэйшай універсітэцкай адукацыі ў галіне фізіка-матэматычных навук у нашай рэспубліцы.

У 1932 г. гэтае аддзяленне было пераўтворана ў самастойны фізіка-матэматычны факультэт БДУ. На факультэце былі арганізаваны першыя фізічныя кабінеты і вучэбныя лабараторыі, створана кафедра фізікі, на якой працавалі прафесар Я.К.Успенскі, дацэнт Я.В.Снятоў, асістэнты І.Р.Некрашэвіч, І.П.Шапіра і іншыя — усяго 11 чалавек.

Першымі выкладчыкамі фізікі ў БДУ сталі былыя настаўнікі мясцовых сярэдніх навучальных устаноў, сярод іх Я.В.Снятоў і Я.К.Успенскі — выпускнікі Маскоўскага ўніверсітэта. Я.В.Снятоў перайшоў на работу ў Белдзяржуніверсітэт у самым пачатку дзейнасці аддзялення. Ім былі падрыхтаваны і ўпершыню выдадзены на беларускай мове работы "Курс радыётэхнікі" (1933 г.) і "Тэлебачанне і тэлефатаграфія" (1934 г.). Ён вывучаў паглынанне короткіх і ультракороткіх радыёхвальняў у вадкіх калоідна-дысперсных асяроддзях. Я.К.Успенскі выкладаў фізіку ў гімназіі і палітэхнікуме Бабруйска. Працаваў у БДУ з 1923 г., з 1929 г. ён — дэкан фізіка-матэматычнага аддзялення педфака, а затым фізіка-матэматычнага факультэта БДУ. Праводзіў навуковыя даследаванні па квантавай механіцы і фізіцы атамных ядраў. З 1936 г. Я.К.Успенскі — прафесар, загадчык кафедры фізікі Гомельскага педінстытута.

На фоне адсутнасці ўласных беларускіх навуковых кадраў і прафесарска-выкладчыцкага персаналу вышэйшай кваліфікацыі значнай падзеяй у гэты перыяд было запрашэнне на працу ў Беларусь буйных вучоных з іншых рэспублік і краін. Так, у 1928 г. з Германіі ў Мінск пераехаў вядомы спецыяліст у галіне матэматыкі, тэорыі адноснасці і рэлятывісцкай механікі прафесар Я.П.Громер (ураджэнец Брэста) — вучань і былы асістэнт А.Эйнштейна. Аднак ён працаваў у БДУ нядоўга (памёр у 1933 г.). З 1929 па 1937 г. у Белдзяржуніверсітэце прафесарам, а затым загадчыкам кафедры вышэйшай матэматыкі працаваў выпускнік Венскага ўніверсітэта Ц.Л.Бурстын, аўтар навуковых прац па дыферэнцыяльнай і рыманавай геаметрыі, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў і алгебры, тэорыі адноснасці. За 1932–1936 гг. ён падрыхтаваў шэраг манаграфій і вучэбных дапаможнікаў, выдадзеных у Мінску на беларускай мове, у тым ліку: "Уводзіны ў рыманаву дыферэнцыяльную геаметрыю", "Фізічныя метады матэматыкі". У 1931 г. Ц.Л.Бурстын быў абраны акадэмікам БелАН. Вялікая роля ў стварэнні і абсталяванні фізічных кабінетаў і лабараторый БДУ належыць прафесару Я.Е.Сіроціну, які пераехаў з Расіі. Ён праводзіў на тэрыторыі Беларусі геамагнітныя назіранні.

У 1929–1933 гг. група першых выпускнікоў Белдзяржуніверсітэта (Л.А.Арцымовіч, Д.А.Балабаеў, І.Р.Некрашэвіч, А.Н.Сеўчанка, М.Л.Тамільчык, Ф.І.Фёдарай, І.П.Шапіра і інш.) была накіравана на вучобу ў аспірантуру па фізіцы ў вышэйшыя навучальныя ўстановы і навукова-даследчыя інстытуты Ленінграда, Масквы, Харкава, Кіева і г.д. І.Р.Некрашэвіч, Ф.І.Фёдарай, І.П.Шапіра пасляхова выканалі і абаранілі дысертацыйныя даследаванні, сталі першымі беларускімі кандыдатамі фізіка-матэматычных навук у галіне фізікі і вярнуліся на працу ў БДУ. М.Л.Тамільчык стаў выкладаць механіку ў Беларускай політэхнічным інстытуце. А.Н.Сеўчанка застаўся працаваць у Дзяржаўным аптычным інстытуце ў Ленінградзе і вярнуўся ў Мінск у пасляваенныя гады. Л.А.Арцымовіч застаўся назаўсёды ў Маскве.

13 кастрычніка 1928 г. кіраўніцтвам рэспублікі была прынята пастанова аб рэарганізацыі створанага ў 1922 г. Інстытута беларускай культуры (Інбелкульту) у Беларускай акадэмію навук (БелАН) (з 1936 г. — Акадэмія навук Беларускай ССР (АН БССР), а з 1991 г. — Акадэмія навук Беларусі (АНБ)). Акадэмія пачала сваю дзейнасць з 1 студзеня 1929 г.

Яшчэ ў структуры Інбелкульту ў 1926 г. была створана кафедра фізікі. З 1929 г. яе загадчыкам працаваў прафесар БДУ Я.Е.Сіроцін. У 1931 г. на базе гэтай кафедры і аддзялення энергетыкі Інстытута прамысловасці Беларусі быў арганізаваны Фізіка-тэхнічны інстытут Беларускай Акадэміі навук (ФТІ БелАН); з 1933 па 1936 г. — Фізіка-матэматычны інстытут БелАН. Дырэктарам інстытута быў прызначаны Ц.Л.Бурстын, вядучым навуковым супрацоўнікам — Я.П.Громер, вучоным сакратаром — І.Р.Некрашэвіч (з 1932 г. — М.Д.Каўцэвіч). У 1932 г. у складзе інстытута былі створаны лабараторыі электрамагнітных ваганняў (заг. Я.В.Снятоў), электратэхнікі (заг. М.Д.Каўцэвіч), геофізікі (заг. А.І.Кайгародаў), металафізікі і рэнтгенаструктурнага аналізу (заг. І.П.Шапіра). Аднак агульная колькасць навуковых супрацоўнікаў у ФТІ (ФМІ) БелАН была невялікая: у 1933 г. — 10, 1934 г. — 13, 1935 г. — 20 чалавек. Пры інстытуце выдаваўся навуковы часопіс "Зборнік прац Фізіка-матэматычнага інстытута" (з 1936 г. — "Труды Физико-технического института"). Працавала аспірантура БелАН, у якой пачыналі сваю вучобу І.Р.Некрашэвіч, Ф.І.Фёдарай і іншыя беларускія фізікі.

У перыяд з 1929 па 1935 г. у рэспубліцы былі праведзены ўсебеларускія фізіка-матэматычныя канферэнцыі (1925, 1929, 1934 гг.), канферэнцыя па фізіцы стратасферы (1934г.) і фізіцы металаў (1935 г.).

Беларускія фізікі панеслі цяжкія страты ў 1937–1938 гг. Былі рэпрэсіраваны Ц.Л.Бурстын, Я.К.Успенскі, М.Л. Півавараў (фізік-тэхнік, навуковы супрацоўнік ФТІ БелАН, а затым у 1937–1938 гг. — Народны камісар асветы БССР), М.Д.Каўцэвіч, М.Л. Тамільчык і іншыя.

У 1938 г. Фізіка-тэхнічны інстытут АН БССР быў зачынены "як неапраўдаўшы сябе".

**Другі этап (1937–1955 гг.). Разгортванне пачатковых навуковых даследаванняў па фізіцы.** Пачатак другога, прамежкавага і не вельмі багатага на значныя падзеі этапу ў гісторыі развіцця фізікі на Беларусі звязаны з істотнымі пераўтварэннямі на фізіка-матэматычным факультэце Белдзяржуніверсітэта. У 1937–1938 гг. тут былі створаны першыя чатыры спецыялізаваныя кафедры фізічнага профілю: кафедра агульнай фізікі (заг. І.Р.Некрашэвіч), тэарэтычнай фізікі (заг. Ф.І.Фёдараў), рэнтгенафізікі (заг. І.П.Шапіра) і электрамагнітных ваганняў (заг. Я.В.Сняткуў). У гэты час яны сталі цэнтрамі не толькі навукальнай і навукова-метадычнай работы, але навуковых даследаванняў па фізіцы ў Беларусі. Да навукова-даследчай дзейнасці ўсё больш актыўна сталі далучацца студэнты. На кафедрах паяўляюцца першыя аспіранты.

Што датычыць Акадэміі навук Беларускай ССР, то па стану на 1940 г. у яе складзе не было ніводнага інстытута і нават самастойнай навукова-даследчай лабараторыі, якія б займаліся праблемамі фізікі або матэматыкі.

За 1941–1944 гг. — гады акупацыі Савецкай Беларусі нямецка-фашысцкімі захопнікамі — усё тое, што па крупінках збіралася і стваралася ў Беларускім дзяржаўным універсітэце і Акадэміі навук Беларускай ССР, было разграблена ці разбурана. Былі спалены карпусы акадэміі і універсітэта, знішчаны або вывезены ў Нямеччыну дастаткова салідныя на той час фонды навуковых бібліятэк, усё навукова-даследчае і навукальнае лабараторнае абсталяванне. Аднак найбольш цяжкія і неаднаўляльныя страты і ахвяры панесла насельніцтва Беларусі, у тым ліку загінула шмат таленавітай беларускай моладзі, магчыма, будучых вучоных.

Ужо ў 1943 г., калі яшчэ грымелі баі на франтах вайны, у Маскве аднавіў сваю дзейнасць Прэзідыум Акадэміі навук Беларускай ССР, а на падмаскоўнай станцыі Сходная пачаў працаваць фізіка-матэматычны факультэт Белдзяржуніверсітэта, дэканам якога быў прызначаны Ф.І.Фёдараў. У верасні 1944 г., адразу ж пасля вызвалення сталіцы Беларусі, Беларускі дзяржаўны універсітэт і Прэзідыум АН БССР вяртаюцца ў Мінск.

У цяжкія пасляваенныя гады на фізіка-матэматычным факультэце БДУ, якім да 1950 г. кіраваў Ф.І.Фёдараў, адначасова з аднаўленнем вучэбнага працэсу адразу ж разгортваюцца і навукова-даследчыя работы. У гэты час Ф.І.Фёдараў выконвае свае першыя грунтоўныя працы па тэорыі элементарных часціц і тэорыі распаўсюджвання электрамагнітных хваляў у крышталях, якія ў наступныя гады былі пакладзены ў аснову шырокіх даследаванняў па гэтай тэматыцы. У 1954 г. ён бліскуча абараняе доктарскую дысертацыю па опыты анізатропных асяроддзяў і становіцца першым доктарам фізіка-матэматычных навук, які вырас у рэспубліцы. На кафедры тэарэтычнай фізікі БДУ пад кіраўніцтвам Фёдара Іванавіча выконваюць свае даследаванні і паспяхова абараняюць кандыдацкія дысертацыі І.З.Фішар (1949 г., па тэорыі гравітацыі), які пасля стаў адным з вядучых спецыялістаў па статыстычнай тэорыі вадкасцей і падрыхтаваў у БДУ шэраг вядомых цяпер фізікаў-тэарэтыкаў, і выпускнік Віленскага ўніверсітэта Л.А.Барысаглебскі (1951г., па тэорыі бясконцамерных хвалевых ураўненняў для элементарных часціц), цяперашні прафесар Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта, аўтар першага выдадзенага на Беларусі вучэбнага дапаможніка па квантавай механіцы (1981 г. — першае, 1988 г. — другое выданне).

Значныя поспехі былі дасягнуты ў развіцці электрафізікі на кафедры агульнай (эксперыментальнай) фізікі БДУ, якую 40 гадоў кіраваў І.Р. Некрашэвіч, таленавіты беларускі вучоны, выдатны настаўнік моладзі і адметны педагог; Белдзяржуніверсітэту ён аддаў амаль 60 гадоў свайго жыцця. Дарэчы, яшчэ ў 1929 г. пад кіраўніцтвам Ільі Рыгоравіча лабараторныя работы па фізіцы выконвалі А.Н.Сеўчанка і Ф.І.Фёдараў.

У Акадэміі навук Беларускай ССР у 1947 г. пасля 10-гадовага перапынку, аднавіў сваю дзейнасць Фізіка-тэхнічны інстытут. У ім адкрываецца сектар фізікі і матэматыкі (5 супрацоўнікаў, у тым ліку дацэнты БДУ І.Р.Некрашэвіч, Ф.І.Фёдараў, І.П.Шапіра). Аднак ужо ў 1949 г. гэты сектар закрываецца. На той час у Беларусі склалася яўна ненармальнае, нездавальняючае становішча ў развіцці навукова-даследчых работ па фізіцы і матэматыцы. На гэта неаднаразова звярталі ўвагу ў сваіх выступленнях І.Р.Некрашэвіч і Ф.І.Фёдараў.

У пачатку 50-х гг. кіраўніцтва рэспублікі па прапанове камісіі Акадэміі навук СССР і Прэзідыума АН БССР прымае пастановы, накіраваныя на ліквідацыю адставання ў развіцці фізіка-матэматычных і фізіка-тэхнічных навук у БССР.

Пачынаць трэба было з навуковых кадраў вышэйшай кваліфікацыі. За кароткі час (1953–1962 гг.) з Расіі былі запрошаны і пераехалі ў Беларусь 10 дактароў навук: 5 фізікаў і 5 матэматыкаў. Першымі сярод іх былі супрацоўнікі Дзяржаўнага аптычнага інстытута ў Ленінградзе, вядомыя спецыялісты ў галіне оптыкі і спектраскапіі: былы выпускнік

БДУ А.Н.Сеўчанка, выхаванец акадэміка і прэзідэнта АН СССР, ганаровага члена АН БССР (1950 г.). С.І.Вавілава і лаўрэат Дзяржаўнай прэміі СССР Б.І.Сцяпанав.

У 1953 г. яны выбіраюцца акадэмікамі АН БССР, узначальваюць фізіка-матэматычны сектар ФТІ АН БССР, які ў гэты час аднаўляе сваю работу, ствараюць і становяцца загадкамі дзвюх новых кафедраў на фізічным факультэце БДУ: фізічнай оптыкі (А.Н.Сеўчанка) і спектральнага аналізу (Б.І.Сцяпанав). Пачынаецца актыўная падрыхтоўка да новага, вырашальнага этапу ў развіцці фізічнай навукі ў нашай рэспубліцы.

**Трэці этап (1955—наш час). Інтэнсіўнае і шырокамаштабнае развіццё навукова-даследчых работ па сучаснай фізіцы.** 17 студзеня 1955 г. на базе фізіка-матэматычнага сектара ФТІ АН БССР быў утвораны Інстытут фізікі і матэматыкі АН БССР. Першым дырэктарам інстытута стаў А.Н.Сеўчанка. Намеснікам дырэктара па навуковай частцы быў прызначаны М.А.Барысевіч, выпускнік БДУ, які закончыў аспірантуру ў Дзяржаўным аптычным інстытуце. У 1957 г., пасля прызначэння А.Н.Сеўчанкі рэктарам Белдзяржуніверсітэта, інстытут узначаліў Барыс Іванавіч Сцяпанав, імя якога і носіць цяпер Інстытут фізікі АН Беларусі.

З 1955 г. у Беларусі пачынаецца і набірае ўсё больш высокія тэмпы і значныя маштабы інтэнсіўнае развіццё навукова-даследчых работ па фізіцы і матэматыцы. Пастаянна пашыраецца тэматыка даследаванняў па сучаснай фізіцы, ствараюцца новыя навукова-даследчыя ўстановы і іншыя арганізацыйныя структуры, кіраўнікамі якіх становяцца, як правіла, выпускнікі БДУ, былыя супрацоўнікі Інстытута фізікі і матэматыкі АН БССР (П.А.Апанасевіч, М.А.Барысевіч, Б.Б.Бойка, В.С.Буракоў, А.П.Вайтовіч, А.М.Ганчарэнка, Л.І.Кісялёўскі, У.А.Піліповіч, Ф.І.Фёдарав).

У 1959 г. Інстытут фізікі і матэматыкі быў пераўтвораны ў дзве самастойныя ўстановы: Інстытут фізікі АН БССР (ІФ АН БССР) і Інстытут матэматыкі і вылічальнай тэхнікі АН БССР. Пазней, у 1970 г. ў Магілёве было адкрыта аддзяленне Інстытута фізікі АН БССР (цяпер — Інстытут прыкладной оптыкі АНБ). У 1993 г. на базе ІФ АНБ былі арганізаваны Інстытут фізікі імя Б.І.Сцяпанова АНБ (ІФ АНБ) і Інстытут малекулярнай і атамнай фізікі АНБ (ІМАФ АНБ).

Намеснік дырэктара ІФ АН БССР М.А.Барысевіч у 1969 г. становіцца віцэ-прэзідэнтам, а затым прэзідэнтам Акадэміі навук БССР (да 1987 г.). Пазней ён быў выбраны членам-карэспандэнтам (1972 г.) і акадэмікам (1981 г.) АН СССР (РАН), членам шэрагу замежных акадэміяў навук. Адзначым, што з імем Мікалая Аляксандравіча звязаны гады росквіту АН БССР, беларускай навукі ў цэлым і фізічнай навукі ў прыватнасці.

На пасаду галоўнага вучонага сакратара Прэзідыума АН БССР вылучаюцца Л.І.Кісялёўскі (1978—1983 гг.), У.А.Піліповіч (1983—1987 гг.) і А.М.Ганчарэнка (з 1987 г. да цяперашняга часу).

Яшчэ ў 1963 г. у Акадэміі навук БССР ствараецца Аддзяленне фізіка-матэматычных навук АН БССР. Амаль на працягу 25 гадоў яго нязменным акадэмікам-сакратаром (да 1987 г.) быў Ф.І.Фёдарав. У 1986 г. гэтае аддзяленне было пераўтворана ў Аддзяленне фізікі, матэматыкі і інфарматыкі АН БССР (АФМІ АНБ). Яго акадэмікамі-сакратарамі выбіраліся Л.І.Кісялёўскі, В.С.Буракоў (які займае гэтую пасаду і сёння), намеснікамі — Б.Б.Бойка, А.М.Рубінаў, У.А.Піліповіч.

Цяпер (на пачатак 1996 г.) у склад АФМІ АНБ уваходзяць 6 навукова-даследчых устаноў фізічнага профілю [3]: 1. Інстытут фізікі імя Б.І.Сцяпанова; 2. Інстытут атамнай і малекулярнай фізікі; 3. Інстытут прыкладной оптыкі ў Магілёве; 4. Інстытут фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў; 5. Інстытут электронікі; 6. Аддзел аптычных праблем інфарматыкі. Сюды трэба яшчэ дадаць Доследна-канструктарскае бюро "Аксіон" пры ІФ АНБ.

Сёння ў Аддзяленні фізікі, матэматыкі і інфарматыкі Акадэміі навук Беларусі працуюць 14 акадэмікаў і 23 члены-карэспандэнты АНБ, 116 дактароў і 520 кандыдатаў навук. Істотны навуковы патэнцыял у галіне фізікі сфарміраваўся таксама ў іншых навукова-даследчых установах АНБ.

Большасць з маладых кадраў, якія зараз працуюць у фізічных інстытутах акадэміі — выхаванцы Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта, яго фізіка-матэматычнага, а з 1958 г. — фізічнага факультэта. Новыя, высокія запатрабаванні да выпускнікоў БДУ выклікалі радыкальныя змены і ў самім універсітэце. Пашыралася сетка спецыялізаваных кафедраў фізічнага профілю, рэзка павялічылася колькасць спецыялізацый, па якіх ішла падрыхтоўка студэнтаў, усё больш значнае месца ў навучальным працэсе займалі прыцягненне і непасрэдны ўдзел студэнтаў у навукова-даследчай рабоце. Адначасова вельмі хутка рос колькасны і, што галоўнае, якасны склад прафесарска-выкладчыцкага персаналу [4].

Дастаткова сказаць, што сёння на фізічным факультэце БДУ функцыяніруе 12 кафедраў: агульнай фізікі (загадчык У.В.Грузінскі), тэарэтычнай фізікі (Л.М.Баркоўскі), вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі (В.М.Русак), ядзернай фізікі (В.Я.Ямны), фізічнай оптыкі (А.А.Мінько), лазернай фізікі і спектраскапіі (А.І.Камяк), біяфізікі (С.М.Чаранкевіч), фізікі паўправаднікоў (В.Ф.Стэльмах), фізікі цвёрдага цела (В.М.Анішчык), цеплафізікі (А.Р.Мартыненка), атамнай фізікі і фізічнай інфарматыкі (А.П.Клішчанка), метадыкі

выкладання фізікі і інфарматыкі (В.А.Гайсёнак). На фізічным факультэце БДУ, дзе да 1953 г. не было ніводнага фізіка — доктара навук, а сярод яго выкладчыкаў налічвалася толькі некалькі кандыдатаў навук, цяпер працуе больш за 25 дактароў навук і прафесараў, у тым ліку выпускнікі БДУ: Р.М.Барздоў, А.К.Гарбацэвіч, І.М.Гольцаў, І.Р.Гулакаў, І.М.Гуліс, М.І.Данількевіч, П.У.Жукоўскі, А.М.Зайцаў, Л.І.Камароў, А.В.Мінкевіч, А.П.Патрын, І.Д.Феранчук, А.К.Фядотаў, У.Р.Шапялёвіч, М.А.Шашко, Т.В.Шышкіна і названыя вышэй загадчыкі кафедраў, а таксама больш за 80 кандыдатаў навук.

Акрамя таго, на радыёфізічным факультэце, які вылучыўся з фізічнага ў 1976 г., на кафедрах фізікі (загадчык І.К.Даньіка), радыёфізікі (П.Д.Кухарчык), кібернэтыкі (А.С.Міхалёў), сістэмнага аналізу (У.У.Апанасовіч), інфарматыкі (С.Р.Мулярчык), фізічнай электронікі (Ф.Ф.Камароў), інтэлектуальных сістэм (А.Ф.Чарняўскі), квантавай радыёфізікі і электронікі (Я.Д.Карых) працуе 18 дактароў навук і больш за 50 кандыдатаў навук і дацэнтаў.

Вышэй ужо адзначалася тая выключная роля, якую адыграў у аднаўленні і арганізацыі вучэбнага і навукова-даследчага працэсу па фізіцы і матэматыцы ў самых цяжкіх для Белдзяржуніверсітэта пасляваенныя гады старэйшына беларускіх фізікаў Ф.І.Фёдараў, дэкан фізіка-матэматычнага факультэта БДУ з 1943 па 1950 г., першы і нязменны на працягу амаль 25 гадоў (1938–1962) загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі. Гэтая кафедра і ў наступныя гады пад кіраўніцтвам А.Я.Левашова, Л.І.Камарова, а цяпер Л.М.Баркоўскага застаецца адной з вядучых у БДУ, у прыватнасці, па выніках навуковых даследаванняў супрацоўнікі кафедры Л.І.Камароў і І.Д.Феранчук былі адзначаны прэміяй Акадэміі навук Беларусі за 1995 г.

Пачынаючы з 1953 г., у дзейнасці факультэта актыўны, бадай, вырашальны для яго лёсу ўдзел прынялі А.Н.Сеўчанка і Б.І.Сцяпанаў, затым М.А.Барысевіч і лаўрэат дзвюх дзяржаўных прэмій СССР (1949, 1950 гг.) М.А.Ельшэвіч, які пераехаў у Мінск у 1956 г.; а таксама члены-карэспандэнты АНБ У.Г.Вафіядзі і В.Д.Ткачоў.

Вялікую ролю ў павышэнні навуковага ўзроўню вучэбнага працэсу, у пашырэнні на факультэце тэматыкі даследаванняў і спецыялізацыі адыгралі таксама акадэмікі АН БССР (АНБ) Г.П.Гурыновіч, А.К.Красін, М.В.Лыкаў, Р.І.Салаухін. Сярод тых, хто вядзе тут плённую выкладчыцкую работу, і цяпер нямала супрацоўнікаў Акадэміі навук Беларусі: акадэмік АНБ А.Р.Мартыненка, члены-карэспандэнты АНБ М.М.Аляхновіч, А.А.Богуш, А.С.Рубанаў, К.М.Салаўёў, Л.М.Тамільчык і інш.

Знамянальныя старонкі ў гісторыю Белдзяржуніверсітэта, універсітэцкай фізічнай адукацыі і навукі назаўсёды ўпісаны яго шматгадовым (1957–1972 гг.) рэктарам, членам Прэзідыума АН БССР (1957–1973 гг.) А.Н.Сеўчанкам. Значны ўклад у гэтую гісторыю зрабілі бліжэйшыя вучні і паплечнікі Антона Нічыпаравіча — лаўрэат Дзяржаўнай прэміі БССР, акадэмік АН БССР Л.В.Валадзько, дэкан (1962–1963 гг.) фізічнага факультэта, прарэктар БДУ (1966–1978 гг.) і І.П.Зяцькоў, які пазней займаў гэтыя ж пасады. Нямала папрацавалі на карысць развіцця вышэйшай універсітэцкай адукацыі і фізічнай навукі ў БДУ Л.І.Кісялеўскі, які з 1983 па 1988 г. з'яўляўся рэктарам БДУ, прарэктары БДУ С.С.Шушкевіч і П.Д.Кухарчык, а таксама Э.М.Шпілеўскі, В.А.Гайсёнак, якія ажыццяўлялі кіраўніцтва фізічным факультэтам БДУ, і цяперашні яго дэкан А.П.Клішчанка, дэканы (у розны час) радыёфізічнага факультэта А.А.Лабуда, А.М.Шырокаў, С.Р.Мулярчык, выхаванцы ІФ АН БССР, загадчыкі кафедры агульнай фізікі А.І.Саржэўскі і В.У.Грузінскі.

Нельга не адзначыць, што на пасаду міністра адукацыі і навукі Рэспублікі Беларусь вылучаліся былыя выпускнікі фізічнага факультэта БДУ — прафесар В.А.Гайсёнак, лаўрэат Дзяржаўнай прэміі Беларусі, член-карэспандэнт АНБ М.І.Дзямчук (былы намеснік прэм'ер-міністра РБ, цяпер рэктар Беларускай політэхнічнай акадэміі) і цяперашні міністр прафесар В.І.Стражаў (які свае кандыдацкую і доктарскую дысертацыі падрыхтаваў і абараніў, працуючы ў Інстытуце фізікі АНБ). Дарэчы, лаўрэат Дзяржаўнай прэміі БССР, член-карэспандэнт АНБ С.С.Шушкевіч, былы прарэктар і загадчык кафедры ядзернай фізікі БДУ (які пачынаў сваю навуковую дзейнасць у ІФ АНБ) выбіраўся, як вядома, Старшынёй Вярхоўнага Савета РБ. Выпускнік БДУ, прарэктар Брэстскага педагогічнага ўніверсітэта У.А.Плецохоў, абраны старшынёй камісіі па навукі, адукацыі і культуры Вярхоўнага Савета РБ цяперашняга складу. На пасаду старшыні Беларускага рэспубліканскага фонду фундаментальных даследаванняў у 1966 г. прызначаны выпускнік БДУ, загадчык лабараторыі аптычнай галаграфіі ІФ АНБ, лаўрэат Дзяржаўных прэмій СССР і БССР, член-карэспандэнт АНБ А.С.Рубанаў.

Інтэнсіўнае развіццё навуковых даследаванняў на фізічным факультэце Белдзяржуніверсітэта падрыхтавала, у сваю чаргу, умовы для ўтварэння на яго базе самастойных навукова-даследчых падраздзяленняў і ўстаноў па фізіцы. Яшчэ ў 1971 г. пры БДУ быў адкрыты Навукова-даследчы інстытут прыкладных фізічных праблем, якому ў 1978 г. было прысвоена імя яго стваральніка і першага дырэктара (1972–1978 гг.) А.Н.Сеўчанкі. (З 1978 г. кіраўніцтва гэтым інстытутам ажыццяўляе лаўрэат Дзяржаўных прэмій БССР і СССР акадэмік АНБ А.Ф.Чарняўскі.) У 1987 г. пачаў сваю дзейнасць Навукова-даследчы інстытут ядзерных праблем пры БДУ (дырэктар У.Р.Барышэўскі, сааўтар двух зарэгістра-

ваных навуковых адкрыццяў). У 1993 г. з гэтага інстытута выдзеліўся ў якасці самастойнай навукова-даследчай установы Нацыянальны цэнтр па фізіцы часціц і высокіх энергій пры БДУ (дырэктар М.М.Шумейка, Паўнамоцны прадстаўнік Урада Рэспублікі Беларусь пры Аб'яднаным інстытуце ядзерных даследаванняў у Дубне). Акрамя кіраўнікоў гэтых устаноў тут выраслі і працуюць дактары навук, вядомыя беларускія фізікі: Я.С.Варапай, Б.Б.Віленчыц, Ф.Ф.Камароў, М.А.Ксенафонтаў, В.М.Ламака, А.А.Мінько, А.П.Новікаў, В.В.Равінскі, А.С.Рудніцкі, У.А.Саечнікаў, Д.С.Умрэйка, М.П.Цвірко, А.Д.Цігоў, А.М.Ціханенка, А.П.Хапалюк, С.Ц.Заўтрак, В.В.Ціхаміраў і інш.

На рахунку фізічнага факультэта і названых навукова-даследчых устаноў пры БДУ значная колькасць выдатных дасягненняў у галіне оптыкі і спектраскапіі, лазернай фізікі і фізікі плазмы, фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў, электронікі і інфарматыкі, радыёфізікі, прыборабудавання, ядзернай фізікі і оптыкі, фізікі элементарных часціц і высокіх энергій (гл. [3]).

Інтэнсіўныя навуковыя даследаванні пры актыўнай падтрымцы АН БССР разгарнуліся таксама на фізічных кафедрах Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф.Скарыны. У гэтым вырашальная заслуга выхаванца БДУ, былога загадчыка лабараторыі крышталёоптыкі ІФ АН БССР, лаўрэата Дзяржаўнай прэміі СССР, акадэміка АНБ Б.В.Бокуця, які з 1973 па 1992 г. працаваў на пасадзе рэктара Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта.

Значны ўклад у развіццё фізічнай навукі ў рэспубліцы ўносяць шматлікія кафедры фізічнага профілю ўсіх іншых буйных вышэйшых устаноў Беларусі: Беларускай політэхнічнай акадэміі, Гродзенскага, Брэсцкага і Полацкага, Беларускага агра-тэхнічнага, Мінскага педагагічнага, тэхналагічнага, інфарматыкі, радыёфізікі і электронікі ўніверсітэтаў, Мінскага медыцынскага, Гомельскага політэхнічнага, Магілёўскага і Мазырскага педагагічных інстытутаў (у большасці з якіх таксама працуюць шматлікія выпускнікі БДУ, былыя супрацоўнікі або аспіранты Інстытута фізікі АНБ, напрыклад: С.С.Ануфрык, А.І.Вайцянюкоў, М.А.Гусак, Л.М.Ківач, Г.С.Круглік, С.І.Круглоў, А.А.Куцак, М.С.Пятроў, А.П.Рабушка, М.М.Параўцоў, У.Т.Томін).

Фізічны (фізіка-матэматычны) факультэт БДУ мае падставы ганарыцца шматлікімі сваімі выхаванцамі, вядомымі вучонымі-фізікамі, якія працавалі або працуюць за межамі нашай рэспублікі. Пералічыць іх усіх тут няма ніякай магчымасці. Нагадаем толькі акадэміка Л.А.Арцымовіча, лаўрэата Ленінскай прэміі, Героя Сацыялістычнай працы, на працягу шэрагу гадоў акадэміка-сакратара Аддзялення агульнай фізікі і астраноміі АН СССР, стваральніка і кіраўніка першых навукова-тэхнічных праграм па кіруемаму тэрма-ядзернаму сінтэзу. Можна назваць таксама М.А.Русаківіча, дырэктара Лабараторыі ядзерных праблем — старэйшай лабараторыі Аб'яднанага інстытута ядзерных даследаванняў (Дубна) і Я.Ц.Янушкоўскага, капітана другога рангу, лаўрэата Дзяржаўнай прэміі СССР.

Фронт навуковых даследаванняў па фізіцы ў Рэспубліцы Беларусь незвычайна шырокі і разнастайны. Ён уключае акадэмічную навуку, навуку вышэйшых навучальных устаноў і менш вядомую нам — галіновую. Зразумела, што даць нават кароткую характарыстыку ўсіх тых навуковых напрамкаў, якія прадстаўлены цяпер у нашай рэспубліцы, раскажаць аб важнейшых навуковых дасягненнях і выніках, атрыманых беларускімі фізікамі, немагчыма.

Таму, дзеля ілюстрацыі абмяжуемся пералікам, у першую чаргу, прыарытэтных напрамкаў фундаментальных даследаванняў Рэспублікі Беларусь у галіне фізікі, якія нядаўна па прапанове Акадэміі навук Беларусі былі вызначаны ўрадам нашай краіны на бліжэйшую будучыню: 1. Оптыка і спектраскапія. Даследаванне будовы і ўласцівасцей рэчыва пры дапамозе спектральнага і люмінесцэнтнага аналізу. 2. Лазерная фізіка. Праблемы генерацыі і выкарыстання лазернага выпраменьвання. 3. Фізіка элементарных часціц і атамных ядраў. Тэорыя фундаментальных узаемадзеянняў. 4. Фізіка плазмы і плазменных тэхналогій. 5. Опта- і мікраэлектроніка і апрацоўка інфармацыі. 6. Фізіка цвёрдага цела. Асновы стварэння новых матэрыялаў з асаблівымі электрычнымі, магнітнымі, аптычнымі і фізіка-механічнымі ўласцівасцямі. 7. Радыёфізіка. Генерацыя радыёхваляў, іх распаўсюджванне, прыём і апрацоўка. Па кожнаму з гэтых напрамкаў працавалі канкрэтныя рэспубліканскія комплексныя праграмы фундаментальных даследаванняў (1996–2000 гг.), навуковымі каардынатарамі, старшынямі адпаведных навуковых саветаў якіх прызначаны адпаведна М.А.Барысевич, П.А.Апанасевич, А.А.Богуш, В.С.Буракоў, В.А.Піліпovich (цяперашнія і ранейшыя супрацоўнікі ІФ АНБ), а таксама члены-карэспандэнты АНБ М.М.Аляхновіч і П.Д.Кухарчык — усе выпускнікі БДУ.

Са сказанага відаць, што на працягу ўсяго трэцяга, вырашальнага, этапу ў развіцці фізічнай навукі ў нашай рэспубліцы асаблівую ролю адыграў Інстытут фізікі АН БССР. Гэтая навукова-даследчая ўстанова, 80% навуковых супрацоўнікаў якой — выпускнікі БДУ, заслугуе, на наш погляд, дадатковага разгляду.

**Інстытут фізікі імя Б.І.Сцяпанава Акадэміі навук Беларусі.** У складзе створанага ў 1955 г. Інстытута фізікі і матэматыкі АН БССР першапачаткова былі тры лабараторыі

чыста фізічнага профілю: агульнай і малекулярнай спектраскапіі (загадчык Б.І.Сцяпанаў), люмінесцэнцыі і фотахіміі (А.Н.Сеўчанка) і тэарэтычнай фізікі (Ф.І.Фёдарэў). Некалькі пазней (1956, 1957 г.) былі створаны лабараторыі фізікі інфрачырвоных выпраменьванняў (М.А.Барысевіч) і высокатэмпературнай аптыкі (М.А.Ельшэвіч).

Цяпер жа, на пачатак 1996 г., у складзе Інстытута фізікі імя Б.І.Сцяпанава АНБ дзейнічае 20 лабараторый, а ў Інстытуце малекулярнай і атамнай фізікі АНБ — 11. Яны аб'яднаны ў навуковыя саветы па адпаведных праблемах: "Лазерная фізіка" (старшыня савета П.А.Апанасевіч), "Фізічная аптыка" (А.П.Іваноў), "Ядзерная фізіка" (А.А.Богуш), "Спектраскапія і люмінесцэнцыя" (К.М.Салаўёў) і "Фізіка плазмы" (Л.Я.Мінько).

Сярод загадчыкаў лабараторый ІФ АНБ і ІМАФ АНБ (гэтыя два інстытуты мы разглядаем тут як адзінае цэлае) падаўляючую большасць (27 з 31) складаюць былыя выпускнікі БДУ: В.А.Арловіч, Л.М.Арлоў, М.А.Барысевіч, А.А.Богуш, В.С.Буракоў, А.П.Вайтовіч, В.М.Грузінскі, В.П.Грыбкоўскі, Б.М.Джагараў, Р.Г.Жбанкоў, М.С.Казак, С.Я.Клін, Г.П.Леднева, Л.Я.Мінько, А.С.Рубанаў, А.М.Рубінаў, Э.А.Рудак, К.М.Салаўёў, А.М.Самсон, В.М.Снапко, Л.М.Тамільчык, В.А.Таўкачоў, Ю.В.Хадыка, У.В. Чуракоў, У.Д.Шымановіч, А.А.Янкоўскі і кіраўнік самастойнай навукова-даследчай групы В.І.Архіпенка.

Супрацоўнікамі і былымі аспірантамі Інстытута фізікі АНБ за 40 гадоў яго існавання абаронена каля 100 доктарскіх дысэртацый (тут была падрыхтавана прыкладна палавіна ўсіх дактароў навук — фізікаў, якія працавалі або працуюць на Беларусі) і больш за 500 кандыдацкіх дысэртацый.

З ліку дактароў навук, выпускнікоў БДУ, цяперашніх і былых супрацоўнікаў Інстытута фізікі АНБ, былі абраны: 1 акадэмік АН СССР (РАН) (М.А.Барысевіч), 12 акадэмікаў (П.А.Апанасевіч, М.А.Барысевіч, Б.Б.Бойка, Б.В.Бокуць, В.С.Буракоў, А.М.Ганчарэнка, Г.П.Гурыновіч, Л.І.Кісялеўскі, У.А.Піліповіч, А.М.Рубінаў, А.Н.Сеўчанка, Ф.І.Фёдарэў) і 9 членаў-карэспандэнтаў (А.А.Богуш, А.П.Вайтовіч, В.П.Грыбкоўскі, А.С.Рубанаў, К.М.Салаўёў, В.А.Таўкачоў, Л.М.Тамільчык, В.Д.Ткачоў, С.С.Шушкевіч) Акадэміі навук Беларусі.

Пэралькі важнейшых вынікаў навуковых даследаванняў, якія былі атрыманы супрацоўнікамі Інстытута фізікі АНБ за 40 гадоў яго дзейнасці, быў змешчаны ў апублікаваным нядаўна юбілейным дакладзе дырэктара ІФ АНБ П.А.Апанасевіча [5] і таму тут не прыводзіцца. Дастаткова сказаць, што былі прысуджаны 2 Ленінскія прэміі (М.А.Ельшэвіч, М.А.Барысевіч, В.У.Грузінскі, В.А.Таўкачоў), 7 Дзяржаўных прэмій СССР (Б.І.Сцяпанаў, А.М.Рубінаў, В.А.Мастоўнікаў, М.А.Барысевіч, В.Р.Верашчагін, Ф.І.Фёдарэў, Б.І.Сцяпанаў, П.А.Апанасевіч, А.С.Рубанаў, Я.В.Івакін, К.М.Салаўёў, Б.В.Бокуць, Л.І.Кісялеўскі, Б.І.Бяляеў), 10 Дзяржаўных прэмій Беларусі (Ф.І.Фёдарэў, Б.І.Сцяпанаў, В.П.Грыбкоўскі, А.С.Рубанаў, А.М.Самсон, В.С.Буракоў, Л.І.Кісялеўскі, Л.Я.Мінько, В.У.Снапко, У.Д.Шымановіч, П.А.Апанасевіч, Г.П.Гурыновіч, К.М.Салаўёў, А.М.Ганчарэнка, В.А.Карпенка, У.П.Радзько, А.А.Богуш, Л.Р.Мароз, Б.Б.Бойка, М.С.Пятроў, М.А.Ельшэвіч, Л.Я.Мінько, В.К.Ганчароў, Г.С.Раманаў, Ю.А.Станкевіч, А.М.Чумакоў, Л.Р.Пікулік, А.М.Рубінаў, Б.А.Бушук), 1 прэмія Савета Міністраў СССР (С.А.Бацішча) і шэраг разнастайных прэмій маладым вучоным.

На рахунку Інстытута фізікі АНБ тры зарэгістраваныя навуковыя адкрыцці (Ф.І.Фёдарэў, дыплом № 233 ад 30.04.1986 г.; М.А.Барысевіч, дыплом № 186 ад 8.12.1978 г.; В.А.Лапіна, дыплом № 397 ад 28.03.1991 г.).

Да ліку лепшых неабходна таксама аднесці навуковыя дасягненні дактароў навук, выпускнікоў БДУ: К.С.Адзёрыхі, С.Л.Ашчэпкава, А.П.Блахіна, С.В.Гапоненкі, Я.У.Доктарава, Г.А.Залескай, Р.Г.Запарожчанкі, Э.І.Зянькевіча, В.П.Кабашнікава, В.К.Кананенкі, Л.А.Катомцавай, Ф.У.Карпушкі, В.І.Куўшынава, У.І.Лебедзева, Н.А.Лойкі, А.Р.Маханька, А.П.Прышывалкі, К.Р.Прэджкі, М.М.Рагаўцова, У.С.Рубанава, В.А.Савы, Я.І.Сагана, В.А.Северыкава, Г.М.Сінякова, Б.А.Соцкара, Г.Б.Таўстарожава, А.В.Філіпава, А.Р.Хаткевіча, А.П.Шкадарэвіча і інш.

Такім чынам, сёння правамерна гаварыць аб тым, і гэта галоўнае, што ў Рэспубліцы Беларусь за кароткі гістарычны тэрмін былі створаны і дзейнічаюць цяпер буйныя навуковыя школы ў галіне аптыкі, спектраскапіі, лазернай фізікі, фізікі плазмы, тэарэтычнай фізікі і фізікі элементарных часціц, у іншых напрамках сучаснай фізічнай навукі. Стваральнікамі гэтых школ з'яўляюцца, у першую чаргу, знакамітыя беларускія вучоныя-фізікі: Мікалай Аляксандравіч Барысевіч (цяперашні Ганаровы прэзідэнт АНБ), Антон Нічыпаравіч Сеўчанка, Барыс Іванавіч Сцяпанаў, Фёдар Іванавіч Фёдарэў — Героі Сацыялістычнай Працы, Міхаіл Аляксандравіч Ельшэвіч.

У сваім вельмі кароткім і схематычным нарысе-даведцы па гісторыі развіцця фізічнай навукі і адкачыў на Беларусі аўтар імкнуўся аддаць, наколькі гэта было магчыма, належнае тварцам гэтай гісторыі і, перш за ўсё, тым яе першапраходцам, каго, на вялікі жаль, ужо няма з намі.

Гэтую сціпую працу аўтар прысвячае светлай памяці свайго незабыўнага настаўніка Фёдара Іванавіча Фёдарова. 19 чэрвеня 1996 г. яму споўнілася 65 гадоў.

Аўтар выказвае шчырую падзяку ўсім тым, хто аказаў істотную дапамогу ў працэсе працы над гэтым артыкулам і пры падрыхтоўцы яго да друку. Ён таксама просіць праба-чэння ў не названых у тэксце фізікаў Беларусі.

Робота падтрымана Міжнароднай сорасаўскай праграмай адукацыі ў галіне даклад-ных навук.

## ВУЧОНЫЯ-ФІЗІКІ — ВЫПУСКНІКІ БДУ

*Дактары навук і прафесары*

Адзерыха Казімір Серафімавіч (1938–1989)  
Арцымовіч Леў Андрэевіч (1909–1973)  
Бокуць Барыс Васільевіч (1926–1993)  
Валадзько Леанід Вікенцьевіч (1928–1978)  
Гурыновіч Георгій Паўлавіч (1933–1994)  
Кісялеўскі Леанід Іванавіч (1927–1994)  
Некрашэвіч Ілья Рыгоравіч (1905–1993)

Рубанаў Уладзімір Сяргеевіч (1938–1980)  
Саржэўскі Аляксандр Іванавіч (1930–1983)  
Сеучанка Антон Нічыпаравіч (1903–1978)  
Соцкі Барыс Аляксандравіч (1930–1995)  
Ткачоў Валянцін Дзмітрыевіч (1939–1985)  
Фёдарэў Фёдар Іванавіч (1911–1994)  
Фішар Іосіф Залманаўіч (1921–1995)

Аляхновіч М.М.  
Анішчык В.М.  
Ануфрык С.С.  
Апанасевіч П.А.  
Апанасовіч У.У.  
Арловіч В.А.  
Арлоў Л.М.  
Архіпенка В.І.  
Ашчэпкаў С.А.  
Барздоў Р.М.  
Барысевіч М.А.  
Барысэўскі У.Р.  
Богуш А.А.  
Бойка Б.Б.  
Блахін А.П.  
Буракоў В.С.  
Бушук Б.А.  
Бяляеў Б.І.  
Вайтовіч А.П.  
Вайцянкоў А.І.  
Варапай Я.С.  
Віленчыч Б.Б.  
Гайсёнак В.А.  
Ганчароў В.К.  
Ганчарэнка А.М.  
Гапоненка С.В.  
Гарбацэвіч А.К.  
Грузінскі В.У.  
Грыбкоўскі В.П.  
Гулакоў І.Р.

Гулліс І.М.  
Гусак М.А.  
Данількевіч М.І.  
Джагараў Б.М.  
Дзямчук М.І.  
Доктараў Я.У.  
Жбанкоў Р.Г.  
Жукоўскі Л.У.  
Зайцаў К.М.  
Залеская Г.А.  
Запарожчанка Р.Г.  
Заўтрак С.Ц.  
Зянькевіч Э.І.  
Кабашнікаў В.П.  
Казак М.С.  
Камароў Л.І.  
Камароў Ф.Ф.  
Камяк А.І.  
Кананенка В.К.  
Карпенка В.А.  
Карпушка Ф.І.  
Катомцава Л.А.  
Ківач Л.М.  
Кілін С.І.  
Клішчанка А.П.  
Круглік Г.С.  
Круглоў С.І.  
Ксенафонтаў М.А.  
Куўшынаў В.І.  
Куцак А.А.

Кухарчык П.Д.  
Ламака В.М.  
Лебедзеў У.І.  
Лойка Н.А.  
Маханёк А.Р.  
Мінкевіч А.В.  
Мінько А.А.  
Мінько Л.Я.  
Мулярчык С.Р.  
Новікаў А.П.  
Патрын А.А.  
Пікулік Л.Р.  
Піліповіч У.А.  
Плецохоў У.А.  
Прэдка К.Р.  
Прышывалка А.П.  
Пятроў М.С.  
Рабушка А.П.  
Равінскі В.В.  
Рагаўцоў М.М.  
Рубанаў А.С.  
Рубінаў А.М.  
Рудак Э.А.  
Рудніцкі А.С.  
Русаківіч М.А.  
Сава В.А.  
Сагун Я.І.  
Саечнікаў У.А.  
Салаўёў К.М.  
Самсон А.М.

Северыкаў В.А.  
Сінякоў Г.М.  
Снапко В.М.  
Стражаў В.І.  
Тамільчык Л.М.  
Таўкачоў В.А.  
Таўстарожаў Г.Б.  
Томін У.І.  
Умрэйка Д.С.  
Феранчук І.Д.  
Філіпаў В.У.  
Фядотаў А.К.  
Хапалюк А.П.  
Хадыка Ю.В.  
Хаткевіч А.Р.  
Цвірко М.П.  
Цітоў А.Д.  
Ціхаміраў В.В.  
Ціханенка А.М.  
Чаранкевіч С.М.  
Чуракоў У.В.  
Шапялёвіч В.Р.  
Шкадарэвіч А.П.  
Шумейка М.М.  
Шушкевіч С.С.  
Шымановіч У.Д.  
Шышкіна Т.В.  
Янкоўскі А.А.  
Янушкоўскі Я.Ц.

*Кандыдаты навук, дацэнты і асістэнты*

Балабаеў Д.А.  
Бацішча С.А.  
Данэйка І.К.  
Зяцькоў І.П.

Карых Я.Д.  
Лабуда А.А.  
Леднева Г.П.  
Мароз Л.Р.

Раманаў Г.С.  
Станкевіч Ю.А.  
Стэльмах У.Ф.  
Тамільчык М.П.

Шапіра І.П.  
Шпілеўскі Э.М.  
Чумакоў А.М.

1. Храмов Ю.А. Физики: Биограф. справ. М., 1983.
2. Богуш А.А. Фізика і фізікі Беларусі. Справы і людзі Інстытута фізікі імя Б.І.Сцяпанава ІФ АНБ. Мн., 1995. (Прэпрынт № 703).
3. Справаздача аб дзейнасці Акадэміі навук Беларусі ў 1995 годзе. Мн., 1996.
4. Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт імя У.І.Леніна. Мн., 1991.
5. Апанасевіч П.А. Інстытуту фізікі імя Б.І.Сцяпанава 40 лет / ІФ АНБ. Мн., 1995. (Прэпрынт № 702).

УДК 51(09)

А.А. ГУСАК, Р.І. ТЫШКЕВИЧ, Н.І. ЮРЧУК

## ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В БЕЛОРУССКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В Беларуси научные исследования и подготовка научных и педагогических кадров в области математики начинались в Белорусском государственном университете (открыт

30 октября 1921 г.). Осенью 1922 г. стал функционировать его педагогический факультет, физико-математическое отделение которого было призвано готовить преподавателей физики, математики, астрономии для школ и техникумов, а также научных работников. Первыми преподавателями математики на этом отделении стали выпускник Московского университета И.С.Пятосин (1882–1938) и выпускник Киевского университета В.К.Дыдырко (1877–1938), бывшие учителя гимназии, впоследствии профессора БГУ. Вначале основные усилия преподавателей были направлены на организацию учебного процесса, значительное внимание при этом уделялось и научной работе. В.К.Дыдырко является автором первой монографии по математике ("Циркулярные кривые 3-го порядка", 1928), написанной ученым БГУ.

В 1928 г. на работу в БГУ был приглашен Я.П.Громер (1879–1933), доктор философии (Геттингенский университет, 1913 г.). Отзыв о его трудах дал А.Эйнштейн, под руководством которого Громер работал в Берлине с 1915 г.

С 1929 г. в БГУ работал Ц.Л.Бурстин (1888–1938), выпускник Венского университета (доктор философии, 1912 г.). В 1931 г. Ц.Л.Бурстин был избран академиком, назначен директором физико-технического института АН БССР (в 1933 г. институт переименован в физико-математический). Научные интересы Бурстина были весьма разнообразны: дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения, алгебра, теория функций, теория множеств, методика преподавания математики. За короткий период с 1930 по 1937 г. он опубликовал около 50 работ.

В 1932 г. на базе физико-математического отделения педагогического факультета был создан физико-математический факультет БГУ, подготовивший за предвоенный период свыше 600 специалистов по математике.

В связи с увеличением числа студентов и в целях улучшения учебно-методической и научно-исследовательской работы в 1958 г. физико-математический факультет был разделен на два: физический и математический. В 1970 г. на базе трех кафедр математического факультета (вычислительной математики, дифференциальных уравнений, прикладной математики) создается факультет прикладной математики, на который были переведены студенты I–IV курсов, специализировавшиеся по указанным кафедрам.

В 1975 г., в связи с открытием специальности "механика", математический факультет был переименован в механико-математический.

Определяющую роль в становлении факультетов математического и прикладной математики сыграли их первые деканы – Д.А.Сугруненко (1915–1990), доктор физико-математических наук, профессор, академик АН БССР, и Е.А.Иванов (1924–1985), доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН БССР.

Развитие и успехи факультетов неразрывно связаны с именами академиков Е.А.Барбашина (1918–1969), Ф.Д.Гахова (1906–1980), Н.П.Еругина (1907–1990), В.И.Крылова (1902–1994), В.П.Платонова, В.Г.Спринджук (1936–1987). Платонов и Спринджук – воспитанники математического факультета БГУ. Среди выпускников математического факультета – академики И.В.Гайшун, директор Института математики АНБ, Н.А.Изобов, члены-корреспонденты АНБ Э.И.Грудо, А.Е.Залесский, Л.А.Янович.

За прошедшие 75 лет математики Белгосуниверситета выполнили ряд значительных научных работ, соответствующих мировому уровню математики. Назовем основные направления научной деятельности математиков БГУ и руководителей этих направлений, ограничиваясь в такой выборке, как правило, докторами наук. При этом главное внимание будем уделять более поздним исследованиям. Работы предыдущих лет отражены в книге "Белорусский государственный университет" (Мн., 1971), в статье коллектива авторов "О развитии математики в Белорусском государственном университете" и в других публикациях\*.

### **1. Алгебро-геометрические и дифференциально-геометрические свойства пространств и многообразий (профессора В.И.Янчевский и А.С.Феденко)**

Научная школа современной геометрии в БГУ создана в конце 60-х гг. профессором В.И.Ведерниковым (1919–1991). Характерной особенностью проводимых исследований стало применение новейших алгебро-тополого-геометрических методов и продвижение сразу в нескольких научных направлениях (однородные пространства групп Ли, геометрия расслоенных многообразий и структур на них, полиномиальные морфизмы в геометрии, групповые свойства дифференциальных уравнений на многообразиях, теория глобальных пар). Наибольшую известность получили результаты, относящиеся к теории обобщенных симметрических пространств, основанной и разработанной В.И.Ведерниковым и его учениками и развиваемой далее А.С.Феденко совместно с учениками. Проводятся также исследования по общей и алгебраической топологии и приложениях геометрии в теоретической физике. С приходом нового заведующего кафедрой геометрии

\* Вестн. Белорус. ун-та. Сер 1. 1971. №3; 1978. №3.

В.И.Янчевского стало активно развиваться возглавляемое им направление на стыке алгебраической и арифметической геометрий, использующее современный аппарат К-теории, алгебраической и диофантовой геометрий.

## **2. Аналитическая, качественная и асимптотическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений (академик Н.А.Изобов, профессора В.И.Громан и Н.А.Лукашевич, доцент В.В.Амелькин)**

Научная школа по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложениям была основана академиком Н.П.Еругиным. Основными научными направлениями являются аналитическая, качественная и асимптотическая теории дифференциальных уравнений.

В аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений получены фундаментальные результаты, относящиеся к теории уравнений Пенлеве, имеющих широкие приложения в теоретической и математической физике. Здесь осуществлен единый подход к преобразованиям, позволяющим строить явные решения, а также фундаментальные области в пространствах параметров. Найдены условия существования и эффективные методы построения рациональных алгебраических решений и решений, выражающихся через классические трансцендентные функции. Найдены условия приводимости уравнений Пенлеве, а также построены "высшие" аналоги этих уравнений. Изучены автономные и неавтономные гамильтоновы системы на плоскости с различным характером нелинейности.

В качественной теории дифференциальных уравнений получены существенные результаты и по теории предельных циклов. Здесь предложен метод, основанный на использовании свойств дивергенции некоторого векторного поля и свойства регулярности предельных циклов, позволивший получить ряд новых принципиальных для качественной теории двумерных динамических систем.

Проведено исследование уравнений Пфаффа и многомерных дифференциальных уравнений в пространствах Банаха. Введены понятия слабого и сильного показателей решений многомерных линейных дифференциальных уравнений, изучены их свойства, а также дано их применение к исследованию решений на устойчивость. Изучались и такие вопросы, как нормальные базисы, правильные многомерные линейные уравнения, продолжимость решений.

Исследования по асимптотической теории дифференциальных уравнений в Белорусском университете были начаты и затем велись под руководством профессора Ю.С.Богданова на организованных им кафедрах общей математики естественных факультетов и высшей математики. Ю.С.Богданову принадлежат основополагающие понятия обобщенного преобразования Ляпунова-Богданова, асимптотических инвариантов, обобщенных  $vd$ -чисел нелинейных систем и др. Кроме того, им, в частности, построена абстрактная теория норм Ляпунова-Богданова и разработан метод  $vd$ -чисел исследования устойчивости существенно нелинейных систем, а также доказана приводимость всякой линейной системы к системе с двузначными коэффициентами. Н.А.Изобовым были начаты исследования по теории характеристических Ляпунова и нижних Перрона показателей и ее приложениям к задаче Ляпунова об устойчивости по первому приближению, продолженные затем в Институте математики АНБ. Им же совместно с Р.А.Прохоровой и частично с Р.Конти исследовано строение множеств Конти-Коппеля линейных систем и их предельных множеств, обычной и интегральной внутренности этих множеств. В настоящее время эти исследования, а также исследования асимптотически эквивалентных дифференциальных систем и систем Лаппо-Данилевского, устойчивости стохастических систем и включений, дескрипторных и дихотомических систем успешно продолжаются на кафедрах высшей математики и дифференциальных уравнений.

## **3. Вычислительная математика (профессора В.В.Бобков и П.И.Монастырный)**

Становление вычислительной математики в БГУ (и в республике в целом) связано с именем организатора кафедры (1957 г.) В.И.Крылова. Опубликованная им совместно с В.В.Бобковым и П.И.Монастырным в 70-х гг. серия книг по вычислительным методам удостоена Государственной премии БССР.

В настоящее время исследования ведутся на двух кафедрах: вычислительной математики (заведующий кафедрой В.В.Бобков) и численных методов и программирования (заведующий кафедрой П.И.Монастырный).

Основное научное направление, развиваемое В.В.Бобковым и его учениками, связано с проблемой численного решения начальных задач для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработанные ими многочисленные вычислительные алгоритмы, расширяющие возможности традиционных методов, основанных на идее разложения по малому параметру, привели к созданию нового, не имеющего аналогов, подхода к построению методов численного моделирования динамических систем с быстрыми переходными процессами. В отличие от классического разностного

подхода основная идея предлагаемого способа конструирования вычислительных алгоритмов не привязана к концепции малого шага сетки и допускает избирательное регулирование уровня приближения разномасштабных составляющих решения.

П. И. Монастырный с учениками главное внимание уделяют проблеме численного решения граничных задач для дифференциальных и сеточных уравнений. В основу разработанных ими вычислительных методов положены идеи инвариантного погружения и редукции к задачам с начальными условиями. Эти идеи выражают современную концепцию в вычислительной математике, состоящую в замене процесса решения сложных задач решением нескольких конструктивно более простых задач, для которых имеются хорошо развитая теория и достаточно совершенное математическое обеспечение. В проблеме оптимизации вычислительных методов и вычислительного эксперимента для дифференциальных и сеточных граничных задач физики, электроники, динамики жидкостей и теории упругости построены, исследованы и оптимизированы по свойствам устойчивости, универсальности и точности новые вычислительные алгоритмы. Развита теория компьютерных алгоритмов для численного решения специальных и типичных сеточных уравнений, а также для численного решения систем нелинейных уравнений, дифференциальных и сингулярных интегральных уравнений.

#### **4. Исследования по теории групп и близких алгебраических систем (профессора О.В.Мельников и В.С.Конюх)**

Начало систематических исследований по алгебре в БГУ связано с именем первого заведующего кафедрой высшей алгебры Д.А.Супруненко, создавшим научную школу по теории линейных групп. Традиционное для школы Супруненко направление исследований продолжало развиваться как на этой кафедре, так и на ФПМИ. В.С.Конюх продолжил изучение разрешимых и локально нильпотентных групп, начатое Д.А.Супруненко еще в 1946 г. В частности, дана полная классификация максимальных локально нильпотентных линейных групп над произвольным полем, что завершает построение теории Супруненко. Описаны  $p$ -подгруппы Силова проективной линейной группы. Полностью исследована давно сформулированная гипотеза о конечности числа классов сопряженных максимальных разрешимых подгрупп полной линейной группы над произвольным полем.

В период руководства В.П.Платоновым кафедрой высшей алгебры ее научная тематика расширилась, охватив теории алгебраических и топологических групп. В теории топологических групп изучались общие проблемы их строения, а также свойства некоторых классов этих групп. В частности, была построена теория локально проективно нильпотентных групп. Развернутые исследования по алгебраическим группам касались как их структурной, так и арифметической теории. К числу важнейших полученных результатов относится доказательство гипотезы Кнезера–Титса для локальных полей и основанное на этом решение проблемы сильной аппроксимации для всех типов простых алгебраических групп над глобальными полями. Исследования по одному из аспектов арифметической теории, а именно: поиски явного описания максимальных арифметических подгрупп в алгебраических группах, велись на кафедре алгебры до самого последнего времени.

Научные исследования, проводимые на кафедре в настоящее время под руководством заведующего О.В.Мельникова, относятся к теории проконечных групп, применениям этой теории к изучению групп Галуа полей, арифметической теории линейных алгебраических групп, теории центральных простых алгебр и их обобщений.

Изучена структура проконечных групп, действующих на деревьях, получена серия важных результатов о подгруппах свободных конструкций проконечных групп и их когомологий. Описано строение абсолютных групп Галуа многомерных локальных полей.

#### **5. История математики и методика преподавания математики (профессора А.А.Гусак и Н.В.Метельский, доктор пед. наук В.Г.Скатецкий)**

А.А.Гусак является автором монографии "Теория приближенных функций. Исторический очерк" (Мн., 1972) и ряда учебных пособий для студентов, неоднократно переиздававшихся. Участвовал в разработке научных программ, утвержденных Президиумом АНБ. Результаты исследований по одной из этих программ опубликованы в книге коллектива авторов "Очерки истории науки и культуры Беларуси" (Мн., 1996). Н.В.Метельский опубликовал несколько книг по методике преподавания математики и ее истории, учебное пособие "Дидактика математики" (2-е изд. Мн., 1982). В.Г.Скатецким разработаны научные основы профессиональной направленности преподавания математики студентам нематематических специальностей.

#### **6. Комплексный анализ и его приложения (профессора Э.И.Зверович, В.Н.Русак, М.А.Шешко, доктор физ.-мат. наук А.А.Килбас)**

Основное направление исследований в этой области связано с научной школой "Краевые задачи и особые интегральные уравнения", основанной в 60-е гг. Ф.Д.Гаховым. В рамках этого направления разработаны аналитические методы решения крае-

вых задач аналитических функций, особых интегральных уравнений с ядром Коши, интегральных уравнений I рода со слабыми особенностями и специальными функциями в ядрах. Исследованы асимптотические и композиционные свойства операторов дробного интегрирования с приложениями к решению интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка и интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах. Предложены сверточные методы для вычисления интегралов от функций гипергеометрического типа и интегральных преобразований по индексу. По результатам этих исследований опубликовано 8 монографий.

Направление, возглавляемое В.Н.Русаком, связано с рациональными аппроксимациями и их приложениями. В.Н.Русак является автором монографии "Рациональные функции как аппарат приближения" (Мн., 1979). Им получены оценки производных рациональных функций в комплексной области, исследованы некоторые вопросы теории приближения рациональными функциями с фиксированными полюсами, разработаны прямые методы рациональной аппроксимации со свободными полюсами.

Профессор Шешко М.А., в частности, построил формулы для многомерного интеграла типа Коши, квадратурные и кубатурные формулы для интеграла типа Коши.

Функциональные методы в рациональной аппроксимации аналитических функций, разработанные проф. В.А.Прохоровым, см. в п 16

#### **7. Корректные и некорректные граничные задачи для уравнений с частными производными, дифференциально-операторных и псевдодифференциальных уравнений и уравнений математической физики (профессора Н.И.Юрчук, В.И.Корзюк, В.Т.Ерофеев)**

Научная школа "Уравнения с частными производными" в БГУ основана Н.И.Бришем (1924–1969). Основное направление исследований – разработка и использование априорных энергетических методов изучения корректных и некорректных граничных задач для уравнений с частными производными, дифференциально-операторных и псевдодифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Энергетическими методами удалось исследовать разрешимость, изучить свойства решений и получить приближенный метод решения ряда задач, которые были недоступными для существующих методов. Среди них смешанные задачи для нестационарных уравнений с частными производными в нецилиндрических областях, с интегральными условиями, для уравнений переменного порядка, а также граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений с переменными и разрывными операторными коэффициентами, имеющих в ряде случаев и переменные области определения. Здесь впервые получены априорные энергетические неравенства для сходимости метода квазиобращения для эволюционных и других уравнений.

Цикл работ В.И.Корзюка, Я.В.Радыно и Н.И.Юрчука "Операторные методы в дифференциальных уравнениях", опубликованных в 1968–1995 гг., выдвинут на соискание Государственной премии РБ 1996 г. в области науки и техники.

Создание в Беларуси научного направления по уравнениям математической физики и математическому моделированию тесно связано с именем Е.А.Иванова, основавшего школу по математической теории дифракции электромагнитных волн. Методология исследований связана с аналитическими и численно-аналитическими методами решения краевых задач дифракции электромагнитных волн на системах тел сложной геометрии.

В последнее время развивалась теория экранирования электромагнитных полей.

Разработана теория двусторонних граничных условий на тонких проводящих однородных, слоистых и неоднородных экранах, на анизотропных и ферромагнитных нелинейных оболочках и на оболочках с движущимися средами. Проведена классификация и систематизация теорем сложения для базисных электромагнитных полей, частично изложенная в монографии В.Т.Ерофеева "Теоремы сложения", (Мн., 1989).

Еще одно направление исследований – разработка конструктивных методов решения линейных интегральных уравнений третьего рода и парных интегральных уравнений теории осесимметричных задач нестационарной теплопроводности (В.П.Козлов, А.А.Кулешов).

#### **8. Линейные и нелинейные проблемы и их приложения в теории управления (профессор П.П.Забрейко)**

В исследованиях сотрудников кафедры математических методов теории управления, отличающихся широким спектром применяемых методов и глубиной полученных результатов, представлены основные направления современного линейного и нелинейного анализа: развита теория идеальных пространств вектор-функций; изучены линейные и нелинейные интегральные операторы в этих пространствах; разработана теория интерполяции нового класса линейных операторов. В частности, существенный вклад внесен в развитие приближенных методов решения операторных уравнений (метода Чебышева и его аналогов, метода Ньютона–Канторовича и его обобщений), в качественную теорию дифференциальных уравнений (в банаховых пространствах и шкалах банаховых пространств), в  $C^*$ -алгебраическую теорию динамических систем, в теорию линейных и нелинейных интегральных уравнений (на основе новых принципов непод-

вижных точек, новых теорем о неявных функциях, метода монотонных операторов, вариационных методов и т.д.). Развита теория многозначных операторов суперпозиции.

За последние годы на кафедре опубликовано четыре монографии, из них три – за рубежом (Лондон, Варшава).

#### **9. Математические методы в механике (профессора М.Д.Мартыненко и В.С.Федосенко)**

Наиболее существенные результаты в области механики деформируемого твердого тела были получены под руководством профессора И.А.Прусова (1919–1994) с помощью методов плоской теории упругости и метода общих представлений. Найдены явные формулы и выведены интегральные уравнения для решения краевых задач изотропной и анизотропной теории упругости, термоупругости для тел, ослабленных отверстиями и трещинами.

Активно разрабатывался метод многомерных интегральных уравнений для решения смешанных (контактных) задач пространственной теории упругости и их приложений в геомеханике блочно-слоистого породного массива.

Исследовалась возможность распространения нелинейных волн в твердых телах при различных физико-механических условиях их деформирования. Ставилась расширенная задача: к основным уравнениям механики деформируемого твердого тела добавлялось уравнение, определяющее нелинейный характер распространения волны. В качестве последнего выбиралось уравнение Кортвега де Фриза. Рассматривались также задачи об определении безизгибных геометрических форм тонких упругих оболочек, следующих гипотезам Кирхгофа–Лява и находящихся в заданных силовых и температурных полях. Проведен модельный анализ задачи для оболочек вращения, тонких оболочек и пологих оболочек переноса, в результате которого получены условия безизгибного деформирования данных оболочек.

Научная работа кафедры общей математики и информатики связана в основном с изучением волновых движений жидкости и тонких упругих пластин и оболочек; с математическим моделированием процессов, происходящих в интегральной оптоэлектронике, средствах связи в оптическом диапазоне, в вычислительных системах с распределенной обратной связью, теплопереносе: в упругих системах, контактирующих с жидкостью. Достигнуты успехи в изучении влияния таких факторов, как тип и форма областей приложения возмущающих сил, вязкости, стратификации, сил поверхностного натяжения жидкости, а также нелинейности на установившиеся и нестационарные волновые процессы в жидкости и упругих оболочках, взаимодействующих с жидкостью. Наряду с построением решений рассматриваемых задач доказан ряд теорем о их существовании и единственности, разработаны методы исследования особых случаев нелинейного волнового синхронизма (резонанса), показана его общность для всех диспергирующих сред, выведены нелинейные неразрешающие уравнения и получены их решения. позволяющие дать новую трактовку происходящих процессов.

Получение точных решений прикладных задач движения вязкой жидкости позволило выявить ряд новых свойств этих движений, в частности: найдены критические длины волн и периоды колебаний, при которых невозможно существование периодических движений; определена структура погранслоев у твердых границ водоемов в зависимости от характера изменения с глубиной коэффициента вертикального турбулентного обмена и величины коэффициента частичного скольжения.

#### **10. Методы, алгоритмы и программы математического обеспечения вычислительных машин и систем (профессор М.К.Буза)**

На кафедре математического обеспечения ЭВМ разработаны новые модели взаимодействующих процессов и методы высокоскоростных компьютерных вычислений. Спроектирована адекватная этим методам архитектура супер-ЭВМ, созданы автоматизированные средства интенсификации процесса обучения и диагностирования дискретных систем. Разработана и внедрена технология параллельных программ.

#### **11. Методы оптимизации стохастических систем и процессов (профессор Г.А.Медведев, доктор физ.-мат. наук А.Н.Дудин)**

На кафедре теории вероятностей и математической статистики получила развитие теория стохастических процессов, описывающих динамику состояния сетей массового обслуживания, позволяющая осуществить анализ эффективности сетей связи и сетей ЭВМ, а также теория исследования сумм случайных величин с ограниченной зависимостью. Получены существенные результаты в области исследования временных рядов, позволяющие осуществлять гарантированную оценку неизвестных параметров и производить гарантированные прогнозы, оптимальные в среднеквадратичном смысле. Рассмотрен и исследован класс квазитеплицевых многомерных цепей Маркова. Получены условия эргодичности, функциональное уравнение для векторной производящей функции распределения. Разработан и обоснован алгоритм решения этого уравнения, эксплуатирующий аналитичность производящей функции.

Полученные результаты позволяют с общих позиций исследовать случайные полумарковские процессы с переключаемыми режимами в ситуациях, когда частью переключений управляет лицо, принимающее решение, а другая часть переключений происходит под воздействием внешнего полумарковского процесса (случайной среды). В частности, аппарат двумерных квазитеплицевых цепей позволил существенно продвинуться в исследовании управляемых систем массового обслуживания с BMAP (batch markovian arrival process) – потоком популярных, как модели, перспективных коммуникационных сетей.

## **12. Проблемы дискретной математики и математической кибернетики (профессора В.А.Емеличев, М.М.Ковалев, Р.И.Тышкевич)**

М.М.Ковалевым и его учениками закончено построение качественной теории дискретной оптимизации на основе матроидного подхода. Разработаны оптимальные алгоритмы максимизации субмодулярных и выпуклых функций. Описаны решетки минимумов субмодулярных функций и на их основе построены новые схемы декомпозиции.

Исследовались проблемы сложности и устойчивости многокритериальной комбинаторной оптимизации. Доказана неразрешимость проблемы построения Парето-множества с помощью линейной свертки критериев, но в то же время построено посредством линейной свертки лексикографически оптимальное множество. Разработан метод вращения для порождения фасет многогранников (В.А.Емеличев).

Значительные результаты получены в области теории графов (Р.И.Тышкевич и ее ученики). Построена теория декомпозиции графов, позволяющая решать задачи классификационного и перечислительного характера для больших (экспоненциально) классов графов. На базе этой теории решена проблема описания строения униграфов, оставшаяся открытой 27 лет. Введена новая многозначная функция "Реберный гиперграф", в терминах которой для произвольных гиперграфов получены версии классических теорем о реберном графе простого графа (Крауз, Уитни, Берж). Отмеченные теоремы, хотя и являются следствиями указанных версий, в общей ситуации (для произвольных гиперграфов) не верны. Такой функциональный подход в теории графов применяется впервые. Он позволяет построить иерархии гиперграфов, отражающие сложность ряда алгоритмических задач на графах.

Книга "Лекции по теории графов" (авторы В.А.Емеличев, О.И.Мельников, В.И.Сарванов, Р.И.Тышкевич М., 1990; пер. на англ. Mannheim; Leipzig; Wien; Zurich, 1994) является единственной в рамках бывшего СССР, пригодной в качестве основного учебника по теории графов и отражающей современное состояние этой теории. Книга выдвинута на соискание Государственной премии Республики Беларусь 1996 г. в области науки и техники.

## **13. Разработка теоретических основ для построения интеллектуальных информационных и управляющих систем (профессора Н.А.Лепешинский, И.В.Совпель, доцент В.В.Краснопрошин)**

На кафедре математического обеспечения АСУ (зав.кафедрой В.В.Краснопрошин) создано новое научное направление, связанное с исследованием лингвистических баз знания и их приложений. Разработаны высокоэффективные системы формализации лингвистических знаний, автоматического чтения, анализа, перевода и корректировки текстов естественного языка (И.В.Совпель). Разработаны оригинальные методы оптимизации на графах и сетях, модели и методы обработки естественных языков, теория принятия решений по прецедентности. Теоретические исследования легли в основу построения семейства практических систем автоматического анализа, контроля и машинного перевода текстов естественного языка; геоинформационных систем; систем поддержки решений в медицине, экологии, экономике. Ряд этих систем успешно функционирует в различных отраслях народного хозяйства Беларуси и других стран СНГ.

## **14. Робастный (устойчивый) статистический анализ данных (профессор Ю.С.Харин)**

На кафедре математического моделирования и анализа данных разработаны основы теории робастного статистического распознавания образов при наличии искажений в подлежащих классификации экспериментальных данных. Создана система статистического программного обеспечения ПЭВМ, внедренная более чем в 30 организациях нашей страны и за рубежом. Опубликована монография, 2 учебных пособия.

## **15. Теория оптимального управления (профессор Р.Ф.Габасов)**

В 1966 г. Е.А.Барбашиным на математическом факультете была организована кафедра прикладной математики. С открытием в 1970 г. факультета прикладной математики она получила название кафедры методов оптимального управления. На кафедре в настоящее время работают 3 профессора (Р.Ф.Габасов, Л.Е.Забелло, А.И.Калинин). Научные исследования ведутся по следующим основным направлениям: 1) качественная и конструктивная теория математического программирования и оптимального

управления, 2) асимптотические методы оптимального управления, 3) исследования математических моделей экономики, 4) теория устойчивости. В частности, разработаны асимптотические методы и новый подход к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимизации динамических систем с последствием. Предложены новые методы исследования различных типов оптимальных особых управлений.

**16. Функционально-операторные методы и обобщенные функции (профессора Я.В.Радыно, А.Б.Антоневич, В.А.Прохоров)**

В работах Я.В.Радыно на основе введенного им понятия вектора экспоненциального типа построено функциональное исчисление для неограниченного оператора в банаховом пространстве. Это исчисление, являющееся естественным обобщением спектральной теоремы, позволило исследовать свойства решений задачи Коши для общих линейных дифференциальных, псевдо-дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений.

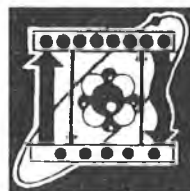
В связи с проблемой умножения распределений А.Б.Антоневичем и Я.В.Радыно предложен общий метод построения алгебр новых нелинейных обобщенных функций, названных мнемофункциями. В их работах и работах их учеников построена теория мнемофункций и даны ее применения к дифференциальным уравнениям, спектральной теории операторов и к интегральным преобразованиям. В связи с исследованиями Н.В.Лазакевичем стохастических дифференциальных уравнений этот метод был распространен на обобщенные стохастические процессы, что дало ощутимые результаты, позволив проанализировать связи и различия интегралов Ито и Стратановича.

А.Б.Антоневичем и А.В.Лебедевым построена  $C^*$ -теория функционально-дифференциальных операторов, которая позволяет с единой точки зрения рассматривать важные для теории и приложений операторы локального типа (например, дифференциальные) и операторы, учитывающие дальноедействие систем (например, интегральные и функциональные). В наиболее сложном для исследования некоммутативном случае авторами предложен аналог преобразования Фурье, позволяющий описать условия фредгольмовости рассматриваемых операторов и вычислить индекс. В 1995 г. за цикл работ " $C^*$ -теория функционально-дифференциальных операторов" А.Б.Антоневичу и А.В.Лебедеву была присуждена Премия им. А.Н.Севченко (см. еще п.8).

Работы В.А.Прохорова посвящены исследованию скорости рациональной аппроксимации аналитических функций. Получены новые прямые теоремы рациональной аппроксимации для различных классов таких функций, в том числе доказана гипотеза Гончара об оценке сверху нижнего предела скорости наилучшей рациональной аппроксимации.

В основе предложенных методов лежит новый подход к теории аппроксимации функций, основанный на спектральных свойствах оператора Ганкеля.

Авторы обзора благодарят руководителей научных направлений за помощь в подготовке данной статьи.



УДК 535.39

А.М. БЕЛЬСКИЙ

## СТРУКТУРА ПОЛЯ КОГЕРЕНТНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ВБЛИЗИ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

A new method for solving the boundary problem on reflection and refraction of coherent light beams at the plane interface is proposed. The method is based on rigorous solutions of Maxwell equations for any beam developed as series in derivatives of the function determining the beam field distribution in a cross-sectional plane. The distribution functions for reflected and refracted beams are expressed as a special-form series in derivatives of the incident-beam distribution function.

Во многих оптических устройствах важную роль играют преломляющие поверхности, формирующие структуру светового поля и задающие направление его распространения. Однако при теоретическом определении влияния таких поверхностей на структуру поля падающего излучения чаще всего приходится ограничиваться геометрикооптическим приближением — поле с одной стороны преломляющей поверхности представляется в виде суммы поля пучка, падающего на поверхность, и пучка, отраженного от поверхности. В свою очередь, поле отраженного пучка получается умножением компонент поля падающего пучка на френелевские коэффициенты отражения плоской волны, вычисленные для какого-либо среднего угла падения, обычно совпадающего с углом, образуемым осью пучка с нормалью к поверхности. Поле с другой стороны поверхности находится умножением поля падающего пучка на соответствующие френелевские коэффициенты пропускания.

При падении на преломляющую поверхность ограниченного в поперечном сечении слабобрасходящегося светового пучка геометрикооптический метод дает хорошие результаты для центральной части сечения пучка преломляющей поверхностью и заведомо неточен в области геометрикооптической границы и зоны тени. Этот метод не учитывает структуру поля падающего пучка (т.е. распределения амплитуды и фазы поля в поперечном сечении) и, кроме того, не дает возможности сделать это систематически.

В последнее время для исследования влияния отражающих и преломляющих поверхностей на структуру поля световых пучков широко используется метод углового спектра плоских волн [1–2]. И хотя формально метод дает точное решение задачи об отражении и преломлении светового пучка на плоской границе раздела двух сред, получающиеся при его применении интегральные выражения оказываются очень сложными и обычно оцениваются асимптотически для нахождения поля пучка вдали от поверхности. В то же время при расчете многих устройств интегральной оптики или систем оптической записи информации возникает необходимость в вычислении светового поля вблизи преломляющей поверхности, для чего метод углового спектра плоских волн не очень пригоден.

В настоящей работе предлагается метод решения задачи по определению поля произвольного светового пучка вблизи плоской границы раздела двух изотропных сред. Метод основан на разложении искомого поля в ряды специального вида по производным структурной функции и приводит к аналитическим выражениям для поля во всем пространстве, но особенно удобен для его определения вблизи поверхности.

Для аналитического представления поля монохроматического светового пучка воспользуемся точным решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (1)$$

имеющим вид

$$U(x, y, z) = \sum_{r,t=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^{2(r+t)} (2r)!(2t)!} \left. \frac{\partial^{2(r+t)} G}{\partial p^{2r} \partial q^{2t}} \right|_{p=0, q=0} \frac{\partial^{2(r+t)} f}{\partial x^{2r} \partial y^{2t}}, \quad (2)$$

где  $f(x, y)$  — произвольная функция,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,

$$G(p, q; z) = e^{ikmz}, \quad m = \begin{cases} (1 - p^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}, & p^2 + q^2 \leq 1, \\ i(p^2 + q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, & p^2 + q^2 > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Решения уравнения Гельмгольца (1) вида (2) и (3) впервые, вероятно, были получены еще Х. Бреммером [3] в несколько другом виде, а затем исследовались Г. Шерманом [4]; в практических приложениях они до сих пор почти не использовались. В [4] показано, что ряд (2) сходится равномерно и абсолютно для всех  $x, y, z$ ; получаемая функция  $U(x, y, z)$  непрерывна со всеми своими частными производными и удовлетворяет граничному условию

$$U(x, y, 0) = f(x, y), \quad (4)$$

если только функцию  $f$  можно аналитически продолжить на все пространство двух комплексных переменных  $z_1 = x + ix'$ ,  $z_2 = y + iy'$  как целую функцию, такую, что

$$|f(z_1, z_2)| \leq A \exp \left[ (k - \delta) (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}} \right],$$

где  $\delta > 0$ ,  $x, x', y, y'$  — действительные переменные,  $A$  — действительная постоянная. В частности, если  $f = \text{const}$ , решение дает обычную плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси  $z$ . Поскольку функция  $f(x, y)$  полностью определяет структуру поля волнового пучка, в дальнейшем мы будем ее для краткости называть **структурной функцией** пучка.

Выражение (2) дает решение уравнения (1) в виде ряда по четным производным структурной функции  $f(x, y)$  и удобно для нахождения поля вблизи плоскости  $z = 0$ . Вычислив несколько производных (см. (3)), из (2) получим в явном виде:

$$U = \left\{ f - \frac{ikz}{2(ik)^2} \Delta_{\perp} f + \frac{3}{4!(ik)^4} \left[ (ikz)^2 - (ikz) \right] \Delta_{\perp}^2 f - \dots \right\} e^{ikz}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Воспользуемся теперь представлением (2) для решения задачи об отражении и преломлении светового пучка. Пусть на плоскую поверхность раздела двух прозрачных изотропных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  падает электромагнитный пучок частоты  $\omega$ . Свяжем с поверхностью декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой перпендикулярна поверхности, а плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью раздела (рис. 1). Электромагнитное поле падающего пучка будем записывать в системе координат  $x, y, z$ , повернутой на угол  $\theta$  вокруг оси  $y$  относительно системы  $x, y, z$  (рис. 1). Для определенности положим, что электрическое поле падающего пучка перпендикулярно плоскости  $xz$ ; по аналогии с плосковолновым случаем будем называть пучок  $s$ -поляризованным, хотя в ограниченном световом пучке поле не может быть строго поперечным. Положим, что в плоскости  $z_i = 0$  распределение  $y$ -компоненты электрического поля пучка определяется структурной функцией  $f(x, y)$ . Воспользовавшись (5) и системой уравнений Максвелла, для поля падающего пучка в системе  $x, y, z_i$  получим при  $z < 0$

$$E_{y_i} = \left[ f - \frac{ik_1 z_i}{2(ik_1)^2} \Delta_{\perp}^{(i)} f + \dots \right] e^{ik_1 z_i}, \quad E_{x_i} = 0, \quad E_{z_i} = \left( -\frac{1}{ik_1} \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \right) e^{ik_1 z_i},$$

$$H_{x_i} = \frac{i}{k} \left[ ik_1 f + \frac{1}{ik_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2!(ik_1)} (1 + ik_1 z_i) \Delta_{\perp}^{(i)} f + \dots \right] e^{ik_1 z_i}, \quad (6)$$

$$H_{y_i} = \left( -\frac{1}{kk_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y} + \dots \right) e^{ik_1 z_i}, \quad H_{z_i} = \left( -\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots \right) e^{ik_1 z_i},$$

где

$$\Delta_{\perp}^{(i)} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 = kn_1.$$

В формулах (6) выписаны в явном виде слагаемые, содержащие производные структурной функции  $f$  до второго порядка включительно.

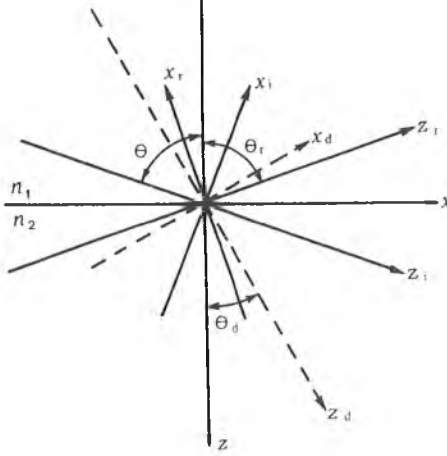


Рис.1 Координатные системы падающего, отраженного и преломленного пучков

лярной этой оси, а ось  $z_i$  совмещать с осью симметрии.

Поле отраженного (индекс "r") и преломленного (индекс "d") пучков также будем искать в виде (6); однако при этом необходимо учесть, что при s-поляризации падающего пучка в отраженном и преломленном пучках могут появиться и p-компоненты электрического поля (параллельные плоскости  $xz$ ). Системы координат, в которых мы будем записывать искомые поля отраженного и преломленного пучков, свяжем с системой координат падающего пучка геометрическими законами отражения и преломления (рис.1):  $\theta_r = \theta$ ,  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_d$ .

Поле отраженного пучка ищем в системе координат  $x_r y_r z_r$  в виде:

$$\begin{aligned} E_{x_r} &= \left[ F_{ps} - \frac{ik_1 z_r}{2!(ik_1)^2} \Delta_{\perp}^{(r)} F_{ps} + \dots \right] e^{ik_1 z_r}, \\ E_{y_r} &= \left[ F_{ss} - \frac{ik_1 z_r}{2!(ik_1)^2} \Delta_{\perp}^{(r)} F_{ss} + \dots \right] e^{ik_1 z_r}, \\ E_{z_r} &= \left( -\frac{1}{ik_1} \cdot \frac{\partial F_{ss}}{\partial y} - \frac{1}{ik_1} \cdot \frac{\partial F_{ps}}{\partial x_r} + \dots \right) e^{ik_1 z_r}, \\ H_{x_r} &= -n_1 \left[ F_{ss} + \frac{1}{(ik_1)^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{ss}}{\partial y^2} + \frac{1}{(ik_1)^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{ps}}{\partial x_r \partial y} - \frac{1}{2!(ik_1)^2} (1 + ik_1 z_r) \Delta_{\perp}^{(r)} F_{ss} \right] e^{ik_1 z_r}, \\ H_{y_r} &= n_1 \left[ F_{ps} + \frac{1}{(ik_1)^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{ps}}{\partial x_r^2} + \frac{1}{(ik_1)^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{ss}}{\partial x_r \partial y} - \frac{1}{2!(ik_1)^2} (1 + ik_1 z_r) \Delta_{\perp}^{(r)} F_{ps} + \dots \right] e^{ik_1 z_r}, \\ H_{z_r} &= -\frac{i}{k} \left( \frac{\partial F_{ss}}{\partial x_r} - \frac{\partial F_{ps}}{\partial y} + \dots \right) e^{ik_1 z_r}, \quad \Delta_{\perp}^{(r)} = \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где две неизвестные функции,  $F_{ss}$  и  $F_{ps}$ , определяют структуру поля отраженного пучка в плоскости  $z_r = 0$ , а следовательно, и во всем полупространстве  $z < 0$ ; в записи (7) поле отраженного пучка представляет собой сумму полей двух когерентных пучков — пучка  $s$ -поляризации (как у падающего) со структурной функцией  $F_{ss}$  и пучка  $p$ -поляризации со структурной функцией  $F_{ps}$ .

Поле преломленного пучка ищем в системе координат  $x_d, y_d, z_d$  в виде, аналогичном (7):

$$E_{x_d} = \left[ \psi_{ps} - \frac{ik_2 z_d}{2!(ik_2)^2} \Delta_{\perp}^{(d)} \psi_{ps} + \dots \right] e^{ik_2 z_d}; \quad (8)$$

остальные компоненты поля, как и  $E_{x_d}$ , получаются из (8) заменой  $F_{ss} \rightarrow \psi_{ss}$ ,  $F_{ps} \rightarrow \psi_{ps}$ ,  $k_1 \rightarrow k_2 = n_2 k$ ,  $r \rightarrow d$ .

Для нахождения четырех неизвестных структурных функций  $F$  и  $\psi$  воспользуемся граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей на плоскости  $z = 0$ . Граничные условия удобно записывать в системе координат  $x, y, z$ , где плоскость раздела задается уравнением  $z = 0$ , а тангенциальными будут  $x$ - и  $y$ -компоненты векторов поля. В результате получаем, что для того, чтобы поля (6)–(8) удовлетворяли требуемым граничным условиям, в плоскости  $z = 0$  должно быть

$$\begin{aligned} -E_{x_r} \cos \theta + (E_{z_i} - E_{z_r}) \sin \theta &= E_{x_d} \cos \theta_d + E_{z_d} \sin \theta_d, \quad E_{y_i} + E_{y_r} = E_{y_d}, \\ (H_{x_i} - H_{x_r}) \cos \theta + (H_{z_i} - H_{z_r}) \sin \theta &= H_{x_d} \cos \theta_d + H_{z_d} \sin \theta_d, \quad H_{y_i} + H_{y_r} = H_{y_d}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (6)–(8) в условия (9), получим систему четырех линейных неоднородных уравнений в частных производных относительно неизвестных структурных функций  $F$  и  $\psi$ . Довольно громоздкие вычисления показывают, что систему можно решить методом последовательных приближений, если искать неизвестные функции в виде рядов по производным заданной структурной функции  $f$  падающего пучка:

$$F_{js} = \sum_{l,i=0}^{\infty} R_{l,i}^{(s,j)} \frac{\partial^{(l+i)} f}{\partial x^l \partial y^i}, \quad \psi_{js} = \sum_{l,i=0}^{\infty} D_{l,i}^{(j,s)} \frac{\partial^{(l+i)} f}{\partial x^l \partial y^i}, \quad j = s, p. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения структурных функций отраженного пучка от координат не зависят; в структурных функциях преломленного пучка коэффициенты разложения представляют собой полиномы по продольной координате  $x$ .

Подставляя (10) в (9) и приравнивая коэффициенты при производных одинакового порядка, можно последовательно определить коэффициенты  $R$  и  $D$  разложений (10). Далее мы приведем результаты, полученные указанным методом, для пучка  $s$ -поляризации. В соответствии с (10) полагаем

$$F_{js} = F_{js}^{(0)} + F_{js}^{(1)} + F_{js}^{(2)} + \dots, \quad \psi_{js} = \psi_{js}^{(0)} + \psi_{js}^{(1)} + \psi_{js}^{(2)} + \dots; \quad j = s, p; \quad (11)$$

тогда

1) Нулевое приближение

$$F_{ss}^{(0)}(x_r, y) = R_s f(-x_r, y), \quad \psi_{ss}^{(0)}(x_d, y) = D_s f\left(x_d \frac{\cos \theta}{\cos \theta_d}, y\right), \quad F_{ps}^{(0)} = \psi_{ps}^{(0)} \equiv 0, \quad (12)$$

где

$$R_s = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_d}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_d}, \quad D_s = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_d} -$$

френелевские коэффициенты отражения и пропускания плоской волны  $s$ -поляризации, падающей под углом  $\theta$  на поверхность.

Соотношение (12) представляет собой геометрикооптическое приближение: поляризация пучка не меняется при отражении и преломлении; структура поля в поперечном сечении отраженного пучка такая же, как у падающего (знак "—" перед  $x_r$  в (12) обусловлен различием в направлении осей  $x_i$  и  $x_r$  (см. рисунок)). В структуре поля преломленного

пучка проявляется изменение поперечных размеров в плоскости падения в  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_d}$  раз.

## 2) Первое приближение

$$F_{zs}^{(1)} = \frac{1}{ik_1} \cdot \frac{dR_s}{d\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{x_i = -x_r}, \quad F_{ps}^{(1)} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{ik_1} (R_s + R_p) \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_i = -x_r},$$

$$\Psi_{zs}^{(1)} = \frac{1}{ik_1} \cdot \frac{dD_s}{d\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_{x_i = x_d \frac{\cos\theta}{\cos\theta_d}}, \quad \Psi_{ps}^{(1)} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{ik_2} (R_s + R_p) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_i = x_d \frac{\cos\theta}{\cos\theta_d}},$$

где

$$R_p = \frac{n_2 \cos\theta - n_1 \cos\theta_d}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta_d}, \quad D_p = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta_d} -$$

френелевские коэффициенты отражения и пропускания плоской волны  $p$ -поляризации.

Согласно (11), в первом приближении уже проявляется эффект изменения поляризации ограниченного светового пучка при отражении и преломлении. Появляющаяся ортогональная компонента определяется только скоростью изменения структурной функции падающего пучка в направлении, перпендикулярном плоскости падения. В частности, для двумерного пучка  $\left(\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0\right)$  такое изменение поляризации отсутствует.

## 3) Второе приближение

$$F_{zs}^{(2)} = -\frac{1}{2k_1^2} \left\{ \frac{d^2 R_s}{d\theta^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \operatorname{ctg}\theta \left[ \frac{dR_s}{d\theta} - 2(R_s + R_p) \operatorname{ctg}\theta \right] \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\},$$

$$F_{ps}^{(2)} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{k_1^2} \left[ (R_s + R_p) \operatorname{ctg}\theta \right] \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y},$$

$$\Psi_{ps}^{(2)} = \cos\theta \left[ \frac{\cos\theta_d}{k_1^2 \sin^2\theta} (R_s + R_p) - \frac{2k_1 R_s \sin\theta}{k_2^2 D_s} \cdot \frac{dR_s}{d\theta} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y},$$

$$\Psi_{zs}^{(2)} = \left\{ \left( \frac{x_i \cos\theta}{ik_2 D_s \cos\theta_d} \cdot \frac{dR_s}{d\theta} - \frac{1}{2k_1^2} \cdot \frac{d^2 D_s}{d\theta^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \right.$$

$$\left. + \left[ x_i \cdot \frac{\cos\theta \cos\theta_d}{ik_2 D_s} \cdot \frac{dR_s}{d\theta} - (R_s + R_p) \cdot \frac{\cos\theta}{k_1 k_2 \cos\theta_d} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{2k_1^2} \cdot \frac{dR_s}{d\theta} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\}.$$

В формулах (14), аналогично (13), после выполнения операции дифференцирования нужно заменить  $x_i$  на  $-x_r$  в  $F$ , и  $x_i$  на  $x_d \frac{\cos\theta}{\cos\theta_d}$  в  $\Psi$ . Согласно (14), во втором приближении для преломленного пучка уже проявляется зависимость коэффициентов разложения в (10) от продольной координаты.

Приведенная процедура получения последовательных приближений может быть продолжена для получения более высоких приближений. Однако нетрудно заметить,

что коэффициенты разложения в (10) пропорциональны  $\left(\frac{\lambda}{w_{\parallel}}\right)^s \cdot \left(\frac{\lambda}{w_{\perp}}\right)^r$ , где  $w_{\parallel}$ ,  $w_{\perp}$  —

эффективная ширина падающего пучка в плоскости падения и в перпендикулярной ей плоскости. Поэтому для слабонерасходящихся пучков они быстро убывают во всей области поверхности раздела, где поле существенно отлично от нуля.

Знание структурных функций отраженного пучка в плоскости  $z_r = 0$  и преломленного в плоскости  $z_d = 0$  позволяет определить поле пучков во всей области их существования. Для этого можно, например, воспользоваться интегральным представлением Релея–Зоммерфельда или же представлением (2). Подставляя в (2) ряды (10), получим разложение полей отраженного и преломленного пучков в ряды производных по поперечным координатам структурной функции падающего пучка с найденными выше коэффициентами.

Отметим в заключение, что условия, накладываемые на структурную функцию пучка  $f(x_{\perp}, y)$ , при выполнении которых ряд (2) сходится, равносильны тому, что угловой спектр

плоских волн пучка, которые можно представить в виде (2), не содержит неоднородных плоских волн [3]. В случае  $n_1 > n_2$ , при падении светового пучка под углом

$\theta > \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  это условие нарушается для преломленного пучка, поскольку

часть волн углового спектра падающего пучка преобразуется в неоднородные и без дополнительных исследований поле преломленного пучка нельзя представить в виде (8). Формально нарушение применимости условий метода в окрестности  $\theta = \theta_c$  видно также из формул (13) и (14), которые обращаются в бесконечность при  $\theta = \theta_c$ . Обобщение изложенного здесь метода на окрестность критического угла полного отражения будет рассмотрено отдельно.

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973.

2. Бельский А. М. // Опт. и спектр. 1986. Т.60. В.4. С.792.

3. Bremmer H. // Physica. 1952. V.18. P.469.

4. Sherman G. C. // J. Opt. Soc. Am. 1969. V.59. P.697.

УДК 535.37:577.3

Е.С. ВОРОПАЙ, М.П. САМЦОВ, А.П. ЛУГОВСКИЙ,  
Э.А. ЖАВРИД, И.Н. ЖУРАВКИН, Е.Н. АЛЕКСАНДРОВА

### СВОЙСТВА НОВЫХ ПОЛИМЕТИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ ДЛЯ ФОТОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРАПИИ

Ability of examine compounds in tumor cells HeLa are establish. In the cells the photosensitizer are exist in monomolecular form. Photocytotoxic of the five dyes carry out. The concentration of the dyes in the cells decrease by means of photoreduction. For three investigated compounds are observe clear expressive effect killing of the cancer cells.

Важнейшим моментом, определяющим эффективность применения метода фотодинамической терапии (ФДТ) для лечения онкозаболеваний, является наряду с методикой удачный выбор фотосенсибилизатора [1–3]. Применяемые в настоящее время фотосенсибилизаторы для ФДТ имеют весьма существенный недостаток, связанный с тем, что проникновение света в биологические ткани в области поглощения пигментов и глубина повреждения опухоли после фотодинамического воздействия незначительны, кроме того, повреждаются окружающие здоровые ткани [4,5]. Известно [5], что переход к фотовоздействию светом большей длины волны приводит к повышению степени повреждения тканей при более низких дозах света и препарата. В связи с этим перспективным является изучение фотодинамического действия и возможности применения в онкологии соединений, имеющих интенсивное поглощение света в более длинноволновой области спектра, чем у производных гематопорфирина. Существенный интерес в этом плане представляют фталоцианины, пурпурины и хлорин е6 и его производные [6–8]. Перспективным представляется использование в качестве фотосенсибилизаторов полиметиновых красителей [1,8]. Потенциальные возможности использования полиметиновых красителей для ФДТ определяются всей совокупностью фотофизических и фотохимических свойств этого класса органических соединений [9–12]. Большое число полиметиновых красителей имеют полосу поглощения в области 700–1100 нм, т.е. в области более глубокого проникновения светового излучения в биологические ткани, а также высокий молярный коэффициент экстинкции в этой полосе ( $>10^5 \text{ М}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ), обладают способностью генерации синглетного кислорода [13,14]. Некоторые полиметиновые красители проявляют выраженные фотосенсибилизирующие свойства и способность избирательного накопления в опухолевых клетках [8,15].

Полиметиновые красители (ПК) относятся к числу достаточно давно синтезированных соединений. Известно большое число ПК, отличающихся друг от друга длиной полиметиновой цепочки (числом виниленовых групп), а также природой концевых групп и заместителей. При этом существенно, что спектрально-люминесцентные и фотофизические характеристики, которые играют определяющую роль в ряде случаев практического использования ПК, при переходе от одного соединения данного класса к другому укладываются в рамках одних модельных представлений. Отметим к тому же, что для спектральной области ~1мкм и более соединениям данного класса практически нет альтернативы [16].

Целью настоящей работы явилось исследование фотодинамической активности группы новых полиметиновых красителей, синтезированных в лаборатории спектроскопии НИИ прикладных физических проблем им. А.Н.Севченко при Белгосуниверситете.

## Материал и методика

Изучены свойства пяти красителей. Соединениям присвоены лабораторные номера, которые использованы и в данном исследовании: 341 – индолининовый краситель с 3,5-замещенной гептаметиновой цепью сопряжения, 04 – N-пропильный 4-хинолиновый краситель с 4-хлор-3,5-замещенной гептаметиновой цепью сопряжения, 101 – N-пропильный 4-хинолиновый краситель с 4-фтор-3,5-замещенной гептаметиновой цепью сопряжения, 102 – N-бутильный 4-хинолиновый краситель с 4-фтор-3,5-замещенной гептаметиновой цепью сопряжения, 98 – индолининовый краситель с 4-хлор-3,5-замещенной гептаметиновой цепью сопряжения.

Исследования проводили на монослойной культуре опухолевых клеток Hela, выращенной в питательной среде 199 с добавлением 100 мг/мл канамицина. Для экспериментов культуру клеток рассеивали во флаконы диаметром 2 см по 100 тыс. клеток на 2 мл питательной среды. Для определения численности клеток монослой диспергировали 0,02%-ным раствором Версена и проводили подсчет клеток в камере Горяева. На каждую точку использовали 2–3 флакона.

При исследовании фотодинамического действия флаконы с клетками после инкубации с препаратом отмывали от препарата, помещали в термостат с тающим льдом и облучали светом ксеноновой лампы мощностью 2 кВт. Спектральный состав излучения создавался системой светофильтров. Инфракрасное излучение с длиной волны более 1100 нм, которое могло разогревать исследуемые объекты и влиять на результаты исследований, отсекалось светофильтром из воды толщиной 18 см. Коротковолновую границу ( $\lambda > 650$  нм) падающего на образцы светового излучения определял набор стеклянных абсорбционных светофильтров KC13, KC14 и KC17, помещенных для отвода тепла в специальную кювету с водой. Спектральная полоса пропускания использованных светофильтров, включая водяные, представлена на рис. 1. Размер светового пятна ограничивался ирисовой диафрагмой. Мощность падающего на образцы светового потока определялась с помощью измерителя LM2 с плоской фотоприемной площадкой диаметром 13 мм. Используемый тип измерителя мощности имеет рабочую спектральную область 0,3–2 мкм, погрешность измерений равна  $\pm 5\%$ . Мощность и доза фотоактивного (приходящего в полосу поглощения исследуемых препаратов) светового излучения рассчитывались с учетом соотношения между площадью и формой полосы пропускания светофильтров и полосы поглощения исследуемых препаратов. Плотность мощности фотоактивного излучения для разных препаратов колебалась в пределах 40–60 мВт/см<sup>2</sup>. Энергетическая экспозиция фотооблучения составляла 9, 18, 36 или 72 Дж/см<sup>2</sup>. Через 20–24 ч после фотооблучения проводили подсчет жизнеспособных клеток во флаконах.

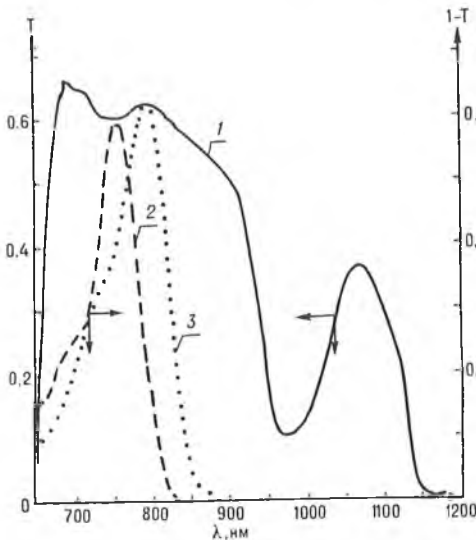


Рис. 1. Спектр пропускания системы светофильтров (1), спектр поглощения красителя 341 (2) и 98 (3) в диметилсульфаксиде

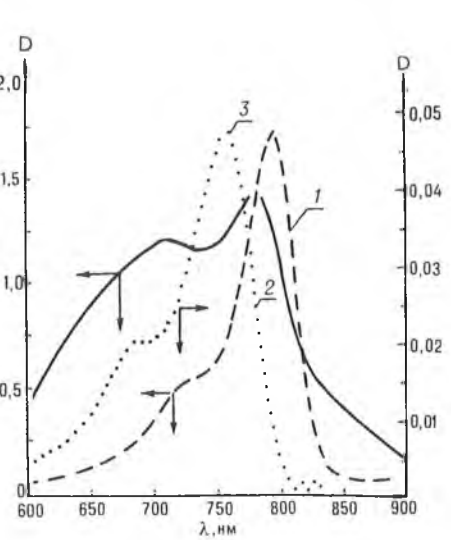


Рис. 2. Спектры поглощения красителя 98 в воде (1), в этаноле (2) и в культуре клеток Hela (3)

Содержание препаратов в клетках определяли путем экстракции бутанолом-1 препаратов из монослоя клеток. Концентрация вошедших в клетки препаратов рассчитывалась на основании зарегистрированной оптической плотности и по известному молярному коэффициенту поглощения препаратов в бутанол-1. Спектры поглощения регист-

ировались с помощью спектрофотометра PV-1251 фирмы Solar; флуоресценция – с помощью спектрофлуориметра Fluorolog фирмы Spex. Следует отметить, что расположение полос поглощения исследованных препаратов в ближней ИК области спектра, в области прозрачности биологических тканей, в значительной степени облегчает проведение исследований свойств препаратов *in vitro*. Это связано с тем, что в используемых биологических системах отсутствовали вещества, которые своим поглощением или флуоресценцией мешали бы регистрации оптических характеристик препаратов.

### Результаты и их обсуждение

В результате исследований по определению содержания препаратов в клетках Hela было установлено, что их концентрация колеблется от  $5 \cdot 10^{-11}$  молей до  $5 \cdot 10^{-10}$  молей на  $10^6$  клеток. При этих измерениях было обнаружено, что в процессе инкубации красители частично осаждаются на стенки флаконов. В связи с этим по истечении времени инкубации монослой клеток диспергировали 0,02%-ным раствором Версена, переливали в чистый флакон и только после этого проводили экстракцию бутанолом красителей из клеток.

С целью анализа влияния среды на спектральные свойства препаратов проводилось изучение спектров электронного поглощения препаратов в питательной среде и культуре клеток Hela. Известно [17], что в органических растворителях при использованных концентрациях красители находятся в мономерном состоянии. В связи с этим анализ спектров поглощения препаратов в различных средах позволяет сделать выводы относительно их агрегатного состояния. Для всех исследованных соединений наблюдается одинаковый характер изменения спектров в зависимости от природы растворителя, поэтому в качестве иллюстрации приводим на рис.2 спектры поглощения только для красителя 98 в воде, органическом растворителе и в клетках. В воде в спектрах видны явные признаки образования ассоциатов молекул красителя, так как наблюдается увеличение полуширины спектра и интенсивности поглощения в коротковолновой части спектра. Из рисунка видно, спектры поглощения красителя в клетках близки по форме к спектрам в органическом растворителе. Следовательно, в клетках красители находятся в мономерном состоянии, при этом их сольватная оболочка состоит из органических молекул.

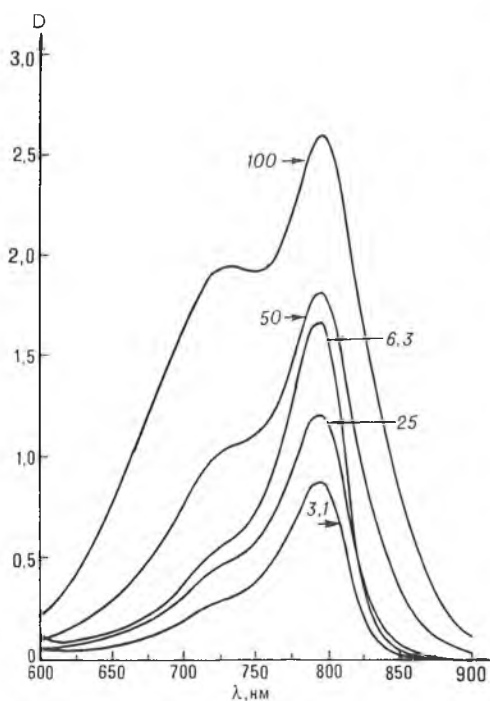


Рис.3. Спектры поглощения красителя 98 в питательной среде при концентрациях: 100 мкг/мл (1); 50 мкг/мл (2); 25 мкг/мл (3); 6,3 мкг/мл (4); 3,1 мкг/мл (5)

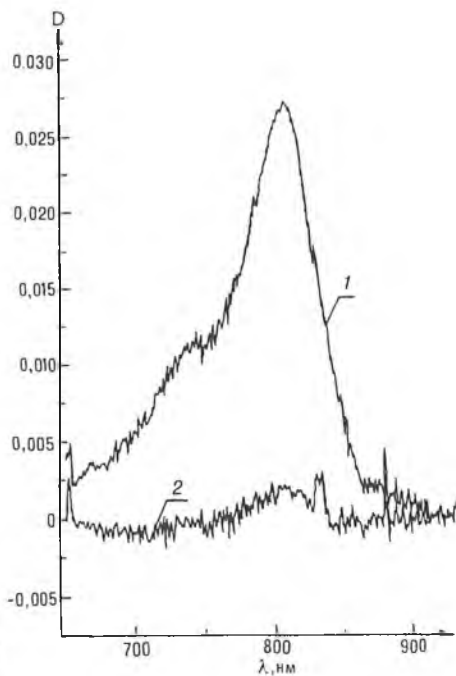


Рис.4. Спектры поглощения красителя 98 до (1) и после (2) фотовоздействия

Спектры поглощения препаратов в питательной среде зависят от их концентрации. Характер изменения в спектрах поглощения при изменении концентрации для всех исследованных препаратов одинаковый, поэтому на рис.3 приводим результаты только для препарата 98. Как видно из рисунка, по мере увеличения концентрации препарата наблюдается изменение формы спектров, повышается вклад в спектр коротковолнового плеча. Скорее всего наблюдаемые концентрационные изменения обусловлены образованием ассоциатов молекул препарата. На это указывает характерное уширение спектров, увеличение вклада в спектр коротковолнового максимума, а также обратимость изменения спектров при изменении концентрации препаратов.

Для исследования токсичности препаратов на 4-е сут после посева культуры во флаконы с монослоем клеток добавляли 0,2 мл раствора исследуемого препарата в среде 199, конечная концентрация 1,6–100,0 мкг/мл. Флаконы, помещенные в светозащитную упаковку, инкубировали в термостате при температуре 37°C в течение 1 ч, затем отмывали 4 раза от препарата раствором Хенкса и добавляли 2мл свежей питательной среды. Через 20–24 ч после воздействия монослой клеток диспергировали 0,02%-ным раствором Версена и проводили подсчет клеток в камере Горяева. На каждую точку использовали 2–3 флакона.

Сравнительное исследование токсичности препаратов 04, 98 и 102 при инкубации клеток в питательной среде, содержащей препарат, в течение 1 ч показало, что число жизнеспособных клеток через сутки после воздействия уменьшается в зависимости от увеличения концентрации препарата в среде (табл.1).

Таблица 1

**Количество (тыс.шт.) жизнеспособных клеток Hela после инкубации в питательной среде, содержащей препараты**

| Концентрация препарата, мкг/мл | № препарата      |              |                  |              |                  |              |
|--------------------------------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
|                                | 04               |              | 98               |              | 102              |              |
|                                | абсолютное число | % к контролю | абсолютное число | % к контролю | абсолютное число | % к контролю |
| 0 (контроль)                   | 900±54           | 100          | 900±54           | 100          | 568±35           | 100          |
| 1,6                            | 680±7            | 76           | 668±59           | 74           | 618±24           | 109          |
| 3,2                            | 705±33           | 78           | 645±36           | 72           | 513±52           | 90           |
| 6,3                            | 543±41           | 60           | 285±25           | 32           | 487±26           | 86           |
| 12,5                           | 510±27           | 57           | 55±18            | 6            | 458±28           | 81           |
| 25,0                           | 528±39           | 59           | 0                | 0            | 447±49           | 79           |
| 50,0                           | 448±35           | 50           | 0                | 0            | 405±33           | 71           |
| 100,0                          | 35±17            | 4            | 0                | 0            | 60±15            | 10           |

Таблица 2

**Относительное (в % к контролю) число клеток Hela после инкубации с препаратом**

| Энергетическая экспозиция фото-облучения, Дж/см <sup>2</sup> | Относительное число клеток без препарата, % | № препарата |      |      |      |      |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------|------|------|------|------|
|                                                              |                                             | 04          | 98   | 101  | 102  | 341  |
| 0 (контроль)                                                 | 100,0                                       | 73,3        | 86,5 | 64,7 | 80,4 | 49,1 |
| 9                                                            | 113,0                                       | 104,2       | —    | 66,4 | 82,4 | —    |
| 18                                                           | 113,0                                       | 100,0       | —    | 52,4 | 49,7 | —    |
| 36                                                           | 117,5                                       | 72,7        | 31,8 | 32,2 | 27,1 | 0,5  |
| 72                                                           | 110,0                                       | 72,4        | 11,0 | 29,1 | 27,1 | 1,2  |

Наиболее токсичным из трех препаратов в диапазоне концентраций 6,3–100 мкг/мл оказался препарат №98. При концентрации менее 6,3 мкг/мл токсичность всех исследованных препаратов была низкой, не зависела от дозы препарата и отличалась незначительно. Исходя из этих данных для исследования фотодинамической активности препаратов, мы выбрали дозу 2,5 мкг/мл.

Для сравнения фотодинамической активности препаратов в качестве количественной характеристики нами использовано отношение числа жизнеспособных после фотооблучения клеток к численности клеток в контрольных флаконах.

Результаты проведенных экспериментов показали, что большинство исследованных препаратов проявляют фотодинамическую активность при дозах света 18, 36 и 72 Дж/см<sup>2</sup>. Эффективность воздействия возрастает при увеличении дозы света с 18 до 36 Дж/см<sup>2</sup>, а при дальнейшем увеличении дозы света практически не изменяется, за исключением препарата №98, фотодинамическая активность которого при дозе света 72 Дж/см<sup>2</sup> выше, чем при 36 Дж/см<sup>2</sup>. Максимальной фотодинамической активностью при

дозе света  $72 \text{ Дж/см}^2$  обладают препараты №98 и 102 (число погибших клеток после действия препарата со светом соответственно в 7 и 3,6 раза больше, чем после действия одного препарата); препарат №04 не проявляет фотодинамической активности (число выживших или погибших клеток после действия одного препарата и после действия препарата со светом практически одинаковое), а препарат №101 характеризуется умеренной фотодинамической активностью (число погибших клеток после действия препарата со светом примерно в 2 раза больше, чем после действия одного препарата) (табл.2).

С целью выяснения причины прекращения повреждения опухолевых клеток для препаратов 101, 102, 341 при увеличении дозы светового воздействия с  $36 \text{ Дж/см}^2$  до  $72 \text{ Дж/см}^2$  были проведены исследования изменения концентрации препаратов в клетках в процессе фотооблучения. Для этого до и после светового воздействия регистрировались спектры поглощения препаратов в клетках Hela, выращенных на стеклянных пластинках. Результаты этих исследований представлены на примере препарата 98 (рис.4). Как видно из рисунка, в процессе фотооблучения наблюдается уменьшение оптической плотности в максимуме поглощения образцов. Подсчет клеток непосредственно по завершении фотооблучения показал, что число клеток на пластинках в такие сроки не изменяется. Следовательно, наблюдаемое уменьшение оптической плотности обусловлено уменьшением концентрации красителей в клетках. Из этих данных можно заключить: прекращение повреждения клеток для препаратов 101, 102, 341 при увеличении дозы светового воздействия происходит вследствие расхода красителей в клетках.

Таким образом, первичный отбор *in vitro* потенциальных фотосенсибилизаторов из группы полиметиновых красителей показал, что по крайней мере 3 (98, 341 и 102) из 5 исследованных препаратов обладают выраженной фотодинамической активностью в отношении опухолевых клеток и заслуживают дальнейшего исследования.

1. Dougharty T. J. Photodynamic therapy // Photochem. Photobiol. 1993. V.53. №6. P. 895.
2. Соколов В.В., Страданко Е.Ф., Жаркова Н.Н. и др. // Вопр. онкологии. 1995. Т.41. №2. С.134.
3. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Тезисы докл. конф. "Лазерная физика и спектроскопия" Гродно, 1995. С.221.
4. Berenbaum M.C., Bonnett R., Scourides P.A. // Br. J. Cancer. 1982. V.45. P.571.
5. Van Gemert J.C., Berenbaum M.C., Gijssberg G.H.M. // Ibid. 1985. V.52. №1. P.43.
6. Yu Y.H., Dong C.D. et al. // SPIE 1991. V.1616. P.361.
7. Kostenich G.A., Zhuravkin I.N., Gurinovich G.P., Zhavrid E.A. // SPIE 1991. V.1616. P.219.
8. Diwu Z., Lown J.M. // Pharmacol. Ther. 1994. V.63. №1. P.1.
9. Воропай Е.С., Павловская Н.А., Самцов М.П. // Опт. и спектр. 1991. Т.70. №4. С.819.
10. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Квант. электрон. (Киев). 1992. №2. С.77.
11. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Журн. прикл. спектр. 1995. 62. №2. С.218.
12. Samtsov M.P., Voropai E.S. Influence of structure of cyanine dyes on its photophysical properties. Proceedings of the conference "Physics and chemistry of organic luminophors' 95". Kharkov, 1995. P.158.
13. Бутримович О.В., Воропай Е.С., Ксенофонтова Н.М., Самцов М.П. // Журн. прикл. спектр. 1987. Т.46. №2. С.310.
14. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Опт. и спектр. 1987. Т.62. №1. С.64.
15. Saxton R.E., Huang M., Foote C. et al. // Proc. Annu. Meet. Am. Assoc. Cancer. Res. 1993. V.34. P.A2131.
16. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Современные вопросы оптики, рад. матер., информ., радиосфиз. и электр. Мн. 1996. Ч.1. С.27.
17. Низамов Н., Захидов У., Ищенко А.А. и др. // Журн. прикл. спектр. 1982. Т.34. №3. С.422.

УДК 530.12; 530.145

Г.В. ШИШКИН, У.Х. АБДЕЛЬ САЛАМ (Палестина)

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ВОЛКОВА НА ФОНЕ ГРАВИТАЦИИ

New exact solutions of the Dirac equation for the case of the external wave fields on the background of gravitation are presented.

Широко известно, что классическая задача Волкова — электрон в поле плоской электромагнитной волны [1] — была обобщена в случае частицы с произвольным спином в работах Ф.И. Федорова с соавторами [2]. В частности, в этих работах впервые

учтен аномальный момент частицы, взаимодействующей с волновым полем. Проблема Волкова на фоне статистических электрических и магнитных полей рассматривалась В.Г.Багровым и др. [3]. В работах [4–7] эта проблема обобщена на случай волновых полей произвольной тензорной структуры. Дальнейшим естественным обобщением проблемы является задача о взаимодействии дираковской частицы с волновыми полями на фоне гравитации. Используя алгебраический метод разделения переменных в уравнении Дирака, нам удалось найти ряд точных решений этой проблемы и указать гравитационные метрики, на фоне которых они возможны. Здесь мы представляем эти решения.

**1. Скалярная плоская волна  $S(z-t)$ .** Уравнение Дирака для частицы, взаимодействующей со скалярной волной на фоне гравитации, при диагональной калибровке тетрады имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 + S(z-t) \right\} \Psi = 0. \quad (1)$$

Принимая матрицы Дирака в виде

$$\gamma^x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^t = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\sigma_k$  — матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

нам удалось получить следующее точное решение уравнения (1):

$$\Psi = \{a_x(x)b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) & \Theta_1(y) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) & \Theta_2(y) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) & \Theta_1(y) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) & \Theta_2(y) \end{pmatrix} \exp(ik_v v), \quad (4)$$

где  $v = z + t$ ,  $u = z - t$ ,

$$\Phi_1 = c^{1/4}(u) \exp \left\{ \frac{1}{4ik_v} \int \left[ (m_0 + S(u))^2 c(u) - k^2 \frac{c(u)}{d(u)} \right] du \right\}, \quad (5)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2ik_v} \left\{ [m_0 + S(u)] c^{1/2}(u) - k \left[ \frac{c(u)}{d(u)} \right]^{1/2} \right\} \Phi_1, \quad (6)$$

$$\Theta_1(x) = a_x^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm (K^2 - k^2)^{1/2} \int a_x^{1/2}(x) dx \right\}, \quad (7)$$

$$\Theta_2(x) = (K - k)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta_1(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x) dx, \quad (8)$$

$$\Theta_1(y) = b_y^{1/4}(y) \exp \left\{ -k \int b_y^{1/2}(y) dy \right\}, \quad (9)$$

$$\Theta_2(y) = b_y^{1/4}(y) \exp \left\{ k \int b_y^{1/2}(y) dy \right\}. \quad (10)$$

Эти решения реализуются в метриках вида

$$ds^2 = d(z-t) \left\{ a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 \right\} + c(z-t) \left\{ (dz)^2 - (dt)^2 \right\}. \quad (11)$$

**2. Векторная (электромагнитная) волна  $\gamma^x A_x(z-t)$ .** Снова работая в диагональной калибровке тетрады, для уравнения Дирака имеем

$$\left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} + iA_x(z-t) \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 \right\} \Psi = 0. \quad (12)$$

Соответствующее точное решение имеет следующий вид (для матриц Дирака снова используется представление (2)):

$$\Psi = \exp \left\{ i(k_x x + k_y y) b_y^{1/2}(y) \right\} \begin{pmatrix} \Phi_1(u) & \Theta_1(y) \\ \Phi_2(u) & \Theta_2(y) \\ \Phi_1(u) & \Theta_1(y) \\ \Phi_2(u) & \Theta_2(y) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\Phi_1(u) = a^{1/4}(u) \exp \left\{ -\frac{1}{4ik_y} \int \left[ (A_x(u) - k_x)^2 - k^2 c(u) \right] \frac{a(u)}{c(u)} du \right\}, \quad (14)$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y} \left[ \frac{a(u)}{c(u)} \right]^{1/2} \{ A_x(u) - k_x - kc^{1/2}(u) \} \Phi_1(u), \quad (15)$$

$$\Theta_1(y) = \exp \left\{ \pm (m_0^2 - k^2)^{1/2} \int b_x^{1/2}(y) dy \right\}, \quad (16)$$

$$\Theta_2(y) = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - m_0 \right) \Theta_1(\xi), \quad \xi = \int b_y^{1/2}(y) dy. \quad (17)$$

Решения вида (13) ассоциированы с метрикой

$$ds^2 = c(z-t)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 + a(z-t)\{(dz)^2 - (dt)^2\}. \quad (18)$$

**3. Аксиальная волна**  $\gamma^x \gamma^5 A_x(z-t)$ . Соответствующее уравнение Дирака имеет вид

$$\left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} + \gamma^5 A_x(z-t) \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 \right\} \Psi = 0. \quad (19)$$

Анализ показывает, что попарное разделение переменных  $u, v$  от  $x, y$  здесь невозможно. В итоге точные решения могут быть получены лишь для случая конформно плоских метрик вида

$$ds^2 = a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 + (dz)^2 - (dt)^2, \quad (20)$$

которые посредством локального координатного преобразования

$$x' = \int a_x^{1/2}(x) dx, \quad y' = \int b_y^{1/2}(y) dy \quad (21)$$

приводятся к виду

$$ds^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz)^2 - (dt)^2. \quad (22)$$

Точные решения уравнения (19) в метриках (20) подробно исследованы в работах [5,6].

**4. Псевдоскалярная волна**  $\gamma^5 P(z-t)$ . В этом случае уравнение Дирака при диагональной калибровке тетрады имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 + \gamma^5 P(z-t) \right\} \Psi = 0. \quad (23)$$

Для точного решения этого уравнения в представлении (2) мы получили

$$\Psi = \{a_x(x)b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) \end{pmatrix} \exp \left\{ ik_y y + \int b_y^{1/2}(y) dy \right\}, \quad (24)$$

где

$$\Phi_1(u) = c^{1/4}(u) \exp \left\{ \int [P^2(u) - k^2] \frac{c(u)}{4ik_y} du \right\}, \quad (25)$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y} [P(u) + k] c^{1/2}(u) \Phi_1(u), \quad (26)$$

$$\Theta_2(x) = \exp \left\{ \pm (m_0^2 + K^2 - k^2)^{1/2} \int a_x^{1/2}(x) dx \right\}, \quad (27)$$

$$\Theta_1(x) = (m_0 + k)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - K \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta_2(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x) dx. \quad (28)$$

Эти решения возможны для метрик вида

$$ds^2 = a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 + c(z-t)\{(dz)^2 - (dt)^2\}. \quad (29)$$

Далее мы представляем точные решения уравнения Дирака, соответствующие взаимодействию частицы с тензорным волновым полем на фоне гравитации.

Физическое содержание, с которым может быть ассоциировано тензорное взаимодействие, находится в прямой зависимости от геометрии реализации такого взаимодействия. Например, с внешним полем, включенным посредством члена, пропорционального  $\gamma^x \gamma^t T_{xt}$ , может быть связано неминимальное взаимодействие магнитного момента частицы с магнитной напряженностью электромагнитного поля, т.е. с тензором электромагнитного поля. Аналогично тензорная структура  $\gamma^x \gamma^t T_{xt}$  ассоциируется с неминимальным взаимодействием электрического диполя, с электрической напряженностью электромагнитного поля. И хотя экспериментальные данные [8] указывают на чрезвычайно малую величину дипольного электрического момента элементарных частиц, решения со связью  $\gamma^x \gamma^t T_{xt}$  представляют несомненный математический интерес, хотя бы потому, что они существенно отличаются от соответствующих решений со связью  $\gamma^x \gamma^t T_{xt}$ . В частности, имеют место различные возможности точных решений уравнений Дирака для частицы нулевой массы. Заметим, что собственно включение тензорного поля предполагает участие всех компонент  $T_{ik}$ . Конкретная же физическая реализация диктуется при этом свойствами частицы, взаимодействующей с полем, как, например, в случае электромагнитной волны. Частица может иметь или не иметь отличный от нуля электрический заряд, иметь или не иметь магнитный либо электрический моменты; соответственно взаимодействие может осуществляться минимальным либо не минимальным, либо смешанным образом.

Здесь рассмотрено два случая включения тензорной связи.

**5. Тензорная волна  $\gamma^x \gamma^t T_{xt}(z-t)$ .** Уравнение Дирака при диагональной калибровке тетрады в этом случае имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 + 2ig\gamma^x \gamma^t T_{xt}(z-t) \right\} \Psi = 0. \quad (30)$$

Здесь  $g$  — магнитный момент частицы.

Принимая матрицы Дирака в представлении (2), (3) для решения уравнения (30), получаем

$$\Psi = \{a_x(x)b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) \end{pmatrix} \exp\left\{ik_y y + \int b_y^{1/2}(y) dy\right\}. \quad (31)$$

Здесь

$$\Phi_1(u) = c^{1/4}(u) \exp\left\{-\frac{1}{4ik_y} \int [2igT_{xy}(u) - k]^2 c(u) du\right\}, \quad (32)$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y} [k - 2igT_{xy}(u)] c^{1/2}(u) \Phi_1(u), \quad (33)$$

$$\Theta_2(x) = \exp\left\{\pm (m_0^2 + K^2 - k^2)^{1/2} \int a_x^{1/2}(x) dx\right\}, \quad (34)$$

$$\Theta_1(x) = (m_0 + k)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - K\right) \Theta_2(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x) dx. \quad (35)$$

Решение (31) реализуется в метриках вида

$$ds^2 = a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 + c(z-t)\{(dz)^2 - (dt)^2\}. \quad (36)$$

Заметим, что решение (31) получено для общего случая отличной от нуля массы покоя частицы. Естественно, что этот результат применим и к случаю  $m_0 = 0$ .

Однако в случае  $m_0 = 0$  возникает дополнительное решение вида (31), где вместо (32), (33) необходимо принять

$$\Phi_1(u) = c^{1/4}(u) \exp\left\{-\frac{1}{4ik_y} \int \left[2igT_{xy}(u) c^{1/2}(u) - k \left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2}\right]^2 du\right\}, \quad (37)$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y} \left[ k \left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2} - 2igT_{xy}(u) c^{1/2}(u) \right] \Phi_1(u). \quad (38)$$

Соответствующая метрика оказывается более общей, чем (36):

$$ds^2 = d(z-t)\{a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2\} + c(z-t)\{(dz)^2 - (dt)^2\}. \quad (39)$$

**6. Тензорная волна**  $\gamma^z \gamma^t T_{zt}(z-t)$ . Уравнение Дирака в этом случае в диагональной калибровке тетрады принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x} \right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y} \right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t} \right) + m_0 + 2\tilde{g} \gamma^z \gamma^t T_{zt}(z-t) \right\} \Psi = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $\tilde{g}$  — дипольный электрический момент частицы.

Для решения уравнения (40) в представлении (2), (3) получаем:

$$\Psi = \{a_x(x)b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) & \Theta_1(y) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) & \Theta_2(y) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) & \Theta_1(y) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) & \Theta_2(y) \end{pmatrix} \exp(ik_y y), \quad (41)$$

$$\Phi_1(u) = c^{1/2}(u) \exp \left\{ \frac{1}{4ik_v} \int \left[ m_0^2 c(u) - \left[ 2\tilde{g} T_{zt}(u) c^{1/2}(u) + k \left[ \frac{c(u)}{d(u)} \right]^{1/2} \right]^2 \right] du \right\}, \quad (42)$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_v} \left\{ m_0 c^{1/2}(u) - \left[ 2\tilde{g} T_{zt}(u) c^{1/2}(u) + k \left[ \frac{c(u)}{d(u)} \right]^{1/2} \right] \right\} \Phi_1(u), \quad (43)$$

$$\Theta_1(x) = a_x^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm (K^2 - k^2)^{1/2} \int a_x^{1/2}(x) dx \right\}, \quad (44)$$

$$\Theta_2(x) = (K - k)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta_1(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x) dx, \quad (45)$$

$$\Theta_1(y) = b_y^{1/4}(y) \exp \left\{ -k \int b_y^{1/2}(y) dy \right\}, \quad (46)$$

$$\Theta_2(y) = b_y^{1/4}(y) \exp \left\{ k \int b_y^{1/2}(y) dy \right\}. \quad (47)$$

Эти решения реализуются в метриках вида

$$ds^2 = d(z-t) \left\{ a_x(x) (dx)^2 + b_y(y) (dy)^2 \right\} + c(z-t) \left\{ (dz)^2 - (dt)^2 \right\}. \quad (48)$$

Дополнительных решений для случая  $m_0 = 0$ , в отличие от предыдущего случая, не возникает.

Таким образом, в настоящей работе получены новые точные решения уравнения Дирака для случая частицы, взаимодействующей с волновыми полями различной тензорной структуры на фоне гравитации, а также указаны метрики, на фоне которых эти решения реализуются.

Естественно, что полученные метрики (11), (18), (29), (36), (39), (48) оказались конформно плосковолновыми. Соответствующим координатным преобразованием они приводятся к плоско-волновым. Такой результат не является неожиданным. Классическое решение задачи Волкова обладает "плоской" симметрией (плоские волны) и включение гравитации не должно "портить" начальной симметрии. В противном случае оказывалось невозможным даже разделение переменных, имевшее место в отсутствие гравитации.

Метрики, указанные в настоящей работе, по своей структуре и симметрии оказываются конформно подобными известным решениям Тауба [9], Мак-Вити [10], Бонди [11,12], Розена [13]. Заметим также, что в частном случае не волнового плоского гравитационного поля ( $c(z-t) = d(z-t) = 1$ ) при специальном подборе функций  $a_x(x)$  и  $b_y(y)$  в указанных нами метриках содержится вырожденный случай решения Казнера [14], что согласуется с нашим частным результатом, полученным ранее [7]. Заметим вскользь, что Вебер [15] не согласен с трактовкой решений [9–13] как плоских гравитационных волн [10], опираясь при этом на известный анализ, данный Боннором [16].

Что касается самих точных решений уравнения Дирака, представленных в настоящей работе, то все они удовлетворяют требованию предельного перехода к свободным спинорным волнам, если удалить из уравнения Дирака волновые и гравитационное поля. Некоторый промежуточный предельный переход для представленных здесь решений в присутствии волновых полей на фоне гравитации к соответствующим решениям без гравитации (см. [4–6]) также имеет место.

1. Волков Д. М. // ЖЭТФ. 1937. Т.7. С.1286.
2. Федоров Ф. И. (Библиографический указатель). Мн., 1981.
3. Баргов В. Г. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск, 1982
4. Shishkin G. V. // Nuovo Cim. 1991. V.106B. P.1137.
5. Shishkin G. V., Yasin M. A. // Int.J.Mod.Phys. 1991. V.6. P.4831.
6. Шишкин Г. В., Ясин М. А. // ЯФ. 1991. Т.53. С.858.
7. Шишкин Г. В. // Гравитационная энергия и гравитационные волны / Под ред. Н.А. Черникова. Дубна, 1993. С.112.
8. Particle properties data booklet // Phys. Rev. D. 1992. V.45. P.1.
9. Taub A. H. // Ann. d. Math. 1951. V.53. P.472.
10. Mcvittie G. C. // J. Rat. Mech. a. Anal. 1955. V.4. P.201.
11. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson L. // Proc. Roy. Soc. 1959. VA251. P.519.
12. Bondi H. // Nature. 1957. V.179. P.1072.
13. Rosen N. // Bull. Res. Council Israel. 1953. V.3. P.328.
14. Kasner E. // Amer. J. Math. 1921. V.43. P.1234.
15. Weber J. General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961.
16. Bonnor W. B. // Ann. Henri Poincare. 1957. V.15. P.146.

# ТЕРМООПТИЧЕСКИЙ ЗАТВОР И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА РЕЖИМЫ ГЕНЕРАЦИИ ИМПУЛЬСНОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА

A method of the Q-factor active modulation for pulsed lasers has been considered using a thermo-optic gate, the operation of which is based on the phase transition "nematic liquid crystal – isotropic liquid". The generation modes of Nd-laser with thermo-optic gate have been studied.

Возможность применения термооптических жидкокристаллических (ЖК) затворов для активной модуляции добротности твердотельных лазеров показана в работах [1,2]. В данной статье приведены результаты исследования режимов генерации неодимового лазера с таким ЖК-модулятором.

Затвор (рис.1) представляет собой тонкую жидкокристаллическую ячейку. В ней слой жидкого кристалла (3) размещается между стеклянными пластинами (1) с напыленными прозрачными электродами (2), к которым подводится напряжение. Зазор между пластинами фиксируется прокладками изолятора (4). Такая ячейка и поляризатор размещаются в резонаторе лазера.

В основу действия затвора положено специфическое свойство жидкокристаллического материала: резкое изменение оптических характеристик при нагревании вблизи точки фазового перехода нематический жидкий кристалл – изотропная жидкость (НБК–ИЖ). Первоначально ЖК-ячейка поддерживается при температуре на 5°C ниже температуры фазового перехода. Поддержание температурного режима осуществляется с помощью пропускания постоянного тока по электродам. Выбор параметров ячейки обеспечивает минимум оптического пропускания в исходном состоянии. По мере нагрева кристалла величина оптической анизотропии уменьшается до нуля при переходе жидкого кристалла в изотропную жидкость. Такое состояние соответствует максимуму оптического пропускания, т.е. открытому затвору.

Расчеты проводились для кристалла МББА (4-метоксибензилиден-4-бутиланилин), характерные параметры которого: температура просветления  $T_{np}=45^{\circ}\text{C}$ , величина оптической анизотропии  $\Delta n(42^{\circ}\text{C}) = 0,16$ , коэффициент температуропроводности  $\kappa = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  [3]. Толщина слоя ЖК при 100%-ой глубине модуляции оптического поглощения  $d = 1,66 \text{ мкм}$ , площадь ячейки  $S = 1 \text{ см}^2$ .

Для расчета оптического отклика ячейки на нагревание численными методами исследовалось решение уравнения теплопроводности и динамика открытия затвора. Уравнение теплопроводности решалось методом источников и стоков, который позволял учесть время нагрева электродов. Использовалась модель непрерывного источника, согласно которой с момента времени  $t = 0$  в плоскости  $x'$  начинает выделяться количество теплоты, равное в единицу времени на единицу площади  $\rho C \varphi(t)$ . На основании этой модели температура в момент времени  $t$  представляется в следующем виде:

$$T(t) = \frac{1}{2\pi\kappa^{1/2}} \int_0^t \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4\kappa(t-t')}\right) \frac{\varphi(t')dt'}{(t-t')^{1/2}}, \quad (1)$$

$$\varphi(t') = \frac{I_0^2 R}{\rho C S} e^{-t'/\tau}, \quad (2)$$

где  $\tau$  – длительность импульса тока (в расчетах предполагалось, что импульс тока формируется при разряде конденсатора),  $I_0$  – сила тока в начальный момент разряда,  $R$  – общее сопротивление электрической схемы,  $\rho$  – плотность,  $C$  – теплопроводность,  $S$  – площадь ЖК-ячейки.

Зависимость величины оптической анизотропии от температуры  $\Delta n(I')$  для кристалла МББА приведена в [4]. Соответственно коэффициент поглощения затвора  $\gamma$  уменьшается по мере роста температуры (с учетом фазового набег в слое ЖК [3]):

$$\gamma(I') = \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \langle \Delta n(I') \rangle\right), \quad (3)$$

С учетом (3), коэффициент потерь  $k_n$  в резонаторе лазера изменяется следующим образом:

$$k_n = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{1-\gamma(I')} + k, \quad (4)$$

где  $L$  – длина резонатора,  $k$  – коэффициент пассивных потерь и потерь на излучение.

Расчеты показывают, что при оптимальном выборе параметров ячейки время открытия затвора лежит в диапазоне от 200 до 400 нс. Так, в случае поглощения кристаллом МБА количества теплоты  $10^{-2}$  Дж при модуляции излучения Nd-лазера ( $\lambda = 1,06$  мкм) время просветления ячейки при 100%-ной глубине модуляции оптического поглощения составляет 220 нс (рис. 2).

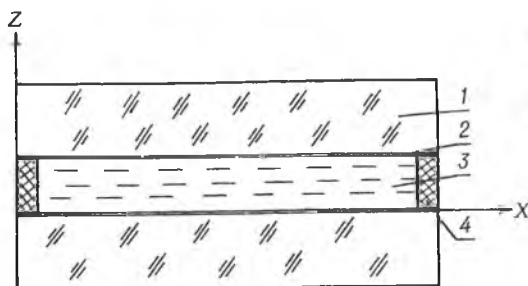


Рис. 1. Схема ЖК-модулятора

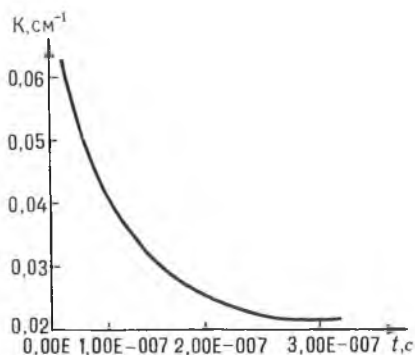


Рис. 2. Зависимость коэффициента потерь от времени

Для моделирования процессов генерации Nd-лазера численными методами решалась система балансных уравнений [5], преобразованная с учетом того, что  $\frac{1}{\tau_c} = \frac{C_0}{n} K_n$

и  $V_\alpha B N_2 = \frac{C_0}{n} K_{yc}$ , где  $\tau_c$  – время жизни фотона,  $C_0$  – скорость света,  $n$  – показатель преломления кристалла Nd:YAG,  $V_\alpha$  – объем, занимаемый модой внутри активной среды,  $B$  – скорость вынужденного излучения,  $N_2$  – населенность верхнего лазерного уровня. Система уравнений описывала генерацию одномодового одночастотного лазера, причем учитывалось, что коэффициент потерь в резонаторе изменяется в соответствии с (4):

$$\begin{cases} \frac{\partial K_{yc}}{\partial t} = \Pi_H (K_{yc}^{max} - K_{yc}) - K_{yc} (Bq + \frac{1}{\tau}), \\ \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{C_0}{n} (K_{yc} - K_n) q, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\Pi_H$  – скорость возбуждения,  $\tau$  – время жизни метастабильного уровня,  $q$  – полное число фотонов в резонаторе.

Форма импульса накачки аппроксимировалась полиномом второй степени [6]:

$$\Pi_H = 2\Pi_H^{max} \left( \frac{2t}{\tau_H} \right) - \Pi_H^{max} \left( \frac{2t}{\tau_H} \right)^2, \quad (6)$$

где  $\Pi_H^{max}$  – максимальная скорость возбуждения,  $\tau_H$  – длительность импульса накачки.

В результате расчетов были получены зависимости мощности генерации от времени для различных начальных условий. Исследовалось влияние на генерационные характеристики лазера следующих параметров: длительности импульса накачки, времени задержки включения затвора, скорости просветления затвора.

Моноимпульс максимальной мощности и минимальной длительности генерируется при условии резкого уменьшения уровня потерь в резонаторе в тот момент времени, когда коэффициент усиления имеет максимальное значение. Таким образом, на выходные характеристики излучения заметное влияние оказывает выбор времени задержки открытия затвора относительно момента начала импульса накачки. В результате расчетов было определено, что при использовании затвора, который просветляется за 220 нс, импульсной лампы ИНП 3/25А (в импульсе излучается 6,5 Дж), длительности импульса накачки 60 мкс и времени задержки 58 мкс, которое соответствует максимальному коэф-

коэффициенту усиления, генерируется моноимпульс длительностью 15нс и мощностью 13,5МВт (рис.3,а). Этот импульс принимается в качестве образца и все последующие импульсы, полученные при изменении какого-либо из начальных условий, сравниваются с данным. Незначительное уменьшение времени задержки приводит к уширению импульса и уменьшению его выходной мощности, поскольку в таком случае затвор открывается в момент, когда коэффициент усиления еще не достиг своего максимального значения. При значительном уменьшении времени задержки, например до 40мкс, возможна многоимпульсная генерация (рис.3,б). Каждый импульс формируется в тот момент времени, когда мгновенное значение коэффициента усиления равно мгновенному значению коэффициента потерь. Более медленное просветление жидкокристаллической ячейки (260нс) приводит к уширению импульса (17нс) и уменьшению его выходной мощности (12,5МВт). Причем если время открытия затвора превышает 400нс, то возможна генерация многократных импульсов. Увеличение длительности импульса накачки также приводит к уменьшению выходной мощности и уширению импульса, что связано с обеднением верхнего лазерного уровня из-за спонтанного излучения. Например, при импульсе накачки в 100 мкс, а это время сравнимо со временем жизни на метастабильном уровне, генерируется импульс длительностью 20нс и мощностью 10МВт. Использование менее мощной лампы накачки ИНП 3/100 (2,5Дж), как и следовало ожидать, приводит к генерации менее мощного (3,8МВт) и более широкого (30нс) импульса.

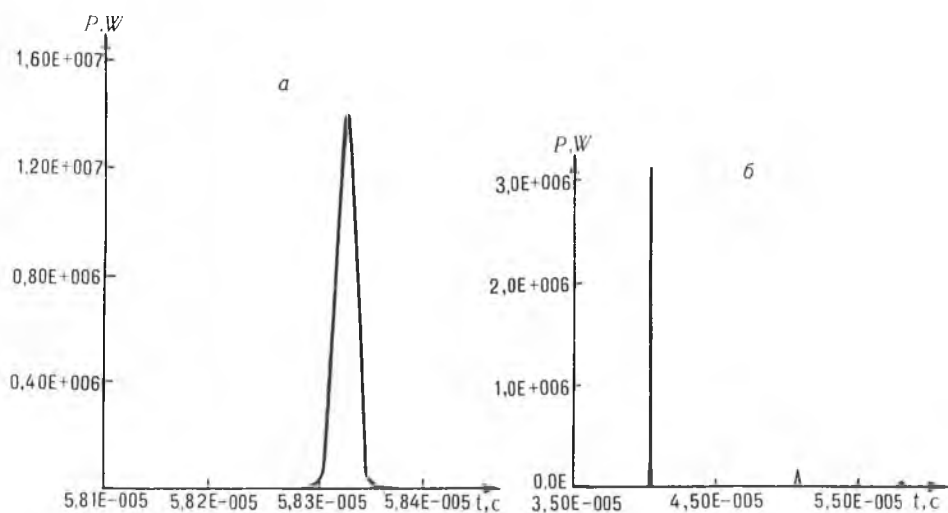


Рис.3. Зависимость выходной мощности от времени:

а) моноимпульс; б) многоимпульсная генерация.

Проведенные расчеты свидетельствуют о том, что термооптический затвор на жидком кристалле может успешно применяться для активной модуляции добротности импульсных твердотельных лазеров (типа лазера на неодиме). Он позволяет получать моноимпульсы длительностью не более 20нс и мощностью свыше 10МВт. Такие затворы во многих случаях могут конкурировать с электрооптическими, механическими, акустооптическими модуляторами излучения благодаря достаточной скорости включения (200–400нс), низкому управляющему напряжению (менее 1кВ), быстрому восстановлению первоначального состояния (частота повторения более 100Гц) при сравнительно невысокой стоимости.

1. Ермаков В. В., Сташкевич И. В. // Современные проблемы лазерной физики и спектроскопии: Тез. докл. Гродно, 1993. С.233.
2. Карней И. Б., Сташкевич И. В. // Тез. докл. межд. конференц. по лазерной физике и спектроскопии. Гродно, 1995. С.114.
3. Капустин А. П. Экспериментальные исследования жидкокристаллических материалов. М., 1978.
4. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М., 1978.
5. Звельо О. Принципы лазеров. М., 1990.
6. Импульсные источники света / Под ред И.С.Маршака. М., 1978.

# СКЕЙЛИНГОВЫЙ ПОДХОД К ПЕРЕХОДУ ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ В ГЕРМАНИИ, "ЛЕГИРОВАННОМ" РАДИАЦИОННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

The dielectric – metal transition in germanium disordered by large doses of the fast reactor neutrons has been studied.

Проблема перехода металл – диэлектрик является одной из актуальных и фундаментальных проблем физики неупорядоченных систем, которая стала одним из важнейших направлений развития современной физики конденсированного состояния [1].

В последнее время интенсивно развивается скейлинговый подход к проблеме перехода металл – диэлектрик. В рамках этого подхода нашло удовлетворительное объяснение поведение ряда неупорядоченных систем. В данной статье делается попытка применения этого подхода к описанию перехода диэлектрик – металл (ПДМ) в новом типе неупорядоченной системы – германии, "легированном" радиационными дефектами с мелкими уровнями.

Нами исследовались образцы *n*-германия с концентрацией электронов около  $3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , облученные различными дозами быстрых реакторных нейтронов ( $D = 10^{15} \div 10^{19} \text{ см}^2$ ). Для ослабления потока тепловых нейтронов образцы помещались в кадмиевые пеналы с толщиной стенок 1 мм. Электрические свойства измерялись в области 1,5–300 К. Концентрация дефектов определялась из измерений коэффициента Холла при комнатной температуре. В результате облучения все образцы стали образцами *p*-типа.

Одночастичная скейлинговая теория локализации [2,3] (пренебрегающая электрон-электронным взаимодействием) предполагает непрерывное изменение макроскопических свойств системы в критической области по аналогии с фазовыми переходами второго рода в виде степенных функций  $\Phi(\zeta)$  длины когерентности

$$\zeta = \zeta^* \left| 1 - (n/n_c) \right|^{v_\zeta}, \quad (1)$$

где  $\zeta^*$  и  $v_\zeta$  – постоянные, а  $n_c$  – критическая концентрация электронов при ПДМ, т.е.

$$\Phi = \Phi^* \left| 1 - (n/n_c) \right|^{v_\Phi}. \quad (2)$$

В работах [4–7] была определена критическая концентрация дефектов ПДМ в германии, "легированном" радиационными дефектами, равная  $N_c = 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , и установлено, что при низких ( $T < 10 \text{ К}$ ) температурах доминирующим механизмом проводимости с диэлектрической стороны ПДМ является прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка (VRH – variable range hopping).

Удельное сопротивление в области VRH-проводимости определяется как

$$\rho = \rho_0 \exp \left[ (T_0/T)^{1/2} \right], \quad T_0 = 2,8e^2/k\alpha, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  и  $T_0$  – прыжковые коэффициенты,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\alpha$  – радиус локализации,  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость.

Соотношение  $\log \rho \sim T^{-1/2}$  свидетельствует о наличии в плотности состояний на уровне Ферми кулоновской щели, возникающей из-за кулоновского взаимодействия локализованных носителей заряда [8]. VRH-проводимость в германии с мелкими уровнями радиационных дефектов наблюдалась и изучалась ранее [5–7].

Таким образом, параметры ( $\alpha$ ,  $\kappa$  и  $T_0$ ), характеризующие VRH-проводимость, могут быть использованы для описания критического поведения данного типа неупорядоченной системы в рамках скейлинговой теории.

Согласно этой теории [2,3], величины  $\alpha$  и  $\kappa$  расходятся при приближении к ПДМ, т.е. при  $N \rightarrow N_0$ , [см. (2)]:

$$\alpha = \alpha^* \left| 1 - (N/N_c) \right|^{v_\alpha}, \quad \kappa = \kappa^* \left| 1 - (N/N_c) \right|^{v_\kappa}, \quad (4)$$

где  $v$  и  $\zeta$  – критические индексы,  $v^*$  и  $\zeta^*$  – численные коэффициенты,  $N$  – концентрация дефектов,  $N_c$  – критическая концентрация дефектов ПДМ.

Рассмотрим рост величин  $\alpha$  и  $\kappa$  для германия, "легированного" радиационными дефектами с мелкими уровнями, при приближении к ПДМ. В качестве меры близости к ПДМ можно выбрать величину  $T_0$ , так как при переходе  $T_0 = 0$ . Зависимость  $\alpha$  и  $\kappa$  от  $T_0$ , построенная по экспериментально определенным нами значениям  $T_0$  и данным [5], показана на рисунке. Эти зависимости могут быть аппроксимированы выражениями

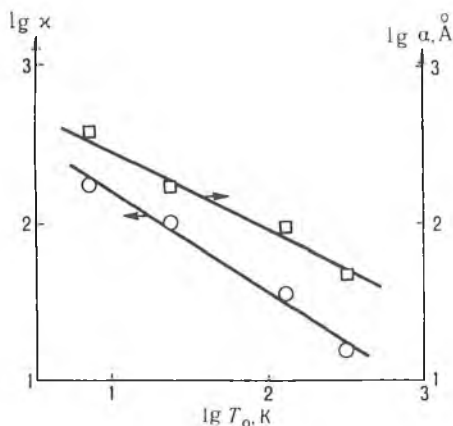
$$\alpha \sim T_0^{-0,4 \pm 0,04}, \quad \kappa \sim T_0^{-0,7 \pm 0,07}. \quad (5)$$

Из зависимостей (5) следует, что отношение критических индексов  $\zeta/\kappa \approx 1,8$ . Это достаточно близко к значению, предсказываемому теорией [2,3].

Для раздельного определения индексов  $\kappa$  и  $\zeta$  необходимо знать критический индекс параметра  $T_0$ , т.е.  $\gamma$ ,

$$T_0 \sim \left[1 - (N/N_c)\right]^\gamma. \quad (6)$$

В работе [9] одним из авторов была определена величина критического индекса  $\gamma \approx 4,5$ . С учетом этого из выражений (4)–(6) получается, что  $\nu \approx 1,8$  и  $\zeta \approx 3,15$ .



Зависимость радиуса локализации ( $\alpha$ ) и диэлектрической проницаемости ( $\kappa$ ) от коэффициента  $T_0$

Определенные нами экспериментальные значения критических индексов ПДМ в германии, "легированном" радиационными дефектами с мелкими уровнями, в 2–2,5 раза превышают теоретические значения. Необходимо также отметить и отсутствие удовлетворительного согласия (в значениях критических индексов) с экспериментальными данными, полученными для некоторых типов неупорядоченных систем [1]. В то же время в работах [5,9] показано удовлетворительное согласие экспериментальных данных для такой неупорядоченной системы, как германий, "легированный" радиационными дефектами, с теоретической моделью ПДМ, предложенной Моттом [10].

Таким образом, установлено значительное расхождение между скейлинговой теорией ПДМ и экспериментальными данными для такого типа неупорядоченной системы, как германий, "легированный" радиационными дефектами с мелкими уровнями, что, по-видимому, может свидетельствовать о неприменимости этой теоретической модели к рассмотренной системе.

Настоящая работа была поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

1. Electron – Electron Interactions In Disordered Systems / Edited by A.Efros, M.Pollak. New York, 1985.
2. Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V. // Phys. Rev. Lett. 1979. V.42. №10. P.673.
3. Звягин И. П. Кинетические явления в неупорядоченных полупроводниках. М., 1984.
4. Dobrego V.P., Ermolaev O.P., Tkachev V.D. // Physica Status. Solidi.(a). 1977. V.44. №2. P.435.
5. Ермолаев О. П. // Весці АН Беларусі. Сер.фіз.-мат.наук. 1995. №1. С.70.
6. Ермолаев О. П. и др. // Сб. тезисов 6-ой Республиканской конф. молодых ученых по физике. Мн., 1980. С.128.
7. Кожух М. Л., Липкина Н. С., Шлимак И. С. // ФТП. 1985. Т.19. №2. С.331.
8. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979.
9. Ермолаев О. П. // Вестн. БГУ. Сер.1. 1996. №1. С.19.
10. Мотт Н., Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах: В 2 т. М., 1982.

УДК 548.5.669.76

В.Г.ШЕПЕЛЕВИЧ

### СТРУКТУРА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОЛЬГИ ТРОЙНЫХ СПЛАВОВ Bi-10 ат.% Sb-Sn, ПОЛУЧЕННОЙ СВЕРХБЫСТРОЙ ЗАКАЛКОЙ ИЗ РАСПЛАВА

The rapidly quenched foils of Bi-10 at. per cent Sb-Sn alloys are characterized by the  $(10\bar{1}2)$  texture. The electrical properties of rapidly quenched foils are determined by holes in the low-temperature range, while an additional contribution to the transport processes is made by electrons.

Сплавы висмут-сурьма, содержащие 8–12 ат.% Sb, в которых процессы переноса определяются преимущественно высокоподвижными электронами, используются в качестве  $n$ -ветви низкотемпературных термоэлектрических устройств [1]. Исследования, представленные в работе [2], свидетельствуют о том, что дифференциальная термо-

ЭДС по абсолютной величине фольги указанных составов, полученной сверхбыстрой закалкой из расплава, превосходит дифференциальную термо-ЭДС монокристаллических образцов [3]. Успешным оказалось использование метода сверхбыстрой закалки из расплава при получении термоэлектрических материалов на основе халькогенидов полуметаллов [4]. В связи с этим представляет интерес исследовать закономерности формирования структуры и электрические свойства быстрозатвердевшей фольги тройных сплавов Bi-10 ат. % Sb-Sn, в которой олово действует как акцептор, а дифференциальная термо-ЭДС имеет положительный знак, благодаря чему указанные материалы могут быть использованы в качестве *p*-ветви термоэлектрических устройств.

Фольга сплавов Bi-10 ат. % Sb –  $x$  ат. % Sn ( $x = 0,2-4$  ат. %) получена сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы. Капля расплава, находящаяся в специальной ампуле, выплескивалась на внутреннюю полированную поверхность вращающегося медного цилиндра. При кристаллизации образовывалась фольга длиной до 15 см и шириной до 1 см. Толщина фольги, используемой для исследования, составляла 20–60 мкм. Скорость охлаждения расплава при получении фольги достигала  $10^6$  К/с [5].

Рентгеноструктурные исследования быстрозатвердевшей фольги сплавов Bi-10 ат. % Sb-Sn выполнены на дифрактометрах ДРОН-2 и ДРОН-3. Параметр элементарной ячейки  $c$  определялся по положению дифракционной линии 000 12 в кобальтовом излучении. При исследовании текстуры использован метод "обратных" полюсных фигур. Полюсные плотности дифракционных линий  $10\bar{1}2$ ,  $10\bar{1}4$ ,  $11\bar{2}0$ ,  $10\bar{1}5$ ,  $20\bar{2}2$ ,  $10\bar{1}7$ ,  $20\bar{2}5$ ,  $21\bar{3}0$ ,  $12\bar{3}5$  и 0009 рассчитывались по методу Харрисса [6]. Измерения удельного электросопротивления  $\rho$ , коэффициента Холла  $R$  и дифференциальной термо-ЭДС  $\alpha$  проведены в интервале 77–293 К.

На рис.1 представлен график зависимости относительного изменения параметра элементарной ячейки  $\Delta c/c$  от концентрации олова. Наличие излома на графике указывает на ограниченную растворимость олова в твердом растворе Bi-10 ат. % Sb, величина которой составляет ~1,5 ат. %. Следует отметить для сравнения, что максимальная растворимость олова в висмуте составляет 0,4 ат. %, а в сурьме – 3 ат. % [7].

Из таблицы, в которой представлены полюсные плотности дифракционных линий, в быстрозатвердевшей фольге сплавов Bi-10 ат. % Sb-Sn наблюдается четко выраженная текстура ( $10\bar{1}2$ ). Более 80% объема фольги ориентировано плоскостями  $\{10\bar{1}2\}$  параллельно ее поверхности. Формирование наблюдаемой текстуры в быстрозатвердевших сплавах обусловлено кристаллической структурой и ориентацией ковалентных связей. Каждый атом в кристалле связан с тремя другими атомами ковалентными связями, образующими между собой угол  $95,5^\circ$  [8]. При этом две ковалентные связи каждого атома находятся в плоскостях  $(01\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}2)$  и  $(11\bar{0}2)$ , а третья связывает два атома, расположенные в соседних плоскостях такого же типа. По этой причине на межфазной границе кристалл–жидкость, совпадающей с плоскостями  $(01\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}2)$  и  $(11\bar{0}2)$ , образуется высокая плотность активных центров в виде ненасыщенных ковалентных связей. К ним легко присоединяются атомы из жидкой фазы, образуя ступеньки атомного размера. Атом, находящийся на краю ступеньки, имеет ненасыщенную ковалентную связь, ориентированную вдоль указанных кристаллографических плоскостей, что также способствует присоединению атома из жидкости. При переохлаждении расплава происходит быстрое боковое перемещение ступеньки, вызывающее активный рост кристаллитов с данной ориентировкой, что и обуславливает формирование текстуры ( $10\bar{1}2$ ) [9].

**Полюсные плотности дифракционных линий  
фольги сплавов Bi-10 ат. % Sb-Sn**

| Дифракционная линия | Содержание олова, ат. % |     |     |     |     |
|---------------------|-------------------------|-----|-----|-----|-----|
|                     | 0,5                     | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
| $10\bar{1}2$        | 8,4                     | 8,6 | 8,5 | 8,9 | 8,3 |
| $10\bar{1}4$        | 0,6                     | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,2 |
| $11\bar{2}0$        | 0,0                     | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 |
| $10\bar{1}5$        | 0,1                     | 0,1 | 0,2 | 0,0 | 0,3 |
| $20\bar{2}2$        | 0,0                     | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |
| $10\bar{1}7$        | 0,1                     | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| $20\bar{2}5$        | 0,1                     | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| $21\bar{3}0$        | 0,0                     | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,1 |
| $12\bar{3}5$        | 0,1                     | 0,1 | 0,1 | 0,0 | 0,1 |
| 0009                | 0,5                     | 0,8 | 0,4 | 0,3 | 0,5 |

Графики концентрационных зависимостей удельного электросопротивления  $\rho(x)$  и дифференциальной термо-ЭДС  $\alpha(x)$  при  $T=293\text{K}$  представлены на рис.1, а температурные зависимости  $\rho(T)$ ,  $\alpha(T)$  и  $R(T)$  сплава Bi-10 ат.% Sb-1,5 ат.% Sn – на рис.2. Положительный знак  $\alpha$  и  $R$  в низкотемпературной области свидетельствует о том, что процессы переноса определяются дырками. Для данного сплава при 77K концентрация дырок  $p = 2,3 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$ , а их подвижность  $\mu = 0,017 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Повышение температуры приводит к появлению электронов в зоне проводимости за счет их теплового возбуждения из валентной зоны. Подвижность электронов в сплавах Bi-Sb, содержащих 8–12 ат.% Sb, выше подвижности дырок. По этим причинам с повышением температуры происходит изменение знака коэффициента Холла, появление максимума в зависимости  $\alpha(T)$  при 230K и незначительное отклонение температурной зависимости  $\rho(T)$  от линейного закона для быстрозатвердевшей фольги сплава Bi-10 ат.% Sb-1,5 ат.% Sn. В исследуемых тройных сплавах при всех температурах удельное электросопротивление монотонно уменьшается с ростом содержания олова, что обусловлено увеличением концентрации дырок. Концентрационная зависимость  $\alpha(x)$  при комнатной температуре характеризуется экстремумом. Максимальная величина  $|\alpha|$  при 293K наблюдается в сплаве Bi-10 ат.% Sb-2 ат.% Sn.

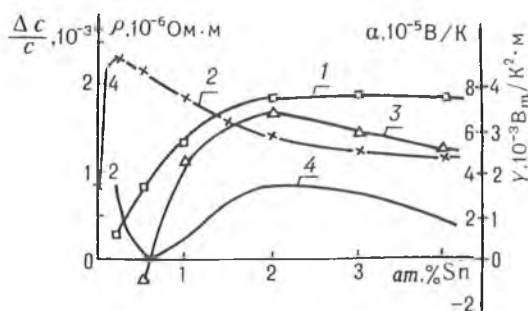


Рис.1. Концентрационные зависимости  $\Delta\epsilon/\epsilon$  (1),  $\rho$  (2),  $\alpha$  (3) и  $Y$  (4) быстрозатвердевшей фольги сплавов Bi-10 ат.% Sb-Sn при комнатной температуре

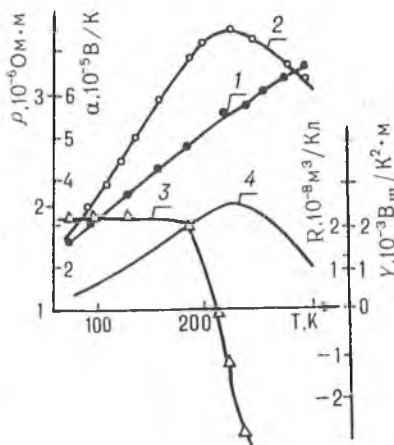


Рис.2. Температурные зависимости  $\rho$  (1),  $\alpha$  (2),  $R$  (3) и  $Y$  (4) для быстрозатвердевшей фольги сплава Bi-10 ат.% Sb-1,5 ат.% Sn

Важным параметром, характеризующим термоэлектрические материалы, является термоэлектрический коэффициент мощности  $Y = \alpha^2/\rho$ . Его значения рассчитаны, а графики концентрационной зависимости  $Y(T)$  при 293K и температурной зависимости  $Y(T)$  для сплава Bi-10 ат.% Sb-1,5 ат.% Sn представлены на рис.1 и 2. Максимальное значение термоэлектрического коэффициента мощности для тройного сплава, содержащего 1,5 ат.% Sn, наблюдается при  $T=230\text{K}$ . При комнатной температуре наибольшим значением  $Y$  характеризуется сплав Bi-10 ат.% Sb-2 ат.% Sn. В связи с этим в качестве  $p$ -ветви низкотемпературных термоэлектрических устройств может быть использована быстрозатвердевшая фольга сплавов Bi-10 ат.% Sb, содержащая 1,5–3 ат.% олова.

1. Иорданишвили Е. К. Термоэлектрические источники питания. М., 1968.
2. Шепелевич В. Г. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. 1988. Т.24. №4. С.542.
3. Гицу Д.В., Голбан Т.М., Канцер В.Г., Мунтяну Ф.М. Явление переноса в висмуте и его сплавах. Кишинев, 1983.
4. Глазов В.М., Ятманов Ю.В. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. 1986. Т.23. №2. С.36.
5. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
6. Русаков А. А. Рентгенография металлов. М., 1977.
7. Хансен М., Андерко К. Структура двойных сплавов. М., 1962.
8. Кребе Г. Основы кристаллохимии неорганических соединений. М., 1971.
9. Шепелевич В. Г. // Кристаллография. 1991. Т.36. №1. С.238.

# ОБ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{BiO}_3$

The electronic structure of high-temperature superconductors  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{BiO}_3$  is calculated by using the first-principles pseudo-potential method in the local-density approximation. The density of states at Fermi energy in the concentration range  $0 \leq x \leq 0.5$  are presented.

Соединение  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{BiO}_3$  (ВКВО) является высокотемпературным сверхпроводником ( $T_c^{\text{max}} = 30\text{K}$  при  $x = 0,4$ ) с окончательно невыясненным механизмом фазового превращения диэлектрик–металл с ростом содержания калия [1]. Существующие эмпирические модели [1] электронной структуры ВКВО, использующие представления о так называемой локализованной дырке на линии связи  $\text{Bi}-\text{O}$ , качественно объясняют появление диэлектрической щели для малых значений  $x$  и ее исчезновение с ростом содержания калия. Для более детального изучения электронной структуры ВКВО необходимо проведение микроскопических расчетов электронного энергетического спектра. До настоящего времени исследование зонной структуры ВКВО для произвольного значения  $x$  проводилось методом жестких зон [2]. Суть такого подхода состоит в том, что за основу принимается зонная структура висмутата бария  $\text{BaBiO}_3$  (ВВО), а легирование калием только смещает положение уровня Ферми. Модель жестких зон в известной мере применима для малых значений  $x$ . В случае больших степеней легирования ( $x \geq 0,5$ ), при которых ВКВО переходит в металлическое состояние, происходит существенная перестройка энергетических зон и необходимо использование более точных подходов.

В данной работе в рамках функционала локальной плотности *ab initio* при использовании методики самосогласованных псевдопотенциальных вычислений [3] получена зонная структура ВВО ( $x = 0$ , пространственная группа  $O_h^1$ ) и ВКВО ( $x = 0,5$ , пространственная группа  $D_{4h}^1$ ). Так как элементарная ячейка упорядоченной структуры ВКВО ( $x = 0,5$ ) содержит десять атомов, то использование стандартного базиса плоских волн (100 волн на атом) приводит к переполнению данного базиса и разного рода неустойчивостям вычислительной схемы. В связи с этим при организации самосогласованной процедуры был применен ранее реализованный метод [4], использующий смешанный базис. Для вычисления собственных значений гамильтониана Кона–Шема с точностью  $\sim 0,1$  эВ при разложении одноэлектронной волновой функции валентных электронов учитывались 100 плоских волн, а также гауссовы  $6s$ -орбитали атома бария,  $4s$ -орбитали атома калия,  $6s$ - и  $6p$ -орбитали атома висмута,  $2s$ - и  $2p$ -орбитали атома кислорода.

В результате проведенных расчетов было установлено, что соединения ВВО и ВКВО в нормальном состоянии являются металлами. Наличие металлической проводимости у ВКВО при  $x = 0,5$  подтверждается на опыте [1]. Вместе с тем при малых значениях  $x$  (включая  $x = 0$ ) экспериментальные данные свидетельствуют о наличии заперщенной зоны  $\sim 2$  эВ [1]. Наличие данной диэлектрической щели по всей видимости объясняется тем, что кристалл ВВО со структурой перовскита ( $O_h^1$ ) является нестабильным и его реальные образцы имеют искаженную структуру [5].

Представляет интерес получение численных данных об изменении плотности состояний на уровне Ферми с ростом содержания калия, так как в области  $0,37 \leq x \leq 0,53$  соединение ВКВО становится сверхпроводником. Согласно расчетам, в приближении жестких зон [2] плотность состояний  $N(\epsilon_F)$  с ростом  $x$  от 0 до 0,5 увеличивается в 1,08 раза, т.е., по существу, не изменяется. Результаты расчетов данной работы показывают, что величина  $N^{\text{ВКВО}}(\epsilon_F)/N^{\text{ВВО}}(\epsilon_F)$  равна 1,51. Такое увеличение объясняется тем, что в энергетическом спектре соединения ВКВО, по сравнению со спектром висмутата бария, уровень Ферми дополнительно пересекает энергетические ветви, генетически происходящие из  $4s$ -уровней атома калия.

Таким образом, увеличение степени легирования калием в системе ВКВО приводит к существенному увеличению плотности состояний на уровне Ферми. При этом микроскопические псевдопотенциальные расчеты дают возможность детально исследовать перестройку энергетических зон при переходе соединения ВКВО в металлическое состояние. Однако на вопрос о том, является ли увеличение  $N(\epsilon_F)$  определяющим для образования сверхпроводящей фазы для ВКВО, ответить однозначно нельзя, так как

при  $\chi > 0,53$  сверхпроводимость вообще подавляется вследствие структурного фазового перехода.

1. Аншукова Н.В., Головашкин А.И., Иванова Л.И. и др. // ЖЭТФ. 1995. Т.108. Вып.6(12). С.2132.
2. Mattheiss L.F., Hamann D.R. // Phys. Rev. Lett. 1988. V.60. №25. P.2681.
3. Ревинский А.Ф. // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1992. №2. С.47.
4. Louie S.G., Ho K.M., Cohen M.L. // Phys. Rev. B. 1979. V.19. №14. P.1774.
5. Клиникова Л.А., Барковский Н.В., Филатова М.В. и др. // СФХТ. 1992. Т.5. №9. С.1691.

УДК 535.37

И.М. ГУЛИС, А.И. КОМЯК, К.А. САЕЧНИКОВ, В.А. ЦВИРКО

## СПЕКТРОСКОПИЯ СЛОЖНЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ, ОХЛАЖДЕННЫХ В СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕ

Consideration is being given to the results of investigation into the electron-vibrational spectroscopy of isolated ultracooled complex organic molecules and their Van-der-Waals complexes.

Фотофизические процессы, протекающие в электронно-возбужденных состояниях сложных органических молекул, представляют интерес не только в фундаментальном аспекте, но и в связи с их определяющей ролью в важнейших фотобиологических процессах (механизмы фотосинтеза, фоторецепции), в фотохимии, а также в многочисленных технических приложениях (активные лазерные среды и элементы управления параметрами лазерного излучения, фоторегистрирующие среды, сцинтилляторы и светотрансформаторы, средства для люминесцентного анализа и контроля, перспективные устройства преобразования солнечной энергии, включая получение водорода и непосредственное преобразование световой энергии в электрическую).

Одним из наиболее существенных факторов, осложняющих получение информации о механизмах фотофизических процессов в сложных молекулах из спектроскопических данных, является имеющаяся в большинстве систем бесструктурность электронно-колебательных полос поглощения и испускания сложных молекул. С точки зрения спектроскопии указанная бесструктурность (неразрешенность отдельных электронно-колебательных переходов в пределах широкой полосы) не позволяет детально исследовать роль колебательных движений в фотофизике возбужденных состояний, ограничивает спектральное разрешение (типичные ширины бесструктурных электронно-колебательных полос составляют  $2\text{--}4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ ), не позволяя выявлять малые спектральные изменения при воздействии на молекулу электрических и магнитных полей, а также резко ограничивает экспериментальные возможности исследования эффектов, обусловленных взаимодействием сложной молекулы с окружением (эти эффекты играют существенную роль в фотофизике систем на основе сложных молекул). Причины бесструктурности электронно-колебательных спектров сложных молекул достаточно подробно исследованы [1,2]. Большое число колебательных степеней свободы многоатомных молекул обуславливает высокую плотность колебательных подуровней; в конденсированной среде (в растворах) дополнительными факторами уширения полос, принадлежащих отдельным электронно-колебательным переходам, является взаимодействие электронного движения с фононами матрицы, а также неоднородное уширение, обусловленное флуктуациями энергии взаимодействия молекул с окружением. Кроме того, при ненулевых температурах электронно-колебательные спектры представляют собой результат наложения последовательностей переходов с различных термически заселенных колебательных подуровней исходного для перехода электронного состояния. Для молекул в газовой фазе последний фактор в совокупности с вращательным уширением полос отдельных вибронных переходов является основной причиной формирования широких бесструктурных электронных полос.

Спектроскопическая информативность электронно-колебательных спектров сложных молекул резко повысилась с появлением методов, позволяющих получать тонкоструктурные спектры молекул в конденсированной фазе при низких температурах (метод матриц Шпольского, сужение полос в спектрах флуоресценции при селективном лазерном возбуждении, выжигание узких спектральных провалов в неоднородно уширенных полосах поглощения сложных молекул).

Однако совершенно уникальные возможности открылись с появлением в конце 70-х – начале 80-х гг. нового метода спектроскопии молекул, охлажденных в сверхзвуковой струе [3]. Идея метода принципиально проста. Исследуемое вещество переводится в газовую фазу (возгоняется), пары смешиваются с так называемым газом-носителем

лем (обычно это инертные газы – гелий, аргон), насыщенный парами газ-носитель, находящийся при относительно высоком давлении (доли атмосферы ÷ единицы атмосфер) через отверстие (сопло) малого диаметра (десятки, сотни микрон) расширяется в вакуумную камеру. В результате адиабатического расширения в формирующейся при истекании струе газ-носитель охлаждается. При относительно высоких плотностях частиц вблизи сопла в результате столкновений происходит эффективный энергообмен между газом-носителем и молекулами исследуемого вещества и достигается резкое снижение колебательной и вращательной температур молекулярного ансамбля. По мере удаления от сопла концентрация частиц падает, струя становится "безстолкновительной" с замороженным неравновесным распределением частиц по энергетическим уровням. Для типичных режимов вращательная температура получаемых таким путем изолированных молекул лежит в пределах 1–5 К, колебательная температура – 5–30 К. С учетом того, что самые низкие колебательные частоты в сложных молекулах имеют значения порядка  $100\text{ см}^{-1}$ , подавляющее число молекул ансамбля находится на нулевом колебательном подуровне. Таким образом, образуется идеальный со спектроскопической точки зрения объект – ансамбль сверххолодных изолированных молекул. (Подробно динамика охлаждения проанализирована в [4]).

Спектроскопические исследования получаемого молекулярного ансамбля могут проводиться разнообразными методами [5–7]. Одним из самых простых в методическом плане и в то же время весьма информативным является флуоресцентный, реализуемый в двух вариантах: 1) регистрация спектров возбуждения флуоресценции с использованием в качестве источника перестраиваемого узкополосного лазера и общей (неразрешенной по спектру) флуоресценции (получаемый спектр по положению полос соответствует спектру поглощения); 2) регистрация спектров флуоресценции при селективном возбуждении молекул на определенный колебательный подуровень возбужденного электронного состояния. Кроме того, ценную информацию дает изучение кинетик затухания флуоресценции из селективно заселяемых вибронных состояний.

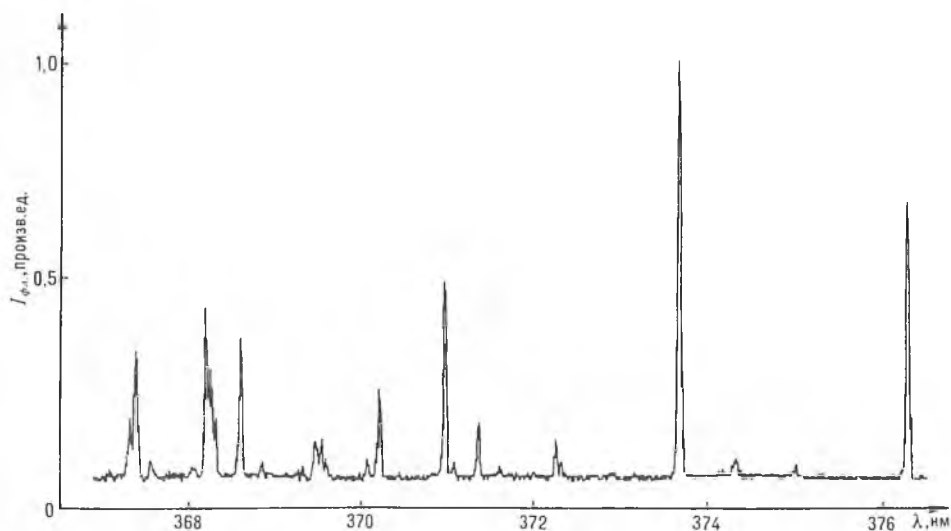
Наряду с исследованием фотофизических процессов в изолированных сверххолодных молекулах, метод охлаждения в сверхзвуковой струе открывает возможность изучения ван-дер-ваальсовых комплексов сложных молекул с атомными и молекулярными лигандами (например, с молекулами типа растворителей, используемых при исследовании сложных органических молекул в конденсированной фазе). Такие комплексы, связанные слабыми межмолекулярными силами, являются, благодаря достигаемой в струе низкой температуре, достаточно устойчивыми и могут формироваться в актах столкновений сложных молекул с молекулами компонента, вводимого в качестве добавки в газ-носитель, т.е. "синтезироваться" непосредственно в сверхзвуковой струе. Комплексы представляют собой идеальные модельные объекты для исследования физики межмолекулярных взаимодействий (ММВ) и их спектроскопических проявлений. Отметим, что исследование деталей механизмов ММВ в конденсированной фазе существенно осложняется тем обстоятельством, что в этом случае сложная молекула взаимодействует со сложным ансамблем молекул окружения. Возможность формирования в сверхзвуковой струе комплексов сложная молекула–растворитель различного состава (1:1, 1:2 и т.д.) позволяет заполнить "зазор" между изолированной молекулой и молекулой, находящейся в конденсированной среде.

Исследования в области спектроскопии изолированных сверххолодных сложных молекул и комплексов в последние полтора десятилетия активно ведутся в США, Японии, Великобритании, Франции, Швейцарии, ФРГ. В Беларуси исследования в области поляризации флуоресценции изолированных струйно-охлажденных молекул проводятся в Институте молекулярной и атомной физики АНБ под руководством В.А. Толкачева. В БГУ работы в области лазерной спектроскопии сверххолодных молекул и комплексов начаты в 1985 г. с создания одной из первых в СССР установок [8]. Кратко проанализируем некоторые результаты, полученные нами в этом направлении, которые одновременно раскрывают возможности метода в плане решения фундаментальных задач молекулярной спектроскопии и фотофизики.

### 1. Изолированные сложные молекулы

На примере молекул производных фталимида проанализированы закономерности формирования колебательной структуры вибронных спектров сложных изолированных молекул. На рисунке приведен спектр возбуждения 3-аминофталимида в сверхзвуковой струе. Обратим внимание на то, что на рисунке участок спектра дан в диапазоне 8 нм, полуширина же бесструктурной полосы, наблюдаемой в растворе или в газовой фазе (без охлаждения), составляет ~40 нм. Очевидно резкое повышение информативности, достигаемое при адиабатическом охлаждении. Установлено, что характер структуры спектров определяется активностью низкочастотных ( $211\text{ см}^{-1}$  для 3-аминофталимида и  $203\text{ см}^{-1}$  для 3-амино-N-метилфталимида) колебаний [9]. Распределение интенсивностей в прогрессиях по этой частоте проанализировано в рамках подхода, базирующего-

ся на адиабатическом, гармоническом и франк-кондоновском приближениях. Соответствие расчета с экспериментом наблюдается для спектров флуоресценции как при возбуждении частотой 0–0-перехода, так и при селективном заселении уровней с энергией  $200\text{ см}^{-1}$ . Последнее является однозначным свидетельством отсутствия внутримолекулярного колебательного перераспределения в исследуемой системе при возбуждении уровня с энергией  $200\text{ см}^{-1}$ . Однако при возбуждении системы на второй колебательный подуровень данной моды расчетное распределение интенсивностей обнаруживает резкое расхождение с экспериментальным. Анализ показал, что причиной расхождения является процесс внутримолекулярного колебательного перераспределения, причем установлена ранее неизвестная особенность процесса, заключающаяся в его ступенчатом характере: процесс может протекать с сохранением возбуждения одного из двух колебательных квантов оптически активной моды (традиционными являются представления о преобразовании всей энергии исходно возбуждаемого состояния в энергию колебаний так называемых "темных" состояний).



Спектр возбуждения флуоресценции 3-аминофталимида ( $\nu_{00}=26563\text{ см}^{-1}$ )

Высокое разрешение, достигаемое с использованием метода, позволяет исследовать проявления изотопозамещения в электронно-колебательных спектрах сложных молекул. Так, для аминозамещенных фталимидов установлены спектроскопические эффекты при изотопозамещении атомов аминогруппы. Предложен и обоснован новый механизм влияния изотопозамещения на частоты электронных переходов, не сводящийся к известному (реализующемуся через изменения значений нулевой колебательной энергии), а имеющий в своей основе изменения в распределении зарядовой плотности в молекуле.

## 2. Ван-дер-ваальсовские комплексы

Спектральные сдвиги, наблюдающиеся при формировании ван-дер-ваальсовских комплексов сложных молекул, несут информацию о структуре формирующихся комплексов и механизмах взаимодействий, ответственных за их формирование. Так, из экспериментально зарегистрированных спектров возбуждения флуоресценции определены значения спектральных сдвигов при формировании комплексов периден–Ag с различным числом атомов аргона [10]. Предложена методика расчета, основанная на использовании атом-атомных потенциалов, устойчивых конфигураций комплексов и соответствующих этим конфигурациям величин длинноволновых сдвигов полос 0–0-перехода относительно полосы 0–0-перехода изолированной молекулы. Расчет дал результаты, находящиеся в хорошем согласии с экспериментом. Привязка расчетных значений сдвигов к экспериментальным проводилась только для комплекса перилена с одним атомом аргона, для комплексов с числом атомов аргона от двух до пяти различной пространственной конфигурации, при этом достигалось согласование расчетных и экспериментальных значений сдвигов с точностью  $1\text{--}4\text{ см}^{-1}$ .

Решена также и существенно более сложная задача описания спектральных сдвигов при формировании ван-дер-ваальсовских комплексов полициклических молекул с различными квазиточечными лигандами (ряд лигандов, включающий атомы инертных

газов и метан) [11]. Подход базируется на моделировании ароматической молекулы как части графитной решетки, что позволяет использовать в качестве параметров для расчета известные из экспериментов по сорбции инертных газов на графите значения равновесных расстояний адсорбированный атом – плоскость решетки, а также энергии связи. Показано, что для корректного описания спектральных сдвигов, определяемых в данных системах дисперсионными взаимодействиями, необходим учет изменений равновесных расстояний лиганда от плоскости молекулы при электронном возбуждении (которые берутся либо из данных по вращательным спектрам комплексов, либо из соотношений интенсивностей линий в прогрессиях по ван-дер-ваальсовским модам), а также учет изменений потенциалов ионизации как в ряду лигандов, так и при электронном возбуждении. В результате получено соответствие расчетных сдвигов с экспериментально наблюдаемыми для комплексов бензола, перилена, тетрацена с квазиточечными лигандами с точностью  $1\text{--}3\text{ см}^{-1}$ , в то время как имеющиеся в литературе попытки описания дают расхождения расчета с экспериментом до  $40\text{ см}^{-1}$ .

Экспериментально исследованы спектральные сдвиги при образовании комплексов производных антрацена с рядом полярных и неполярных лигандов (спирты, галогензамещенные углеводороды, вода, аммиак, ацетонитрил, аргон) [12]. В частности, для полярной молекулы 9-цианоантрацена показано, что сдвиги спектров являются низкочастотными и лежат в диапазоне  $50\text{--}450\text{ см}^{-1}$ . Ряд линий в спектрах интерпретированы как отвечающие 0–0-переходам комплексов сложного состава, включающих, например, в качестве лигандов молекулу растворителя и один (или несколько) атом аргона. Установлены экспериментальные свидетельства существования структурных изомеров комплексов, показано, что их относительные концентрации определяются условиями формирования комплексов в сверхзвуковой струе. На основании результатов анализа величин сдвигов при образовании комплексов с неполярными и полярными лигандами (протонными и апротонными) сделано заключение, что в формировании спектральных сдвигов универсальные межмолекулярные взаимодействия играют определяющую роль. Этот вывод согласуется с результатами недавних работ Н.Г. Бахшиева [13,14], в которых предложена модель описания спектральных сдвигов в ван-дер-ваальсовских комплексах и с использованием экспериментальных результатов по сдвигам для комплексов 9-цианоантрацена продемонстрирована корреляция величин сдвигов с молекулярными параметрами лигандов – поляризуемостью и дипольным моментом.

Определены спектральные сдвиги при формировании комплексов 3-аминофталимида с аргонном, водой, метанолом, ацетоном, аммиаком, ацетонитрилом [15]. Как оказалось, для исследованного набора лигандов спектральные сдвиги не описываются моделью, базирующейся на представлениях о формировании в основном состоянии ориентационно-упорядоченного комплекса и предсказывающей рост величины красного сдвига с увеличением поляризуемости и дипольного момента лиганда. В частности, для ацетона, аммиака красные сдвиги аномально малы, а для ацетонитрила, имеющего наибольший дипольный момент, сдвиг оказывается синим. Предложена качественная модель, позволяющая объяснить экспериментальные результаты на базе представлений о возможности формирования в основном состоянии комплексов, в которых дипольная молекула лиганда ориентирована относительно дипольной сложной молекулы таким образом, что ориентационная энергия существенно превышает минимальное значение, соответствующее параллельной ориентации дипольных моментов молекул-партнеров, и может быть даже положительной (условно такие комплексы названы ориентационно-напряженными). Возможность реализации таких ориентационно-напряженных структур вытекает из сравнений значений энергии ориентационного и дисперсионного взаимодействий. По проведенным оценкам, дисперсионные взаимодействия, обеспечивая сопоставимый (или меньший) вклад в величину спектрального сдвига по сравнению с вкладом, который может реализовываться за счет ориентационных взаимодействий, существенно превышают последние по энергиям взаимодействий в основном состоянии. В связи с этим структура комплекса определяется в первую очередь дисперсионными взаимодействиями, которые в силу доминирования по энергии могут задать комплексу ориентационно-напряженную конфигурацию.

Метод получения тонкоструктурных спектров путем охлаждения молекул (комплексов) в сверхзвуковой струе открывает новые возможности для исследования механизмов процессов преобразования энергии в возбужденных электронно-колебательных состояниях. В частности, путем селективного возбуждения системы на определенных колебательные подуровни первого синглетно-возбужденного электронного состояния с последующим измерением квантового выхода флуоресценции или времени затухания извлекается информация о зависимостях вероятностей безызлучательных переходов от запаса колебательной энергии [16–19]. В свою очередь, изменения квантовых выходов флуоресценции с селективно заселяемых вибронных уровней, имеющие место при формировании комплекса сложной молекулы с некоторым лигандом, несут информацию о механизмах влияния комплексобразования (ММВ) на вероятности безызлуча-

тельных переходов. Такого рода исследования выполнены для комплексов производных антрацена с аргоном. Проанализированы различные возможные механизмы влияния комплексообразования на вероятности интеркомбинационной конверсии: в частности, изменение за счет неидентичного сдвига уровней синглетной и триплетной подсистем резонансных условий для интеркомбинационной конверсии; колебательная преддиссоциация комплекса, приводящая к снижению запаса колебательной энергии сложной молекулы; преобразование части внутримолекулярной колебательной энергии в энергию межмолекулярных ван-дер-ваальсовых колебаний.

Предложен и обоснован механизм влияния комплексообразования на вероятности безызлучательных переходов, заключающийся в индуцированном ван-дер-ваальсовскими модами колебательном перераспределении, приводящем к трансформации исходно возбуждаемых оптически активных (в электронно-колебательном переходе с нулевого колебательного подуровня основного состояния) состояний в оптически неактивные ("темные" состояния), характеризующиеся повышенной вероятностью безызлучательного перехода на колебательные уровни триплетной подсистемы. Нерегулярный характер изменений квантовых выходов флуоресценции 9,10-дихлорантрацена при образовании комплекса с аргоном, имеющий место при возбуждении уровней с относительно низкими ( $300\text{--}400\text{ см}^{-1}$ ) значениями колебательной энергии, однозначно свидетельствует о действии механизма, связанного с изменением резонансных условий. Рост квантовых выходов при больших запасах колебательной энергии связан с преобразованием внутримолекулярной энергии в энергию ван-дер-ваальсовых колебаний и (или) с колебательной преддиссоциацией. Наблюдаемое для 9-цианоантрацена снижение квантовых выходов при комплексообразовании объясняется переводом заселенности с оптически активных на оптически неактивные уровни, что убедительно подтверждается имеющимися данными по сокращению длительности флуоресценции 9-цианоантрацена при переходе от холодной струи к парам, т.е. к условиям, при которых в возбужденном состоянии оказываются заселенными уровни, оптически неактивные в переходе с нулевого колебательного подуровня основного состояния.

Процессы преобразования колебательной энергии в изолированных ван-дер-ваальсовых комплексах исследованы с использованием в качестве тестовых систем комплексов перилена-аргон [10] и 9-цианоантрацен-аргон [20]. Установлено, что образование комплексов приводит к резкому снижению запаса колебательной энергии, требуемого для включения процесса колебательного перераспределения. При незначительном превышении запаса колебательной энергии над энергией связи происходит эффективная колебательная преддиссоциация комплекса, первоначально сосредоточенной во внутримолекулярных колебаниях сложной молекулы, в энергию межмолекулярных ван-дер-ваальсовых колебаний.

В заключение отметим, что интенсивное развитие исследований в области спектроскопии изолированных сверххолодных молекул дает результаты, необходимые для формирования целостной картины процессов, протекающих в вибронно-возбужденных состояниях молекул. Значимость этих результатов для развития фотохимии, лазерохимии, лазерного разделения изотопов и других перспективных приложений несомненна.

1. Агранович В. М., Хохштрассер Р. М. Спектроскопия и динамика возбуждений в конденсированных молекулярных системах. М., 1987.
2. Борисевич Н. А. Возбужденные состояния сложных молекул в газовой фазе. Мн., 1967.
3. Levy D. H., Wharton L., Smalley R. E. // *Acc. Chem. Res.* 1977. V.10 P.1.; Zewail A. H. // *Laser Chem.* 1983. V.2. P.55.; Levy D. H. // *Ann. Rev. Phys. Chem.* 1980. V.31 P.197.
4. Levy D. H. // *In Quant. dynamics of molecular ed* R.J. New York, 1980 P.115.
5. Smalley R. E., Wharton L., Levy D. H. // *Accounts of Chem. Research.* 1977. V.10. P.139.
6. Vaida V. // *Accounts Chem. Res.* 1986. V.19. P.114.
7. Ito M. // *Vibr. Spectra and Struct. Ser. Adv.* Amsterdam e.a., 1986. V.15. P.1.
8. Гулис И. М., Саечников К. А., Цвирко В. А. // *Вестн. БГУ. Сер.1.* 1989. №2. С.19.
9. Гулис И. М., Комяк А. И., Саечников К. А. и др. // *ЖПС.* 1989. Т. 50. №3. С.385.
10. Dostader M. M., Gulis I. M., Schwartz S. A. et al. // *Chem. Phys. Lett.* 1984. V.112. P.483.
11. Гулис И. М., Комяк А. И., Саечников К. А. // *ЖПС.* 1995. Т.62. №6. С.140.
12. Гулис И. М., Саечников К. А. // *Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1989. С.63.
13. Бахшиев Н. Г. // *Опт. спектр.* 1992. Т.72. С.371.
14. Он же // *Там же.* 1991. Т.71. С.948.
15. Гулис И. М., Саечников К. А. // *ЖПС.* 1994. Т.61. №1-2. С.39.
16. Hirayama S., Shobatake K., Tabayashi K. // *Chem. Phys. Lett.* 1985. V.121. P.228.
17. Amirav A., Jortner J. // *Chem. Phys. Lett.* 1986. V.132. P.335.
18. Amirav A., Horwitz C., Jortner J. // *J. Chem. Phys.* 1988. V.88. P.3092.
19. Hirayama S. // *J. Chem. Phys.* 1986. V.85 P.6867.
20. Гулис И. М., Комяк А. И., Саечников К. А. // *ЖПС.* 1992. Т.56. С.793.



УДК 517.9

А.Б. АНТОНЕВИЧ, Я.В. РАДЫНО

## О ТЕОРИИ МНЕМОФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

The basic ideas of the theory of mnemofunctions or "new generalized functions" which admit everywhere defined multiplication are demonstrated. Differential equations, spectral theory of linear operators and stochastic differential equations are described in sense of mnemofunctions in this paper.

### Введение

Теория распределений привела к существенному прогрессу в ряде математических дисциплин, в том числе и в теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными и линейной математической физике. Лоран Шварц показал, что невозможно определить ассоциативное умножение распределений [1]. Этот факт является препятствием к использованию распределений в теории нелинейных уравнений и теории уравнений с разрывными коэффициентами. В частности, это приводит к тому, что невозможно придать смысл таким объектам, как  $\delta^2$ ,  $\delta'\delta$  ( $\delta$ -функция Дирака), которые широко используются, например, в квантовой теории поля.

Рассматриваемая проблема очень естественна и имеет многочисленные применения. Поэтому она привлекла внимание ученых сразу же после создания теории распределений. Обзор работ по этой тематике имеется, например, в [2]. В данной статье излагаются основные идеи, используемые при решении проблемы умножения распределений, а также указываются некоторые направления приложений.

Нетривиальность этой проблемы видна на следующем примере. Пусть  $u, v \in D'(\mathbf{R})$  и пусть  $u_n, v_n \in C^\infty(\mathbf{R})$  такие, что  $u_n \rightarrow u$ ,  $v_n \rightarrow v$  в  $D'(\mathbf{R})$ . Последовательность произведений  $u_n v_n$  может не сходить в  $D'(\mathbf{R})$ , а может иметь предел, зависящий от выбора последовательностей  $u_n$  и  $v_n$ . Например, для любого  $a \in C^\infty(\mathbf{R})$  последовательность  $u_n(x) = a(x)\sin(nx)$  сходится к нулю в  $D'(\mathbf{R})$ , в то время как последовательность  $u_n^2(x)$  сходится к  $a^2(x)/2$ .

Стандартный подход к решению рассматриваемой проблемы основывается на определенном выборе последовательностей  $u_n$  и  $v_n$ . В этом случае определить произведение можно для некоторых пар  $u$  и  $v$ . Другой подход основан на введении вместо распределений новых объектов, которые, с одной стороны, обладают основными свойствами распределений, и, с другой — допускают хорошо определенное умножение, т.е. образуют ассоциативную алгебру. Различные варианты введения таких объектов были даны в работах Б.Дамьянова и Хр.Христова [3], В.К.Иванова [4], Ж.Коломбо [5] и Ю.Егорова [2]. Общая схема построения алгебр такого типа была предложена авторами в работе [6]. Наш метод позволяет строить различные алгебры с заданными дополнительными свойствами, а также дать решение еще одной задачи: о задании всюду определенной свертки.

Некоторые из уже известных конструкций, например нестандартное расширение, являются частными случаями наших построений.

## 1. Постановка задачи и общая схема решения

Пусть  $E'$  – некоторое пространство распределений и  $A$  – плотно вложенная в  $E'$  алгебра бесконечно дифференцируемых функций. Требуется построить новую алгебру  $G$  и линейное вложение  $j : E' \rightarrow G$  такие, что  $A$  вложена в  $G$  как подалгебра, т.е.

$$j(ab) = j(a)j(b), a, b \in A.$$

Имеется определенная тонкость в постановке проблемы. В самом деле, пример Л.Шварца показывает, что нельзя вложить пространство  $D'(\mathbf{R})$  в алгебру, удовлетворяющую условию:  $j(au) = j(a)j(u)$  для  $a \in A, u \in E'$ , если  $E' = D'(\mathbf{R})$ .  $A = C^\infty(\mathbf{R})$ . Поэтому мы можем требовать сохранения умножения только для элементов алгебры гладких функций.

Приведенные далее построения не учитывают того, что пространство  $E'$  состоит из распределений, и имеют более общий характер.

Исходными объектами наших построений являются:

а) отделимое локально выпуклое пространство  $E'$  (для элементов которого требуется определить произведение);

б) локально выпуклая алгебра  $A$  непрерывно и плотно вложенная в  $E'$ ;

с) семейство непрерывных линейных операторов  $R_{\phi, \varepsilon} : E' \rightarrow A$ , где  $\phi \in \Phi, \varepsilon \in I$ ; ( $\Phi$  – фиксированное множество,  $I$  – множество с заданным на нем фильтром  $F$ ) такое, что для каждого фиксированного  $\phi, R_{\phi, \varepsilon}(u) \rightarrow u$  в топологии  $E'$  по фильтру  $F$  для каждого  $u \in E'$ . Для фиксированного  $\phi$  семейство  $R_{\phi, \varepsilon}, \varepsilon \in I$  называется методом регуляризации элементов  $E'$  элементами  $A$ .

Обозначим через  $\tilde{G}$  множество всех отображений из  $\Phi \times I$  в  $A$ . Это множество является алгеброй и пространство  $E'$  вкладывается в  $\tilde{G}$  с помощью отображения  $j_0 : u \rightarrow R_{\phi, \varepsilon}(u)$ .

В ряде ситуаций эта естественная и "тривиальная" конструкция вложения  $E'$  в алгебру позволяет получать содержательные результаты. Однако поставленной задачи она не решает, так как равенство (1) не выполняется. Кроме того, алгебра  $\tilde{G}$  чрезвычайно обширна и в конкретных задачах оказывается, что различные ее элементы описывают одно и то же физическое состояние и потому они должны быть отождествлены.

Предлагаемая конструкция заключается в следующем. В алгебре  $\tilde{G}$  выделяется подалгебра  $G_M$  и в ней некоторый идеал  $N$ . Искомым объектом является фактор-алгебра  $G_M / N$ . Таким образом, конструкция сводится к выбору подходящей пары  $(G_M, N)$ .

Два элемента  $f$  и  $g$  из  $\tilde{G}$  называются слабо эквивалентными, если  $f(\phi, \varepsilon) - g(\phi, \varepsilon) \rightarrow 0$  в  $E'$  по  $F$  для любого  $\phi \in \Phi$ . Множество  $N_0$  всех элементов слабо эквивалентных нулю не является идеалом и даже подалгеброй в  $\tilde{G}$ . Поэтому отношение слабой эквивалентности, естественное в других задачах, не решает поставленной выше.

**Теорема 1.** Предположим, что подалгебра  $G_M$  и идеал  $N$  удовлетворяют следующим условиям:

i) для каждого  $u \in E'$  элемент  $R_{\phi, \varepsilon}(u) \in G_M$ ;

ii)  $N \subset N_0$ ;

iii) элементы вида  $R_{\phi, \varepsilon}(ab) - R_{\phi, \varepsilon}(a)R_{\phi, \varepsilon}(b)$  принадлежат  $N$  для любых  $a, b \in A$ .

Тогда пространство  $E'$  вкладывается в фактор-алгебру  $G = G_M / N$  как подпространство, а  $A$  – как подалгебра.

Если  $G_M$  и  $N$  инвариантны относительно некоторого линейного непрерывно-го оператора  $L : A \rightarrow A$ , тогда этот оператор может быть естественным образом продолжен до оператора в алгебре  $G$ .

Поскольку условие (ii) ограничивает идеал  $N$  сверху, а условие (iii) ограничивает его снизу, то существование идеала, удовлетворяющего условиям (ii) и (iii), не очевидно. Явное описание зависит от выбора семейства методов регуляризации. Способ выбора подалгебры  $G_M$  и идеала  $N$  может быть предложен с помощью топологии алгебры  $A$ .

Предположим, что топология на  $A$  определена с помощью мультипликативной системы полунорм  $(p_\alpha), \alpha \in \Lambda$ , т.е. полунорм, удовлетворяющих условию

$$p_\alpha(ab) \leq C_\alpha p_\alpha(a)p_\alpha(b).$$

Скалярные функции  $p_\alpha(R_{\phi,\varepsilon}(u))$ ,  $u \in E'$ , дают типичный рост по  $\varepsilon$  элементов из  $G_M$ , а функции  $p_\alpha(R_{\phi,\varepsilon}(ab) - R_{\phi,\varepsilon}(a)R_{\phi,\varepsilon}(b))$ ,  $a, b \in A$  описывают типичное убывание по  $\varepsilon$  элементов из  $N$ .

Пусть  $H_\alpha$  – алгебра скалярных функций, определенных на  $\Phi \times I$ , порождена функциями вида  $p_\alpha(R_{\phi,\varepsilon}(u))$ ,  $u \in E'$  и пусть  $N_\alpha$  – алгебра скалярных функций, заданных на  $\Phi \times I$ , порождена функциями вида

$$p_\alpha(R_{\phi,\varepsilon}(ab) - R_{\phi,\varepsilon}(a)R_{\phi,\varepsilon}(b)), a, b \in A.$$

Следующая теорема позволяет свести анализ к более простому случаю скалярных функций.

**Теорема 2.** Пусть для каждого  $\alpha \in \Lambda$  алгебра  $N_\alpha$  является идеалом в  $H_\alpha$ . Тогда множества

$$G_M(A) = \{f \in \tilde{G} : \forall \alpha \exists h \in H_\alpha, p_\alpha(f(\phi, \varepsilon)) \leq h(\phi, \varepsilon)\},$$

$$N(A) = \{f \in \tilde{G} : \forall \alpha \exists h \in N_\alpha, p_\alpha(f(\phi, \varepsilon)) \leq h(\phi, \varepsilon)\}$$

удовлетворяют условиям теоремы 1 и фактор-алгебра  $G = G_M(A) / N(A)$  дает решение проблемы.

## 2. Алгебра Коломбо

Первый пример пары  $(G_N, N)$  был построен Ж. Коломбо.

Пусть  $E' = D'(\mathbf{R})$ ,  $A = C^\infty(\mathbf{R})$ . Обозначим через  $\Phi$  счетное множество

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}, \phi_q \in D(\mathbf{R}),$$

$$\int \phi_q(x) dx = 1, \int x^j \phi_q(x) dx = 0, j = 1, 2, \dots, q.$$

Каждая из функций  $\phi_q$  определяет метод регуляризации формулой

$$R_{q,\varepsilon}(u) = u * \phi_{q,\varepsilon} = u_{q,\varepsilon}, \quad \phi_{q,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \phi_q(x/\varepsilon), \quad \varepsilon \in I = (0, 1) \subset \mathbf{R}.$$

На алгебре  $C^\infty(\mathbf{R})$  существует мультипликативная система полунорм:

$$p_{k,n}(u) = \sum_{j=0}^k \max_{|x| \leq n} \frac{u^{(j)}(x)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции  $p_{k,n}(u_{q,\varepsilon})$  мажорируются некоторой степенью  $1/\varepsilon$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому естественно определить

$$G_M = \{f_{q,\varepsilon}(x) : \forall k, n \exists m, c > 0 : p_{k,n}(f_{q,\varepsilon}) \leq c/\varepsilon^m\}.$$

Функции вида  $p_{k,n}((ab)_{q,\varepsilon} - a_{q,\varepsilon}b_{q,\varepsilon})$ ,  $a, b \in C^\infty(\mathbf{R})$  имеют степенное убывание по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для каждого фиксированного  $q$  множество функций со степенным убыванием не является, вообще говоря, идеалом в алгебре функций, растущих с некоторой степенью  $\varepsilon$ . Ж. Коломбо заметил и использовал тот факт, что скорость убывания этих функций увеличивается с увеличением  $q$ . Поэтому множество

$$N = \{f_{q,\varepsilon}(x) : \forall k, n \exists q_0, c_q : p_{k,n}(f_{q,\varepsilon}) \leq c_q \varepsilon^{q-q_0}\}$$

является идеалом в  $G_M$  и удовлетворяет условиям теорем 1 и 2. Фактор-алгебра  $G = G_M / N$  является модификацией алгебры Коломбо "новых обобщенных функций".

Отметим, что вложение пространства  $D'(\mathbf{R})$  в  $G$  зависит от выбора последовательности  $(\phi_q)$ , однако  $C^\infty(\mathbf{R})$  вкладывается в  $G$  канонически. Общая схема и понимание того, как правильно выбирать семейство методов регуляризации, позволили нам строить различные алгебры новых обобщенных функций. В частности, построены: алгебра, в которую вложены ультрараспределения; алгебра со всюду определенной сверткой и обратимым преобразованием Фурье, в которую вложено  $S'(\mathbf{R})$  [7]; алгебры "новых обобщенных функций" с действующими в них интегральными преобразованиями Лапласа, Меллина, Ханкеля и др. [8]; алгебры периодических новых обобщенных функций [9], алгебра, построенная на базе пространств Соболева [10].

Все упомянутые построения сводятся, по существу, к факту, что новая обобщенная функция является семейством гладких функций, зависящих от параметров. Функции, принадлежащие одному классу эквивалентности, не только имеют один и тот же предел, но также и один и тот же способ стремления к этому пределу. Поэтому с этой точки зрения мы можем сказать, что новая обобщенная функция “запоминает” способ стремления к пределу, т.е., она “обладает памятью”. В связи с этим мы называем такие объекты “мнемофункциями” (от греческого слова – память).

### 3. Мнемочисла

Если алгебра  $A$  содержит единицу, то в фактор-алгебре  $G=G_A/N$  существует подалгебра  $\tilde{C}$ , состоящая из скалярных функций. Мы назовем эту алгебру алгеброй мнемочисел, а ее элементы – мнемочислами. Мнемочисла оказываются удобным аппаратом во многих вычислениях. Это связано с тем фактом, что в  $\tilde{C}$  существуют бесконечно малые и бесконечно большие числа.

Пусть  $E'$  – сопряженное к локально выпуклому пространству  $E$  и  $\langle f, \psi \rangle$  значение функционала  $f$  на элементе  $\psi \in E$ .

Всякое  $\tilde{C}$  – линейное отображение из  $E$  в  $\tilde{C}$  будем называть  $\tilde{C}$ -функционалом.

Каждой мнемофункции  $f(\phi, \varepsilon)$  соответствует  $\tilde{C}$ -функционал  $f$  на  $E$ , определенный формулой

$$\langle \tilde{f}, \psi \rangle = \langle f(\phi, \varepsilon), \psi \rangle, \quad \psi \in E.$$

Мнемофункцию  $f$  и элемент  $u \in E'$  будем называть ассоциированными, если  $\langle f(\phi, \varepsilon), \psi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle$  по фильтру  $F$  для каждого  $\phi \in \Phi$  и  $\psi \in E$ .

Отметим, что много различных мнемофункций может быть ассоциировано с одним элементом  $u \in E'$  и что  $\tilde{C}$ -функционал  $\tilde{f}$  неоднозначно определяет мнемофункцию  $f$ . На первый взгляд это может казаться недостатком теории. Однако, с другой стороны, эта неоднозначность является новым шагом к решению ряда проблем. Например, моделирование частицы посредством  $\delta$ -функции Дирака вполне приемлемо в линейных задачах. Однако такой подход является весьма грубым в нелинейном случае и здесь имеются определенные трудности. Чтобы их преодолеть, мы нуждаемся в дополнительной информации относительно объекта нашего рассмотрения. Такая информация приводит к необходимости моделирования частиц мнемофункциями, ассоциированными с  $\delta$ -функцией.

### 4. Примеры

1. Пусть  $\delta_\phi$  – образ  $\delta$ -функции при вложении  $D'(\mathbf{R})$  в  $G$ , где  $\Phi$  – множество вида (2). Тогда  $\delta_\phi = \frac{1}{\varepsilon} \phi_q(x/\varepsilon)$ . И пусть

$$a_q = \int \phi_q^2(x) dx \neq 0, \quad \psi_q(x) = \frac{1}{a_q} \phi_q^2(x), \quad \tilde{a} = (a_q) \in \tilde{C}.$$

Последовательность  $\psi_q$  также определяет вложение  $D'(\mathbf{R})$  в  $G(C^\infty(\mathbf{R}))$  вкладывается при этом как векторное пространство, но не как алгебра). Пусть  $\delta_\psi$  – образ

$\delta$ -функции при этом вложении. Тогда  $\delta_\psi^2 = \frac{\tilde{a}}{\varepsilon} \delta_\phi$ , т.е.  $\delta^2$  имеет вид мнемофункции  $\delta_\psi$  с бесконечно большим коэффициентом  $\tilde{a}/\varepsilon$  из  $\tilde{C}$ .

2. Умножение непрерывных функций не совпадает с умножением в  $G$ , когда  $D'(\mathbf{R})$  вложено в  $G$ . Однако оно отличается от умножения в  $G$  только на бесконечно малые значения. Например, пусть  $|x|_\phi$  – образ функции  $|x|$  при вложении  $\phi$ . Тогда  $|x|_\phi^2 \neq x^2$ , но  $|x|_\phi^2 - x^2 = \varepsilon^3 c \delta_\eta$ , где  $c \in \tilde{C}$ , т.е. разность есть  $\delta$ -функция с бесконечно малым коэффициентом. Различие между новой теорией и классической может быть разъяснено на примере выражения  $(|x|_\phi^2 - x^2) \delta^3$ . В

классической теории  $|x|^2 - x^2 = 0$  и  $\delta^3$  не определено. В новой же теории  $(|x|_0^2 - x^2)\delta_0^3 = c\delta_\psi$ , где  $c$  – некоторое мнемочисло.

Вычисление  $\tilde{C}$ -функционалов, ассоциированных с мнемофункциями, может быть сведено к исследованию асимптотики интегралов, зависящих от параметра. Бесусловно, что такие вычисления были сделаны намного ранее, чем была создана теория новых обобщенных функций. Например, асимптотическое поведение  $\delta$ -образной последовательности  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2}$  проанализировано в [12], т.е. соответствующий  $\tilde{C}$ -функционал оценен.

Подобные оценки используются в теории дифференциальных уравнений с малым параметром, теории сингулярных возмущений и т.п. В общем, ситуация сложившаяся после создания теории новых обобщенных функций, напоминает ранее известную в математическом "фольклоре". Л.Янг [13] пишет, что после появления книги Л.Шварца по теории распределений все математики разделились на три класса: первый класс образовали те, которые говорили, что они знают это лучше Шварца; во второй класс попали те, которые утверждали, что они знали это раньше Шварца; третий же класс состоял только из рецензента книги Шварца, который называл все это бессмыслицей!

## 5. Дифференциальные уравнения в пространстве мнемофункций

Рассмотрим в качестве модели дифференциальное уравнение

$$u' = \delta u + \delta, \quad u(-1) = 1.$$

Это уравнение не имеет решений в пространстве непрерывных в нуле функций. Если же функция  $u$  разрывна в нуле, то произведение  $\delta u$  не определено. Это означает, что в классической теории обобщенных функций нет понятия решения этого уравнения.

При рассмотрении уравнения (3) в пространстве мнемофункций необходимо выбрать некоторые мнемофункции, ассоциированные с  $\delta$ -функцией, например  $\delta_0$  и  $\delta_\psi$ , и исследовать уравнение

$$u' = \delta_0 u + \delta_\psi.$$

Решение этого уравнения ассоциируется с обыкновенной функцией вида

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \mu, & x > 0 \end{cases},$$

где число  $\mu$  зависит от выбора мнемофункций, который мы сделали. Подчеркнем, что информация относительно числа  $\mu$  была получена в результате выбора мнемофункций, т.е. в результате уточнения постановки задачи.

## 6. Спектральная теория операторов

Пусть  $A$  – банахова алгебра с единицей  $e$ , в частности алгебра  $L(X)$  – линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве  $X$ , и пусть  $G_M(A)$  – алгебра медленно (не быстрее некоторой степени) растущих последовательностей из  $A$ , а  $N$  – идеал в  $G_M(A)$ , состоящий из быстро (быстрее любой степени) убывающих последовательностей из  $A$ . Тогда фактор-алгебру  $G = G_M/A$  обозначим через  $A_*$ , а соответствующее ей кольцо мнемочисел через  $C_*$ .

Алгебра  $A_*$  является  $C_*$ -алгеброй, т.е. модулем над кольцом  $C_*$  и, как выяснилось [14], естественная топология на ней – неархимедова топология.

Если  $\tilde{a} \in A$ , то обобщенным спектром элемента  $\tilde{a}$  называется подмножество  $\tilde{\sigma}(\tilde{a})$  из  $C_*$  вида

$$\tilde{\sigma}(\tilde{a}) = \{ \tilde{\lambda} \in C_* : \tilde{\lambda}\tilde{e} - \tilde{a} \text{ — не обратим в } A_* \}.$$

В работе [15] установлено, что  $A_*$  является банаховой неархимедово нормированной  $C_*$ -алгеброй и обобщенный спектр любого элемента из  $A_*$  замкнут и не пуст в  $C_*$ . Это позволяет развить спектральную теорию элементов алгебры  $A_*$ .

Элементы алгебры  $L(\Lambda)$  естественно называть обобщенными операторами. Поскольку многие неограниченные операторы можно трактовать как обобщенные, то этот подход позволяет по-новому взглянуть на многие вопросы спектральной теории и функционального исчисления для неограниченных операторов.

## 7. Алгебра обобщенных случайных процессов

Параллельно с развитием теории обобщенных функций шло развитие теории обобщенных случайных процессов. Так на основе теории распределений И.М.Гельфандом была создана теория обобщенных случайных процессов. К.Урбаником предложена своя трактовка обобщенных случайных процессов, опирающаяся на секвенциальный подход Я.Микусинского. Надо сказать, что, несмотря на значимость данных теорий в современной теории случайных процессов, они не нашли широкого использования в дифференциальных уравнениях со случайными функциями в силу неприменимости их для решения нелинейных задач.

В работах [16],[17] на основе теории мнемифункций предложена конструкция алгебры обобщенных случайных процессов. Рассмотрим наиболее простой случай алгебры мнемифункций Ю.И.Егорова.

Пусть  $T=[0,a] \in \mathbf{R}$ ,  $(\Omega, \mathbf{A}, P)$  – полное вероятностное пространство. Рассмотрим множество последовательностей случайных функций  $f_n : T \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$   $G_M(T, \Omega) = \{ \{f_n(t, \omega)\} : f_n(t, \omega) \}$  – случайная величина при фиксированных  $n$  и  $t$ ;  $f_n(t, \omega) \in C^\infty(T)$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ .

Выделим в  $G_M(T, \Omega)$  идеал  $N(T, \Omega) = \{ \{f_n\} \in G_M(T, \Omega) : \text{существует } n_0, \text{ что для любого } t \in T \text{ и для любого } n \geq n_0 \ f_n(t, \omega) = 0 \text{ для почти всех } \omega \in \Omega \}$ . Алгебру  $G(T, \Omega) = G_M(T, \Omega) / N(T, \Omega)$  назовем алгеброй случайных мнемипроцессов.

Далее, пусть  $\tilde{\mathbf{R}}$  – расширенная прямая по Егорову, а

$$\tilde{T} = \{ \tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{\mathbf{R}} : \forall (t_n) \in \tilde{t}, \ 0 \leq t_n \leq a, \ n = 1, 2, \dots \}.$$

Через  $G(\tilde{T}, \Omega)$  обозначим алгебру случайных мнемифункций вида  $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = [(f_n(t_n, \omega))]$ , где  $\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{T}$ ,  $[(f_n(t_n, \omega))] \in G(T, \Omega)$  для любого  $t \in T$ . Алгебру  $G(\tilde{T}, \Omega)$  также назовем алгеброй случайных мнемипроцессов. Заметим, что конструкция алгебры  $G(\tilde{T}, \Omega)$  новая и для неслучайного анализа.

В работе [17] на основе аппарата алгебр случайных мнемипроцессов предложен единый подход исследования всех известных классов дифференциальных уравнений со случайными функциями. Этот подход базируется на понятии обобщенного стохастического дифференциала в  $G(\tilde{T}, \Omega)$ .

Пусть

$$H = \{ \tilde{h} = [(h_n)] \in \tilde{\mathbf{R}} \setminus \{0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \}.$$

Тогда положим по определению

$$d_{\tilde{h}} = \tilde{F}(\tilde{h}, \omega) = [(f_n(t + h_n, \omega) - f_n(t, \omega))], \text{ где } \tilde{h} = [(h_n)] \in H, \ \tilde{t} + \tilde{h} \in \tilde{T}.$$

Выделим во множестве  $H$  следующие подмножества:

$$S = \{ \tilde{h} \in H : h_n = o(1/n), n \rightarrow \infty \} \text{ – область Стратановича ;}$$

$$I = \{ \tilde{h} \in H : (1/n) = o(h_n), n \rightarrow \infty \} \text{ – область Ито.}$$

Известно, что дифференциальные уравнения, содержащие в правой части обобщенные случайные процессы типа "белого шума", невозможно исследовать классическими методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого К.Ито была специально разработана теория стохастических дифференциальных уравнений, базирующаяся на понятиях стохастических интегралов Ито и Стратановича. В работе [18] показано, что решения стохастических

ческих дифференциальных уравнений Ито и Стратановича могут быть аппроксимированы решениями уравнений в дифференциалах в алгебре  $G(\tilde{T}, \Omega)$ . Методика доказательства этих утверждений опирается на понятия обобщенного стохастического дифференциала и областей Ито и Стратановича.

В работе [19] показано, что данные методы могут быть успешно применены для исследования решений новых классов нелинейных дифференциальных уравнений со случайными функциями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь и международного фонда Сороса.

1. Schwartz L. // C.R. Acad. sci. Paris, 1954. V.239. P.874.
2. Егоров Ю. В. // Успехи мат. наук. 1990. Т.45. №5(275). С.3.
3. Христов Хр., Дамьянов Б. П. // Bulg. J. Phys. 1978. Ч.1. №6. С.543; 1979. Ч.2. №1. Р.3; 1979. Ч.3. №3. Р.245. 1979. Ч.4. №4. Р.377.
4. Иванов В. К. // Изв. ВУЗов. Математика. 1971. №1. С.41.
5. Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam, 1985.
6. Антонец А. Б., Радыно Я. В. // ДАН СССР. 1991 Т.43, №3, С.680.
7. Радыно Я. В., Нго Фу Тхань, Сабра Рамадан. // Докл. РАН. 1992 Т.327. №1. С.20.
8. Радыно Я. В., Ромашевский А. Б. // Докл. РАН. 1995. Т.345. №1. С.22.
9. Мазель М. Х., Радыно Н. Я. // Докл. АН Беларуси. 1992. Т.36. №7.8. С.585.
10. Антонец А. Б., Фурсенко Н. В. // Дифф. уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1317.
11. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Семинальный подход. М., 1976.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. // ДАН СССР. 1959. Т.126. №1. С.26.
13. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974.
14. Радыно Н. Я. // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Мат. межгос. научн.-практ. конференции. 16–20 мая 1994 г. Мн., 1994.
15. Гулецкая О. И., Радыно Н. Я. // Докл. РАН. 1995. Т.343. №1. С.7.
16. Лазакович Н. В., Радыно Я. В. Теоретические и прикладные проблемы математики: Тез. конф. Тарту, 1990. С.281.
17. Лазакович Н. В. // Докл. АН Беларуси. 1994. Т.38. №5. С.21.
18. Он же. // Там же. 1995. Т.39. №3. С.20.
19. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П. Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений и интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов // Там же. 1994. Т.39. №6. С.34.

УДК 517.977

А.И. КАЛИНИН, И.В. ГРИБОВСКАЯ

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАМЕТРЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ

The paper summarizes the results of authors' investigations of optimal control problems for linear singularly perturbed systems with different order-infinitesimal parameters multiplying the derivatives.

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т.п.), если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений более простых задач оптимального управления.

Возмущенным задачам оптимального управления посвящено значительное число работ. Обзоры основных результатов содержатся в [1–3]. В рамках теории оптимальных процессов асимптотические методы развиты в основном для задач с открытой областью управления, т.е. задач классического вариационного типа. В то же время в прикладных задачах ограничения на значения управляющих воздействий, как правило, имеют вид замкнутых неравенств. В [4] предложен подход к исследованию возмущенных задач оптимизации динамических систем с прямыми ограничениями замкнутого типа на значения управляющих воздействий, в основе которого лежит идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений. С помощью этого подхода разрабо-

таны алгоритмы асимптотического решения широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач [3]. В работах [5,6] методику, предложенную в [4], удалось применить к задачам оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости. Такие системы исследуются с момента зарождения теории сингулярных возмущений [7], однако задачи их оптимизации мало изучены, хотя и встречаются в приложениях [8].

В [5] рассмотрена следующая задача оптимального быстродействия для линейной стационарной системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + b_1 u, & x(0) &= x_0, & x(T) &= 0, \\ \mu \dot{y} &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + b_2 u, & y(0) &= y_0, & y(T) &= 0, \\ \mu^2 \dot{z} &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + b_3 u, & z(0) &= z_0, & z(T) &= 0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, T], \quad J(u) = T \rightarrow \min,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mu$  – малый положительный параметр,  $u$  – скалярное управление,  $x, y, z$  – векторы произвольной размерности. Предполагается, что

а) матрицы  $C_3, B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$  устойчивы, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Как следует из принципа максимума [9], оптимальное управление в задаче (1) является релейным. В [5] показано, что при достаточно общих условиях оно имеет три группы точек переключения. Первая группа содержит точки, близкие к соответствующим точкам переключения оптимального управления в вырожденной задаче, а вторая и третья группы включают точки, отстоящие от момента оптимального быстродействия на величины порядка  $\mu$  и  $\mu^2$  соответственно. На основе асимптотического анализа, который опирается на метод пограничных функций [10], в [5] предложен алгоритм, позволяющий строить асимптотические приближения произвольного порядка к решению рассмотренной задачи. Суть алгоритма состоит в построении асимптотики точек переключения оптимального управления и момента оптимального быстродействия в виде разложений по целым степеням малого параметра. При применении алгоритма происходит своеобразная декомпозиция исходной задачи на три задачи меньшей размерности, одной из которых является вырожденная задача. Кроме того, в [5] показано, как можно использовать построенные асимптотические приближения для точного решения задачи (1) при заданном значении малого параметра.

В [6] исследуется линейная задача терминального управления с ограничениями типа равенства на правый конец траекторий

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + b_1 u, & x(0) &= x_0, \\ \mu \dot{y} &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + b_2 u, & y(0) &= y_0, \\ \mu^2 \dot{z} &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + b_3 u, & z(0) &= z_0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, t_*], \quad H_1 x(t_*) = g_1, \quad H_2 y(t_*) = g_2, \quad H_3 z(t_*) = g_3, \\ J(u) &= c_1' x(t_*) + \mu c_2' y(t_*) + \mu^2 c_3' z(t_*) \rightarrow \max,\end{aligned}\tag{2}$$

где, как и прежде,  $\mu$  – малый положительный параметр,  $u$  – скаляр,  $x, y, z$  – векторы размерности  $n_1, n_2, n_3$  соответственно,  $g_1, g_2, g_3$  – векторы размерности  $m_1, m_2, m_3$  ( $m_1 < n_1, m_2 \leq n_2, m_3 \leq n_3$ ), а остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. Считается выполненным условие а). Предложенный в [6] алгоритм асимптотического решения задачи (2) в идейном плане близок предыдущему. Его суть состоит в построении асимптотических приближений к точкам переключения оптимального управления. Одни из этих точек близки к соответствующим точкам переключения оптимального управления в вырожденной задаче, а остальные группируются вблизи конечного момента  $t_*$  и отстоят от него на величины порядка  $\mu$  и  $\mu^2$ . Реализация алгоритма предполагает решение трех невозмущенных задач оптимального управления, в которых векторы фазового состояния имеют размерности  $n_1, n_2, n_3$  соответственно, причем первой из них является вырожденная задача.

Разработанный в [6] алгоритм может быть применен для асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + b_1 v, \quad y(0) = y_0, \\ \mu \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + b_2 v, \quad z(0) = z_0, \\ |v(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, T/\mu], \quad H_1 y(T/\mu) = g_1, \quad H_2 z(T/\mu) = g_2, \\ J(v) &= \int_0^{T/\mu} (c'_1 y(t) + c'_2 z(t) + h v(t)) dt \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu$  – малый положительный параметр,  $v$  – скалярное управление,  $y, z, g_1, g_2$  – векторы размерности  $n_1, n_2, m_1, m_2$  соответственно ( $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2$ ). Переходя к “медленному времени”  $\tau = \mu t$  и полагая  $u(\tau) = v(\tau/\mu)$ , запишем задачу (3) в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy}{d\tau} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(0) = y_0, \\ \mu^2 \frac{dz}{d\tau} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(0) = z_0, \\ |u(\tau)| &\leq 1, \quad \tau \in [0, T], \quad H_1 y(T) = g_1, \quad H_2 z(T) = g_2, \\ J(u) &= \frac{1}{\mu} \int_0^T (c'_1 y(\tau) + c'_2 z(\tau) + h u(\tau)) d\tau \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (4) эквивалентна задаче терминального управления

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= c'_1 y + c'_2 z + h u, \quad x(0) = 0, \\ \mu \frac{dy}{d\tau} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(0) = y_0, \\ \mu^2 \frac{dz}{d\tau} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(0) = z_0, \\ |u(\tau)| &\leq 1, \quad \tau \in [0, T], \quad H_1 y(T) = g_1, \quad H_2 z(T) = g_2, \\ J_0(u) &= x(T) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (5)$$

причем  $J_0(u) = \mu J(u)$ . Задача (5) является частным случаем задачи (2) и, следовательно, может быть решена с помощью предложенного в [6] алгоритма, если выполнено условие а), которое в данном случае заключается в требовании устойчивости матриц  $A_1, A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ .

На базе изложенного в [6] алгоритма и метода синтеза позиционных оптимальных управлений [11] авторами разработан регулятор, который строит асимптотически оптимальные управления типа обратной связи в задаче (2) в случае, когда динамическая система подвержена действию неизвестных помех. Непосредственное построение оптимального регулятора, предложенного в [11], в данной ситуации встречает серьезные трудности, поскольку прямая и сопряженная системы в сингулярно возмущенных задачах являются жесткими [12]. Асимптотический подход позволяет избежать интегрирования жестких систем. Более того, при его применении происходит декомпозиция исходной задачи на задачи меньшей размерности.

Разработанные алгоритмы являются развитием результатов, полученных в [13–15] для сингулярно возмущенной системы, содержащей только две группы переменных с существенно различными скоростями, и легко обобщаются на задачи, в которых имеется несколько групп “быстрых” переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра.

1. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. // Мат. анализ. (Итоги науки и техн.). 1982. Т. 20. С. 3.
2. Kokotovic P.V., Khalil H.K. Singular Perturbations in Systems and Control. New York, 1986.

3. Калинин А. И. // Известия РАН. Техн. кибернетика. 1994. №3. С.104.
4. Габасов Р., Калинин А. И., Кириллова Ф. М. // Докл. АН СССР. 1987. Т.293. №1. С.22.
5. Грибковская И. В., Калинин А. И. // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. №8. С.1275.
6. Они же // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1995. Т.35. №9. С.1299.
7. Тихонов А. Н. // Мат. сборник. 1952. Т.31(73). №3. С.575.
8. Нернер S. Analysis of the Planar Intercept and Tracking Problem by Application of Optimal Control and Singular Perturbation Theory. Zurich, 1986.
9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
10. Васильева А. Б. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т.3. №4. С.611.
11. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991.Т.320. №6. С.1294.
12. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.
13. Калинин А. И. // Прикладная математика и механика. 1989. Т.53. Вып.6. С.880.
14. Он же // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т.30. №3. С.366.
15. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1994. №3. С.57.

УДК 517.956

В. И. КОРЗЮК

## МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ И ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ

At the beginning of the article it is giving a short description of the development of Solvability Theory of Boundary Problems for Partial Linear Differential Equations with using of functional methods. After this general results on the base of energetic inequalities are stated. At the second part of the article it is proven the existence and uniqueness of a strong solution of boundary problems for hyperbolic about given vector field differential equation of the 2-nd order using method of energetic inequalities and averaging operators with variable step. Energetic inequality is derived using Silvester criteria for quadric forms.

1. Проблема постановки и разрешимости задач для дифференциальных уравнений с частными производными давно занимала умы многих математиков. В 30-х гг. Ж.Адамаром было введено понятие корректной задачи [1, 101, 102]. Отыскание корректно поставленных задач и доказательство разрешимости, единственности решений и непрерывной зависимости их от данных задач наряду с численным решением является неотъемлемой частью моделирования различного рода проблем естествознания.

Изучение задачи Коши И.Г.Петровским, результаты которого были опубликованы в 1937 г. [69,70], явилось основополагающим фактором создания современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Теория разрешимости различного рода задач для дифференциальных уравнений и их систем с частными производными получила свое дальнейшее развитие. Многие результаты в теории разрешимости линейных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными достигнуты в результате применения интегральных преобразований, в первую очередь преобразования Фурье [3, 19–21, 31, 32, 66, 69, 70, 72–74, 77, 80–86, 92, 99, 104–107, 111–113].

С помощью этого подхода и фредгольмовой теории создана стройная эллиптическая теория граничных задач как для гладких [2, 63, 66, 74, 92, 99, 107, 110, 112, 113], так и для разрывных коэффициентов [80–85]. На основе этого построена теория разрешимости граничных задач для параболических уравнений и систем [3, 30–32, 67, 86, 99].

Интегральные преобразования применяются при изучении задач для других классов уравнений. Здесь в первую очередь следует указать задачу Коши для гиперболических уравнений и систем [20, 21, 69, 70, 72, 73, 105, 106], а также и простейшие смешанные задачи [73, 104, 111]. В работах [93, 95–98] использована теория псевдодифференциальных операторов при изучении смешанных задач в цилиндрической области для гиперболических уравнений.

Подход использования интегральных преобразований и псевдодифференциальных операторов требует либо хороших операторов, порожденных рассматриваемыми задачами, либо хороших областей, в которых задаются основные уравнения (системы), либо других существенных ограничений.

В работах [8, 10, 11] предлагается метод Фурье для неотрицательных уравнений в случае цилиндрических областей относительно временной независимой переменной.

В теории разрешимости граничных задач важную роль играют априорные оценки или энергетические неравенства. Предположим, что рассматриваемая задача записывается в виде линейного операторного уравнения

$$Lu = F, \quad (1.1)$$

где оператор  $L$  определен в банаховом пространстве  $B$  и действует в гильбертовом пространстве  $H$ . Под энергетическим неравенством понимается неравенство вида

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_H \quad (1.2)$$

для любой функции  $u$  из плотной в  $B$  области определения  $D(L)$  оператора  $L$  и некоторой константы  $C > 0$ , не зависящей от  $u$ ;  $\|\cdot\|_B, \|\cdot\|_H$  — значения норм в пространствах  $B$  и  $H$  соответственно.

Из неравенства (1.2) немедленно следует единственность решения (если оно существует) в пространстве  $B$  уравнения (1.1) или исходной линейной задачи, порождающей (1.1).

Для доказательства существования решения уравнения (1.1) для любого  $F \in H$  необходимо показать совпадение множества значений  $R(L)$  с  $H$ . Как правило, равенство  $R(L) = H$  не выполняется, а тем более, если область определения  $D(L)$  оператора  $L$  представляет множество достаточно гладких функций. В связи с этим делается расширение оператора  $L$ . Существуют различные расширения [25–28]: в слабой топологии, в сильной топологии и другие. Реализации этих идей применительно к эллиптическим задачам является глава IV из [64]. В [24] кроме эллиптических задач рассматриваются граничные задачи для гиперболических и параболических уравнений, для которых вводятся обобщенные решения изучаемых задач как расширения соответствующих функционалов. Такой подход использовал Л.Гординг при изучении задачи Коши для линейных гиперболических уравнений [20, 21]. Неотъемлемой частью этого метода, в частности, при доказательстве энергетических неравенств являются операторы осреднения. В [24, 25] для сохранения однородных граничных условий используются операторы осреднения со сдвигом. Для этих целей можно эффективно использовать операторы осреднения переменного шага [12–15, 51–53, 94], сохраняющие граничные условия как однородные, так и неоднородные для достаточно большой конфигурации областей, которые строятся с помощью разбиения единицы и операторов осреднения С.Л.Соболева [76]. Этой идее посвящены и работы [23, 50], где доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи типа Дирихле для некоторых неклассических уравнений 3-го порядка. Под влиянием работы [24] автором данной статьи рассмотрено обобщенное решение в слабой топологии путем расширения оператора до замкнутого смешанной задачи гиперболического относительно заданного векторного поля уравнения второго порядка в случае нецилиндрической области [49]. В книге Ж.-Л.Лионса и Э.Мадженеса [107] отмечена (см. стр.341, пробл.13.7) актуальность изучения задач для уравнений эволюционного типа в нецилиндрических областях. Несмотря на то, что по указанной теме появились работы сравнительно давно (см., например, [22, 29, 87–89, 117–119] и др.), в последние годы эта проблема находит в центре внимания многих математиков, что подтверждается возросшим количеством публикаций [8–11, 33–35, 40, 55, 56, 68, 75, 108, 109, 114–116] и др. Указанные работы относятся к случаю двух независимых переменных или простейших областей. Этот интерес диктуется не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными, но и изучением задач, возникающих при моделировании конкретных физических и других ситуаций в областях, изменяющихся во времени. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения пере-

менного шага позволяет (это показано в [23, 49, 50, 54] и будет показано далее при рассмотрении случая сильного решения) исследовать постановку и разрешимость многих граничных задач для гиперболических, параболических и других уравнений, заданных в нецилиндрических областях достаточно общей структуры.

3. В этом пункте рассмотрим общие положения сильного расширения оператора рассматриваемой задачи путем его замыкания. Затем будет доказано существование и единственность сильного решения граничных задач гиперболического относительно заданного векторного поля уравнения в ограниченной области.

Предположим, что оператор  $L$  уравнения (1.1) допускает замыкание  $\overline{L}$ . Как известно [65, 79], линейный оператор  $L: B \rightarrow H$  допускает замыкание тогда и только тогда, если из соотношений  $u_k \rightarrow 0$  в  $B$  ( $u_k \in D(L)$ ) и  $Lu_k \rightarrow F$  в  $H$  следует  $F = 0$ .

**Определение 1.** Решение операторного уравнения

$$\overline{L}u = F, \quad u \in D(\overline{L}), \quad (3.1)$$

называется сильным решением уравнения (1.1).

**Теорема 1.** Если справедливо энергетическое неравенство (1.2) для оператора  $L: B \rightarrow H$  и оператор  $L$  допускает замыкание  $\overline{L}$ , то справедливо неравенство

$$\|u\|_B \leq C \|\overline{L}u\|_H \quad (3.2)$$

для любого элемента  $u \in D(\overline{L})$ , где постоянная  $C$  та же, что и в (1.2).

Утверждение теоремы 1 является фактически следствием неравенства (1.2) и определения оператора  $\overline{L}$ . Неравенство (3.2) получается из (1.2) путем предельного перехода для любой функции  $u \in D(\overline{L})$ .

**Следствие 1.** Если сильное решение уравнения (1.1) существует, то оно единственно.

Неравенство (1.2) является критерием непрерывности обратного оператора  $L^{-1}$ , определенного на множестве значений  $R(L)$  оператора  $L$ . Непрерывный оператор  $L^{-1}$  по непрерывности можно продолжить на множество  $\overline{R(L)}$  (замыкание  $R(L)$ ). В результате продолжения получим непрерывный оператор  $\overline{L^{-1}}$  на  $\overline{R(L)}$ .

**Теорема 2.** Если для оператора  $L: B \rightarrow H$  справедливо энергетическое неравенство (1.2) и оператор  $L$  допускает замыкание  $\overline{L}$ , то  $\overline{R(L)} = R(\overline{L})$  и  $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{-1}$ , где  $\overline{L}^{-1}$  — обратный оператор по отношению к оператору  $\overline{L}$ , определенный на множестве значений  $R(\overline{L})$  оператора  $\overline{L}$ .

**Доказательство.** На основании своего определения  $R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$ . Докажем обратное включение, т.е.  $\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$ .

Пусть  $F \in \overline{R(L)}$ . Тогда существует последовательность  $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $F_k \in R(L)$ , которая сходится к  $F$  в  $H$  при  $k \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$  является фундаментальной и  $F_k = Lu_k$ ,  $u_k \in D(L)$ . Из неравенства (1.2) вытекает, что последовательность  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  является фундаментальной в  $B$ . Так как  $B$  — банахово пространство, то существует  $u \in B$  и  $u_k \rightarrow u$  в  $B$ . А это означает, что, согласно определению сильного решения,  $u \in D(\overline{L})$  и  $\overline{L}u = F$ , т.е.  $F \in R(\overline{L})$ . Отсюда и из равенства  $D(\overline{L^{-1}}) = D(\overline{L}^{-1})$  следует  $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{-1}$ .

**Следствие 2.** Для доказательства существования сильного решения уравнения (1.1) при любом  $F \in H$  достаточно доказать энергетическое неравенство (1.2), замыкаемость оператора  $L$  и плотность множества значений  $R(L)$  в пространстве  $H$ .

4. Теперь рассмотрим постановку некоторых граничных задач для линейного относительно заданного векторного поля гиперболического уравнения второго порядка, а затем доказательство существования и единственности сильного решения этих задач.

Будем рассматривать функции от независимых переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$ . Предположим, что в  $R^n$  задано векторное поле  $\lambda'$  класса  $C^1$ , элементами которого являются единичные векторы  $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$ ,  $|\eta(x)|^2 = \eta_1^2(x) + \dots + \eta_n^2(x) = 1$ .

Рассмотрим линейное дифференциальное с частными производными уравнение второго порядка гиперболического типа относительно векторного поля  $\lambda'$ , которое задается в виде

$$A(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (4.1)$$

где  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $a_\alpha(x)$ ,  $f(x)$  — заданные

функции независимых переменных  $x$  в ограниченной области  $Q \subset R^n$ .

**Определение 2.** Уравнение (4.1) в точке  $x$  относительно направления  $\eta(x)$  будем называть гиперболическим, если:

(i) характеристический полином  $A_0(x, \eta(x)) = A_0(x, \eta) = A_0(\eta) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \times \eta_1^{\alpha_1}(x) \dots \eta_n^{\alpha_n}(x)$  отличен от нуля (для определенности считаем  $A_0(x, \eta) \geq \delta$ ,  $\delta$  — некоторое положительное число);

(ii) полином  $A_0(x, \tau\eta(x) + \xi(x))$  относительно  $\tau \in R^1$  имеет два действительных различных корня, где  $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ ,  $|\xi(x)| = 1$ ,  $(\eta(x), \xi(x)) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \xi_i(x) = 0$ .

Уравнение (4.1) гиперболично в замыкании  $\overline{Q} \subset R^n$  области  $Q$ , если оно гиперболично в каждой точке  $x \in \overline{Q}$  относительно направления  $\eta(x)$  из заданного в  $\overline{Q}$  векторного поля  $\lambda'$ .

Для удобства уравнение (4.1) будем записывать еще и в виде

$$A(x, D)u = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a_0(x) u = f(x), \quad (4.1')$$

где  $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Обозначим через  $K(x)$  характеристический конус (4.1) или (4.1'), соответствующий точке  $x$ , который состоит из совокупности векторов  $z(x) = \mu(\tau\eta(x) + \xi(x))$ , где  $\mu \in [0, \infty)$ ,  $\tau \in (0, \infty)$  и  $\tau A_0(x, \eta) \geq -A_0(x; \eta, \xi) + G_\eta^{1/2}(x; \xi)$ ,  $G_\eta(x; \xi) = A_1^2(x; \eta, \xi) - A_0(x; \eta) A_0(x; \xi)$ ,  $A_0(x; \eta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i(x) \xi_j(x)$ , векторы  $\eta(x)$  и  $\xi(x)$  из определения 2.

Пусть  $K^\perp(x)$  — двойственный конус относительно  $K(x)$ , т.е.  $K^\perp(x) = \left\{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)) \mid 0 \leq (\mu(x), \zeta(x)) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \zeta_i(x) \text{ для любого вектора } \zeta(x) \in K(x) \right\}$ .

Предположим, что граница  $\partial Q$  области  $Q$  является кусочно-гладкой. С помощью характеристического полинома, векторов  $\eta(x) \in \lambda'$  и внешней нормали

\* Векторное поле  $\lambda'$  — из класса  $C^1$ , если функции  $\eta_i(x)$  ( $i=1, \dots, n$ ) элементов его  $\eta(x)$  из класса  $C^1(R^n)$  (непрерывно дифференцируемы в  $R^n$ ).

$v(x)$  ( $x \in \partial Q$ ) разобьем  $\partial Q$  на части, на которых либо задаются условия Коши, либо условие Гурса, либо другие граничные условия, либо отсутствуют условия. Для этого наряду с векторным полем  $\mathcal{A}$  введем векторное поле  $\mathcal{H}$  с помощью конуса  $K^L(x)$ .

Обозначим через  $\mathcal{H}$  векторное поле в  $R^n$  элементов  $r(x) = (r_1(x), \dots, r_n(x))$ , которое определяется следующими требованиями:

( $\mathcal{H}_1$ ) для каждой точки  $x \in Q$  вектор  $r(x)$  является внутренним вектором конуса  $K^L(x)$ ;

( $\mathcal{H}_2$ ) поле  $\mathcal{H}$  из класса  $C^1$ .

Пусть  $v(x)$  — единичный вектор внешнего по отношению к области  $Q$  перпендикуляра к гиперповерхности  $\partial Q$  в точке  $x \in \partial Q$ . Обозначим через  $r_v$  скалярное

произведение  $(r(x), v(x))$ , т.е.  $r_v(x) = \sum_{i=1}^n r_i(x) v_i(x)$ .

Предположим, что граница  $\partial Q$  состоит из следующих пяти частей:

$S_0 = \{x \in \partial Q \mid A_0(x; v(x)) \geq \delta, r_v(x) > 0, \delta > 0\}$ ;

$S_1 = \{x \in \partial Q \mid A_0(x; v(x)) = 0, r_v(x) > 0\}$ ;

$S_2 = \{x \in \partial Q \mid A_0(x; v(x)) \leq -\delta\}$ ;

$S_3 = \{x \in \partial Q \mid A_0(x; v(x)) = 0, r_v(x) < 0\}$ ;

$S_4 = \{x \in \partial Q \mid A_0(x; v(x)) \geq \delta, r_v(x) < 0\}$ .

К уравнению (4.1) присоединим следующие условия:

$$u|_{S_2 \cup S_3} = 0, \quad (4.2)$$

$$l_p u = u|_{S_4} = \varphi(x), \quad l_p u = \frac{\partial u}{\partial p}|_{S_4} = \psi(x), \quad x \in S_4, \quad (4.3)$$

где  $\partial/\partial p$  — производная по направлению  $p$  из векторного поля  $\varphi$  класса  $C^1$ , которое не является касательным к  $S_4$ .

*Условие 1.* Область  $Q$  такова, что существует векторное поле  $\mathcal{H}$ , удовлетворяющее требованиям ( $\mathcal{H}_1$ ) и ( $\mathcal{H}_2$ ), для которого скалярное произведение  $r_v(x) \leq 0$  для почти всех  $x \in S_2$ .

Отметим, что конус  $K(x)$  можно рассматривать как совокупность векторов  $\xi(x) = \tau\eta(x) + \xi(x)$ , где

$$\tau A_0(x; \eta(x)) \geq -A_0(x; \eta, \xi) + G_{\eta}^{1/2}(x; \xi) \quad (4.4)$$

для любого вектора  $\xi(x) \in R^n$ , ортогонального  $\eta(x)$ .

*Свойство 1.*  $K(x)$  — выпуклое множество.

*Доказательство.* Пусть  $\xi(x) = (\tau\eta + \xi)(x)$  и  $\tilde{\xi}(x) = (\tilde{\tau}\eta + \tilde{\xi})(x)$  — произвольные точки конуса  $K(x)$ . Согласно (4.4),

$$\tau(x) A_0(x; \eta) \geq -A_0(x; \eta, \xi) + G_{\eta}^{1/2}(x; \xi), \quad (4.5)$$

$$\tilde{\tau}(x) A_0(x; \eta) \geq -A_0(x; \eta, \tilde{\xi}) + G_{\eta}^{1/2}(x; \tilde{\xi}), \quad (4.5')$$

где  $(\xi, \eta) = 0$  и  $(\tilde{\xi}, \eta) = 0$ ,  $\xi, \tilde{\xi} \in R^n$ . Множество  $M(x) = \{\xi(x) \in R^n \mid (\xi, \eta) = 0\}$  является векторным подпространством пространства  $R^n$ . Из определения 2 следует, что выражение  $G_{\eta}^{1/2}(x; \xi)$  является нормой относительно элемента  $\xi(x) \in M(x)$  и выполняется неравенство Коши–Буняковского

$$\left| G_{\eta}(x; \xi, \tilde{\xi}) \right| \leq G_{\eta}^{1/2}(x; \xi) \cdot G_{\eta}^{1/2}(x; \tilde{\xi}) \quad (4.6)$$

для скалярного произведения

$$G_{\eta}(x; \xi, \tilde{\xi}) = A_0(x; \eta, \xi) \cdot A_0(x; \eta, \tilde{\xi}) - A_0(x; \eta) \cdot A_0(x; \xi, \tilde{\xi}) \quad (4.7)$$

относительно элементов  $\xi, \tilde{\xi} \in M(x)$ . То что (4.7) — скалярное произведение следует из определения 2 гиперболичности уравнения (4.1). Таким образом, согласно (4.4) и определения выпуклых множеств для доказательства свойства 1, достаточно доказать неравенство

$$(\lambda\tau(x) + (1-\lambda)\tilde{\tau}(x)) \cdot A_0(x, \eta) \geq -A_0(x, \eta, \lambda\xi + (1-\lambda)\tilde{\xi}) + G_\eta^{1/2}(x, \lambda\xi + (1-\lambda)\tilde{\xi}) \quad (4.8)$$

для любого числа  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Легко проверить, что

$$A_1(x, \eta, \lambda\xi + (1-\lambda)\tilde{\xi}) = \lambda A_0(x, \eta, \xi) + (1-\lambda) A_0(x, \eta, \tilde{\xi}), \quad (4.9)$$

$$G_\eta(x, \lambda\xi + (1-\lambda)\tilde{\xi}) = \lambda^2 G_\eta(x, \xi) + 2\lambda(1-\lambda)G_\eta(x, \xi, \tilde{\xi}) + (1-\lambda)^2 G_\eta(x, \tilde{\xi}). \quad (4.10)$$

Отсюда и из неравенств (4.5), (4.5'), используя (4.6), следует и доказываемое неравенство (4.8).

**Следствие 3.** Так  $K^+(x)$  — двойственный конус по отношению к конусу  $K(x)$  и  $K(x)$  — выпуклое множество, то и  $K^+(x)$  представляет собой также выпуклое множество.

**Свойство 2.** Векторное поле  $\mathcal{H}$ , определенное относительно оператора  $A(x, D)$ , таково, что для любого  $x \in \bar{Q}$  каждый перпендикулярный к  $r(x) \in \mathcal{H}$  вектор  $q(x) = (q_1(x), \dots, q_n(x))$  удовлетворяет неравенству  $A_0(x, q) \leq -\delta_1 < 0$ , где  $|q(x)| = 1$ .

Утверждение этого свойства следует из определений множеств  $\mathcal{H}$  и  $K^+(x)$  и требований  $(\mathcal{H}_1)$  и  $(\mathcal{H}_2)$ .

Задачу (4.1)–(4.3) можно рассматривать как операторное уравнение

$$Lu = (A(x, D)u, l_0 u, l_1 u) = F \quad (4.11)$$

с областью определения  $D(L) = \{u \in C^2(Q) \mid u|_{S_2 \cup S_3} = 0\}$  оператора  $L$ , где  $C^2(\bar{Q})$  — множество непрерывно дифференцируемых до второго порядка функций в  $\bar{Q}$ . Для доказательства существования и единственности сильного решения задачи (4.1)–(4.3) введем пространства  $B$  и  $H$ .

Обозначим через  $S(x)$  сечение области  $Q$ , проходящее через точку  $x \in \bar{Q}$  и такое, что:

1.  $A_0(y, \nu(y)) \geq \delta > 0$  для почти всех точек  $y \in S(x)$ , где  $\nu(y)$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S(x)$  в точке  $y \in S(x)$ .

2.  $S(x)$  является кусочно-гладкой гиперповерхностью и такой, что гладкие части ее являются поверхностями класса  $C^1$ .

3. Совокупность сечений  $\{S(x)\}_{x \in \bar{Q}}$  такова, что два различных сечения из этого множества не пересекаются ни в одной точке  $x \in \bar{Q}$ , т.е. точки одного сечения находятся по одну сторону по отношению к другому сечению.

Каждому сечению  $S(x)$  поставим в соответствие параметр  $t$  и обозначим  $S^t$ . Считаем, что  $\bar{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} S^t$ , для разных  $t \neq \tilde{t}$  ( $t, \tilde{t} \in [0, 1]$ )  $S^t \cap S^{\tilde{t}} = \emptyset$  ( $\emptyset$  — пустое множество), гиперповерхности  $S_4$  и  $S_0$  входят в семейство  $\{S(x)\}_{x \in \bar{Q}}$  и  $S_4 = S^1$ ,  $S_0 = S^0$ .

Обозначим через  $B$  банахово пространство, полученное замыканием множества  $D(L)$  по норме

$$\|u\|_B = \sup_{0 \leq t \leq 1} \sum_{|a| \leq 1} \|D^a u\|_{L_2(S^t)}, \quad (4.12)$$

где  $\|\cdot\|_{L_2(S^t)}$  — норма пространства квадратично суммируемых по Лебегу функций, заданных на гиперповерхности  $S^t$ . Обозначим через  $H$  гильбертово пространство

$$H = L_2(Q) \times H_{\Gamma_1}^1(S_4) \times L_2(S_4), \quad (4.13)$$

где  $L_2(Q)$  — пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций в  $Q$ ,  $L_2(S_4)$  — то же пространство функций, заданных на  $S_4$ ,  $H_{\Gamma_1}^1(S_4)$  — пополнение  $D(L)$  по норме пространства  $H^1(S_4)$ ,  $H^1(S_4)$  — пространство Соболева квадратично суммируемых по Лебегу вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными первого порядка функций, заданных на  $S_4$ .

Условие 2. Коэффициенты  $a_\alpha(x)$  уравнения (4.1) таковы, что  $a_\alpha(x) \in C^2(\overline{Q})$  для  $|\alpha|=2$  и  $a_\alpha(x)$  измеримы и ограничены для  $|\alpha|=1$ .

**Теорема 3.** При выполнении условий 1 и 2 для оператора задачи (4.1)–(4.3) справедливо энергетическое неравенство, т.е.

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_{H_1}$$

для любого  $u \in D(L)$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $u$ , пространства  $B$  и  $H$  определены с помощью (4.12) и (4.13).

**Доказательство.** Каждое сечение  $S^r (0 < r < 1)$  область  $Q$  делит на две под-области  $Q^r$  и  $Q^{\bar{r}}$ . К  $Q^r$  условимся относить ту подобласть, для которой внешняя нормаль  $\nu(x)$  к гиперповерхности  $S^r$  в точках  $x \in S^r$ , как к части границы  $\partial Q^r$ , составляет острый угол с вектором  $r(x)$ , т.е.  $r_1(x) > 0$ .

Выражение  $2A(x, D)u \frac{\partial u}{\partial r}$ , где  $\frac{\partial u}{\partial r} = u_r = \sum_{i=1}^n r_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , проинтегрируем по  $Q^r$ .

Воспользуемся записью оператора  $A(x, D)$  из уравнения (4.1'). Чтобы применить формулу Остроградского, главную часть представим в виде дивергенции, а именно:

$$\begin{aligned} 2 \left( A(x, D)u, \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{L_2(Q^r)} &= \sum_{i,j,k=1}^n \int_{Q^r} \left\{ \left( a_{ij} r_k u_{x_j} u_{x_k} \right)_{x_i} - \right. \\ &\quad \left. - \left( a_{ij} r_k u_{x_i} u_{x_j} \right)_{x_k} + \left( a_{ij} r_k u_{x_i} u_{x_k} \right)_{x_j} \right\} dx + \int_{Q^r} \Phi(u) dx, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $\Phi(u)$  — билинейная форма от функции  $u$  и ее производных первого порядка, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 2 \sum_{i,k=1}^n a_{ij} r_k u_{x_i} u_{x_k} + 2 \sum_{k=1}^n a_{ij} r_k u u_{x_k} - \\ &- \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ \left( a_{ij} r_k \right)_{x_i} u_{x_j} u_{x_k} - \left( a_{ij} r_k \right)_{x_k} u_{x_i} u_{x_j} + \left( a_{ij} r_k \right)_{x_j} u_{x_i} u_{x_k} \right\}. \end{aligned}$$

В силу формулы Остроградского

$$2 \left( A(x, D)u, u_r \right)_{L_2(Q^r)} = \mathfrak{I}(Q^r) + \int_{Q^r} \Phi(u) dx,$$

$$\mathfrak{I}(Q^r) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial Q^r} a_{ij} [u_{x_j} u_r \nu_i - u_{x_i} u_r \nu_j + u_{x_i} u_r \nu_j] ds.$$

Для оценки  $\mathfrak{I}(Q^r)$  воспользуемся локальной декартовой системой  $\nu, \tau, \mu, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n-3)}$ . В названной локальной системе координат одну ось направим по вектору  $\nu(x)$ , вторую — по перпендикулярному к нему вектору  $\tau(x) \in \pi_0(x)$ , где  $\pi_0(x)$  — двумерная плоскость, содержащая векторы  $\nu(x)$  и  $r(x)$ . Остальные координаты выбираем следующим образом. Три гиперплоскости, проходящие через точку  $x$ , где одна перпендикулярна вектору  $\nu(x)$ , вторая —  $\text{grad } u(x)$ , третья —  $\tau(x)$ , пересекаются по плоскости размерности не менее  $n-3$ . В этом пересечении выберем ортогональные координатные векторы  $\tau^{(1)}(x), \dots, \tau^{(n-3)}(x)$ . Векторами  $\nu(x), \tau(x), \tau^{(1)}(x), \dots, \tau^{(n-3)}(x)$  определяется перпендикулярный им последний до полной системы вектор  $\mu(x)$ . В силу такого выбора

$$u_{\tau^{(s)}}(x) = 0, \quad s = 1, \dots, n-3.$$

Переразлагая производные в подынтегральном выражении по новым направлениям,  $\mathfrak{I}(Q^r)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\mathcal{Q}') = & \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial \mathcal{Q}'} a_{ij} \left[ (u_v v_j + u_\tau \tau_j + u_\mu \mu_j) (u_v r_v + u_\tau r_\tau + u_\mu r_\mu) v_i - \right. \\
& - (u_v v_i + u_\tau \tau_i + u_\mu \mu_i) (u_v v_j + u_\tau \tau_j + u_\mu \mu_j) r_v + \\
& + (u_v v_i + u_\tau \tau_i + u_\mu \mu_i) (u_v r_v + u_\tau r_\tau + u_\mu r_\mu) v_j \left. \right] ds = \int_{\partial \mathcal{Q}'} [r_v A_0(v) u_v^2 + \\
& + (2r_\tau A_0(v, \tau) - r_v A_0(\tau)) u_\tau^2 + (2r_\mu A_0(v, \mu) - r_v A_0(\mu)) u_\mu^2 + 2r_\tau A_0(v) u_v u_\tau + \\
& + 2r_\mu A_0(v) u_v u_\mu + 2(r_\mu A_0(v, \tau) + r_\tau A_0(v, \mu) - r_v A_0(\tau, \mu)) u_\tau u_\mu] ds = \int_{\partial \mathcal{Q}'} \Phi_0(u) ds,
\end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ,  $r_\zeta = (r, \zeta) = \sum r_k \zeta_k$ ,  $\zeta \in \{v, \tau, \mu\}$  в системе координат  $x_1, \dots, x_n$ ,  $r = \{r_v, r_\tau, r_\mu, 0, \dots, 0\}$  в системе координат  $v, \tau, \mu, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n-3)}$ ;

$$A_0(\zeta, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \xi_j, \quad A_0(\zeta, \zeta) = A_0(\zeta) = A_0(x, \zeta).$$

Интеграл (4.15) разобьем на сумму с учетом заданных условий (4.2) и (4.3), а именно:

$$\mathfrak{I}(\mathcal{Q}') = \int_{S'} \Phi_0(u) ds + \sum_{m=1}^4 \int_{\partial \mathcal{Q}' \cap S_m} \Phi_0(u) ds = \sum_{m=0}^4 \mathfrak{I}_m(\mathcal{Q}') \quad (4.16)$$

В силу условия (4.2) на  $S_3$   $u_r = u_\mu = 0$ . В этом случае  $\Phi_0(u) = u_v^2 A_0(v) r_v$ . Но для  $x \in S_3$   $A_0(v) = 0$ . Следовательно,

$$\mathfrak{I}_3(\mathcal{Q}') = \int_{\partial \mathcal{Q}' \cap S_3} \Phi_0(u) ds = 0. \quad (4.17)$$

Для  $x \in S_2$  также  $u_\tau = u_\mu = 0$  (см. (4.2)). И так как, в силу условия 1,  $r_v \leq 0$  и для  $x \in S_2$   $A_0(v) < 0$ , то  $\Phi_0(u) \geq 0$  для  $x \in S_2$  и, следовательно,

$$\mathfrak{I}_2(\mathcal{Q}') = \int_{\partial \mathcal{Q}' \cap S_2} \Phi_0(u) ds \geq 0. \quad (4.18)$$

Значения  $\mathfrak{I}_0(\mathcal{Q}')$  и  $\mathfrak{I}_1(\mathcal{Q}')$  похожи друг на друга тем, что отсутствуют граничные условия на  $S(r)$  и  $S_1$ . В этих интегралах подынтегральное выражение будем рассматривать как квадратичную форму относительно производных  $u_v$ ,  $u_\tau$  и  $u_\mu$ . Для оценки снизу (4.14) воспользуемся критерием Сильвестра [18 (с.276–279)] относительно квадратичной формы  $\Phi_0(u)$ , матрицу которой можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}
r_v A_0(v) & r_\tau A_0(v) & r_\mu A_0(v) \\
r_\tau A_0(v) & 2r_\tau A_0(v, \tau) - r_v A_0(\tau) & r_\mu A_0(v, \tau) + r_\tau A_0(v, \mu) - r_v A_0(\tau, \mu) \\
r_\mu A_0(v) & r_\mu A_0(v, \tau) + r_\tau A_0(v, \mu) - r_v A_0(\tau, \mu) & 2r_\mu A_0(v, \mu) - r_v A_0(\mu)
\end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Так как для  $x \in S_1$   $A_0(v) = 0$ , то для этих  $x$

$$2r_\tau A_0(v, \tau) - r_v A_0(\tau) = -\frac{1}{r_v} A_0(q), \quad (4.20)$$

где вектор  $q(x) = r_\tau(x) v(x) - r_v(x) \tau(x)$  и представляет собой поворот вектора  $r(x)$  на  $90^\circ$  в плоскости  $\pi_0(x)$ . Аналогично,

$$2r_\mu A_0(v, \mu) - r_v A_0(\mu) = -\frac{1}{r_v} A_0(\chi), \quad (4.21)$$

$$r_\mu \cdot A_0(v, \tau) + r_\tau \cdot A_0(v, \mu) - r_v \cdot A_0(\tau, \mu) = -\frac{1}{r_v} \cdot A_0(q, \chi), \quad (4.22)$$

где  $\chi(x) = r_\mu(x)v(x) - r_v(x)\mu(x)$  и представляет собой поворот на  $90^\circ$  вектора  $r(x)$  в двумерной плоскости, содержащей векторы  $r(x)$  и  $\mu(x)$ . Таким образом, для любого  $x \in S_1$

$$\Phi_0(u) = -\frac{1}{r_v(x)} \left[ A_0(q)u_\tau^2 + 2A_0(q, \chi)u_\tau u_\mu + A_0(\chi)u_\mu^2 \right](x).$$

Согласно свойству 2,

$$A_0(x; q(x)), A_0(x; \chi(x)) \leq -C_1 < 0. \quad (4.23)$$

Применяя схему доказательства неравенства Коши–Буняковского (см., напр., [78], с.41–42), можно доказать неравенство

$$A_0(x; q(x)) \cdot A_0(x; \chi(x)) - A_0^2(x; q(x), \chi(x)) \geq C_2 > 0. \quad (4.24)$$

Действительно,  $A_0(x; q(x)) \leq -C_3 < 0$ , так как  $q(x)$  перпендикулярен  $r(x)$  (см. свойство 2). Нетрудно видеть, что  $r_\mu(x)=0$ , так как  $\mu(x)$  перпендикулярен  $v(x)$  и  $r(x)$ . Следовательно, вектор  $\chi(x)$  перпендикулярен  $r(x)$ . Линейная комбинация  $q(x) - \lambda \chi(x)$ , где  $\lambda$  число, представляет собой вектор, перпендикулярный  $r(x)$ . Тогда

$$0 > -C_4 \geq A_0(x; q(x) - \lambda \chi(x)) = A_0(x; q(x)) - 2A_0(x; q(x), \chi(x)) + \lambda^2 A_0(x; \chi(x))$$

для любого числа  $\lambda$ . А это возможно лишь тогда, если дискриминант отрицателен, т.е. выполняется неравенство (4.24).

Так как  $r_v(x) > 0$ ,  $A_0(x; v(x)) = 0$  и в силу неравенств (4.23) и (4.24) для всех  $x \in S_1$   $\Phi_0(u) \geq 0$ , т.е

$$\mathfrak{I}_1(Q^t) = \int_{\partial Q^t \cap S_1} \Phi_0(u) ds \geq 0. \quad (4.25)$$

Сделаем оценки для  $\mathfrak{I}_0(Q^t)$ . Рассмотрим главные миноры матрицы (4.19) для случая  $x \in S(t)$ . Запишем их в удобной для исследования форме

$$d_1(x) = r_v(x) \cdot A_0(x; v(x)), \quad (4.26)$$

$$d_2(x) = -A_0(x; v(x)) \cdot A_0(x; q(x)), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} d_3(x) &= \frac{A_0(v)}{r_v} \begin{vmatrix} 1 & r_v \cdot A_0(v) & r_\mu \cdot A_0(v) \\ 0 & -A_0(q) & -A_0(q, \chi) \\ 0 & -A_0(q, \chi) & A_0(\chi) \end{vmatrix}(x) = \\ &= \frac{A_0(x; v(x))}{r_v(x)} \left[ A_0(x; q(x)) \cdot A_0(x; \chi(x)) - A_0^2(x; q(x), \chi(x)) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из формул (4.26)–(4.28) видно, что, используя свойство векторов  $q(x)$  и  $\chi(x)$  в виде неравенств (4.23), (4.24) и неравенство

$$r_v(x), A_0(x; v(x)) \geq C_5 > 0$$

для любого  $x \in S(t)$ ,

$$d_p(x) \geq C_6 > 0, p=1, 2, 3. \quad (4.29)$$

Таким образом, из неравенств (4.29) следует:

$$\mathfrak{I}_0(Q^t) = \int_{S(t)} \Phi_0(u) ds \geq C_7 \int_{S(t)} [u_v^2 + u_\tau^2 + u_\mu^2](x) ds,$$

где положительная константа  $C_7$  не зависит от  $n$ . Но

$$u_v^2 + u_\tau^2 + u_\mu^2 \geq C_8 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$$

или

$$\mathfrak{I}_0(Q') \geq C_9 \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(S(i))}^2. \quad (4.30)$$

Оценивая сверху выражение  $\mathfrak{I}_4(Q')$ , мы получим неравенство

$$\mathfrak{I}_4(Q') = \int_{S_0} \Phi_0(u) ds \leq C_{10} \left( \|l_0 u\|_{H_{\text{гп}}^1(S_4)}^2 + \|l_1 u\|_{L_2(S_4)}^2 \right). \quad (4.31)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, легко сделать оценки

$$\left| \int_{Q'} \Phi(u) ds \right| \leq C_{11} \|u\|_{H^1(Q')}^2, \quad (4.32)$$

$$2 \left| (Au, u_r)_{L_2(Q')} \right| \leq C_{12} \left( \|Au\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{H^1(Q')}^2 \right). \quad (4.33)$$

Равенства (4.14)–(4.17) и оценки (4.18), (4.23)–(4.25), (4.30)–(4.33) в совокупности порождают неравенство

$$\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(S(i))}^2 \leq C_{13} \|Lu\|_H^2 + C_{14} \|u\|_{H^1(Q')}^2. \quad (4.34)$$

В левую часть (4.34) введем функцию  $u$ . Для этого проинтегрируем по  $Q'$  выражение  $(u^2)_{,i} = 2uu_{,i}$  и проведем соответствующие преобразования и оценки. В результате получим

$$\int_{S(i)} u^2 ds \leq C_{15} \left( \|l_0 u\|_{H_{\text{гп}}^1(S_4)}^2 + \|l_1 u\|_{L_2(S_4)}^2 + \|u\|_{H^1(Q')}^2 \right). \quad (4.35)$$

Неравенства (4.34) и (4.35) сложим. Получим новое неравенство, к которому можно применить неравенство Гронуолла (см. [21,41]). В результате получим соотношение

$$\int_{S(i)} \left[ u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] ds \leq C_{16} \|Lu\|_H^2, \quad (4.36)$$

из которого легко следует доказываемое энергетическое неравенство, если в левой части (4.36) перейти к верхней грани.

**Лемма 1.** Оператор  $L$  задачи (4.1)–(4.3) как оператор из  $B$  в  $H$  допускает замыкание.

**Доказательство.** Пусть  $u_k \rightarrow 0$  в  $B$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $u_k \in D(L)$ . Так как  $\|l_0 u_k\|_{H_{\text{гп}}^1(S_4)}^2 \leq C \|u_k\|_B$  и  $\|l_1 u_k\|_{L_2(S_4)}^2 \leq C \|u_k\|_B$ ,  $C > 0$ , то отсюда следует  $l_0 u_k \rightarrow 0$  в  $H_{\text{гп}}^1(S_4)$  и  $l_1 u_k \rightarrow 0$  в  $L_2(S_4)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим скалярное произведение  $(Au_k, v)_{L_2(Q)}$  для любой функции  $v \in C_0^\infty(Q)$ .

Интегрируя по частям последнее выражение, получим

$$(A(x, D)u_k, v)_{L_2(Q)} = \left( u_k, \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} v_{,j})_{,i} \right)_{L_2(Q)} + \left( \sum_{i=1}^n a_i (u_k)_{,x_i} + a_0 u_k, v \right)_{L_2(Q)} \quad (4.37)$$

Из предположения  $\|u_k\|_B \rightarrow 0$  следует, что  $\|u_k\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$  и

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_k + a_0 u_k \right\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \text{ Поскольку множество } C_0^\infty(Q) \text{ плотно в } L_2(Q),$$

то из последних соотношений и равенства (4.37) следует и  $A(x, D)u_k \rightarrow 0$  в  $L_2(Q)$ .

\*  $C_0^\infty(Q)$  — множество бесконечно дифференцируемых функций в  $Q$  с компактным носителем.

Условие 3. Область  $Q$  такова, что существует разбиение ее сечениями  $S(i)$  на конечное число подобластей  $Q_i \left( \bigcup_{i=1}^{i_0} \overline{Q_i} = \overline{Q} \right)$ , при котором для каждой отдельно такой подобласти  $Q_i (i = 1, \dots, i_0)$  можно выбрать векторное поле  $\mathcal{H}$  элементов  $\Gamma(x) = (r_1(x), \dots, r_n(x))$  из характеристического конуса  $K^\perp(x)$  для каждой точки  $x \in \overline{Q_i}$ , удовлетворяющее следующим требованиям:

1. Выполняются условия  $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_2)$  относительно  $Q_i$ .
2. Для любой точки  $x \in S_2 \cap \overline{Q_i}$   $r_\nu(x) = (r(x), \nu(x)) = 0$ , где  $\nu(x)$  — единичный вектор внешней относительно  $Q_i$  нормали в точке  $x \in S_2 \cap \overline{Q_i}$ .
3.  $Q_i$  является выпуклым относительно поля  $\mathcal{H}$  в следующем смысле. Поле  $\mathcal{H}$ , элементы которого в каждой точке  $x \in R^n$  определяются единственным образом, порождает совокупность линий  $\{\rho\}$ , к которым оно является касательным. Множество  $Q_i$  будем называть выпуклым относительно  $\mathcal{H}$ , если  $Q_i$  с любой линией  $\rho$ , к которому  $\mathcal{H}$  касательно, может пересекаться только по односвязному множеству.

**Теорема 4.** При выполнении условий 1–3 и  $S_0 \cup S_1 \neq \emptyset$ ,  $S_4 \cup S_3 \neq \emptyset$  ( $\emptyset$  — пустое множество) для любого  $F \in H$  существует и единственно сильное решение  $u \in B$  (см. (4.12)) задачи (4.1)–(4.3) и справедлива оценка

$$\|u\|_B \leq C \|F\|_H. \quad (4.38)$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует оценка (4.38), из следствия 1 — единственность сильного решения, если оно существует.

Для доказательства существования сильного решения, согласно следствию 2, теореме 3 и лемме 1, достаточно доказать плотность множества значений  $R(L)$  оператора  $L$  в пространстве  $H$ . Рассмотрим сначала случай оператора  $L_0 = (A_0(x, D), l_0, l_1)$  с областью определения  $D(L_0) = D(L)$ .

Пусть элемент  $l = (v(x), v_0(x), v_1(x)) \in H$  ортогонален  $R(L_0)$ . Это означает, что

$$(A_0 u, v)_{L_2(Q)} + (l_0 u, v_0)_{H^1(S_4)} + (l_1 u, v_1)_{L_2(S_4)} = 0 \quad (4.39)$$

для любого  $u \in D(L)$ . Полагая в (4.39), в частности, что  $u$  равно любому элементу из множества  $D_0(L) = \{u \in D(L) \mid l_0 u = l_1 u = 0\} \subset D(L)$ , получим равенство

$$(A_0(x, D)u, v)_{L_2(Q)} = 0 \quad (4.40)$$

для всех  $u \in D_0(L)$ . В (4.40) вместо  $u$  возьмем  $J_k u$ , где  $J_k$  — операторы осреднения переменного шага, а  $u \in C_0^\infty(Q) \subset D_0(L)$ . Так как  $u \in C_0^\infty(Q)$ , то  $J_k u \in C_0^\infty(Q)$  при любых  $\delta_{mk} < 2^{-4m}$  (см. обозначения и утверждения в [51–53]). Теперь равенство (4.40) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (A_0 J_k u, v)_{L_2(Q)} &= (J_k A_0 u, v)_{L_2(Q)} + (A_0 J_k u - J_k A_0 u, v)_{L_2(Q)} = (A_0 u, J_k^* v)_{L_2(Q)} + \\ &+ (K u, v)_{L_2(Q)} = (u, A_0 J_k^* v)_{L_2(Q)} + (u, K_0^* v)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n \left( u, \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(Q)}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где  $J_k^*$  — сопряженный оператор к оператору  $J_k$  [51]. Распишем более подробно коммутатор  $K = A_0 J_k - J_k A_0$ . Итак,

$$K u = K_0 u + \sum_{i=1}^n K_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где

$$\begin{aligned} K_0 u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} J_{\delta_{mk}} u + a_{ij} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_i \partial x_j} J_{\delta_{mk}} u - \right. \\ &\left. - \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_Q \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \omega \left( \frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) \left( \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} \right) \right] u(y) dy \right\}, \end{aligned}$$

$$K_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \left\{ 2a_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} J_{\delta_{mk}} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_Q \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \omega \left( \frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) (a_{ij}(x) - a_{ij}(y)) \right] \frac{\partial u}{\partial y_i} dy \right\}.$$

Таким образом, для любой функции  $u \in C_0^\infty(Q)$  получаем равенство

$$\left( u, A_0 J_k^* v + K_0^* v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(Q)} = 0, \quad (4.42)$$

которое с помощью предельного перехода распространяется на любую функцию  $u \in L_2(Q)$ .

Возвращаемся к равенству (4.39), где опять вместо  $u$  берем  $J_k u$ , а  $u \in D_0(L)$ . Перебрасывая операторы осреднения и дифференцирования с  $u$  на  $v$  похожим образом, как это сделано в (4.41), получим

$$\left( u, A_0 J_k^* v + K_0^* v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(Q)} + M(u, v; \partial Q) = 0, \quad (4.43)$$

где  $M(u, v; \partial Q)$  — совокупность граничных слагаемых, которые получаются в результате интегрирования по частям выражения  $(A_0 u, J_k^* v)_{L_2(Q)} + (K u, v)_{L_2(Q)}$ .

Из равенств (4.42), (4.43) следует, что

$$M(u, v; \partial Q) = 0. \quad (4.44)$$

Граничные слагаемые  $M(u, v; \partial Q)$  можно выписать в явном виде. Варьируя функцией  $u$  в пределах множества  $D_0(L)$ , можно показать, что (4.44) выполняется для любого  $u \in D_0(L)$  тогда и только тогда, если  $v \in L_2(Q)$  таково, что

$$J_k^* v \Big|_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} = \frac{\partial}{\partial \nu} J_k^* v \Big|_{S_0} = 0, \quad K_i^* v \Big|_{S_0 \cup S_1} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.45)$$

Отметим, что предыдущие рассуждения, начиная с (4.43), справедливы, вообще говоря, для нелинейных операторов осреднения, т.е. параметры  $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u, v)$  в операторах осреднения  $J_k$  выбираются в зависимости от  $u$  и  $v$  так, чтобы имели смысл граничные условия.

Обозначим через  $\tilde{Q}^i$  дополнение к  $Q^i \cup S(i)$  области  $Q$ . Величина  $i$  выбрана таким образом, что  $\tilde{Q}^i$  представляет собой выпуклое множество относительно выбранного векторного поля  $\mathcal{H}$  по множеству  $Q_i$  (например  $i = i_0$ , согласно условию 3). Отметим, что  $S_0 \subset \overline{Q_{i_0}}$ . Введем обозначение

$(\partial \tilde{Q}^i)^- = \{x \in \partial \tilde{Q}^i \mid \nu(x) < 0\}$ , где  $\nu(x)$  — единичный вектор внешней нормали.

Аналогично,  $(\partial \tilde{Q}^i)^+ = \{x \in \partial \tilde{Q}^i \mid \nu(x) > 0\}$ . Обозначим через  $\Gamma(x)$  криволинейный интеграл

$$\Gamma(x) = \int_{\tilde{x}}^x J_k^* v ds, \quad (4.46)$$

где интегрирование ведется по кривой  $\rho$ , к которой векторное поле  $\mathcal{H}$  является касательным,  $x$  и  $\tilde{x}$  находятся на этой кривой и  $\tilde{x} \in (\partial \tilde{Q}^i)^-$ ,  $x \in \tilde{Q}^i$ . Из определения интеграла (4.46) и условий (4.45) следует, что

$$J_k^* v \Big|_{(\partial \tilde{Q}^i)^- \cup (S_2 \cap \partial \tilde{Q}^i)} = 0, \quad \Gamma \Big|_{(\partial \tilde{Q}^i)^- \cup (S_2 \cap \partial \tilde{Q}^i)} = 0, \quad (4.47)$$

$$J_k^* v(x) = \frac{\partial}{\partial r} I v(x).$$

В равенстве (4.42) выбираем  $u$  по формуле

$$u(x) = \begin{cases} I v(x), & x \in \tilde{Q}^i \\ 0, & x \in Q^i \end{cases} \quad (4.48)$$

Подставляя в (4.42) выбранную по формуле (4.48) функцию  $u(x)$ , получим

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\tilde{Q}^i} I v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial r} I v \right) ds = \sum_{i=1}^n \left( I v, \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(\tilde{Q}^i)} - \left( I v, K_0^* v \right)_{L_2(\tilde{Q}^i)}. \quad (4.49)$$

Левую часть (4.49) проинтегрируем по частям, используя формулу Остроградского. Для этого подынтегральное выражение преобразуем к следующему дивергентному виду

$$\sum_{i,j=1}^n I v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial r} I v \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} I v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial r} I v \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_0(v) - \Psi_1(v), \quad (4.50)$$

$$\Psi_0(v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} I v \frac{\partial}{\partial x_j} I v,$$

$$\Psi_1(v) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial r} I v \frac{\partial}{\partial x_j} I v + \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} I v \frac{\partial}{\partial x_k} I v.$$

В силу условий (4.47)

$$\int_{\tilde{Q}^i} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} I v \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial r} I v \right) dx = 0. \quad (4.51)$$

Равенство (4.49) с учетом (4.50) и (4.51) можно записать так:

$$-\int_{\tilde{Q}^i} \Psi_0(v) r_i ds = \int_{\tilde{Q}^i} \Psi_1(v) dx - 2 \left( I v, K_0^* v \right)_{L_2(\tilde{Q}^i)} - 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} I v, K_i^* v \right)_{L_2(\tilde{Q}^i)}. \quad (4.52)$$

Рассмотрим более подробно левую часть (4.52). В силу условия 3 и (4.47)

$$\int_{(S_2 \cup S_3) \cap \partial \tilde{Q}^i} \Psi_0(v) r_i ds = 0. \quad (4.53)$$

В точке  $x \in S(i)$  выберем локальную декартову систему координат  $\{v, \tau^1, \dots, \tau^n\}$ . В этой системе справедливо представление производной

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I v = \frac{\partial}{\partial v} I v v_i + \frac{\partial}{\partial \tau^1} I v \tau_i^1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \tau^n} I v \tau_i^n.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial r} I v = \frac{\partial}{\partial v} I v r_v + \frac{\partial}{\partial \tau^1} I v r_{\tau^1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \tau^n} I v r_{\tau^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I v = \frac{v_i}{r_v} J_k^* v + \left( \tau_i^1 - \frac{r_{\tau^1}}{r_v} v_i \right) \frac{\partial}{\partial \tau^1} I v + \dots + \left( \tau_i^n - \frac{r_{\tau^n}}{r_v} v_i \right) \frac{\partial}{\partial \tau^n} I v = \frac{v_i}{r_v} J_k^* v.$$

Таким образом,

$$-\int_{S(i)} \Psi_0(v) r_i ds = -\int_{S(i)} \frac{1}{r_v} \left( J_k^* v \right)^2 \cdot A_i(x; v(x)) ds \geq C_1 \|J_k^* v\|_{L_2(S(i))}^2. \quad (4.54)$$

Рассмотрим теперь  $\Psi_0(v)$  на  $(\partial \tilde{Q}^i)^+$ . Здесь для почти всех  $x$  в локальной декартовой системе координат  $\{r, q^1, \dots, q^n\}$  справедливо представление производных

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I v = \frac{\partial}{\partial r} I v r_i + \frac{\partial}{\partial q^1} I v q_i^1 + \dots + \frac{\partial}{\partial q^n} I v q_i^n = \sum_{k=2}^n q_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} I v. \quad (4.55)$$

Согласно свойству 2 и в силу представления (4.55) и того, что  $r_v \geq \delta > 0$ , для

$$x \in (\partial \tilde{Q}^i)^+, (r, \theta) = 0, \quad \theta = \left( \sum_{k=2}^q q_1^k \frac{\partial}{\partial q^k} I v, \dots, \sum_{k=2}^q q_n^k \frac{\partial}{\partial q^k} I v \right),$$

$$- \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} \Psi_0(v) r_v ds = - \sum_{k=2}^n \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} r_v(x) A_k(x, \theta) ds \geq$$

$$\geq C_2 \sum_{k=2}^n \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} \left( \sum_{k=2}^n q_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} I v \right)^2 ds \geq C_3 \sum_{i=1}^n \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} I v \right)^2 ds. \quad (4.56)$$

Вернемся к равенству (4.52). Левую часть его оцениваем снизу с помощью оценок (4.54) и (4.56), а правую часть сверху с помощью неравенства Коши–Буняковского. Затем, чтобы применить неравенство Гронуолла наряду с интегралом  $I v$ , введем интеграл

$$\tilde{I} v(x) = \int_{\tilde{x}}^x J_k^* v ds,$$

где интегрирование проводится по тем же линиям, что и в  $I v$ . Здесь  $\tilde{x} \in (\partial \tilde{Q}^i)^+$ .

Из определения  $I$  и  $\tilde{I}$  следует, что между ними имеется связь  $I v(x) + \tilde{I} v(x) = \tilde{I} v(\tilde{x})$ . Из равенства (4.52) в силу (4.53), (4.54), (4.56) и после замены  $I$  на  $\tilde{I}$  получим неравенство

$$C_1 \|J_k^* v\|_{L_2(S(t))}^2 + C_2 \sum_{i=1}^n \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I} v \right) (\tilde{x}) \beta(\tilde{x}) ds \leq$$

$$\leq \left| - (\tilde{I} v(\tilde{x}) - \tilde{I} v(x), K_0^* v)_{L_2(\tilde{Q}^i)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I} v(\tilde{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I} v(x), K_i^* v \right)_{L_2(\tilde{Q}^i)} - \int_{\tilde{Q}^i} \Psi_1(v) dx \right|. \quad (4.57)$$

Функция  $\beta(\tilde{x})$  появилась в результате замены области интегрирования и  $\beta(\tilde{x}) \geq \tilde{C} > 0$ .

Наряду с (4.57) рассмотрим равенство

$$\frac{1}{2} \int_{(\partial \tilde{Q}^i)^+} (\tilde{I} v)^2(\tilde{x}) v_r(\tilde{x}) \beta_1(\tilde{x}) ds = \int_{\tilde{Q}^i} J_k^* v(x) [\tilde{I} v(\tilde{x}) - \tilde{I} v(x)] dx. \quad (4.58)$$

которое получается из соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (I v)(x) = J_k^* v(x) I v(x)$$

путем интегрирования его по области  $\tilde{Q}^i$ . Здесь также  $\beta_1(\tilde{x}) \geq \tilde{C} > 0$  для некоторой константы  $\tilde{C}$ . Из (4.58) очевидно следует неравенство

$$C_4 \|\tilde{I} v\|_{L_2(\tilde{Q}^i)^+}^2 \leq \int_{\tilde{Q}^i} J_k^* v(x) [\tilde{I} v(\tilde{x}) - \tilde{I} v(x)] dx. \quad (4.59)$$

Неравенства (4.57) и (4.59) складываем друг с другом. В левой части получим неотрицательное выражение. Для оценки правой части применяем неравенство Коши–Буняковского. Здесь также пользуемся и оценками [53]

$$\|K_i^* v\|_{L_2(\tilde{Q}^i)}^2 \leq C_5 \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^i)}^2 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \|J_k^* v\|_{L_2(S(t))}^2 + \|\tilde{I}v\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)} \leq C_6(\varepsilon_0) \times \\ & \times \left[ \int_{\tilde{Q}^t} \left\{ (\tilde{I}v)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}) dx + \|J_k^* v\|_{L_2(\tilde{Q}^t)} + \|\tilde{I}v\|_{L_2(\tilde{Q}^t)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right\|_{L_2(\tilde{Q}^t)} \right] + (4.60) \\ & + \varepsilon_0 \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^t)}. \end{aligned}$$

где  $C_6(\varepsilon_0)$  увеличивается обратно пропорционально уменьшению  $\varepsilon_0 > 0$ . Для первых слагаемых правой части (4.60) можно сделать такую оценку

$$\int_{\tilde{Q}^t} \left\{ (\tilde{I}v)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}) dx \leq C_7 \tau \left[ \|\tilde{I}v\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)} \right],$$

где  $\tau$  уменьшается с уменьшением области  $\tilde{Q}^t$  по линиям  $\rho$ , т.е.  $S(t)$  выбираем таким, чтобы линии  $\rho$  области  $\tilde{Q}^t$  были достаточно малой длины. Выберем  $\tau_0$  так, чтобы

$$2C_7 C_6(\varepsilon_0) \tau_0 \leq 1, \quad 4T^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0 e^{2C_6(\varepsilon_0)\tau_0} \leq 1, \quad (4.61)$$

где  $T$  — максимальная длина линий  $\rho$  по области  $\tilde{Q}_{t_0}$ . Теперь для всех  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  следует неравенство

$$w(t) \leq 2C_6(\varepsilon_0) \int_{\tilde{x}} w(x) ds + 2\varepsilon_0 \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^t)} \quad (4.62)$$

в силу (4.61) и того, что

$$w(t) \leq \|J_k^* v\|_{L_2(S(t))}^2 + \|\tilde{I}v\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right\|_{L_2((\partial\tilde{Q}^t)^-)},$$

где

$$w(t) = \|J_k^* v\|_{L_2(S(t))}^2 + \|\tilde{I}v\|_{L_2(S(t))} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{I}v \right\|_{L_2(S(t))}.$$

К неравенству (4.62) применяем неравенство Гронуолла. В результате получим

$$w(t) \leq 2\varepsilon_0 e^{2C_6(\varepsilon_0)\tau_0} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^t)} \quad (4.63)$$

или

$$\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \|J_k^* v\|_{L_2(\tilde{Q}^{t_0})} \leq \|J_k^* v\|_{L_2(S(t))} \leq \frac{1}{4T^{\frac{1}{2}}} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^{t_0})}, \quad (4.64)$$

$\tilde{Q}^{t_0} \subset \tilde{Q}_{t_0}$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в (4.64), имеем,  $\|v\|_{L_2(\tilde{Q}^{t_0})} \leq 0$ , т.е.  $v=0$

в  $L_2(\tilde{Q}^{t_0})$ .

Продолжая этот процесс дальше, за конечное число шагов докажем  $v=0$  в верхнем выпуклом по  $\mathcal{H}$  множестве  $\tilde{Q}_{t_0}$ . Двигаясь дальше сверху вниз за конечное число шагов покажем, что  $v=0$  почти всюду во всей области  $\tilde{Q}$ .

Возвращаемся опять к (4.39). Отсюда теперь имеем соотношение

$$(l_0 u, v_0)_{H^1(S_4)} + (l_1 u, v)_{L_2(S_4)} = 0 \quad (4.65)$$

для любого  $u \in D(L)$ . Так как  $l_0$  и  $l_1$  линейно независимы и множества  $\{l_0 u\}$  и  $\{l_1 u\}$  плотны в  $H_{\text{гр}}^1(S_4)$  и  $L_2(S_4)$  соответственно, если  $u$  пробегает все множество  $D(L)$ , то равенство (4.65) порождает  $v_0=0$  в  $H_{\text{гр}}^1(S_4)$  и  $v_1=0$  в  $L_2(S_4)$ . Таким образом, доказана плотность  $R(L_0)$  в  $H$ .

В общем случае доказать плотность  $R(L)$  в  $H$  можно с помощью продолжения по параметру (см. доказательство теоремы в [42]).

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
2. Агранович М. С. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / ВИНТИ. 1990. Т.63. С.5.
3. Агранович М. С., Вишик М. И. // Успехи мат. наук. 1964. Т.19. №3 (117). С.53.
4. Ахиев С. С., Саниева С. Н. // Докл. АН СССР. 1991. Т.316. №3. С.524.
5. Бадерко Е. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №1. С.17.
6. Он же // Там же. 1992. Т.28. №1. С.17.
7. Гасанова И. А. // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1988. Т.9. №1. С.34.
8. Бриш Н. И. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №4. С.523.
9. Он же // Там же. 1969. Т.5. №12. С.2200.
10. Бриш Н. И., Валешкевич И. Н. // ДАН СССР. 1962. Т.146. №6. С.1247.
11. Он же // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №3. С.393.
12. Буренков В. И. // Труды МИАН СССР. 1974. Т.131. С.39.
13. Он же // Там же. 1979. Т.150. С.24.
14. Он же // Там же. 1987. Т.180. С.68.
15. Он же // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ / УДН М., 1987.
16. Валешкевич И. Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1963. №3. С.14.
17. Брагов В. Н. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С.5.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
19. Гасымов Э. А. // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28. №3. С.521.
20. Гординг Л. // Математика. Сб. переводов иностр. ст. 1958. Т.2.1. С.81.
21. Он же. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961.
22. Гринберг Г. А. // Прикл. математика и механика 1967. Т.31. Вып. 2. С.193.
23. Дайняк В. В., Корзюк В. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. №5. С.867.
24. Дезин А. А. // Успехи мат. наук. 1959. Т.14. Вып. 3(87). С.21.
25. Он же // Мат. сборник. 1976. Т.100. №2. С.117.
26. Он же // Мат. заметки. 1978. Т.24. №5. С.687.
27. Он же. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
28. Он же // Мат. сб. 1986. Т.129. В.3. С.397.
29. Драгиева Н. А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т.15. №4. С.946.
30. Житарашу Н. В. // Мат. исслед. Дифференц. уравнения и динам. системы. 1985. №80. С.74.
31. Он же // Мат. сб. 1985. Т.128(170). №4(12). С.451.
32. Он же // Мат. исслед. (Кишинев). 1990. №112. С.104.
33. Жумабеков Л. // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №8. С.1454.
34. Он же // Известия АН Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат. наук. 1992. №3. С.32.
35. Камышников А. И. // Применение методов функционального анализа к неклассич. уравнениям мат. физ. Новосибирск, 1989. С.116.
36. Кастильо Ф. А., Корзюк В. И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. №5. С.11.
37. Он же // Там же. 1986. №1. С.47.
38. Кожанов А. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. №12. С.2143.
39. Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н. // Сиб. мат. журн. 1981. Т.22. №6. С.81.
40. Койлышев У. К. // Теорет. и прикл. вопр. мат. моделирования. Алма-Ата, 1990. С.35.
41. Корзюк В. И. // Дифференц. уравнения. 1968. Т.4. №10. С.1854.
42. Он же // Там же. 1970. Т.6. №2. С.343.
43. Он же // Там же. 1971. Т.7. №4. С.750.
44. Он же // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. №3. С.39.
45. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1971. №2. С.25.
46. Он же // Там же. 1972. №2. С.10.
47. Он же // Успехи мат. наук. 1985. Т.40. Вып.5(245). С.208.
48. Он же // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №6. С.1014.
49. Он же // Там же. 1992. Т.28. №5. С.847.
50. Корзюк В. И., Дайняк В. В. // Там же. 1992. Т.28. №6. С.1056.
51. Корзюк В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1992. №2. С.49.
52. Он же // Там же. №3. С.63.
53. Он же // Там же. 1996. №2. С.32.
54. Корзюк В. И., Чеб Е. С. // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1396.
55. Курта В. В., Шишков А. Е. // Докл. АН УССР. А. 1990. №1. С.28.
56. Он же // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. №7. С.924.
57. Ладыженская О. А. // Докл. АН СССР. 1954. Т.97. №3. С.395.
58. Она же // Мат. сб. 1956. Т.39(81):4. С.491.
59. Она же // Там же. 1958. Т.45. №2. С.123.
60. Она же. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
61. Ладыженская О. А., Ступялис Л. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т.116. С.101.
62. Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е. Фильтрация шумов. Киев, 1979.

63. Мазья В. Г., Пламенский Б. А. // *Mathematische Nachrichten*. 1978. Bd.81. P.25.
64. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
65. Нагумо М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. М., 1967.
66. Назаров С. А., Пламенский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М., 1991.
67. Намазов Г. К. // Докл. АН СССР. 1962. Т.145. №6. С.1228.
68. Остапенко В. А. // Дифференц. уравнения и их прил. в физ. Днепропетровск, 1989. С.4.
69. Петровский И. Г. // Мат. сб. 1937. Т.2(44). С.815.
70. Он же // Там же. 1939. Т.5(47). С.3.
71. Радыно Я. В., Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. №2. С.331.
72. Ройтберг Я. А. // Докл. АН СССР. 1991. Т.316. №2. С.300.
73. Он же // Там же. Т.318. №4. С.820.
74. Ройтберг Я. А., Шефтель Э. Г. // Мат. сб. 1969. Т.78. №3. С.446.
75. Рустамов А. С. // Тр. Ин-та математики и механики. АН АзССР. 1988. №3. С.82.
76. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
77. Солонников В. А. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. Краевые задачи математической физики. 3. 1965. Т.83. С.3.
78. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.
79. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М., 1959.
80. Чан Дык Ван, Корзюк В. И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. №3. С.39.
81. Он же // Там же. 1976. №4. С.53.
82. Он же // Там же. 1978. №6. С.30.
83. Чан Дык Ван, Корзюк В. И., Мозолевский И. Е. // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения И.Г.Петровского. (27–31 января 1976 г.) М., 1978. С.477.
84. Шефтель Э. Г. // Успехи мат. наук. 1964. Т.19. №4. С.230.
85. Он же // Сиб. мат. журн. 1965. Т.6. №3. С.639.
86. Эйдельман С. Д. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНТИ. 1990. Т.63. С.201.
87. Эскин Г. И. // Мат. сб. 1962. Т.59(101). С.67.
88. Он же // Там же. С.105.
89. Он же // Сиб. мат. журн. 1962. Т.3. №6. С.882.
90. Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 1977. Т.8. №4. С.626.
91. Он же // Там же. 1978. Т.14. №12. С.2196.
92. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1959. V.12. P.623; *Comm. Pure. Appl. Math.* 1964. V.17. P.35 (перевод: Армон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы для решений эллиптических уравнений в частных производных, удовлетворяющих общим граничным условиям. М., 1965).
93. Bennis J. // *J. Math. Anal. and Appl.* 1990. V.153. №2. P.506.
94. Burenkov V. I. // *Nonlinear analysis, Function Spaces and Applications*. Leipzig, 1982. Bd. 49. V.2. P.5.
95. Eskin G. // *J. d'Analyse Math.* 1981. V.40. P.43.
96. Eskin G. // *Comm. in PDE*. 1985. V.10(10). P.1117.
97. Eskin G. // *Comm. Part. Differ. Equat.* 1987. V.12. №5. P.503.
98. Eskin G. // *Ibid.* 1992. V.17. №1–2. P.99.
99. Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, 1964 (перевод: Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968).
100. Friedrichs K. // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1954. V.7. №2. P.345.
101. Hadamard J. // *Tohoku Math. J.* 1933. V.37. P.133.
102. Hadamard J. // *L'enseignement mathématique*. 1936. V.35. P.5.
103. Jannelli E. // *Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.* 1985(1986). V.79. №5. P.113.
104. Kreiss H. O. // *Comm. Pure. Appl. Math.* V.23. P.277 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1970. Т.14. №4. С.98).
105. Leray J. *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients*. Princeton, 1952.
106. Leray J. *Hyperbolic differential equations*. New York, 1955 (перевод: Лерэ Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М., 1984).
107. Lions J.-L., Magenes E. *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Paris, 1968. V.1 (перевод: Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971).
108. Messano B. // *Rend. mat. e appl.* 1992. V.12. №2. P.521.
109. Papi G. // *Boll. Unione mat. ital.* 1986. V.5. №1. P.139.
110. Peetre J. // *Comm. pure appl. Math.* 1961. V.14. №4. P.711 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1963. 7:1. С.43).
111. Sakamoto R. // *Math Kyoto Univ.* 1970. V.10. P.349 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1972. V.16. №1. С.62).
112. Schechter M. // *Comm. pure appl. Math.* 1959. V.12. P.457 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1960. 4:5. С.93).
113. Schechter M. // *Comm. pure appl. Math.* 1959. V.12. №4. P.561 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1960. 4:6. С.3).
114. Sikorav J. // *C.r. Acad. sci. Ser. 1.* 1989. V.308. №12. P.345.
115. Sikorav J. // *J. Math. Anal. and Appl.* 1990. V.153. №2. P.533.
116. Suzuki Fukuzo // *Tokyo J. Math.* 1991. V.14. №1. P.17.
117. Thomee V. // *Math. Scand.* 1955. V.3. P.115.
118. Thomee V. // *Math. Scand.* 1957. V.5. P.93.
119. Thomee V. // *Math. Scand.* 1958. V.6. P.5.

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ КАУЗАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The necessary and sufficient conditions for  $R_0$  – controllability,  $r_1$  – controllability of linear causal discrete descriptor systems with delay are investigated.

Рассмотрим линейную дескрипторную систему управления вида

$$A_0 x(t+1) = A x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = q_\tau, \tau = -h, -h+1, \dots, 0\}, \quad (2)$$

где  $x, q_\tau \in R^n$ ;  $u \in R^m$ ;  $A_0, A, A_1, B$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей,  $h \in \mathbb{N}$  ( $h \geq 1$ ) – запаздывание.

В случае, когда  $\det A_0 \neq 0$ , система (1), (2) рассматривалась в работе [1]. Поэтому считаем, что  $\det A_0 = 0$ . Проблема исследования управляемости такой системы с использованием обратной матрицы Дразина и при условии, что  $A=0$  и пучок  $\lambda A_0 - A_1$  является регулярным, посвящены работы [2, 3]. В данной статье также исследуются вопросы управляемости системы (1), (2), но при более общих предположениях на параметры системы, чем в [2, 3].

Пусть  $\text{rank } A_0 = r < n$ . Без ограничения общности (это можно сделать посредством перестановки соответствующих строк и столбцов) считаем, что матрица  $A_0$  имеет вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{bmatrix},$$

где квадратная  $r \times r$ -матрица  $A_{11}^{(0)}$  имеет полный ранг, т.е.  $\text{rank } A_{11}^{(0)} = r$ , а  $A_{12}^{(0)}, A_{21}^{(0)}, A_{22}^{(0)}$  – матрицы размерностей  $r \times (n-r), (n-r) \times r, (n-r) \times (n-r)$  соответственно. Так как  $\text{rank } A_{11}^{(0)} = r$ , то, согласно [4], это влечет условие

$$A_{22}^{(0)} - A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{12}^{(0)} = 0.$$

В соответствии с блочным разбиением матрицы  $A_0$  представим матрицы  $A, A_1, B$  в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

и введем матрицы  $F_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ :

$$F_{11} = A_{11}, \quad F_{12} = -A_{11} A_{11}^{(0)-1} A_{12}^{(0)} + A_{12}, \quad F_{21} = -A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{11} + A_{21}, \\ F_{22} = A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{11} A_{11}^{(0)-1} A_{12}^{(0)} - \left( A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{12}^{(0)} + A_{21}^{(0)} A_{11}^{(0)-1} A_{12} \right) + A_{22}.$$

По аналогии с системами без запаздывания будем говорить, что система (1) является каузальной (causal descriptor system [5]), если матрица  $F_{22}$  является невырожденной. Можно показать, что это условие каузальности системы (1) обеспечивает регулярность тройки матриц  $(A_0, A, A_1)$ , которая, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием совместности [7] системы (1).

Итак, пусть система (1) является каузальной.

Вектор  $x \in R^n$  является допустимым в момент времени  $t$  ( $t = 0, 1, \dots$ ) для системы (1), если существуют векторы  $\bar{x} \in R^n$  и  $u \in R^m$  такие, что

$$A_0 \bar{x}(t+1) = A x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t).$$

Ясно, что вектор  $x(t)$  является допустимым в момент  $t$  тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } \{A_0, B\} = \text{rank } \{A_0, B, A x(t) + A_1 x(t-h)\}.$$

Отсюда следует, что условие, определяющее является ли  $x(t)$  допустимым или нет, зависит не только от момента времени  $t$ , но и от момента  $t-h$ .

Пусть  $R_0(t)$  – множество всех допустимых векторов системы (1) в момент  $t$ . В каждый момент  $t$  множество  $R_0(t)$  вместе с нулевым вектором является подпространством пространства  $R^n$ . Однако если  $\text{rank} \{A_0, B\} = n$  (в частности, если матрица  $A_0$  – невырождена), то  $R_0(t)$  совпадает с  $R^n$  и, следовательно, любой вектор  $x(t)$  является допустимым.

Построим первоначально решение каузальной системы (1). Для этого, умножив систему (1) слева на невырожденную матрицу  $D_1$  и применив невырожденное преобразование

$x(t) = D_2 \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ , где  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид:

$$D_1 = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)-1} & 0 \\ \hline 0 & F_{22}^{-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)-1} & I_{n-r} \end{array} \right],$$

$$D_2 = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & -A_{11}^{(0)-1}A_{12}^0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -F_{22}^{-1}F_{21} & I_{n-r} \end{array} \right],$$

а  $y \in R^r$ ,  $z \in R^{n-r}$ , от системы (1), (2) перейдем к эквивалентной системе вида

$$\begin{cases} y(t+1) = \Omega_1 y(t) + \Omega_{11} y(t-h) + \Omega_{12} z(t-h) + \bar{B}_1 u(t), \\ 0 = z(t) + \Omega_{21} y(t-h) + \Omega_{22} z(t-h) + \bar{B}_2 u(t), \quad t = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = D_2^{-1} q_\tau, \quad \tau = -h, -h+1, \dots, 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \hline \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array} \right] = D_1 \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{array} \right] D_2, \quad \left[ \begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{array} \right] = D_1 \left[ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right],$$

$$\Omega = A_{11}^{(0)-1} (F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}).$$

Найдем решение системы (3), (4). Для удобства записи этого решения введем в рассмотрение так называемые определяющие уравнения [1]:

$$Y_{t+1}^i = \Omega Y_t^i + \Omega_{11} Y_{t-h}^i + \Omega_{12} Z_{t-h}^i, \quad (5)$$

$$Z_t^i = -\Omega_{21} Y_{t-h}^i - \Omega_{22} Z_{t-h}^i, \quad i = \overline{0, 3}, \quad t = \overline{1, 2, \dots}; \quad (6)$$

$$Z_t^i = Y_t^i = 0, \quad \text{при } t < 0.$$

Тогда решение системы (3) может быть записано в виде

$$y(t) = Y_t^0 y(0) + \sum_{k=-h}^{-1} (Y_{t-(h+k)}^1 y(k) + Y_{t-(h+k)}^2 z(k)) + \sum_{j=0}^{t-1} Y_{t-j}^3 u(j), \quad t = \overline{1, 2, \dots} \quad (7)$$

$$z(t) = Z_t^0 y(0) + \sum_{k=-h}^{-1} (Z_{t-(h+k)}^1 y(k) + Z_{t-(h+k)}^2 z(k)) + \sum_{j=0}^t Z_{t-j}^3 u(j), \quad t = \overline{0, 1, \dots}, \quad (8)$$

где  $Y_j^i, Z_j^i$  – решение определяющих уравнений (5), (6) соответственно при начальных условиях:

$$Y_0^0 = E_{r,r}, \quad Y_1^0 = \Omega, \quad Z_0^0 = 0; \quad Y_0^1 = 0, \quad Y_1^1 = \Omega_{11}, \quad Z_0^1 = -\Omega_{21};$$

$$Y_0^2 = 0, \quad Y_1^2 = \Omega_{12}, \quad Z_0^2 = -\Omega_{22}; \quad Y_0^3 = 0, \quad Y_1^3 = \bar{B}_1, \quad Z_0^3 = -\bar{B}_2.$$

Исходя теперь из вида системы (3) и ее решения (7), (8) мы можем точно описать множество  $R_0(t)$  допустимых векторов  $x(t)$  для систем (1) в любой момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ . Так, например, множество  $R_0(0)$  допустимых начальных векторов из (2) в момент  $t = 0$  описывается формулой

$$q_0 = D_2 \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $y(0)$  – произвольный  $r$ -вектор, а  $(n-r)$ -вектор  $z(0)$  принадлежит множеству

$$\{z(0) | z(0) = -[\Omega_{21}, \Omega_{22}]D_2^{-1}q_{-h} - \bar{B}_2 u(0), \quad u \in R^m\}.$$

Дадим несколько определений.

Система (1) называется  $R_0$ -управляемой в момент времени  $t_1$  ( $t_1$  – заданное время,  $t_1 \in N$ ), если для любого начального состояния (2), (9) и любого вектора  $x_1 \in R_0(t_1)$  существует последовательность управлений  $\{u(0), u(1), \dots, u(t_1-1)\}$  такая, что решение системы (1), (2), (9) удовлетворяет условию  $x(t_1) = x_1$ .

Система (1) называется  $t_1$ -управляемой, если она  $R_0$ -управляема в момент  $t_1$  и  $R_0(t_1)$  совпадает со всем пространством  $R^n$ .

Верны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Каузальная система (1)  $R_0$ -управляема в момент времени  $t_1$  тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \{Y_1^3, Y_2^3, \dots, Y_{t_1}^3\} = \text{rank } A_{t_1}.$$

**Теорема 2.** Каузальная система (1)  $t_1$ -управляема тогда и только тогда, когда она  $R_0$ -управляема в момент  $t_1$  и

$$\text{rank} \{Z_0^3, Z_1^3, \dots, Z_{t_1}^3\} = n - \text{rank } A_0.$$

Доказательство теорем 1, 2 следует непосредственным образом из представлений (7), (8) решения системы (3) и приведенных выше определений.

*Замечание.* Аналогичным образом могут быть исследованы другие виды управляемости [2] каузальной системы (1), (2).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Крахотко В.В. // Дифференц. уравн. 1972. Т.8. №5,6,7. С.767.

2. Игнатенко В.В., Крахотко В.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №3. С.70.

3. Игнатенко В.В. // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Межгосудар. конф. Мн., 1993. С.47.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.

5. Luenberger D.G. // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. AC-22. P.312.

6. Размыслович Г.П. // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Межгосудар. конф. Мн., 1993. С.72.

7. Размыслович Г.П. // VI конф. математиков Беларуси, 29.09 – 02.10.92. Гродно, 1992.

8. Игнатенко В.В., Крахотко В.В. // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Мн., 1989, С.134.

УДК 621.506.2

I.V. SOVPEL

## DEVELOPMENT AND APPLICATION OF A CORPUS OF VIRTUAL TEXTS IN MM-SYSTEM\*

### (РАЗРАБОТКА И ПРИЛОЖЕНИЯ КОРПУСА ВИРТУАЛЬНЫХ ТЕКСТОВ В ММ-СИСТЕМЕ)

#### 1. Introduction

We consider a Corpus of Virtual Texts (CVT), i.e. a set of definitively chosen texts of the Natural Language (NL) that are tagged in accordance with its structural units and depth, as a Knowledge Base (KB) about the NL. The main purpose of the KB is its use as the information basis for solving various problems concerning studies on the NL and automation of its processing. Ideally, our aim comprises:

(a) development of a universal (for a great majority of languages) linguistic knowledge base of this type;

(b) investigation and implementation of its most promising applications.

MM-system is a constantly developing package of information and program means that are solving problems (a) and (b) in their defined statement and in accordance with the developed approaches, methods and algorithms.

As for the first problem, MM-system to date provides the user with software tools to automate development of CVT at lexico-grammatical level for a number of European languages. As main applications of CVT, MM-system solves problems concerning computer support of

\* Статья публикуется без редакционной обработки.

language learning, automatic text analysis (at the level mentioned above), automatic text correction at stages of its manual and automatic input.

## 2. CVT as a Knowledge Base about the NL

### 2.1 Knowledge about the NL. The Notion of CVT

By knowledge about the NL we understand dictionaries, classifiers of its features, grammars, qualitative estimates of the use of separate lexical units, grammar forms, etc. All this information, denoted by  $I$ , can be specified either in an explicit form (declarative form of knowledge representation) or as a certain minimum body  $I_0$  and a set of procedures  $P$  allowing eventually to obtain complete body of the necessary knowledge about the NL,  $I = P(I_0)$  (procedural or declarative-procedural form of knowledge representation). In doing so, of course, we should take into account main peculiarities of the NL as an object of modeling, namely: nonuniformity and nonabsolute nature of its rules, limitations of its formalization.

The second form of knowledge representation mentioned above is used in MM-system. And CVT of about  $10^6$  word usages is considered as  $I_0$ .

The information basis of CVT is first of all a Corpus of Initial Texts (CIT), i.e. a finite set of texts of the NL that are chosen in accordance with particular criteria.

One of the most important questions when forming CIT is its composition and body. Since the case in point is adequate formation of **representative** body of texts the following main criteria, as research has shown, may be singled out:

- sources of texts;
- chronological limits of text appearance;
- text genre or document type;
- functional role of the text;
- theme (category) of the text;
- nature of information expressed in the text;
- text body;
- outer text structure or composition.

A particular set of the criteria (one, two or more) specifies composition of CIT. Since the basis of our research is engineering and linguistic approach, i.e. analytical methods that most of all depend on statistical features of a language structure [2], naturally, we are interested in collections of texts characterized not by their peculiarities but **typicalness** of a certain type or themes of speech activity. Thus the main criteria that we use when selecting lexical units for CIT are close to the ones used in LOB corpus.

By a corpus of virtual texts of level  $r$ , denoted by  $T^{(r)}$ , we understand CIT with structural units of the given NL of level  $r$  specified for each text. Semantic and grammatical features are indicated for these units in accordance with predetermined classifier of such features  $K^{(r)}$ . A structural level of the language may be a level of a word, phrase, sentence, discourse, text. Each classifier  $K^{(r)}$  has information representing ideally the whole system of grammatical, semantic, stylistic, phonetic, contextual and other parameters of the NL at level  $r$ . Of course, the development of such classifiers and corresponding corpora of virtual texts for the mentioned levels of the language calls for very serious research the majority of which, at best, is carried out now only for highly limited NL. At present we deal with the so-called basic CVT, i.e.

CVT at the level of a word (level  $r_0$ ). In so doing the classifier  $K^{(r_0)}$  is a lexico-grammatical one with features of the simplest semantics.

### 2.2 Automation of Developing $T_0^{(r_0)}$

Following the accepted strategy we use declarative-procedural form of representing  $T_0^{(r_0)}$ . Essentially, it is as follows. Preliminary, in accordance with certain criteria, namely, from the standpoint of cost, speed and accuracy of problem solution, we select a **minimum** CIT as regards its body (about  $10^6$  word usages). Let us designate it as  $T_0$ . Then we build a corpus of virtual texts  $T_0^{(r_0)} \subseteq T^{(r_0)}$  with the declarative form of its representation. We next construct a procedure  $A(T_0^{(r_0)})$  that makes it possible, if necessary, to rather quickly and adequately

enlarge the body of  $T_0^{(r_0)}$  by adding any new text  $T \notin T_0$ . Thus,  $A(T_0^{(r_0)})$  is a procedural component of CVT that provides an effective mechanism for regulating the body of the natural language material under study, i.e. the body of CVT that is particularly important when shifting to higher structural levels of the NL.

In MM-system  $T_0^{(r_0)}$  is built in accordance with the following generalized scheme.

Stage 1. To develop a minimum CIT  $T_0$ .

Stage 2. To develop a classifier of the NL features  $K^{(r_0)}$ .

Stage 3. Using sorting procedure  $T_0$ , automatically form the source dictionary of word usages of the given NL; let us denote it as  $D_0$ .

**Stage 4.** In the interactive mode assign a set of corresponding out of context features (tags) from  $K^{(r_0)}$  to each word from  $D_0$ ; let us denote the obtained dictionary as  $D_0^{(r_0)}$ .

**Stage 5.** Using dictionary  $D_0^{(r_0)}$  carry out automatic identification of  $T_0$ ; assign a set of tags to each word from  $T_0$  in accordance with dictionary  $D_0^{(r_0)}$ .

**Stage 6.** Using context, in the interactive mode eliminate polysemy, if necessary, in  $T_0$  enriched by tags at stage 5.

In the end  $T_0^{(r_0)}$  is formed. Regarding procedure  $A(T_0^{(r_0)})$  it is actually the one used for analyzing text at level  $r_0$  in accordance with the specified depth of the NL preset by classifier  $K^{(r_0)}$  (see item 3).

Problem solution in MM-system in accordance with the scheme described above is carried out by the functional block SCVT that is a package of program tools to automate development of a corpus of virtual texts  $T_0^{(r_0)}$  as an information basis of a developed linguistic knowledge base.

### 2.3 Main Applications of $T_0^{(r_0)}$

A corpus of virtual texts  $T_0^{(r_0)}$  together with program tools of access, extraction, analysis, etc. of NL information is a complex computer-assisted system providing solution to a wide range of information problems dealing with the study and use of the natural language. We consider the following problems as main ones the solution of which is based on processing a request to  $T_0^{(r_0)}$  represented as a formal record.

**Problem 1.** Formation with a possibility of further output of a portion of the text(s) in accordance with the preset conditions.

In Backus notation a request for solving this problem is described as:

<REQUEST-TEXT> ::= <SUBJECT AREA> <TEXT FORMAT>  
[<RETRIEVAL CRITERION>][<TEXT BODY>] (1)

Requirements for processing the whole CVT or separate subject areas may serve as values of the metalinguistic variable <SUBJECT AREA>. In doing so the retrieval being formed may include only those sentences that satisfy the preset criterion while saving or not saving tags for each word usage, etc. The value of <RETRIEVAL CRITERION> is a Boolean expression from the terms being searched (words and/or tags that are not obligatory placed side by side in the required retrieval, in this case the so-called **distance** between them is indicated) with the use of logical operations AND (\*), OR (+) and NOT (-).

**Problem 2.** Automatic building of dictionaries of the natural language in accordance with the preset conditions.

<REQUEST-DICTIONARY> ::= <SUBJECT AREA> <DICTIONARY FORMAT>  
<SORTING KEY> [<FREQUENCY>] [<TEXT BODY>] (2)

For the problem in question CVT  $T_0^{(r_0)}$  is an ideal information base as a constantly enriched source, in addition operating a word usage as its main structural unit.

**Problem 3.** Obtaining quantitative measures (estimates) of the NL.

Partially such estimates are obtained when processing the request (2). In addition the case in point is the formation of separate arrays of frequencies for a set of tags from  $K_0^{(r_0)}$ , frequencies of their occurrence in a definite combination, frequencies for certain syntactic constructions, etc., i.e. processing a request of the following type:

<REQUEST-ESTIMATION> ::= <SUBJECT AREA> <RETRIEVAL CRITERION> <TEXT BODY> (3)

**Problem 4.** Testing linguistic hypotheses.

A request for this problem solution, denoted by <REQUEST-TEXT>, looks like (3), i.e.:

<REQUEST-TEXT> ::= <SUBJECT AREA> <RETRIEVAL CRITERION> <TEXT BODY> (4)

Here, we are dealing with hypotheses that can be formulated as samples, specified by values of variable <RETRIEVAL CRITERION>. When processing a request those parts of the specified text body of the subject area are included in the output array that are characterized by the length determined by the left and right boundaries satisfying the corresponding Boolean expression.

**Problem 5.** Automation of language learning.

In this case we proceed from the fact that use of computers in the process of language learning above all significantly enlarges possibilities to prepare teaching material (lexico-grammatical exercises), makes it possible to strengthen motivation for language learning, to qualitatively change control over activities of those being taught.

Along this line the following three subproblems have been formulated and realized:

1) forming of a set of sentences from a particular subject area that satisfy the preset conditions, i.e. sentences containing specified words, grammar constructions, etc.;

2) forming of a list of words from a particular subject area that satisfy the preset conditions;

3) development of substitution exercises.

In the last case as in subproblem 1) a set of sentences is formed, but only with the use for premarked search terms of the request of (1) type of deletion operation thus leading to omis-

sion of the corresponding words in sentences of the set being formed and their record in a separate array that is later used by the relevant control and teaching program. Thus standards of correct answers are not preset but are generated automatically.

Solution to all above-mentioned problems in MM-system is provided by the functional block KB/NL. Its use allowed us to find an effective solution to such important practical problems of automatic text processing as its analysis and correction.

### 3. Automatic Analysis of Text

#### 3.1 General Problem Statement and Method of Its Solution

Automatic analysis of text in MM-system is carried out at lexico-grammatical level in accordance with the specified classifier of NL features  $K_0^{(r_0)}$ .

So, assume that we have a dictionary

$$D_0^{(r_0)} = \{x_i^{(r_0)}, K_i^{(r_0)}\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_i^{(r_0)} \in D_0, \quad K_i^{(r_0)} \subset K^{(r_0)},$$

$$K_j^{(r_0)} = \{k_{ij}^{(r_0)}\}, \quad j = \overline{1, m_i}, \quad m_i = |K_i^{(r_0)}|.$$

Let  $T$  be a chain of words of the text under analysis:

$$T = t_1 t_2 \dots t_{n-1} t_n$$

Using dictionary  $D_0^{(r_0)}$  each  $t_i, i = \overline{1, n}$ , is associated with a set of tags  $K_i^{(r_0)}$ . In doing so we assume that the chosen chain of words  $T$  satisfy the following condition:

$$|K_1^{(r_0)}| = |K_n^{(r_0)}| = 1, \quad |K_i^{(r_0)}| > 1 \quad \text{for} \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Let  $|K_i^{(r_0)}| = d_i$ . It is evident that the total number  $s$  of pairwise different chains containing

one element from each set  $K_i^{(r_0)}$  equals  $s = \prod_{i=1}^n d_i$ . Each such chain, denoted by  $K_l, l = \overline{1, s}$ , we will call a tag chain.

Then the problem of analyzing the chosen chain of words  $T$  reduces to resolution of ambiguity of the sequence  $K_1^{(r_0)}, K_2^{(r_0)}, \dots, K_{n-1}^{(r_0)}, K_n^{(r_0)}$ , in other words, to selection, in accordance with a certain criterion, of a unique tag chain from a set of all possible ones. Let us denote the chain by  $K^*$ .

To solve the problem in question we use, by analogy with [1], Constituent-Likelihood grammar (CL grammar) of the NL that is defined as:

$$G = (D_0, K^{(r_0)}, A, F) \quad \text{where:}$$

$A$  is an algorithm of assigning to each element from  $D_0$  to  $T$  a set of associated out of context elements from  $K^{(r_0)}$ ;

$F$  is an evaluation function used to evaluate probability of each tag from a set of tags from  $K^{(r_0)}$  assigned by algorithm  $A$  to each element from  $D_0$  to  $T$ .

As for methods of constructing an evaluation function, depending on application, one must seek to a reasonable balance between simple probability model, i.e. its computing effectiveness, and the number of permissible errors that eventually is determined by the used probability estimates as purely theoretical characteristics. Each such estimate is a certain function  $F$  (evaluation function) of elements of experimental material. The function is characterized by particular properties. Ideally, it should take into consideration all relevant information, but it is quite obvious that under conditions of an arbitrary NL this will lead to a very complex probability model, but even simple models may sometimes work rather effectively. From this standpoint we have developed the following two models.

#### 3.2 "Fast" Algorithm of Text Analysis

Let  $T$  be a chain of words of the text under study:

$$T = t_1 t_2 \dots t_{n-1} t_n$$

and let us assume that  $K_j$  is a tag chain from a set of all corresponding  $T$  pairwise different tag chains:

$$K_j = k_1^{(j)} k_2^{(j)} \dots k_{n-1}^{(j)} k_n^{(j)}$$

Relationship between the state  $(t_\eta, k_\eta^j)$  and preceding  $q$  state let us express as:

$$m_\eta = \sum_{i=1}^q a_i m_{\eta-i} + \xi_\eta \quad (5)$$

where:

$\{a_i\}$ ,  $i = \overline{1, q}$ , is a sequence of  $q$  real numbers called coefficients;

$\xi_\eta$  is a random number distributed by a probability law; the role played by this number resides in the fact that the right part of the recurrent relation between  $m_\eta$  and

$m_{\eta-1}, m_{\eta-2}, \dots, m_{\eta-q}$  of the type  $m_\eta = \sum_{i=1}^q a_i m_{\eta-i}$  should be rounded off to integer (natural

number); by convention each pair of the type  $(t_\eta, k_\eta^{(j)})$  is preliminary associated by a certain

rule with a numerical value, i.e. a certain natural number  $m_\eta^{(j)}$ .

Relations of (5) type in statistical analysis of time series, and a sequence of words with tags we consider as realization of a time series, are called equations of autoregression. Respectively  $q$  is the order of autoregression and numbers  $a_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , are called coefficients of autoregression.

For the problem in question autoregression provides the following method of its solution. First of all, it is assumed that CVT  $T_\theta^{(0)}$  of  $M$  size is specified. The CVT provides the sequence of states:

$$\{(t_1^{(0)}, k_1^{(0)}), (t_2^{(0)}, k_2^{(0)}), \dots, (t_{M-1}^{(0)}, k_{M-1}^{(0)}), (t_M^{(0)}, k_M^{(0)})\}$$

To obtain coefficients of autoregression  $a_1, a_2, \dots, a_q$  it is necessary, in accordance with the least-squares method, to solve the following problem:

$$\sum_{\eta=q+1}^M \left( \sum_{i=1}^q a_i m_{\eta-i}^{(0)} - m_\eta^{(0)} \right)^2 \rightarrow \min_{\{a_1, a_2, \dots, a_q\}} \quad (6)$$

that eventually equals to the solution of a system of  $q$  linear equations with  $q$  unknowns (a system has always a solution).

Knowing coefficients of autoregression  $a_1, a_2, \dots, a_q$  each value  $l \geq q+1$  of the desired tag chain is determined through  $(l-1), (l-2), \dots, (l-q)$  values according to the following algorithm: we form the sum  $a_1 m_{l-q}^* + a_2 m_{l-q+1}^* + \dots + a_{q-1} m_{l-2}^* + a_q m_{l-1}^*$  and the value  $m_l^*$  we choose as the solution to the problem:

$$m_l^* = \arg \min |m_l - a_1 m_{l-q}^* - a_2 m_{l-q+1}^* - \dots - a_{q-1} m_{l-2}^* - a_q m_{l-1}^*|$$

$$m_l \in \{m_l^{(1)}, m_l^{(2)}, \dots, m_l^{(d_l)}\} \quad (7)$$

where:  $m_l^{(1)}, m_l^{(2)}, \dots, m_l^{(d_l)}$  are numerical values of all possible states of  $(t_l, k_l^{(j)})$  type at  $l$  place in a chain of words of the analyzed text.

As far as computation is concerned, this algorithm is really a "fast" one because coefficients of autoregression  $a_1, a_2, \dots, a_q$  may be calculated beforehand and the order of autoregression comprises (depending on properties of the NL and the application itself) only several numbers.

### 3.3 "Precise" Algorithm of Text Analysis

In this case a sequence of states  $\{(t_1, k_1^{(j)}), (t_2, k_2^{(j)}), \dots, (t_{n-1}, k_{n-1}^{(j)}), (t_n, k_n^{(j)})\}$  we consider as a uniform Markov chain of  $m$  order. Then, the probability of obtaining a chain of words  $t_1 t_2 \dots t_{n-1} t_n$  with the associated tags  $k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots, k_{n-1}^{(j)}, k_n^{(j)}$  is determined in the following manner:

$$P(t_1, k_1^{(j)}; t_2, k_2^{(j)}; \dots; t_{n-1}, k_{n-1}^{(j)}; t_n, k_n^{(j)}) = P(t_1, k_1^{(j)}) \cdot P(t_2, k_2^{(j)} / t_1, k_1^{(j)}) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot P(t_m, k_m^{(j)} / t_1, k_1^{(j)}; t_2, k_2^{(j)}; \dots; t_{m-1}, k_{m-1}^{(j)}) \times$$

$$\times \prod_{i=m+1}^n P(t_i, k_i^{(j)} / t_{i-m}, k_{i-m}^{(j)}; t_{i-m+1}, k_{i-m+1}^{(j)}; \dots; t_{i-1}, k_{i-1}^{(j)}).$$

\*\*\*

Using a formula of conditional probability with due regard that unconditional probabilities of words  $P(t_i)$  does not depend on values  $k_i^{(j)}$  and taking, as a choice criterion of the unique

tag chain from a set of all possible ones, the most-used criterion determined by a method of maximum likelihood, we get as a result the following problem:

$$P(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots, k_{m-1}^{(j)}, k_m^{(j)}) \times \prod_{i=1}^n \frac{P(t_i, k_i^{(j)})}{P(k_i^{(j)})} \times \prod_{i=m+1}^n \frac{P(k_{i-m}^{(j)}, k_{i-m+1}^{(j)}, \dots, k_{i-1}^{(j)})}{P(k_{i-m}^{(j)}, k_{i-m+1}^{(j)}, \dots, k_{i-2}^{(j)})} \rightarrow \max_{\{k_i^{(j)}\}_{i=1, n}}$$

If we use as probabilities estimates the corresponding frequencies (they can be easily obtained from  $T_0^{(n)}$ ), we have the following problem (in logarithmic statement):

$$\ln \lambda(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots, k_{m-1}^{(j)}, k_m^{(j)}) + \sum_{i=1}^n (\ln \lambda(t_i, k_i^{(j)}) - \ln \lambda(k_i^{(j)})) + \\ + \sum_{i=m+1}^n (\ln \lambda(k_{i-m}^{(j)}, k_{i-m+1}^{(j)}, \dots, k_{i-1}^{(j)}) - \ln \lambda(k_{i-m}^{(j)}, k_{i-m+1}^{(j)}, \dots, k_{i-2}^{(j)})) \rightarrow \max_{\{k_i^{(j)}\}_{i=1, n}}$$

It should be stressed that similar to the previous method Markov chain order  $m$  depends on properties of the NL and the application itself. It is evident that the algorithm from the computational standpoint is considerably more cumbersome but using ideas of dynamic programming at the stage of its realization we succeeded in obtaining algorithm operation in time and space proportional to  $d_i$ . In so doing the accuracy of problem solution is 10% -15% higher than when using the "fast" algorithm.

Solution to the problem of automatic analysis of text in MM-system is provided by the functional block TAN.

## 4. Automatic Correction of Text

### 4.1 General Problem Statement

Here, we are dealing with correction of text at the level of its separate words. In so doing the nature of errors may vary from the known four main types (substitution, omission, insertion, transposition) to "complete" misrepresentation of a word. In the latter case there is a chain of conditional symbols, e.g. \*\*\*...\*, instead of a word at the input of the algorithm carrying out correction. The chain is formed at the stage of automatic analysis of errors with regard to a great number of characteristic features of the corresponding line of natural language communication. Moreover, it is assumed that we may come across the so-called meaningful errors, i.e. errors the result of which is a word belonging to the vocabulary of the language.

The result of the problem solution is a source text where for each word, classified at the stage of error analysis as an erroneous one, there is a minimum (ideally unique) number of alternative spellings from the point of view of the problem solver.

### 4.2 Principles of Problem Solution

In MM-system for solving text correction problem we realize a strategy of "block-structured" correction system, i.e. the system is being built as a set of the following main functional blocks:

- block of errors analysis and preliminary formation of a set of alternative spellings for each presumably erroneous word of the source text; it consists of a set of separate functional modules eventually oriented to detection of any errors mentioned above; theoretical basis of the corresponding algorithms is theoretico-multiple description of these errors;

- block of editing a set of alternative spellings and formation and editing of the corresponding tag chains;

- block of correction; it also consists of a set of separate functional modules solving in this case a problem of minimization of each set of alternative spellings; theoretical basis for developing these modules are "fast" and "precise" algorithms of text analysis used in accordance with types of errors independently or in combination with each other with a constant or changing order of autoregression and Markov chain;

- block of editing the output text.

General control of the "block-structured" correction system TCOR in MM-system is carried out by a special program-dispatcher providing the user with a developed interface and a possibility to work both in automatic and interactive modes.

## 5. Conclusion

The experience of development and application of MM-system for solving a range of problems of automatic text processing has shown prospects for investigations in the field of corpus linguistics. The developed experimental linguistic processors allow, for example, to carry out correction of orthography in the automatic mode with the accuracy of 95%, automatic text reading, as a rule, with the accuracy of 100%, etc. It is important that classical probability methods in this case make it possible to construct a broad range of algorithms for each problem resulting in possibility to build dynamic, i.e. parameter-oriented, application systems of text processing.

1. Atwell E. Constituent-Likelihood Grammar. ICAME News: Newsletter of the International Computer Archive of Modern English. V 7. 1983. P.34.

2. S o v e t I. V. Engineering and Linguistic Principles, Methods and Algorithms of Automatic Text Processing. Minsk: Vyshejschaja Shkola, 1991. P.176.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.1

Богуш А. А. **О роли Белгосуниверситета в развитии физической науки и образования на Беларуси** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Приведены краткие сведения по истории становления и развития, а также о современном состоянии университетского физико-математического образования и научных исследованиях в области новейшей физики на Беларуси. Центральное место занимает информация о физическом факультете Белорусского государственного университета и об Институте физики им. Б. И. Степанова Академии наук Беларуси. Названы имена большинства известных белорусских ученых-физиков, докторов наук и профессоров, главным образом выпускников Белгосуниверситета.

Библиогр. 5 назв., табл.1.

УДК 51(09)

Гусак А. А., Тышкевич Р. И., Юрчук Н. И. **Из истории развития математики в Белорусском государственном университете** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Обзор основных научных направлений, по которым проводятся математические исследования. Названы руководители этих направлений, отмечены наиболее существенные результаты исследований последних лет.

УДК 535.39

Бельский А. М. **Структура поля когерентных световых пучков вблизи преломляющей поверхности** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Предложен новый метод решения граничной задачи об отражении и преломлении когерентных световых пучков на плоской поверхности раздела изотропных сред. Метод основан на использовании точных решений уравнений Максвелла для произвольного пучка в виде ряда по производным функции, определяющей распределение поля пучка в каком-либо поперечном сечении. Функции распределения отраженного и преломленного пучков получены в виде рядов по производным функции распределения падающего пучка.

Библиогр. 4 назв., ил.1

УДК 535.37:577.3

Воропай Е. С., Самцов М. П., Луговский А. П., Жаврид Э. А., Журавкин И. Н., Александрова Е. Н. **Свойства новых полиметиновых красителей для фотодинамической терапии** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Приведены результаты исследований ряда полиметиновых красителей. Показана их эффективность в качестве фотосенсибилизаторов для фототерапии онкологических заболеваний.

Библиогр. 17 назв.

УДК 530.12; 530.145

Шишкин Г. В., Абдель Салам У. Х. (Палестина) **Точные решения проблемы Волкова на фоне гравитации** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Представлены новые точные решения уравнения Дирака для частицы, взаимодействующей со скалярным, векторным либо псевдоскалярным и тензорными волновыми полями на фоне гравитации.

Библиогр. 16 назв.

УДК 535.8

Ермаков В. В., Карней И. Б., Сташкевич И. В. **Термооптический затвор и его влияние на режимы генерации импульсного твердотельного лазера** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Рассмотрен метод активной модуляции добротности импульсных лазеров с помощью термооптического затвора, в основу работы которого положен эффект фазового перехода нематический жидкий кристалл – изотропная жидкость. Исследованы режимы генерации неодимового лазера с термооптическим затвором.

Библиогр. 6 назв., ил.3.

УДК 621.315.592

Ермолаев О. П., Хаким С. А. (Египет). **Скейлинговый подход к переходу диэлектрик–металл в германии, "легированном" радиационными дефектами** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Изучена низкотемпературная электропроводность германия, "легированного" радиационными дефектами (РД), возникающими в результате облучения быстрыми реакторными нейтронами. Установлено количественное расхождение между одночастичной скейлинговой теорией перехода диэлектрик–металл и экспериментальными данными для такого типа неупорядоченной системы как германий, "легированный" радиационными дефектами.

Библиогр. 10 назв., ил.1.

УДК 548.5:669.76

Шепелевич В. Г. **Структура и электрические свойства фольги тройных сплавов Bi-10 ат.% Sb-Sn, полученных сверхбыстрой закалкой из расплава** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Быстрозатвердевшая фольга тройных сплавов Bi-10 ат.% Sb-Sn характеризуется текстурой (10 $\bar{1}$ 2). Электрические свойства быстрозатвердевшей фольги в низкотемпературной области определяются дырками, а в области температур, близких к комнатной, дополнительный вклад в процессы переноса дают электроны.

Библиогр. 9 назв., табл.1, ил.2.

УДК 537.312.62.538.945

Ревинский А. Ф. Об электронной структуре сверхпроводящей системы  $Ba_{1-x}K_xBiO_3$  // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

В рамках функционала локальной плотности проведен расчет из первых принципов зонной структуры соединения  $Ba_{1-x}K_xBiO_3$  для двух упорядоченных стехиометрических составов:  $BaBiO_3$  и  $BaKBi_2O_6$ . Установлено, что в нормальном состоянии данные вещества являются металлами. При этом увеличение степени легирования калием сопровождается ростом плотности состояний на уровне Ферми.

Библиогр. 5 назв.

УДК 535.37

Гулис И. М., Комяк А. И., Саечников К. А., Цвирко В. А. Спектроскопия сложных органических молекул, охлажденных в сверхзвуковой струе // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Содержится обзор результатов выполненных в Белгосуниверситете исследований по электронно-колебательной спектроскопии изолированных сверххолодных сложных органических молекул и их ван-дер-ваальсовых комплексов: формирование структуры вибронных спектров, эффекты изотопозамещения, спектральные сдвиги при формировании комплексов с полярными и неполярными лигандами, фотофизические процессы в электронно-возбужденных комплексах.

Библиогр. 20 назв., ил. 1

УДК 517.9

Антоневич А. Б., Радыно Я. В. О теории мнемифункций и ее приложениях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Показаны основные идеи теории мнемифункций или "новых обобщенных функций", допускающих всюду определенное умножение. Дифференциальные уравнения, спектральная теория линейных операторов и стохастические дифференциальные уравнения описаны в смысле мнемифункций.

Библиогр. 19 назв.

УДК 517.977

Калинин А. И., Грибковская И. В. Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Подводятся итоги цикла работ авторов, в которых исследуются задачи оптимального управления линейными сингулярно возмущенными системами, содержащими при производных параметры различных порядков малости.

Библиогр. 15 назв.

УДК 517.956

Корзюк В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Дается краткое описание развития теории разрешимости граничных задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными с использованием функциональных методов. Излагаются общие результаты на основе энергетических неравенств. С помощью метода энергетических неравенств и операторов осреднения переменного шага доказывается существование и единственность сильного решения граничных задач для гиперболического относительно заданного векторного поля дифференциального уравнения второго порядка. Энергетическое неравенство выводится с использованием критерия Сильвестра относительно квадратичных форм.

Библиогр. 119 назв.

УДК 517.977

Размыслович Г. П. Управляемость каузальных линейных дискретных дескрипторных систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Для линейных дискретных систем с запаздыванием подчиненных условиям каузальности (causal systems) рассматриваются некоторые виды управляемости.

Библиогр. 8 назв.

УДК 621.506.2

Совпель И. В. Разработка и приложения корпуса виртуальных текстов в ММ-системе (англ. яз.) // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3.

Излагается концепция и основные приложения лингвистической базы знаний в виде корпуса виртуальных текстов. Даются эффективные алгоритмы решения задач автоматического анализа и корректировки текста

Библиогр. 2 назв.

## ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Продолжается подписка на газеты и журналы на первое полугодие 1997 года. Подписная цена журнала "Вестник Белорусского государственного университета", пожалуй, самая низкая среди республиканских изданий.

Серия 1 (инд.74851)

**физика, математика, информатика** (№1, январь; №2, май) – 32000 рублей;

Серия 2 (инд.74852)

**химия, биология, география** (№1, февраль; №2, июнь) – 32000 рублей;

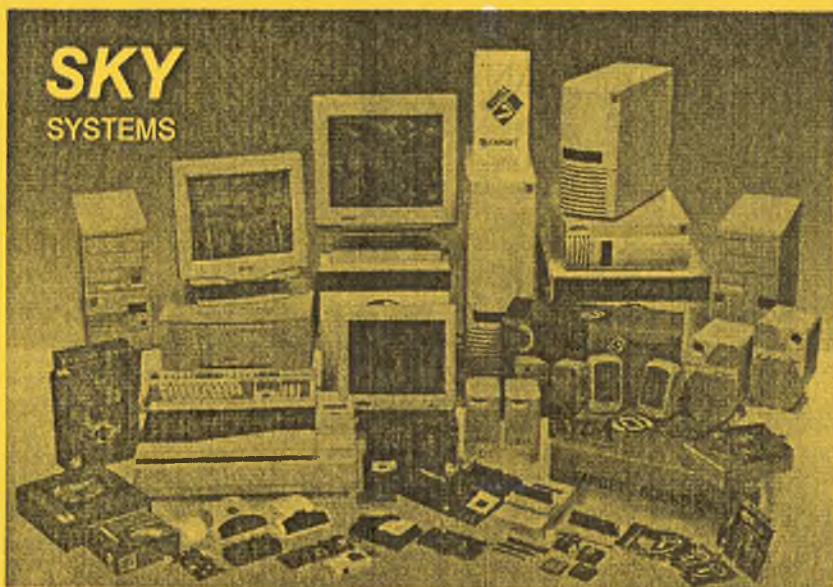
Серия 3 (инд.74853)

**история, философия, социология, экономика, право** (№1, март) – 16000 рублей;

Серия 4 (инд.74854)

**филология, журналистика, педагогика, психология** (№1, апрель) – 16000 рублей.

Подписка на журнал принимается во всех отделениях почтовой связи Республики Беларусь. В розничную продажу "Вестник" не поступает.



## Компьютерная фирма "Скай Системс"

Широкий выбор современных  
компьютеров, устройств  
мультимедиа, периферии и  
программного обеспечения  
по доступным ценам.



Тел./факс: (017) 2-321-390.