

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

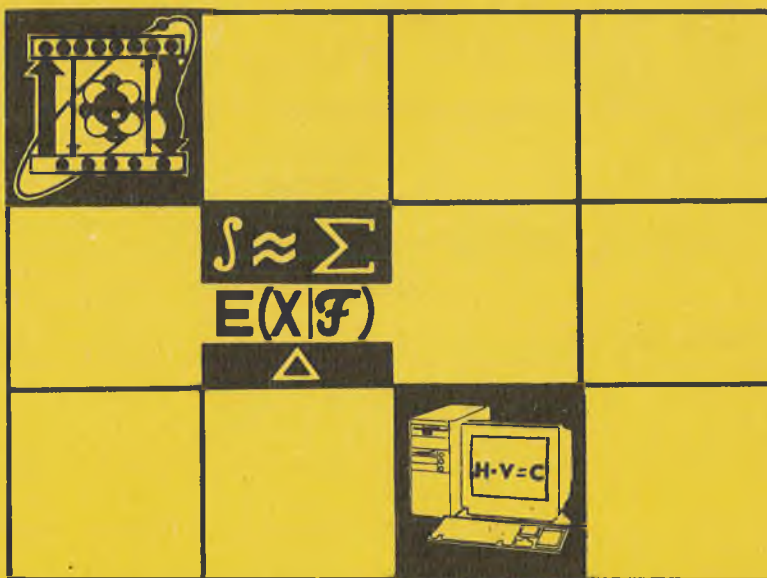
СЕРИЯ 1

Физика

Математика

Информатика

1 '96



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Комаров Л. И., Феранчук Н. Д.</i> Двухуровневый атом в одномодовом квантовом поле: нулевое приближение операторного метода	3
<i>Карпук С. М., Романов О. Г., Толстик А. Л.</i> Исследование угловых характеристик невырожденного четырехволнового взаимодействия в резонансных средах	8
<i>Кулак Г. В., Кулак В. И.</i> Обратное брэгговское рассеяние света на гиротропных фазовых сверхрешетках фотоупругости	12
<i>Данилькевич М. И., Макоед И. И.</i> О механизмах диэлектрической поляризации $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{F}_2\text{O}_4$ -феррита	15
<i>Болтушкин В. И., Гольцев В. П., Гольцев М. В., Чаевский В. В.</i> Корреляция параметра решетки и состава в многокомпонентных соединениях типа нитридов переходных металлов	17
<i>Ермолаев О. П.</i> Особенности перехода диэлектрик-металл в германии, «легированном» радиационными дефектами	19
<i>Мелешико Л. О.</i> Гомогенное зародышеобразование алмаза в области его метастабильности	21
<i>Новиков А. П., Шилова Е. А., Буйко Л. Д., Зайков В. А.</i> Термическая стабильность границы раздела металл/а-С в условиях вакуумного отжига	24
<i>Андреев А. Д., Бельский А. М., Валиев А. А.</i> Влияние уровня легирования на насыщение тока в <i>n</i> -канальном МОП-ПТ	26

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Зверович Э. И., Шевила Т. А.</i> Интеграл типа Коши в классах <i>E</i>	30
<i>Долгополова О. Б.</i> Построение всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности	32
<i>Ровба Е. А.</i> Рациональные интегральные операторы на отрезке	34
<i>Мататов В. И., Михайловская Л. В.</i> Необходимые условия однозначности подвижных особенностей кубических систем двух дифференциальных уравнений	39
<i>Ширяев В. М.</i> Полугруппы с единственным базисом	43
<i>Новиков С. П.</i> Связь β -профраттиниевых подалгебр с β -нормализаторами мультиколец	46
<i>Ефимчик Н. Е., Подкопаев Д. П.</i> О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации	48
<i>Размыслович Г. П.</i> Алгоритм вычисления передаточной матрицы для сингулярных систем с запаздыванием	52
<i>Барвенов С. А.</i> Влияние переменной вязкости на периодические дрейфовые течения	55
<i>Савчук В. П., Савенков В. А., Вярвильская О. Н.</i> Колебания натянутого пролета под действием движущихся нагрузок	58
<i>Глушцов А. И.</i> Методы интегральных уравнений и дискретных источников в задачах экранирования	61
<i>Шилин А. П.</i> О решении интегральных уравнений с двумя ядрами на симметричном интервале	66

ХРОНИКА

<i>Сташкевич Ігар.</i> Канференція па дыфракцыйнай оптыцы	72
---	----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Рафаил Габасов	74
----------------------	----

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Информатика**

1'96

ЯНВАРЬ



МИНСК
„УНІВЕРСІТЭЦКАЕ”

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

П. Д. КУХАРЧИК (ответственный редактор),
В. М. АНИЩИК, Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А. М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный секретарь),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора),
Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. Н. КИВАЧ, Н. И. КОЗЛОВСКИЙ, Ф. Ф. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК, В. И. КОРЗЮК, В. И. МИРОНЕНКО, С. Г. МУЛЯРЧИК, И. В. СОВПЕЛЬ, А. К. ФЕДОТОВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Информ. 1996. № 1

Редактор И. А. Лешкевич
Младший редактор Г. М. Добыш
Художественный редактор Ю. С. Сергачев
Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Набор и верстка журнала выполнены на издательско-редакционной системе «Windows»

Сдано в набор 14.12.95. Подписано в печать 20.03.96. Формат 70×108 1/16. Бумага офс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч. изд. л. 8,21. Тираж 570 экз.
Заказ 1470. Цена 12000 р.

Издательство «Універсітэцкае». 220048, Минск, пр. Машерова, 11. Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати».
220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 539.12

Л. И. КОМАРОВ, И. Д. ФЕРАНЧУК

ДВУХУРОВНЕВЫЙ АТОМ В ОДНОМОВОМ КВАНТОВОМ ПОЛЕ: НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА

The approximate solution of the problem of interaction between two-level atom and quantum electromagnetic field is found on the basis of the operator method. The solution is uniformly suitable in the entire range of the coupling constant variation and describes the qualitative peculiarities of the system energy spectrum.

1. Модель двухуровневого атома (МДА), взаимодействующего с одномодовым квантовым полем, является простой, но в то же время широко распространенной и эффективной моделью, использующейся для исследования качественных особенностей взаимодействия квантовых систем с резонансным электромагнитным полем (см., напр., [1, 2]). Построение спектра и собственных функций гамильтониана этой системы представляет большой интерес как с математической точки зрения, так и для решения конкретных физических задач, связанных с исследованием неадиабатических переходов [3], сжатых состояний [4], хаотизации поведения динамических систем [5], резонансной флуоресценции [6] и ряда других явлений.

В большей части приложений МДА используется так называемое приближение вращающейся волны, которое сводит задачу к точно решаемому случаю, известному как модель Джейнса—Каммингса (МДК) [7]. Однако обсуждение применимости МДК в рассматриваемой задаче обычно сводится к качественным соображениям [2], не позволяющим выделить тот диапазон параметров, где использование указанного приближения правильно описывает свойства системы. Более того, строгое математическое исследование характеристик спектра гамильтониана МДА, выполненное рядом авторов (см., напр., [8—10]) и позволившее найти класс точных аналитических решений задачи, показывает, что МДК не воспроизводит правильную зависимость энергии уровней от константы взаимодействия атома с полем.

В связи со сказанным большой интерес представляет разработка метода приближенного описания энергетического спектра МДА и других характеристик модели в широком диапазоне параметров системы. В настоящей работе для этого используется операторный метод (ОМ) решения уравнения Шредингера, который был впервые введен в [11] и оказался эффективным при описании многих систем (см. [12]). Применение ОМ в рассматриваемой задаче позволяет построить алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов гамильтониана МДА с любой необходимой точностью, по эффективности сравнимый с аналитическим решением, и с его помощью детально исследовать различные характеристики системы [13].

Цель настоящей работы состоит в использовании нулевого приближения ОМ для приближенного аналитического вычисления энергетиче-

ского спектра МДА. Как будет показано далее, полученные аналитические формулы являются равномерно пригодными в том отношении, что позволяют исследовать качественные особенности энергетического спектра системы во всем диапазоне изменения константы связи атома с полем.

2. Гамильтониан исследуемой модели в безразмерной форме имеет очень простой вид [9]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_3 + a^+ a + f(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^+). \quad (1)$$

Здесь a^+ и a — операторы рождения и уничтожения квантов выделенной моды электромагнитного поля, причем энергия кванта принята за единицу; матрицы Паули $\sigma_i (i=1, 2, 3)$, $\sigma_{\pm} = 1/2(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ описывают переходы между состояниями χ_+ и χ_- двухуровневого атома, отделенные энергией ε друг от друга; безразмерная константа связи f атома с полем пропорциональна дипольному матричному элементу перехода, причем точно решаемой модели ДК соответствует отбрасывание в формуле (1) «нерезонансных» слагаемых $\sigma_+ a^+$ и $\sigma_- a$.

Дальнейшие выкладки заметно упрощаются в другом представлении гамильтониана (1), при котором оператор взаимодействия атома с полем имеет диагональную форму

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_1 + a^+ a + f \sigma_3 (a + a^+). \quad (2)$$

Существенно также, что система имеет точный интеграл движения, который можно назвать «комбинированной четностью», и в представлении, соответствующем гамильтониану $\hat{H}_1$, определяемый оператором

$$\hat{R} = \sigma_1 e^{i\pi a^+ a}, \quad (3)$$

коммутирующим с гамильтонианом (2).

Таким образом, точный вектор состояния системы зависит от двух квантовых чисел и является совместным решением следующей системы уравнений

$$\hat{H}_1 |\Psi_{ns}\rangle = E_{ns} |\Psi_{ns}\rangle; \quad (4a)$$

$$\hat{R} |\Psi_{ns}\rangle = s |\Psi_{ns}\rangle, \quad (4b)$$

где число $s = \pm 1$ определяет четность, а $n = 0; 1; 2; \dots$ — энергию стационарного состояния системы E_{ns} .

В соответствии с общим рецептом ОМ [13], для построения всего спектра решений уравнения Шредингера необходимо использовать полный набор базисных векторов, зависящих от некоторых произвольных параметров, которые позволяют адекватно учитывать изменения состояний системы под влиянием взаимодействия. В рассматриваемом случае связь атома с полем приводит к сдвигу равновесного состояния полевых осцилляторов, чему, как известно, в представлении вторичного квантования соответствует следующее каноническое преобразование операторов

$$a = b + u; \quad a^+ = b^+ + u^*; \\ b = \hat{J}^{-1} a \hat{J}; \quad \hat{J} = e^{(u^* a - u a^+)} = e^{-\frac{|u|^2}{2}} e^{-u a^+} e^{u^* a}, \quad (5)$$

где u — произвольный пока параметр, b^+ и b — новые операторы рождения и уничтожения.

Тогда необходимый базисный набор образуется с помощью собственных функций оператора числа квантов $\hat{n} = b^+ b$ и оператора σ_3 :

$$\begin{aligned} |\Psi_{ns}^{(0)}\rangle &= |n, u\rangle \chi_s; \\ \hat{n}|n, u\rangle &= n|n, u\rangle; \quad \sigma_3 \chi_s = s \chi_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Состояния $|n, u\rangle$ представляют собой n -квантовые возбуждения над когерентным состоянием поля, связанные с вакуумным состоянием электромагнитного поля следующим образом ($u = u^*$):

$$|n, u\rangle = \frac{(a^+ - u)^n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k!} (a^+)^k |0\rangle \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (7)$$

причем амплитуда u классического поля, определяющая, по существу, выбор представления для базисного набора ОМ, будет найдена позже. Функции χ_s являются линейными комбинациями волновых функций основного χ_+ и возбужденного χ_- состояний

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+ \pm \chi_-).$$

В результате канонического преобразования (5) уравнения (4) принимают следующий вид [11]:

$$\left[\frac{1}{2} \varepsilon \sigma_1 + u^2 + u(b + b^+) + b^+ b + f \sigma_3 (2u + b + b^+) \right] |\Psi_{ns}\rangle = E_{ns} |\Psi_{ns}\rangle; \quad (8a)$$

$$\sigma_1 \cdot e^{-2u^2} e^{-2ub^+} e^{i\pi b^+ b} e^{-2ub} |\Psi_{ns}\rangle = s |\Psi_{ns}\rangle. \quad (8b)$$

Представим искомый вектор состояния в виде разложения по базисному набору

$$|\Psi_{ns}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda=\pm 1} C_{nk}^{s\lambda} |ku\rangle \chi_{\lambda}. \quad (9)$$

В результате из уравнений (8) и (9) находим алгебраические рекуррентные соотношения для коэффициентов $C_{nk}^{s\lambda}$ и E_{ns} :

$$(k + u^2 + 2uf - E_{ns}) C_{nk}^{s+} + (u + f) (\sqrt{k} C_{nk-1}^{s+} + \sqrt{k+1} C_{nk+1}^{s+}) = -\frac{1}{2} \varepsilon C_{nk}^{s-}; \quad (10a)$$

$$s C_{nk}^{s-} = \sum_m R_{mk} C_{nm}^{s+}, \quad (10b)$$

$$R_{mk} = e^{-2u^2} \sum_{l=0}^{\min\{m, k\}} (-1)^l \frac{(m! k!)^{1/2}}{l! (m-l)! (k-l)!} (2u)^{m+k-2l}.$$

Обратим внимание на то, что мы не используем еще одно рекуррентное соотношение для $C_{nk}^{s\lambda}$, вытекающее из (8a), поскольку по определению при точном собственном значении E_{ns} оно является линейной комбинацией уравнений (10). В то же время, как показывают дальнейшие вычисления, учет связи (10b) между C_{nk}^{s+} и C_{nk}^{s-} , обусловленной точным интегралом движения $\hat{R}$, является принципиально важным для сходимости последовательных приближений ОМ.

3. Согласно [14], для вычисления энергии стационарных состояний системы в нулевом приближении ОМ необходимо учитывать только диагональную часть гамильтониана по отношению к волновым функциям

используемого базисного набора. При выделении соответствующей части в матричных уравнениях (8) представим вектор состояния $|\Psi_{ns}\rangle$ в виде разложения по собственным функциям матрицы σ_3

$$|\Psi_{ns}\rangle = |\varphi_{ns}\rangle \chi_+ + |\nu_{ns}\rangle \chi_- \quad (11)$$

и, исключая спиновые переменные, получим уравнение для одного из векторов состояния

$$\hat{H}_{\text{эфф.}} |\varphi_{ns}\rangle = \left[u^2 + 2uf + b^+b + (u+f)(b+b^+) + \frac{\varepsilon}{2} s \hat{R}_1 \right] |\varphi_{ns}\rangle = E_{ns} |\varphi_{ns}\rangle, \quad (12)$$

где $\hat{R}_1$ — оператор с матричными элементами, приведенными в (10).

В соответствии с результатами работы [14], где была рассмотрена обобщенная форма ОМ, в некоторых случаях диагональная часть гамильтониана должна выделяться по отношению не к самим векторам состояния из базисного набора, а к их линейным комбинациям, учитывающим наиболее существенные особенности точных волновых функций. В рассматриваемом случае такой особенностью является вырождение состояний с квантовыми числами n и $n+1$ при $\varepsilon \cong 1$ и $f \ll 1$. В связи с этим используем в нулевом приближении ОМ «правильные линейные комбинации» базисных векторов состояния:

$$|\varphi_{ns}\rangle \cong |\varphi_{ns}^{(0)}\rangle = A|n, u\rangle + B|n+1, u\rangle \quad (13)$$

с произвольными постоянными A и B .

Естественно, что точные собственные значения гамильтониана системы не зависят от параметра u , который определяет только выбор представления для волновой функции. Однако именно такие, искусственно введенные, параметры и обеспечивают «гибкость» нулевого приближения ОМ при различных значениях константы связи, причем они могут выбираться различными способами [11–15]. Для эффективного гамильтониана (12) оптимальное значение u оказывается очень простым:

$$u = -f, \quad (14)$$

что обеспечивает обращение в нуль при любых n основной части матричного элемента оператора $\hat{H}_{\text{эфф.}}$, определяющего переходы в ближайшие состояния.

Подставляя вектор состояния (13) в уравнение (12), находим алгебраическую систему уравнений для коэффициентов A и B , из условия совместности которой получаем следующую аналитическую формулу для энергии стационарных состояний системы в нулевом приближении ОМ (здесь учтено, что $u = -f$):

$$\begin{aligned} E_{ns}^{(0)} &= n - f^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \varepsilon (R_n + R_{n+1}) - \frac{1}{2} \Delta_{ns}^{1/2}; \\ \Delta_{ns} &= \varepsilon^2 R_{n,n+1}^2 + \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon (R_n - R_{n+1}) \right]^2; \\ R_n &\equiv R_{n,n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и во многих других применениях ОМ, полученная формула является равномерно пригодной в том отношении, что она воспроизводит точное асимптотическое поведение энергии в предельных случаях $f \ll 1$ и $f \gg 1$, а в промежуточной области константы связи достаточно точно описывает характерные особенности энергетического спектра системы.

Действительно, при $f \ll 1$ из формулы (15) находим

$$R_n \cong (-1)^n + O(f^2); \quad R_{n,n+1} \cong 2f(-1)^n \sqrt{n+1} + O(f^3);$$

$$E_{ns}^{(0)} \cong n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [(\varepsilon - s)^2 + 4\varepsilon^2 f^2 (n+1)]^{1/2}, \quad (16)$$

что совпадает с результатами, полученными в рамках модели ДК.

В противоположном пределе $f \gg 1$ можно пренебречь экспоненциально малыми слагаемыми $\sim R_n$ в формуле (16), что приводит к простому выражению

$$E_{ns}^{(0)} \cong n - f^2, \quad (17)$$

которое является асимптотически точным.

Как показано в работах [8—10], характерной особенностью энергетического спектра МДА является пересечение уровней разной четности, соответствующих одному квантовому числу n , причем число пересечений в точности равно n . Из формулы (15) следует, что спектр, найденный в нулевом приближении ОМ, также обладает этим свойством, причем точки пересечения определяются уравнением

$$\varepsilon^2 (R_n + R_{n+1})^2 (R_n R_{n+1} - R_{n, n+1}^2) - 4 R_n R_{n+1} = 0. \quad (18a)$$

Если учесть, что даже в ближайшей точке пересечения уровней величина $\exp(-2f^2) \ll 1$, то для приближенной оценки корней уравнения (18a) при $f \sim 1$ можно использовать более простое уравнение

$$R_n(f^2) = 0, \quad (18b)$$

представляющее собой полином n -ой степени относительно f^2 со знакопеременными коэффициентами. Решения этого уравнения, например, при $n=1$ и $n=2$ дают следующие значения для точек пересечения:

$$f_1^2 = \frac{1}{4}, \quad n=1; \quad f_{1,2}^2 = \frac{1}{4} (2 \pm \sqrt{2}), \quad n=2,$$

что можно сравнить с соответствующими точными значениями [10]:

$$\tilde{f}_1^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right); \quad \tilde{f}_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left[2 - \frac{3}{16} \varepsilon^2 \pm \sqrt{2 - \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^4}{256}} \right].$$

Большой интерес представляет аналитическое выражение для энергии системы в области больших квантовых чисел ($n \gg 1$), которые существенны при рассмотрении взаимодействия атома с интенсивным электромагнитным полем. В этом пределе матричные элементы оператора $\hat{R}_1$ существенно упрощаются

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n e^{-2f^2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!} \cdot (2f)^{2k} \cong \\ &\cong (-1)^n e^{-2f^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2} \cdot (2f)^{2k} = (-1)^n J_0(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2}; \\ R_{n, m+n} &\cong (-1)^n J_m(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2}, \quad n \gg 1, m \ll n, \end{aligned}$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя порядка m .

В результате формула (15) принимает следующий вид:

$$E_{ns}^{(0)} \cong n - f^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^2 J_1^2(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2} + \left[1 - \varepsilon s (-1)^n J_0(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

который можно использовать для перехода к квазиклассическому пределу при описании поля.

В заключение подчеркнем, что возможности, связанные со свободой выбора представления для вектора состояния системы, которые позволили построить равномерно пригодное приближение для рассмотренной в работе системы, в значительной степени перекликаются с идеями ковариантного подхода, заложенными в трудах Ф. И. Федорова.

1. Allen L., Eberly J. H. Optical Resonance and Two Level Atoms. New York, 1975. P. 230.
2. Альперин М. М. и др. // Введение в физику двухуровневых систем. Киев, 1987. С. 183.
3. Reik H. G., Nusser H., Ribeiro A. A. // J. of Phys. A. 1982. V. 15. P. 3491.
4. Cirac J. I., Sanches-Soto L. L. // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 3743.
5. Graham R., Hoehnerbach M. // Phys. Lett. A. 1984. V. 101. P. 61.
6. Amarante R. L. A. // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 2676.
7. Jaynes E. T., Cummings F. W. Proc. IEEE. 1953. V. 51. P. 126.
8. Schweber S. // Ann. Phys. (NY). 1967. V. 41. P. 205.
9. Kus M. // J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2792.
10. Kus M., Lewenstein M. // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 305.
11. Feranchuk I. D., Komarov L. I. // Phys. Lett. A. 1982. V. 88. P. 212.
12. Same authors // J. of Phys. A. 1984. V. 17. P. 3111.
13. Same authors // Proceedings of The Conference QS-94. Singapour, 1995. P. 220.
14. Feranchuk I., Komarov L., Nechipor I. // J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 3849.

Поступила в редакцию 25.05.95.

УДК 535.34

С. М. КАРПУК, О. Г. РОМАНОВ, А. Л. ТОЛСТИК

ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕВЫРОЖДЕННОГО ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ СРЕДАХ

It has been shown that the change in angle of reading the dynamic holograms by a light beam with double frequency might result in the realization of two schemes of the radiation frequency conversion which are based on linear and quadratic recording of dynamic holograms.

Невырожденное четырехволновое взаимодействие позволяет осуществить в реальном времени частотное преобразование когерентных изображений. Метод основан на использовании излучения разных частот при записи и считывании объемных динамических дифракционных структур, фиксируемых в нелинейных средах. При изменении соотношения частот в соответствии с условиями брэгговской дифракции необходимо изменять направление распространения считывающей волны, причем условие пространственного синхронизма может быть достигнуто только для заранее определенного направления плоской сигнальной волны [1, 2]. В работе [3] предложен нетрадиционный подход, основанный на квадратичной записи динамических голограмм и позволяющий осуществить фазовое сопряжение при одновременном удвоении частоты световой волны. При этом считывающая и опорная волны распространяются точно навстречу друг другу независимо от направления сигнальной волны.

В данной работе реализованы обе схемы частотного преобразования сигнала из ИК области в видимую за счет плавной перестройки направления распространения считывающей волны. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Динамическая голограмма записывается сигнальной $E_s = A_s \exp [i(\mathbf{k}_s \mathbf{r} - \omega t + \varphi_s)]$ и опорной $E_1 = A_1 \exp [i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)]$ волнами, а считывание осуществляется волной $E_2 = A_2 \exp [i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - 2\omega t + \varphi_2)]$. Использовалось моноимпульсное излучение лазера на алюмоиттриевом гранате ($\lambda=1,06$ мкм, $\tau=9$ нс), соответствующее максимуму полосы поглощения раствора полиметинового красителя № 3274У в изобутиловом спирте. Восстановление голограммы осу-

ществлялось второй гармоникой излучения того же лазера ($\lambda = 532$ нм), которая практически не поглощается красителем. Диффрагма диаметром 3 мм вырезала однородную часть излучения. Спектроделитель и зеркала 7, 9 формировали сигнальную и опорную волны. С помощью зеркала 4 считывающая волна направлялась в нелинейную среду. Зеркало 4 могло пере-

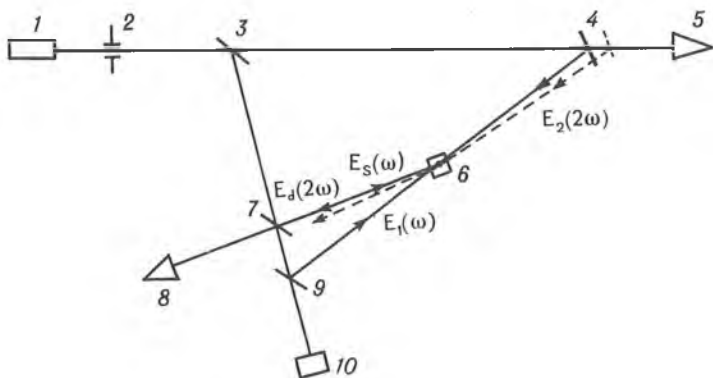


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — лазер; 2 — диафрагма; 3 — спектроделитель; 4, 7, 9 — зеркала; 6 — кювета с красителем; 5, 8 — система регистрации; 10 — измеритель энергии лазерного излучения

мещаться, что позволяло менять угол считывания. Угол (~ 90 мрад) между направлением распространения опорного и сигнального пучков обеспечивал перекрытие взаимодействующих волн в кювете с раствором красителя ($L=0,5$ см). Интенсивность опорной волны контролировалась при помощи измерителя энергии лазерного излучения. Для измерения дифракционной эффективности преобразования излучения (отношения интенсивностей дифрагированного I_d и считывающего I_2 пучков) использовалась регистрирующая система 5, 8 на основе фотодиодов, работающих в режиме фотопреобразователя, и импульсных цифровых вольтметров.

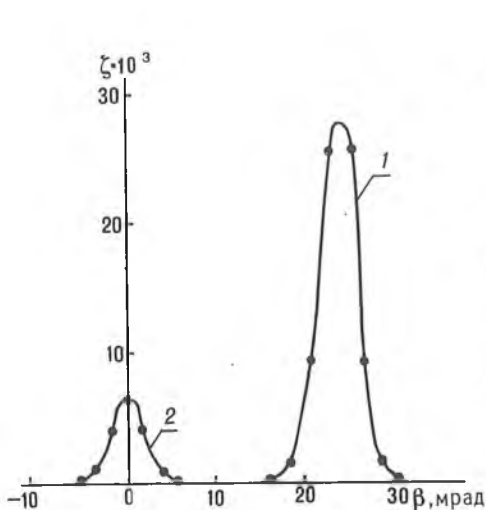


Рис. 2. Зависимость дифракционной эффективности ξ от угла падения считывающей волны при $k_0 L = 3$ и $I_1 = I_2 = 8$ МВт/см². Значения дифракционной эффективности, соответствующие кривой 2, увеличены в 10 раз

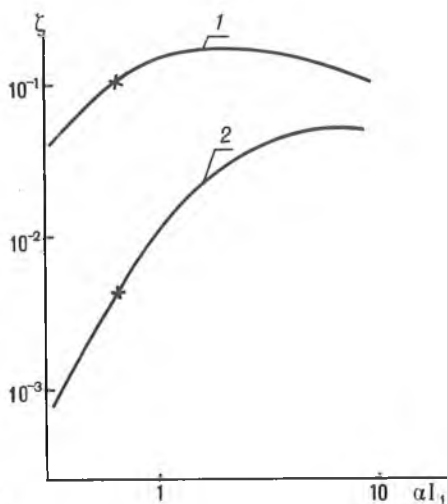


Рис. 3. Зависимость дифракционной эффективности ξ от интенсивности опорной волны I_1 для схем линейной (1) и квадратичной (2) записи динамических голограмм

Зависимость дифракционной эффективности преобразования $\xi = I_d/I_2$ от угла β между считывающей и опорной волнами ($\beta = 0$ соответствует встречному направлению этих волн) при интенсивности записывающих голограмму волн $I_1 = I_s = 8$ МВт/см², интенсивности считывающей волны $I_2 = 0,4$ МВт/см² и оптической плотности раствора красителя $k_0 L = 3$ (k_0 — начальный коэффициент поглощения) представлена на рис. 2.

Появление двух максимумов обусловлено тем, что в первом случае ($\beta = 23$ мрад) реализуется линейная запись динамических голограмм, при которой поляризация, ответственная за генерацию волны E_d с удвоенной частотой 2ω , имеет вид: $P \sim E_1 E_2 E_s^*$. Величина $\beta = 23$ мрад соответствует выполнению условия фазового синхронизма $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_d$, что отвечает уменьшению угла между дифрагированной и считывающей волнами по сравнению с углом между записывающими голограмму пучками.

Появление второго максимума в зависимости $\xi(\beta)$ при $\beta = 0$ обусловлено реализацией в этом случае квадратичной записи динамической голограммы, при которой дифракция определяется вторыми компонентами разложения восприимчивости среды в ряд по гармоникам динамической решетки, и индуцируется нелинейная поляризация $P \sim (E_1 E_s^*)^2 E_2$, ответственная за генерацию волны E_d с удвоенной частотой. Направление волны E_d определяется условием фазового синхронизма $\mathbf{k}_d = 2\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_2$. При встречных направлениях распространения плоских опорной и считывающей волн $\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_1 = 0$ индуцируемая волна E_d распространяется строго навстречу сигнальной волне $E_s(\mathbf{k}_d = -2\mathbf{k}_s)$ и имеет удвоенную сопряженную фазу $\varphi_d = -2\varphi_s$. Таким образом, волны E_s и E_d имеют совпадающие поверхности волнового фронта при встречных направлениях распространения, т. е. обладают свойствами фазово-сопряженных волн.

Значения угловой селективности динамических голограмм для обеих схем воспроизведения близки (~ 5 мрад) и соответствуют (с учетом расходимости лазерного излучения ~ 2 мрад) теоретической оценке [4] $\Delta\beta = n \Lambda / L \approx 3$ мрад (период решетки $\Lambda = 12$ мкм, $L = 0,5$ см, $n = 1,36$).

Ниже приведем результаты теоретического сопоставления энергетической эффективности схем частотного преобразования лазерного излучения. Предполагается, что среда поглощает излучение на частоте ω и прозрачна на удвоенной частоте. Тогда формирование волны E_d будет определяться дифракцией считывающей волны E_2 на тепловой динамической решетке, записанной сигнальной и опорной волнами с частотой ω . В указанном приближении нелинейные восприимчивости $\chi(\omega)$ и $\chi(2\omega)$, определяющие запись и считывание динамической голограммы, имеют вид [5]:

$$\chi(\omega) = \frac{n_0 k_0}{2\pi} \left(\frac{\hat{\theta}_{12}}{B_{12}} - \frac{\hat{\alpha} I}{1 + \alpha I} \right), \quad (1)$$

$$\chi(2\omega) = \frac{n_0 k_0 a_t I}{2\pi(1 + \alpha I)}, \quad (2)$$

где $a_t = \sigma(1 - \mu)$ и $\hat{\alpha} = a + i\alpha = (\hat{\theta}_{12} + \hat{\theta}_{21}) / \nu P_{21} - \sigma(1 - \mu)$. Здесь $\sigma = 2\omega (dn/dT)\tau / c C_p$, dn/dT — термооптический коэффициент, C_p — теплоемкость единицы объема, ν — скорость света в среде, n_0 — нерезонансная составляющая показателя преломления, k_0 — линейный коэффициент экстинкции, $\hat{\theta}_{12(21)}(\omega) = \theta_{12(21)}(\omega) + iB_{12(21)}(\omega)$ — комплексная функция, описывающая спектральные свойства резонансного перехода, $\theta_{12}(\omega)$, $\theta_{21}(\omega)$ связаны дисперсионными соотношениями с коэффициентами Эйнштейна $B_{12}(\omega)$, $B_{21}(\omega)$, P_{21} — суммарная вероятность спонтанных и безызлучательных переходов, μ — квантовый выход люминесцен-

ции, I — интенсивность записывающих голограмму волн, τ — длительность светового импульса.

Система уравнений, описывающая запись и считывание динамических голограмм, имеет вид

$$\frac{\partial E_{1,s}}{\partial z} = i \frac{2\pi\omega}{cn_0} (E_{1,s}\chi_0(\omega) + E_{s,1}\chi_{\pm 1}(\omega)), \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_{2,d}}{\partial z} = -i \frac{4\pi\omega}{cn_0} (E_{2,d}\chi_0(2\omega) + E_{d,2}\chi_{\mp 1}(\mp 2)(2\omega)), \quad (4)$$

где $\chi_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\zeta) \exp(-im\zeta) d\zeta$ — компоненты разложения восприимчи-

вости среды χ в ряд Фурье по гармоникам решетки $\zeta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_s)\mathbf{r}$. В уравнении (4) для линейной записи используется компонента разложения восприимчивости $\chi_{\mp 1}(2\omega)$, а для квадратичной записи — $\chi_{\mp 2}(2\omega)$.

Численное решение системы дифференциальных уравнений проводилось методом Рунге—Кутты при параметрах среды и излучения, отвечающих условиям эксперимента: $n_0 = 1,36$, $\tau = 9$ нс, $(dn/dT)Cp^{-1} = -2 \cdot 10^{-4}$ Дж $^{-1}$ см 3 , $\mu = 0,003$, $k_0L = 3$. Зависимости дифракционной эффективности $\xi = |E_d/E_2|^2$ от интенсивности опорной волны I_1 представлены на рис. 3. Интенсивности взаимодействующих волн нормированы на интенсивность насыщения резонансного перехода $I_{sat} = \alpha^{-1}$.

Анализ системы уравнений (3), (4), проведенный для обеих схем записи и воспроизведения, позволил определить оптимальные значения интенсивностей записывающих голограмму волн: $\approx 4,2I_{sat}$ при квадратичной и $\approx 1,2I_{sat}$ при линейной записи динамических голограмм. Для красителя № 3274У интенсивность насыщения ≈ 13 МВт/см 2 [6] и используемые в эксперименте интенсивности $I_1 = I_s = 8$ МВт/см 2 отвечают значению $\approx 0,6 I_{sat}$. Более высокие значения дифракционной эффективности ξ , рассчитанные по формулам (3), (4) при указанной интенсивности (см. рис. 3), по сравнению с экспериментальными данными (см. рис. 2), объясняются в первую очередь тем, что при решении системы уравнений определяется значение дифракционной эффективности на конец импульса, а в эксперименте измерялось усредненное значение для всего импульса.

В заключение отметим, что применение описанных схем записи и восстановления динамических голограмм расширяет возможности частотного преобразования лазерного излучения (как плоской волны, так и сложных изображений) в реальном времени. При этом частотное преобразование излучения может сочетаться с эффектом фазового сопряжения, что позволяет компенсировать искажения при распространении излучения в фазово-неоднородных средах.

Настоящая работа была поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

1. Wu C., Fan J., Wang Z. Beijing-Shanghai Proc. Int. Conf. Lasers. 1980. P. 231.
2. Buck J. A., Rodriguez J. R. // J. Opt. Soc. Amer. 1987. V. B4. № 12. P. 1988.
3. Карпук С. М., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 12. С. 4.
4. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М., 1973. С. 688.
5. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 8. С. 1681.
6. Масалов А. В., Петухов В. А., Тимохович Н. В., Водоватов Л. Б., Горбунов М. В. // Там же. 1991. Т. 18. № 6. С. 749.

Поступила в редакцию 18.04.95.

ОБРАТНОЕ БРЭГГОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ГИРОТРОПНЫХ ФАЗОВЫХ СВЕРХРЕШЕТКАХ ФОТОУПРУГОСТИ

Specific features of the opposite Bragg scattering by the phase superlattices of photoelasticity fabricated using gyrotropic cubic crystals are investigated. It has been shown that opposite Bragg scattering by ultrasonic waves of small frequencies in superlattices of photoelasticity from gyrotropic germanate vismuth cubic crystals is possible. The dependences of diffraction efficiencies on the ultrasonic wave intensity and acoustooptical interaction length are investigated.

В настоящее время всевозрастающий интерес исследователей вызывают искусственные анизотропные структуры (классические и квантовые сверхрешетки), во-первых, как объект изучения в них различных физических эффектов и, во-вторых, с точки зрения возможных технических приложений [1, 2]. Среди физических характеристик искусственных анизотропных структур важное место занимают акустооптические (АО) свойства [2, 3]. Они сложным образом зависят от направлений распространения и поляризации световых и акустических волн относительно осей симметрии анизотропных структур, что необходимо учитывать при проектировании различных АО устройств обработки информации. Анизотропная структура сверхрешетки (СР), составленной из оптически изотропных материалов, дает возможность осуществлять новые геометрии АО взаимодействия [4]. В работах [5, 6] показана возможность создания СР с однородными оптическими свойствами, но чередующимися значениями фотоупругих параметров. В [6] отмечено, что сверхрешетки с чередующимися значениями фотоупругих параметров (сверхрешетки фотоупругости) могут быть использованы для осуществления АО взаимодействия с большими углами Брэгга при низких ультразвуковых частотах.

В настоящей работе исследованы особенности брэгговской дифракции света на ультразвуковых (УЗ) волнах в режиме обратного брэгговского рассеяния на низких частотах $f \sim 1-10$ МГц в СР фотоупругости, изготовленных с использованием чередующихся слоев кубических гиrotропных кристаллов.

Рассмотрим АО дифракцию на продольной УЗ волне, распространяющейся вдоль оси СР. Предположим, что в первом слое СР кристаллографическая ось второго порядка ориентирована вдоль оси симметрии X , во втором слое вдоль оси симметрии решетки ориентирована кристаллографическая ось третьего порядка и т. д. При этом падающая световая волна поляризована в плоскости дифракции XZ (р-поляризация) либо ортогонально плоскости дифракции (s-поляризация). Эффективные компоненты тензора $\hat{\Delta\epsilon}$ изменений диэлектрической проницаемости УЗ волной даются соотношениями:

$$\Delta\epsilon_{22} = -\epsilon^2(p_1^\perp - p_2^\perp) \sum_m a_m U_{11}^0 \exp\{i[(mK_g + K)x - \Omega t]\}, \quad (1)$$

$$\Delta\epsilon_{33} = -\epsilon^2(p_1^\parallel - p_2^\parallel) \sum_m a_m U_{11}^0 \exp\{i[(mK_g + K)x - \Omega t]\},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость СР в отсутствие УЗ возмущения; $K_g = \frac{2\pi}{d}$, причем d — период СР; $K = \frac{\Omega}{v}$, причем Ω — круговая час-

тота и v — фазовая скорость УЗ волны; $p_1^\perp = p_{12}$, $p_1^\parallel = p_{11}$, $p_2^\perp = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{12} + p_{21} - 2p_{44})$, $p_2^\parallel = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{12} + p_{21} + 4p_{44})$, где p_{11} , p_{12} , p_{21} , p_{44} — фотоупругие постоянные; U_{11}^0 — амплитуда деформаций УЗ волны. Постоянные a_m даются соотношениями [7]:

$$a_m = \begin{cases} -i/\pi m, & \text{при } m \text{ — нечетном,} \\ 0, & \text{при } m \text{ — четном,} \\ 1/2, & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

В области пересечения световой и ультразвуковой волн, занимающей пространство между плоскостями $x = 0$ и $x = l$, возникает индуцированная электрическая поляризация среды вида

$$P_i = \frac{1}{8\pi} (\Delta\epsilon_{ij} E_j + \Delta\epsilon_{ij}^* E_j), \quad (2)$$

где E_j — компонента вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ световой волны; $i, j = 2, 3$.

Для расчета напряженностей дифрагированных полей будем исходить из уравнений Максвелла и материальных уравнений [8] для гиротропного диэлектрика

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{\alpha}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\alpha}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где параметр α для монохроматических волн определяется соотношением $\alpha = \frac{c}{\omega} \gamma$ (ω — круговая частота световой волны, c — скорость света в вакууме, γ — параметр гирации.).

При расчете комплексных амплитуд дифрагированных волн использовался метод медленноменяющихся амплитуд [9]. При этом амплитуды преломленной (A_0) и дифрагированной (A_1) волн удовлетворяют граничным условиям: $A_0(x=0) = A$, $A_1(x=l) = 0$, где A — амплитуда падающей световой волны.

Относительная интенсивность дифрагированной световой волны $\eta_m = |A_1(0)|^2 / |A|^2$ на входной грани $x=0$ области АО взаимодействия для m -го брэгговского резонанса дается соотношением:

$$\eta_m = \frac{(\rho^2 + \alpha_m^2) \text{sh}^2(\alpha_m l)}{[\alpha_m^2 \text{ch}^2(\alpha_m l) + \rho^2 \text{sh}^2(\alpha_m l)]}, \quad (4)$$

где $\alpha_m = (\kappa_\parallel^2 / 2 + \kappa_\perp^2 / 2 - \rho^2)^{1/2}$, причем $\kappa_\parallel = -[n^3(p_1^\parallel - p_2^\parallel) / 2m\lambda_0 \sin \varphi_6^m] \times (2I_a / \sigma v^3)^{1/2}$, $\kappa_\perp = -[n^3(p_1^\perp - p_2^\perp) / 2\lambda_0 m \sin \varphi_6^m] (2I_a / \sigma v^3)^{1/2}$ (n — показатель преломления материала звукопровода, λ_0 — длина световой волны в вакууме, σ — плотность кристалла, $\rho = \frac{\omega}{c} \gamma$ — параметр удельного вращения, $\varphi_6^m = \arcsin(m\lambda_0 / 2nd)$ — угол m -го брэгговского резонанса, I_a — интенсивность УЗ волны).

Численные расчеты проводились для СР полученной с использованием гиротропного кубического кристалла германата висмута ($\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$) [10]. Рассматривалась дифракция света с длиной волны $\lambda_0 = 0,63$ мкм на

УЗ волне с частотой $f = 10$ МГц, причем $\rho = 22$ град/мм, $p_{11}=0,12$; $p_{12}=0,1$; $p_{21}=0,09$; $p_{44}=0,01$; $d \approx 0,8$ мкм.

На рис. 1. представлена зависимость относительной интенсивности дифрагированного света (первый брэгговский резонанс) от длины l области АО взаимодействия. Из рисунка следует, что «включение» гиротропии приводит к осциллирующей зависимости η_1 от l . Данная особенность АО взаимодействия объясняется значительной вращательной способностью кристалла $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$. Для негиротропного кристалла ($\rho=0$) из выражения (4) следует известное соотношение для относительной интенсивности (дифракционной эффективности) дифрагированного света $\eta_m = \text{th}^2(\alpha_m l)$ [11].

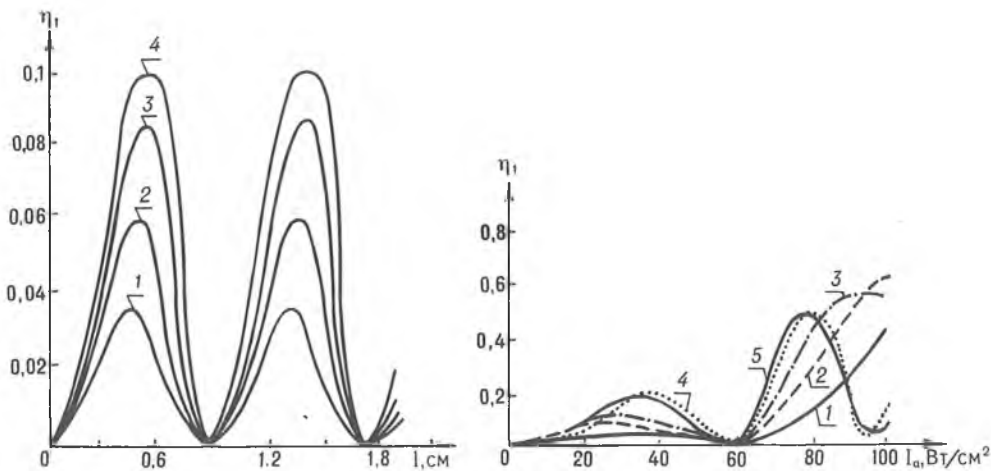


Рис. 1. Зависимость эффективности дифракции η_1 от длины АО взаимодействия l при различных интенсивностях УЗ волны I_d :
 $l - 6, 2 - 10, 3 - 14, 4 - 18$ (Вт/см²)

Рис. 2. Зависимость эффективности дифракции η_1 от интенсивности ультразвуковой волны I_d при различных длинах АО взаимодействия l :
 $l - 1, 2 - 2, 3 - 3, 4 - 4, 5 - 5$ (см)

Зависимость эффективности дифракции η_1 от интенсивности УЗ волны I_d при различных длинах АО взаимодействия l для гиротропной СР из кристалла $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ представлена на рис. 2. Из рисунка следует, что при $\rho \neq 0$ наблюдается значительное изменение формы кривой $\eta_1 = \eta_1(I_d)$ по сравнению со случаем негиротропного диэлектрика [7].

1. Рытов С. М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. В. 5. С. 605.
2. Вакуленко А. В., Чернозатонский Л. А. // ФТТ. 1988. Т. 30. В. 6. С. 1641.
3. Grimsditch M., Nizzoli F. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. № 8. P. 5891.
4. Рытов С. М. // Акуст. журн. 1956. Т. 2. С. 71.
5. Блистанов А. А., Данилов А. А., Родионов Д. А. // Квант. электрон. 1986. Т. 13. № 12. С. 2536.
6. Чернозатонский Л. А. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 10. С. 3142.
7. Яри в А. Введение в оптическую электронику. М., 1983.
8. Фёдоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1975.
9. Кулак Г. В., Редько В. П. // V Всесоюзная конференция по волоконно-оптическим системам передачи. М., 1988. Т. 5. С. 95.
10. Акустические кристаллы: Справ./ Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др./ Под ред. М. Шаскольской. М., 1986.
11. Oliveira J. E., Jen C. K. // Appl. Opt. 1990. V. 29. № 6. P. 836.

Поступила в редакцию 25.04.95.

О МЕХАНИЗМАХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ - ФЕРРИТА

The article presents the results of measuring the frequency dependence of dielectric permeability and loss-angle tangent for $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ in the range of 50–300 MHz under room temperature and in liquid nitrogen.

Несмотря на значительное число работ, посвященных изучению частотных зависимостей компонент ϵ' и ϵ'' комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon''$ оксидных ферритмагнетиков со структурой шпинели, выделение основных механизмов поляризации и соответствующих им величин вкладов в измеряемую ϵ' представляет актуальную физическую задачу. В данной работе для ее решения на примере никель-цинковой шпинели $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ использован метод определения диэлектрических функций $\epsilon'(\omega)$ и $\epsilon''(\omega)$ при существенно разных температурах — комнатной и температуре кипения жидкого азота (77 К). Ожидалось, что охлаждение шпинели до 77 К приведет к «вымораживанию» релаксационных составляющих ϵ' , связанных с миграцией и перескоками носителей в решетке, и останутся только упругие смещения электронов и ионов.

Исследование диэлектрических характеристик проводилось на цилиндрическом поликристаллическом образце диаметром 19,88 мм и высотой 3,40 мм в ячейке с прижимными электродами. В диапазоне от 50 Гц до 500 кГц модуль полного сопротивления Z и фазовый угол ϕ измерялись на импедансметре ВМ-507. При этом

$$\epsilon' = \frac{1}{\omega Z C_0} \sin \phi, \quad \epsilon'' = \frac{1}{\omega Z C_0} \cos \phi, \quad (1)$$

где C_0 — геометрическая емкость измерительной ячейки. В интервале частот от $5 \cdot 10^5$ Гц до $3 \cdot 10^7$ Гц значения емкости образца C_x и его добротности Q_x получали с помощью Q -метра ВМ-560. Здесь

$$\epsilon' = \frac{C_x}{C_0} = \frac{C_1 - C_2}{C_0}, \quad \epsilon'' = \epsilon' \frac{C_2 Q_x}{C_x Q_1 Q_2} = \epsilon' \frac{C_2 (Q_1 - Q_2)}{(C_1 - C_2) Q_1 Q_2}. \quad (2)$$

В диапазоне от $3 \cdot 10^7$ Гц до $3 \cdot 10^8$ Гц определение ϵ' осуществляли на Q -метре ВМ-409 Е со стандартной измерительной ячейкой, позволяющей производить исследование с заданной величиной воздушного зазора d_m между образцом и электродом. При этом

$$\epsilon' = \frac{d_0 \gamma}{D_0^2 - d_m \gamma}, \quad \gamma = \frac{D^2}{d} - \frac{D^2 - D_0^2}{d_0 + d_m}, \quad (3)$$

где D_0 — диаметр образца, D — диаметр электрода измерительного конденсатора, d — величина зазора между электродами при резонансе, d_0 — толщина образца.

При комнатной температуре диэлектрические потери образца велики, поэтому он изолировался от электродов с помощью тефлоновой пленки толщиной 10 мкм. Емкость образца при этом определяли по формуле последовательного соединения. Измеренная емкость корректировалась с учетом емкости подводящих проводников и краевой емкости, а также в высокочастотном пределе с учетом индуктивности L подводящих проводников $C = C_{\text{изм.}} / (1 + \omega^2 L C_{\text{изм.}})$. При обработке данных исследования при 77 К учитывалось, что они проводились в среде жидкого азота ($\epsilon = 1,431$).

Частотные зависимости ϵ' и $\operatorname{tg} \delta = \epsilon'' / \epsilon'$ представлены на рис. 1. Результаты, полученные при комнатной температуре, дают релаксационный спектр $\epsilon'(\omega)$ с набором времен релаксации, группирующихся около наиболее характерного значения $\tau = 2,2 \cdot 10^{-8}$ с. Для его описания можно применить формулу дебаевского типа [1]:

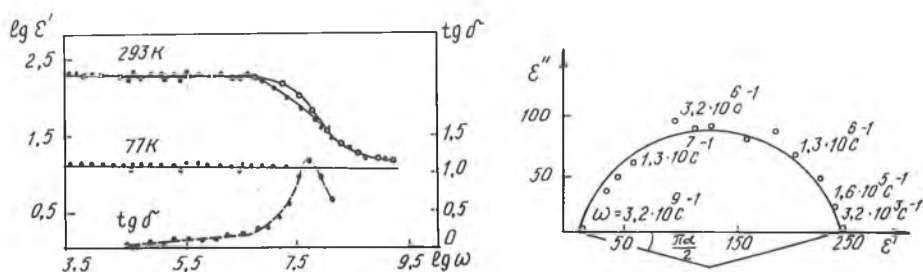


Рис. 1. Частотная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' и тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg} \delta$ $\text{Ni}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (точки — эксперимент, кружки — расчет по Дебаю)

Рис. 2. Диаграмма Коула—Коула для компонент ϵ' , ϵ'' комплексной диэлектрической проницаемости $\text{Ni}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4$, измеренных при комнатной температуре

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_{\infty} + (\epsilon_s - \epsilon_{\infty}) \frac{1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}, \quad (4)$$

где статическая проницаемость $\epsilon_s = 250$, высокочастотный предел $\epsilon \equiv \epsilon_{\infty} = 14$. Параметр α , определенный по диаграмме Коула—Коула (рис. 2), равен 0,14. При этих параметрах дебаевский спектр хорошо согласуется с экспериментальным (см. рис. 1). Незначительное различие модельной и экспериментальной зависимостей $\epsilon'(\omega)$ в диапазоне частот $(1,3 \cdot 10^7 - 3,2 \cdot 10^8) \text{ с}^{-1}$, по-видимому, можно объяснить тем, что используемая для оценки величины α диаграмма Коула—Коула не учитывает потерь, вызванных наличием сквозной проводимости. Слабая зависимость ϵ' от частоты и абсолютная ее величина (16—14) при 77 К позволяют предположить, что в данном соединении в радиочастотном диапазоне имеются только упругие электронная и ионная поляризации. Резонансные частоты этих механизмов поляризации лежат в оптической области спектра ($\omega \approx (10^{14} - 10^{16}) \text{ с}^{-1}$), так что при измерении на радиочастотах ($\omega \ll \omega_0$) дисперсия ϵ' отсутствует.

Высокочастотный предел $\epsilon_{\infty} = 14$ может быть интерпретирован как сумма электронной и ионной проницаемостей исследуемой шпинели. Согласно современной теории поляризации ионных кристаллов [2, 3], сумма статических пределов электронной и ионной проницаемостей может быть выражена следующим образом:

$$\epsilon_{\text{эл.}} + \epsilon_{\text{ион.}} = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} \sum_i N_i \alpha_i}{1 - \frac{4\pi}{3} \sum_i N_i \alpha_i} + \pi(q^*)^2 \left(\frac{\epsilon_{\text{эл.}}^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{N_A^2 \rho}{\omega_0^2 \bar{M}_1 M_2}. \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) представляет собой составляющую диэлектрической проницаемости, обусловленную электронной поляризуемостью α_i анионов и катионов. Поляризуемость атомных остовов катионов Ni^{2+} , Zn^{2+} , Fe^{3+} и атома О определяли по Кирквуду:

$$\alpha = \frac{4}{9Za_0} \left(\sum_k \langle r_k^2 \rangle \right)^2. \quad (6)$$

Величины $\langle r_k^2 \rangle$ взяты из таблиц Бандт и Тржасковской [4] для Zn^{2+} , O, а для Fe^{3+} и Ni^{2+} они приняты как для Mn^{2+} из того же источника; Z — атомный номер элемента, a_0 — боровский радиус. Величины поляризуемостей ионов Ni^{2+} , Zn^{2+} , Fe^{3+} и атома O равны соответственно (0,55; 0,5; 0,73; 0,96) · 10⁻²⁴ см³. Поляризуемость валентных электронов ионов O^{2-} вычисляли на основании количества магнитных связей на катион ($m = 7,8$) и величины поляризуемости на одну связь ($\alpha_{m=1} = 0,2 \cdot 10^{-24}$ см³), определенных в работе [5]. Тогда величина $\alpha_{O^{2-}} = 2,52 \cdot 10^{-24}$ см³.

N_i — количество ионов данного типа. Второе слагаемое в (5) — ионная диэлектрическая проницаемость по Сигети. Эффективный заряд q^* шпинели $Ni_{0,8}Zn_{0,2}Fe_2O_4$, определенный из соотношения $q^*(n) = 2 - 0,015n^2$ [5], где $n = 3,9$ — среднее на катион значение количества некомпенсированных по спину $3d$ -электронов, равен $1,78e$. Среднее значение квадрата частоты резонансных колебаний ионов $\bar{\omega}_0^2 = 1,13 \cdot 10^{28}$ с⁻² определено линейной интерполяцией $\bar{\omega}_0^2$ соединений $NiFe_2O_4$ и $ZnFe_2O_4$ [6]; $\bar{M}_1$ — средняя мас-са катионов, M_2 — масса аниона, N_A — число Авогадро, $\rho = 4,68$ г/см³ — плотность кристалла. При указанных значениях величин, входящих в (5), получили $\epsilon_{эл} = 7,97$, $\epsilon_{ион} = 5,89$. Таким образом, сумма электронной и ионной проницаемостей $\epsilon_{эл} + \epsilon_{ион} = 13,86$ хорошо согласуется с экспериментальным значением высокочастотного предела $\epsilon'(\omega)$.

1. Богородицкий Н. П., Волокобинский Ю. М., Воробьев А. А., Тареев Б. М. Теория диэлектриков. М.; Л., 1965.

2. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1978.

3. Крупичка С. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов. М., 1976. Т. 2.

4. Бандт И. М., Тржасковская М. Б. Таблицы собственных значений электронов, плотностей вблизи нуля и средних значений в самосогласованных полях атомов и ионов $2 \leq Z \leq 52$. Л., 1974.

5. Данилькевич М. И. // Автореф. дис. ...д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1991.

6. Waldron R. D. // Phys. Rev. 1955. V. 99. P. 1727.

Поступила в редакцию 06.03.95.

УДК 621.91:621.039

В. И. БОЛТУШКИН, В. П. ГОЛЫЦЕВ,
М. В. ГОЛЫЦЕВ, В. В. ЧАЕВСКИЙ

КОРРЕЛЯЦИЯ ПАРАМЕТРА РЕШЕТКИ И СОСТАВА В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ ТИПА НИТРИДОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

The influence of metallic component concentration on the crystal lattice parameter of triple nitrides Ti—Mo—N, Ti—Zr—N, Ti—Cr—N and Zr—Cr—N was studied. It was established that the crystal lattice parameter of these systems changer in accordance with Vegard's law.

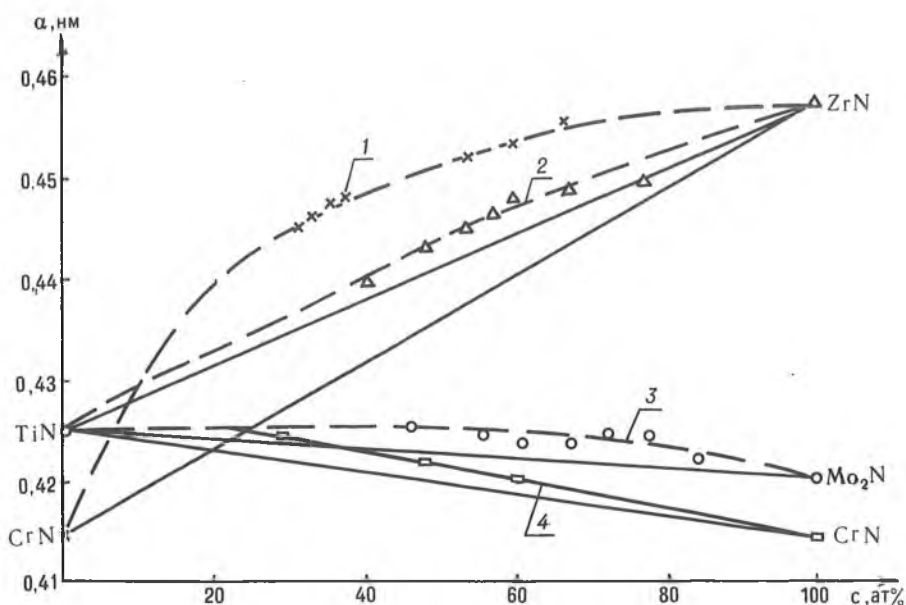
В последнее время с целью модификации структуры и свойств поверхности твердых тел получили развитие ядерно-физические методы, и в частности ионно-плазменные способы формирования тонкопленочных слоев химических соединений типа нитридов, боридов и т. п., обладающих высокими износ- и коррозионной стойкостью и твердостью [1, 2]. Ранее было показано, что нанесение на поверхность покрытий в виде двойных систем, например Ti—N, Zr—N, имеющих кубическую кристал-

лическую решетку типа NaCl, приводит к заметному упрочению поверхности [3]. Естественно предположить, что усложнение состава соединений при сохранении исходной структуры могло бы в еще большей степени повысить уровень их физико-механических свойств.

Параметр решетки исследуемых нитридов

Нитрид	Значение параметра решетки, нм		$\frac{a_1 - a_3}{a_3}, \%$
	теоретическое, a_T	экспериментальное, a_3	
TiN	0,4340	0,4249	2,1
ZrN	0,4600	0,4537	1,4
Mo ₂ N	0,4180	0,4168	0,3
CrN	0,4120	0,4148	0,7

Целью настоящей работы явилось изучение стабильности кристаллической структуры, корреляции параметров решетки, состава тройных нитридов переходных металлов IV и VI групп и их соответствие закону Вегарда. Многокомпонентные покрытия получали осаждением ионов Ti, Zr, Cr, Mo из плазмы электродугового разряда в среде азота [2, 3]. Кристаллическую структуру и параметр решетки определяли рентгеновским методом, при этом съемку дифракционных линий вели в режиме шагового движения гониометра, а регистрацию — в режиме постоянной времени.



Параметр кристаллической решетки нитридов в зависимости от концентрации третьего компонента (— — расчет, - - - - эксперимент):
1 — система CrN—ZrN, 2 — TiN—ZrN, 3 — TiN—Mo₂N, 4 — TiN—CrN

Используя представления о кристаллической решетке как о плотной упаковке, где атомы представлены в виде шаров с определенным радиусом, на первом этапе были выполнены расчеты параметров решеток двойных (TiN, ZrN, CrN, Mo₂N) и тройных (Ti—Mo—N, Zr—Mo—N,

Ti—Zr—N, Ti—Cr—N, Zr—Cr—N) нитридных систем, результаты которых представлены в таблице и на рисунке. Как видно из таблицы, расчетные оценки параметров кристаллических решеток двойных нитридов находятся в хорошем согласии с экспериментом. Расчетные значения параметров решеток тройных нитридных систем в зависимости от концентрации металлического компонента в них, как следует из рисунка, характеризуются линейным законом. Это обстоятельство, согласно правилу Вегарда, однозначно указывает на формирование тройных систем нитридов со структурой твердых растворов.

Анализ рентгеновских данных, полученных от образцов тройных нитридов с различной концентрацией одного из металлических компонентов, показал, что, во-первых, на дифрактограммах присутствуют только линии, характерные ГЦК-решетке, т. е. решетке типа NaCl соответствующих двойных нитридов TiN, ZrN, Mo₂N и CrN. И, во-вторых, параметр тройных нитридов, как видно из рисунка, монотонно изменяется по мере изменения концентрации в них металлического компонента. Одновременно с этим следует заметить, что изменение параметра решетки тройных нитридов от концентрации подчиняется закону Вегарда с отклонением в положительную сторону для всех рассмотренных нами нитридов. Принимая во внимание тот факт, что двойные нитриды TiN, ZrN, Mo₂N и CrN существуют в довольно широком интервале концентраций компонентов, положительное отклонение от закона Вегарда может быть связано со скоплением атомов переходных металлов, отклонением химического соединения от стехиометрии, но с сохранением при этом фазовой стабильности.

1. Гольцев В. П., Гоев А. И., Карпенко Г. Д. и др. Опыт научно-исследовательских организаций, предприятий и строок по антикоррозионной защите материалов: Тез. докл. конф. Гродно, 1985. С. 25.

2. Киселевский Л. И., Гольцев В. П., Чаевский В. В. и др. Физические основы синтеза сложных по составу нитридных и карбидных покрытий методом совмещения плазменных потоков // Структурно-морфологические основы модификации материалов методами нетрадицион. технологий: Тез. докл. I Всесоюз. семинара. Обнинск, 1991, С. 93.

3. Киселевский Л. И., Гольцев М. В., Ходасевич В. В. // Ионно-лучевая модификация материалов. Черногловка, 1987. С. 55.

Поступила в редакцию 04.09.95.

УДК 621.315.592

О. П. ЕРМОЛАЕВ

ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДА ДИЭЛЕКТРИК-МЕТАЛЛ В ГЕРМАНИИ, «ЛЕГИРОВАННОМ» РАДИАЦИОННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

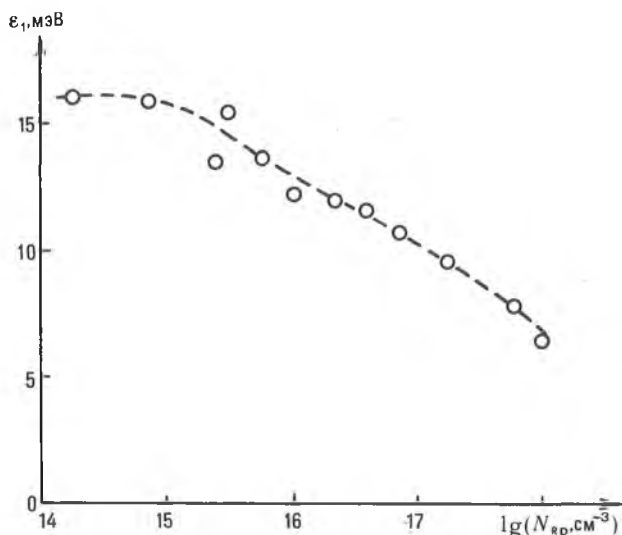
The dielectric-metal transition in germanium disordered by large doses of the fast reactor neutrons has been studied.

Проблема перехода диэлектрик-металл (ПДМ) занимает особое место в физике неупорядоченных систем. Обычно исследования ПДМ проводятся на полупроводниковых кристаллах, легированных химическими примесями.

В настоящем сообщении рассматриваются особенности ПДМ в кристаллическом германии, «легированном» радиационными дефектами (РД) с мелкими уровнями E_v+16 мэВ, свойства которых были изучены ранее [1].

Из анализа низкотемпературных (4,2—300 К) зависимостей удельного сопротивления образцов чистого (нелегированного) германия, облучен-

ного различными дозами ($\Phi=10^{15} \div 10^{19} \text{ см}^{-2}$) быстрых реакторных нейтронов, определялись значения энергии активации (ϵ_1) мелких уровней радиационных дефектов.



Зависимость энергии активации ϵ_1 от концентрации радиационных дефектов с мелкими уровнями (N_{RD})

На рисунке показана зависимость энергии активации ϵ_1 от концентрации РД (N_{RD}), которая определялась из температурных зависимостей коэффициента Холла. Видно, что величина ϵ_1 монотонно уменьшается с увеличением N_{RD} и при $N_{RD} \cong 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ достигает значения $\approx 6 \text{ мэВ}$. В работе [2] нами было показано, что для образцов с $N_{RD} \cong 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ проводимость при низких температурах уже не носила активационного характера, а имела слабую степенную зависимость от температуры, описываемую выражением $\sigma(T) = \sigma(0) + AT^m$, $m \cong 0,12$; $A \cong 7$; $\sigma(0) \cong 6,3$. Таким образом, при такой концентрации РД происходит ПДМ, т. е. эта концентрация является критической ПДМ в германии с РД (N_{RD}^C). Тот факт, что энергия активации ϵ_1 не равна нулю при $N_{RD} = N_{RD}^C$, свиде-

тельствует о том, что щель между зоной дефектов и валентной зоной, определяющая величину ϵ_1 , не схлопывается вблизи критической точки ПДМ. Следовательно, ПДМ происходит внутри зоны дефектов, а не при ее слиянии с валентной зоной.

Для выяснения характера ПДМ в германии с РД нами была сделана попытка применения скейлингового подхода к ПДМ. Согласно [3], величина энергии активации прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (T_0) должна определяться как $T_0 \sim \left| 1 - N_{RD} / N_{RD}^C \right|^\nu$, где ν — критический индекс. Анализ экспериментальных данных, полученных нами в [2], показал, что для германия с РД $\nu \approx 4,5$, что более чем в два раза превышает теоретическое значение [3].

В [2] нами была экспериментально определена величина минимальной металлической проводимости (σ_{min}) германия с РД, равная $\cong 9 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$, что удовлетворительно согласуется с величиной σ_{min} , рассчитанной согласно теории Мотта [4]. Полученные экспериментально значения $\sigma(0)$ также разумно согласуются с σ_{min} .

Отмеченные особенности позволяют считать, что ПДМ в германии с мелкими уровнями радиационных дефектов имеет достаточно резкий ха-

рактер и, по-видимому, могут свидетельствовать о применимости моттовской концепции минимальной металлической проводимости.

1. Dobrego V. P., Ermolaev O. P., Tkachev V. D. // *Physica Status Solidi (a)*. 1977. V. 44. № 2. P. 435.
2. Ермолаев О. П. // *Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. 1995. № 1. С. 70.
3. Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V. // *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. № 10. С. 673.
4. Мотт Н. Ф. *Переходы металл-изолятор*. М., 1979.

Поступила в редакцию 20.04.95.

УДК 621.921.34:666.233

Л. О. МЕЛЕШКО

ГОМОГЕННОЕ ЗАРОДЫШЕОБРАЗОВАНИЕ АЛМАЗА В ОБЛАСТИ ЕГО МЕТАСТАБИЛЬНОСТИ

The radii of critical nuclei, their formation activities and the number of the atoms contained have been calculated for diamond and graphite at different gas phase oversaturations.

В связи с потребностями практики в последние десятилетия интенсивно ведется поиск метода получения эпитаксиальных пленок алмаза. К настоящему времени в решении этой задачи достигнуты существенные успехи: доказана возможность синтеза алмаза из углеродсодержащих молекул в области его метастабильности, получены неоднородные по толщине эпитаксиальные пленки площадью в несколько мм^2 на алмазных подложках. Однако современное приборостроение нуждается в однородных монокристаллических пленках алмаза значительно больших размеров (диаметром до 10 дюймов).

Многочисленные попытки исследователей различных стран мира решить эту проблему известным методом эпитаксиального наращивания, в основе которого лежит лишь свойство поверхностного слоя подложки оказывать ориентирующее действие на процесс формирования структуры пленки, не привели к желаемым результатам. Анализ причин неудач привел нас к убеждению в необходимости нахождения иного пути для достижения поставленной цели. Результатом поиска явилась разработка новой концепции, в основу которой положено свойство вещества формировать различные структуры в зависимости от условий, определяющих процесс фазового превращения. В соответствии с этой концепцией, прежде чем начинать наращивание эпитаксиальной пленки необходимо определить параметры синтеза, при которых данное вещество формируется в виде совершенного монокристалла. Только после этого можно подбирать подложку с учетом ее влияния на кристаллизующееся вещество. Соблюдение такой последовательности при наращивании эпитаксиальной пленки на собственном монокристалле будет способствовать формированию однородной монокристаллической пленки по всей ее толщине. В случае инородной подложки у границы раздела будет образовываться в большей или меньшей степени деформированный слой, переходящий в однородный монокристалл по мере увеличения толщины пленки. При этом после удаления (например, стравливания) подложки может быть получена основа для последующего наращивания однородной монокристаллической пленки любой толщины.

Практическое решение данной проблемы в свете новой разработанной нами концепции требует исключительного внимания к теоретическим исследованиям, ведущим к познанию самого явления эпитаксии: механизма зарождения и формирования тонких пленок, образования в них дефектов, роли подложки. Одной из важнейших проблем синтеза является стадия зародышеобразования, которой определяются структура и свой-

ство материала. Этой стадии посвящается настоящая работа. В ней приводятся результаты выполненных нами расчетов по гомогенному образованию зародышей алмаза и графита при различных пересыщениях газовой фазы.

Согласно классической теории фазовых превращений, образование новой фазы (B) в объеме старой (A) начинается с возникновения зародышей, которые после достижения критических размеров способны к дальнейшему росту. Если W атомов фазы A образовало зародыш фазы B , тогда термодинамический потенциал Z системы изменится на величину ΔZ [1]:

$$\Delta Z = n(\mu_B - \mu_A) + \alpha n^{2/3}, \tag{1}$$

где n — число частиц зародыша новой фазы; μ_B, μ_A — химические потенциалы фазы B и A соответственно; $n^{2/3}$ — число, пропорциональное поверхности зародыша; α — величина, характеризующая поверхностный потенциал между фазами A и B .

Т а б л и ц а 1

$\ln \frac{p}{p_0}$	Алмаз		
	$r_k \cdot 10^{10} \text{ м}$	$A_k \cdot 10^{17} \text{ Дж}$	$n_k \text{ атомов}$
0,0953101	250,663	973,807	11632200
0,1823215	131,036	266,118	1661750
0,3364722	71,0037	78,1362	264383
0,6931471	34,4671	18,4119	30242
1,0986122	21,7463	7,32929	7595
1,6094379	14,8441	3,41508	2416
2,302585	10,3756	1,66876	825
2,9957322	7,97494	0,985701	375
3,912023	6,10701	0,578026	168
6,9077552	3,45854	0,185385	30

Наиболее вероятной формой первичного зародыша является сфера, поскольку из всех возможных форм для данного объема она обладает наименьшей свободной энергией. В этом случае уравнение [1] примет вид:

$$\Delta Z = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{V_B} (\mu_B - \mu_A) + 4\pi r^2 \sigma, \tag{2}$$

где r — радиус зародыша новой фазы; V_B — объем, приходящийся на одну частицу; σ — поверхностное натяжение на границе между обеими фа-

зами. Первый член правой части уравнения [2] $\frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{V_B} (\mu_B - \mu_A)$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от соотношения μ_B и μ_A , второй $4\pi r^2 \sigma$ — только положительным. В термодинамически устойчивой фазе ($\mu_A < \mu_B$) зародыши новой фазы нежизнеспособны: они могут появляться, достигать некоторых размеров, а затем исчезать. Если же маточная фаза находится в метастабильном состоянии ($\mu_A > \mu_B$), тогда зародыши новой фазы после достижения критических размеров ($r=r_k$), соответствующих максимуму потенциала ΔZ , приобретают устойчивость и способны к дальнейшему росту. При $\mu_A < \mu_B$ зародыши

новой фазы образуют устойчивую «популяцию», характеризующуюся постоянством общего числа и распределением по размерам, которые определяются формулой Больцмана:

$$N_r = C \exp[-\Delta Z(r) / kT], \quad (3)$$

где N_r — число комплексов, состоящих из n простых частиц; C — коэффициент пропорциональности, k — постоянная Больцмана.

Т а б л и ц а 2

$\ln \frac{p}{p_0}$	Графит			A_k (графита)/ A_k (алмаза)
	$r_k \cdot 10^{10}$ м	$A_k \cdot 10^{17}$ Дж	n_k атомов	
0,0953101	331,034	1422,96	16997629	1,4612341
0,1823215	173,05	388,86	2428206	1,4612314
0,3364722	93,7697	114,176	386330	1,4612433
0,6931471	45,5183	26,9043	44190	1,4612451
1,0986122	28,7188	10,7098	11099	1,4612366
1,6094379	19,6036	4,99024	3530	1,4612366
2,302585	13,7023	2,43801	1200	1,460971
2,9957322	10,5319	1,44033	547	1,461224
3,912023	8,06511	0,84438	246	1,4607993
6,9077552	4,56746	0,270894	45	1,4612509

Радиус зародыша критических размеров (r_k) легко определить, находя максимум уравнения [2] относительно r :

$$r_k = \frac{2\sigma V_B}{\mu_A - \mu_B}. \quad (4)$$

Для случая, когда маточной фазой является газообразная, а новой — кристаллическая, разность химических потенциалов $\mu_A - \mu_B$ может быть выражена через параметры, характеризующие отклонение системы от положения равновесия, в виде [1]:

$$\mu_A - \mu_B \approx kT \ln \frac{p}{p_0}, \quad (5)$$

где p — давление пересыщенного пара; p_0 — равновесное давление пара. Подставляя выражение (5) в (4), получаем

$$r_k = \frac{2\sigma V_B}{kT \ln \frac{p}{p_0}}. \quad (6)$$

Решая совместно (6) и (2), находим выражение работы A_k образования зародыша критических размеров r_k в виде

$$A_k = \frac{4}{3} \pi r_k^2 \sigma. \quad (7)$$

Число молекул (атомов) n_k , содержащихся в зародыше радиуса r_k , определим из выражения

$$n_k = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho r_k^3}{m_c}, \quad (8)$$

где ρ — плотность зародыша; m_c — масса молекулы (атома).

В настоящей работе приводятся результаты расчетов r_k , A_k , n_k для поликристаллического алмаза и графита, выполненных нами по формулам

(6—8) при различных пересыщениях газовой фазы ($T=1273\text{K}$) (см. табл. 1, 2). Полученные данные показывают, что при малых пересыщениях радиусы критических зародышей, работы их образования и числа содержащихся в них атомов необычайно велики и, следовательно, вероятность возникновения новой фазы в данных условиях ничтожна, но она резко возрастает с увеличением пересыщения вследствие уменьшения A_k . Из сравнения отношений A_k (графита) / A_k (алмаза) следует, что для рассмотренного интервала пересыщений вероятность зарождения центров кристаллизации графита меньше, чем алмаза.

Это соотношение может еще увеличиться, если учесть лапласовское давление, возникающее внутри зародышей новой фазы, обуславливающее возможность перехода системы в область стабильного состояния алмаза.

1. Френкель Я. И. // Собр. избр. тр. М.; Л., 1959. Т. 3.

Поступила в редакцию 08.09.95.

УДК 621.382.049.772

А. П. НОВИКОВ, Е. А. ШИЛОВА,
Л. Д. БУЙКО, В. А. ЗАЙКОВ

ТЕРМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МЕТАЛЛ/а-С В УСЛОВИЯХ ВАКУУМНОГО ОТЖИГА

Thermal stability at the interface of vanadium/amorphous carbon (V/a-C) and tantalum/amorphous carbon (Ta/a-C) systems have been investigated by the methods of TEM, RBS, AES, and Raman spectroscopy. Thermal annealing of V/a-C, Ta/a-C thin-film structures has been carried out in a vacuum furnace at temperatures ranged from 100 to 1000 C.

The conducted investigations have revealed that 400 C and 700 C are the threshold temperatures at which diffusion of carbon atoms to vanadium and tantalum films, respectively, begins to proceed and inclusions of carbide phases are formed.

Regularities of structural changes and reactions at the metal/a-C interface are discussed for a group of refractory metals.

При создании любого полупроводникового прибора формирование омических контактов является одним из важнейших технологических процессов, поскольку именно качество контакта определяет характеристики и надежность работы всего устройства.

Установлено, что в процессе термического отжига в пленке металла наблюдается образование соответствующих карбидов. Показана возможность формирования удовлетворительных омических контактов к полупроводниковым алмазам в процессе отжига на основе использования тонких пленок карбидообразующих металлов.

В настоящей работе исследуются структурные и фазовые изменения и реакции на границе раздела в системах ванадий/аморфный углерод (V/a-C) и тантал/аморфный углерод (Ta/a-C) при стационарном часовом вакуумном отжиге. Помимо самостоятельного интереса, данная система может рассматриваться в качестве модельной для прогнозирования свойств границы раздела Та/алмаз.

Материал и методика

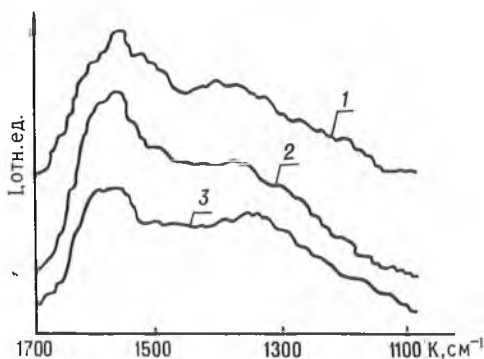
Углеродные и металлические пленки наносились с помощью магнетронного распылительного устройства, работающего на постоянном токе, на кремниевые пластины диаметром 100 мм. Время напыления составляло 90 мин для углерода и 2 мин для металлов. Полученные тонкопленочные системы Ta/a-C/Si и V/a-C/Si подвергались часовому отжигу в ваку-

умной печи с давлением остаточных газов 10^{-5} Па в интервале температур 100... 1000 °С с шагом 100 °С. Структура углеродных пленок исходных образцов и ее изменение в процессе термического отжига анализировались методом комбинационного рассеяния (КР) света с рабочей длиной волны лазерного излучения 488 нм. Изменения в структуре металлических пленок и протекание процессов фазообразования фиксировались ПЭМ методом при ускоряющем напряжении 200 кВ. Перераспределение атомов углерода и металлов в процессе термического отжига контролировалось путем построения Оже-электронных спектров атомов углерода и металла с последовательным удалением тонких слоев исследуемых образцов методом ионного распыления (Ar^+).

Результаты и их обсуждение

1. Структура углеродных пленок.

Экспериментально полученный спектр комбинационного рассеяния исходной углеродной пленки указывает на ее аморфную структуру (рисунк, кривая 2). Об этом свидетельствует наличие двух размытых пиков вблизи 1350 см^{-1} (обусловлен наличием sp^3 -связей) и 1550 см^{-1} (обусловлен sp^2 -связями). Аморфный характер исходных пленок углерода подтверждают и результаты электронно-микроскопических исследований: на картинах дифракции наблюдаются широкие диффузные кольца. Вакуумный отжиг пленок в интервале температур 100...1000 °С вызывает изменение интенсивности и полуширины пика 1550 см^{-1} . В области высоких температур происходит его удвоение с образованием дополнительного пика вблизи 1585 см^{-1} (см. рисунок). Указанная структура пленок известна под названием «bridge graphite» или «diamit» [1, 2].



Спектры комбинационного рассеяния углеродных пленок:

1 — до отжига; 2 — $T_{отж}=400\text{ °С}$; 3 — $T_{отж}=800\text{ °С}$

2. Структура металлических пленок. Исходные пленки тантала и ванадия, как показал анализ их микроструктуры, имеют мелкодисперсную поликристаллическую структуру. Увеличение температуры отжига до 300—400 °С сопровождается ростом дисперсности этих пленок. Изменение среднего размера зерен может быть обусловлено частичной релаксацией напряжений, существовавших в металлической пленке до термического отжига, либо началом протекания процессов нуклеации из-за присутствия в ней некоторого количества атомов углерода.

Дальнейшее повышение температуры отжига приводит к снижению дисперсности металлических пленок. При достижении температуры 1000 °С пленка ванадия полностью прореагирует с углеродом, образовав карбидную фазу. При этих же условиях тантал лишь частично вступает в реакцию с углеродом, а в непрореагировавшей части пленки металла зафиксированы лишь включения карбидной фазы Ta_2C .

3. Диффузия и фазообразование в системе Me/a-C. Результаты анализа данных ПЭМ и Оже-электронной микроскопии дали возможность выделить граничные температуры, переход через которые приводит к изменению фазового состава и структурных свойств в системах Ta/a-C и V/a-C (таблица).

Характеристика систем Me/a-C

Показатели	V	Ta
Температура начала диффузии атомов углерода в пленку металла, С	400	800
Температура завершения карбидообразования по объему пленки металла, С	1000	—
Средняя толщина пленки металла, нм	120	150
Образующаяся фаза:	VC	Ta ₂ C
тип решетки	гцк	гексагональная
параметры решетки, нм	a=0,416	a=0,310; c=0,494

По результатам выполненных исследований установлены следующие особенности процесса межфазного взаимодействия на границе Me/a-C:

— каждая система имеет пороговую температуру начала процесса диффузии атомов углерода в пленку металла с образованием включений карбидной фазы. Причем эта температура возрастает в группе с увеличением порядкового номера элемента;

— возрастание температуры отжига сверх этой граничной температуры сопровождается нарастанием процессов диффузии атомов углерода от границы Me/a-C в направлении к поверхности металлической пленки и характеризуется образованием прослойки карбидной фазы;

— после часового отжига при температуре 1000 °С для системы V/a-C произошло полное превращение металлической пленки ванадия в монокарбид ванадия, а для системы Ta/a-C процесс карбидообразования по объему пленки тантала не завершен.

Поскольку исследованные системы обладают высокой термической стабильностью, то существует реальная возможность использования ванадия и тантала для создания омических контактов с алмазом и алмазоподобными пленками.

1. Huong P. V., Verma A. L., Chaminade J. P., Nganga L. and Erison J. C. // Mater. Sci. Eng. V. B5. 1990. P. 255.

2. Huong P. V. // Diamond Relat. Mater. V. 1. 1991. P. 33.

Поступила в редакцию 08.09.95.

УДК 621.382.311.33:546

А. Д. АНДРЕЕВ, А. М. БЕЛЬСКИЙ, А. А. ВАЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ ЛЕГИРОВАНИЯ НА НАСЫЩЕНИЕ ТОКА В n-КАНАЛЬНОМ МОП-ПТ

Saturation currents in n-channel MOS FET were measured. It is shown that the saturation drain-source voltage decreases with increasing of dopant level. This voltage is smaller than the effective gate voltage. The explanation of the current saturation can be based on drift velocity saturation.

В высоколегированных МОП-структурах концентрацию примесных атомов на границе раздела кремния и диоксида кремния определяют путем измерения вольтамперных характеристик (ВАХ) полевого транзистора с изолированным затвором [1—3]. В таких приборах переход от резистивного участка зависимости тока от напряжения на стоке к насыщению осуществляется при напряжениях на стоке, значительно меньших разности напряжений затвора и порогового. Напряжение насыщения используется для расчета электропроводности [4], определения напряженности

электрического поля, энергии электронов в канале [5—7], оценки теплового дрейфа тока транзистора [8] и в ряде других задач, поэтому изучение этого параметра представляется необходимым.

С учетом переменного заряда обедненной области и наличия инверсионного слоя по всей длине канала ток стока при нулевых значениях напряжения истока и подложки равен [4]:

$$I_d = \mu \frac{W}{L} C_0 \left\{ \left(V_g - V_{FB} - 2\varphi_f - \frac{V_D}{2} \right) V_D - \frac{2}{3} \left(\frac{2\varepsilon_s e N_A}{C_0^2} \right)^{1/2} [(2\varphi_f + V_D)^{3/2} - (2\varphi_f)^{3/2}] \right\}, \quad (1)$$

где μ — подвижность электронов, W , L — ширина и длина канала соответственно, V_g , V_D , V_{FB} — напряжения на затворе и стоке, напряжение плоских зон, C_0 — емкость окисла, N_A — концентрация акцепторных атомов в подложке, $\varphi_f = (kT/e) \ln(N_A/n_i)$ — потенциал в нейтральном объеме кремния, n_i — собственная концентрация носителей заряда. Вводя для упрощения вычислений в (1) пороговое напряжение V_T подстановкой $V_{FB} = V_T - 2\varphi_f - \sqrt{4\varepsilon_s e N_A \varphi_f} / C_0^2$, после преобразования получим:

$$I_D = \mu \frac{W}{L} C_0 (V_g - V_T) V_D \left\{ \left[1 + \frac{\sqrt{4\varepsilon_s e N_A \varphi_f}}{C_0 (V_g - V_T)} - \frac{V_D}{2(V_g - V_T)} \right] - \frac{2\sqrt{2\varepsilon_s e N_A}}{V_D 3 C_0 (V_g - V_T)} [(2\varphi_f + V_D)^{3/2} - (2\varphi_f)^{3/2}] \right\}. \quad (2)$$

В высоколегированных подложках, $N_A \sim 10^{24} \text{ м}^{-3}$, $\varphi_f \sim 0,5 \text{ В}$, $V_D = V_{DS} \sim 1 \text{ В}$ — напряжение начала насыщения тока стока, на омическом участке ВАХ $V_D < 2\varphi_f$, множитель $(2\varphi_f + V_D)^{3/2} - (2\varphi_f)^{3/2} \cong 3V_D \sqrt{2\varphi_f} / 2$ и (2) можно представить в виде:

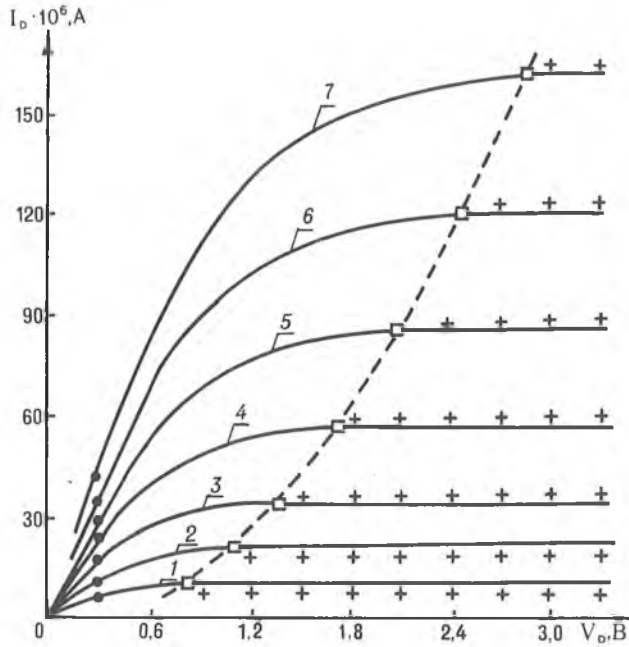
$$I_D \cong \mu \frac{W}{L} C_0 (V_g - V_T) V_D \left[1 - \frac{V_D}{2(V_g - V_T)} \right] \quad (3)$$

Для измерений применялись МОП-ПТ, изготовленные путем стандартных технологических операций, используемых в производстве кремниевых интегральных схем. Концентрация примесных атомов бора в подложке $N_A = 3 \cdot 10^{21}$, 10^{22} , 10^{23} , $7 \cdot 10^{23}$, $2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$, толщина окисла кремния под затвором $x_{0x} = 1000 \text{ \AA}$, $L = 4 \text{ мкм}$, $W = 12 \text{ мкм}$; для последних двух значений N_A $x_{0x} = 4000 \text{ \AA}$, $L = 10 \text{ мкм}$, $W = 30 \text{ мкм}$, чтобы предотвратить пробой структуры при высоких напряжениях V_g [1]; глубина перехода стока $\sim 0,8 \text{ мкм}$, затвор из алюминия. Величина N_A определялась по смещению ВАХ [1—3].

На рисунке даны измеренные зависимости (сплошные линии) I_D от V_D при различных V_g транзистора с $N_A = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Знаком (*) показаны значения I_D , полученные по формуле (3): $\mu = 6 \cdot 10^{-3}$, $C_0 = 10^{-4} \text{ ф/м}^2$, $W/L = 3$. Пунктирная кривая построена по формуле $I_{DS} = 20 \cdot 10^{-6} V_{DS}^2$, V_{DS} выбиралось в начале горизонтального участка насыщения тока. Знаком (+) показаны значения тока, рассчитанные по формуле $I_{DS} = 3 \cdot 10^{-8} (V_g - V_T)^2$. Обозначив $V_{DS}/(V_g - V_T) = a$ и подставляя в (3), запишем

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu C_0 \frac{W}{L} (V_g - V_T)^2 a(2 - a). \quad (4)$$

В соответствии с (4), при $N_A = 10^{21} + 10^{22} \text{ м}^{-3}$ $a \rightarrow 1$, в точке канала, ближайшей к стоку, не происходит инверсия типа электропроводности, и канал сокращается при увеличении V_D . Из сравнения расчетных и экспериментальных данных $a \approx 0,038$.



Зависимость тока стока от напряжения, приложенного к стоку: 1—7 соответствуют значения $V_g = 160, 150, 140, 130, 120, 110, 100 \text{ В}$; $V_T = 85 \text{ В}$; $N_A = 7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$

Зависимости $I_D = f(V_D)_{V_g}$ были получены для транзисторов с указанными ранее N_A , для которых $a = 0,97; 0,94; 0,65; 0,04; 0,025$ при V_g и V_T соответственно 5—3; 7—4,5; 40—25; 120—85; 145—130 В; $a \ll 1$ для высоких N_A , и расчет V_{DS} по известным формулам [4, 6, 10] дает завышенные результаты. С увеличением V_g до 160 В, $V_T = 85 \text{ В}$ поверхностная плотность неосновных носителей заряда $Q_n = C_0 (V_g - V_T) = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Кл/м}^2$. В этом случае не требуется учитывать вырождение при расчете тока [9].

Для приближенной оценки величины V_{DS} рассчитаны сопротивление участка обедненного слоя обратносмещенного перехода стока $d / \mu C_0 (V_g - V_T) W$ [11] в режиме, когда электроны движутся вдоль непрерывного проводящего пути от истока до стока с дрейфовой скоростью $v_d = \mu E$ [12], размер обедненного слоя р-области $d = [2\epsilon_s (V_1 + V_2) / e N_A]^{1/2}$, где $V_1 = (kT / e) \ln(N_A N_D / n_i^2)$ — встроенный потенциал, V_2 — падение напряжения на стоковом $n^+ - p$ переходе, и средняя напряженность электрического поля $E = [e N_A (V_1 + V_2) / 2\epsilon_s]^{1/2}$ [4]. В предельном случае насыщения дрейфовой скорости

$$v_d = v_{ds}, V_1 \gg V_2 = \gamma V_D, V_D \rightarrow V_{DS},$$

$$V_{DS} \cong \frac{I_{DS} V_1}{\gamma C_0 (V_g - V_T) W v_{ds}}, \quad (5)$$

где $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ — эмпирический коэффициент,

$$W = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}, V_1 = 1,2 \text{ В}, C_0 = 10^{-4} \text{ ф/м}^2, v_{ds} = 10^5 \text{ м/с}.$$

На рисунке знаком ($\square$) отмечены результаты расчета по формуле (5).

Полученные экспериментальные данные дают основание предполагать, что в МОП-ПТ с длиной канала ≥ 3 мкм при увеличении уровня легирования подложки переход к насыщению тока стока и уменьшение $V_{DS} < (V_g - V_T)$ может быть вызван в основном насыщением дрейфовой скорости в канале. Этот эффект может преобладать над подавлением инверсии типа электропроводности при перекрытии канала под действием стокового напряжения. При последующей оценке вклада каждого из указанных механизмов необходимо учитывать изменение подвижности электронов с учетом фононного и кулоновского рассеяния в канале с $N_A > 10^{23} \text{ м}^{-3}$ [13].

1. Андреев А. Д., Бельский А. М., Кулагин Ю. А., Савотин Ю. И. // Микроэлектроника. 1976. Вып. 5. С. 443.
2. Андреев А. Д., Бельский А. М., Савотин Ю. И. и др. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1978. № 1. С. 69.
3. Андреев А. Д., Борздов В. М., Дитковский В. М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 27.
4. Маллер Р., Кейминс Г. Элементы интегральных схем. М., 1989.
5. Hu C., Tam S. et al. // IEEE J. Solid-State Circ. 1985. V. 20. № 1. P. 295.
6. Aroga N., Sharma M. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1991. V. 38. № 6. P. 1392.
7. Андреев А. Д., Борздов В. М., Дитковский В. М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 27.
8. Андреев А. Д., Борздов В. М., Дитковский В. М. // Вестн. АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1994. № 3. С. 81.
9. Majkusiak B., Jakubowski A. et al. // IEEE Trans. Electron. Dev. 1987. V. 34. № 12. Pt. 1. P. 2560.
10. Hsu F., Chiu K. // IEEE Electron. Dev. Letters. 1984. V. 5. № 5. P. 148.
11. Россато Л. Физическая электроника и микроэлектроника. М., 1991.
12. Toh K., Ko P., Meyer R. // IEEE J. Solid-State Circ. 1988. V. 23. № 4. P. 950.
13. Huang C., Aroga N. // Solid-State Electron. 1994. V. 37. № 1. P. 97.

Поступила в редакцию 27.05.95.

Математика и информатика



УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Т. А. ШЕВИЛА

ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ В КЛАССАХ E

Piecewise analytic functions slowly increasing near the discontinuity line (functions of the class E) are studied. In particular, it is proved that the Cauchy type integral with continuous density is of the class E.

Классы E — это классы кусочно-аналитических функций, более общие, чем гельдеровские. Они не требуют фиксации метрики на римановой поверхности и являются конформно-инвариантными, а это существенно для задач сопряжения на римановой поверхности.

Определение. Будем говорить, что функция $\Phi(z)$ кусочно-мероморфная в области D , лежащей на римановой поверхности, с кусочно-гладкой линией разрывов $L \in D$, имеющая почти всюду на L левое и правое конечные угловые граничные значения, принадлежит классу E в точке $p_0 \in L$, если выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ p(z) \notin L}} z^\varepsilon \Phi[p(z)] = 0.$$

Здесь $p=p(z)$ — параметрический гомеоморфизм окрестности точки p_0 ; $p_0=p(0)$.

Принадлежность функции Φ классу E на множестве будем понимать как принадлежность ее классу E в каждой точке этого множества.

Теорема. Если Γ — простая гладкая замкнутая кривая, а функция $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная, то интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D,$$

принадлежит классу E.

Доказательство. Аналитичность функции $\Phi(z)$ на $D \setminus \Gamma$ и существование почти всюду на Γ конечных угловых предельных значений известно [1]. Докажем почти ограниченность функции $\Phi(z)$ в окрестностях точек, где не существует конечных угловых предельных значений. Пусть $t_0 \in \Gamma$ — такая точка. Для простоты рассуждений будем считать, что $t_0=0$, а положительное направление касательной к Γ в этой точке совпадает с положительным направлением вещественной оси.

Допустим сначала, что $z \rightarrow 0$ по нормали к вещественной оси, т. е. вдоль мнимой оси. Проведем окружность радиуса δ с центром в точке $z=0$. Пусть t_1 и t_2 — точки пересечения этой окружности с кривой Γ . Радиус будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с кривой Γ других точек пересечения, кроме t_1 и t_2 . Обозначим длину дуги $(0, t_1)$ через δ_1 , длину дуги $(0, t_2)$ — через δ_2 (рис. 1).

Разобьем интеграл (1) на два слагаемых: J_1 — по участку Γ_δ контура Γ , лежащему внутри круга, и J_2 — по остальной части $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$. Интеграл

$$J_2 = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

аналитичен в точке $z=0$, и, значит, ограничен. С учетом этого получим оценку

$$|\Phi(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \right| \leq \max_{\tau \in \Gamma_\delta} |\varphi(\tau)| \int_{\Gamma_\delta} \frac{|d\tau|}{|\tau - iy|} \sim \int_{\Gamma_\delta} \frac{d\tau}{|\tau - iy|} \quad \text{при } y \rightarrow 0, y > 0.$$

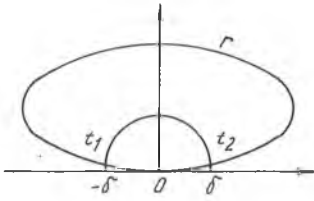


Рис. 1

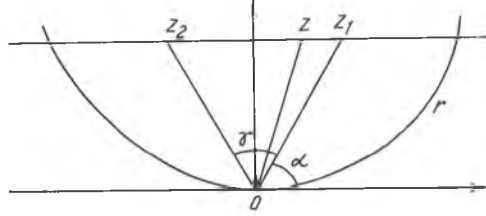


Рис. 2

Далее воспользуемся следующим свойством кривой Γ : для гладкой кривой $|d\tau| = d\sigma$, $|\tau'(\sigma)| = 1$, где σ — длина дуги кривой. В предположениях, указанных в начале доказательства, разложение функции $\tau(\sigma)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\sigma = 0$ будет иметь вид:

$$\tau = \tau(\sigma) = \sigma + \alpha(\sigma), \quad (2)$$

причем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\alpha(\sigma)}{\sigma} = 0. \quad (3)$$

Продолжим рассуждения, учитывая (2). Имеем

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{d\tau}{|\tau - iy|} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{|\tau(\sigma) - iy|} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{|\sigma + \alpha(\sigma) - iy|} \leq \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\|\sigma - iy - \alpha(\sigma)\|}.$$

Из равенства (3) вытекает, что для произвольного $\Theta \in (0, 1)$ существует настолько малое $\delta > 0$, что при $|\sigma| \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\alpha(\sigma)}{\sigma} \right| \leq \Theta, \text{ откуда } |\alpha(\sigma)| \leq \Theta|\sigma|.$$

Применяя эту оценку, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\delta} \frac{d\sigma}{|\tau - iy|} &\leq \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\|(\sigma) - iy - \Theta|\sigma|\|} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + y^2} - \Theta|\sigma|} = \\ &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{\sigma^2 + y^2} + \Theta|\sigma|}{(1 - \Theta^2)\sigma^2 + y^2} d\sigma \leq \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{\sigma^2 + 2|\sigma|y + y^2} + \Theta|\sigma|}{(1 - \Theta^2)\sigma^2 + y^2} d\sigma \leq \\ &\leq \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{|\sigma| + y + \Theta|\sigma|}{(1 - \Theta^2)\sigma^2 + y^2} d\sigma = \int_0^{\delta_2} \frac{(1 + \Theta)\sigma + y}{(1 - \Theta^2)\sigma^2 + y^2} d\sigma + \int_{-\delta_1}^0 \frac{-(1 + \Theta)\sigma + y}{(1 - \Theta^2)\sigma^2 + y^2} d\sigma = \\ &= \frac{1}{1 - \Theta} \int_0^{\delta_2} \frac{\sigma + \frac{y}{1 + \Theta}}{\sigma^2 + \frac{y^2}{1 - \Theta^2}} d\sigma + \frac{1}{1 - \Theta} \int_0^{\delta_1} \frac{\sigma + \frac{y}{1 + \Theta}}{\sigma^2 + \frac{y^2}{1 - \Theta^2}} d\sigma \sim \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \sigma^2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| \Bigg|_0^{\delta_2} + \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \sigma^2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| \Bigg|_0^{\delta_1} = \\
& = \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \delta_2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| - \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \frac{y^2}{1-\Theta^2} + \\
& + \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \delta_1 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| - \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \frac{y^2}{1-\Theta^2} \sim \\
& \sim -\frac{1}{1-\Theta} \ln y^2 = \frac{2}{1-\Theta} \ln \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$|\Phi(z)| = O\left(\frac{2}{1-\Theta} \ln \frac{1}{y}\right) \text{ при } y \rightarrow 0, y > 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $z \rightarrow 0$, оставаясь внутри угла $\alpha \leq \gamma \leq \pi - \alpha$ (рис. 2).

Через точку z проведем прямую, параллельно вещественной оси. Она пересечет стороны угла γ в точках z_1 и z_2 . Из треугольника $0z_1z_2$ видно, что

$$y \leq |z| \leq |z_1| = \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{|z|}. \quad (4)$$

Учитывая (4), из (3) находим, что если $z \rightarrow 0$, оставаясь внутри угла γ , то

$$|\Phi(z)| = O\left(\frac{2}{(1-\Theta)} \ln \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{|z|}\right) \text{ при } y \rightarrow 0, y > 0. \quad (5)$$

На основании последнего можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \Phi(z)(z - t_0)^\varepsilon = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если кривая (Γ) — гладкая замкнутая, а функция φ — непрерывная, то функция

$$\Phi(z) = \exp \left\{ \frac{\pm 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \right\} \quad (6)$$

принадлежит классу E.

1. Х в е д е л и д з е Б. В. // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР. Тбилиси, 1957. Т. 23.

Поступила в редакцию 16.02.95.

УДК 517.948.32:517.544

О. Б. ДОЛГОПОЛОВА

ПОСТРОЕНИЕ ВСЕХ ДВУЛИСТНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ ЗАМКНУТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

In this paper all smooth unlimited covers of Riemann surface which have two sheets are constructed.

Рассмотрим задачу построения всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода $g \geq 1$, реализованных

как правильный многоугольник с классическим отождествлением сторон. Имеется взаимно однозначное соответствие между неразветвленными накрытиями $S_1 \rightarrow S$ римановой поверхности S и полными множествами сопряженных подгрупп ее фундаментальной группы $\pi(S)$. При этом n -листному накрытию отвечает подгруппа индекса n .

Исследуем группу $\pi(S)$. Это группа с $2g$ образующими и одним соотношением $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, где $[a_i, b_i] = a_i \cdot b_i \cdot a_i^{-1} \cdot b_i^{-1}$. Рассмотрим подгруппы, образованные словами, в которых четна сумма всех степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$, где M и K подмножества $\{1, \dots, g\}$, такие что $M \cup K \neq \emptyset$. Это подгруппы индекса 2. Представителями классов смежности будут 1 и a_i , где $i \in M$, если $M \neq \emptyset$, или 1 и b_p , где $p \in K$. Все эти подгруппы нормальны. Используя [1], докажем, что других подгрупп индекса 2 у $\pi(S)$ нет.

Теорема 1. Все подгруппы индекса 2 фундаментальной группы римановой поверхности рода g нормальны и описываются следующим образом. Подгруппа образована словами, в которых четна сумма всех степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$, где M и K произвольные подмножества $\{1, \dots, g\}$, такие что $M \cup K \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольное транзитивное представление группы $\pi(S)$. Это гомоморфизм $\pi(S)$ в группу подстановок из двух элементов. Достаточно задать его на образующих. Каждому образующему надо поставить в соответствие подстановку из двух элементов, т. е. либо единич-

ную матрицу E , либо $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. При этом $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ должна со-

ответствовать единичная подстановка, но это будет выполняться при любом задании гомоморфизма на образующих. Представление группы $\pi(S)$ должно быть транзитивно, значит, хотя бы одному из образующих мы должны поставить в соответствие P .

Все подгруппы фундаментальной группы получаются как прообразы при таких гомоморфизмах подгруппы подстановок, оставляющей на месте 1. Подгруппа подстановок из двух элементов, оставляющая на месте 1, — это тривиальная подгруппа. Какие слова образуют ядро гомоморфизма? Если мы образующим $a_i, i \in M, b_j, j \in K$ поставили в соответствие подстановку P , а остальным образующим — единичную подстановку, то ядро состоит как раз из тех слов, в которых сумма степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$ четна. Теорема доказана.

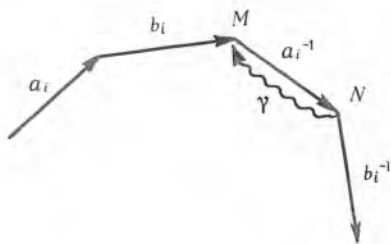
Так как все подгруппы индекса 2 нормальны, то любое двулистное безграничное неразветвленное накрытие порождает одну подгруппу фундаментальной группы.

Теорема 2. Все двулистные безграничные неразветвленные накрытия римановой поверхности получаются путем разрезания ее по неразбивающему циклу и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест.

Чтобы доказать это, нам достаточно указать такие неразбивающие циклы, что накрытия, получающиеся описанным выше способом, индуцируют все указанные нами подгруппы фундаментальной группы. Рассмотрим циклы $\sigma = a_1^{k_1} b_1^{p_1} a_2^{k_2} b_2^{p_2} \dots a_g^{k_g} b_g^{p_g}$, где $k_i, p_i \in \{0, 1\}$. Этих циклов достаточно, чтобы, разрезая по ним и склеивая крест-накрест два таких экземпляра римановой поверхности, получить все искомые накрытия.

Очевидно, что полученное таким образом накрытие является двулистным безграничным неразветвленным накрытием римановой поверхности. Чтобы найти подгруппу $\pi(S)$, которой оно соответствует, достаточно знать, какие из образующих принадлежат этой подгруппе. Допустим, что ей принадлежат образующие $a_i, i \in M, b_j, j \in K$. Тогда эта подгруппа образована словами, в которых сумма всех степеней $a_i, i \in \{1, \dots, g\} \setminus M, b_j, j \in \{1, \dots, g\} \setminus K$ четна. Проверим, принадлежит ли подгруппе образующий

a_i . Поскольку все подгруппы индекса 2 нормальны, то все кривые, лежащие над a_i , замкнуты или разомкнуты одновременно [2]. Причем замкнуты в том и только в том случае, когда a_i принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Итак, возьмем любую кривую над a_i и проверим является ли она замкнутой. Пусть $p_i = 1$, т. е. цикл σ включает в себя кривую b_i (рисунок). Тогда после разрезания по циклу σ и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест точки M и N (рис. 1) не «склеиваются». Это две разные точки, лежащие над отмеченной точкой римановой поверхности S . Кривая γ лежит над a_i (см. рисунок). Она не является замкнутой. Значит, a_i не принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Наоборот, пусть $p_i = 0$, т. е.



цикл σ не включает в себя кривую b_i . Тогда точки M и N отождествляются (они остаются «склеенными» после разрезания). Кривая γ лежит над a_i . Она замкнута. Значит, a_i принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Для b_j рассуждения аналогичны.

Итак, пусть подгруппа образована словами, в которых сумма всех степеней a_i , $i \in M$, b_j , $j \in K$ четна, где M и K — подмножества $\{1, \dots, g\}$. Возьмем цикл $\sigma = a_1^{k_1} b_1^{p_1} a_2^{k_2} b_2^{p_2} \dots a_g^{k_g} b_g^{p_g}$, где

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i \in K \\ 0, & \text{если } b_i \notin K \end{cases}, \quad p_j = \begin{cases} 1, & \text{если } a_j \in M \\ 0, & \text{если } a_j \notin M. \end{cases}$$

Накрытие, образованное разрезанием римановой поверхности по этому циклу и склеиванием двух таких экземпляров крест-накрест, соответствует выбранной подгруппе.

Итак, для любой подгруппы индекса 2 фундаментальной группы мы можем указать такой неразбивающий цикл, что накрытие, полученное с помощью описанной выше процедуры, соответствует данной подгруппе. Следовательно, все двулистные безграничные неразветвленные накрытия римановой поверхности получаются путем разрезания ее по неразбивающему циклу и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест. В процессе доказательства мы указали явный вид циклов, достаточных для получения всех накрытий.

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М., 1938. С. 229.

2. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. С. 99.

Поступила в редакцию 31.01.95.

УДК 517.512

Е. А. РОВБА

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОТРЕЗКЕ

Positive integral rational operators on segment $[-1; 1]$ have been constructed and the estimations of corresponding approximations for the functions $f \in C([-1, 1])$ have been obtained.

В 1956 г. М. И. Джрбашян [1] ввел рациональные и обобщающие ряды Фурье по тригонометрической системе $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Основываясь на представлении ядра Дирихле, полученном в этой работе, В. Н. Русак [2] построил рациональные операторы Фейера и Джексона в периодическом случае. Позже исследования в этом направлении были продолжены,

определены операторы Фейера, Валле — Пуссена и Джексона на всей вещественной оси (см., например, [3], с. 114). Эти операторы получили широкое применение в теории рациональных приближений (см. [3—5]).

На отрезке $[-1; 1]$ изучались аппроксимационные свойства рациональных функций типа Фурье [6]. В настоящей работе на данном отрезке построены рациональные операторы Фейера и Джексона. Заметим, что подобные операторы можно вводить с помощью замены переменной, примененной к операторам, заданным на всей вещественной оси (см. [3], с. 128). Предлагаемый нами способ их построения является конструктивно более простым.

1. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^n$ — произвольное множество чисел, $\alpha_0 = 0, |\alpha_k| < 1, k = \overline{1, n}$, причем если $\operatorname{Im} \alpha_k \neq 0$, то это множество содержит и число $\overline{\alpha_k}$.

Положим

$$\lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, \quad k = \overline{1, n};$$

$$\lambda_n(t; \theta) = \frac{1}{2} \int_0^t (1 + \lambda_n(u)) du, \quad t, \theta \in \mathbb{R}.$$

Для всякой непрерывной на отрезке $[-1; 1]$ функции f определим следующий оператор:

$$F_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) K_n(t; \theta) dt / \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t; \theta) dt, \quad (1)$$

где $K_n(t; \theta) = \sin^2 \lambda_n(t; \theta) / \sin^2 \frac{t - \theta}{2}$, $x = \cos \theta, x \in [-1; 1]$.

Лемма 1. Функция $F_n(x; f)$ является рациональной порядка не выше n , причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t; \theta) dt = 2\pi(I + \lambda_n(\theta)), \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1; 1]. \quad (2)$$

Доказательство. Исходя из леммы 6 работы [1], будем иметь:

$$K_n(t; \theta) = \left(\sqrt{\prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi}} - \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \sqrt{\prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k}} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(e^{i \frac{t - \theta}{2}} - e^{-i \frac{t - \theta}{2}} \right)^2 = \left(\xi^2 \frac{\omega(\xi)}{\omega(z)} - 2\xi z + z^2 \frac{\omega(z)}{\omega(\xi)} \right) / (\xi - z)^2, \quad (3)$$

где $z = e^{i\theta}$, $\xi = e^{it}$, $\omega(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} u}$.

Теперь применим тот же метод вычисления подобных интегралов, что содержится, например, в [3]. Будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t; \theta) dt = \frac{1}{i} \int_{|t|=1} \frac{1}{(\xi - z)^2} \left(\xi \frac{\omega(\xi)}{\omega(z)} - 2z + \frac{z^2}{\xi} \frac{\omega(z)}{\omega(\xi)} \right) d\xi =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega(z)} \lim_{|z| < 1, z \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{res}_{\xi=z} \frac{\xi \omega(\xi)}{(\xi - z)^2} = 2\pi(1 + \lambda_n(\theta)).$$

Учитывая приведенные на полюсы условия, нетрудно убедиться, что функция $\lambda_n(\theta)$ является четной относительно θ и рациональной порядка не выше n относительно переменной $x, x \in [-1; 1], x = \cos \theta$.

Нетрудно видеть также, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) K_n(t; -\theta) dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(-t; -\theta) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \frac{\sin^2 \lambda_n(-t; -\theta)}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \frac{\sin^2 \int_0^t (1 + \lambda_n(-u)) du}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) K_n(t; \theta) dt.$$

Отсюда и из (2) следует справедливость леммы 1.

Естественно назвать $F_n(x; f)$ рациональной функцией Фейера.

Теорема 1. Если функция $f \in MH^\alpha[-1; 1]$, то справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} & \text{а) } |f(x) - F_n(x; f)| < \\ & < 2(\pi + 1)M \left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{(1 - \alpha)(1 + \lambda_n(\arccos x))^\alpha} + \delta_n^{(\alpha)}(x) \right), \quad x \in [-1; 1], \alpha \in (0; 1), \end{aligned}$$

где

$$\delta_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - 2\alpha)(1 + \lambda_n(\theta))^{2\alpha}}, & \alpha \in (0; \frac{1}{2}); \\ \ln(1 + \lambda_n(\theta)) / (1 + \lambda_n(\theta)), & \alpha = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{(2\alpha - 1)(1 + \lambda_n(\theta))}, & \alpha \in (\frac{1}{2}; 1), x = \cos \theta; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \text{б) } |f(x) - F_n(x; f)| \leq 2(\pi + 3)M \left(1 + \sqrt{1 - x^2} \ln \lambda_n(\arccos x) \right) / \\ & / (1 + \lambda_n(\arccos x)), \alpha = 1, x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, $|f(x) - F_n(x; f)| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi(1 + \lambda_n(\theta))} \int_{|t - \theta| \leq \pi} f(\cos t) - f(\cos \theta) |K_n(t; \theta)| dt.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} & |f(\cos t) - f(\cos \theta)| \leq M |\cos t - \cos \theta|^\alpha \leq \\ & \leq 2M \left(\left| \sin \frac{t - \theta}{2} \right|^{2\alpha} + \left| \sin \frac{t - \theta}{2} \right|^\alpha \sin^\alpha \theta \right), \quad x = \cos \theta, \theta \in [0; \pi]. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно,

$$|f(x) - F_n(x; f)| \leq \frac{M}{\pi(1 + \lambda_n(\theta))} (J_1 + J_2 \sin^\alpha \theta), \quad (6)$$

где

$$J_1 = \int_{|t - \theta| \leq \pi} \sin^{2\alpha} \frac{|t - \theta|}{2} K_n(t; \theta) dt; \quad J_2 = \int_{|t - \theta| \leq \pi} \sin^\alpha \frac{|t - \theta|}{2} K_n(t; \theta) dt.$$

Теперь положим, что $E_\theta = \left\{ t : |t - \theta| \leq \frac{\pi}{1 + \lambda_n(\theta)} \right\}$. Через CE_θ обозначим дополнение E_θ до множества $\{t : |t - \theta| \leq \pi\}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 & \leq \left(\frac{\pi}{2(1 + \lambda_n(\theta))} \right)^{2\alpha} \int_{E_\theta} K_n(t; \theta) dt + \int_{CE_\theta} \sin^{-2(1 - \alpha)} \frac{|t - \theta|}{2} dt \leq \\ & \leq \left(\frac{\pi}{2(1 + \lambda_n(\theta))} \right)^{2\alpha} 2\pi(1 + \lambda_n(\theta)) + 2\pi^{2(1 - \alpha)} J_3, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } J_3 = \int_{\pi/(1 + \lambda_n(\theta))}^{\pi} u^{-2(1 - \alpha)} du.$$

Если $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $J_3 < \frac{1}{1-2\alpha} \left(\frac{1+\lambda_n(\theta)}{\pi}\right)^{1-2\alpha}$; если $\alpha = \frac{1}{2}$, то $J_3 = \ln(1+\lambda_n(\theta))$; наконец, если $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, то $J_3 \leq \frac{\pi^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$.

Учитывая полученные соотношения для J_3 , из (7) получим

$$\frac{1}{\pi(1+\lambda_n(\theta))} J_1 \leq \delta_n^{(\alpha)}(x), x \in [-1; 1] \text{ (см. (4)).}$$

Если $\alpha \in (0; 1)$, то

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \left(\frac{\pi}{2(1+\lambda_n(\theta))}\right)^\alpha \int_{E_\theta} K_n(t; \theta) dt + \int_{CE_\theta} \sin^{-2+\alpha} \frac{|t-\theta|}{2} dt < \\ &< \left(\frac{\pi}{2(1+\lambda_n(\theta))}\right)^2 2\pi(1+\lambda_n(\theta)) + 2\pi^{-2+\alpha} \int_{\pi/(1+\lambda_n(\theta))}^{\pi} u^{-2+\alpha} du < \\ &< (\pi+2)\pi(1+\lambda_n(\theta))^{1-\alpha} / (1-\alpha); \end{aligned}$$

если же $\alpha=1$, то $J_2 \leq (\pi+2)(1+\ln(1+\lambda_n(\theta)))$.

Подставляя полученные для интегралов J_1 и J_2 оценки в (6), получим утверждение теоремы 1.

2. При тех же предположениях относительно чисел $\alpha_k, k = \overline{0, n}$, для всякой функции $f \in C_{[-1; 1]}$ полагаем

$$G_{2n}(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) K_n^2(t; \theta) dt / \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt, \quad (8)$$

$x = \cos \theta, x \in [-1; 1]$ (см. также (1)).

Лемма 2. Функция $G_{2n}(x; f)$ является рациональной порядка не выше $2n$, причем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt &= \frac{2\pi}{3} \left[2\lambda_n^3(\theta) + 6\lambda_n^2(\theta) + 6\lambda_n(\theta) + 3 + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^n \left[\frac{3(1-|\alpha_k|^4)}{(1-2|\alpha_k|\cos(\theta-\theta_k)+|\alpha_k|^2)^2} - \frac{2((1-|\alpha_k|^2)^3)}{(1-2|\alpha_k|\cos(\theta-\theta_k)+|\alpha_k|^2)^3} \right] \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$\theta \in [0; \pi]$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (3). Будем иметь

$$\begin{aligned} K_n^2(t; \theta) &= \left(\xi^4 \left(\frac{\omega(\xi)}{\omega(z)} \right)^2 - 4\xi^3 z \frac{\omega(\xi)}{\omega(z)} + 3\xi^2 z^2 - 4\xi z^3 \frac{\omega(z)}{\omega(\xi)} + z^4 \left(\frac{\omega(z)}{\omega(\xi)} \right) \right)^2 / \\ &/ (\xi - z)^4, \xi = e^{it}, z = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Первая часть леммы теперь будет вытекать из определения функции $G_{2n}(x; f)$ (см. (8)).

Далее, поступая аналогично как при вычислении интеграла из леммы 1, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt &= 2\pi \times \\ &\times \left(\lim_{|z|<1, z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{1}{\omega^2(z)} \operatorname{res}_{\xi=z} \frac{\xi^3 \omega^2(\xi)}{(\xi-z)^4} - \lim_{|z|<1, z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{4z}{\omega(z)} \operatorname{res}_{\xi=z} \frac{\xi^2 \omega(\xi)}{(\xi-z)^4} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\lim_{|z| < 1, z \rightarrow e^{i\theta}} \left(\frac{1}{\omega^2(z)} \frac{d^3}{d\xi^3} (\xi^3 \omega^2(\xi)) - \frac{4z}{\omega(z)} \frac{d^3}{d\xi^3} (\xi^2 \omega \xi) \right) \right) \Big|_{\xi=z}.$$

Чтобы получить равенство (9), остается провести необходимые вычисления.

Функцию $G_{2n}(x; f)$ назовем рациональной функцией Джексона для $f \in C_{[-1; 1]}$.

Лемма 3. Справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt > \frac{2\pi}{3} \lambda_n^3(\theta), \quad \theta \in [0; \pi].$$

Данное неравенство непосредственно следует из (9), если учесть, что

$$\lambda_n^3(\theta) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3(1 - |\alpha_k|^4)}{(1 - 2|\alpha_k| \cos(\theta - \theta_k) + |\alpha_k|^2)^2} - \frac{2(1 - |\alpha_k|^2)^3}{(1 - 2|\alpha_k| \cos(\theta - \theta_k) + |\alpha_k|^2)^3} \right) > 0.$$

Теорема 2. Для всякой функции $f \in C_{[-1; 1]}$ справедливо неравенство:

$$|f(x) - G_{2n}(x; f)| \leq 4 \left(\omega_f \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lambda_n(\arccos x)} \right) + \omega_f \left(\frac{1}{\lambda_n^2(\arccos x)} \right) \right),$$

где ω_f — модуль непрерывности функции f на отрезке $[-1; 1]$, $x \in [-1; 1]$.

Доказательство. Будем иметь

$$|f(x) - G_{2n}(x; f)| \leq \frac{1}{g_n(\theta)} \int_{(t-\theta) \leq \pi} |f(\cos t) - f(\cos \theta)| K_n^2(t; \theta) dt, \quad (10)$$

где $g_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt$, $x = \cos \theta$, $x \in [-1; 1]$.

Далее воспользуемся методом А. Ф. Тимана (см. [7], с. 269). Заметим вначале, что

$$\begin{aligned} |f(x) - G_{2n}(x; f)| &\leq \omega_f(|\cos t| - |\cos \theta|) \leq \\ &\leq 2\omega_f\left(\sin^2 \frac{t-\theta}{2} + \left|\sin \frac{t-\theta}{2} \sin \theta\right|\right) \leq 2\omega_f\left(\sin^2 \frac{t-\theta}{2}\right) + \omega_f\left(\left|\sin \frac{t-\theta}{2} \sin \theta\right|\right), \end{aligned}$$

$\theta \in [0; \pi]$.

Отсюда и из (10) получим:

$$\begin{aligned} |f(x) - G_{2n}(x; f)| &\leq \frac{2}{g_n(\theta)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \omega_f\left(\sin^2 \frac{t-\theta}{2}\right) K_n^2(t; \theta) dt + \right. \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \omega_f\left(\left|\sin \frac{t-\theta}{2} \sin \theta\right|\right) K_n^2(t; \theta) dt \Big) \leq \frac{2}{g_n(\theta)} \left[\omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) \times \right. \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \frac{t-\theta}{2} \lambda_n^2(\theta) + 1\right) K_n^2(t; \theta) dt + \omega_f\left(\frac{\sin \theta}{\lambda_n(\theta)}\right) \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \frac{|t-\theta|}{2} \lambda_n(\theta) + 1\right) K_n^2(t; \theta) dt \Big] \leq \frac{2}{g_n(\theta)} \left[\omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) \times \right. \\ &\times (\lambda_n^2(\theta) I_1 + I_2) + \omega_f\left(\frac{\sin \theta}{\lambda_n(\theta)}\right) (\lambda_n(\theta) I_3 + I_2) \Big], \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t; \theta) dt, \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt, \quad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{|t-\theta|}{2} K_n^2(t; \theta) dt.$$

Интегралы I_1 и I_2 вычислены в леммах 1 и 2, для оценки интеграла I_3 воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$I_3 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \lambda_n(t; \theta)}{\sin \frac{t-\theta}{2}} \right|^3 dt \leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t; \theta) dt} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t; \theta) dt} \leq \sqrt{(1 + \lambda_n(\theta)) g_n(\theta)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |f(x) - G_{2n}(x; f)| &\leq \frac{2[(1 + \lambda_n(\theta))\lambda_n^2(\theta) + g_n(\theta)]}{g_n(\theta)} \omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) + \\ &+ \frac{2[\lambda_n(\theta)\sqrt{(1 + \lambda_n(\theta))g_n(\theta)} + g_n(\theta)]}{\pi g_n(\theta)} \omega_f\left(\frac{\sin \theta}{\lambda_n(\theta)}\right) \leq \\ &\leq 4\left(\omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) + \omega_f\left(\frac{\sin \theta}{\lambda_n(\theta)}\right)\right), \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

1. Джрбашян М. М. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. 1956. Т. 9. № 7. С. 3.

2. Русак В. Н. // Докл. АН БССР. 1964. Т. 8. № 7. С. 432.

3. Он же // Рациональные функции как аппарат приближения. Мн. 1979.

4. Он же // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 4. С. 442.

5. Пекарский А. А. // Там же. 1987. Т. 133. № 1. С. 86.

6. Ровба Е. А. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 11. С. 968.

7. Тиман А. Ф. // Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

Поступила в редакцию 10.03.95.

УДК 517.925.6

В. И. МАТАТОВ, Л. В. МИХАЙЛОВСКАЯ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The necessary conditions of uniqueness of movable singularities for a system of two differential equations with cubic nonlinearities have been obtained. The degenerative cases when the simplifying linear transformation of the unknown functions does not work have also been considered.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 y^3 = P_3(x, y), \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \dots + \beta_6 x^3 + \beta_7 x^2 y + \beta_8 x y^2 + \beta_9 y^3 = Q_3(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(z), \dots, \beta_9 = \beta_9(z)$ — голоморфные функции z в области $D \subset \mathbb{C}$, $(P_3, Q_3) \neq 1$, $z \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \hat{\mathbb{C}}^2$, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, троеточия означают невыписанные члены второй степени относительно x, y . Целью статьи является нахождение необходимых условий однозначности подвижных особенностей системы (1), т. е. условий принадлежности ее к классу P . Системам с кубическими нелинейностями посвящены работы [1, 2]. Следует отметить, что в данных статьях не рассматриваются вырожденные случаи, когда упрощающие линейные преобразования искомым функциям не действуют.

С помощью линейного преобразования

$$x = X + \mu(z)Y, \quad y = Y, \quad (2)$$

где $\mu(z)$ — любой из корней уравнения

$$\alpha_9 + (\alpha_8 - \beta_9)\mu + (\alpha_7 - \beta_8)\mu^2 + (\alpha_6 - \beta_7)\mu^3 - \beta_6\mu^4 = 0, \quad (3)$$

исходная система приводится к виду, не содержащему Y^3 в первом уравнении:

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1X + a_2Y + \dots + a_6X^3 + a_7X^2Y + a_8XY^2, \\ Y' = b_0 + b_1X + b_2Y + \dots + b_6X^3 + b_7X^2Y + b_8XY^2 + b_9Y^3. \end{cases} \quad (4)$$

В (4) коэффициенты $a_0 = a_0(z)$, ..., $b_9 = b_9(z)$ определенным образом выражаются через α_0 , ..., β_9 и μ , т. е. $a_0 = \alpha_0 - \beta_0\mu$, ..., $b_9 = \beta_9 + \beta_8\mu + \beta_7\mu^2 + \beta_6\mu^3$. Вводим в систему (4) параметр λ по формулам: $X = \xi$, $Y = \eta/\lambda$, $z = z_0 + \lambda^2 t$, где $z_0 \in D$ (ниже по тексту z_0 также берется из D) [3]. Соответствующая система нулевого приближения есть

$$\xi' = a_5(z_0)\eta^2 + a_8(z_0)\xi\eta^2, \quad \eta' = b_9(z_0)\eta^3.$$

Очевидно, что последняя система имеет многозначные подвижные особенности, за исключением случая, когда $b_9(z_0) = 0$. Так как z_0 — любая точка из D , то для однозначности подвижных особенностей системы (4) (т. е. принадлежности ее P -типу) необходимо, чтобы $b_9(z) = 0$. Более подробно это условие записывается так:

$$\beta_9 + \beta_8\mu + \beta_7\mu^2 + \beta_6\mu^3 \equiv 0, \quad (5)$$

где $\mu = \mu(z)$ удовлетворяет уравнению (3).

Таким образом, верна следующая

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) не имела многозначных подвижных особенностей, необходимо выполнение условия (5), где $\mu = \mu(z)$ — любой корень алгебраического уравнения (3) (предполагается, что корни этого уравнения существуют).

Замечание. Выразим функцию $\mu = \mu(z)$ через коэффициенты исходной системы (1). Умножая (5) на $\mu(z)$ и складывая полученное уравнение с (3), получим уравнение $\alpha_6\mu^3 + \alpha_7\mu^2 + \alpha_8\mu + \alpha_9 = 0$. Пусть $\alpha_6 \neq 0$ (если $\alpha_6 = 0$, то μ удовлетворяет квадратному уравнению, которое легко решается). Таким образом, будем рассматривать кубическое уравнение $\mu^3 + a\mu^2 + b\mu + c = 0$, где $a = \alpha_7/\alpha_6$, $b = \alpha_8/\alpha_6$, $c = \alpha_9/\alpha_6$. С помощью замены $\mu = \tilde{\mu} - a/3$ кубическое уравнение для μ приводится к виду $\tilde{\mu}^3 + p\tilde{\mu} + q = 0$, где $p = -a^2/3 + b$, $q = 2a^3/27 - (ab)/3 + c$. Используя формулу

$$\text{Кардано, получим } \tilde{\mu} = r + s = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

где r и s удовлетворяют равенству $rs = -p/3$. Тем самым $\tilde{\mu}$ (а значит, и μ) выражается через коэффициенты исходной системы (1). Аналогичным образом функция $v = v(z)$ может быть выражена через коэффициенты исходной системы (см. теорему 3).

Возможен случай, когда уравнение (3) не имеет корней, т. е. когда реализуются тождества

$$\begin{aligned} \alpha_8(z) - \beta_9(z) &\equiv 0, \quad \alpha_7(z) - \beta_8(z) \equiv 0, \\ \alpha_6(z) - \beta_7(z) &\equiv 0, \quad \beta_6(z) \equiv 0, \quad \alpha_9(z) \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \dots + \alpha_6x^3 + \alpha_7x^2y + \alpha_8xy^2 + \alpha_9y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2y + \dots + \alpha_6x^2y + \alpha_7xy^2 + \alpha_8y^3, \end{cases} \quad (7)$$

где $\alpha_9 = \alpha_9(z) \neq 0$. Вводя в (7) параметр λ по формулам $x = \xi/\lambda$, $y = \eta$, $z = z_0 + \lambda^2 t$ и рассматривая систему нулевого приближения, получаем, что для принадлежности этой системы P -типу необходимо, чтобы $\alpha_6(z) \equiv 0$. Преобразуем систему (7) (условие $\alpha_6(z) \equiv 0$ имеет место) с

помощью формул $x = \xi / \lambda^3$, $y = \eta / \lambda^2$, $z = z_0 + \lambda^5 t$. При $\alpha_7(z_0) \neq 0$ соответствующая система нулевого приближения $\xi' = \alpha_7(z_0)\xi^2\eta$, $\eta' = \alpha_7(z_0)\xi\eta^2$ сводится к уравнению $\xi'' = (3/\xi)\xi'^2$, которое имеет многозначные подвижные особенности [3]. Итак, если (7) (при $\alpha_6(z) \equiv 0$) — Р-типа, то необходимо $\alpha_7(z) \equiv 0$. С учетом условий $\alpha_6(z) \equiv \alpha_7(z) \equiv 0$ будем рассматривать систему

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \dots + \alpha_8 y^3, \end{cases} \quad (8)$$

где второе уравнение содержит только один член третьей степени. Пусть $x = \xi / \lambda$, $y = \eta / \lambda$, $z = z_0 + \lambda^2 t$. При $\lambda=0$ получим систему $\xi' = \alpha_8(z_0)\xi\eta^2 + \alpha_9(z_0)\eta^3$, $\eta' = \alpha_8(z_0)\eta^3$, которая заведомо имеет многозначные подвижные особенности, если $\alpha_8(z_0) \neq 0$. Таким образом, если (8) обладает свойством Пенлеве (т. е. принадлежит Р), то необходимо выполнение тождества $\alpha_8(z) \equiv 0$. С учетом этого условия сделаем над системой (8) преобразование $x = \xi / \lambda^4$, $y = \eta / \lambda^3$, $z = z_0 + \lambda^5 t$ ($z_0 \in D$ и такое, что $\alpha_9(z_0) \neq 0$). В результате (при $\lambda=0$) получим систему $\xi' = \alpha_9(z_0)\eta^3$, $\eta' = \beta_3(z_0)\xi^2$, которая является автономной системой Гамильтона. Исключая из последней системы с помощью первого интеграла $\frac{1}{4}\alpha_9(z_0)\eta^4 - \frac{1}{3}\beta_3(z_0)\xi^3 = C_0$ (C_0 — произвольная постоянная) переменную $\eta(z)$ [4], получим уравнение первого порядка

$$\xi'^4 - 64\alpha_9(z_0)\left[\frac{1}{27}\beta_3^3(z_0)\xi^9 + \frac{1}{3}\beta_3^2(z_0)C_0\xi^6 + \beta_3(z_0)C_0^2\xi^3 + C_0^3\right] = 0. \quad (9)$$

По теореме Фукса [5] имеем следующее: если уравнение (9) — Р-типа, то необходимо $\beta_3(z_0) = 0$ (условие $\alpha_9(z_0) \neq 0$ учтено). Тем самым мы получили утверждение: если (8) (при $\alpha_8(z) \equiv 0$) есть система класса Р, то необходимо $\beta_3(z) \equiv 0$, и она имеет вид

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_4 xy + \beta_5 y^2. \end{cases} \quad (10)$$

Полагая в (10) $x = \xi / \lambda^3$, $y = \eta / \lambda^2$, $z = z_0 + \lambda^3 t$, будем иметь систему нулевого приближения $\xi' = \alpha_9(z_0)\eta^3 + \alpha_3(z_0)\xi^2$, $\eta' = \beta_4(z_0)\xi\eta$, которая сводится к уравнению

$$\eta'' = \left(1 + \frac{\alpha_3(z_0)}{\beta_4(z_0)}\right) \frac{\eta'^2}{\eta} + \beta_4(z_0)\alpha_9(z_0)\eta_4. \quad (11)$$

Решения (11) имеют многозначные подвижные особенности, если $\beta_4(z_0) \neq 0$ [3] (учитываем то, что $\alpha_9(z_0) \neq 0$). Отсюда следует, что для системы (10) необходимым условием принадлежности ее классу Р является тождество $\beta_4(z) \equiv 0$. В итоге доказана

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполняются условия (6). Для того, чтобы соответствующая система была Р-типа, необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_5 y^2. \end{cases} \quad (B_1)$$

Система (4) с учетом условия $b_9(z) \equiv 0$ записывается следующим образом

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1X + a_2Y + \dots + a_6X^3 + a_7X^2Y + a_8XY^2, \\ Y' = b_0 + b_1X + b_2Y + \dots + b_6X^3 + b_7X^2Y + b_8XY^2. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть

$$X = u, Y = v(z)u + v, \quad (13)$$

где u, v — новые искомые функции, а $v(z)$ — любой из корней уравнения

$$b_6 + (b_7 - a_6)v + (b_8 - a_7)v^2 - a_8v^3 = 0. \quad (14)$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} u' = A_0 + A_1u + A_2v + \dots + A_6u^3 + A_7u^2v + A_8uv^2, \\ v' = B_0 + B_1u + B_2v + \dots + B_7u^2v + B_8uv^2, \end{cases} \quad (15)$$

где $A_0 = A_0(z), \dots, B_8 = B_8(z)$ — голоморфные функции z , которые определенным образом выражаются через $a_0, \dots, b_8$ и v , в частности $A_6 = a_6 + a_7v + a_8v^2$. С помощью преобразования $u = \xi / \lambda, v = \eta, z = z_0 + \lambda^2 t$ в (15) вводим параметр λ . Это дает систему нулевого приближения $\xi' = A_6(z_0)\xi^3, \eta' = B_3(z_0)\xi^2 + B_7(z_0)\xi^2\eta$. Очевидно, что если $A_6(z_0) \neq 0$, то последняя система $\notin P$. Значит, необходимое условие принадлежности (15) классу P есть тождество $A_6(z) \equiv 0$, т. е.

$$a_6 + a_7v + a_8v^2 \equiv 0, \quad (16)$$

где $v(z)$ — корень уравнения (14). Значит, справедлива

Теорема 3. Для того, чтобы система (12) была P -типа, необходимо выполнение тождества (16), где $v(z)$ — любое решение алгебраического уравнения (14) (условия существования корней для (14) имеют место).

Замечание. Здесь также возможен случай, когда уравнение (14) не имеет корней, т. е. когда реализуются условия $b_6(z) \neq 0, b_7(z) - a_6(z) \equiv 0, b_8(z) - a_7(z) \equiv 0, a_8(z) \equiv 0$. В этом случае получается следующее: если соответствующая система (12) — P -типа, то необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 \\ Y' = b_0 + b_1X + b_2Y + b_3X^2 + b_4XY + b_6X^3. \end{cases} \quad (B_2)$$

Для обоснования этого утверждения применяется метод малого параметра аналогично изложенному выше.

Из всего вышеизложенного вытекает

Теорема 4. Если исходная система (1) $\in P$, то:

1) либо она с помощью линейных преобразований (2), (13), где $\mu(z), v(z)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (3), (14), приводится к виду, не содержащему кубов искомых функций (т. е. u^3, v^3) в обоих уравнениях;

2) либо она сводится к системам (B_1) или (B_2) , когда алгебраические уравнения (3) или (14) не имеют решений.

1. В и г е а у F. J. // Bull. cl. sci. Acad. roy Belg. 1981. V. 67. № 9. P. 512.
2. П р о к а ш е в а В. А. // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28. № 10. С. 869.
3. Г о л у б е в В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
4. М а т а т о в В. И., С а б ы н и ч Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 48.
5. А й н с Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

Поступила в редакцию 05. 01.95.

ПОЛУГРУППЫ С ЕДИНСТВЕННЫМ БАЗИСОМ

It is shown that the unique minimal generating set of a semigroup (if it exists) is the least generating set.

В статье [4] нами рассматривался вопрос, будет ли из существования и единственности базиса (минимального по включению порождающего множества) у каждой подполугруппы данной полугруппы S следовать фильтруемость полугруппы S , т. е. существование наименьшего по включению порождающего множества у каждой подполугруппы. В данной работе дается положительный ответ на этот вопрос. Более того, доказано, что если полугруппа S имеет единственный базис, то он содержится во всяком порождающем множестве полугруппы S . Результат анонсирован в тезисах [5].

В данной работе используется обычная терминология и нотация теории полугрупп [1]. Ниже приводятся основные обозначения и термины, употребляющиеся в тексте.

$N = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Пусть S — полугруппа $X \subseteq S$.

Тогда $\langle X \rangle$ — подполугруппа, порожденная множеством X (включая и $\emptyset$). Множество X называется независимым, если $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$ для любого $x \in X$. Независимое порождающее множество X полугруппы S называется базисом полугруппы S (неприводимый базис в смысле [6]). Базис X называется абсолютным [2], если он содержится в любом порождающем множестве полугруппы S . Полугруппа S называется фильтрующей [3], [4], если каждая ее подполугруппа имеет абсолютный базис. $\text{Sub } S$ — решетка подполугрупп полугруппы S , $M(S)$ — множество максимальных элементов решетки $\text{Sub } S$.

Лемма. Пусть полугруппа S имеет базис X . Тогда для любого $x \in X$ существует максимальная подполугруппа $M \in M(S)$, не содержащая элемента x .

Доказательство. Так как множество X независимо, то для $x \in X$ имеем $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальная подполугруппа M среди подполугрупп, содержащих все элементы из X , кроме x . На самом деле M максимальна в S , так как если $M_1 \in \text{Sub } S$, $M \subseteq M_1$, то либо $x \notin M_1$ и тогда $M = M_1$ ввиду максимальной M , либо $x \in M_1$, и тогда $X = X \setminus \{x\} \cup \{x\} \subseteq M_1$ и $S = \langle X \rangle \subseteq M_1$, т. е. $S = M_1$.

Теорема. Пусть полугруппа S имеет единственный базис X . Тогда X содержится в любом порождающем множестве полугруппы S .

Доказательство. Зафиксируем некоторый элемент $x \in X$. Если $X = \{x\}$ то S есть моногенная полугруппа с единственным базисом и либо она конечна и тогда утверждение теоремы тривиально, либо бесконечна и тогда она свободна и является фильтрующей [3], поэтому базис X — наименьшее порождающее множество. Так что далее можно предполагать, что $X \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Предположим, что существует элемент $y \in S \setminus \{x\}$ такой, что для него выполняется условие:

$$\forall H \in M(S) (X \setminus \{x\} \subseteq H \Rightarrow y \notin H), \quad (1)$$

и придем к противоречию.

Для этого положим $Y = X \setminus \{x\} \cup \{y\}$.

Если мы покажем, что Y есть базис полугруппы S , то ввиду $Y \neq X$ придем к противоречию с единственностью базиса X .

Сначала докажем, что

$$\langle Y \rangle = S. \quad (2)$$

Действительно, согласно доказательству леммы, можно выбрать подполугруппу $M \in M(S)$ такую, что $X \setminus \{x\} \subseteq M$ и $x \notin M$. Согласно условию (1), также $y \notin M$.

Рассмотрим подполугруппу $M_1 = \langle (X \setminus \{x\}) \cup \{y\} \rangle = \langle Y \rangle$.

Если бы $x \in M_1$, то по лемме Цорна существовала бы подполугруппа M_2 максимальная среди содержащих M_1 и не содержащих x . Но тогда ввиду $X \setminus \{x\} \subseteq M_2$, как и в доказательстве леммы, приходим к тому, что $M_2 \in M(S)$. Однако это противоречит выбору y ввиду (1). Следовательно, $x \notin M_1$, а тогда $S = \langle X \rangle = \langle X \setminus \{x\} \cup \{x\} \rangle \subseteq M_1$ и $S = M_1$. Итак, (2) доказано.

Теперь для доказательства того, что Y — базис, надо установить независимость Y .

Предположим, что Y не является независимым. Тогда существует $z_1 \in Y$ такой, что $z_1 \in \langle Y \setminus \{z_1\} \rangle$. Если $z_1 = y$, то получим $y \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$ в противоречие с (1). Так что обязательно $z_1 \in X \setminus \{x\}$.

Так что $z_1 \in \langle (X \setminus \{x, z_1\}) \cup \{y\} \rangle$. Следовательно, для некоторого $n_1 \in N$ и $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)} \in X \setminus \{x, z_1\}$ имеет место соотношение

$$z_1 \in \langle t_1^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)}, y \rangle.$$

Отметим, что $z_1 \notin \langle t_1^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)} \rangle$, иначе $z_1 \in \langle X \setminus \{z_1\} \rangle$, что противоречит независимости множества X .

Далее, так как X — порождающее множество, то $y \in \langle X \rangle$. Если $y \in \langle x \rangle$, то $z_1 \in \langle t_1^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)}, x \rangle \subseteq \langle X \setminus \{z_1\} \rangle$, что противоречит независимости X . Так что существуют $m \in N$ и $s_1, s_2, \dots, s_m \in X \setminus \{x\}$ такие, что $y \in \langle s_1, \dots, s_m, x \rangle$. При этом $y \notin \langle s_1, \dots, s_m \rangle$, иначе $y \in \langle X \setminus \{x\} \rangle \subseteq M$, что противоречит (1). Кроме того, $z_1 \in \{s_1, \dots, s_m\}$, иначе

$$z_1 \in \langle t_1^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)}, y \rangle \subseteq \langle t_1^{(1)}, \dots, t_{n_1}^{(1)}, s_1, \dots, s_m, x \rangle \subseteq \langle X \setminus \{z_1, x\}, x \rangle = \langle X \setminus \{z_1\} \rangle,$$

что противоречит независимости X .

После исключения элемента z_1 из Y мы получим снова порождающее множество $Y_1 = X \setminus \{x, z_1\} \cup \{y\}$.

Продолжая далее этот процесс, мы либо придем к тому, что Y содержит минимальное по включению порождающее множество для S , что противоречит единственности базиса X , либо придем к бесконечной последовательности элементов $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \subseteq X \setminus \{x\}$, таких что $z_k \in \langle X \setminus \{x, z_1, \dots, z_k\} \cup \{y\} \rangle \forall k \in N$ и при этом $\{z_1, \dots, z_k\} \subseteq \{s_1, \dots, s_m\} \forall k \in N$, но это противоречит конечности множества $\{s_1, \dots, s_m\}$.

Значит, элемента y со свойством (1) не существует. Поэтому имеет место равенство $S \setminus \{x\} = \cup \{M \mid M \in M(S) \wedge X \setminus \{x\} \subseteq M \wedge x \notin M\}$.

Обозначим $T_x = S \setminus \{x\}$.

Покажем, что T_x есть подполугруппа полугруппы S . В самом деле, предположим, что это не так, тогда существует $n \in N$ и такие элементы $t_1, t_2, \dots, t_n \in S \setminus X$, что $x \in \langle \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \cup (X \setminus \{x\}) \rangle$. Положим $U = \{t_1, \dots, t_n\} \cup (X \setminus \{x\})$. При этом такие $t_1, \dots, t_n$ обязательно найдутся, иначе $x \in X \setminus \{x\}$, что противоречит тому, что X — базис. Эти элементы выберем так, что n — наименьшее число с таким свойством. Можно предполагать, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$t_i \notin \langle t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \rangle \cup X \setminus \{x\}, \quad (3)$$

иначе такое t_i можно исключить.

Далее, так как X — базис, то для некоторых $r_1, \dots, r_n \in N$ и некоторого множества

$$V = \{x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1}^{(1)}, \dots, x_r^{(2)}, \dots, x_{r_2}, \dots, x_1^{(n)}, \dots, x_{r_n}^{(n)}\} \subseteq X$$

имеем

СВЯЗЬ β -ПРОФРАТТИНИЕВЫХ ПОДАЛГЕБР С β -НОРМАЛИЗАТОРАМИ МУЛЬТИКОЛЕЦ

A correspondence between β -prefrattini subalgebras and β -normalizers of finite multirings is established in this paper.

В [1] определяются β -профраттиниевы подалгебры мультиколец как пересечения некоторого множества максимальных подалгебр, вводится определение β -нормализаторов мультиколец, обобщающее понятие системных нормализаторов Холла в конечных разрешимых группах. Кроме того, устанавливается, что при определенных условиях каждая β -профраттиниева подалгебра содержит некоторый β -нормализатор и, наоборот, любой β -нормализатор содержится в некоторой β -профраттиниевой подалгебре мультикольца. В настоящей работе доказывается, что между β -нормализаторами и β -профраттиниевыми подалгебрами существует более тесная связь. Определения и обозначения взяты из работы [1].

Лемма 1. Пусть β — некоторая формация мультиколец, A — произвольное мультикольцо с главным рядом и разрешимым β -корадикалом, H/K — β -эксцентральный A -главный фактор. Тогда фактор H/K A -абелев.

Доказательство. Допустим, что фактор H/K не A -абелев, и пусть фактор D/P главного ряда мультикольца A , проходящего через $C_A(H/K)$, проективен H/K . Если $D \subseteq C_A(H/K) = C_A(D/P)$, то H/K A -абелев. Поэтому будем считать, что $P = C_A(H/K)$. Пусть фактор T/M A -главного ряда, проходящего через A^β , проективен D/P . Если $T \subseteq A^\beta$, то факторы T/M и H/K A -абелевы. Поэтому будем полагать, что $M \supseteq A^\beta$. Следовательно, $A/M \in \beta$ и $A/P = A/C_A(T/M) \cong (A/M)/(C_A(T/M)/M) \in \beta$. Ввиду леммы 3.32 из [1] заключаем, что $D/P \wedge A/C_A(D/P) \in \beta$. Поэтому $H/K \wedge A/C_A(H/K) \cong (D/P) \wedge A/C_A(D/P) \in \beta$. Получаем противоречие с β -эксцентральностью фактора H/K . Лемма доказана.

Нетрудно установить (см, например, лемму А.3.7 из [2]), что если ненулевая подалгебра H конечного мультикольца A покрывает или изолирует любой фактор некоторого A -главного ряда, то ее порядок равен произведению порядков покрываемых ею факторов этого ряда. Ясно также, что справедлива

Лемма 2. Пусть ω_1 и ω_2 — два таких непустых подмножества факторов некоторого главного ряда мультикольца A , что $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ и $\omega_1 \cup \omega_2$ — множество всех факторов этого ряда. Тогда, если подалгебра L конечного мультикольца A изолирует любой фактор из ω_1 , то $|L| \leq d$, где d — произведение порядков факторов из ω_2 .

Теорема 1. Пусть Δ — наследственная формация конечных мультиколец, β — непустая насыщенная в Δ формация мультиколец из Δ , класс Δ регулярен в β , μ — непустой класс мультиколец из β , $A \in \Delta$. Тогда для любой β -профраттиниевой подалгебры T мультикольца A найдутся такие β -нормализатор H и μ -профраттиниева подалгебра F , что $T = H + F$.

Доказательство. Ясно, что в A найдется такая μ -профраттиниева подалгебра F , что $F \subseteq T$. Ввиду теоремы 13.8 из [1] найдется β -нормализатор H мультикольца A , содержащийся в T . Тогда $F + H \subseteq T$. Для некоторого фиксированного главного ряда мультикольца A введем следующие обозначения:

ω_1 — множество нефраттиниевых A -абелевых факторов этого ряда, которые μ -эксцентральны и β -эксцентральны;

ω_2 — множество тех факторов ряда, которые μ -эксцентральны, β -эксцентральны и не входят в ω_1 ;

ω_3 — множество нефраттиниевых A -абелевых факторов данного ряда, которые μ -эксцентральны и β -центральны;

ω_4 — множество β -центральных факторов, не входящих в ω_3 ;

d_i — произведение порядков факторов из ω_i ($i=1,2,3,4$).

Заметим, что $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^4 \omega_i$ совпадает со множеством всех A -главных факторов. Поскольку все факторы из ω_1, ω_3 в силу теоремы 13.4 из [1] изолируются подалгеброй F , а все факторы из ω_1, ω_2 по теореме 12.12 из [1] изолируются подалгеброй H , то $H \cap F$ изолирует все факторы из $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ввиду леммы 2 $|H \cap F| \leq d_4$. Поэтому $|H + F| = (|H| \cdot |F| : |H \cap F|) \leq (d_2 d_3 d_4) : d_4 = d_2 d_3 d_4 = |T|$. Поэтому $T = H + F$. Теорема доказана.

В случае, когда β — класс нулевых мультиколец, β -профраттиниеву подалгебру естественно называть профраттиниевой подалгеброй. Тогда из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть Δ — наследственная формация конечных мультиколец, β — непустая насыщенная в Δ формация мультиколец из Δ , класс Δ регулярен в β , $A \in \Delta$. Тогда для любой β -профраттиниевой подалгебры T мультикольца A найдутся такие β -нормализатор H и профраттиниева подалгебра F , что $T = H + F$.

Нетрудно показать (см., например, [3]), что существуют мультикольца, в которых β -нормализаторы и β -профраттиниевы подалгебры составляют различные классы подалгебр. Ясно также, что существуют мультикольца, в которых классы β -нормализаторов и β -профраттиниевых подалгебр совпадают. Как показывает следующий результат, класс мультиколец с таким свойством образует формацию.

Теорема 2. Пусть Δ — наследственная формация конечных мультиколец, β — непустая насыщенная в Δ формация мультиколец из Δ , класс Δ регулярен в классе β . Тогда класс μ тех мультиколец из Δ с разрешимыми β -кордикалами, у которых каждая β -профраттиниева подалгебра есть β -нормализатор, является формацией.

Доказательство. Пусть $A \in \mu$, N — идеал в A , T — β -профраттиниева подалгебра в A . Тогда T — β -нормализатор в A . В силу теорем 13.4 и 12.5 из [1] $T + N/N$ является β -профраттиниевой подалгеброй и β -нормализатором в A/N . Поэтому $A/N \in \mu$. Пусть теперь $A \in \Delta$, N_1 и N_2 — идеалы в A , $A/N_1 \in \mu$, $A/N_2 \in \mu$, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. В силу соображений индукции можно считать, что N_1 и N_2 — минимальные идеалы в A . Пусть T — β -профраттиниева подалгебра в A , H — β -нормализатор в A , содержащийся в T . Тогда $H + N_1/N_1 \subseteq T + N_1/N_1$ и так как $A/N_1 \in \mu$, то $T + N_1 = H + N_1$. Рассмотрим теперь два возможных случая:

1. $N_1/\{0\}$ — нефраттиниевый главный фактор в A . Если $N_1/\{0\}$ β -централен, то ввиду теоремы 13.4 из [1] $N_1 \subseteq T$, а ввиду теоремы 12.12 из [1] $N_1 \subseteq H$. Поэтому $H = T$, т. е. $A \in \mu$.

Пусть теперь $N_1/\{0\}$ является β -эксцентральным главным фактором в A . Тогда по лемме 1 фактор $N_1/\{0\}$ A -абелев. Поэтому в силу теоремы 13.4 из [1] $T \cap N_1 = \{0\}$, а по теореме 12.12 из [1] $H \cap N_1 = \{0\}$. Поэтому $T \cong T/T \cap N_1 \cong T + N_1/N_1 = H + N_1/N_1 \cong H/H \cap N_1 \cong H$. Следовательно, $T = H$ и $A \in \mu$.

2. $N_1/\{0\}$ — фраттиниевый A -главный фактор. Если $N_2/\{0\}$ — нефраттиниевый фактор в A , то, рассуждая аналогично пункту 1, можно показать, что $A \in \mu$. Поэтому будем считать, что $N_2/\{0\}$ — фраттиниевый A -главный фактор. Предположим, что $N_1/\{0\}$ и $N_2/\{0\}$ — β -эксцентральные A -главные факторы. Тогда согласно теореме 12.12 из [1] H изолирует $N_1/\{0\}$ и $N_1 + N_2/N_1$ (ясно, что ввиду проективности факторов $N_2/\{0\}$ и $N_1 + N_2/N_1$ фактор $N_1 + N_2/N_1$ β -эксцентрален). Значит, $H \cap N_1 = \{0\}$ и $H \cap (N_1 + N_2) \subseteq N_1$. Следовательно, $H \cap (N_1 + N_2) = \{0\}$. Так как $N_1/\{0\}$ — фраттиниевый A -главный фактор, то ввиду теоремы 13.4 из [1] $N_1 \subseteq T$. Тогда $|T| = |T + N_1| = |H + N_1| = |H| \cdot |N_1|$. Ясно, что $|T| \geq |H + N_1 + N_2| = |H| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$. Поэтому $|H| \cdot |N_1| \geq |H| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$. Полученное противоречие показывает, что, по крайней мере, один из факторов $N_1/\{0\}$, $N_2/\{0\}$ является β -

центральный A -главным фактором. Пусть для определенности фактор $N_1/\{0\}$ β -централен. Тогда в силу теоремы 12.12 из [1] $N_1 \subseteq H$, и, следовательно, $T=H$. Теорема доказана.

Заметим, что в классе конечных групп с $\pi(\beta)$ -разрешимыми β -кордикалами условие «класс β регулярен в классе Δ » выполняется автоматически. Поэтому в этом случае из теорем 1,2 вытекают результаты работы [4]. Более того, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 2. Пусть β — локальная формация конечных групп, μ — непустой класс групп из β , β -кордикал A^β конечной группы $A \in \pi(\beta)$ -разрешим. Тогда для любой β -профраттиниевой подгруппы T в A найдутся такие β -нормализатор H и μ -профраттиниева подгруппа F , что $T=H+F$.

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.

2. Doerk K. Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.

3. Гойко В. И. // Вопросы алгебры. Мн., 1986. Вып. 2. С. 120.

4. Гойко В. И. // XXVIII Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. докл. Кишинев, 1985.

Поступила в редакцию 29.03.95.

УДК 519.1

Н. Е. ЕФИМЧИК, Д. П. ПОДКОПАЕВ

О ЯДРЕ И РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Multicriterion problem on the system of subsets of the finite set has been considered. Strongly, weakly and properly efficient trajectories are the solutions of this problem. Vector objective function of the problem consists of MINSUM, MINMAX and MINMIN criteria. The sets of solutions which save the property of efficiency under «small» perturbations of the problem's parameters have been investigated.

В статье рассматриваются многокритериальные траекторные задачи (задачи на системах подмножеств), в схему которых в однокритериальном случае вкладываются многие широко известные задачи оптимизации на графах, а также задачи булевого программирования (см, например, [1–3]). Исследуется устойчивость свойства эффективности траекторий многокритериальной задачи к «малым» возмущениям параметров векторной целевой функции, состоящей из критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN. Найдена оценка снизу для радиуса устойчивости и выявлены случаи, когда эта оценка достижима. Ранее подобные исследования проводились для однокритериальных траекторных задач [1,2].

Пусть $E=\{e_1, \dots, e_m\}$, T — совокупность непустых подмножеств множества E , называемых траекториями, $A=\|a_{sk}\|_{r \times m}$, $a_{sk} \in \mathbb{R}$, $r \geq 2$. Обозначим $N_q=\{1, 2, \dots, q\}$. На множестве E зададим векторную весовую функцию $a(e)=a_1(e), \dots, a_r(e)$, $a_s(e_k)=a_{sk} \forall s \in N_r, k \in N_m$, а на системе подмножеств T — векторную целевую функцию (ВЦФ) $F(t, A)=(F_1(t, A), \dots, F_r(t, A))$, состоящую из критериев трех видов:

$$\text{MINSUM} \quad F_s(t, A) = \sum_{e \in t} a_s(e) \rightarrow \min_T,$$

$$\text{MINMAX} \quad F_s(t, A) = \max_{e \in t} a_s(e) \rightarrow \min_T,$$

$$\text{MINMIN} \quad F_s(t, A) = \min_{e \in t} a_s(e) \rightarrow \min_T.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что ВЦФ $F(t, A)$ может представлять собой произвольную комбинацию этих критериев.

Через I_{SUM} , I_{MAX} и I_{MIN} обозначим множества тех чисел из N_r , которыми занумерованы критерии MINSUM , MINMAX и MINMIN соответственно.

Говоря об g -критериальной задаче, обычно подразумевают задачу нахождения некоторого множества эффективных траекторий (альтернатив).

Приведем традиционные (см. [4,5]) определения эффективных решений многокритериальной задачи. Траектория $\tilde{t} \in T$ называется собственно эффективной (или, иначе, парето-оптимальной), если ее не доминирует никакая другая траектория из T , т. е. не существует траектории $t \in T$ такой, что $F(\tilde{t}, A) \geq F(t, A)$, $F(\tilde{t}, A) \neq F(t, A)$. Траектория $\tilde{t} \in T$ называется сильно эффективной (слабо эффективной), если не существует траектории $t \in T$ такой, что $F(\tilde{t}, A) \geq F(t, A)$ ($F(\tilde{t}, A) > F(t, A)$).

Если предположить, что множества E , T , I_{SUM} , I_{MAX} , I_{MIN} фиксированы, то матрица $A \in \mathbb{R}^m$ может служить для индексации множеств сильно эффективных, собственно эффективных и слабо эффективных траекторий, которые будем обозначать соответственно через $Q_1(A)$, $Q_2(A)$ и $Q_3(A)$. Очевидно, что $Q_1(A) \subseteq Q_2(A) \subseteq Q_3(A) \forall A \in \mathbb{R}^m$.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ зададим чебышевскую метрику, т. е. под нормой матрицы $B = \|b_{sk}\| \in \mathbb{R}^m$ будем понимать число $\|B\| = \max \{ |b_{sk}| : s \in N_r, k \in N_m \}$. Очевидно, что для любой траектории $t \in T$ и любого индекса $s \in N_r$ частный критерий $F_s(t, A)$ является функцией, непрерывной на множестве матриц $\mathbb{R}^m$.

Пусть $B(\epsilon) = \{B \in \mathbb{R}^m : \|B\| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Траекторию $\tilde{t} \in Q_1(A)$ назовем устойчивой, если существует такое число $\epsilon > 0$, что $\tilde{t} \in Q_1(A + B) \forall B \in B(\epsilon)$. Множество всех устойчивых траекторий, содержащихся в $Q_1(A)$, будем называть ядром устойчивости множества $Q_1(A)$ и обозначать через $J_1(A)$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\tau_s^A(t_1, t_2) = F_s(t_1, A) - F_s(t_2, A)$.

Теорема 1. $J_1(A) \supseteq Q_1(A) \forall A \in \mathbb{R}^m$, $i \in N_3$. Причем

$$J_1(A) = Q_1(A);$$

$$J_1(A) = J_2(A), \text{ если } I_{\text{SUM}} \neq \emptyset;$$

$$J_1(A) = J_2(A) = J_3(A), \text{ если } I_{\text{SUM}} = N_r.$$

Доказательство. Соотношения $J_1(A) = Q_1(A)$, $J_2(A) \supseteq Q_1(A)$ и $J_3(A) \supseteq Q_1(A)$ вытекают из непрерывности функции $F_s(t, A)$ на множестве $\mathbb{R}^m$ и того факта, что для любой сильно эффективной траектории $\tilde{t}$ и любой траектории $t \in T$, $t \neq \tilde{t}$ существует такой индекс $s \in N_r$, что $\tau_s^A(\tilde{t}, t) < 0$.

Докажем, что в случае $I_{\text{SUM}} \neq \emptyset$ выполняется равенство $J_1(A) = J_2(A)$, т. е. с учетом уже доказанных соотношений, $J_2(A) \subseteq Q_1(A)$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что любая собственно эффективная траектория, не принадлежащая множеству $Q_1(A)$, не является устойчивой.

Пусть $I_{\text{SUM}} \neq \emptyset$, $\tilde{t} \in Q_2(A)$, $\tilde{t} \notin Q_1(A)$. Тогда существует такая траектория $t_0 \in T$, $t_0 \neq \tilde{t}$, что $F(t_0, A) = F(\tilde{t}, A)$. Легко видеть, что для любого числа $\epsilon > 0$ и матрицы $B \in B(\epsilon)$ с элементами

$$b_{sk} = \begin{cases} -\epsilon / 2, & s \in I_{\text{SUM}}, e_k \in t_0 \setminus \tilde{t}, \\ \epsilon / 2, & s \in I_{\text{SUM}}, e_k \in \tilde{t} \setminus t_0, \\ 0 & \text{для остальных } (s, k) \end{cases}$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\tau_s^{A+B}(t_0, \tilde{t}) &= 0 \forall s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}, \\ \tau_s^{A+B}(t_0, \tilde{t}) &< 0 \forall s \in I_{\text{SUM}},\end{aligned}$$

т. е. $\tilde{t} \notin Q_2(A+B)$. Следовательно, траектория $\tilde{t} \in Q_2(A)$ не является устойчивой.

И, наконец, докажем равенство $J_1(A)=J_3(A)$ для случая $I_{\text{SUM}}=N_r$. Для этого достаточно показать, что $J_3(A) \subseteq Q_1(A)$, т. е. любая слабо эффективная траектория, не принадлежащая множеству $Q_1(A)$, не является устойчивой.

Пусть $I_{\text{SUM}}=N_r$, $\tilde{t} \in Q_3(A)$, $\tilde{t} \notin Q_1(A)$. Тогда существует такая траектория $t_0 \in T$, $t_0 \neq \tilde{t}$, что $F(t_0, A) \leq F(\tilde{t}, A)$. Поэтому для любого числа $\epsilon > 0$ и матрицы $B \in B(\epsilon)$ с элементами

$$b_{sk} = \begin{cases} -\epsilon / 2, & e_k \in t_0 \setminus \tilde{t}, s \in N_r, \\ \epsilon / 2, & e_k \in \tilde{t} \setminus t_0, s \in N_r \end{cases}$$

выполняется неравенство $F(t_0, A+B) < F(\tilde{t}, A+B)$, т. е. $\tilde{t} \notin Q_3(A+B)$. Следовательно, траектория $\tilde{t} \in Q_3(A)$ не является устойчивой. Теорема доказана.

Замечание 1. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см. [6]) теорема 1 справедлива и для других норм в пространстве матриц $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\epsilon > 0$. Ядром ϵ -устойчивости множества $Q_i(A)$, $i \in N_3$ будем называть множество $J_i^\epsilon(A) = \{t \in Q_i(A) : t \in Q_i(A+B) \forall B \in B(\epsilon)\}$.

$$\begin{aligned}\text{Для любого индекса } s \in N_r \text{ введем обозначение } \rho_s^A(t_1, t_2) &= \\ = \begin{cases} \sup\{\epsilon > 0 : \tau_s^{A+B}(t_1, t_2) < 0 \forall B \in B(\epsilon)\}, & \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) < 0, \\ 0, & \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Пусть } \Delta(t_1, t_2) = |t_1| + |t_2| - 2|t_1 \cap t_2|,$$

$$\Gamma_s^A(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\tau_s^A(t_2, t_1)}{2}, & s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}, \\ \frac{\tau_s^A(t_2, t_1)}{\Delta(t_1, t_2)}, & s \in I_{\text{SUM}}. \end{cases}$$

$$\text{Лемма. } \rho_s^A(t_1, t_2) = \begin{cases} \Gamma_s^A(t_1, t_2), & \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) < 0, \\ 0, & \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если $\tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0$, то $\rho_s^A(t_1, t_2) = 0$ по определению.

Пусть $\tau_s^A(t_1, t_2) < 0$, $\gamma = \Gamma_s^A(t_1, t_2) > 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$. Пусть $q = \arg\max\{a_{sk} : e_k \in t_2\}$. Тогда $a_{sq} - a_{sk} \geq 2\Gamma_s^A(t_1, t_2) \forall e_k \in t_1$ и для любой матрицы $B \in B(\gamma)$ выполняются неравенства $a_{sq} + b_{sq} - (a_{sk} + b_{sk}) > 0 \forall e_k \in t_1$.

Значит, $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) < 0 \forall B \in B(\gamma)$ и $\rho_s^A(t_1, t_2) \geq \gamma$.

$$\text{Если положить } b_{sk} = \begin{cases} \gamma, & e_k \in t_1, \\ -\gamma, & e_k \in E \setminus t_1, \end{cases}$$

то $\|B\| = \gamma$ и $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) = 0$. Поэтому $\rho_s^A(t_1, t_2) \leq \gamma$.

Случай 2. $s \in I_{\text{SUM}}$. Для любой возмущающей матрицы $B \in B(\gamma)$ получаем $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) \leq \tau_s^A(t_1, t_2) + \Delta(t_1, t_2) \max\{|b_{sk}| : k \in N_m\} \leq \tau_s^A(t_1, t_2) + \Delta(t_1, t_2)\|B\| < 0$. Следовательно, $\rho_s^A(t_1, t_2) \geq \gamma$.

Если $\delta > \gamma$ и $b_{sk} = \begin{cases} \delta, & e_k \in t_1, \\ -\delta, & e_k \in E \setminus t_1, \end{cases}$

то $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) = \tau_s^A(t_1, t_2) + \Delta(t_1, t_2)\delta > 0$. Поэтому $\rho_s^A(t_1, t_2) \leq \gamma$. Лемма доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы траектория t_0 принадлежала ядру ϵ -устойчивости $J_i^\epsilon(A)$, достаточно, а в случае выполнения одного из условий

1. $i=1$,
2. $i=2$, $I_{\text{SUM}} \neq \emptyset$,
3. $i=3$, $I_{\text{SUM}} = N_r$

и необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\max \{ \rho_s^A(t_0, t) : s \in N_r \} \geq \epsilon \forall t \in T, t \neq t_0. \quad (1)$$

Доказательство. Достаточность. При выполнении условий теоремы для любой траектории $t \in T$, $t \neq t_0$ существует индекс $s \in N_r$ такой, что $\rho_s^A(t_0, t) \geq \epsilon$. Поэтому $\tau_s^{A+B}(t_0, t) < 0 \forall B \in B(\epsilon)$ т. е. $t_0 \in Q_i(A+B) \forall B \in B(\epsilon)$. Следовательно, $t_0 \in J_i^\epsilon(A)$.

Необходимость. Пусть при $t=t'$, $t' \neq t_0$ неравенство (1) не выполняется. Тогда $\rho_s^A(t_0, t') < \epsilon \forall s \in N_r$. Из доказательства леммы вытекает, что существует матрица $B \in B(\epsilon)$, для которой справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \tau_s^{A+B}(t_0, t') &= 0 \forall s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}, \\ \tau_s^{A+B}(t_0, t') &> 0 \forall s \in I_{\text{SUM}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $t_0 \notin J_1^\epsilon(A)$; $t_0 \notin J_2^\epsilon(A)$ при $I_{\text{SUM}} \neq \emptyset$; $t_0 \notin J_3^\epsilon(A)$ при $I_{\text{SUM}} = N_r$. Теорема доказана.

Радиусом устойчивости множества $Q_i(A)$, $i \in N_3$ назовем число

$$\rho_i(A) = \sup \{ \epsilon > 0 : J_i^\epsilon(A) \neq \emptyset \}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_i(A) = \max_{t_1 \in Q_i(A)} \min_{t_2 \in T \setminus \{t_1\}} \max_{s \in N_r} \rho_s^A(t_1, t_2).$$

Легко видеть, что соотношения (1) эквивалентны неравенству

$$\min_{t \in T \setminus \{t_0\}} \max_{s \in N_r} \rho_s^A(t_0, t) \geq \epsilon.$$

Поэтому из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. $\rho_i(A) \geq \Phi_i(A) \forall A \in R^m$, $i \in N_3$. Причем

$$\begin{aligned} \rho_1(A) &= \Phi_1(A); \\ \rho_2(A) &= \Phi_2(A), \text{ если } I_{\text{SUM}} \neq \emptyset; \\ \rho_3(A) &= \Phi_3(A), \text{ если } I_{\text{SUM}} = N_r. \end{aligned}$$

Замечание 2. Из леммы вытекает, что в соотношениях (1) и формуле $\Phi_i(A)$ можно заменить $\rho_s^A(t_1, t_2)$ на $\Gamma_s^A(t_1, t_2)$. Величина $\Gamma_s^A(t_1, t_2)$, в отличие от $\rho_s^A(t_1, t_2)$, легко вычисляется и позволяет использовать теоремы 2 и 3 на практике.

Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь и Международной соровской программой образования в области точных наук (для второго автора).

1. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82.

2. Гордеев Э. Н. Об устойчивости задач на узкие места // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. № 9. С. 1391.

3. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О полноте многокритериальных задач на системах подмножеств // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 3. С. 25.

4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

5. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 12.01.95.

УДК 62-50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

For descriptor systems with delay in state, i. e. for systems of the form $A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t)$, the problem of computing the transfer matrix has been solved. The final expression is suitable for computer use.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему управления вида:

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), t \geq 0, \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), -h \leq t < 0, x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

с выходом $y(t) = Cx(t)$, $t \geq 0$, где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^l$; A_0, A, A_1, B, C — заданные матрицы соответствующих размерностей; $h(h>0)$ — запаздывание; $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная n -вектор функция; x_0 — заданный n -вектор.

Если матрица A_0 является сингулярной, т. е. $\det A_0 = 0$, то система (1) называется дескрипторной или сингулярной. Системы такого типа возникают во многих технических областях, как, например, теория электрических цепей, теория сингулярно возмущенных систем, композитных систем и т. д. Наиболее полная библиография по таким системам содержится в работе [1].

Согласно [2, 3], пара $(x_0(\cdot), Bu(t))$, состоящая из начального состояния (2) и неоднородности $Bu(t)$, $t \geq 0$, называется допустимой, если система (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t \geq 0$. Если для каждой допустимой пары система (1) имеет единственное решение, то она является совместной. Доказано [3], что система (1) совместна тогда и только тогда, когда тройка матриц (A_0, A, A_1) является регулярной, т. е. существует число $\lambda^* \in \mathbb{C}$ такое, что матрица $\Omega(\lambda^*) = \lambda^* A_0 + A + A_1 \exp(-\lambda^* h)$ является невырожденной.

В данной работе для совместной системы (1) предлагается алгоритм, особенно удобный при использовании ЭВМ, построения матрицы $(pA_0 - A - A_1 \exp(-ph))^{-1}$, которая является одним из сомножителей, входящих в передаточную матрицу

$$G(p) = C(pA_0 - A - A_1 \exp(-ph))^{-1} B \quad (3)$$

системы (1) — (3). Как известно, передаточные матрицы широко применяются в теории автоматического регулирования [4] и являются одним из основных инструментов анализа системы (1) — (3) на устойчивость.

Для вычисления матрицы $(pA_0 - A - A_1 \exp(-ph))^{-1}$ поступаем следующим образом. Произвольно выберем число $\lambda^* \in \mathbb{C}$, но так, чтобы $\det \Omega(\lambda^*) \neq 0$ (это всегда можно сделать, ибо квазиполином $\det \Omega(\lambda)$ является ненулевым и его корни образуют множество меры нуль). Тогда

$$\begin{aligned} (pA_0 - A - A_1 \exp(-ph))^{-1} &= [(p + \lambda^*)A_0 - (\lambda^* A_0 + A + A_1 \exp(-\lambda^* h)) + \\ &+ (\exp(-\lambda^* h) - \exp(-ph))A_1]^{-1} = [(p + \lambda^*) \hat{A}_0 - I + (\exp(-\lambda^* h) - \\ &- \exp(-ph)) \hat{A}_1]^{-1} \Omega^{-1}(\lambda^*), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\hat{A}_0 = \Omega^{-1}(\lambda^*)A_0$, $\hat{A}_1 = \Omega^{-1}(\lambda^*)A_1$, а I — единичная $n \times n$ -матрица. Так как матрица $\Omega(\lambda^*)$ является постоянной, то с точки зрения вычислений нахождение матрицы $\Omega^{-1}(\lambda^*)$ не представляет проблем. Для вычисления же матрицы

$$[(p+\lambda^*)\hat{A}_0 - I + (\exp(-\lambda^*h) - \exp(-ph))\hat{A}_1]^{-1} \quad (6)$$

воспользуемся методом Фадеева [5]. Введем обозначения:

$$\mu = p + \lambda^*, \quad \eta = \exp(-\lambda^*h) - \exp(-ph). \quad (7)$$

Тогда, следуя [6], матрица (6) может быть записана в виде

$$[(p+\lambda^*)\hat{A}_0 - I + (\exp(-\lambda^*h) - \exp(-ph))\hat{A}_1]^{-1} = [\mu\hat{A}_0 - I + \eta\hat{A}_1]^{-1} =$$

$$= -\mu^{-1}[\mu^{-1}I - (\hat{A}_0 + \mu^{-1}\eta\hat{A}_1)]^{-1} = \quad (8)$$

$$= -\frac{B_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij} \mu^{n-i-j} \eta^{j-1}}{1 + \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n+1-\alpha} a_{\alpha\beta} \mu^{n+1-\alpha-\beta} \eta^{\beta-1}},$$

где $n \times n$ -матрицы B_{n-1} , B_{ij} и числа $a_{\alpha\beta}$ вычисляются рекуррентным образом по матрицам $\hat{A}_0$, $\hat{A}_1$:

$$\begin{cases} a_{n-1,1} = -\text{Sp}(\hat{A}_0 B_{n-1}), \\ a_{n-1,2} = -\text{Sp}(\hat{A}_1 B_{n-1}), \end{cases} \quad \begin{cases} B_{n-1} = I, \\ B_{n-2,1} = a_{n-1,1}I + \hat{A}_0 B_{n-1}, \\ B_{n-2,2} = a_{n-1,2}I + \hat{A}_1 B_{n-1}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i1} = -\frac{1}{(n-i)} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{i1}), \\ a_{i2} = -\frac{1}{(n-i)} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{i,2} + \hat{A}_1 B_{i1}), \\ \dots \dots \dots \\ a_{ij} = -\frac{1}{(n-i)} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{ij} + \hat{A}_1 B_{i,j-1}), \\ \dots \dots \dots \\ a_{i,n+1-i} = -\frac{1}{(n-i)} \text{Sp}(\hat{A}_1 B_{i,n-i}), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{i-1,1} = a_{i1}I + \hat{A}_0 B_{i1}, \\ B_{i-1,2} = a_{i2}I + \hat{A}_0 B_{i2} + \hat{A}_1 B_{i1}, \\ \dots \dots \dots \\ B_{i-1,j} = a_{ij}I + \hat{A}_0 B_{ij} + \hat{A}_1 B_{i,j-1}, \\ \dots \dots \dots \\ B_{i-1,n+1-i} = a_{i,n+1-i}I + \hat{A}_1 B_{i,n-i}, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$i = \overline{n-2, 1}, \quad j = \overline{2, n-i},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{01} = -\frac{1}{n} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{01}), \\ a_{02} = -\frac{1}{n} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{02} + \hat{A}_1 B_{01}), \\ \dots \dots \dots \\ a_{0n} = -\frac{1}{n} \text{Sp}(\hat{A}_0 B_{0n} + \hat{A}_1 B_{0,n-1}), \\ a_{0,n+1} = -\frac{1}{n} \text{Sp}(\hat{A}_1 B_{0n}). \end{array} \right.$$

Таким образом, на основании соотношений (5) — (9) получаем следующий результат:

$$(pA_0 - A - A_1 \exp(-ph))^{-1} = - \frac{\hat{B}_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{B}_{ij} \mu^{n-i-j} \eta^{j-1}}{1 + \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{n+1-\alpha} a_{\alpha\beta} \mu^{n+1-\alpha-\beta} \eta^{\beta-1}}, \quad (10)$$

$$\text{где } \hat{B}_{n-1} = B_{n-1} \Omega^{-1}(\lambda^*), \hat{B}_{ij} = B_{ij} \Omega^{-1}(\lambda^*), \\ i = 0, n-2, j = 1, n-i.$$

Отметим, наконец, что формула (10) не зависит от выбора числа $\lambda^* \in \mathbb{C}$.

П р и м е р. Рассмотрим систему (1) при условии, что

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Ясно, что дескрипторная система (1), (11) является совместной. Положим $\lambda^* = 0$. Тогда

$$\Omega^{-1}(\lambda^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно рекуррентным формулам (9) имеем:

$$B_1 = I;$$

$$a_{11} = -3, a_{12} = 0,$$

$$a_{01} = 0, a_{02} = 2, a_{03} = 0; \quad B_{01} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Так как } \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{01} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то на основании (10) окончательно получаем

$$(pA_0 - A - \exp(-ph)A_1)^{-1} = - \frac{\hat{B}_1 + (\hat{B}_{01}\mu + \hat{B}_{02}\eta)}{1 + a_{11}\mu + a_{12}\eta + a_{01}\mu^2 + a_{02}\mu\eta + a_{03}\eta^2} = \\ = \frac{1}{2p \exp(-ph) + p - 1} \begin{bmatrix} -2p & p+1 \\ -2p+1 & p - \exp(-ph) \end{bmatrix}.$$

Аналогичный результат, конечно, можно получить, используя прямую формулу [5]:

$$(pA_0 - A - \exp(-ph)A_1)^{-1} = \frac{\text{adj}(pA_0 - A - \exp(-ph)A_1)}{\det(pA_0 - A - \exp(-ph)A_1)}.$$

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Асмыкович И. К. Дескрипторные системы управления /Ин-т математики АН БССР. Мн., 1988.

2. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1988. № 2. С. 76.

3. Размыслович Г. П. // Материалы VI конф. математиков Беларуси. Гродно, 1992.

4. Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М., 1983.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.

6. Rosenbrock Н. Н. State Space and Multivariable Theory. New York, 1970.

Поступила в редакцию 04.05.95.

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРЕЙФОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Theoretical investigation of the forced drift periodic motions in a viscous fluid is made on the basis of the common hydrodynamic nonlinear equations. The effect of the vertical turbulent exchange coefficient depending upon depth and the partial sliding on the bottom is studied. Coriolis force is taken into account. Suppose that disturbing force does not depend on the horizontal coordinates.

Известно, что в глубоководных бассейнах коэффициент вертикального турбулентного обмена ν не является постоянной величиной. Так, например, в работе [1] на основе данных непосредственных измерений в Атлантическом океане приведена зависимость ν от вертикальной координаты. Теоретические исследования чисто дрейфовых течений, не зависящих от времени при переменном ν , проводились в работах [2—3].

В данной работе предполагается, что коэффициент вертикального турбулентного обмена является функцией глубины и рассматриваются две из возможных моделей движения вязкой жидкости вблизи твердой границы: 1) при условии полного прилипания и 2) при условии частичного скольжения.

1. Пусть к поверхности однородной вязкой жидкости постоянной глубины h под углом Θ к оси абсцисс прикладываются периодические по времени касательные напряжения вида

$$\bar{\tau}_1 = (\tau_1 \cos \Theta \cos \sigma t, \tau_1 \sin \Theta \cos \sigma t), (\tau_1 \text{ const}). \quad (1)$$

Горизонтальные составляющие U_1 и V_1 вектора скорости периодического дрейфового течения, образующегося в жидкости под действием «ветра» (1), определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\omega V = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 2\omega U = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial V}{\partial z}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \tau_1 \cos \Theta \cos \sigma t, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \tau_1 \sin \Theta \cos \sigma t \quad \text{при } z=0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma U, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma V \quad \text{при } z=-1. \quad (4)$$

Уравнения (2) и граничные условия (3)—(4) записаны в безразмерной форме и получаются из нелинейных уравнений гидродинамики. В силу того, что возмущающая сила $\bar{\tau}_1$ не зависит от x_1 и y_1 , U_1 и V_1 ($W_1=0$) также от них не зависят. Размерные величины (с индексом 1) определяются по правилу: $U = U_1 / \sqrt{gh}$, $V = V_1 / \sqrt{gh}$, $t = t_1 \sqrt{g/h}$, $\sigma = \sigma_1 \sqrt{h/g}$, $z = z_1 / h$, $\tau = -\tau_1 / (\rho gh \varepsilon)$, $\varepsilon = \nu_0 / (h \sqrt{gh})$, $\omega = \omega_1 \sqrt{h/g}$, ($\nu_0 = \nu(0)$, $\nu(z) = \nu_0 \cdot f(z)$, (ω_1 -параметр Кориолиса); $\gamma = \frac{\gamma_1 h}{\rho \nu_0}$, где γ_1 -коэффициент частичного скольжения.

Если известно решение $W(z, t, \omega) = W_1(\omega) + iW_2(\omega)$ граничной задачи

$$\varepsilon \frac{d}{dz} f \frac{dW}{dz} - i(\sigma + 2\omega)W = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\tau}{2} \quad \text{при } z=0; \quad (6)$$

$$\frac{dW}{dz} = \gamma W \quad \text{при } z=-1,$$

то легко показать, что решение исходной задачи (2)—(4) определяется по формулам:

$$\begin{aligned} U &= W_1(\omega) \cos(\sigma t + \Theta) - W_2(\omega) \sin(\sigma t + \Theta) + W_1(-\omega) \cos(\sigma t - \Theta) + \\ &\quad + W_2(-\omega) \sin(\sigma t - \Theta), \\ V &= W_1(\omega) \sin(\sigma t + \Theta) - W_2(\omega) \cos(\sigma t + \Theta) - W_1(-\omega) \sin(\sigma t - \Theta) + \\ &\quad + W_2(-\omega) \cos(\sigma t - \Theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в случае $\gamma=0$ получаем решение исходной задачи при условии полного скольжения на дне бассейна, а в случае $\gamma=-\infty$ — при условии полного прилипания, т. е. условие (4) является более общим.

Если функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — фундаментальные решения уравнения (5), то решение задачи (5)—(6) имеет вид

$$W = \frac{\tau}{2} \frac{\varphi_1(\varphi_{2h} - \gamma \varphi'_{2h}) - \varphi_2(\varphi_{1h} - \gamma \varphi'_{1h})}{\varphi'_{10}(\varphi_{2h} - \gamma \varphi'_{2h}) - \varphi_{20h}(\varphi_{1h} - \gamma \varphi'_{1h})},$$

где $\varphi'_{i0} = \varphi'_i(z)$ при $z = 0$, $\varphi_{ih} = \varphi_i(z)$ при $z = -1$, $i = 1, 2$.

Аналитическое решение уравнения (5) можно найти только для специального вида функций $f(z)$. Например, для $f = (1+az)^\alpha$ ($\alpha \neq 2$) имеем

$$W = (1+az)^{\frac{1-\alpha}{2}} [C_1 J_\nu(\kappa) + C_2 Y_\nu(\kappa)], \quad \text{где } J_\nu, Y_\nu \text{ — функции Бесселя,}$$

$$\kappa = \frac{2}{2-\alpha} \sqrt{-i \frac{\sigma+2\omega}{a^2}} (1+az)^{\frac{2-\alpha}{2}}, \quad \nu = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \quad \text{Однако в реальных условиях}$$

$f(z)$ — весьма сложная функция глубины ($f(z) > 0$), и $\varphi_{1,2}$ аналитически найти не удастся. Но учитывая, что величина $(\sigma+2\omega)/\varepsilon \gg 1$, к этому уравнению можно применить метод ВКБ. Тогда, $W = C_1 \varphi_1(z) + C_2 \varphi_2(z)$, где фундаментальные решения $\varphi_{1,2}$ и их производные имеют вид:

$$\varphi_{1,2} = \mp \frac{i}{\lambda} f^{-1/4} \exp \left(\pm i \lambda \int_{-1}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right) (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$\varphi'_{1,2} = f^{-3/4} \exp \left(\pm i \lambda \int_{-1}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right) (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$\lambda = \sqrt{-i \frac{\sigma+2\omega}{\varepsilon}}.$$

Заметим, что $\varphi_{1,2}$ являются точными для $f(z) = \text{const}$. Следует отметить, что функцию $f(z)$ можно задавать не только аналитически, но и таблично,

так как интегралы $\int_{-1}^z dz / \sqrt{f(z)}$ можно вычислять численно при любых $f(z) > 0$.

Определяя C_1 и C_2 из граничных условий и подставляя значение W в (7), окончательно получаем решение исходной задачи. Ввиду громоздкости выражений, определяющих $C_{1,2}$, здесь они не приводятся.

2. Для выяснения влияния на структуру волнового поля непостоянства ν и периода возмущающей силы $2\pi/\sigma$ были проведены численные расчеты для законов изменения $\nu(z)$, приведенных на рис. 1. Кривая a получена на основании анализа данных непосредственных измерений в Атлантическом океане [1]; кривая b $\nu(z) = \nu_0(1-z)^{3/2}$ — теоретическим путем [4]; в третьем случае (c) ν — постоянная величина.

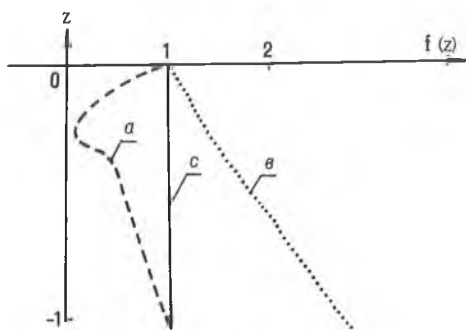


Рис. 1. Законы изменения

Рассчитывались значения горизонтальных составляющих вектора скорости U и V , определялись модуль скорости $R(z, t) = \sqrt{U^2 + V^2}$ и угол ψ между осью Ox и направлением вектора скорости течения. Численные расчеты были проведены при $\omega(\text{с}^{-1})$, $h(\text{м})$, τ (дин·см $^{-2}$), изменявшихся в пределах: $3,6 \cdot 10^{-6} \leq \omega \leq 4,3 \cdot 10^{-5}$; $100 \leq h \leq 1000$; $\tau = 1$.

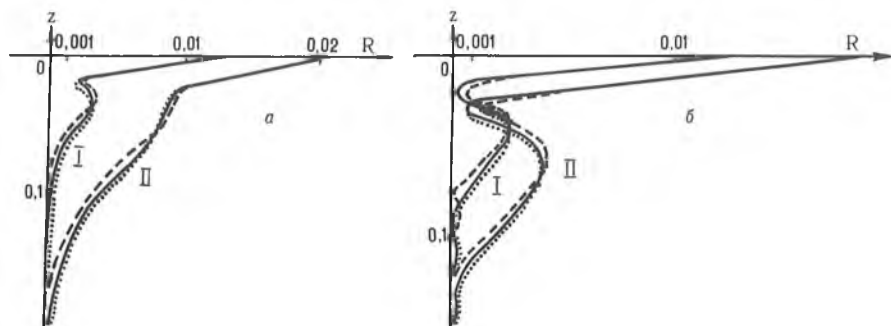


Рис. 2. Зависимость модуля безразмерной скорости от безразмерной глубины:
а — $\omega = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$; б — $\omega = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ при $\sigma = 0,001$ (I), $\sigma = 0,00046$ (II)

Анализ численных расчетов показывает (в случае полного прилипания на дне бассейна), что структура волнового поля существенно зависит как от частоты σ , так и от поведения v . На рис. 2 показана зависимость модуля вектора скорости при различных v и σ , а на рис. 3 дана зависимость ψ от этих же величин. Все графики приведены для момента времени $2\pi/\sigma$ и $\Theta = 0$.

Согласно теории Экмана, вектор скорости чисто дрейфового течения ($\sigma = 0$ и $\vec{U}$ не зависит от времени) с уменьшением z вращается против часовой стрелки (спираль Экмана), причем амплитуда вектора скорости уменьшается с ростом глубины по экспоненциальному закону, а угол поворота вектора — по линейному. При этом вектор скорости течения на свободной поверхности отклоняется на угол $\alpha = 45^\circ$ по часовой стрелке от направления вектора касательных напряжений.

Из рис. 2 и 3 видно, что в дрейфовом периодическом по времени течении как при постоянном, так и при переменном v , даже если $\sigma = 0,00046$, характер изменения с глубиной скорости и угла поворота весьма значительно отличается от экмановского. Заметное приповерхностное течение занимает более глубокий слой, но при $z \geq 19$ м падение скорости возрастает. По сравнению с экмановским вектор скорости поворачивается значительно быстрее.

При увеличении σ (уменьшение периода τ) характер изменения указанных величин меняется и количественно и качественно; скорость приповерхностного течения становится значительно меньше.

Кроме того, в экваториальной области ($\omega \approx 10^{-6} \text{ с}^{-1}$) профиль вектора скорости по глубине имеет несколько максимумов, причем каждый последующий меньше предыдущего. Интересно отметить, что изменение с глубиной угла поворота вектора скорости вблизи экватора носит ступенчатый характер и резко отличается от линейного (см. рис. 3). Рис. 2, 3 показывают, что зависимость скорости периодического дрейфового течения от периода возмущающей силы значительно сильнее, чем от характера изменения вертикального коэффициента турбулентного обмена. Однако при увеличении v_0 при любых σ скорость течения возрастает.

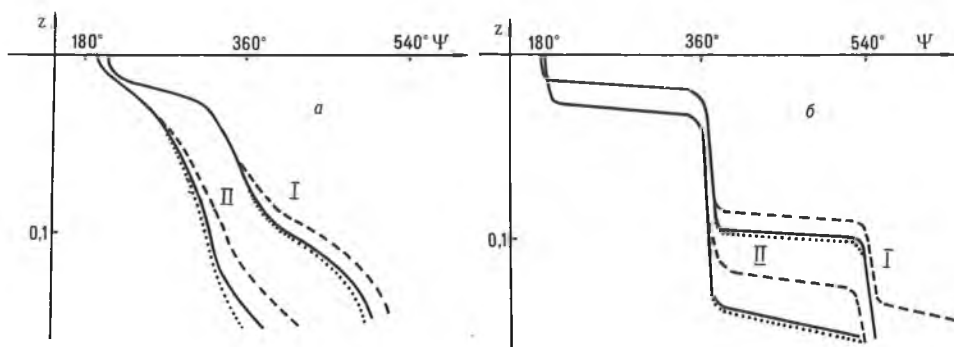


Рис. 3. Зависимость угла ψ от безразмерной глубины. Обозначения те же, что и на рис. 2

Отметим также, что в периодических дрейфовых течениях угол отклонения вектора скорости течения на свободной поверхности от направления вектора касательных напряжений составляет уже не 45° , как в случае чисто дрейфовых течений, а зависит от периода возмущающей силы. Так, например, на рис. 3 видно, что этот угол равен почти 180° .

3. Аналогичные расчеты проводились и для случая частичного скольжения на дне. В работе [5] показано, что учет этого условия на твердой границе приводит к существенному изменению волнового поля в случае, когда к свободной поверхности прикладываются периодические поверхностные давления. Однако, как показали расчеты, для периодических дрейфовых течений вид граничных условий на дне бассейна практически не сказывается на волновом поле. С физической точки зрения этот факт понятен, так как скорость дрейфовых течений имеет существенное значение лишь в приповерхностном слое, а при увеличении глубины быстро стремится к нулю.

1. Колесников А. Г. и др. // Океанология. 1961. № 4. С. 17.
2. Доброклонский С. В. // Там же. 1969. № 1. С. 35.
3. Доценко С. Ф. // Морские гидрофизические исследования. 1971. № 1. С. 81.
4. Куфтарков Ю. М. // Там же. 1970. № 4. С. 23.
5. Чинь Л. К. Влияние частичного скольжения на распространение длинных волн в вязкой жидкости: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 03.03.95.

УДК 62-752.534

В. П. САВЧУК, В. А. САВЕНКОВ, О. Н. ВЯРЬВИЛЬСКАЯ

КОЛЕБАНИЯ НАТЯНУТОГО ПРОЛЕТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗОК

The vibrations of the span during the motion at a constant speed of a single load or a load stream are investigated. The case, when the span rigidity is neglected, is considered in detail. The non — resonance regimes of the motion are found.

Пролет существующих транспортных систем, если отвлечься от незначительных деталей, представляет собой одну или несколько параллельных балок, работающих на изгиб. Несущая способность такого пролета в конечном счете определяется жесткостью его балок. Колебания однопролетной балки при движении по ней нагрузки подробно изучены (см., например, [1]). В последнее время для высокоскоростных транспортных систем предложена конструкция пролета, несущая способность которого в значительной степени обеспечивается сильно натянутыми гибкими элементами. В простейшем случае этот пролет представляет собой цилиндрический гибкий элемент (трос, пакет гибких полос и т. п.), заключенный в тонкостенный металлический корпус. В данной работе исследуются колебания этого пролета под действием одиночной и потока нагрузок (сил), движущихся с постоянной скоростью v , с учетом натяжения T гибкого элемента.

Уравнение поперечных колебаний пролета возьмем в виде [1]

$$EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^5}{\partial t \partial x^4} \right) u - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f, \quad (1)$$

где EI — жесткость пролета, μ — коэффициент затухания, ρ — масса единицы длины пролета, f — интенсивность внешних сил, действующих на пролет. Ось Ox считаем горизонтальной и совпадающей с осью пролета при $f(x, t) \equiv 0$, ось Ou направлена вертикально вниз.

Корпус пролета будем считать свободно опертым о жесткие опоры в точках $x=0, l_0$. Тогда

$$u(0, t) = u(l_0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l_0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

и решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l_0}. \quad (3)$$

Функция $q_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho q_n'' + \mu E I n_1^4 q_n' + (E I n_1^4 + T n_1^2) q_n = f_n, \quad (4)$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l_0} \int_0^{l_0} f(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l_0} dx, \quad n_1 = \frac{\pi n}{l_0}.$$

В дальнейшем будем считать $u(x, t)$ отклонением точек пролета от равновесной формы, принимаемой пролетом под действием собственного веса.

Одиночная нагрузка. Пусть в момент времени $t=0$ на покоящийся пролет вступает одиночная нагрузка величины P , движущаяся с постоянной скоростью v . В этом случае

$$f = \begin{cases} P \delta(x - vt), & 0 < t < t_1; \\ 0, & t \geq t_1; \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} \frac{2P}{l_0} \sin n_1 vt, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases}$$

где $t_1 = l_0/v$.

Из уравнения (4) при нулевых начальных условиях имеем

$$q_n = \frac{P}{l_0 \beta_n} \left\{ \frac{\alpha_n (\cos n_1 vt - e^{-\alpha n t} \cos \beta_n t) + (n_1 v + \beta_n) (\sin n_1 vt + e^{-\alpha n t} \sin \beta_n t)}{E I n_1^4 + T n_1^2 + \rho n_1 v (n_1 v + 2 \beta_n)} \right\} -$$

$$-\frac{\alpha_n(\cos(n_1 v + 2\beta_n)t - e^{-\alpha_n t} \cos \beta_n t) + (n_1 v - \beta_n)(\sin(n_1 v + 2\beta_n)t - e^{-\alpha_n t} \sin \beta_n t)}{EIn_1^4 + Tn_1^2 + \rho n_1 v(n_1 v - 2\beta_n)} \Bigg\}, \quad 0 < t < t_1; \quad (5)$$

$$q_n = \frac{Pe^{-\alpha_n t}}{l_0 \beta_n} \left\{ \frac{\alpha_n(e^{\alpha_n t_1} \cos \gamma_n - \cos \beta_n t) + (n_1 v + \beta_n)(e^{\alpha_n t_1} \sin \gamma_n + \sin \beta_n t)}{EIn_1^4 + Tn_1^2 + \rho n_1 v(n_1 v + 2\beta_n)} - \frac{\alpha_n(e^{\alpha_n t_1} \cos \delta_n - \cos \beta_n t) + (n_1 v + \beta_n)(e^{\alpha_n t_1} \sin \delta_n + \sin \beta_n t)}{EIn_1^4 + Tn_1^2 + \rho n_1 v(n_1 v - 2\beta_n)} \right\}, \quad t \geq t_1. \quad (6)$$

Здесь

$$\gamma_n = (n_1 v + \beta_n)t_1 - \beta_n t, \quad \delta_n = \gamma_n + 2\beta_n t, \quad \alpha_n = \frac{\mu EIn_1^4}{2\rho}, \quad \beta_n^2 = \frac{EIn_1^4 + n_1^2}{\rho} - \alpha_n^2.$$

Отметим тот факт, что при $t > t_1$, т. е. при собственных колебаниях пролета, колебательный характер изменения амплитуды имеет лишь конечное число гармоник пролета. Это следует из того факта, что при $\mu \neq 0$ и достаточно больших n величина β_n становится чисто мнимой.

Рассмотрим подробнее случай, когда жесткостью пролета можно пренебречь. Тогда формулы (5), (6) упростятся и примут вид

$$q_n = \frac{2Pl_0}{\rho n^2 \pi^2 a(v^2 - a^2)} \left\{ v \sin(an_1 t) - a \sin(vn_1 t), \quad 0 < t < t_1; \right. \\ \left. v \left[\sin(an_1 t) + \sin n_1 \left(l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at \right) \right], \quad t \geq t_1, \right. \quad (7)$$

где $a = (T/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения поперечных возмущений вдоль гибкого пролета. Легко убедиться, что $q_n = 0$ для $t \geq t_1$ при

$$a = (2k+1)v, \quad k=1, 2, \dots \quad (8)$$

Это означает, что имеет место следующий интересный факт: если скорость движения нагрузки удовлетворяет условию (8), то после схода нагрузки с пролета деформация последнего отсутствует.

Благодаря простоте функции (7) ряд (3) можно просуммировать для любых значений v . В частности, при $v > a$ и $0 \leq t \leq t_1$

$$u = \frac{P}{\rho a(v^2 - a^2)} \begin{cases} (v-a)x, & 0 \leq x < at; \\ a(vt-x), & at \leq x < vt; \\ 0, & vt \leq x \leq l_0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при скорости $v > a$ нагрузка опережает деформацию гибкого пролета и движется по его невозмущенной поверхности. Если, считая $v > a$, найти конечное выражение для u при $t_1 < t < l_0/a$, то для величины максимального динамического прогиба пролета получим формулу

$$u_{\max} = \frac{Pl_0}{2v\sqrt{\rho T}}.$$

Поток нагрузок. Пусть в момент времени $t=0$ на покоящийся пролет вступает первая из потока i_0 нагрузок, движущихся с постоянной скоростью v . Тогда, в силу линейности задачи, динамический прогиб пролета, очевидно, будет определяться формулой (3), в которой $q_n(t)$ должно быть заменено на

$$Q_n(t) = q_n(t) + \sum_{i=2}^{i_0} q_n \left(t - \frac{l_1 + \dots + l_{i-1}}{v} \right) \sigma \left(\frac{l_1 + \dots + l_{i-1}}{v} \right),$$

где l_i — расстояние между i -й и $(i+1)$ -й нагрузками,

$$\sigma(b) = \begin{cases} 1, & t \geq b; \\ 0, & t < b. \end{cases}$$

Величины нагрузок могут быть различными.

Из равенства (6) следует, что после схода нагрузки с пролета вызванные ею колебания при $\mu \neq 0$ быстро затухают. Поэтому ясно, что при любых значениях постоянных v , i_0 , l динамический прогиб пролета будет конечным. Если же $\mu = 0$, то при движении потока нагрузок максимальный динамический прогиб пролета может неограниченно возрастать с увеличением i_0 , т. е. возможны резонансные режимы движения. Определение в общем случае резонансных режимов и режимов движения в некотором смысле наиболее выгодным является темой отдельного исследования. Здесь же ограничимся рассмотрением частных случаев для гибкого ($EI = 0$) пролета, считая нагрузки одинаковыми по величине.

1. При $v = a/(2k+1)$, $k=1,2,\dots$, как уже указывалось, деформация пролета, вызванная нагрузкой, после схода ее с пролета исчезает. Следовательно, динамический прогиб определяется лишь нагрузками, находящимися на пролете. Анализ характера деформации пролета позволяет сделать вывод, что при

$$l_i \geq \frac{2k}{2k+1} l_0$$

каждая нагрузка движется по невозмущенному участку пролета, т. е. все нагрузки находятся в одинаковых условиях движения.

2. Предположим, что расстояния между нагрузками одинаковы, т. е. $l_i = l$ и $v = a/2k$, $l = l_0(j-0,5)/k$, $k, j=1,2,\dots$.

Нетрудно убедиться, что в этом случае $Q_n(t) = q_n(t) \sum_{i=1}^{i_0} (-1)^{i-1}$ для $t > l_0/v + l(i_0-1)/v$. Это значит, что при рассматриваемом режиме движения прогиб пролета после прохождения i_0 -й нагрузки равен прогибу после прохождения одной нагрузки, если i нечетно, и равен нулю, если i четно.

3. Пусть $l_i = l = 2jl_0v/a$, $v = a/(2k+1)$, $j, k=1,2,\dots$.

В этом случае $Q_n(t) = i_0 q_n(t)$ для $t > l_0/v + l(i-1)/v$. Это значит, что динамический прогиб растет пропорционально количеству прошедших по пролету нагрузок, т. е. происходит резонансная раскачка пролета.

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.

Поступила в редакцию 29.03.95.

УДК 517.95

А. И. ГЛУШЦОВ

МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ЗАДАЧАХ ЭКРАНИРОВАНИЯ

The problem of shielding of electromagnetic fields is investigated by integral equation method and by discrete sources method.

Под экраном понимается тонкостенная замкнутая оболочка, защищающая внутреннюю область от внешнего электромагнитного воздействия. При строгом рассмотрении экранирующих оболочек необходимо учитывать поле в самом экране, что усложняет геометрию задачи, ее математическую формулировку и решение. В связи с этим вводятся так называемые усредненные граничные условия [1], которые связывают поля по обе стороны экрана и ставятся на воображаемой бесконечно тон-

кой срединной поверхности экрана. Возникающие краевые задачи отличаются от традиционных задач электродинамики с граничными условиями сопряжения и импедансными граничными условиями и требуют отдельного рассмотрения.

В общем случае усредненные граничные условия имеют вид векторных соотношений

$$\begin{aligned} [n, E_1 - E_2] &= iN [n, [n, H_1 + H_2]], \\ [n, H_1 - H_2] &= -i\Pi [n, [n, E_1 + E_2]], \end{aligned} \quad (1)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к S , $N = (\omega\mu/k)\text{tg}(k\delta/2)$, $\Pi = (k/\omega\mu)\text{tg}(k\delta/2)$, ω — круговая частота (временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$), $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ — волновое число, ϵ — комплексная диэлектрическая проницаемость экрана, μ — магнитная проницаемость экрана, δ — толщина экрана, связывающих предельные значения внутреннего E_1 , H_1 и внешнего E_2 , H_2 электромагнитных полей на срединной поверхности экрана S .

Ограничимся рассмотрением частного случая цилиндрического экрана [2], поперечное сечение которого представляет плоскую область D_1 , ограниченную контуром Ляпунова Γ , $D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_1$. Если первичное поле Е-поляризовано и не зависит от продольной координаты z , то задача сводится к нахождению продольных составляющих $u_j(x, y)$ электрического вектора вторичных полей, удовлетворяющих в D_j ($j=1, 2$) уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \quad (2)$$

скалярным усредненным граничным условиям на Γ :

$$\begin{aligned} \partial u_1 - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 &= f_2 \equiv \gamma_2 u_0, \\ \partial u_2 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 &= f_2 \equiv \delta_2 u_0 - \partial u_0 \end{aligned} \quad (3)$$

и дополнительному условию излучения на бесконечности

$$\frac{\partial u_2}{\partial \rho} - ik_2 u_2 = o(\rho^{-1/2}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь $k_j = \omega\sqrt{\epsilon_j\mu_j}$ обозначает волновое число среды в области D_j , ϵ_j , μ_j — диэлектрическая и магнитная проницаемости сред в D_j , u_0 — продольная составляющая электрического вектора внешнего первичного поля, ∂ — производная по направлению внешней нормали к Γ , а постоянные коэффициенты

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -0,5\omega\mu_1\left(\frac{1}{N} - \Pi\right), \quad \gamma_2 = 0,5\omega\mu_1\left(\frac{1}{N} + \Pi\right), \\ \delta_1 &= -0,5\omega\mu_2\left(\frac{1}{N} + \Pi\right), \quad \delta_2 = 0,5\omega\mu_2\left(\frac{1}{N} - \Pi\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $R(D_j)$ множество комплекснозначных функций $u \in C^2(D_j) \cap C(\bar{D}_j)$, имеющих правильную нормальную производную на Γ [3].

Теорема 1. Если для параметров задачи выполнены условия

$$\omega > 0, \mu_j > 0, k_j > 0, \delta > 0, 0 < \arg k \leq \pi/2, \quad (6)$$

то задача (2)–(4) не может иметь более одного решения класса $R(D_j)$.

Доказательство. Пусть u_j — решение однородной задачи (2)–(4). Обозначим через Γ_R окружность радиуса R , охватывающую область D_1 , а через D_R — область, заключенную между контуром Γ и

окружностью Γ_R . Применим к функциям u_1 и $\bar{u}_1$, u_2 и $\bar{u}_2$ первую формулу Грина в областях D_1 и D_R соответственно:

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} u_1 \Delta \bar{u}_1 ds &= \int_{\Gamma} u_1 \partial \bar{u}_1 dl - \iint_{D_1} |\text{grad } u_1|^2 ds, \\ \iint_{D_R} u_2 \Delta \bar{u}_2 ds &= - \int_{\Gamma} u_2 \partial \bar{u}_2 dl + \int_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl - \iint_{D_R} |\text{grad } u_2|^2 ds. \end{aligned}$$

Из этих соотношений, используя уравнение (2) и граничные условия (3), получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl &= \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{k} \text{ctg} \frac{\bar{k}\delta}{2} \int_{\Gamma} |u_1 - u_2|^2 dl - \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{k} \text{tg} \frac{\bar{k}\delta}{2} \int_{\Gamma} |u_1 + u_2|^2 dl + \\ &+ \frac{\mu_2}{\mu_1} \iint_{D_1} (|\text{grad } u_1|^2 - k_1^2 |u_1|^2) ds + \iint_{D_R} (|\text{grad } u_2|^2 - k_2^2 |u_2|^2) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $0 < \arg k \leq \pi/2$, то $\text{Im}(\bar{k} \text{ctg} \frac{\bar{k}\delta}{2}) \geq 0$, $\text{Im}(\bar{k} \text{tg} \frac{\bar{k}\delta}{2}) \leq 0$ и из (7) вытекает неравенство $\text{Im} \int_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl \geq 0$. Это означает [3, с. 89], что $u_2=0$ вне Γ_R . В силу аналитичности $u_2=0$ в D_2 , тогда из (3) следует, что $u_1=\partial u_1=0$ на Γ и $u_1=0$ в D_1 . Теорема доказана.

Замечание. Используя технику [4], можно доказать единственность решения задачи (2)–(4) и для комплексных k_j .

Будем искать решение задачи (2)–(4) в виде потенциалов простого слоя

$$u_j(M) = \int_{\Gamma} v_j(P) G_j(M, P) dl_p, \quad M \in D_j \quad (8)$$

с непрерывными на Γ плотностями v_j . Здесь $G_j(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R_{MP})$, $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ханкеля, R_{MP} — расстояние между точками M и P . Используя скачок нормальной производной потенциала простого слоя, получим систему интегральных уравнений относительно $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ вида

$$v + Av = g, \quad (9)$$

где $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ — компактный оператор на $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$, компоненты которого определяются формулами:

$$\begin{aligned} (A_{11}v_1)(M) &= 2 \int_{\Gamma} v_1(P) [\partial_M G_1(M, P) - \gamma_1 G_1(M, P)] dl_p, \\ (A_{12}v_2)(M) &= -2\gamma_2 \int_{\Gamma} v_2(P) G_2(M, P) dl_p, \\ (A_{21}v_1)(M) &= 2\delta_1 \int_{\Gamma} v_1(P) G_1(M, P) dl_p, \\ (A_{22}v_2)(M) &= -2 \int_{\Gamma} v_2(P) [\partial_M G_2(M, P) - \delta_2 G_2(M, P)] dl_p, \end{aligned} \quad (10)$$

а правая часть $g = \begin{pmatrix} 2f_1 \\ -2f_2 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. Если $f_j \in C(\Gamma)$, выполнены условия (6) и k_2 не является собственным значением внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области D_1 , то существует единственное решение $v \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ системы интегральных уравнений (9).

Доказательство. Достаточно показать [3], что однородная система

$$v + Av = 0 \quad (11)$$

имеет только нулевое решение. Пусть $v \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ — решение (11). Тогда формулы (8) определяют непрерывные на всей плоскости функции u_j , которые в областях D_j совпадают с решением однородной задачи (2)—(4) и по теореме 1 $u_j = 0$ в D_j . В области D_2 функция u_1 является решением внешней однородной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, которая имеет только нулевое решение. Следовательно, $u_1 = 0$ на всей плоскости, откуда, используя скачок нормальной производной потенциала простого слоя на Γ , получаем, что $v_1 = 0$.

Аналогично, рассматривая u_2 в области D_1 , приходим к внутренней задаче Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u_2 + k_2^2 u_2 &= 0 \text{ в } D_1, \\ u_2|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку k_2 не является собственным значением, то $u_2 = 0$ в D_1 . Отсюда следует, что $v_2 = 0$. Теорема доказана.

Оказывается, что система интегральных уравнений (9) тесно связана с одним из эффективных численных методов решения дифракционных задач — методом дискретных источников [5].

Решение задачи (2)—(4) может быть выражено через граничные функции f_j с помощью функции Грина $g_j(M, P)$ этой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 u_1(M), \text{ если } M \in D_1 \\ \mu_1 u_2(M), \text{ если } M \in D_2 \end{aligned} \right\} = \int_{\Gamma} [\mu_2 g_1(M, P) f_1(P) - \mu_1 g_2(M, P) f_2(P)] dl_P. \quad (12)$$

Рассмотрим функции $\tilde{u}_j \in R(D_j)$, ($j=1, 2$), которые являются решениями уравнений (2) в D_j , а функция $\tilde{u}_2$ дополнительно удовлетворяет условию излучения (4). Для них справедливо интегральное представление, аналогичное (12)

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 \tilde{u}_1(M), \text{ если } M \in D_1 \\ \mu_1 \tilde{u}_2(M), \text{ если } M \in D_2 \end{aligned} \right\} = \int_{\Gamma} \{ \mu_2 g_1(M, P) [\partial \tilde{u}_1(P) - \gamma_1 \tilde{u}_1(P) - \gamma_2 \tilde{u}_2(P)] - \\ - \mu_2 g_2(M, P) [\partial \tilde{u}_2(P) - \delta_1 \tilde{u}_1(P) - \delta_2 \tilde{u}_2(P)] \} dl_P. \quad (13)$$

Обозначим через D произвольную ограниченную замкнутую подобласть в D_j . Используя (12) и (13), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|u_j - \tilde{u}_j\|_{C(D)} &= O(\| \partial \tilde{u}_1 - \gamma_1 \tilde{u}_1 - \gamma_2 \tilde{u}_2 - f_1 \|_{L_2(\Gamma)} + \\ &+ \| \partial \tilde{u}_2 - \delta_1 \tilde{u}_1 - \delta_2 \tilde{u}_2 - f_2 \|_{L_2(\Gamma)}), \end{aligned}$$

которая показывает, что для аппроксимации точного решения u_j в пространстве непрерывных функций $C(D)$ достаточно приблизить граничные функции f_1 и f_2 линейными комбинациями $\partial \tilde{u}_1 - \gamma_1 \tilde{u}_1 - \gamma_2 \tilde{u}_2$ и $\partial \tilde{u}_2 - \delta_1 \tilde{u}_1 - \delta_2 \tilde{u}_2$ в $L_2(\Gamma)$.

Существуют различные способы построения полных систем дискретных источников [5]. Выберем систему метагармонических функций, отвечающих мультипольным источникам, сосредоточенным в начале координат внутри области D_1 : $\{\chi_n(M)\}$ — внутренняя, $\{\psi_n(M)\}$ — внешняя системы функций, $n \in Z$, $\chi_n(M) = J_n(k_1 \rho) e^{in\varphi}$, $\psi_n(M) = H_n^{(1)}(k_1 \rho) e^{in\varphi}$, (ρ, φ) — полярные координаты точки M , $J_n(\cdot)$ и $H_n^{(1)}(\cdot)$ — функции Бес-

селя и Ханкеля. Будем искать приближенное решение задачи (2)–(4) в виде сумм

$$\tilde{u}_{1N}(M) = \sum_{n=-N}^N a_n^N \chi_n(M), \quad \tilde{u}_{2N}(M) = \sum_{n=-N}^N a_n^N \psi_n(M).$$

Для обоснования возможности выбора коэффициентов a_n^N и b_n^N путем удовлетворения граничных условий в $L_2(\Gamma)$ рассмотрим прямую сумму гильбертовых пространств $H \equiv L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(x, y)_H = (\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle)_H = (x_1, y_1)_{L_2} + (x_2, y_2)_{L_2}$$

и положим

$$h_n \equiv \langle \partial \chi_n - \gamma_1 \chi_n, -\delta_1 \chi_n \rangle, \quad r_m \equiv \langle -\gamma_2 \psi_m, -\partial \psi_m - \delta_2 \psi_m \rangle, \quad n, m \in Z.$$

Теорема 3. Если k_2 не является собственным значением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области D_1 и выполнены условия (6), то система $\{h_n, r_m\}$ полна в H .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ — произвольный элемент H . Достаточно показать, что из равенств

$$(h_n, x)_H = 0, \quad (r_m, x)_H = 0, \quad n, m \in Z \quad (14)$$

следует $x = 0$. Соотношения (14) эквивалентны следующим:

$$\int_{\Gamma} [\partial \chi_n(P) - \gamma_1 \chi_n(P)] \bar{x}_1(P) dl_P - \delta_1 \int_{\Gamma} \chi_n(P) \bar{x}_2(P) dl_P = 0, \quad n \in Z, \quad (15)$$

$$-\gamma_2 \int_{\Gamma} \psi_m(P) \bar{x}_1(P) dl_P + \int_{\Gamma} [\partial \psi_m(P) - \delta_2 \psi_m(P)] \bar{x}_2(P) dl_P = 0, \quad m \in Z,$$

Пусть $M(\rho, \varphi)$ — точка вне окружности Γ_a с центром в D_1 , охватывающей D_1 , (r, ψ) — полярные координаты точки $P \in \Gamma$. Умножая первое из соотношений (15) на $\frac{i}{4} H_n^{(1)}(k_1 \rho) e^{-in\varphi}$ и суммируя по всем $n \in Z$, в силу теоремы сложения

$$H_0^{(1)}(k_1 R_{MP}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_1 r) H_n^{(1)}(k_1 \rho) e^{in(\psi-\varphi)},$$

справедливой при $\rho > r$, получим

$$v_1(M) \equiv \int_{\Gamma} [\partial_P G_1(M, P) - \gamma_1 G_1(M, P)] \bar{x}_1(P) dl_P - \delta_1 \int_{\Gamma} G_1(M, P) \bar{x}_2(P) dl_P = 0, \quad (16)$$

если M находится вне Γ_a . Но функция $v_1(M)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне Γ и является аналитической функцией в области D_2 , поэтому равенство (16) имеет место для всех $M \in D_2$.

Аналогично, если Γ_b — окружность в D_1 и $M(\rho, \varphi)$ — точка внутри этой окружности, то, умножая второе из соотношений (15) на

$$\frac{i}{4} J_m(k_2 \rho) e^{-im\varphi} \text{ и суммируя по всем } m \in Z, \text{ получим равенство}$$

$$v_2(M) \equiv \int_{\Gamma} [\partial_P G_2(M, P) - \delta_2 G_2(M, P)] \bar{x}_2(P) dl_P - \gamma_2 \int_{\Gamma} G_2(M, P) \bar{x}_1(P) dl_P = 0, \quad (17)$$

которое в силу аналитичности $v_2(M)$ справедливо всюду в D_1 .

Далее, опустим в (16) и (17) точку M на контур Γ . В силу свойств потенциалов простого и двойного слоя с плотностями из $L_2(\Gamma)$ [6] для почти всех $M \in \Gamma$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{x}_1(M) + \int_{\Gamma} [\partial_P G_1(M, P) - \gamma_1 G_1(M, P)] \bar{x}_1(P) dl_P - \delta_1 \int_{\Gamma} G_1(M, P) \bar{x}_2(P) dl_P = 0, \\ -\frac{1}{2} \bar{x}_2(M) - \gamma_2 \int_{\Gamma} G_2(M, P) \bar{x}_1(P) dl_P + \int_{\Gamma} [\partial_P G_2(M, P) - \delta_2 G_2(M, P)] \bar{x}_2(P) dl_P = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Но правые части системы интегральных уравнений (18) являются аналитическими функциями, поэтому x_1, x_2 эквивалентны непрерывным на Γ функциям. Переходя здесь к комплексно сопряженным величинам, получим однородную систему интегральных уравнений относительно $x_- = \langle x_1, -x_2 \rangle$

$$x_- + A^* x_- = 0,$$

сопряженную с (11), которая, согласно теореме 2, имеет только нулевое решение. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Мн., 1988.

2. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242.

3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

4. Kress R., Roach G. F. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 6. P. 1433.

5. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.

6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.

Поступила в редакцию 30.05.95.

УДК 517.968.23

А. П. ШИЛИН

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЯДРАМИ НА СИММЕТРИЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Two new integral equations are solved in quadratures.

Рассмотрим уравнения, в которых все функции комплекснозначны:

$$\varphi(t) + \int_0^1 k_1(t, s) \varphi(s) ds + \int_{-1}^0 k_2(t, s) \varphi(s) ds = g(t), \quad -1 < t < 1, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi(t) + \int_0^1 l_1(t, s) \varphi(s) ds + \int_{t-1}^0 l_2(0, s-t) \varphi(s) ds = g(t), & 0 < t < 1, \\ \varphi(t) + \int_0^{t+1} l_1(0, s-t) \varphi(s) ds + \int_{-1}^0 l_2(t, s) \varphi(s) ds = g(t), & -1 < t < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Заданная функция $g(t)$, искомая функция $\varphi(t)$ и используемая в дальнейшем вспомогательная функция $\psi(t)$ интегрируемы с квадратом на интервале $-1 < t < 1$. Ядра уравнений (1), (2) характеризуются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k_1(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, s) &= \begin{cases} k_1(t, 0) k_1(0, s), & 0 < t < 1, 0 < s < 1, \\ -k_2(t, 0) k_1(0, s), & -1 < t < 0, 0 < s < 1, \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial t} k_2(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, s) &= \begin{cases} k_1(t, 0) k_2(0, s), & 0 < t < 1, -1 < s < 0, \\ -k_2(t, 0) k_2(0, s), & -1 < t < 0, -1 < s < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} l_1(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} l_1(t, s) = -l_1(t, 1)l_1(1, s), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < s < 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} l_2(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} l_2(t, s) = l_2(t, -1)l_2(-1, s), \quad -1 < t < 0, \quad -1 < s < 0,$$

в которых стоящие справа функции заданы и являются абсолютно интегрируемыми на соответствующих интервалах; кроме того, $k_1(t, 1) = 0$ при $-1 < t < 0$, $k_2(t, -1) = 0$ при $0 < t < 1$. О ядрах уравнений (1), (2) можно сделать уточнение аналогично статье [1], где рассмотрено уравнение с одним ядром на интервале $0 < t < 1$, обобщенное здесь до уравнения (1).

Введем целые функции

$$K_1(0, z) = \int_{-1}^0 k_1(0, -s) \exp(izs) ds, \quad K_2(0, z) = \int_0^1 k_2(0, -s) \exp(izs) ds,$$

$$L_1(z, 1) = \int_{-1}^0 l_1(t+1, 1) \exp(izt) dt, \quad L_2(z, -1) = \int_0^1 l_2(t-1, -1) \exp(izt) dt.$$

Пусть числа a_1, b_1, a_2, b_2 таковы, что в полуплоскостях $\text{Im} z \leq a_1, \text{Im} z \geq b_1, \text{Im} z \leq a_2, \text{Im} z \geq b_2$ не имеют нулей функции соответственно $1 + K_1(0, z), 1 + K_2(0, z), 1 + L_1(z, 1), 1 + L_2(z, -1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ и что на прямых $\text{Im} z = a_1, \text{Im} z = b_1, \text{Im} z = a_2, \text{Im} z = b_2$ не имеют нулей функции соответственно $1 + K_2(0, z), 1 + K_1(0, z), 1 + L_2(z, -1), 1 + L_1(z, 1)$. Нули функций $1 + K_1(0, z), 1 + K_2(0, z)$ в полосе $a_1 < \text{Im} z < b_1$ объединим и обозначим их z_α , кратности этих нулей обозначим соответственно $\mu_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n$. Для простоты будем считать, что общих нулей в полосе $a_1 < \text{Im} z < b_1$ функции $1 + K_1(0, z), 1 + K_2(0, z)$ не имеют. Аналогично в полосе $a_2 < \text{Im} z < b_2$ нули функций $1 + L_1(z, 1), 1 + L_2(z, -1)$ объединим и обозначим их z_β , кратности этих нулей обозначим соответственно $\nu_\beta, \beta = 1, 2, \dots, m$. Пусть общие нули функций $1 + L_1(z, 1), 1 + L_2(z, -1)$ в полосе $a_2 < \text{Im} z < b_2$ отсутствуют.

Вернемся к исходным уравнениям. Их решение основано на выявлении композиционной структуры операторов, стоящих в левых частях. Оказывается (и этот факт проверяется непосредственно), что решение уравнения (1) сводится к последовательному решению уравнений

$$\psi(t) + \int_0^{\max(0, t)} k_1(t-s, 0) \psi(s) ds + \int_{\min(0, t)}^0 k_2(t-s, 0) \psi(s) ds = g(t), \quad -1 < t < 1, \quad (3)$$

$$\varphi(t) + \int_{\max(0, t)}^{\min(1, t+1)} k_1(0, s-t) \varphi(s) ds + \int_{\max(-1, t-1)}^{\min(0, t)} k_2(0, s-t) \varphi(s) ds = \psi(t), \quad -1 < t < 1, \quad (4)$$

а решение уравнения (2) сводится к последовательному решению уравнений

$$\psi(t) + \int_{\max(0, t)}^{\min(1, t+1)} l_1(t-s+1, 1) \psi(s) ds + \int_{\max(-1, t-1)}^{\min(0, t)} l_2(t-s-1, -1) \psi(s) ds = g(t), \quad -1 < t < 1, \quad (5)$$

$$\varphi(t) + \int_0^{\max(0, t)} l_1(1, s-t+1) \varphi(s) ds + \int_{\min(0, t)}^0 l_2(-1, s-t-1) \varphi(s) ds = \psi(t), \quad -1 < t < 1. \quad (6)$$

Уравнения (3), (6) распадаются на независимые на интервалах $0 < t < 1, -1 < t < 0$. Получающиеся уравнения на интервале $0 < t < 1$ решены в [1], а на интервале $-1 < t < 0$ решаются аналогично. Сложнее оказываются уравнения (4), (5). Из этих двух аналогичных уравнений остановимся на уравнении (4).

Функции $k_1(0, s)$, $k_2(0, s)$, $\psi(t)$, определенные соответственно при $0 < s < 1$, $-1 < s < 0$, $-1 < t < 1$, продолжим на всю действительную ось, доопределив их тождественными нулями, и продолженные функции обозначим соответственно $\tilde{k}_1(0, s)$, $\tilde{k}_2(0, s)$, $\tilde{\psi}(t)$. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_0^{\infty} \tilde{k}_1(0, s-t) \tilde{\varphi}(s) ds + \int_{-\infty}^0 \tilde{k}_2(0, s-t) \tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\psi}(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (7)$$

решение которого ищем в классе функций $\{a_1, b_1\}$ (классы функций показательного роста [2, 3]).

Лемма. Каждое решение уравнения (4) можно продолжить на действительную ось до решения уравнения (7). Сужение каждого решения уравнения (7) на интервал $-1 < t < 1$ есть решение уравнения (4).

Сравнительно несложное доказательство леммы не приводим. Из леммы вытекает способ нахождения решения уравнения (4): надо решить уравнение (7) и взять сужение решения на интервал $-1 < t < 1$. Уравнение (7) есть хорошо изученное уравнение типа свертки с двумя ядрами [2, 3]. В классах функций показательного роста такое уравнение с помощью преобразования Фурье сводится к различным краевым задачам для аналитических функций, вообще говоря, на нескольких параллельных прямых и не всегда поддается решению. Возникающий у нас случай весьма похож на случай, проанализированный в [3, с. 122], сводится в конечном счете к задаче Римана на паре параллельных прямых с некоторыми дополнительными условиями и решается в квадратурах. Анализ картин разрешимости уравнений (3)–(6) приводит к следующему результату.

Теорема 1. Каждое из уравнений (1), (2) безусловно разрешимо и имеет единственное решение.

Решения уравнений (1), (2) выписываются в квадратурах. Вводя предварительно необходимые обозначения, приведем эти решения, опуская выкладки, связанные с решением задач Римана и свойствами преобразования Фурье. Обозначим

$$K_1(z, 0) = \int_0^{\infty} k_1(t, 0) \exp(izt) dt, \quad L_1(1, z) = \int_0^{\infty} l_1(1, 1-s) \exp(izs) ds -$$

функции, аналитические в полуплоскости $\text{Im} z > c$, а

$$K_2(z, 0) = \int_{-\infty}^0 k_2(t, 0) \exp(izt) dt, \quad L_2(-1, z) = \int_{-\infty}^0 l_2(-1, -1-s) \exp(izs) ds -$$

функции, аналитические в полуплоскости $\text{Im} z < -c$. Здесь функции $k_1(t, 0)$, $l_1(1, 1-t)$ доопределены на луч $t > 1$, а функции $k_2(t, 0)$, $l_2(-1, -1-t)$ доопределены на луч $t < -1$ так, что

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} |k_1(t, 0)| \exp(-ct) dt < \infty, \quad \int_1^{\infty} |l_1(1, 1-t)| \exp(-ct) dt < \infty, \\ \int_{-\infty}^{-1} |k_2(t, 0)| \exp(ct) dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{-1} |l_2(-1, -1-t)| \exp(ct) dt < \infty \end{aligned}$$

для некоторого числа $c > 0$.

Пусть число $d > c$ таково, что в полуплоскости $\text{Im} z \geq d$ не имеют нулей функции $1 + K_1(z, 0)$, $1 + L_1(1, z)$, а в полуплоскости $\text{Im} z \leq -d$ не имеют нулей функции $1 + K_2(z, 0)$, $1 + L_2(-1, z)$. Обозначим:

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{K_1(\zeta, 0)}{1 + K_1(\zeta, 0)} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad 0 < t < 1,$$

$$\rho_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-id}^{+\infty-id} \frac{K_2(\zeta, 0)}{1 + K_2(\zeta, 0)} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad -1 < t < 0,$$

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{L_1(1, \zeta)}{1 + L_1(1, \zeta)} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad 0 < t < 1,$$

$$\omega_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-id}^{+\infty-id} \frac{L_2(-1, \zeta)}{1 + L_2(-1, \zeta)} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad -1 < t < 0.$$

Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — интерполяционные многочлены Эрмита, удовлетворяющие условиям

$$P(z_\alpha) = \frac{g_{\alpha 0}}{R(z_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

$$P^{(j)}(z_\alpha) = \frac{g_{\alpha j} - \sum_{\gamma=0}^{j-1} C_j^\gamma R^{(j-\gamma)}(z_\alpha) P^{(\gamma)}(z_\alpha)}{R(z_\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots, \mu_\alpha - 1,$$

$$Q(\zeta_\beta) = \frac{h_{\beta 0}}{S(\zeta_\beta)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, m,$$

$$Q^{(k)}(\zeta_\beta) = \frac{h_{\beta k} - \sum_{\gamma=0}^{k-1} C_k^\gamma S^{(k-\gamma)}(\zeta_\beta) Q^{(\gamma)}(\zeta_\beta)}{S(\zeta_\beta)}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu_\beta - 1,$$

где

$$R(z) = (1 + K_1(0, z))(1 + K_2(0, z)) \prod_{\alpha=1}^n (z - z_\alpha)^{-\mu_\alpha},$$

$$S(z) = (1 + L_1(z, 1))(1 + L_2(z, -1)) \prod_{\beta=1}^m (z - \zeta_\beta)^{-\nu_\beta},$$

$$g_{\alpha j} = -i^j \int_0^1 \left(g(t) + \int_0^t \rho_1(t-s) g(s) ds \right) t^j \exp(iz_\alpha t) dt,$$

если z_α — ноль функции $1 + K_1(0, z)$,

$$g_{\alpha j} = i^j \int_{-1}^0 \left(g(t) + \int_t^0 \rho_2(t-s) g(s) ds \right) t^j \exp(iz_\alpha t) dt,$$

если z_α — ноль функции $1 + K_2(0, z)$, $j = 0, 1, \dots, \mu_\alpha - 1$,

$$h_{\beta k} = -i^k \int_0^1 g(t) t^k \exp(i\zeta_\beta t) dt,$$

если ζ_β — ноль функции $1 + L_1(z, 1)$,

$$h_{\beta k} = i^k \int_{-1}^0 g(t) t^k \exp(i\zeta_\beta t) dt,$$

если ζ_β — ноль функции $1 + L_2(z, -1)$, $k = 0, 1, \dots, \nu_\beta - 1$.

Обозначим $a_{\alpha j}$ и $b_{\beta k}$ коэффициенты следующих представлений рациональных функций в виде суммы простых дробей:

$$P(z) \prod_{\alpha=1}^n (z - z_\alpha)^{-\mu_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^{\mu_\alpha} a_{\alpha j} i^j (j-1)! (z - z_\alpha)^{-j},$$

$$Q(z) \prod_{\beta=1}^m (z - \zeta_{\beta})^{-v_{\beta}} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{k=1}^{v_{\beta}} b_{\beta k} i^k (k-1)! (z - \zeta_{\beta})^{-k}.$$

Наконец, обозначим:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib_1}^{+\infty+ib_1} \frac{K_1(0, \zeta) + K_2(0, \zeta) + K_1(0, \zeta)K_2(0, \zeta)}{(1 + K_1(0, \zeta))(1 + K_2(0, \zeta))} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \\ r_2(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ia_1}^{+\infty+ia_1} \frac{K_1(0, \zeta) + K_2(0, \zeta) + K_1(0, \zeta)K_2(0, \zeta)}{(1 + K_1(0, \zeta))(1 + K_2(0, \zeta))} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \\ \lambda_1(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib_2}^{+\infty+ib_2} \frac{L_1(\zeta, 1) + L_2(\zeta, -1) + L_1(\zeta, 1)L_2(\zeta, -1)}{(1 + L_1(\zeta, 1))(1 + L_2(\zeta, -1))} \exp(-i\zeta t) d\zeta, \\ \lambda_2(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ia_2}^{+\infty+ia_2} \frac{L_1(\zeta, 1) + L_2(\zeta, -1) + L_1(\zeta, 1)L_2(\zeta, -1)}{(1 + L_1(\zeta, 1))(1 + L_2(\zeta, -1))} \exp(-i\zeta t) d\zeta. \end{aligned}$$

Теорема 2. Решение уравнения (1) имеет вид: при $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= g(t) + p(t) + \int_0^t \rho_1(t-s)g(s)ds + \int_{-1}^1 r_1(t-s)g(s)ds + \int_0^t k_2(0, s-t)(g(s) + \\ &+ p(s))ds + \int_{-1}^1 r_1(t-\tau)d\tau \int_{\tau}^0 \rho_2(\tau-s)g(s)ds + \int_0^1 r_1(t-\tau)d\tau \int_0^{\tau} \rho_1(\tau-s)g(s)ds + \\ &+ \int_0^t k_2(0, \tau-t)d\tau \int_{-1}^1 r_1(\tau-s)g(s)ds + \int_0^t k_2(0, \tau-t)d\tau \int_0^{\tau} \rho_1(\tau-s)g(s)ds + \\ &+ \int_0^t k_2(0, \tau-t)d\tau \int_0^1 r_1(\tau-\sigma)d\sigma \int_0^{\sigma} \rho_1(\sigma-s)g(s)ds + \\ &+ \int_0^t k_2(0, \tau-t)d\tau \int_{-1}^0 r_1(\tau-\sigma)d\sigma \int_0^{\sigma} \rho_2(\sigma-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

а при $-1 < t < 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= g(t) + p(t) + \int_t^0 \rho_2(t-s)g(s)ds + \int_{-1}^1 r_2(t-s)g(s)ds + \\ &+ \int_t^0 k_1(0, s-t)(g(s) + p(s))ds + \int_{-1}^1 r_2(t-\tau)d\tau \int_{\tau}^0 \rho_2(\tau-s)g(s)ds + \\ &+ \int_0^1 r_2(t-\tau)d\tau \int_0^{\tau} \rho_1(\tau-s)g(s)ds + \int_t^0 k_1(0, \tau-t)d\tau \int_{-1}^1 r_2(\tau-s)g(s)ds + \\ &+ \int_{-1}^0 k_1(0, \tau-t)d\tau \int_{\tau}^0 \rho_2(\tau-s)g(s)ds + \int_t^0 k_1(0, \tau-t)d\tau \int_{-1}^0 r_2(\tau-\sigma)d\sigma \int_{\sigma}^0 \rho_2(\sigma-s)g(s)ds + \\ &+ \int_t^0 k_1(0, \tau-t)d\tau \int_0^1 r_2(\tau-\sigma)d\sigma \int_0^{\sigma} \rho_1(\sigma-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

$$\text{где } p(t) = \sum_{\alpha=1}^n \exp(-iz_{\alpha}t) \sum_{j=1}^{\mu_{\alpha}} a_{\alpha j} t^{j-1}.$$

Теорема 3. Решение уравнения (2) имеет вид: при $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & g(t) + q(t) + \int_{-1}^1 \lambda_1(t-s)g(s)ds + \int_0^t (l_2(t-s-1, -1) + \omega_1(t-s))(g(s) + q(s))ds + \\ & + \int_0^t l_2(t-\tau-1, -1)d\tau \int_{-1}^1 \lambda_1(\tau-s)g(s)ds + \int_0^t \omega_1(t-\tau)d\tau \int_{-1}^1 \lambda_1(\tau-s)g(s)ds + \\ & + \int_0^t \omega_1(t-\tau)d\tau \int_0^\tau l_2(\tau-s-1, -1)(g(s) + q(s))ds + \\ & + \int_0^t \omega_1(t-\tau)d\tau \int_0^\tau l_2(\tau-\sigma-1, -1)d\sigma \int_{-1}^1 \lambda_1(\sigma-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

а при $-1 < t < 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & g(t) + q(t) + \int_{-1}^1 \lambda_2(t-s)g(s)ds + \int_0^t (l_1(t-s+1, 1) + \omega_2(t-s))(g(s) + q(s))ds + \\ & + \int_t^0 l_1(t-\tau+1, 1)d\tau \int_{-1}^1 \lambda_2(\tau-s)g(s)ds + \int_t^0 \omega_2(t-\tau)d\tau \int_\tau^0 l_1(\tau-s+1, 1)(g(s) + q(s))ds + \\ & + \int_t^0 \omega_2(t-\tau)d\tau + \int_{-1}^1 \lambda_2(\tau-s)g(s)ds + \int_t^0 \omega_2(t-\tau)d\tau \int_\tau^0 l_1(\tau-\sigma+1, 1)d\sigma \int_{-1}^1 \lambda_2(\sigma-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

$$\text{где } q(t) = \sum_{\beta=1}^m \exp(-i\zeta_\beta t) \sum_{k=1}^{v_\beta} b_{\beta k} t^{k-1}.$$

1. Черский Ю. И. // Математические методы и физико-механические поля. 1982. Вып. 15. С. 3.
2. Черский Ю. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 3. С. 361.
3. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.

Поступила в редакцию 20.10.95.



КАНФЕРЭНЦЫЯ ПА ДЫФРАКЦЫЙНАЙ ОПТЫЦЫ (Workshop on Diffractive Optics)

З 21 па 23 жніўня 1995 г. у Празе праходзіла канферэнцыя па дыфракцыйнай аптыцы, арганізаваная Чэшскім тэхнічным універсітэтам і Інстытутам радыёінжэнерыі і электронікі пры падтрымцы Міжнароднай камісіі па аптыцы (ICO), Еўрапейскага аптычнага таварыства (EOS) і Чэхаславацкага таварыства фатонікі.

У канферэнцыі бралі ўдзел каля 120 навукоўцаў. Найбольш прадстаўнічымі былі дэлегацыі Германіі, Чэхіі, Вялікабрытаніі. Присутнічалі фізікі з большасці развітых еўрапейскіх краін, а таксама ЗША, Японіі і Аўстраліі. У якасці спонсараў выступілі вядомая фірма Philips, Берлінскі інстытут аптыкі і чэшская аптычная фірма Meopta.

Структура канферэнцыі ўключала вусныя і стандартныя даклады па наступных тэмах: тэорыя дыфракцыйных аптычных элементаў (ДАЭ), іх разлік і распрацоўка, выраб, прымяненні дыфракцыйнай аптыкі.

Тэарэтычныя распрацоўкі прадстаўлялі такія напрамкі, як метады разліку дыфракцыі пры наяўнасці анізатрапіі матэрыялу, улік наведзенай анізатрапіі (анізатрапія формы) і кагерэнтнасці светлавога пучка, метады стварэння шырокапалосных дыфракцыйных элементаў.

Прадстаўленыя на канферэнцыі даклады паказалі, што зараз існуе некалькі тэхналогій вырабу ДАЭ, якія ўжываюцца ў залежнасці ад патрэбнай колькасці вырабаў. Адзінкавыя элементы вырабляюцца з дапамогай эксімерных лазераў на фотарэзісце ці літаграфіі. Пры гэтым для асабліва дакладных вырабаў ужываецца літаграфія электронным пучком. Пры большых серыях з дапамогай электроннай літаграфіі прапануецца вырабляць матрыцы, а потым ліццём ці штампоўкай з пластыку атрымліваць дыфракцыйныя аптычныя элементы. Для масавай вытворчасці (накшталт рэльефных галаграм) найбольш эфектыўным з'яўляецца цісненне металічнай матрыцай на палімерных плёнках.

Былі выяўлены найбольш значныя вобласці магчымых прымяненняў дыфракцыйных аптычных элементаў. На першае месца тут, на маю думку, трэба паставіць каліметры да паўправадніковых лазераў. Для таго, каб зрабіць пучок такога лазера сіметрычным, зараз выкарыстоўваецца звычайная рафракцыйная аптыка. Але кошт аб'ектыва пры гэтым перавышае кошт самога лазера. Выкарыстанне ж чыста дыфракцыйных элементаў ці камбінацыі дыфракцыйных і рафракцыйных дасць значны выйгрыш. Даследаванні ў гэтым напрамку найбольш інтэнсіўна праводзяцца ў Германіі.

Значныя перспектывы мае і такі напрамак, як стварэнне міжзлучэнняў у светлаводах, дзельнікаў і факусатараў пучка на аснове ДАЭ. Над гэтым шмат працуюць навукоўцы Германіі, Японіі, Фінляндыі.

У дакладах былі прадэманстраваны таксама магчымасці дыфракцыйнай аптыкі для селекцыі мод у рэзанаторах лазераў. Тут з'яўляецца магчымасць не толькі выдзяляць асобныя моды рэзанатара, але і ствараць моды з патрэбным размеркаваннем інтэнсіўнасці ў сячэнні пучка.

Асобна выдзяляецца такі напрамак дыфракцыйнай аптыкі, як выраб рэльефных ціснёных галаграм, якія шырока ўжываюцца для абароны каштоўных папер. Даклады па гэтай тэме прадстаўлялі больш тэхналагічныя аспекты праблемы, бо асноўныя тэарэтычныя пытанні тут вырашаныя.

Адным з прадстаўленых на канферэнцыі напрамкаў, якія развіваюцца як у тэарэтычным, так і ў практычным плане, з'яўляецца стварэнне шырокапалосных антыблікавых пакрыццяў і прасвятлення граніц на аснове рэльефных дыфракцыйных структур.

Пад канец канферэнцыі была праведзена пленарная дыскусія пра месца дыфракцыйнай аптыкі. Большасць удзельнікаў яе схілілася да думкі, што поўнаасцю замяніць звычайную рафракцыйную аптыку яна не змож, але ў асобных галінах, без сумнення, будзе дамінаваць.

Трэба адзначыць высокую якасць ілюстрацыйнага матэрыялу асноўнай масы дакладаў і шырокае выкарыстанне навукоўцамі электронных камунікацыйных сродкаў. Практычна ўсе ўдзельнікі канферэнцыі мелі адрасы электроннай пошты і большасць з іх карысталіся камп'ютарнай сеткай Internet.

Поўныя матэрыялы канферэнцыі будуць надрукаваныя ў спецыяльным выпуску часопіса *Journal of Modern Optics*.

Ігар Сташкевіч
(кафедра лазернай фізікі і спектраскапіі БДУ)

1. Workshop on Diffractive Optics. Technical Digest. Editors Jari Turunen and Frank Wyrowski. Prague (Czech Republic), 1995.

Наши юбиляры



РАФАИЛ ГАБАСОВ

Исполнилось 60 лет со дня рождения одного из крупнейших белорусских ученых с мировым именем, заслуженного деятеля науки Республики Беларусь, доктора физико-математических наук, профессора Рафаила Габасова.

Р. Габасов родился 17 декабря 1935 г. в Магнитогорске Челябинской области в семье рабочего. После окончания семилетней школы, а затем индустриального техникума поступил на механический факультет Уральского политехнического института в Свердловске (ныне Екатеринбург). Этот институт стал для Р. Габасова стартовой площадкой в большую науку. Там он закончил аспирантуру и в 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вопросы качественной теории регулируемых систем», в которой для решения задач устойчивости движения и оптимального управления разработаны методы расчетов, предложенных академиком Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским. С 1964 по 1967 г. Р. Габасов работал старшим научным сотрудником в Уральском филиале Академии наук СССР.



В конце 1967 г. Р. Габасов переехал в Минск и возглавил только что образовавшуюся кафедру прикладной математики Белгосуниверситета, впоследствии переименованную в кафедру методов оптимального управления, заведующим которой он является в настоящее время. Именно здесь, в стенах университета, наиболее ярко расцвел его научный и педагогический талант.

В 1968 г. Р. Габасов защитил докторскую диссертацию «Математические вопросы оптимизации систем управления», в которой получены фундаментальные результаты в области теории оптимального управления, легшие в основу многочисленных исследований в нашей стране и за рубежом.

Профессор Р. Габасов является одним из создателей белорусской научной школы по оптимизации и оптимальному управлению. В 70-х гг. совместно с Ф. М. Кирилловой им разработаны методы, которые положили начало крупному направлению в теории конечно-мерной оптимизации и оптимизации динамических систем управления — конструктивным методам оптимизации, широко применяемым при решении всевозможных научных, технических и экономических задач.

Р. Габасовым опубликовано более 400 научных работ, в том числе 7 монографий в соавторстве: «Качественная теория оптимальных процессов» (1971), «Оптимизация линейных систем» (1973), «Особые оптимальные управления» (1973), «Принцип максимума в теории оптимального управления» (1974), «Основы динамического программирования» (1974), «Методы линейного программирования» (в 3 ч., 1977—1980), «Конструктивные методы оптимизации» (в 5 ч., 1984—1995). Двумя изданиями вышло учебное пособие «Методы оптимизации», одним из соавторов которого является Р. Габасов. Первые три монографии и учебное пособие переизданы в США, а «Оптимизация линейных систем» — и в Японии.

Результаты научной деятельности Р. Габасова широко известны во всем мире. Он выступал с докладами на самых представительных международных научных форумах, читал лекции в университетах многих стран Европы, Азии и США.

Р. Габасов не только крупный ученый, но и прекрасный педагог. Его лекции отличаются глубиной изложения материала и педагогическим мастерством. Среди учеников Р. Габасова, которые работают в Академии наук Беларуси, почти во всех вузах республики, во многих университетах и научных центрах СНГ, в Болгарии, Китае, КНДР, Вьетнаме, Афганистане, Сирии, Алжире, 10 докторов и более 60 кандидатов наук. Его неиссякаемая энергия, оптимизм, титаническое трудолюбие, фанатичное увлечение наукой, требовательность к себе и ученикам оказывают огромное влияние на формирование личности специалиста, прошедшего «школу Р. Габасова».

Коллектив преподавателей, сотрудников и студентов факультета прикладной математики и информатики и редакция журнала «Вестник БГУ» поздравляют Рафаила Габасова с 60-летием со дня рождения и 35-летием научной и педагогической деятельности и желают крепкого здоровья, огромного человеческого счастья и творческого долголетия.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1995 г. в «Вестнике.
Белорусского государственного университета».
Серия 1: Физика. Математика. Механика.

НАШИ ЛАУРЕАТЫ

Комяк А. И., Умрейко Д. С. Исследования ураниловых соединений в Белорусском государственном университете	1 3
--	-----

ФИЗИКА

Анищик В. М., Конюшко Л. И., Ярмолович В. А., Горбачевский Д. А., Герасимова Т. Г. Структура и электрофизические свойства пленок диоксида олова	1 6
Асенчик О. Д., Могильный В. В. Самомодуляция миграции энергии электронного возбуждения при насыщении	2 16
Барковский Л. М., Шарапаева В. В. Эволюционные операторы в акустике несовершенных кристаллов	2 3
Барковский Л. М. Световые инволюции в кристаллах	3 10
Бельский А. М. Компоненты векторов поля и потоки энергии бездифракционных электромагнитных пучков	2 8
Богущи А. А. Векторная параметризация Ф. И. Федорова и конечные преобразования геометрической, динамической и квантовой симметрии	3 3
Бондаренко В. П., Бондаренко Е. А., Дорофеев А. М., Самуйлов В. А., Троянова Г. Н. Процессы самоорганизации при транспорте заряда в пористом кремнии	1 18
Веселова Т. М., Самуйлов В. А. Эффекты самоорганизации и динамического хаоса в полупроводящем GaAs	1 22
Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Чобот Г. М. Термостойкость кубического нитрида бора марки «Светланит»	1 28
Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Лугаков Н. Ф., Рубанов А. С. Электрофизические свойства кубического нитрида бора марки «Светланит»	2 33
Горбачевич С. К., Сахарук С. А. Теоретический анализ поляризации люминесценции растворов бихромовых при интенсивном возбуждении	2 13
Горбачевич А. К. Квантовая механика в пространстве-времени Римана-Картана и детектирование поля кручения	3 21
Данилькевич М. И. Накопление и релаксация заряда в имплантированных ионами диэлектриках	2 30
Дудчик Ю. И., Комаров Ф. Ф., Константинов Я. А. Особенности малоуглового выхода флуоресцентного рентгеновского излучения из тонкопленочных мишеней	2 22
Ермолаев О. П., Рамде А. Т. (Буркина Фусо), Хаким С. А. (Египет). Прыжковая проводимость облученного гамма-квантами германия, легированного галлием	3 37
Жилко В. В., Лавриненко А. В. Ковариантный анализ распространения поверхностных поляритонов в сверхрешетках из магнитных материалов	3 17
Комаров Ф. Ф., Леонтьев А. В., Григорьев В. В. К вопросу о получении высокопроводящих органических слоев ионной бомбардировкой полимерных материалов	3 33
Ксенович В. К., Доросинец В. А., Говор Л. В., Бутылина И. Б. Движение вихрей в джозефсоновской среде пленок $Y_1Ba_2Cu_3O_x$	1 15
Кулак Г. В. Солитоны связанного состояния в планарных и волоконных оптических волноводах ниобата лития	2 19
Лабуда А. А., Сидерко А. А. Дефектность слоев борофосфоросиликатного стекла, осажденного при атмосферном давлении	1 30
Мельникова Е. А., Сташкевич И. В. Влияние анизотропии на просветление гофрированной границы диэлектриков	1 25
Минкевич А. В. Сферически-симметричные пространства в аффиннометрической калибровочной теории тяготения	3 30
Мозалевский В. В., Дорошева Л. В. О выборе параметра и функции регуляризации при решении некорректной обратной задачи в оптико-электронной системе	2 11
Савенко В. С., Пинчук А. И., Злотник В. Б., Шафрей С. Д., Понарядов В. В. Механизмы влияния электромагнитных полей на деформацию металлов	1 12
Савенко В. С., Пинчук А. И., Понарядов В. В., Злотник В. Б. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного поля в монокристаллах висмута	2 27
Федотов А. К., Тарасик М. И., Янченко А. М. Перколяционный механизм транспорта носителей заряда в сильнолегированных поликремниевых пленках после отжига сканирующим лазерным лучом	2 36
Фурс А. Н. Применение федоровской процедуры приближенного решения характеристических уравнений в кристаллоакустике	3 25
Шалатонин В. И. Механизм нелинейных взаимодействий при генерации хаотических КВЧ колебаний в диодах Ганна	3 40
Шепелевич В. Г. Дискретный преобразователь угла поворота	1 10

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

Алексеева С. М., Юрчук Н. И. Модифицированный метод квазиобращения в задаче управления для уравнения теплопроводности с интегральным условием	3 55
---	------

Аниськов В. В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с p -нильпотентным дефектом 2	2 66
Бобков В. В. Об одном способе построения методов численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений	2 41
Буза М. К., Певзнер Л. В. Пакет программ для активизации процесса обучения.....	1 55
Гайко В. А. Бифуркации предельных циклов и классификация сепаратрисных циклов двумерных полиномиальных динамических систем	2 69
Горбузов В. Н., Павлючик П. Б. О траекториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем	1 38
Грушевская Г. В., Крылов Г. Г., Хмельницкий А. И. Нелинейная динамика дифференциальных уравнений с сингулярным источником, описывающих молекулярное узнавание	1 66
Джарадин Джехад (Иордания). О p -насыщенных формациях с системами наследственных подформаций	3 52
Душкевич О. Г. Векторные расслоения над однородным Φ -пространством линейной группы Ли	2 48
Жогаля С. И. Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова—Фоккера—Планка для неавтономных квазилинейных систем с непараметрическим случайным воздействием	1 62
Жук Е. Е. Робастное решающее правило L-средних в случае равномерного «засорения»	1 45
Зверович Э. И. Продолжение мероморфных функций по симметрии	3 58
Змачинский С. С., Шпаковский Г. И., Серикова Н. В., Белецкий О. А. Анализ производительности суперскалярного микропроцессора	3 64
Кирлица В. П. Точные D- и A-оптимальные линейные планы и их устойчивость при неравнотонных наблюдениях	1 42
Козлов В. П., Абдельразак Н. А. (Иордания). Метод парных сумматорных уравнений для решения двумерных осесимметричных задач нестационарной теплопроводности	3 60
Конях В. С. Импримитивные локально нильпотентные линейные группы.....	1 35
Корзан Л. А. Граничные задачи для полосы с прямолинейными разрезами.....	2 45
Липень А. Б., Репченко В. И. Расчет обмотки кольцевого маховика методом конечных элементов	3 43
Мирская Е. И. Исследование скорости сходимости моментов сглаженных оценок спектральных плотностей	2 51
Ромашевский А. Б. Преобразование Меллина в алгебре мнемифункции	1 58
Русак Д. В. Обнаружение сложной «разладки» по ковариационной матрице в многомерных гауссовских последовательностях	2 60
Синькевич Д. В., Труш Н. Н. Вычисление смешанных моментов высших порядков агрегированных характеристик однородной марковской цепи для полиномиальной схемы	3 47
Сыроид И. Ю. Экспериментальное исследование одного метода стабилизации динамических систем	2 56
Тимохович О. В. Построение канонической матрицы одной задачи линейного сопряжения с подстановочной матрицей четвертого порядка	1 50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Долгополова О. Б. Построение двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода два	2 71
Калитин Б. С., Мурач В. А. Устойчивость неавтономных систем по части переменных. Метод знакопостоянных функций Ляпунова	3 71
Козел П. Т. О строении элементов ортогональной группы над алгебраически замкнутым полем характеристики 2	3 69
Селькин В. М. Описание минимальных наследственных локальных не ф-дисперсивных формаций	3 72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Виктор Михайлович Анищик	2 76
Петр Дмитриевич Кухарчик	2 75
Геннадий Алексеевич Медведев	2 74
Александр Петрович Хапалюк	2 73
Александр Михайлович Широков	1 70

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Владимир Иванович Крылов	1 73
Илья Григорьевич Некрашевич	1 76
Иван Алексеевич Прусов	1 75
Федор Иванович Федоров	1 74

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.12

Комаров Л. И., Феранчук И. Д. Двухуровневый атом в одномодовом квантовом поле: нулевое приближение операторного метода // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Найдено приближенное аналитическое решение проблемы взаимодействия двухуровневого атома с квантовым полем, равномерно пригодное во всем диапазоне изменения константы связи и описывающее качественные особенности энергетического спектра системы.

Библиогр. 14 назв.

УДК 535.34

Карпук С. М., Романов О. Г., Толстик А. Л. Исследование угловых характеристик невырожденного четырехволнового взаимодействия в резонансных средах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Показано, что при изменении угла считывания динамической голограммы световым пучком с удвоенной частотой возможна реализация двух схем частотного преобразования излучения, основанных на линейной и квадратичной записи динамических голограмм. Преобразование лазерного излучения из ИК области в видимую осуществлено с использованием раствора полиметинового красителя № 3274У.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 535.42:548.0

Кулак Г. В., Кулак В. И. Обратное брэгговское рассеяние света на гиротропных фазовых сверхрешетках фотоупругости // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Исследованы особенности обратного брэгговского рассеяния света на фазовых сверхрешетках фотоупругости сформированных с использованием гиротропных кубических кристаллов. Показана возможность обратного брэгговского рассеяния света на ультразвуке низкой частоты в сверхрешетках фотоупругости из гиротропного кубического кристалла германата висмута. Исследованы зависимости эффективности дифракции от интенсивности ультразвуковой волны и длины области акустооптического взаимодействия.

Библиогр. 11 назв., ил. 2.

УДК 538.245:537.226.1

Данилькевич М. И., Макоед И. И. О механизмах диэлектрической поляризации $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ -феррита // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Измерены частотные зависимости диэлектрической проницаемости и тангенса угла потерь феррита $\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ в диапазоне 50 Гц — 300 МГц при комнатной температуре и в жидком азоте. Охлаждение образца до 77 К исключает релаксационные механизмы поляризации, позволяя выделить суммарную величину вклада в диэлектрическую проницаемость упругих смещений электронов и ионов. Дисперсия проницаемости релаксационного типа проанализирована на основе теории Дебая — Коула — Коула.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 621.91:621.039

Болтушкин В. И., Гольцев В. П., Гольцев М. В., Чаевский В. В. Корреляция параметра решетки и состава в многокомпонентных соединениях типа нитридов переходных металлов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Исследовано влияние концентрации металлического компонента на параметр кристаллической решетки тройных нитридных систем Ti-Mo-N, Ti-Zr-N, Ti-Cr-N, Zr-Cr-N, в результате чего установлено изменение параметра решетки в соответствии с законом Вегарда.

Библиогр. 3 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 621.315.592

Ермолаев О. П. Особенности перехода диэлектрик-металл в германии, «легированном» радиационными дефектами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Изучена низкотемпературная электропроводность германия, «легированного» радиационными дефектами (РД), возникающими в результате облучения быстрыми реакторными нейтронами.

Показано, что переход диэлектрик-металл в германии с РД имеет достаточно резкий характер и, по-видимому, к нему применима моттовская концепция минимальной металлической проводимости.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 621.921.34:666.233

Мелешко Л. О. Гомогенное зародышеобразование алмаза в области его метастабильности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Рассчитаны радиусы критических зародышей, работы их образования и числа содержащихся в них атомов для алмаза и графита при различных пересыщениях газовой фазы.

Библиогр. 1 назв., табл. 2.

УДК 621.382.049.772

Новиков А. П., Шилова Е. А., Буйко Л. Д., Зайков В. А. Термическая стабильность границы раздела металл/а-С в условиях вакуумного отжига // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Исследована термическая стабильность границы раздела в системах тантал/а-С (Ta/а-С) и ванадий/а-С (V/а-С). Структурные изменения и реакции на границе раздела исследованы методами ПЭМ, комбинационного рассеяния, обратного резерфордовского рассеяния, а также Оже-электронной спектроскопии.

Полученные результаты сравниваются с имеющимися в литературе данными. Показывается возможность использования тугоплавких металлов для создания омических контактов к алмазу и алмазоподобным пленкам. Отмечается, что помимо самостоятельного интереса данные системы могут рассматриваться в качестве модельных для прогнозирования свойств границы раздела Ta/алмаз и V/алмаз.

Библиогр. 2 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 621.382.311.33:546

Андреев А. Д., Бельский А. М., Валиев А. А. Влияние уровня легирования на насыщение тока в л-канальном МОП-ПТ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Измерены токи насыщения в МОП-ПТ. Показано, что с увеличением уровня легирования подложки условие перекрытия канала по напряжениям не выполняется. Насыщение тока может быть вызвано насыщением дрейфовой скорости электронов в канале.

Библиогр. 13 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Зверович Э. И., Шейла Т. А. Интеграл типа Коши в классах E // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Вводится понятие кусочно-мероморфной функции класса E. Так называются функции, имеющие почти всюду на линии разрыва конечные предельные значения. В окрестности всех точек t_0 , где не существует угловых предельных значений, функции класса E должны быть бесконечно малыми по сравнению с любой степенной функцией

$$(z - t_0)^{-\varepsilon} \text{ при } z \rightarrow t_0, \varepsilon > 0.$$

Доказывается, что интеграл типа Коши с непрерывной плотностью принадлежит классу E.

Библиогр. 1 назв., ил. 2.

УДК 517.948.32:517.544

Долгополова О. Б. Построение всех двулистных безграницных неразветвленных накрытий римановой поверхности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Описаны все подгруппы индекса 2 фундаментальной группы римановой поверхности и соответствующие им двулистные безграничные неразветвленные накрытия.

Библиогр. 2 назв., ил. 1.

УДК 517.512

Р о в б а Е. А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Построены рациональные интегральные положительные операторы Фейера и Джексона для непрерывных на отрезке $[-1; 1]$ функций и получены оценки соответствующих приближений, зависящие от положения точки на отрезке.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.925.6

М а т а т о в В. И., М и х а й л о в с к а я Л. В. Необходимые условия однозначности подвижных особенностей кубических систем двух дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Получены необходимые условия однозначности подвижных особенностей для системы двух дифференциальных уравнений с кубическими нелинейностями. Рассмотрены также вырожденные случаи, когда упрощающие линейные преобразования искомым функций не действуют.

Библиогр. 5 назв.

УДК 512.533

Ш и р я е в В. М. Полугруппы с единственным базисом // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Показано, что если полугруппа имеет единственное минимальное по включению порождающее множество, то оно содержится в любом порождающем множестве этой полугруппы.

Библиогр. 6 назв.

УДК 512.572

Н о в и к о в С. П. Связь β -профраттиниевых подалгебр с β -нормализаторами мультиколец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Устанавливаются условия, при которых любая β -профраттиниева подалгебра произвольного мультикольца из наследственной формации Δ конечных мультиколец представима в виде суммы некоторых β -нормализатора и μ -профраттиниевой подалгебры. Кроме того, доказывается, что класс всех тех мультиколец из Δ с разрешимым β -корадикалом, в которых β -нормализаторы и β -профраттиниевы подалгебры совпадают, является формацией.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1

Е ф и м ч и к Н. Е., П о д к о п а е в Д. П. О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Рассматривается многокритериальная задача на системе подмножеств конечного множества и ее эффективные (сильно эффективные, собственно эффективные и слабо эффективные) решения. Векторная целевая функция задачи состоит из критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN. Исследуется множество решений, которые сохраняют свойство эффективности при «малых» возмущениях параметров задачи.

Библиогр. 6 назв.

УДК 62-50

Р а з м ы с л о в и ч Г. П. Алгоритм вычисления передаточной матрицы для сингулярных систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Для сингулярных систем с запаздыванием построен алгоритм вычисления одного из основных сомножителей передаточной матрицы, играющей важную роль при исследовании систем на разрешимость, некоторые виды управляемости, устойчивость и т. д.

Библиогр. 6 назв.

УДК 551.465.5

Барвенков С. А. Влияние переменной вязкости на периодические дрейфовые течения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

В работе с помощью метода ВКБ получено решение задачи о дрейфовых периодических течениях в вязкой жидкости при условии, что коэффициент вертикального турбулентного обмена является функцией глубины.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 62-752.534

Савчук В. П., Савенков В. А., Вярвильская О. Н. Колебания натянутого пролета под действием движущихся нагрузок // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

В работе исследованы колебания пролета транспортной системы, несущая способность которого, наряду с жесткостью корпуса, обеспечивается сильно натянутыми гибкими элементами. Рассмотрены колебания под действием одиночной нагрузки и потока безынерционных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью. Подробно изучен случай, когда жесткостью пролета можно пренебречь. Выявлены режимы движения, не приводящие к резонансной раскачке пролета.

Библиогр. 1 назв.

УДК 517.95

Глушцов А. И. Методы интегральных уравнений и дискретных источников в задачах экранирования // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Краевая задача экранирования электромагнитных полей тонким цилиндрическим экраном сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, с помощью которой выполнено обоснование метода дискретных источников для задачи экранирования.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.968.23

Шилин А. П. О решении интегральных уравнений с двумя ядрами на симметричном интервале // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1.

Приводится решение двух новых интегральных уравнений на интервале $(-1, 1)$. Уравнения близки к тем уравнениям типа свертки, исследование которых связано с краевыми задачами для аналитических функций.

Библиогр. 3 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Komarov L. I., Feranchuk I. D.</i> Two-levelaton in a one-mode quantum field: zeroth approximation of the operator method	3
<i>Karpuck S. M., Romanov O. G., Tolstik A. L.</i> A study of the angle characteristics of nondegenerate four-wave mixing in resonant media	8
<i>Kulak G. V., Kulak V. I.</i> Backward Bragg scattering from gyrotropic phase supergratings of photoelasticity	12
<i>Danil'kevich M. I., Makoed I. I.</i> On the mechanisms of $\text{Ni}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4$ -ferrite dielectric polarization	15
<i>Boltouskin V. I., Goltsev V. P., Goltsev M. V., Chaevsky V. V.</i> Correlation of composition and crystal lattice parameter in multicomponent combinations such as transition metals	17
<i>Ermolaev O. P.</i> Peculiarities of the dielectric-metal transition in germanium doped with radiation defects	19
<i>Meleshko L. O.</i> Homogeneous nucleation of diamond in the region of its metastability	21
<i>Novikov A. P., Shilova E. A., Buiko L. D., Zaikov V. A.</i> Thermal stability at the interface of the metal/a-C under vacuum annealing	24
<i>Andreev A. D., Bjelski A. M., Valiev A. A.</i> The influence of the dopant level on current saturation in n-channel MOS-FET	26

MATHEMATICS, INFORMATICS

<i>Zverovich E. I., Shevita T. A.</i> Cauchy type integral in the classes E	30
<i>Dolgoplova O. B.</i> Construction of all smooth unlimited twosheeted covers of Riemann surface	32
<i>Rovba E. A.</i> Rational integral operators on a segment	34
<i>Matatov V. I., Mikhailovskaya L. V.</i> Necessary conditions for movable singularities for cubic systems of two differential equations	39
<i>Shiryayev V. M.</i> Semigroups with unique basis	43
<i>Novikov S. P.</i> A correspondence between β -prefrattini subalgebras and β -normalizers of multirings	46
<i>Efimchik N. E., Podkopaev D. P.</i> On kernel and radius of stability in trajectory problem of vector discrete optimization	48
<i>Razmyslovich G. P.</i> Algorithm for the computation of the transfer matrix for singular systems with delay	52
<i>Barvenov S. A.</i> The influence of viscosity on a periodic drift currents	55
<i>Savtchuk V., Savenkov V., Vjarvilskaia O.</i> Vibrations of the stretched span under the action of the moving loads	58
<i>Glushtov A. I.</i> Methods of integral equations and discrete sources in problems of shielding	61
<i>Shilin A. P.</i> On solution of the integral equations with two kernels on a symmetric segment	66

CHRONICLE

<i>Igor Stashkevich.</i> Workshop on Diffractive Optics	72
---	----

OUR JUBILEE

<i>Rafail Gabasov</i>	74
-----------------------------	----