

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

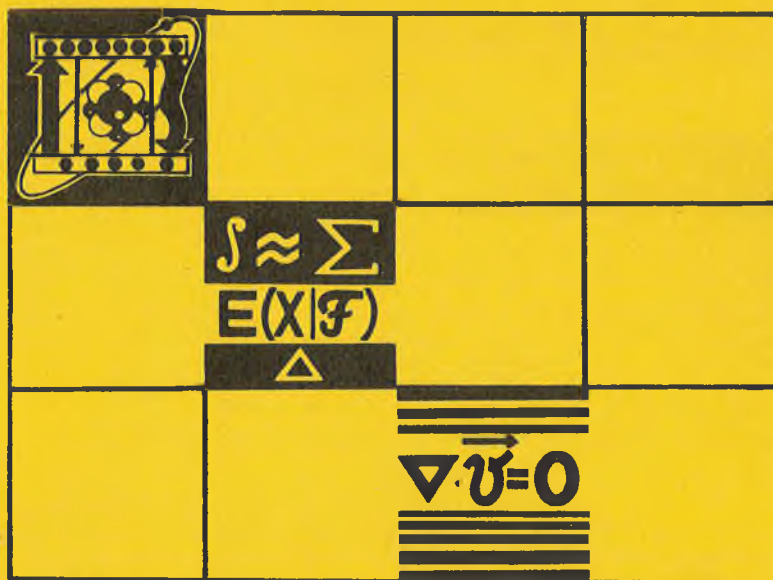
СЕРИЯ 1

Физика

Математика

Механика

2'95



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Барковский Л. М., Шарапаева В. В. Эволюционные операторы в акустике несовершенных кристаллов	3
Бельский А. М. Компоненты векторов поля и потоки энергии бездифракционных электромагнитных пучков	8
Мозалевский В. В., Дорошева Л. В. О выборе параметра и функции регуляризации при решении некорректной обратной задачи в оптико-электронной системе	11
Горбачевич С. К., Сахарук С. А. Теоретический анализ поляризации люминесценции растворов бихромофоров при интенсивном возбуждении	13
Асенчик О. Д., Мозильный В. В. Самомодуляция миграции энергии электронного возбуждения при насыщении	16
Кулак Г. В. Солитоны связанного состояния в планарных и волоконных оптических волноводах ниобата лития	19
Дудчик Ю. И., Комаров Ф. Ф., Константинов Я. А. Особенности малоуглового выхода флуоресцентного рентгеновского излучения из тонкопленочных мишеней	22
Савенко В. С., Пинчук А. И., Понарядов В. В., Злотник В. Б. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного поля в монокристаллах висмута	27
Данилькевич М. И. Накопление и релаксация заряда в имплантированных ионами диэлектриках	30
Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Лугаков Н. Ф., Рубанов А. С. Электрофизические свойства кубического нитрида бора марки «Светланит»	33
Федотов А. К., Тарасик М. И., Янченко А. М. Перколяционный механизм транспорта носителей заряда в сильнолегированных поликремниевых пленках после отжига сканирующим лазерным лучем	36

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

Бобков В. В. Об одном способе построения методов численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений	41
Корзан Л. А. Граничные задачи для полосы с прямолинейными разрезами	45
Душкевич О. Г. Векторные расслоения над однородным Φ -пространством линейной группы Ли	48
Мирская Е. И. Исследование скорости сходимости моментов сглаженных оценок спектральных плотностей	51
Сыроид И. Ю. Экспериментальное исследование одного метода стабилизации динамических систем	56
Русах Д. В. Обнаружение сложной «разладки» по ковариационной матрице в многомерных гауссовских последовательностях	60
Анисков В. В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с r -нильпотентным дефектом 2	66
Гайко В. А. Бифуркации предельных циклов и классификация сепаратрисных циклов двумерных полиномиальных динамических систем	69

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Долгополова О. Б. Построение двулистных безграницных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода два	71
--	----

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Александр Петрович Хапалюк	73
Геннадий Алексеевич Медведев	74
Петр Дмитриевич Кухарчик	75
Виктор Михайлович Анищик	76

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

2'95

МАЙ



МИНСК
„УНІВЕРСІТЭЦКАЕ”

Главный редактор В. Г. РУДЬ

Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

*А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А. М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный
секретарь), В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора),
Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЕНOK,
В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. Н. КИВАЧ,
Н. И. КОЗЛОВСКИЙ, В. И. КОРЗЮК, П. Д. КУХАРЧИК,
Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕНКО, С. Г. МУЛЯРЧИК,
В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н. И. ЮРЧУК*

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1995. № 2.

Редактор И. А. Лешкевич

Младший редактор Г. М. Добыши

Художественный редактор В. А. Ермоленко

Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Набор и верстка журнала выполнены на издательско-редакционной системе
«Союз»

Сдано в набор 07.04.95. Подписано в печать 25.05.95. Формат 70X108 1/16. Бумага
офс. Печать офс. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,45. Тираж 875 экз.
Зак. 516. Цена 1200 р.

Издательство «Універсітэцкае». 220048. Минск, проспект Машерова, 11. Адрес
редакции: 220080, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати». 220041, Минск,
пр. Ф. Скорины, 79.

© Вестник Белгосуниверситета, 1993



УДК 534

Л. М. БАРКОВСКИЙ, В. В. ШАРАПАЕВА

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АКУСТИКЕ НЕСОВЕРШЕННЫХ КРИСТАЛЛОВ

The problem of solution of the Green-Christoffel tensor equation for such anisotropic media as crystals changed by radiation, ion implantation etc. have been discussed. The covariant approximate operator solutions with the help of the functions of non-commutative tensor arguments are assumed. An example of construction of the evolutionary operator for lithium niobate crystals is proposed.

Введение

В работах [1, 2] приведены данные о влиянии радиации и ионных имплантаций на физические свойства кристаллов. В материале на различных глубинах в зависимости от интенсивности и времени облучения происходят микроструктурные изменения дефектного (дислокации) или примесного характеров. В [3—9] обсуждаются различные дискретные и континуальные модели, применяемые для описания искажений идеальных структур. Если иметь в виду макроскопические (оптические, акустические и др.) свойства кристалла, то изменение их феноменологически характеризуется вводимыми известным образом материальными параметрами, которые в отличие от первоначальных становятся функциями координат и времени и зависят от доз радиации или имплантации.

В случае анизотропных свойств речь идет о неоднородных, нестационарных полях тензоров диэлектрической магнитной проницаемости, модулей упругости, электропроводности и т. д. При этом различные задачи механики и электродинамики сплошных сред с измененной структурой приводят к необходимости построения усредненных моделей [3—6], т. е. к рассмотрению усредненных характеристик. Среди возможных неоднородных моделей в акустике радиационных кристаллов простейшей является модель стратифицированной среды. В работах [10—12] были использованы операторные решения одномерных уравнений кристаллоакустики анизотропных стратифицированных сред. В работе [13] рассмотрен важный вопрос о гармоническом волновом анализе на неабелевых операторных алгебрах применительно к неплоским негармоническим волновым пучкам в кристаллах. Изложенный в [11—13] формализм является некоторой разновидностью операторного формализма, применяемого в квантовой механике и квантовой теории поля [14].

Цель настоящей работы состоит в распространении указанного операторного метода на несовершенные кристаллы. Влияние облучения будем учитывать с помощью добавки к тензору модулей упругости, которая в общем случае может быть комплексной и зависеть от частоты и длины волны.

Волновое уравнение для анизотропной среды. В случае монохроматического поля вектора смещения $\mathbf{u}(\zeta, t) = \mathbf{u}(\zeta)\exp(-i\omega t)$, являющегося функцией одной комплексной пространственной переменной $\zeta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}$, уравнение движения анизотропной среды может быть представлено в виде

$$\left[\Lambda \frac{d^2}{d\zeta^2} + \left(\frac{d\Lambda}{d\zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} \Lambda \right) \frac{d}{d\zeta} + \omega^2 \right] u(\zeta) = 0, \quad (1)$$

где

$$(\Lambda) = \Lambda_{ij} = \frac{1}{\rho} (C_{ijkl} + i\omega\eta_{ijkl}) n_i n_j, \quad (2)$$

C_{ijkl} — тензор модулей упругости, η_{ijkl} — тензор вязкости, ρ — плотность кристалла, n — постоянный комплексный вектор (при $n = n^*$ и $n^2 = 1$ он является фазовой нормалью однородной волны, а при $\text{Re } n \times \text{Im } n \neq 0$ характеризует направления распространения фаз и амплитуд неоднородных волн (см. [7])), r — радиус-вектор точки наблюдения, ω — циклическая частота. В неоднородных нестационарных средах тензор модулей упругости является функцией координат, времени и внешних параметров. Мы не накладываем каких-либо ограничений на внутреннюю симметрию C_{ijkl} , за исключением симметрии по двум последним индексам, следующей из симметрии тензора деформации.

Тензоры C , η , Λ и скаляр ρ можно представить в виде

$$C = C^0 + C', \quad \eta = \eta^0 + \eta', \quad \Lambda = \Lambda^0 + \Lambda', \quad \rho = \rho^0 + \rho', \quad (3)$$

где C^0 , η^0 , Λ^0 и ρ^0 — тензоры модулей упругости, вязкости, Грина — Кристоффеля соответственно и плотность кристалла до облучения, а величины со штрихом (C' , η' , Λ' , ρ') характеризуют изменение этих величин вследствие облучения. В общем случае они являются функциями ζ . При $\Lambda \gg a \frac{d\Lambda}{d\zeta}$, $\rho \gg a' \frac{d\rho}{d\zeta}$ (a , a' — характерные расстояния задачи) средний член в (1) может быть отброшен. Предполагаем, что тензор $\Lambda(\zeta)$ является регулярной функцией и ограничен на интервале изменения переменной ζ , т. е. плотность $\rho(\zeta)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Записанное в компонентах векторное уравнение для амплитуд (1) представляет собой систему трех скалярных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Его можно свести к системе уравнений первого порядка, вводя новую функцию согласно определению

$$\frac{du}{d\zeta} = \omega^2 V, \quad \frac{dV}{d\zeta} = -\Lambda^{-1} u - \left(\Lambda^{-1} \frac{d\Lambda}{d\zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} \right) V, \quad (4)$$

где предполагается, что обратный тензор Λ^{-1} существует, т. е. $|\Lambda(\zeta)| \neq 0$ на рассматриваемом интервале. Введем вектор

$$W(\zeta) = \begin{bmatrix} u(\zeta) \\ V(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Тогда (4) приводится к матричному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = A(\zeta)W(\zeta), \quad A(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 1 \\ -\Lambda^{-1} & \left(-\Lambda^{-1} \frac{d\Lambda}{d\zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} \right) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

причем A является неособенной блочной матрицей 6×6 , (1 — единичная 3×3 матрица). Для гиротропных диссипативных сред $\Lambda(\zeta)$ — комплексный несимметричный тензор второго ранга (см. [11]).

Уравнение (5), как известно, может быть заменено эквивалентным ему интегральным уравнением типа уравнения Вольтера:

$$W(\zeta) = W(\zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta)W(\zeta)d\zeta,$$

решение которого может быть получено методом итераций. Оно имеет вид

$$W(\zeta) = Q(\zeta, \zeta_0)W(\zeta_0),$$

$$Q(\zeta, \zeta_0) = E + \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta)d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta)d\zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta)d\zeta + \dots, \quad (6)$$

где $Q(\zeta, \zeta_0)$ — матрицант, или интегральная экспонента матрицы $A(\zeta)$

[10, 11], E — единичная 6×6 -матрица. Такой интеграл часто представляют в виде

$$Q(\zeta, \zeta_0) = \exp \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta) d\zeta \right),$$

если иметь в виду процедуру распутывания подобных экспоненциальных операторов. Основная трудность здесь связана с некоммутативностью операторов $A(\zeta)$, относящихся к различным точкам интервала (ζ, ζ_0) . Если же собственные векторы оператора не изменяются при переходе от одной точки к другой, то для $A(\zeta)$ простой структуры вычисление оператора $Q(\zeta, \zeta_0)$ сводится к вычислению набора скалярных экспонент:

$\exp \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \lambda_s(\zeta) d\zeta \right)$, где $\lambda_s(\zeta)$ — собственные значения матрицы $A(\zeta)$. На любом интервале (ζ, ζ_0) , где $A(\zeta)$ регулярна, формулы дают общее решение уравнения (1) с начальным условием $W_{\zeta=\zeta_0} = (\zeta_0)$. При $A(\zeta) = A = \text{const}$ соотношение (6) переходит в

$$Q(\zeta, \zeta_0) = E + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A^s (\zeta - \zeta_0)^s}{s!} = e^{A(\zeta - \zeta_0)}. \quad (7)$$

Учитывая единственность решения задачи Коши для уравнений (1), (5), можно показать, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \exp(A\zeta) &= \exp \left[\zeta \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 \\ -\Lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\rho\omega\zeta N) & \frac{\omega \sin(\rho\omega\zeta N)}{\rho N} \\ -\frac{\rho N}{\omega} \sin(\rho\omega\zeta N) & \cos(\rho\omega\zeta N) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где тензор второго ранга $N = \frac{1}{\rho} \Lambda^{-1/2}$ является тензором адмитанса [10] плосковолновой группы, распространяющейся в кристалле в направлении $\mathbf{n}$, причем в (7) $\frac{1}{N} = N^{-1}$.

Различные представления эволюционных операторов. Рассмотрим теперь вопрос о том, как в приведенных решениях выделить вклады, обусловленные облучением образцов. Измененные кристаллофизические величины даются формулами (3) и, как отмечалось, зависят от ζ . Из проведенного анализа ясно, что даже в простейшем случае, когда эти величины постоянны на интервале (ζ, ζ_0) , имеются трудности в распутывании эволюционных операторов от сумм матриц, одна из которых выражается через исходные тензоры в (3), а другая — через штрихованные, обусловленные облучением. При подстановке (3) в (2) и (5) мы приходим к необходимости вычислять функции $\exp(A^0 + A^{'})\zeta$, $\sin[\rho\omega\zeta(N^0 + N^{'})]$, $\cos[\rho\omega\zeta(N^0 + N^{'})]$, $(N^0 + N^{'})^{-1}$, $N = \frac{1}{\rho} (\Lambda^0 + \Lambda^{'})^{-1/2}$,

$\exp \left[\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta) d\zeta \right]$, когда слагаемые в аргументах не коммутируют,

например $A^0 A^{'} - A^{' } A^0 = [A^0, A^{'}] \neq 0$ ($[A^0, A^{'}]$ — коммутатор).

Согласно [15], если оператор A представим матрицей, он может быть выражен линейной комбинацией матриц, образующих базис представления динамической n -размерной алгебры Ли

$$A = \sum_{j=1}^n a_j(\zeta) A_j.$$

В [16] предполагается, что существует решение

$$W(\zeta) = \left[\prod_{k=1}^n \exp(c_k(\zeta) A_k) \right] W(\zeta_0),$$

справедливое в общем случае локально, где c_k — операторные коэффициенты на множестве коммутаторов $[A^0, A^{'}]$, $[A^0, [A^0, A^{'}]]$, ... Глобаль-

но оно существует для всех разрешимых алгебр и для простой трехмерной $SO(3)$, на которой найдены точные решения различных проблем. Для коммутирующих алгебр решение имеет экспоненциальную форму. Трудности возникают для неразрешимых алгебр и возрастают с размерностью алгебры.

Допустим, A^0 и A' — два заданных некоммутирующих оператора. Для нас наиболее важен случай, когда добавка A' мала по сравнению с A^0 в смысле $\|A'\| \ll \|A^0\|$. Воспользовавшись известной формулой

$$\exp(A^0 \zeta) A' \exp(A^0 \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_0)^n}{n!} [A^0 \dots [A^0, [A^0, A']] \dots],$$

оператор эволюции можно записать и применить в приближенном виде:

$$Q(\zeta, \zeta_0) = \{I + A'(\zeta - \zeta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}}{(n+1)!} [A^0 \dots [A^0, [A^0, A']] \dots]\} \exp A^0(\zeta - \zeta_0). \quad (8)$$

В качестве примера построения оператора эволюции $Q(\zeta, \zeta_0)$ рассмотрим кристалл ниобата лития, активно исследующийся в настоящее время [17]. Ниобат лития относится к точечной группе симметрии $3m$ (C_{3v}), имеет плотность $\rho = 4,612$ г/см³. Решетка кристалла построена из кислородных октаэдров, образующих блоки. В многочисленных работах, посвященных исследованию и применению его чистых и примесных монокристаллов, обращает на себя внимание, во-первых, что близость ионных радиусов Li^+ и Nb^{5+} и наличие в структуре больших октаэдрических пустот могут способствовать образованию вакансий и взаимозамещению катионов. Во-вторых, имеется большое число посторонних ионов, довольно легко входящих в решетку. Это щелочные, щелочно-земельные металлы, элементы группы железа Mo , W , Sn , Ti , редкоземельные и многие другие.

В общем случае в структуре ниобата лития возможны следующие точечные дефекты: вакансии и междоузельные ионы лития, ниобия, кислорода, ионы ниобия, замещающие литий, ионы лития на местах ниобия, а также квазисвободные электроны. Примесь при легировании замещает ионы основного вещества в узлах или внедряется в междоузлия, влияя на концентрацию собственных точечных дефектов.

При частичном замещении ионов Li ионами Nb с одновременным образованием соответствующего количества литиевых вакансий наблюдается небольшое увеличение плотности при одновременном увеличении объема ячейки. В частности, кристаллическая решетка может претерпеть изменение, приводящее к тому, что элементарная ячейка ниобата лития составляется из двух октаэдров, повернутых относительно друг друга на 180° . Такая ячейка обладает симметрией $6mm$ (C_{6v}). Одновременно изменяется относительная упаковочная плотность. Возникающие в результате литиевые вакансии распределены по объему кристалла, а не локализованы в местах внедрения катиона.

Предположим, возможно принять такую модель усреднения физических характеристик несовершенного по дефектам кристалла, в которой он характеризуется эффективным $C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + C_{ijkl}'$, где C_{ijkl}^0 есть тензор тригонального кристалла группы $3m$. Тензоры модулей упругости кристаллов с симметрией $3m$ и $6mm$ отличаются тем, что число ненулевых элементов тензора группы $3m$ больше на 6, причем все они являются функцией одного элемента C_{1123} . Предположим, что у тензора C_{ijkl}' отличны от нуля только указанные выше шесть компонент, умноженных на параметр $\lambda < 1$, а радиационный параметр λ определяется относительным изменением плотности кристалла и лежит в пределах 0,002—0,04. Аналогичный подход используется, например, в [18] и связывает постоянные решетки «чистого» кристалла и концентрацию примесей.

Считая тензор вязкости η_{ijk} равным нулю и $\frac{d\lambda}{d\zeta} = 0$, $\frac{d\mu}{d\zeta} = 0$ и волно-

вую нормаль перпендикулярной плоскости (z, y) кристаллофизического базиса, тензоры Λ^0 и Λ' записываем в явном виде:

$$\Lambda^0 = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & C_{14} \\ 0 & C_{14} & C_{44} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda' = \frac{1}{\rho(1+\lambda)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda C_{14} \\ 0 & -\lambda C_{14} & 0 \end{bmatrix}.$$

Коммутационные соотношения операторов Λ^0 и Λ' определяются законом коммутации операторов $\Lambda^{0^{-1}}$ и $(\Lambda^0 + \Lambda')^{-1}$:

$$\Lambda^0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 1 \\ -\Lambda^{0^{-1}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda^{0^{-1}} - (\Lambda^0 + \Lambda')^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\Lambda^0, \Lambda'] = \omega^2 \begin{bmatrix} \Lambda^{0^{-1}} - (\Lambda^0 + \Lambda')^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda^{0^{-1}} - (\Lambda^0 + \Lambda')^{-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[\Lambda^0, [\Lambda^0, \Lambda']] = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\Lambda^{0^{-1}}, (\Lambda^0 + \Lambda')^{-1}] & 0 \end{bmatrix} \dots$$

Коммутаторы (9) являются слагаемыми приближенного решения (8), когда при условии $\omega(\xi - \xi_0) \ll 1$ можно ограничиться несколькими слагаемыми.

Предлагаемое представление получаемых с помощью алгебраического подхода решений позволяет отделить часть эволюционного оператора, соответствующую «идеальному» кристаллу, и добавку, обусловленную облучением. Мы надеемся, это даст возможность сравнить между собой экспериментальные результаты для совершенных и несовершенных кристаллов и сделать предположения о характере изменения их симметрии, что необходимо для изучения свойств кристаллов и управления облучением или имплантацией.

1. Physical Acoustic. V. III. Pt. A. The Effect of imperfections. New York; London, 1968.
2. Ascheron C. // Phys. Stat. Sol. (a). 1991. V. 124. № 11.
3. Ziman J. Models of Disorder. London; New York; Melbourne, 1979.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogenous Media and Vibration Theory. New York, 1980.
5. Von E. Kröner. // Archive for Rational Mech. and Analysis. 1960. T. 4. № 4. P. 18.
6. Чермергор Т. Д. Теория пластичности микронеоднородных сред. М., 1977.
7. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965.
8. Ломакин В. А. Теория пластичности неоднородного тела. М., 1976.
9. Alexander H. // Rad. Effec. and Defects in Solids. 1989. V. 111/112. № 1—2, P. 1.
10. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1313; Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 12. С. 1070; Весті АН БССР. 1975. № 2. С. 34.
11. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Акуст. журнал. 1987. Т. 33. № 5. С. 798.
12. Барковский Л. М., Фотхи Нгуен Ханг // Там же. 1991. Т. 37. № 2. С. 222.
13. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Весті АН БССР. 1979. № 2. С. 43.
14. Bratteli O., Robinson D. W. Operator algebras and quantum statistical mechanics 1. New York, 1979.
15. Bargut A. O., Raczk R. D. Theory of Group Representations and Applications. Warszawa, 1977.
16. Wei J., Norman E. // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 575.
17. Rouvaen J. M., Waxin G., Gazelet M. G., Bridoux E. // Appl. Opt. 1990. V. 29. № 9. P. 1312.
18. Brice J. C. // Review of Modern Phys. 1985. V. 105. № 1. P. 105.

КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ И ПОТОКИ ЭНЕРГИИ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПУЧКОВ

The expressions for the electric and magnetic field vectors of Bessel beams of an any order are obtained. The lines of the energy flow of nondiffracting (Bessel) beams are investigated. For the beam of an arbitrary order these lines are helical curves winding round cylindrical surfaces, the generators of which are parallel to the beam axis.

Бездифракционный бesselев пучок нулевого порядка, обладающий рядом любопытных свойств, в последнее время интенсивно изучается как теоретически [1—4], так и экспериментально [5—6]. В скалярном случае поле монохроматического бesselева пучка нулевого порядка в однородной среде с показателем преломления n записывается в виде:

$$U_0(r, t) = J_0(\alpha r) \exp[i(\beta z - \omega t)], \quad (1)$$

где $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, $k = \omega/c$, J — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Выражение (1) является точным решением уравнения Гельмгольца $\Delta U + k^2 n^2 U = 0$. Наряду с бesselевым пучком нулевого порядка (1), уравнение Гельмгольца допускает также решения в виде бesselевых пучков высших порядков [7]:

$$U_m(r, t) = J_m(\alpha r) \exp[i(m\varphi + \beta z - \omega t)], \quad (2)$$

которые также будут бездифракционными ($|U_m|$ не зависит от z). Как отмечено в [7], решения (2) образуют полный набор функций, т. е. обладают модовыми свойствами решений уравнения Гельмгольца в однородной среде.

Распределение интенсивности в поперечном сечении пучков (2), пропорциональное $J_m^2(\alpha r)$, имеет цилиндрическую симметрию и представляет собой набор светлых и темных колец; характерный масштаб поперечной структуры определяется произвольным параметром α . В пучке нулевого порядка ($m=0$) имеется центральное светлое пятно; в пучках высших порядков ($m \geq 1$) центральное пятно темное. Если условно принять за характерный поперечный размер ρ_m пучка радиус центрального максимума ($m=0$) или внешний радиус первого светлого кольца, из (2) получим, что поперечный радиус определяется первым положительным корнем уравнения $J_m(\alpha r) = 0$. При условии $\alpha \rho_m \gg 1$, воспользовавшись асимптотическими свойствами функций Бесселя [8], получаем

$$\rho_m \approx \left(m + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2\alpha}, \quad (3)$$

т. е. поперечный размер бesselева пучка $\sim \alpha^{-1}$ и растет пропорционально его порядку.

В применении к световым пучкам обычно предполагается, что выражение (2) представляет собой поперечную компоненту напряженности электрического или магнитного поля пучка. Однако, как известно [9], в трехмерном случае ограниченность светового пучка в поперечном направлении связана с появлением у него продольных компонент поля. Кроме того, энергетические характеристики электромагнитных пучков определяются не только напряженностью электрического, но и магнитного поля пучка; поскольку же компоненты электрического и магнитного полей связаны друг с другом операцией пространственного дифференцирования, то вследствие сложной зависимости от координат выражения (2) оба поля не могут иметь одну и ту же простую структуру (2). Тем самым и энергетические характеристики в общем случае будут иметь сложную структуру.

Положим для определенности, что поперечная компонента напряженности электрического поля пучка линейно поляризована по оси x ; определяя продольную z — компоненту из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, получим (здесь и далее фазовый множитель $\exp[i(m\varphi + \beta z - \omega t)]$ опускаем):

$$E_x = E_0 J_m(\alpha \rho), \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{iE_0}{\beta} \left(\frac{m}{\rho} e^{-i\varphi} J_m - \alpha J_{m+1} \cos \varphi \right). \quad (4)$$

Магнитное поле пучка находим из уравнения Максвелла $H = -(i/k)\nabla \times E$:

$$H_x = \frac{iE_0}{\beta k} \left[\frac{m(m-1)}{\rho^2} e^{-2i\varphi} J_m - \frac{m\alpha}{\rho} e^{-2i\varphi} J_{m+1} - i \frac{\alpha^2}{2} J_{m+2} \sin 2\varphi \right],$$

$$H_y = \frac{E_0}{\beta k} \left\{ \left[\beta^2 - \frac{m(m-1)}{\rho^2} \right] J_m + \frac{\alpha}{\rho} (1 + m + m e^{-2i\varphi}) J_{m+1} - \alpha^2 J_{m+2} \cos^2 \varphi \right\}, \quad (5)$$

$$H_z = -\frac{E_0}{k} \left[\frac{m}{\rho} e^{-i\varphi} J_m + i \alpha J_{m+1} \sin \varphi \right].$$

Выражения (4), (5) представляют собой точное решение системы уравнений Максвелла и дают компоненты полей бездифракционного электромагнитного поля, поперечная компонента электрического поля которого линейно поляризована по оси x . Аналогичным образом можно получить компоненты поля пучка, линейно поляризованного в y -направлении; однако гораздо проще пучок такой поляризации получается из (4), (5) заменой

$$E_x \rightarrow E_y, \quad E_y \rightarrow -E_x, \quad H_x \rightarrow H_y, \quad H_y \rightarrow -H_x, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \pi/2.$$

Линейная суперпозиция пучков, поляризованных по осям x и y , дает поле пучка, поперечная компонента электрического поля которого имеет произвольную эллиптическую поляризацию.

Как следует из (4), (5) пространственная структура магнитного поля пучка в общем случае существенно отличается от структуры электрического поля. Кроме того, обе продольные компоненты E_z и H_z отличны от нуля и имеют одинаковый порядок величины. Однако все эти отличия становятся существенными только для достаточно узких пучков ($\rho_m \ll \lambda$); для широких пучков ($\rho_m \gg \alpha$, $\alpha \ll nk$) из (4), (5) получим приближенно

$$E_x \approx E_0 J_m(\alpha \rho), \quad H_y \approx n E_0 J_m(\alpha \rho), \quad E_y \approx E_z \approx H_x \approx H_z = 0.$$

В этом случае пригодны результаты, получаемые в рамках скалярной теории бесселевых пучков.

Для нулевого порядка из (4), (5) следует:

$$E_x = E_0 J_0(\alpha \rho), \quad E_y = 0, \quad E_z = -i E_0 \frac{\alpha}{\beta} J_1(\alpha \rho) \cos \varphi,$$

$$H_x = \frac{\alpha^2 E_0}{2\beta k} J_2 \sin 2\varphi, \quad H_y = E_0 \left[\frac{\beta}{k} J_0 + \frac{\alpha}{\beta k \rho} J_1 - \frac{\alpha^2}{\beta k} J_2 \cos^2 \varphi \right], \quad (6)$$

$$H_z = -i \frac{\alpha}{k} E_0 J_1 \sin \varphi.$$

В [10] получены компоненты поля электромагнитного бесселева пучка нулевого порядка, векторный потенциал A которого имеет только продольную компоненту $A_z = J_0(\alpha \rho) \exp[i(\beta z - \omega t)]$. Такой выбор поляризации приводит, как видно из результатов [10], к гораздо более сложной, чем (6), структуре электрических и магнитных компонентов поля пучка.

Рассмотрим теперь электрические характеристики пучка (4), (5). Для среднего по времени вектора плотности потока энергии

$$S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E \times H^*]$$

в цилиндрической системе координат (множитель $c/8\pi$ опускаем):

$$S_z = \frac{E_0^2}{\beta k} \left\{ \left[\beta^2 - \frac{m(m-1)}{\rho^2} \cos 2\varphi \right] J_m + \frac{\alpha}{\rho} (1 + 2m \cos^2 \varphi) J_{m+1} - \alpha^2 J_{m+2} \cos^2 \varphi \right\} J_m,$$

$$S_z = -\frac{m\alpha E_0^2}{\rho k \beta^2} \left(\frac{1}{\rho} J_m J_{m+1} + \frac{1}{2} \alpha J_{m+1}^2 - \frac{1}{2} \alpha J_m J_{m+2} \right) \sin 2\varphi, \quad (7)$$

$$S_r = \frac{mE_0^2}{k\rho} \left\{ \left[1 + \frac{m(m-1)}{(\beta\rho)^2} \right] J_m^2 + \frac{\alpha}{\rho\beta^2} (1 - 2m\cos^2\varphi) J_m J_{m+1} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{\beta^2} J_{m+2} \cos^2\varphi \right\}.$$

Согласно (7), только для пучков нулевого порядка ($m=0$) $S_z = S_r = 0$, и линиями тока энергии будут прямые, параллельные оси z . Поскольку при любом m вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ не зависит от z , в общем случае траектории потока энергии представляют собой сложные спиралеобразные траектории, накрученные на цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси z . Форма поперечного сечения цилиндрических поверхностей определяется уравнением $d\rho/d\varphi = \rho S_r/S_z$, проинтегрировать которое в общем случае не представляется возможным. Для выяснения качественных особенностей линий тока энергии ограничимся исследованием их вблизи оси пучка (оси z). Для этого положим, что $\alpha\rho \ll 1$, разложим правые части (7) в степенной ряд по $\alpha\rho$ и пренебрежем слагаемыми порядка $(\alpha\rho)^{2m+2}$ и более высоких степеней. В результате из (7) получим

$$S_z \approx E_0^2 \left[n - \frac{m(m-1)}{n(k\rho)^2} \right] \frac{(\alpha\rho)^{2m}}{(m!2^m)^2}, \\ S_r \approx \frac{mE_0^2}{k\rho} \left[1 + \frac{m(m-1)}{(kn\rho)^2} \right] \frac{(\alpha\rho)^{2m}}{(m!2^m)^2}, \quad S_\varphi \approx 0. \quad (8)$$

Используя (8), найдем линии тока энергии, как кривые, в каждой точке которых касательная совпадает по направлению с вектором Пойнтинга. Интегрирование соответствующей системы уравнений дает уравнение траектории:

$$z + z_0 = -\frac{nk\rho^2}{m} \left[1 + \frac{m(m-1)}{(nk\rho)^2} \right]^{-1} \left[\arcsin\left(\frac{x}{\rho}\right) + \frac{m(m-1)}{(nk\rho)^2} x \sqrt{\rho^2 - x^2} \right], \quad (9)$$

где z_0 — постоянная интегрирования.

Уравнение (9) описывает семейство спиральных кривых, накрученных на круговые цилиндры $\rho = \text{const}$. Шаг спиральных кривых постоянен вдоль цилиндра и зависит только от его радиуса:

$$\Delta z = \frac{2\pi kn\rho^2}{m} \left[1 + \frac{m(m-1)}{(nk\rho)^2} \right]^{-1}. \quad (10)$$

В общем случае спирали (9) имеют сложную пространственную форму. И только для пучка нулевого порядка они вырождаются в прямые, параллельные оси z , а для пучка первого порядка — в винтовые спирали. С увеличением ρ форма поперечного сечения цилиндров начинает отклоняться от круговой, однако для учета этого эффекта необходимо использовать более высокое, чем (8), приближение.

1. D u g n i n I. // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. V. 4. № 4. P. 651.
2. А н а н ь е в Ю. А. // Опт. и спектр. 1988. Т. 64. № 6. С. 1211.
3. I n d e b e t o u w G. // J. Opt. Soc. Am. A. 1989. V. 6. № 1. P. 150.
4. B l o i s i F., V i c a r i L. // Opt. Commun. 1990. V. 75. № 5—6. P. 353.
5. А р и с т о в А. Г., М а р г о л и н Л. Я., П о л о н с к и й Л. Я. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 12. С. 1299.
6. С о х А. I., D i b b l e D. C. // Appl. Opt. 1991. V. 30. № 11. P. 1330.
7. В а л ь е в А. Б., К р и в о ш л ы к о в С. Г. // Квант. электрон. 1989. Т. 16. № 5. С. 1047.
8. Б е й т м е н Г., Э р д е й н А. Высшие трансцендентные функции. М. 1978. Т. 2.
9. А р д а ш е в А. Ю., К а ш и н В. А., С к р о ц к и й Г. В. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. № 3. С. 869.
10. M i s h r a S. R. // Opt. Commun. 1991. V. 85. № 2—3. P. 159.

Поступила в редакцию 28.03.94.

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА И ФУНКЦИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ

In this paper the method of selecting the controlled variable and manipulated function is described. The method is based on the limiting performance of an optical system.

Среди задач, связанных с проблемой создания систем космического экологического мониторинга [1—3], наибольшее внимание привлекает задача обработки информации по данным регистрации оптического изображения приборами оптико-электронной системы. Как известно [1, 3], математическая постановка прямой задачи расчета вариаций яркости излучения, поступающего на регистрирующую аппаратуру, представляет собой суперпозицию нерассеивающей компоненты излучения $\Phi^{(0)*}$; многократно рассеянного в атмосфере излучения $\Phi^{(0)}$; подсветки $\Phi^{(q)}$, обусловленной однородной составляющей альбедо; горизонтальных вариаций альбедо $\Phi^{(q)}$, т. е.

$$\bar{\Phi}(x, y, z, \mu, \varphi) = \bar{\Phi}^{(0)}(z, \mu, \varphi) + \bar{\Phi}^{(0)}(z, \mu, \varphi) + \bar{\Phi}^{(q)}(z, \mu) + \bar{\Phi}^{(q)}(z, x, y, \mu, \varphi), \quad (1)$$

где $\bar{\Phi}$ рассматривается в ортогональном базисе s , e_1 , e_2 (s — единичный вектор направления потока излучения, $e_1 = e_s$; $e_2 = -e_s$; φ — азимутальный угол; $\mu = \cos\Theta$; Θ — полярный угол). Информацию о характере ландшафта, его отражающей и поглощающей способности несет слагаемое $\bar{\Phi}^{(q)}$. В прямой задаче вариации излучения описывает интеграл свертки или (в фурьеобразах) интеграл

$$\bar{\Phi}^{(q)}(x, y, z, \mu, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z, \omega, \mu, \varphi) \bar{z}(\omega) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] d\omega, \quad (2)$$

где Ψ — векторная пространственная частотная характеристика (ПЧХ); $\omega = (\omega_x, \omega_y)$ — пространственные круговые частоты; $\bar{z}(\omega)$ — фурье-образ «сценария» (ландшафта на рассматриваемом участке земной или водной поверхности).

Решение многомерной задачи (пятимерной по фазовому пространству) представляет большие вычислительные трудности [1, 3]. Поэтому при численном решении задач дистанционного зондирования [1], атмосферной оптики [2], теории видения в мутных средах [4] обычно ПЧХ различным образом аппроксимируют, а вычисление интегралов, содержащих ПЧХ, осуществляется с помощью быстрого преобразования Фурье, например [5]. Тем не менее решение многомерной задачи остается трудоемким. Оно еще более усложняется при переходе к обратной задаче «восстановления» исходной информации по экспериментальным данным. Задача, приводимая к интегральному уравнению Фредгольма первого рода типа свертки, поставлена некорректно [6]; необходима регуляризация решения.

Метод преобразований Фурье позволяет записать регуляризованное решение уравнения типа свертки в виде [6]:

$$z_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{y}(\omega) \bar{K}(-\omega) \exp(i(\omega, x))}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} d\omega, \quad (3)$$

где $L(\omega) = \bar{K}(\omega) \bar{K}(-\omega)$ ($\bar{K}(\omega)$ — модуль ПЧХ); $M(\omega)$ — регуляризирующая функция; $\alpha > 0$ — параметр регуляризации; $\bar{y}$ — фурье-образ входной функции, $x = x(x_1, x_2)$; $\omega = \omega(\omega_1, \omega_2)$. Известно, например [7], что наиболее сложным этапом в методах регуляризации является определение параметра регуляризации α . Он должен обеспечить устойчивость ре-

* При рассмотрении прямой задачи будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в системах дистанционного зондирования атмосферной оптики (1, 2).

шения, но не слишком искажать первоначальное уравнение первого рода. Необходимость «перебора» ряда значений параметра α и многократного вычисления квадратур (3) увеличивает трудоемкость вычислений.

Данная статья посвящена разработке способа выбора параметра регуляризации и регуляризирующей функции на основе учета предельных «изобразительных» возможностей оптико-электронной системы.

Будем полагать, что входная функция $u(x)$ задается дискретно в узлах j, k и

$$u(x_1, x_2) = \sum_j \sum_k u_{j,k}(x_1, x_2; x_{1,j}, x_{2,k}). \quad (4)$$

Учтем также следующее. Результаты численного решения некорректной задачи часто бывает необходимо интерполировать между значениями функций в узлах. Это накладывает определенные требования на «гладкость» решения, на выбор регуляризирующей функции.

Для решения прямой двумерной задачи типа (2) с входной функцией в форме (4) в [8] предложены аппроксимации $\bar{K}(\omega)$ и $u(x)$ функциями, приводящими произведение $|K(\omega)|u(\omega)$ к табличным фурье-трансформантам, в результате чего необходимость выполнения дискретных фурье-преобразований снимается. Используем эти аппроксимации для некорректно поставленной обратной задачи, положив

$$\bar{K}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(-b_k \omega) \quad (5)$$

и

$$u_{j,k}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \left(\arctg \frac{x_1 - x_{1,j}}{\alpha_0} - \arctg \frac{x_1 - x_{1,j+1}}{\alpha_0} \right) \times \\ \times \left(\arctg \frac{x_2 - x_{2,k}}{\alpha_0} - \arctg \frac{x_2 - x_{2,k+1}}{\alpha_0} \right), \quad (6)$$

$\alpha_0 > 0$ — малый параметр, величина которого определяется функцией рассеяния оптического звена оптико-электронной системы [8]. Тогда фурье-образ входной функции $u_{j,k}(x_1, x_2; x_{1,j}, x_{2,k})$ примет вид

$$\bar{u}_{j,k}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\exp(-\alpha_0 \omega)}{\omega_1 \omega_2} \exp(i\omega_1 x_{1,j}) \exp(i\omega_2 x_{2,k}). \quad (7)$$

Решение задачи представим в виде

$$z(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{u}(\omega) \exp(-\alpha_0 \omega)}{\bar{K}(\omega)} \exp[i(\omega, x)] d\omega. \quad (8)$$

Можно показать (подробно останавливаться не будем), что функция $\exp(-\alpha_0 \omega)$ удовлетворяет всем требованиям к регуляризирующей функции [6] и, следовательно, решение (8) — регуляризованное. Естественно, приближенные регуляризованные решения (3) и (8), вообще говоря, разные. Сравнение этих решений позволяет выразить регуляризирующую функцию $M(\omega)$ через параметр регуляризации и ПЧХ оптической системы. Сравнивая (8) и (3), представим регуляризирующую функцию в виде

$$M(\omega) = |\bar{K}(\omega)|^2 \sum_{m=1}^p \alpha^{m-1} \frac{|\omega|^m}{m!} \nu, \quad (9)$$

а верхнюю грань параметра регуляризации — в виде

$$\sup \alpha = \frac{4}{\omega_n} \ln |\bar{K}(\omega_n/2)/\bar{K}(\omega_n)|. \quad (10)$$

Соотношение (10) дает априорную оценку параметра регуляризации, а зависимость (9) — выбор порядка регуляризации p . В частности, при $p=1$ решение $Z(x) \in W_2^1$. Априорная оценка параметра α_0 позволяет сузить поле поиска значений параметра и сократить объем вычислений функционала. В силу того, что экспоненциальный полином (5) оказывается в (8) в знаменателе, функция $u(\omega)/K(\omega)$ уже не сводится в общем случае к табличным фурье-трансформантам.

1. Креков Г. М. и др. Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования. Новосибирск, 1988.
2. Сушкевич Т. А., Иолтуховский А. А., Стрелков С. А. Метод характеристик в задачах оптики. М., 1990.
3. Сушкевич Т. А., Иолтуховский А. А., Стрелков С. А. // Численное решение задач атмосферной оптики / Под ред. М. В. Масленникова, Т. А. Сушкевич. М., 1994. С. 4.
4. Зега Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Мн., 1985.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1980.
6. Тихонов А. И., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
7. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ: Справоч. пособие. Киев, 1978.
8. Мозалевский В. В. Математическое моделирование электрографического канала. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 21.11.94.

УДК 535.37

С. К. ГОРБАЦЕВИЧ, С. А. САХАРУК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ РАСТВОРОВ БИХРОМОФОРОВ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

The luminescence holarization characteristics have been considered for solid solutions of bichromophores composed of two organic molecules, when the nonlinear dependence of population of a donor molecule state is determined not by the saturation of levels, but by the exchange of electronic-excitation energy with an acceptor.

Рассмотрим характеристики поляризации люминесценции твердых растворов бихромофоров (рис. 1), состоящих из двух сложных органических молекул, в условиях, когда нелинейная зависимость заселенности

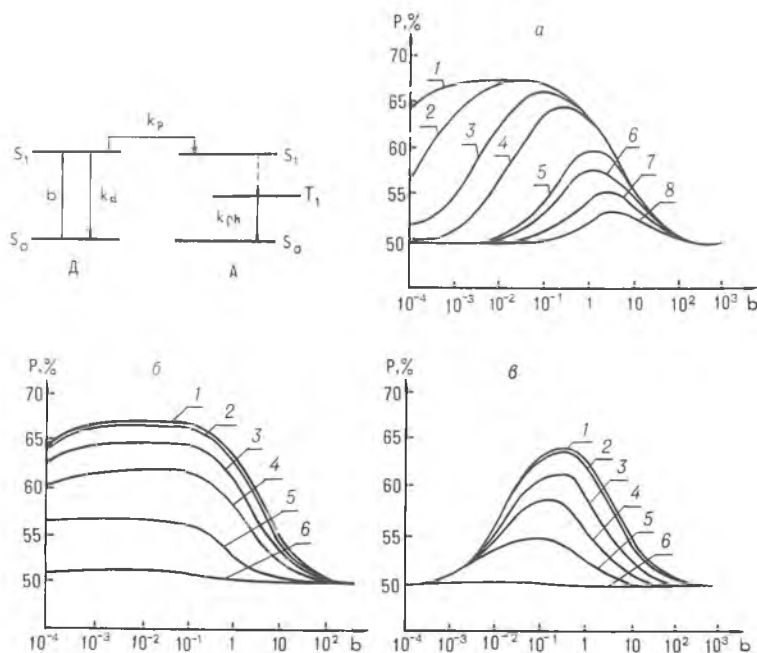


Рис. 1. Схема уровней энергии бихромофора

Рис. 2. Зависимости степени поляризации люминесценции твердого раствора бихромофоров от интенсивности возбуждающего излучения: а — независимое возбуждение: $k_p/k_d = 10^5$ (1), 10^4 (2), 10^3 (3), 10^2 (4), 10 (5), 5 (6), 2 (7), 1 (8); б, в — часть световой энергии поглощается молекулами акцептора: $b_A/b_D = 0$ (1), 0,01 (2), 0,1 (3), 0,3 (4), 1 (5), 10 (6); $k_p/k_d = 10^5$ (6), 100 (в)

состояния молекулы донора определяется не насыщением ее уровней, а обменом энергии электронного возбуждения с акцептором*.

Положим, что молекула донора в этом бихромофоре обладает достаточно высоким квантовым выходом люминесценции, а молекула акцептора имеет высокую вероятность перехода в триплетное состояние, т. е. квантовый выход люминесценции в ней близок к 0. Таким образом, будем рассматривать характеристики люминесценции молекулы донора, а молекула акцептора будет «тушителем люминесценции». Наличие большой вероятности перехода в триплетное состояние у молекулы акцептора желательно по двум причинам. Во-первых, это устраняет осложнения, которые могут возникнуть из-за вынужденных переходов в акцепторе, а, во-вторых, длительное время жизни возбужденного состояния акцептора позволяет использовать достаточно низкие интенсивности возбуждающего излучения для перевода в возбужденное состояние значительной доли молекул акцептора. В дальнейшем будем говорить о характеристиках люминесценции бихромофора в целом.

Проведем расчет степени поляризации люминесценции такого бихромофора при возбуждении люминесценции линейно поляризованным излучением, спектрально попадающим в полосу поглощения молекулы донора. Для параллельной и перпендикулярной компоненты интенсивности люминесценции можно записать:

$$I_{||} = 2\pi C \int_0^{\pi} X_D(\theta) \cos^2\theta \sin\theta d\theta, \quad (1)$$

$$I_{\perp} = \pi C \int_0^{\pi} X_D(\theta) \sin^3\theta d\theta,$$

где C — некоторая постоянная, θ — угол между направлением поляризации возбуждающего излучения и направлением дипольного момента перехода молекулы донора, $X_D(\theta)$ — заселенность молекулы донора.

Для рассмотренного нами бихромофора на основании [1, 2] можно записать выражение, связывающее заселенность донора с интенсивностью возбуждающего излучения:

$$X_D(\theta) = \frac{1 + B b \cos^2\theta}{1 + A + B(b \cos^2\theta + k_j)}, \quad (2)$$

$$A = \frac{k_j + k_p}{b \cos^2\theta}, \quad B = \frac{k_p}{k_{ph}(b \cos^2\theta + k_j + k_{ph})}.$$

Здесь $b = \frac{\sigma I_{\text{возб.}}}{h\nu_{\text{возб.}}}$, где σ — сечение поглощения молекулы донора, $I_{\text{возб.}}$ — плотность мощности возбуждающего света. Константа переноса (k_p) определяется из формулы Ферстера [3]:

$$k_p = k_f \left(\frac{R_0}{R} \right)^6, \quad (3)$$

где R_0 — критическое расстояние переноса энергии (ПЭ), R — расстояние между молекулами донора и акцептора.

Для начала положим, что константа переноса $k_p \gg k_f$, т. е. расстояние между молекулами, входящими в состав бихромофора, существенно меньше, чем критический радиус переноса. Кроме этого, спектральные характеристики молекул, входящих в состав бихромофора, позволяют проводить их независимое возбуждение. На рис. 2, а (кривая 1) приведена зависимость степени поляризации люминесценции твердого неориентированного раствора таких бихромофоров от интенсивности возбуждающего излучения при возбуждении линейно поляризованным излучением.

* Рассмотрение систем, содержащих несколько акцепторов, и переход к неупорядоченным растворам, когда концентрация акцептора существенно превышает концентрацию донора, планируется в отдельной публикации.

ем, спектрально попадающим в полосу поглощения донора. Из данного рисунка видно, что при достаточно низкой интенсивности возбуждения степень поляризации люминесценции такого бихромофора оказывается больше 50 %. (Для определенности мы положили, что предельная степень поляризации люминесценции молекулы донора при возбуждении линейно поляризованным излучением $P_0 = 50\%$.)

Остановимся подробнее на причинах, которые привели к такому результату. При достаточно высокой константе скорости ПЭ ($k_p \gg k_t$) после поглощения молекулой донора кванта света вероятность излучательного перехода у этой молекулы будет ничтожно мала, если молекула акцептора будет находиться в основном состоянии. Если же молекула акцептора находится в возбужденном состоянии, то донор может испустить квант света. Таким образом, для того чтобы молекула донора испустила квант света, она должна поглотить два кванта света за временной интервал, характеризующийся временем жизни акцептора. Первый поглощенный молекулой донора квант света переводит молекулу акцептора в возбужденное состояние, а второй может привести к испусканию кванта излучения молекулой донора. При этом зависимость интенсивности люминесценции данного бихромофора от интенсивности возбуждения является квадратичной. Следствием квадратичности этой зависимости и является повышение степени поляризации люминесценции бихромофора до величины, превышающей значение предельной степени поляризации. Повышение интенсивности возбуждающего излучения до величины, при которой происходит насыщение триплетного уровня акцептора, приводит к падению поляризации люминесценции молекул донора до значения предельной степени поляризации люминесценции (см. рис. 2, а, кривая 1). Это обусловлено тем, что при таких значениях интенсивности возбуждающего излучения вероятность поглощения молекулой донора квантов света становится довольно большой, и в результате молекула акцептора практически не влияет на люминесценцию донора (лишь малая доля поглощенных донором квантов расходуется на поддержание акцептора в возбужденном состоянии).

Очевидно, что условие $k_p \gg k_t$ может нарушаться при увеличении расстояния между молекулами донора и акцептора. На рис. 2, а (кривые 2—8) представлены зависимости степени поляризации люминесценции такого бихромофора от интенсивности возбуждения при различных значениях констант безызлучательного ПЭ между молекулами донора и акцептора. Обращает на себя внимание качественно отличный ход этой зависимости при $k_p \sim k_t$ по сравнению с $k_p \gg k_t$.

Такая немонотонность данной зависимости может быть объяснена следующими причинами. При малой интенсивности возбуждения, когда интенсивности возбуждающего излучения явно не достаточно для насыщения триплетных состояний молекул акцептора, доля бихромофоров, у которых «выключен» ПЭ на акцептор, оказывается незначительной. С другой стороны, значение квантового выхода бихромофора, у которого молекула акцептора находится в основном состоянии, не стремится к 0, а определяется выражением: $\phi_0 = k_t / (k_t + k_p)$. Изменение доли бихромофоров, у которых «выключен» акцептор, не будет существенным образом приводить к изменению квантового выхода донора в зависимости от интенсивности возбуждающего излучения. Поэтому значение степени поляризации люминесценции остается порядка 0,5. При достаточно больших интенсивностях возбуждения изменение интенсивности возбуждения будет приводить к изменению квантового выхода люминесценции бихромофора и, следовательно, к росту степени поляризации люминесценции бихромофора. При достаточно больших интенсивностях возбуждающего излучения, когда практически все молекулы акцептора будут находиться в возбужденном состоянии, значение квантового выхода бихромофора будет стремиться к значению квантового выхода молекулы донора в отсутствие акцептора и, следовательно, опять не будет зависеть от интенсивности возбуждения, и степень поляризации станет равной 0,5.

До сих пор мы полагали, что спектры поглощения донора и акцептора достаточно разнесены и возможно возбуждение молекул донора без затрагивания молекул акцептора. Однако, учитывая специфику формы

спектров поглощения сложных молекул, следует отметить, что данное допущение не всегда реализуемо. Поэтому рассмотрим, какое влияние на изучаемые нами процессы может оказать тот факт, что при возбуждении молекул донора некоторая часть световой энергии непосредственно поглощается молекулами акцептора (см. рис. 2,б и 2,в). Как видно из рис. 2,б и 2,в, с увеличением «самостоятельного» поглощения молекулы акцептора эффект влияния акцептора на поляризационные характеристики люминесценции донора снижается. Действительно, с ростом доли излучения, которое приводит к непосредственному возбуждению молекул акцептора, в возбужденном состоянии растет доля молекул акцептора, которая получила энергию не от молекул донора в результате ПЭ, а в результате непосредственного возбуждения. Поэтому, поскольку, как мы полагали, взаимные ориентации молекулы донора и акцептора, входящих в состав бихромофора, между собой независимы, то после поглощения кванта света акцептором «включенной» окажется молекула донора бихромофора, ориентация которой по отношению к возбуждающему излучению хаотична. В результате, несмотря на квадратичную зависимость интенсивности флуоресценции бихромофора от интенсивности возбуждающего излучения, степень поляризации окажется меньше, чем если бы возбуждающее излучение не поглощалось акцептором.

1. Горбачев С. К., Гулис И. М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1991. № 3. С. 26.

2. Сахарук С. А., Горбачев С. К. // ЖПС. 1994. Т. 60. № 5—6. С. 416.

3. Ермолаев В. И., Бодунов Е. Н., Свешникова Е. Б., Шавердов Т. А. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения. Л., 1977.

Поступила в редакцию 21.11.94.

УДК 535.37:530.182

О. Д. АСЕНЧИК, В. В. МОГИЛЬНЫЙ

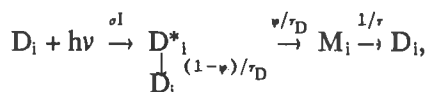
САМОМОДУЛЯЦИЯ МИГРАЦИИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ НАСЫЩЕНИИ

The ensemble of three-level absorbing nonmovable centers with saturated metastable states is considered under radiationless energy transfer processes. Migration slowing-down due to the metastable state saturation can not be explained by the decrease of average ground state population only. Another sufficient reason is selfinduced microscopic ordering in a form of compact groups. A pair correlation function is proposed to be used for the quantitative description of this phenomenon.

В работе [1] было указано на значительное отличие в характере насыщения трехуровневых донорных центров в неупорядоченных двухкомпонентных системах с миграционно-ускоренным тушением электронно-возбужденных состояний при наличии (вязкий раствор) и отсутствии (жесткий раствор) перемешивания компонентов. Различие связывалось с фотоиндуцируемой микроупорядоченностью взаимного расположения донорных центров в основном состоянии, модулирующей транспорт энергии электронного возбуждения и ее последующий захват акцепторами.

Целью настоящей работы является количественная оценка характеристик подобной микроупорядоченности в однокомпонентных системах с жесткозакрепленными поглощающими центрами, связанными безызлучательным переносом энергии электронного возбуждения в условиях самовоздействия, вызванного насыщением.

Примем следующую кинетическую схему, описывающую процессы создания возбуждения, его трансформацию и транспорт:



$$D^*_i + D_j \xrightarrow{w_{ij}} D_i + D^*_j.$$

Будем считать, что $\sigma I \ll \tau_D^{-1}$, $\sigma I \tau^{-1}$, $\tau_D \ll \tau$, т. е. существенного накопления центров в электронно-возбужденном состоянии D_i^* не происходит, а насыщение — результат заселения метастабильного состояния M_i ; индекс i обозначает номер выделенного центра. В этом случае кинетические уравнения, описывающие эволюцию населенностей $P_{D^*_i}(t)$ и $P_{D_i}(t)$ электронно-возбужденного и основного состояний i -го поглощающего центра, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{D^*_i}(t) = & \sigma I(t) P_{D_i}(t) - \sum_k^{N^*} (w_{ik} P_{D_k}(t) P_{D^*_i}(t) - w_{ki} P_{D_i}(t) P_{D^*_i}(t)) - \\ & - \frac{1}{\tau_D} P_{D^*_i}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{P}_{D_i}(t) = -\frac{\varphi}{\tau_D} P_{D_i}(t) + \frac{1}{\tau} (1 - P_{D_i}(t)). \quad (2)$$

Здесь $P_{D^*_i}$ — стационарная населенность состояния D_i^* , $\sigma I(t)$ — скорость возбуждения i -го центра, w_{ik} — вероятность элементарного акта переноса от i -го центра к k -му, кроме того, $w_{ik} = w_{ki}$; N — полное число поглощающих центров в рассматриваемом объеме V . В дальнейшем будем интересоваться динамикой транспорта возбуждения при установившемся распределении населенностей состояний D и M , т. е. $\dot{P}_{D_i}(t) = 0$. Тогда, усредняя (1), (2) по большому промежутку времени $T \gg \tau$, получим для стационарных населенностей выражения:

$$P_{D^*_i} \equiv \langle P_{D^*_i}(t) \rangle_T = J / (1 + \xi J),$$

$$P_{D_i} = 1 / (1 + \xi J),$$

где $\langle \dots \rangle_T$ — усреднение по T ; $J = \tau_D \langle \sigma I(t) \rangle_T$ — стационарная безразмерная скорость возбуждения системы; $\xi = \varphi \tau / \tau_D$.

С учетом вышесказанного, (1) переписывается в следующем виде:

$$P_{D^*_i}(t) = \int_0^t \frac{\sigma I(t')}{1 + \xi J} p_i(t - t') \exp\left(-\frac{t - t'}{\tau_D}\right) dt', \quad (3)$$

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_k^N \frac{w_{ik}}{1 + \xi J} (p_i(t) - p_k(t)).$$

Уравнение (3) для $p_i(t)$ — общеизвестное линейное уравнение, отталкиваясь от которого и изучают транспорт возбуждений (например, [2]), с тем отличием, что вместо скоростей w необходимо использовать скорости $w/(1 + \xi J)$.

Усреднения уравнения (3) по пространственным реализациям взаимного расположения центров для получения наблюдаемых характеристик процесса переноса могут быть проведены различными способами [2, 3]. В методе непрерывных случайных блужданий ключевой величиной, через которую могут быть выражены все усредненные пространственно-временные распределения, является функция $\psi(r, t)$ — вероятность возбуждению сделать шаг длиной r в интервале времени от t до $t + dt$ [2, 4]. В случае диполь-дипольного переноса энергии, согласно [2] и учитывая (3), стационарное значение $\psi(r)$ задается выражениями:

$$\psi(r) = \bar{w}(r) \int_0^{+\infty} \exp(-\bar{w}(r)t) R(\bar{w}, t) dt, \quad (4)$$

$$\bar{w}(r) = \frac{1}{1+\xi J} w(r) = \frac{1}{1+\xi J} \frac{1}{\tau_D} \left(\frac{R_0}{r} \right)^6, \quad (5)$$

где $R(t)$ — «функция истечения» [2]; R_0 — критический радиус переноса.

Функция $R(t)$ содержит информацию как о характере взаимодействия, приводящего к переносу, так и о характере пространственного расположения центров. Так, для неупорядоченного ансамбля [2]:

$$R(t) = \exp \left(-\gamma \sqrt{\frac{\pi t}{\tau_D}} \right), \quad (6)$$

где $\gamma = 4\pi R_0^3 c_0/3$, $c_0 = N/V$ — общая концентрация поглощающих центров. А если формально рассмотреть упорядоченное, трансляционно-инвариантное расположение центров, по которым осуществляется миграция, с той же концентрацией c_0 , то

$$R(t) = \exp \left(-\gamma \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^3 \frac{t}{\tau_D} \right), \quad (7)$$

r_0 — постоянная решетки матрицы-носителя примесных центров.

С другой стороны, уравнение (3), описывающее миграцию в системе с насыщением, можно записать без замены $w_{ik} \rightarrow w_{ik}/(1+\xi J)$, а путем модификации пределов суммирования $N \rightarrow N/(1+\xi J)$, т. е. рассматривая миграцию по N -центрам, находящимся в основном состоянии. Если бы взаимное расположение центров оставалось таким же, как и при $J \approx 0$, то функция распределения по длинам прыжков имела бы вид:

$$\psi_0(r) = w(r) \int_0^{+\infty} \exp(-w(r)t) R\left(\frac{C_0}{1+\xi J}, t\right) dt. \quad (8)$$

Тогда функцию $\rho(r)$, определяемую из

$$\Psi(r) = \rho(r) \psi_0(r), \quad (9)$$

опираясь на физическую интерпретацию $\Psi(r)$, можно рассматривать как количественную характеристику вероятности найти центр в основном состоянии на расстоянии r от выделенного центра — условие, необходимое для совершения прыжка. Приведенные ниже расчеты показывают, что $\rho(r)$, которую назовем функцией парных корреляций, равна 1 только при $r \rightarrow \infty$.

Соответственно, используя (6) и (7) совместно с (4), (5), (8), (9), получим выражения для функции $\rho(r)$ в случаях начально неупорядоченного (10) и упорядоченного (11) ансамблей:

$$\rho(r) = (1+\xi J) (1-f(z)) / \left(1-f\left(z(1+\xi J)^{-\frac{3}{2}}\right) \right), \quad (10)$$

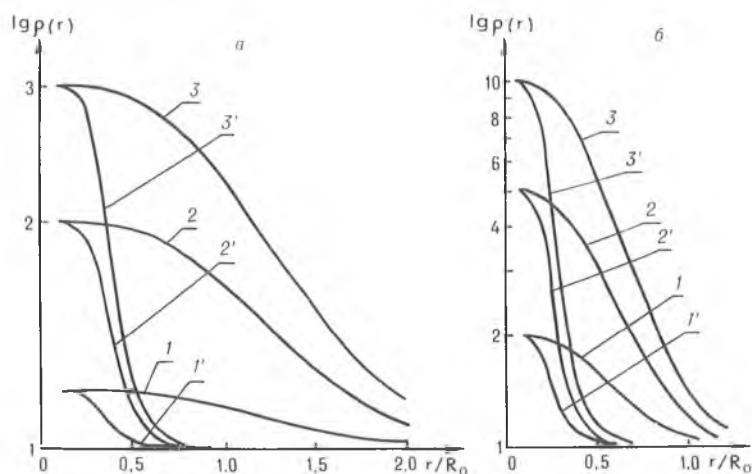
$$f(z) = \sqrt{\pi} z \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z),$$

$$z = \sqrt{\pi} \gamma r^3/2,$$

$$\rho(r) = 1 + \xi J / (1+y^6), \quad (11)$$

$$y = \gamma^{\frac{1}{6}} \frac{r}{\sqrt{r_0 R_0}}.$$

На рисунке приведены результаты расчетов по формулам (10), (11), демонстрирующие возрастание $\rho(r)$ в ограниченном интервале r с развитием насыщения, которое в рамках изложенного подхода можно интерпретировать как фотоиндуцируемое зарождение компактных групп центров в основном состоянии. Причем исходная упорядоченность системы оказывает существенное влияние на размер этих групп.



Вид функции парных корреляций $\rho(r/R_0)$ при различных интенсивностях J стационарного возбуждения. Значения использованных параметров:

а) $\gamma = 0.5$, $r_0 = 0.1R_0$, кривым 1, 2, 3 соответствует $J = 0.2, 1, 2$; б) $\gamma = 5$, $r_0 = 0.1R_0$, кривым 1, 2, 3 соответствует $J = 1, 4, 9$. Номера без штриха — случай неупорядоченного ансамбля, со штрихом — упорядоченного

1. Асенчик О. Д., Могильный В. В. // Оптика и спектроскопия. 1994. Т. 77. Вып. 2. С. 260.
2. Бурштейн А. И. // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143. Вып. 4. С. 10.
3. Бодунов Е. Н. // Оптика и спектроскопия. 1993. Т. 74. Вып. 3. С. 518.
4. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F. // Phys. Rev. A. 1987. V. 35. № 7. P. 3081.

Поступила в редакцию 14.11.94.

УДК 534. 42:534.8

Г. В. КУЛАК

СОЛИТОНЫ СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАНАРНЫХ И ВОЛОКОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ НИОБАТА ЛИТИЯ

The peculiarities of formation parametrically coupled solitary states, developing via codirectional acoustooptical interaction, of the orthogonally polarized optical modes of planar — and fiber-optic waveguides maked on the bases lithium niobate crystals is considered. The influency of the acoustical attenuation and group duration of light pulses on the specific features of the acoustooptical diffraction are studied.

Для создания высокоскоростных оптических систем обработки информации предлагалось использовать последовательности пикосекундных оптических импульсов с малой скважностью [1]. Однако формирование таких последовательностей сверхкоротких импульсов является сложной технической задачей. В ряде работ предполагалось кодировать короткие оптические импульсы, следующие с большой скважностью, а затем осуществлять их уплотнение электронными методами. В этом случае возникает проблема жесткой синхронизации оптико-электронной системы (состоящей из большого числа оптических элементов) вследствие вероятности смещения разрядов разных чисел.

Для ослабления требований к синхронизации оптической системы предложено использовать плотные кодовые посылки информационной емкостью 10^3 бит и уплотнение самих этих посылок [2]. В этом случае

информация поступает отдельными фрагментами, что дает возможность снабдить каждый фрагмент своим ключом и таким образом перейти к ассоциативному потоку данных. В качестве кодовых посылок (информационных пакетов) в [2] предложено использовать связанные солитонные состояния (ССС) в акустооптике, впервые исследованные в [3]. Известно, что при создании многоканальных систем ввода информации с уплотнением каналов требуется использовать комбинацию устройств формирования СССР и возможность их стыковки с одномодовыми волоконными световодами. Стыковка оптического волокна с акустооптическими (АО) устройствами является сложной технической задачей, связанной со значительными потерями оптической мощности.

Для решения этой задачи нами предлагается формировать пакеты медленных оптических солитонов при коллинеарном сонаправленном АО взаимодействии ТЕ- и ТМ-мод оптического волновода, сформированного на подложке Y-среза кристалла LiNbO_3 или при коллинеарном АО взаимодействии ортогонально поляризованных мод волоконного световода, сформированного из того же кристалла. Способ изготовления оптических волокон из кристаллов LiNbO_3 предложен в [4].

Затравочный акустический импульс поверхностных акустических волн (ПАВ) заданной формы предполагается формировать системой встречно-штыревых электродов, размещенных на поверхности подложки кристалла. Для эффективного трехволнового параметрического взаимодействия в волоконных световодах на основе кристаллов LiNbO_3 затравочный акустический импульс продольных ультразвуковых (УЗ) волн с аксиально-радиальным распределением УЗ деформаций может быть сформирован с использованием способа возбуждения продольных УЗ волн, предложенного в работе [5].

Для эффективного АО взаимодействия при X—Y-ориентации LiNbO_3 частота ПАВ $f = 498$ МГц и длина волны света $\lambda_0 = 0,6328$ мкм [6]. В этом случае распределение упругих деформаций в сечении волноводного слоя можно считать однородным. Несложно показать, что отношение поперечной (U_y) и продольной (U_x) составляющих поверхностной УЗ волны Рэлея удовлетворяет соотношению: $|U_y|/|U_x| \geq 10$ [7]. В таком случае для исследования АО взаимодействия в солитонном режиме можно ограничиться лишь одной (поперечной) составляющей упругих смещений импульса ПАВ и теорией параметрического усиления Крола [8].

В соответствии с теорией трехволнового параметрического взаимодействия [8] при условии медленности изменения амплитуд взаимодействующих волн $\lambda_0 \left| \frac{dE_0}{dx} \right| \ll |E_0|$, $\lambda_0 \left| \frac{dE_1}{dx} \right| \ll |E_1|$ на длине волны падающего света и ультразвука систему уравнений связанных волн запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{n_1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} &= \frac{1}{2} p_{\text{эф}} \sigma_1 n_0^2 K k_0 U_2 A_0, \\ \frac{\partial A_0}{\partial x} + \frac{n_0}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} &= \frac{1}{2} p_{\text{эф}} \sigma_0 n_1^2 K k_1 U_2 A_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial U_2}{\partial t} &= \left(\frac{p_{\text{эф}} \sigma n_1^2 n_0^2}{8\pi \rho v^2} \right) A_0 A_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_0(x, t)$, $A_1(x, t)$ — комплексная амплитуда падающей (дифрагированной) световой волны; $p_{\text{эф}}$ — эффективная фотоупругая постоянная; $\sigma_{0,1}$, σ — интегралы перекрытия; U_2 — амплитуда Y-составляющей смещения УЗ волны, ρ — плотность материала звукопровода; c — скорость света в вакууме; $n_0(n_1)$ — эффективные показатели преломления ТЕ-(ТМ-) моды соответственно; $k_0 = 2\pi n_0/\lambda_0$, $k_1 = 2\pi n_1/\lambda_0$, $K = |k_1 - k_0|$.

Интегралы перекрытия $\sigma_{0,1}$, σ даются соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{0,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) |e_0| |e_1| dy / \int_{-\infty}^{+\infty} |e_{0,1}|^2 dy, \\ \sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y) |e_0| |e_1| dy / \int_{-\infty}^{+\infty} |V(y)|^2 dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где $V(y)$ — функция пространственного распределения упругих смеще-

ний в волноводной структуре; $e_0(y)$ ($e_1(y)$) — функция пространственного распределения амплитуды ТЕ-(ТМ-) моды в отсутствие УЗ возмущения.

Для решения системы уравнений (1) используем граничные условия вида:

$$U_2(x=0, t) = U_0 f(t), \quad A_0(x=0, t) = A, \quad A_1(x=0, t) = 0, \quad (3)$$

где $U_0 \sim \sqrt{P_a}$ — постоянная, причем P_a — мощность ПАВ; $f(t)$ — функция, определяющая форму падающего импульса ПАВ; A — амплитуда оптической накачки на входной грани звукопровода $x=0$.

С использованием результатов работы [3] и граничных условий (3) амплитуды дифрагированных волн запишем в виде:

$$U_2 = U_0 \left(\frac{v}{v_s} \right) \text{sech} Q, \quad A_0 = A \tanh Q, \quad A_1 = \left(\frac{q_2}{q_3} \right) A \text{sech} Q,$$

где

$$Q = (v_s t - x) (L_u^{-1} - L_s^{-1}) + \ln \left(\frac{L_u}{L_s} \right),$$

причем

$$v_s = L_s / T_s, \quad L_u = (q_2 q_3 U_0^2 / 4)^{-1/2},$$

$$L_s = (q_1 q_2 U_0^2 + q_2 q_3 A^2 / 4)^{-1/2} \quad (q_1 = \frac{1}{2} p_{\text{эф}} \sigma_1 n_0^2 K k_0, \quad q_2 = \frac{1}{2} p_{\text{эф}} \sigma_0 n_1^2 K k_1,$$

$$q_3 = p_{\text{эф}} \sigma n_1^2 n_0^2 / 8 \pi v^2).$$

Форма затравочного импульса ПАВ определяется соотношением: $f(t) = \text{sech}(vt/L_u)$.

Исследование влияния УЗ затухания и группового запаздывания световых импульсов проведем в приближении заданного акустического поля. Экспоненциальное затухание УЗ волны определяется выражением: $U = U_2^0 \exp(-\alpha x)$, где α — коэффициент затухания ультразвука.

Рассмотрим АО взаимодействие светового импульса гауссовой формы с УЗ импульсом прямоугольной формы. При этом $U_2^0 = U$ для $|t| \leq \frac{\tau_a}{2}$,

где U — амплитуда импульса, τ_a — его длительность.

Эффективность АО взаимодействия η находим из соотношения:

$$\eta = \frac{\int_{-r_a/2}^{r_a/2} |A_1|^2 dt}{\int_{-r_a/2}^{r_a/2} |A_0|^2 dt + \int_{-r_a/2}^{r_a/2} |A_1|^2 dt}.$$

На рис. 1 представлена зависимость эффективности дифракции от акустической мощности P_a для различных коэффициентов затухания УЗ волны α .

Изменение во времени амплитудного профиля дифрагированного импульса $|A_1(t)|$ для различных величин безразмерного параметра $\delta = \tau_3 / \tau$ (τ_3 — групповое запаздывание дифрагированных импульсов света) показано на рис. 2. Из рисунка следует, что при отсутствии группового запаздывания ($\tau_3 = 0$) дифрагированный импульс сохраняет форму падающего (гауссового). При наличии группового запаздывания амплитуда дифрагированного импульса уменьшается, а его форма изменяется (импульс уширяется). Значительное изменение формы дифрагированного импульса наблюдается при $\tau_3 \geq \tau$.

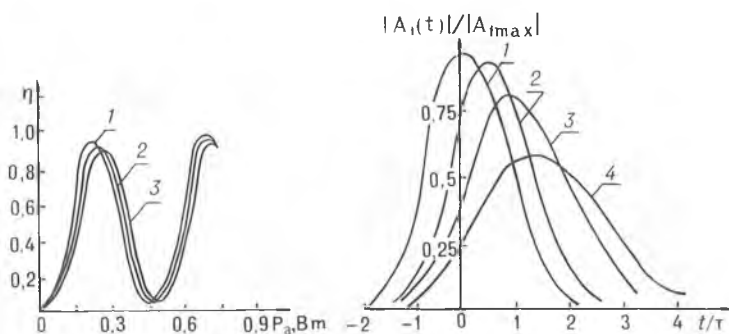


Рис. 1. Зависимость эффективности АО взаимодействия η от акустической мощности P_a при различных значениях коэффициента затухания ультразвука

α : 1—0; 2—0,5; 3—1 (дБ/см) (Длина АО взаимодействия $l = 2$ см, длительность падающего оптического импульса $\tau = 2$ нс; длительность акустического импульса $\tau_a = 3$ мкс)

Рис. 2. Зависимость нормированной амплитуды дифрагированного импульса $|A_1(t)|/|A_{1max}|$ от времени (форма огибающей дифрагированного импульса) при различных значениях безразмерного параметра δ :

1—0; 2—0,5; 3—1; 4—1,5; ($\alpha = 0$ (дБ/см), $P_a = 0,5$ Вт, $l = 2$ см)

1. Белокурова О. И., Щербаков А. С. //Вычислит. техника, автоматика и радиоэлектроника. Л., 190. С. 54.
2. Белокурова О. И., Щербаков А. С. //Письма в ЖТФ. 1989. Т. 10. С. 1.
3. Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я. //Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. С. 1.
4. Zong H., Hon Y., Quon N. //Chin. Ceram. Soc. 1991. V. 19. P. 151.
5. Jеп С., Goto N. //J. Lightwave Technol. 1989. V.7. P. 2018.
6. Ohmachi Y., Noda J. //IEEE J. of Quantum Electron. 1977. V. QE-13. P. 43.
7. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., 1966.
8. Такер Д., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела. М., 1975.

Поступила в редакцию 21.11.94.

УДК 621. 039

Ю. И. ДУДЧИК, Ф. Ф. КОМАРОВ, Я. А. КОНСТАНТИНОВ

ОСОБЕННОСТИ МАЛОУГЛОВОГО ВЫХОДА ФЛУОРЕСЦЕНТНОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ МИШЕНЕЙ

Calculation procedure and results of experimental investigations for the glancing angle X-ray fluorescence of thinfilm targets are presented.

При полном внешнем отражении рентгеновского излучения от гладкой поверхности в материале отражателя формируется экспоненциально затухающая электромагнитная волна, глубина проникновения которой в вещество составляет величину в несколько нанометров. Эта волна поглощается атомами вещества, которые испускают фотоны характеристического рентгеновского излучения. Указанные особенности отражения рентгеновских лучей использованы в методе анализа поверхности и тонких пленок, известном как рентгеновская флуоресценция скользящего падения [1]. В указанном методе измеряется интенсивность рентгеновской флуоресценции атомов как функция угла падения θ возбуждающего излучения на поверхность, где θ — скользящий угол. Возможности этого метода могут быть значительно расширены путем измерения угловой зависимости выхода рентгеновской флуоресценции атомов в направлении малых скользящих углов, по порядку величины совпадающих с критическим углом полного внешнего отражения, что и сделано в работах [2,3], которые фактически дали начало новому методу анализа поверхности с использованием рентгеновских лучей.

При постановке эксперимента в описанной схеме интенсивность рентгеновской флуоресценции атомов приповерхностных слоев суще-

ственно зависит от шероховатости поверхности. В том случае, когда среднеквадратичная высота шероховатостей не превышает ~1 нм, угловая зависимость выхода рентгеновского излучения при малых углах скольжения определяется, в первую очередь, преломляющими свойствами среды. Поэтому можно сказать, что эксперименты такого типа позволяют непосредственно наблюдать явление преломления рентгеновских лучей на границе раздела двух сред, как и в случае полного внешнего отражения.

Указанные особенности малоуглового выхода рентгеновского излучения были положены в основу при создании рентгеновских трубок со сверхгладкими анодами, конструкция и рабочие характеристики которых описаны в [4,5]. В этих работах предложено использовать рентгеновские пучки, выходящие под малым скользящим углом относительно поверхности анода. Это позволяет существенно увеличить размер действительного фокусного пятна трубки без увеличения эффективного, что приводит к снижению тепловых нагрузок в анодном узле. Рабочие характеристики такой трубки сильно зависят от материала и состояния поверхности анода, на который нанесена тонкопленочная мишень. Так как размеры действительного фокусного пятна трубки достаточно большие (1 см^2), то можно предложить использовать в качестве анодов полупроводниковые пластины, технология сверхгладкой полировки которых достаточно отработана.

Целью данной работы является исследование угловой зависимости выхода характеристического рентгеновского излучения вблизи малых углов скольжения от тонкопленочных мишеней, нанесенных на различные подложки. Описана методика расчета указанной зависимости, учитывающая интерференцию флуоресцентного рентгеновского излучения в тонких пленках. Эта методика может быть использована при анализе экспериментальных данных, полученных с помощью метода исследования поверхности твердого тела с использованием рентгеновских пучков, а также при конструировании анодных узлов рентгеновских пучков, а также при конструировании анодных узлов рентгеновских трубок со сверхгладкой поверхностью анода.

Рассмотрим выход рентгеновского излучения от атома, расположенного в мишени на глубине z от границы раздела. Согласно закону преломления плоских электромагнитных волн на границе раздела двух сред, излучение выходит из среды в вакуум под скользящим углом θ_1 , связанным с углом падения на границу раздела θ_2 из среды следующим соотношением:

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 + \theta_c^2, \quad (1)$$

где θ_c — критический угол полного внешнего отражения.

Использование этого соотношения, а также закона Бугера позволяет рассчитывать интенсивность выхода излучения в направлении углов больше θ_c . Как следует из соотношения (1), согласно закону преломления излучение в направлении $\theta_1 < \theta_c$ отсутствует.

Интенсивность излучения в направлении малых углов $\theta_1 < \theta_c$ может быть рассчитана с использованием методики, учитывающей преломление сферических электромагнитных волн на границе раздела и изложенной (для излучения видимого диапазона спектра) в работе [6].

В этой работе излучающий атом, расположенный на глубине z от границы раздела, рассматривается как диполь с дипольным моментом P , колеблющийся с частотой ω .

Будем рассматривать поле диполя как сферическую электромагнитную волну, преломление которой на плоской границе раздела учитывается путем разложения сферической волны на плоские [7] и считается, что каждая из них преломляется в соответствии с формулами Френеля. Указанное разложение наряду с обычными плоскими волнами содержит экспоненциально затухающие волны вида:

$$\exp(-|k_z|z) \exp(i[k_x x + k_y y - i\omega t]),$$

которые, преломляясь на границе раздела, дают вклад в излучение,

выходящее в запрещенную область углов, где k_x , k_y , k_z — проекции волнового вектора k на оси x , y , z . Выберем систему координат таким образом, чтобы ось z была направлена в глубь образца, а плоскость (x, y) совпадала с плоскостью поверхности. Тогда интенсивность излучения диполя, находящегося на глубине z , усредненная по всем возможным ориентациям вектора дипольного момента, в телесный угол Ω в направлении угла θ , определяется выражением:

$$I = \frac{|E|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \left| \frac{2k_z}{k_z + K_z} \exp(iK_z z) \right|^2 \frac{\Omega}{4\pi}, \quad (2)$$

где k_z и K_z — проекции волнового вектора на ось z при $z < 0$ и $z > 0$ соответственно, c — скорость света. Для фотонов рентгеновского диапазона спектра эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$I = \hbar\omega A_{nm} \frac{4k_z^2}{k_z^2 + |K_z|^2} \exp(-2|K_z|z) \frac{\Omega}{4\pi}, \quad (3)$$

где A_{nm} — вероятность спонтанного перехода между уровнями n и m .

На основании формулы (3), путем интегрирования выражения для интенсивности излучения по глубине z , можно рассчитать выход флуоресцентного рентгеновского излучения из мишени, толщина которой значительно превышает глубину проникновения рентгеновского излучения при полном внешнем отражении, т. е. составляет величину больше чем 10 нм. Однако полученное выражение нельзя применить к большинству практических задач, в которых обычно предполагается неравномерная по глубине степень возбуждения атомов.

Так, при рассмотрении задачи о малоугловом выходе рентгеновского излучения из тонкой пленки, нанесенной на подложку, использование описанного выше метода затруднено, так как необходимо учитывать отражение излучения на границе раздела пленка — подложка. В этом случае удобно использовать теорему обратимости Гельмгольца [8].

Согласно теореме обратимости, функция, описывающая зависимость интенсивности выходящего излучения от атомов, расположенных в пленке на глубине z , от угла выхода, совпадает с функцией, описывающей зависимость интенсивности падающего на пленку со стороны вакуума излучения, в пленке на глубине z , от угла падения. Таким образом, для решения задачи о малоугловом выходе излучения первоначально необходимо рассмотреть задачу об отражении рентгеновского излучения от тонкой пленки, нанесенной на подложку.

Рассмотрим отражение рентгеновского излучения, падающего на поверхность пленки под скольльзящим углом Θ ; пленка имеет толщину d , показатель преломления $n_1 = 1 - \delta_1(\hbar\omega) - i\beta_1(\hbar\omega)$, нанесена на подложку с показателем преломления $n_2 = 1 - \delta_2(\hbar\omega) - i\beta_2(\hbar\omega)$, где $\delta_j(\hbar\omega)$ и $\beta_j(\hbar\omega)$ действительная и мнимая части показателя преломления в слое j соответственно.

Полное электрическое поле на глубине z в пленке толщиной d можно представить в следующем виде [3]:

$$E(z) = E_1^t \exp(-i2\pi N_1 z/\lambda) + E_1^r \exp(i2\pi N_1 z/\lambda). \quad (4)$$

Прошедшее через границу раздела вакуум — пленка электрическое поле E_1^t и отраженное на границе раздела пленка — подложка электрическое поле E_1^r на глубине z в пленке имеют вид:

$$E_1^t = E_0 \frac{t_0}{1 + a_1^2 r_1 r_0}; \quad E_1^r = a_1^2 r_1 E_1^t, \quad (5)$$

где $a_1^2 = \exp(-4\pi i d N_1/\lambda)$, E_0 — поле падающей волны в вакууме, λ — длина волны излучения.

Френелевские коэффициенты отражения r_j и пропускания t_j для границы раздела слоев j , $j+1$ находятся из соотношений:

$$r_j = \frac{N_j - N_{j+1}}{N_j + N_{j+1}}; \quad t_j = \frac{2N_j}{N_j + N_{j+1}},$$

где $N_j = (\sin^2\Theta - 2\delta_j - i2\beta_j)^{1/2}$.

Пусть на поверхность, имеющую площадь S , падает электронный пучок с энергией электронов E_e и плотностью потока Φ . Не учитывая энергетические потери электронов при прохождении через пленку, число фотонов K_α -флуоресценции, испускаемых пленкой толщиной d в телесный угол $d\Omega$ в направлении угла Θ_f , можно записать в виде:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} W \Phi S \frac{N_A \rho}{A} \sigma(E_e) \int_0^d \left| \frac{E(z)}{E_0} \right|^2 dz, \quad (6)$$

где W — выход флуоресценции K оболочки атомов пленки, N_A — число Авогадро, ρ и A — плотность и атомный вес материала пленки, $\sigma(E_e)$ — сечение ионизации K оболочки атомов пленки. Угол падения излучения Θ в (4) заменяется на угол выхода излучения флуоресценции Θ_f .

Разработанная методика расчета была применена к задаче о выходе рентгеновского излучения, возбуждаемого в тонкопленочной медной мишени электронным пучком, нанесенной на кремниевую (вольфрамовую) подложку. Энергия электронов выбрана равной 20 кэВ, сила тока ~ 1 мА, площадь мишени 1 см², сечение ионизации K оболочки атомов меди при указанной энергии электронов составляет $3,5 \times 10^{-22}$ см² [9].

Результаты расчетов зависимости интенсивности излучения K_α линии меди от угла выхода из пленок меди различной толщины, нанесенных на подложки из кремния и вольфрама, представлены на рис. 1, а, б.

Отметим особенности поведения кривых на рис. 1, а, б, которые связаны с преломлением флуоресцентного излучения на границе раздела вакуум—пленка и отражением на границе раздела пленка — подложка. Выделим три критических угла полного внешнего отражения излучения K_α линии меди: Θ_{c1} — от материала пленки (медь), Θ_{c2} — от легкой подложки (кремний), Θ_{c3} от тяжелой подложки (вольфрам). Эти углы удовлетворяют соотношению $\Theta_{c2} < \Theta_{c1} < \Theta_{c3}$.

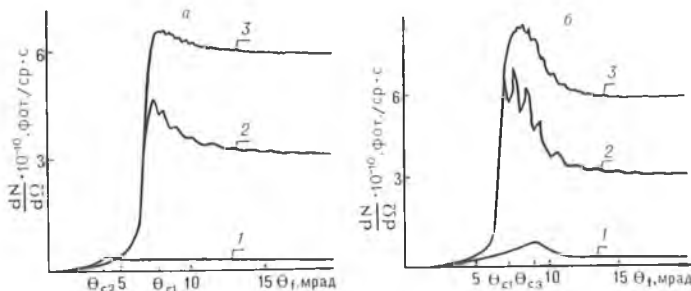


Рис. 1. Кривая выхода фотонов K_α серии атомов меди из пленки меди, нанесенной на кремниевую (а) и вольфрамовую (б) подложку, в зависимости от угла выхода Θ_f (Толщина пленки: 1 — 4 нм; 2 — 50; 3 — 100 нм)

При выходе флуоресцентного излучения из толстых пленок наблюдается максимум в районе угла Θ_{c1} . Это связано с преломлением выходящего излучения на границе раздела пленка — вакуум. При увеличении угла выхода флуоресцентного излучения из пленки Θ_f изменение угла за счет преломления $\Delta\Theta$ стремится к нулю и кривые на рис. 1, а, б выходят на стационарные значения, прямо пропорциональные толщине пленки.

Что касается тонких пленок (4 нм), то следует отметить, что преломление рентгеновского излучения, как и полное внешнее отражение, наблюдается в случае взаимодействия рентгеновских фотонов с коллективом атомов, а не с каждым атомом в отдельности. Это становится возможным, когда поперечная длина волны излучения $\lambda_\perp = \lambda/\sin\phi$, где ϕ — угол падения флуоресцентного излучения на границу раздела, совпадает с длиной волны плазменных колебаний электронов вещества. В случае тонких пленок флуоресцентное излучение взаимодействует не с коллективом атомов пленки, которых для этого недостаточно, а с

атомами подложки. Соответственно максимум интенсивности (рис. 1, а, б, кривая 1) смещается в область угла Θ_{c2} для кремниевой подложки и в область угла Θ_{c3} для вольфрамовой подложки.

Осцилляции, наблюдаемые на графиках, являются следствием интерференции между лучами, непосредственно выходящими из пленки и выходящими из пленки после отражения на границе раздела пленка — подложка. Поскольку коэффициент отражения от оптически более плотной подложки из вольфрама больше, чем от кремния, то интерференционные эффекты на рис. 1, б более ярко выражены.

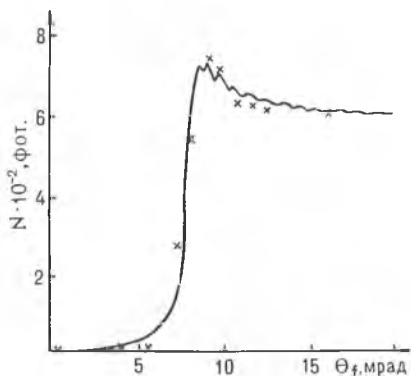


Рис. 2. Рассчитанная кривая выхода фотонов K_{α} серии атомов железа из пленки железа толщиной 80 нм, нанесенной на кремниевую подложку, в зависимости от угла выхода Θ_f в сравнении с экспериментальными данными:

x — эксперимент, — — — — — теория

Следствием отражения излучения на границе раздела пленка — подложка также является относительно большая интенсивность выхода излучения в пике для пленок меди, нанесенных на подложку из вольфрама.

Экспериментальное исследование малоуглового выхода рентгеновской флуоресценции проводилось на рентгеновском дифрактометре ДРОН-2,0. Излучение от трубки с медным анодом направлялось под углом 90° на образец, представляющий собой пленку из железа толщиной 80 нм, нанесенную на кремниевую подложку. Напряжение на трубке — 20 кВ, анодный ток — 10 мА. Толщина пленки определялась методом резерфордского обратного рассеяния с использованием ионов гелия. Излучение K_{α} линии железа регистрировалось сцинтилляционным детектором. Время измерений для каждого значения угла выхода Θ_f составляло 100 с. Точность определения угла выхода составляла 0,175 мрад. Размер щели перед детектором — $5 \times 0,05$ мм².

Результаты измерений и расчетов, выполненных с использованием формулы (7), представлены на рис. 2. Как видно из рисунка, имеется хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных.

Полученные результаты свидетельствуют о пригодности разработанной методики расчета малоуглового выхода флуоресцентного излучения для обработки экспериментальных данных, а также для проведения численного моделирования конструктивных особенностей тонкопленочных анодов со сверхгладкой поверхностью.

1. Афанасьев А. М., Александров П. А., Имамов Р. М. Рентгенодифракционная диагностика субмикронных слоев. М., 1989.
2. Sasaki Y., Higoaka K. // Appl. Phys. A. 1990. V. 50. P. 397.
3. Tsuji K., Higoaka K. // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. P. 7189.
4. Дудчик Ю. И., Комаров Ф. Ф., Соловьев В. С., Тишков В. С. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 1. С. 57.
5. Баженова О. Б., Байдюк Т. В., Дудчик Ю. И. и др. // Там же. 1993. Т. 19. Вып. 2. С. 58.
6. Carniglia C. K., Mandel L., Drexhage K. H. // J. Opt. Soc. Amer. 1972. V. 62. P. 479.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1972.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.
9. Количественный электронно-зондовый микроанализ /Под ред. В. Скотта, Г. Лава, М., 1986.

Поступила в редакцию 13.02.95.

ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ НАЛОЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОНОКРИСТАЛЛАХ ВИСМУТА

The electroplastic effect (EPE) in bismuth under condition of location of crystal in electrical and magnetic field simultaneously was observed. The density of current impulses was less threshold value it of usual EPE in bismuth. The theoretical model describing this effect by lowering of surface energy is presented.

Модель «электронного ветра», используемая в настоящее время для объяснения электропластического эффекта (ЭПЭ), предусматривает объемный физический механизм, согласно которому ускоренные под действием электрического поля электроны передают импульс движущимся дислокациям [1—6]. В то же время некоторые экспериментальные данные указывают на поверхностный характер этого эффекта [7—10]. Так, в [10] показано, что электромеханический и фотомеханический эффекты наблюдаются в поверхностном слое одинаковой толщины (2—3 мкм) полуметаллов и ковалентных кристаллов и могут быть объяснены только изменением поверхностной энергии. Наложение определенным образом на проводящий кристалл электрического и магнитного поля во взаимно перпендикулярных направлениях приводит к изменению концентрации носителей тока у индентруемой грани и, как следствие, к изменению ее поверхностной энергии.

Весьма интересную информацию в этом плане можно получить, исследуя поведение микротвердости двойникующихся кристаллов в условиях одновременного наложения электрического и магнитного полей.

Клиновидные двойники создаются полем неоднородного напряжения алмазного индентора на плоскости спайности двойникующихся кристаллов. Поскольку двойниковый клин растет за счет перемещения смешанных двойникующих дислокаций, можно оценить процессы взаимодействия дислокаций со свободной поверхностью [11].

Материал и методика

Для изучения двойникового нагружения в «точке» была изготовлена специальная приставка к стандартному микротвердомеру ПМТ-3, которая позволила проводить индентирование в условиях возбуждения электронной подсистемы кристаллов электромагнитными полями. Инструментальные эффекты, возникающие при подведении магнитного поля к образцу, могут быть разделены на две группы: искажение магнитного потока ферромагнитными деталями оборудования и действие сил электромагнитного давления. Последние приводят к дополнительному механическому давлению на индентор в условиях градиента магнитного поля на верхнем срезе зазора сердечника электромагнита [12]. С целью устранения этих эффектов все детали установки и нагрузочного узла микротвердомера были сделаны из диамагнитных материалов, имеющих коэффициент магнитной восприимчивости $\chi = 10^{-5}$. Во избежание искажения магнитного поля стальным предметным столиком микротвердомера образец и нижний срез сердечника электромагнита располагались на достаточно большой высоте от столика (10—15 см).

Кристалл закреплялся между массивными медными электрическими контактами в геометрическом центре сердечника, где магнитное поле наиболее однородно. Импульс тока через кристалл создавался путем разрядки батареи конденсаторов. Длительность импульса составляла 10^{-4} с, форма была близка к треугольной.

Измерения проводились на свежесколотой плоскости спайности (111) монокристаллов висмута технической чистоты. Использовался метод повторного опускания индентора в то же место. Импульсы тока без механических напряжений дополнительного двойникового не вызывают. Для устранения возможного влияния МПЭ кристалл в процессе измерения постоянно находился в области магнитного поля. Спустя 5 с

после повторного опускания индентора в индентированное поле через кристалл пропусклся импульс тока. Индентирование без импульса тока не дает заметного изменения картины двойникования. Индукция магнитного поля в образце была постоянной и равнялась 0,22 Тл. Поскольку на развитие отдельных двойников в большой степени влияют локальные особенности кристаллической структуры в окрестности двойниковых границ, число отпечатков составляло не менее 20. Полученные экспериментальные зависимости строились компьютерным способом с помощью графического редактора GRAPHER.

Результаты и их обсуждение

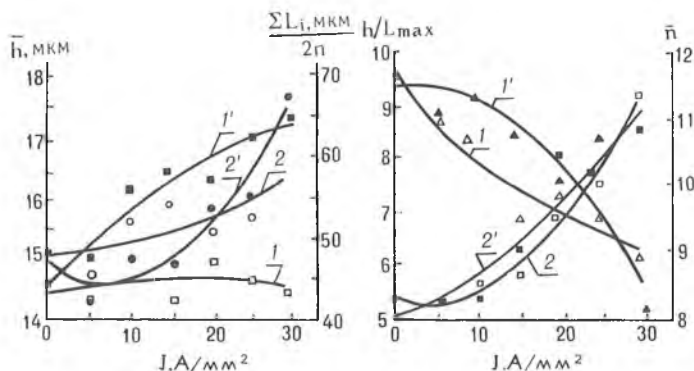


Рис. 1. Зависимость средней ширины двойниковых лучей у устья $\bar{h}$ ($1, 1'$) и средней длины пробега двойниующих дислокаций $\Sigma L_i/2n$ ($2, 2'$) от плотности тока в импульсе при положительном ($1, 2$) и отрицательном ($1', 2'$) потенциале индентруемой плоскости спайности висмута.

Рис. 2. Степень некогерентности двойниковых границ $h/L_{\max}$ ($1, 1'$) и среднее число двойников $\bar{n}$ ($2, 2'$) в зависимости от плотности тока при положительно ($1, 2$) и отрицательно ($1', 2'$) заряженной индентруемой плоскости спайности монокристаллов висмута.

На рис. 1, 2, 3 приведены зависимости количественных характеристик двойникования от плотности тока в импульсе при постоянном значении магнитного поля. Темные точки на графиках соответствуют отрицательному потенциалу на индентруемой плоскости спайности монокристаллов висмута. Избыточные электронная и дырочная концентрации приводят, очевидно, к повышению поверхностной энергии. Светлые точки на графиках соответствуют положительному потенциалу на индентруемой плоскости. Недостаток электронов и дырок у этой плоскости ведет к понижению поверхностной энергии. Из графика видно, что индентирование висмута в условиях одновременного возбуждения его электронной подсистемы электрическим и магнитным полем приводит к его существенной пластификации за счет дополнительной деформации двойникованием. Прохождение импульса тока через образец ведет к возникновению побочных физических эффектов: скин- и пинч-эффекта, теплового разупрочнения решетки. Влияние этих эффектов на ЭПД

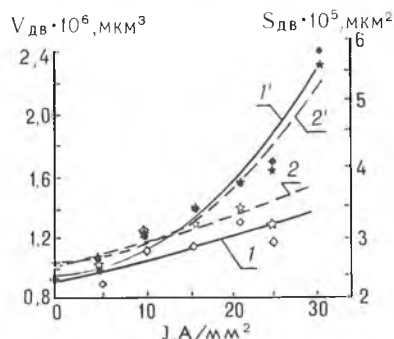


Рис. 3. Зависимость суммарного сдвоенного объема $V_{\text{дв}}$ ($1, 1'$) и суммарной площади границ раздела двойников $S_{\text{дв}}$ ($2, 2'$) от плотности тока в импульсе при положительном ($1, 2$) и отрицательном ($1', 2'$) потенциале индентруемой поверхности.

детально рассмотрено в [1, 6, 13, 14], где показано, что вклад скин-, пинч-эффектов и теплового разупрочнения незначителен при плотностях тока в импульсе на один-два порядка больше, чем в данной работе.

Из графиков можно видеть, что все количественные характеристики дополнительного двойникования обнаруживают полярный характер в зависимости от взаимной ориентации вектора поля Холла в образце и индентруемой грани. Эту зависимость невозможно объяснить действием напряжений, создаваемых силой Ампера, поскольку скалывающее напряжение за счет этой силы $\tau = I_{\max} BL/al$ для используемых плотностей тока на два порядка меньше, чем скалывающее напряжение для двойниующих дислокаций $\tau = P/L_{\max}^2$. Здесь $I_{\max}$ — максимальная сила тока, l и a — длина и ширина образцов, P — нагрузка на штоке индентера, $L_{\max}$ — максимальная длина двойникового луча. Как показывает расчет, суперпозицией внешнего магнитного поля и собственного магнитного поля на поверхности образца можно пренебречь. Полученные результаты невозможно объяснить и на основе классического электропластического эффекта [16], так как в этом случае плотность пластифицирующего импульса ограничена снизу порогом в 50–70 А/мм².

Таким образом, пластификация монокристаллов висмута при одновременном наложении на них электромагнитных полей может быть объяснена только взаимодействием двойниующих дислокаций с возбужденной свободной поверхностью. Перемещение винтовой составляющей двойниующей дислокации на одно межатомное расстояние по плоскости спайности сопровождается появлением характерной ступеньки. При этом на создание новой ячейки затрачивается энергия $b^2\gamma$, где b — вектор Бюргерса, γ — поверхностная энергия. Для преодоления этой силы, распространяющейся в глубь кристалла на несколько b и действующей в непосредственной близости от поверхности, необходимо дополнительное локальное скалывающее напряжение $\Delta\tau$, которое при $T = 0$ находится

$$\Delta\tau = \frac{|\text{grad}U(z)|}{b^2},$$

где $U(z)$ — поверхностный потенциальный барьер [15].

Увеличение поверхностной энергии противодействует силе зеркального изображения, что притягивает к поверхности краевую компоненту двойниующей дислокации как неустойчивый объект, имеющий избыточную свободную энергию. Эта сила определяется медленно меняющимся логарифмическим потенциалом [15]. Подобный подход хорошо описывает поведение ЭПЭ как при положительном, так и отрицательном потенциале индентруемой грани.

Из рис. 1 видно, что средний пробег $\Sigma Li/2n$ двойниующих дислокаций увеличивается с возрастанием плотности тока в импульсе без изменения средней толщины двойника у устья $\bar{h}$. В этом случае уменьшение поверхностной энергии облегчает пробег дислокаций и не интенсифицирует работу поверхностных источников дислокаций. При отрицательном потенциале на индентруемой грани увеличивается как средний пробег двойниующих дислокаций, так и средняя толщина двойников у устья. Объяснением может служить интенсификация работы поверхностных источников двойниующих дислокаций за счет противодействия силе зеркального изображения возросшей силой поверхностного натяжения. Кроме того, увеличение пробега двойниующих дислокаций при отрицательном потенциале на индентруемой поверхности происходит, по-видимому, за счет снижения влияния силы зеркального изображения по всей длине пробега дислокации.

Следствием возбуждения поверхностного состояния кристалла электромагнитными полями является уменьшение степени некогерентности двойниковых границ $h/L_{\max}$, т. е. уменьшение плотности двойниующих дислокаций на границах раздела. Другой результат — увеличение суммарного сдвойникового объема $V_{\text{дв}}$ и суммарной площади двойниковых границ $S_{\text{дв}}$ (см. рис. 3). При этом увеличение сдвойникового объема происходит не только за счет роста «старых» двойников, но и за счет появления новых — «электродвойников» (см. рис. 2).

Важно, что полученные результаты хорошо коррелируют с данными работы [16], где ЭПЭ двойникованием изучался при наложении только электрического поля. Однако максимальная плотность тока в импульсе в этом случае была на два порядка выше, что соответствует увеличению плотности электромагнитной энергии в образце на четыре порядка.

Выводы.

Свободная поверхность металла играет важную роль в ЭПД металлов. Возбуждение поверхностного состояния кристалла электромагнитными полями приводит к интенсификации дислокационных процессов в приповерхностном слое и, как следствие, к ускорению деформации всего образца. При этом одновременное наложение электрического и магнитного поля во взаимно-перпендикулярных направлениях позволяет существенно снизить плотность электромагнитной энергии.

1. Спицын В. И., Троицкий О. А. Электропластическая деформация металлов. М., 1985.
2. Савенко В. С., Троицкий О. А. и др. //Изв. АН СССР. Сер. Металлы. 1985. №5. С. 97.
3. Савенко В. С., Пинчук А. И. //Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1993. №2. С. 27.
4. Савенко В. С. и др. //Там же. 1994. №1. С. 14.
5. Альшиц В. И. и др. //ФТТ. 1992. Т. 34. №1. С. 155.
6. Альшиц В. И. и др. //Там же. 1987. Т. 29. №2. С. 467.
7. Савенко В. С. и др. //Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1993. №1. С. 3.
8. Рощупкин А. М., Батаронов И. Л. //Изв. вузов. Сер. Черная металлургия. 1990. №10. С. 75.
9. Савенко В. С., Пинчук А. И. //Там же. 1992. №6. С. 93.
10. Urit G. P., Varchenya S. A., Spralvin J. P. //Phys. stat. sol. 1966. V. 15. P. 617.
11. Булычев С. И., Алехин В. П., Шоршоров М. Х. //Физика и химия обработки материалов. 1979. №5. С. 69.
12. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. М., 1983.
13. Троицкий О. А. //Докл. АН СССР. Т. 251. С. 400.
14. Савенко В. С. //Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. №2. С. 106.
15. Лихтман В. И., Шукін Е. Д., Ребиндер П. А. Физико-химическая механика металлов. М., 1962.
16. Савенко В. С., Спицын В. И., Троицкий О. А. //Докл. АН СССР. Т. 263. №5. С. 1181.

Поступила в редакцию 31.09.94.

УДК 537.22; 548:539.12.04

М. И. ДАНИЛЬКЕВИЧ

НАКОПЛЕНИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ ЗАРЯДА В ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ИОНАМИ ДИЭЛЕКТРИКАХ

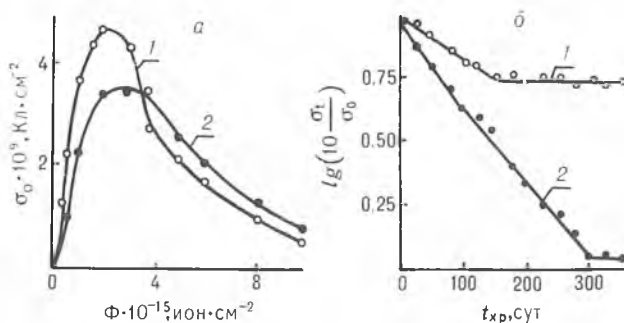
The article sets forth the results of dose and time dependence of a charge accumulated as a result of implantations of boric ions into polytetrafluorethylene and polyethylenterephthalat film and massive samples of polymethylmethacrylate and barium titanate.

Внедрение ускоренных электрическим полем ионов в твердые тела сопровождается рядом физических эффектов, проявляющихся как на их поверхности, так и в объеме. Наименее изученным среди них является накопление и последующая релаксация электрического заряда. В зависимости от величины электропроводности, условий внедрения ионов и хранения имплантированного объекта заряд, накопленный в нем в результате имплантации, сохраняется длительное время или может быть быстро скомпенсирован. В случае имплантации ионов в диэлектрики можно говорить об электретоном эффекте [1,2], так как накопленный при этом заряд сохраняется месяцы и годы. Хотя первые сообщения о такого типа электретах появились 15—20 лет назад, пока можно говорить лишь о первоначальных и весьма ограниченных сведениях по этому вопросу [3]. Необходимы более подробные исследования характеристик диэлектриков и окружающей среды, а также параметров потока заряженных ионов на накопление и последующую релаксацию остаточного заряда в диэлектриках с различным строением и электропроводностью.

В данной работе изучались накопление и последующая компенсация заряда в облученных ускоренными до 50 кэВ ионами бора (B^+) полимерных и кристаллических диэлектриках, существенно отличающихся по величине удельного электросопротивления. Получены данные о дозовой зависимости эффективного поверхностного заряда при постоянной энергии ионов B^+ и изменение его от времени хранения.

Облучение, или имплантация, образцов диэлектриков ионами V^+ производилось на установке «Везувий-1» при энергии ионов 50 кэВ. Время набора дозы $1 \cdot 10^{15}$ ион·см $^{-2}$ при величине ионного тока 1 мкА·см $^{-2}$ составляло 2,7 мин. Пленочные образцы политетрафторэтилена (ПТФЭ) и полиэтилентерефталата (ПЭТФ) имели толщину 35 мкм и диаметр 35 мм. Образцы полиметилметакрилата (ПММА) и титаната бария ($BaTiO_3$) имели толщину 1,5 мм; диаметр ПММА — 35 мм, $BaTiO_3$ — 15 мм. Электретный заряд измеряли индукционным методом по Эгучи с помощью электростатического вольтметра ($Q = CV$).

На рисунке (а) представлена плотность начального σ_0 заряда (измеренного непосредственно после окончания имплантации) в зависимости от дозы Φ имплантированных ионов. Снижение величины накопленного заряда после достижения определенного значения $\sigma_0^{\max}$ может быть обусловлено несколькими причинами: 1) «соскальзыванием» ионного пучка в результате кулоновского отталкивания от электрически заряженного образца, 2) электрическими пробоями между образцом и стенками установки, 3) выбросом части накопленных ионов вместе с веществом в результате пробоев.



а — зависимость плотности начального заряда σ_0 от дозы Φ бомбардирующих ионов V^+ в политетрафторэтилен (1) и полиэтилентерефталат (2); б — релаксация заряда σ_t во время хранения ионно-имплантированных электретов из политетрафторэтилена (1) и полиэтилентерефталата (2)

Первые два фактора неоднократно отмечены в литературе. О третьем свидетельствуют обнаруженные нами при электронно-микроскопических исследованиях ионно-имплантированных образцов ПТФЭ кратеры на их поверхности со стороны, подвергнутой ионной бомбардировке. В результате действия этих факторов заряд как в максимуме, так и особенно при больших дозах имплантации гораздо меньше того значения, которое можно ожидать на основе количества бомбардирующих ионов. Если бы в процессе имплантации не происходило рассеяния летящих в пучке ионов и частичной компенсации заряда внедренных в диэлектрик ионов, то при дозе $\Phi = 2 \cdot 10^{15}$ ион·см $^{-2}$ плотность заряда диэлектрика составила бы $3,2 \cdot 10^{-4}$ Кл·см $^{-2}$. Фактический заряд при этой дозе в ПТФЭ равен $4,7 \cdot 10^{-9}$ Кл·см $^{-2}$. При малых дозах имплантации несогласованность полного заряда в ионном пучке и фактического заряда на электрете уменьшается примерно на порядок.

Релаксация заряда в долгоживущих электретах наблюдалась в течение 350 сут после изготовления на образцах из ПТФЭ и ПЭТФ с наибольшей величиной накопленного при бомбардировке ионами V^+ заряда. Во время хранения в зависимости от способа изготовления электрета и типа диэлектрика может происходить как падение, так и рост остаточного заряда. Последний случай отвечает наличию двух типов сравнимых по величине зарядов противоположного знака. При этом возможна их компенсация с последующим изменением полярности электрета. Такие эффекты наблюдаются в результате значительной инжекции зарядов с электродов при изготовлении термоэлектретов. Так как в нашем случае изготовления электретов ионной имплантацией со стороны, подвергну-

той бомбардировке V^+ , и на противоположной стороне диэлектрика обнаруживается лишь гомозаряд, то в зависимости от времени, прошедшего после изготовления такого моноэлектрета, наблюдается лишь уменьшение его заряда (см. рисунок, б).

Падение заряда электрета во время хранения описывается экспоненциальными зависимостями типа

$$\sigma_i = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$$

с несколькими временами релаксации τ , которым отвечают различные механизмы компенсации накопленного при имплантации электрического заряда. Для электретов из ПТФЭ и ПЭТФ характерны (в течение 350 сут) по крайней мере два интервала релаксации заряда: 1) начальный, до 120 сут в ПТФЭ и 100 сут в ПЭТФ и 2) второй этап релаксации со временем в 200 сут в ПЭТФ и более 250 сут в ПТФЭ. Соответствующие времена релаксации τ_1 и τ_2 (см. рисунок, б) помещены в таблице.

Характеристика	Диэлектрик			
	ПТФЭ	ПЭТФ	ПММК	BaTiO ₃
σ_0 , кл · см ⁻²	$4,6 \cdot 10^{-9}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-10}$
R_p , нм	140	180	170	100
τ_1 , с	$1,8 \cdot 10^7$	$3,7 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^5$	$0,5 \cdot 10^3$
τ_2 , с	$2,1 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$	—
τ_M , с	$1,8 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^3$	2,7	$1,8 \cdot 10^1$
ρ , Ом · м	10^{18}	10^{14}	10^{11}	10^9
ϵ	2,1	3,1	3,2	1500
d , г · см ⁻³	2,20	1,35	1,80	5,70

Для понимания особенностей накопления и релаксации заряда в различных диэлектриках необходимы сведения о глубине проникновения имплантируемых ионов V^+ . Поскольку исследуемые диэлектрики имеют сложный состав:

$$\text{ПТФЭ} = [C_2F_4]_n, \quad \text{ПЭТФ} = [C_5OH_4]_n, \quad \text{ПММК} = [C_5O_2H_8]_n, \quad BaTiO_3,$$

для вычисления среднего проективного пробега V^+ в таких мишенях применяли принцип аддитивного вклада входящих в них атомов в процессы торможения

$$\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{x_i}{R_{pi}},$$

где

$$\bar{R}_{pi} = CM_2 \frac{(z_1^{2/3} + z_2^{2/3})^{1/2}}{Z_1 Z_2} E.$$

Здесь x_i — относительная масса i -ой компоненты в составе мишени, M_2 — масса атома мишени. Коэффициент C зависит от отношения масс налетающего иона M_1 и иона мишени M_2 [4]. Z_1 и Z_2 — порядковые номера соответствующих атомов. При подстановке энергии E бомбардирующего иона в кэВ R_p получаем в мкг · см⁻² ($1 \text{ мкг} \cdot \text{см}^{-2} = 10,0 \text{ нм}/d$, d — плотность в г/см³).

Для $E = 50$ кэВ значения $\bar{R}_p$ (см. таблицу) в пределах погрешности определения практически не отличаются в полимерных диэлектриках и немного ниже в титанате бария. Поэтому можно положить, что отличия во времени релаксации заряда в первой группе диэлектриков связаны, во-первых, с различием в их удельном сопротивлении. Как видно из таблицы, наибольшие времена релаксации электретного заряда имеют диэлектрики с наибольшими значениями удельного электросопротивления.

Гомозаряженный электрет можно рассматривать как заряженный конденсатор [5], максвелловское время релаксации которого

$$\tau = \tau_M = \epsilon_0 \epsilon_V \quad (1)$$

определяется диэлектрической проницаемостью ϵ и объемным удельным сопротивлением ρ_V диэлектрика.

Подстановка в (1) табличных значений ϵ и ρ [6] дает значение τ_M ниже тех, которые мы наблюдаем на опыте (см. таблицу). Только в ПТФЭ рассчитанная величина τ_M сравнима с τ_1 .

В [5] показано, что измерение ρ в условиях, сходных с теми, которые имеют место в электретах (большое время выдержки под напряжением), приводит к таким величинам сопротивления, которые на 1—2 порядка больше, чем при стандартных измерениях с малой выдержкой образцов под напряжением. Кроме этого известно, что облучение диэлектриков высокоэнергетическими ионами может увеличивать их диэлектрическую проницаемость. Учет этих факторов будет приближать расчетное время релаксации к экспериментальному. Более подробное изучение механизмов релаксации заряда требует дополнительных исследований электрических свойств ионно-имплантированных диэлектриков.

Однако и на основании уже проведенных нами исследований электрических свойств полимерных диэлектриков можно утверждать, что наилучшим материалом как по величине накапливаемого заряда, так и времени его жизни является политетрафторэтилен. Заряд на половинном уровне от начальной величины σ_0 в нем может сохраняться около 10 лет.

Автор выражает признательность Фонду фундаментальных исследований Республики Беларусь за финансовую поддержку работы.

1. Заявка № 55—129897 Япония; Опубл. 10.01.80, Бюл. № 7—23.
2. О л ь ш о в ы М., Д а н и л ь к е в и ч М. И., П о ч т е н н ы й А. Е. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1982. № 2. С. 97.
3. Б о е в С. Г., У ш а к о в В. Я. Радиационное накопление заряда в твердых диэлектриках и методы его диагностики. М., 1991.
4. К у м а х о в М. А., К о м а р о в Ф. Ф. Энергетические потери и пробег ионов в твердых телах. Мн., 1979.
5. Л у щ е й к и н Г. А. Полимерные электреты. М., 1976.
6. Физические величины: Справ. /Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М., 1991.

Поступила в редакцию 11.04.94.

УДК 546.273.171

Г. А. ГОВОР, В. М. ДОБРЯНСКИЙ, А. А. ЛЕУСЕНКО,
Н. Ф. ЛУГАКОВ, А. С. РУБАНОВ

ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КУБИЧЕСКОГО НИТРИДА БОРА МАРКИ «СВЕТЛАНІТ»

Electrophysical properties of cubic nitride of boron (CBN) mk. «Svetlanit», depending upon the conditions of isothermic annealing in different mediums have been studied. Characteristic conditions which conform to the maximum parameters have been determined.

Метод прямого (без специального введения катализаторов-растворителей) превращения графитоподобного нитрида бора в кубическую модификацию (КНБ) при давлении 4—9 ГПа и температуре 2000—3000 К [1] открыл возможность получения высокочистых поликристаллов КНБ [2], которым присвоен товарный знак «Светланіт». Эти поликристаллы обладают повышенными физико-механическими и режущими свойствами [3], что позволяет расширить их применение не только в металлообрабатывающей, но и в электронной промышленности.

Отжиг поликристаллических образцов на основе высокоплотных модификаций нитрида бора приводит к изменению структуры образцов, влияя на их механические и электрофизические свойства [4].

Воздействие изотермического отжига на изменение механических, электрофизических и тепловых свойств поликристаллического КНБ обусловлено тем, что указанный материал, синтезируемый при высоких давлениях и температурах, обладает высокой степенью дефектности: микровключения бора, вакансии по бору и азоту, собственные и примес-

ные междуузельные атомы, дислокации, микропоры, границы зерен [5]. Кроме того, влияние высокотемпературного изотермического отжига на свойства КНБ марки «Светланіт» связано с наличием и изменением микронапряжений, возникающих вследствие микроскопически неоднородного распределения фаз (вюрцитной и сфалеритной) из-за градиентного распределения температуры и давления при фазовом превращении гексагонального нитрида бора в кубический нитрид бора. Величина микронапряжений в материале связана со значительным изменением объема образцов при этом фазовом переходе [6]. Следует отметить, что указанные в различных работах температуры, соответствующие началу фазового перехода гексагональный — кубический нитрид бора, находятся в широком температурном интервале и в большой мере определяются структурным состоянием и наличием примесей в исходном нитриде бора [7]. В работе приведены результаты исследований влияния высокотемпературного отжига в различных средах на электрофизические свойства высокоплотного материала на основе КНБ марки «Светланіт».

Материал и методика

Изотермический отжиг проводили в воздушной и инертной атмосферах, а также в вакууме ($P = 10^{-2}$ Па) при температурах 400, 600, 800, 1000, 1400 °С в течение 6 ч с последующим снижением температуры со средней скоростью 5 °С/мин.

Для проведения указанных исследований выбирались серии образцов (по 3 в каждой), обладающих близкими значениями диэлектрической проницаемости и удельного электросопротивления. Величину диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь (до и после отжига) определяли на частоте $f = 1 \text{ кГц}$ с помощью цифрового измерителя емкости В7-8, величину удельного электросопротивления — цифровым электрометром Keithley 616.

Результаты и их обсуждение

В табл. 1—3 представлены усредненные значения диэлектрической проницаемости, тангенса угла диэлектрических потерь и удельного электросопротивления, измеренные при комнатной температуре вдоль направлений «а» и «с» образцов кубического нитрида бора марки «Светланіт», отожженных изотермически при различных температурах в воздушной атмосфере (табл. 1), инертной атмосфере (табл. 2) и в вакууме (табл. 3). Направление «а» совпадает с направлением приложения давления прессовки, «с» перпендикулярно направлению «а».

Анализ экспериментальных данных, приведенных в таблицах, показывает, что с повышением температуры отжига наблюдается увеличение значений удельного электросопротивления и диэлектрической проницаемости и понижение значений тангенса угла диэлектрических потерь.

Т а б л и ц а 1

Изменение физических свойств образцов кубического нитрида бора марки «Светланіт» в результате изотермического отжига в воздушной атмосфере

Температура отжига, (°С)	Ф и з и ч е с к и е п а р а м е т р ы					
	ϵ_a	ϵ_c	$\lg \delta_a$, (%)	$\lg \delta_c$, (%)	$\rho_a \cdot 10^{14}$, (Ом·мм)	$\rho_c \cdot 10^{15}$, (Ом·мм)
—	7.0	6.7	0.72	0.58	1.5	2.3
400	4.1	6.7	0.64	0.48	1.8	2.6
600	7.2	6.8	0.54	0.32	2.6	3.8
800	7.4	7.1	0.47	0.19	3.9	5.3
1000	7.3	6.8	0.52	0.27	3.2	5.1
1200	6.5	6.4	0.84	0.46	1.9	3.2
1400	5.8	6.1	1.24	0.81	0.2	1.1

Соответствующие максимальные и минимальные значения исследованных параметров наблюдаются в образцах, отожженных при температурах 800—1000 °С, причем температура отжига, соответствующая экстремальным значениям этих параметров, практически не зависит от среды, в

которой проводился отжиг. При дальнейшем повышении температуры отжига наблюдается противоположная тенденция.

Увеличение значений удельного электросопротивления и диэлектрической проницаемости и уменьшение значений тангенса угла диэлектрических потерь с ростом температуры может быть связано, на наш взгляд, с процессом аннигиляции простейших дефектов вследствие уменьшения числа микропор и микротрещин, вакансий и междоузельных атомов, дислокаций, что приводит к росту структурного совершенства и релаксации напряженного состояния образцов, возникающего в процессе их пластической деформации при синтезе.

Т а б л и ц а 2

Изменение физических свойств образцов кубического нитрида бора марки «Светланит» в результате изотермического отжига в инертной атмосфере

Температура отжига, (°C)	Ф и з и ч е с к и е п а р а м е т р ы					
	ϵ_a	ϵ_c	$\operatorname{tg} \delta_a$, (%)	$\operatorname{tg} \delta_c$, (%)	$\rho_a \cdot 10^{14}$, (Ом·мм)	$\rho_c \cdot 10^{15}$, (Ом·мм)
—	7.0	6.7	0.72	0.58	1.5	2.3
400	4.1	6.9	0.56	0.43	1.9	3.4
600	7.3	7.2	0.39	0.25	2.9	4.8
800	7.6	7.4	0.32	0.15	4.7	6.5
1000	7.4	7.1	0.41	0.29	3.2	4.8
1200	7.0	6.7	0.76	0.47	1.4	2.8
1400	6.6	6.5	1.05	0.74	0.7	1.4

Т а б л и ц а 3

Изменение физических свойств образцов кубического нитрида бора марки «Светланит» в результате изотермического отжига в вакууме ($p = 10^{-2}$ Па)

Температура отжига, (°C)	Ф и з и ч е с к и е п а р а м е т р ы					
	ϵ_a	ϵ_c	$\operatorname{tg} \delta_a$, (%)	$\operatorname{tg} \delta_c$, (%)	$\rho_a \cdot 10^{14}$, (Ом·мм)	$\rho_c \cdot 10^{15}$, (Ом·мм)
—	7.0	6.7	0.72	0.58	1.5	2.3
400	7.0	6.8	0.68	0.48	1.9	2.6
600	7.4	7.1	0.34	0.26	3.4	4.7
800	7.7	7.5	0.28	0.09	5.2	7.1
1000	7.6	7.5	0.31	0.15	5.0	7.0
1200	7.3	7.1	0.56	0.28	3.7	4.2
1400	6.8	6.7	0.83	0.48	1.1	2.8

Уменьшение значений удельного электросопротивления и диэлектрической проницаемости и увеличение значений тангенса угла диэлектрических потерь при температурах отжига выше 1000 °C может быть связано с частичным обратным фазовым переходом кубического нитрида бора в гексагональный, поскольку графитоподобная фаза образуется уже при температуре 1000 °C, а более высокая температура приводит к интенсификации этого процесса. В результате возникают дополнительные микронапряжения вследствие значительного увеличения объема образцов [2, с. 189]. Полученные результаты по термостойкости КНБ марки «Светланит» полностью удовлетворяют исследованиям термогравиметрии и дифференциального термического анализа данного материала [8].

В ы ы в о д ы

Результаты исследования изотермического отжига КНБ марки «Светланит» показали, что с повышением температуры отжига существует увеличение значений удельного электросопротивления и диэлектрической проницаемости и понижение значений тангенса угла диэлектрических потерь. Соответствующие максимальные и минимальные значения исследованных параметров наблюдаются в образцах, отожженных при

температурах 800—1000 °С, причем температура отжига не зависит от среды, в которой проводился отжиг. При дальнейшем повышении температуры отжига установлена противоположная тенденция в изменении исследованных физических величин.

1. А. с. № 286743 СССР. Способ получения кубического нитрида бора. Сирота Н. Н., Мазуренко А. М.

2. Мазуренко А. М., Добрянский В. М., Ракицкий Э. Б. и др. // Техника и технологии высоких давлений. 1990. С. 109.

3. Мазуренко А. М., Ничипор В. В. // Новые инструментальные материалы. Сер. 55.31. Инструментальное производство. Мн., 1990.

4. Курдюмов А. В., Олейник Г. С. // Кристаллография. № 41984. С. 792.

5. Курдюмов А. В., Островская Н. Ф. // Докл. АН СССР. № 1. 1982. С. 66.

6. Курдюмов А. В. // Кристаллография. 1975. Т. 20. № 5. С. 969.

7. Курдюмов А. В., Пилянкевич А. Н. и др. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 338.

8. Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Чобот Г. М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1. С. 28.

Поступила в редакцию 03.10.94.

УДК 621. 315

А. К. ФЕДОТОВ, М. И. ТАРАСИК, А. М. ЯНЧЕНКО

ПЕРКОЛЯЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СИЛЬНОЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛИКРЕМНИЕВЫХ ПЛЕНКАХ ПОСЛЕ ОТЖИГА СКАНИРУЮЩИМ ЛАЗЕРНЫМ ЛУЧЕМ

Recombinational properties and peculiarities of carrier transport in heavily doped poly-Si layers after annealing by scanning laser beam were studied. The effective potential barriers of grain boundaries and the main carrier transport mechanisms have been determined. A qualitative model of carrier transport in the wide temperature range (4—300 K) is formulated.

Поликристаллические пленки в последнее время явились предметом интенсивных исследований вследствие их перспективности для производства полупроводниковых приборов [1]. Однако возможность их широкомасштабного применения ограничивается наличием в них электрически активных дефектов и, главным образом, границ зерен (ГЗ), которые вызывают деградацию некоторых параметров материала.

Электрическая активность ГЗ в поликристаллических полупроводниках определяется не только кристаллографической структурой, но и химическим составом границ. Об этом свидетельствуют, в частности, результаты по исследованию свойств обогащенных примесями безбарьерных ГЗ общего типа в германии. Поскольку в среднелегированном ($N_G \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$) поликремнии безбарьерных ГЗ общего типа не существует в принципе, то для изучения относительной роли сегрегации примесей в электрофизике таких границ были проведены эксперименты на сильнолегированных поликремниевых пленках. Разброс высот и положения барьеров на таких границах приводит к наличию случайного потенциального рельефа из-за изгиба зон вблизи ГЗ. Поэтому такая система, отмечалось в [2], может рассматриваться как сильнолегированный и сильнокомпенсированный полупроводник, где роль компенсирующих примесей играют пограничные состояния [3].

1. Изготовление образцов. В качестве исходного материала служили поликремниевые пленки толщиной 400 нм, полученные методом химического осаждения из паровой фазы в реакторе пониженного давления при 620 °С (см. [4]). Пленки наносились на кремниевые подложки с ориентацией (100), покрытые изолирующим слоем термического окисла SiO_2 толщиной 0,45 мкм, и имели средний размер зерен 20—50 нм. Данные эффекта Холла свидетельствуют о высокой $((N_a - N_d) \sim 10^{18} \text{ см}^{-3})$ концентрации акцепторов в объеме зерен указанных пленок. С целью создания электрически активных ГЗ общего типа в таких пленках

исходные структуры обрабатывались на воздухе при температурах 20—700 °С излучением лазера на АИГ ($\lambda = 1,06$ мкм), работающем в непрерывном многомодовом режиме. Воздействие сканирующего лазерного луча диаметром 200—300 мкм с выходной мощностью 15—30 Вт и скоростью перемещения 0,3 см/с сопровождалось плавлением слоя поликремния и формированием в нем крупнозернистой столбчатой структуры (распространяющейся на всю глубину слоя) с большим числом ГЗ общего типа и двойников типа $\Sigma 3,9$. Средний размер зерен в продольном направлении увеличивался до нескольких десятков (~10—30) микрон [4, 5]. В то же время размеры областей, ограниченных ГЗ общего типа, могли достигать 50—100 мкм.

2. Электрические свойства обработанных пленок. Нами были исследованы рекомбинационные свойства и особенности транспорта носителей заряда (температурных зависимостей удельного сопротивления, вольт-амперных характеристик) в исходных и рекристаллизованных пленках в интервале 4—300 К. Методика измерения рекомбинационных параметров неравновесных носителей заряда (НЗ) описана в [5].

Анализ результатов измерения рекомбинационных характеристик поликремния показал, что исходные поликристаллические слои характеризуются эффективным временем жизни $\tau_{\text{эф}}$ ~10 мкс и сравнительно небольшими (сотые доли электрон-вольта) пограничными барьерами $\phi_{\text{в}}^{\text{эф}}$. В рекристаллизованных образцах время жизни уменьшается до единиц микросекунд, а кинетика фотопроводимости становится нелинейной и характерной для полупроводника с наличием потенциального рельефа [6]. Сублинейной становится также и зависимость сигнала фотопроводимости $\Delta\sigma$ от интенсивности возбуждающего света Φ . Проведенные на основе квантовомеханической модели барьера как двумерной тонкой потенциальной ямы с дискретным спектром энергий расчеты хода зависимостей $\Delta\sigma(\Phi)$ для разных значений величин барьера $\phi_{\text{в}}^{\text{эф}}$ и их сравнение с результатами эксперимента позволили оценить величину $\phi_{\text{в}}^{\text{эф}}$, которая составила ~0,1 эВ, хотя на отдельных образцах барьеры могли быть и более высокими [5]. Причинами уменьшения $\tau_{\text{эф}}$ после рекристаллизации могут быть, во-первых, появление термических напряжений (вследствие перераспределения примесей и введения закалочных дефектов), во-вторых, формирование более активных ГЗ в процессе лазерного воздействия.

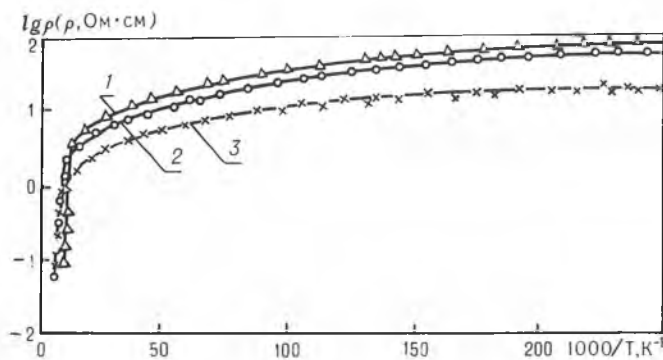


Рис. 1. Типичные температурные зависимости удельного сопротивления разных участков рекристаллизованной поликремниевой пленки:

1 — левая сторона; 2 — правая сторона; 3 — центральная часть

Исследования зависимостей $\rho(T)$ (рис. 1) в широкой области температур показали существование трех основных механизмов транспорта НЗ в рекристаллизованных пленках поликремния. При относительно высоких температурах (200—300 К) токоперенос связан с движением дырок по объему зерен. При гелиевых температурах (4—10 К) проводимость обусловлена движением НЗ вдоль ГЗ. Она характеризуется весьма

низкими энергиями активации ($\sim 0,2-0,5$ эВ) и описывается теорией протекания [3, 7]. В промежуточной области температур (50—200 К) проводимость ограничена межзеренными барьерами с эффективной высотой Φ_B до 0,1 эВ и также может быть описана на основе теории протекания.

Исследования вольт-амперных характеристик (ВАХ) рекристаллизованных пленок при различных температурах подтвердили эти результаты. В области высоких (комнатных) температур, где определяющим является перенос дырок по объему зерен, наблюдается линейная зависимость тока от напряжения (рис. 2, кривые 1 и 2). При низких температурах (4—200 К) ВАХ характеризуются как линейным участком (при малых напряжениях), так и сильной неомичностью типа [3, 7]

$$I = I_0 \exp \left((U/U_0)^{1/2} \right) \quad (1)$$

при напряжениях $U > 0,5$ В. Такой вид ВАХ свойственен перколяционным системам (с крупномасштабным рельеф-потенциалом) и хорошо описывается известной моделью Шкловского—Эфроса [7]. Обработка ВАХ в области справедливости соотношения (1) позволила оценить пространственный масштаб рельеф-потенциала неоднородностей L_0 и радиус корреляции (размеры проводящих кластеров) L_c в разных температурных областях на основе известных соотношений [7]:

$$L_c = L_0 (V_0/kT)^{0,9}, \quad (2)$$

$$L_0 = \frac{kT (kT/V_0)^{0,9}}{eU^*}, \quad (3)$$

где $U^* = CU^2 (V_0/kT)^{0,1}$ — значение напряжения, при котором начинает выполняться закон Шкловского—Эфроса (1). При этом разброс амплитуд потенциального рельефа V_0 определялся энергией активации НЗ, определяемой из зависимостей $\rho(T)$ в соответствующих областях температур, а константа $C \approx 1$ [7]. Результаты расчетов при трех характерных

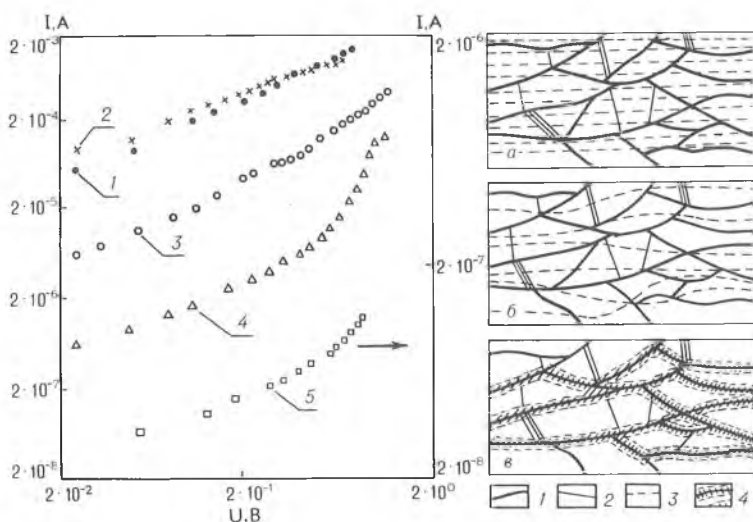


Рис. 2. ВАХ рекристаллизованной излучением лазера поликремниевой пленки при различных температурах:

1 — $T = 300$ К; 2 — 246,3; 3 — 186,9; 4 — 77,4; 5 — 4,2 К

Рис. 3. Система путей протекания НЗ при комнатных (а), азотных (б) и гелиевых (в) температурах:

1 — границы зерен общего типа; 2 — специальные границы зерен; 3 — пути протекания от зерна к зерну через барьеры; 4 — пути протекания вдоль границ зерен общего типа

температурах для одного из образцов, представленные в таблице, свидетельствуют о разных масштабах рельеф-потенциала (неоднородностей), определяющего токоперенос в области гелиевых и промежуточных температур. Так, в области температур 50—200 К масштаб неоднород-

ностей L_0 весьма близок к размерам зерен (точнее тех участков, которые ограничены ГЗ общего типа). Более высокие по сравнению с L_0 значения радиусов корреляции L_c в этом случае могут свидетельствовать о том, что не все ГЗ общего типа препятствуют движению дырок по пленке, создавая барьеры на пути НЗ. Резкое снижение (на два порядка) значений L_0 и L_c в области гелиевых температур, по-видимому, свидетельствует о неоднородном распределении пограничных состояний (оборванных связей и примесей) вдоль многосвязной поверхности ГЗ после лазерного отжига с масштабом неоднородности порядка нескольких микрон*.

Таким образом, полученные экспериментальные данные ($\rho(T)$, $R_n(T)$, ВАХ) и результаты расчетов свидетельствуют о радикальном изменении системы токовых путей в рекристаллизованных пленках поликремния при понижении температуры от комнатной до гелиевой. Схематическое изображение этой трансформации системы токовых путей представлено на рис. 3. Поясним смысл этих рисунков.

Параметры электропереноса в модели Шкловского—Эфроса при различных температурах

Т, К	V_0 , мэВ	L_0 , мкм	L_c , мкм
186,9	8,80	103,00	475,00
77,4	8,80	115,00	1170,00
4,2	0,39	5,25	4,26

При относительно высоких (комнатных) температурах энергия дырок достаточно велика, чтобы преодолеть пограничные барьеры на электрически активных ГЗ. Это связано с тем, что, несмотря на высокую плотность пограничных состояний, обусловленную сильной неравновесностью ГЗ общего типа, эффективная высота указанного барьера в среднем не превышает 0,1 эВ из-за высокого уровня легирования пленок. Поэтому при комнатных температурах токовые пути между электрическими контактами образцов будут практически параллельны друг другу и однородно распределены по сечению образца (рис. 3, а).

При понижении температуры энергия дырок уменьшается и токовые пути искривляются, поскольку носителям выгодно идти через места с пониженными пограничными барьерами (рис. 3, б). Существование таких мест обусловлено неоднородностью барьера по поверхности ГЗ общего типа в основном, по-видимому, из-за наличия тройных и четверных стыков границ, где наблюдается наибольшая сегрегация примесей [8], а также, возможно, из-за малого радиуса закругления таких границ или их отдельных участков [9]. В этом случае становится понятной отмечаемая близость пространственных размеров флуктуаций потенциала к размерам участков пленок, заключенных между границами зерен общего типа (~100 мкм).

При достижении гелиевых температур проводимость по объему зерен практически вымораживается и концентрация дырок, двигавшихся вдоль токовых путей, изображенных на рис. 3, б, становится ничтожно малой. В результате ток будет течь лишь вдоль ГЗ общего типа (рис. 3, в), подчиняясь законам перколяции, однако с иным (более мелким) пространственным масштабом флуктуаций потенциала (порядка нескольких микрон). Физических причин существования новых путей протекания может быть две. Одна из них может быть обусловлена наличием глубоких ловушек вдоль сложной самопересекающейся поверхности ГЗ общего типа, приводящих к изгибу краев энергетических зон. В случае пересечения края валентной зоны уровнем Ферми в окрестности таких флуктуаций потенциала могут возникнуть области, обогащенные дырками толщиной в несколько межатомных расстояний [10]. Вторая возможная причина — сегрегация примесей по ГЗ общего типа. На

* В исходных (нерекристаллизованных) пленках нелинейность ВАХ связана с пограничными барьерами, и величины L_0 и L_c не зависели от температуры. При этом величины L_0 и L_c (~ единиц нм) не коррелировали с размерами зерен.

существование такого механизма указывалось при исследовании низкотемпературного транспорта самых разных полупроводниковых поликристаллов [11—15].

Учитывая малость эффективного пограничного барьера в исследованных пленках поликремния ($< 0,1$ эВ), роль первой причины (изгиб зон) в появлении относительно мелкомасштабной системы путей протекания вдоль поверхности ГЗ общего типа маловероятна. В то же время вероятность сегрегации примесей вдоль таких границ в процессе лазерной рекристаллизации столь сильнолегированных пленок поликремния весьма высока. Поэтому наиболее вероятной причиной возникновения перколяционного транспорта НЗ при гелиевых температурах является сегрегация примесей по границам зерен. В этом случае относительно малый масштаб флуктуаций потенциала вдоль ГЗ естественно связать с масштабом неоднородностей в распределении сегрегированных примесей (и пограничных состояний) по поверхности границ.

1. Kamins T. Polycrystalline Silicon for Integrated Circuit applications. Boston, 1988.
2. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. // ЖЭТФ. 1971. Т. 33. С. 488.
3. Apanastopoulos A. et al. // Phys. Stat. Solidi. 1990. V. 158. P.K53.
4. Дружинин А. А., Ермаков А. В., Когут И. Т. и др. // Физическая электроника. 1988. № 36. С. 77.
5. Диухе Д. А., Тарасик М. И., Федотов А. К., Янченко А. М. // Деп. в ВИНТИ 31.08.90. № 14836-B90.
6. Шейнкман М. К., Шик А. Я. // ФТП. 1976. Т. 10. № 2. С. 209.
7. Шкловский Б. И. // ФТП. 1979. Т. 13. С. 53.
8. Артемьев А. В., Фионова Л. К. // Препринт ИПТМ и ОМ АН СССР. Черноголовка, 1987. С. 1.
9. Scholl E. // J. Appl. Phys. 1986. V. 60. P. 1434.
10. Матаре Г. Электроника дефектов в полупроводниках. М., 1974.
11. Fedotov A., Evtody B., Fionova L. et al. // Phys. Stat. Solidi (a). 1990. V. 119. № 2. P. 523.
12. Fedotov A., Evtody B., Fionova L. et al. // J. Cryst. Growth. 1990. V. 104. P. 186.
13. Федотов А. К., Ильяшук Ю. М., Евдотий Б. Н., Кац Е. А. // Электронная техника. Сер. Материалы. 1991. № 7261. С. 12.
14. Джильде Д. А., Доброго В. П., Ильяшук Ю. М. и др. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 8. С. 2391.
15. Moller H. G. et al. // Polycrystalline Semiconductors: Grain Boundaries and Interfaces: Proc. Int. Sympos., Malente, Aug. 29—Sept. 2, 1988. Berlin, 1989.

Поступила в редакцию 07.10.94.

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Proposed way is based on the monotonic approximations of the spectral function of the transition operator of the linear (with respect to dependent variable) approximation and admits regulation of the level of approximation on the «soft» and the «hard» sides of the spectrum of Jacobi's matrix.

Пусть в n -мерном векторном пространстве для дифференциального уравнения

$$u' = f(t, u) \quad (1)$$

поставлена задача Коши. Здесь

$$u = (u_1, \dots, u_n)^T, f = (f_1, \dots, f_n)^T, f_i = f_i(t, u), u_i = u_i(t), i = 1, 2, \dots, n.$$

При $n > 1$ (особенно в случае жестких [1] систем) оператор перехода по точному решению на шаге дискретизации может характеризоваться существенной скрытой разномасштабностью составляющих. В классическом разностном подходе к построению методов численного решения таких систем приближение этого многомерного оператора осуществляется опосредованно через аппроксимацию одномерных временных зависимостей, задаваемых исходными дифференциальными уравнениями вида (1). Рассматриваемый ниже способ построения численных методов базируется на ином подходе, одной из особенностей которого является непосредственная аппроксимация самого оператора перехода, что позволяет, в частности, учесть конструктивно разномасштабность его составляющих. Временные же зависимости при этом приближаются опосредованно с существенным использованием законов точного интегрирования, заложенных в условиях локальной согласованности (в частности, вида (8) из [2]) исходной и аппроксимирующей задач. В этом случае используются специальные приемы аппроксимации, в которых (в отличие, скажем, от разностной аппроксимации) уровень приближения не привязан столь существенно к величине шага сетки, что особенно важно для систем большой жесткости, предъявляющих особо высокие требования к качеству аппроксимации старших гармоник.

Чтобы иметь более глубокую информацию о структуре приближаемого оператора перехода, аппроксимируем на шаге дискретизации исходное уравнение (1) последовательностью опять же дифференциальных уравнений вида

$$y'(t+x) = A(x)y(t+x) + p_m(x), \quad 0 \leq x \leq \tau, \quad (2)$$

где $A(x)$ есть квадратная матрица порядка n , а вектор $p_m(x)$ можно искать, например, в форме алгебраического многочлена степени m . Такая аппроксимация может быть осуществлена по-разному. В рамках данной работы матрица A будет предполагаться постоянной и совпадающей в точке t с матрицей Якоби исходной системы (1). Для выбора же $p_m(x)$ можно использовать, скажем, следующий прием, основанный на принципе последовательного повышения порядка точности.

На отрезке $[0, \tau]$ исходное уравнение (1) представим в виде

$$\Delta_1'(t+x) = A\Delta_1(t+x) + a_0 + \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x) = f[t+x, y + \Delta_1(t+x)] - A\Delta_1(t+x) - a_0$, $\Delta_1(t+x) = u(t+x) - y$, $y = u(t)$, а постоянный вектор $a_0 = f(t, y)$ выбран из требования $\varphi_1(0) = 0$.

В качестве первого приближения к $\Delta_1(t+x)$ можно взять решение следующей задачи Коши: $\delta_1'(t+x) = A\delta_1(t+x) + a_0$, $\delta_1(t) = 0$, $0 \leq x \leq \tau$. Так как разность $\Delta_1(t+x) - \delta_1(t+x) = \Delta_2(t+x)$ есть решение задачи

$$\Delta_2'(t+x) = A\Delta_2(t+x) + a_1x + \varphi_2(x), \quad \Delta_2(t) = 0,$$

где $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - a_1x$, то в качестве приближения к этой разности можно использовать решение задачи Коши

$$\delta_2'(t+x) = A\delta_2(t+x) + a_1x, \quad \delta_2(t) = 0,$$

в которой значение $a_1 = f_t(t, y)$ выбрано на основании требования $\varphi_2'(0) = 0$, при этом по построению выполняется также и равенство $\varphi_2(0) = 0$.

Далее аналогично предыдущему можно записать:

$$\delta_3'(t+x) = A\delta_3(t+x) + a_2x^2, \quad \delta_3(t) = 0, \quad \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_3(\tau) = 0,$$

$$a_2 = [f(t+\tau, y + \delta_1(t+\tau) + \Delta_2(t+\tau)) - A(\delta_1(t+\tau) + \Delta_2(t+\tau)) - a_0 - a_1\tau] / \tau^2.$$

Так как в точках $t + \alpha\tau$ при $\alpha \neq 0$ мы не располагаем даже локально точной информацией об интересующем нас решении, то вместо a_2 пока можно использовать лишь приближающий его вектор

$$a_2^{[1]} = [f(t+\tau, y + \delta_1(t+\tau) + \delta_2(t+\tau)) - A(\delta_1(t+\tau) + \delta_2(t+\tau)) - a_0 - a_1\tau] / \tau^2.$$

Это позволяет взамен $\delta_3(t+x)$ найти приближение $\delta_3^{[4]}(t+x)$ к $\Delta_3(t+x) = \Delta_2(t+x) - \delta_2(t+x)$ через решение задачи Коши

$$\delta_3^{[4]}(t+x) = A\delta_3^{[4]}(t+x) + a_2^{[1]}x^2, \quad \delta_3^{[4]}(t) = 0.$$

Таким образом, на рассмотренной стадии процесса последовательного уточнения решения будем иметь (обозначения см. в [3]):

$$u(t+x) \approx y^{[4]}(t+x) = y + \delta_1(t+x) + \delta_2(t+x) + \delta_3^{[4]}(t+x).$$

На следующем этапе этого процесса вместо требования $\varphi_3(\tau) = 0$, однозначно определившего вид вектора a_2 , можно для нахождения значения нового параметра a_3 поставить условие $\varphi_3'(\tau) = 0$. Вместо точки $x = \tau$ на двух следующих стадиях можно взять, например, точку $x = \tau/2$. Полученное при этом приближение будет иметь вид:

$$y^{[7]}(t+x) = y + \delta_1(t+x) + \delta_2(t+x) + \delta_3^{[7]}(t+x) + \dots + \delta_6^{[7]}(t+x).$$

Так как в рамках данной работы мы сможем (из-за большого объема информации) рассмотреть специализированные методы численного решения систем вида (2) лишь в случае $m = 0$, то и при описании процесса построения таких систем ограничимся лишь изложенной выше общей схемой.

Как и в [2], приближение к спектральной функции $\exp(\lambda x)$ оператора $\exp(Ax)$ для случая системы (см. (2) при $m = 0$)

$$u'(t+x) = Au(t+x) + a, \quad 0 \leq x \leq \tau, \quad (3)$$

при любом фиксированном значении шага будем искать в виде многочлена по переменной λ , изменяющейся на отрезке, границы которого привязаны к границам спектра матрицы A (изложение будет ориентировано на случай устойчивой недефектной матрицы с вещественным спектром).

Если рассматриваемые в [2] численные методы характеризуются высоким уровнем приближения оператора перехода только в «жесткой» части спектра матрицы A (и в силу этого хорошо приспособлены для

расчета погранслоя), то ниже внимание будет уделено как методам с акцентом в аппроксимации на «мягкую» часть этого спектра, так и таким методам, в которых с изменением во времени характеристик численно наблюдаемой траектории соотношение между уровнями аппроксимации в обеих частях спектра можно регулировать.

При $E(A, x) = \exp(Ax)$ (см. (3)) требования локальной согласованности операторов (8) из [2], естественно, выполняются и имеет место равенство $E(A, x) = I + A \int_0^x E(A, \xi) d\xi$, на основе которого можно организовать итерационную процедуру

$$E_{(k+1)}(A, x) = I + A \int_0^x E_{(k)}(A, \xi) d\xi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

порождающую заданием $E_{(0)}(A, x)$ семейство численных методов вида $\hat{y} = y + S_{(k)}(A, \tau)(Ay + a)$, (5)

где

$$y \approx u(t), \quad \hat{y} \approx u(t + \tau), \quad S_{(k)}(A, \tau) = \int_0^\tau E_{(k)}(A, \xi) d\xi. \quad (6)$$

Аналогичные (4), (6) равенства можно записать и для спектральных функций $E_{(0)}(\lambda, x)$ и $S_{(0)}(\lambda, x)$ соответствующих операторов.

Если, как и в [2], выбрать $E_{(0)}(\lambda, x) = \exp(-\mu x)$, где $\mu > 0$, то, согласно (4), будем иметь:

$$E_{(0)}(\lambda, x) = \rho_0(-\mu x), \quad (7)$$

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} (\lambda x)^i + (\lambda x)^{k+1} \rho_{k+1}(-\mu x).$$

Здесь

$$\rho_{k+1}(-\mu x) = [\rho_k(-\mu x) - \frac{1}{k!}] / (-\mu x), \quad \rho_0(-\mu x) = \exp(-\mu x). \quad (8)$$

Справедливость равенств (7), (8) с учетом (4) проверяется непосредственно, если принять во внимание соотношение

$$\int_0^x \xi^k \rho_k(-\mu \xi) d\xi = x^{k+1} \rho_{k+1}(-\mu x), \quad (9)$$

легко доказываемое по индукции.

Можно показать (см. (4)), что для функций (7) верны рекуррентные формулы

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) = E_{(k)}(\lambda, x) + \lambda^k (\lambda + \mu) x^{k+1} \rho_{k+1}(-\mu x). \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} E_{(k+1)}(\lambda, x) - E_{(k)}(\lambda, x) &= \\ &= \lambda x [E_{(k)}(\lambda, x) - E_{(k-1)}(\lambda, x)] \rho_{k+1}(-\mu x) / \rho_k(-\mu x). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (6), (9) и для функций $S_{(k)}(\lambda, x)$ также можно записать равенства, аналогичные (4), (10), (11).

Можно показать (см. (8), (9)), что отношения $\rho_{k+1}(-\mu x) / \rho_k(-\mu x)$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю значительно медленнее, чем их составляющие, в связи с чем вместо (8) можно использовать следующие рекурсивные равенства:

$$\rho_{k+1}(-\mu x) / \rho_k(-\mu x) = \frac{1}{k} + \frac{1}{\mu x} \left[\frac{1}{k} \cdot \rho_{k-1}(-\mu x) / \rho_k(-\mu x) - 1 \right]. \quad (12)$$

Так как (см. (8)) $\rho_{k+1}(-\mu \tau) \rightarrow 1 / (k+1)!$ при $\tau \rightarrow 0$, то норма локальной погрешности метода (5) является (см. (7)) малой величиной порядка τ^{k+2} . Значительно больший интерес представляют аппроксимационные характеристики, даваемые формулами

$$E_{k+1}(-\mu, \tau) = \exp(-\mu \tau), \quad \partial^i E_{k+1}(0, \tau) / \partial \lambda^i = \tau^i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (13)$$

верными при любом фиксированном значении τ (см. (4), (7), (10)).

В случае $\mu \gg \|A\|$ при любом $k > 0$ пара функций $E_{(k-1)}(\lambda, x)$ и $E_{(k)}(\lambda, x)$ в пределах спектра матрицы A образуют вилку (см. (7), (10)) для $\exp(\lambda x)$. Чтобы эта вилка с ростом k сужалась, достаточно (см. (11)) выполнения условия $\rho_k(-\mu x)/\rho_{k+1}(-\mu x) \gg \|A\|x$. Как уже отмечалось в [2], выбором k следует добиваться не только обеспечения требований к локальной погрешности метода, но также положительности и монотонного по λ возрастания в пределах спектра матрицы A границ указанной вилки. Сделать это можно по-разному. Один из способов сводится к непосредственной проверке при $\lambda = -\|A\|$ в случае $\mu \geq \frac{k}{k-1} \|A\|$ ($k > 1$) знаков нижней и производной по λ верхней границ новой вилки.

Заметим, что наряду с описанной выше реализацией метода (5) можно использовать и другие способы его реализации, например вариант, основанный на представлении (7) в виде

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) =$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda x}{1} \left(1 + \frac{\lambda x}{2} \left(1 + \dots + \frac{\lambda x}{k} \left(1 + \frac{\lambda x}{k+1} (k+1)! \rho_{k+1}(-\mu x) \right) \dots \right) \right) \right),$$

при этом взамен (12) можно использовать равенства (см. (8))

$$(k+1)! \rho_{k+1}(-\mu x) = (1 - k! \rho_k(-\mu x)) (k+1) / (\mu x).$$

Используем, далее, оператор $E_{m+1}(A, x)$ из [2] в качестве исходного в (4). Тогда (на уровне спектральных функций) можно записать равенства вида $E_{m+1+(k)}(\lambda, x) = 1 + \lambda S_{m+1+(k-1)}(\lambda, x)$, где

$$S_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) = \int_0^x E_{m+1+(k-1)}(\lambda, \xi) d\xi,$$

$$E_{m+1+(-1)}(\lambda, x) = E_m^*(\lambda, x), \quad E_{1+(k)}(\lambda, x) = E_{(k+1)}(\lambda, x).$$

Тем самым взамен (5) получаем метод

$$\hat{y} = y + S_{m+1+(k-1)}(A, \tau)(Ay + a), \quad (14)$$

который при $m = 0$ переходит в (5), а при $k = 0$ совпадает с методом (15) из [2]. Очевидно, что порядок точности метода (14) на m единиц выше в сравнении с (5) (см. также (13)).

Теперь взамен (11) можно записать уже два типа соотношений:

$$E_{m+1+(k)}(\lambda, x) - E_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) = \quad (15)$$

$$= \frac{a_{m,k+1}}{a_{m,k}} \lambda [E_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) - E_{m+1+(k-2)}(\lambda, x)],$$

$$E_{m+1+(k)}(\lambda, x) - E_{m+(k)}(\lambda, x) = \quad (16)$$

$$= \frac{a_{m,k+1}}{a_{m-1,k+1}} (\lambda + \mu) [E_{m+(k)}(\lambda, x) - E_{m-1+(k)}(\lambda, x)].$$

Здесь

$$a_{m,k+1} = \int_0^x a_{m,k}(\xi) d\xi, \quad a_{m,0} = \frac{x^m}{m!} \rho_0(-\mu x), \quad a_{0,k} = x^k \rho_k(-\mu x). \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\mu a_{m,k} = a_{m-1,k} - a_{m,k-1}, \quad k > 0, \quad m > 0. \quad (18)$$

Для нахождения коэффициентов в правых частях равенств (15), (16) вместо (18), как и ранее, лучше применять расчетные правила для отношений. Например, в случае (15) можно использовать рекурсивные формулы (см. (18))

$$\frac{a_{i+1,j+1}}{a_{i+1,j}} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{a_{i,j+1}}{a_{i,j}} \left(\mu + \frac{a_{i+1,j-1}}{a_{i+1,j}} \right) - 1 \right].$$

Аналогичные формулы можно записать и применительно к (16).

Подобно случаю вилки (11), условием сужения вилки (15) в пределах спектра матрицы A будет, очевидно, выполнение неравенства $a_{m,k}/a_{m,k+1} \geq \|A\|$. Нетрудно убедиться (см. (17)), что $a_{m,k}/a_{m,k+1} \rightarrow \infty$ как при $k \rightarrow \infty$, так и при $m \rightarrow \infty$. В случае же равенств (16) можно показать (см. 18)), что при любых значениях $k \geq 0$ и $m \geq 1$ множитель перехода $(\lambda + \mu)a_{m,k+1}/a_{m-1,k+1}$ будет принадлежать $[0, 1]$, если выбрать $\mu \geq \|A\|$. Это обеспечивает монотонный характер процедуры (16) приближения $\exp(\lambda x)$ при любых фиксированных $x > 0$ и $k \geq 0$. Комбинируя (15), (16) и обеспечивая при этом, как и в случае метода (5), положительность и монотонное по λ возрастание соответствующих приближений к $\exp(\lambda x)$, можно строить специально ориентированные варианты вычислительных алгоритмов метода (14).

В заключение отметим, что в случае этого метода функция

$$\varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda, x) = \exp(\lambda x) - E_{m+1+(k)}(\lambda, x)$$

в пределах спектра матрицы A монотонна по x , так как для любых $x > 0$ по построению $\partial \varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda, x) / \partial x = \lambda \varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda, x)$, а $\varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda, x)$ при $\mu \geq \|A\|$ сохраняет знак на отрезке $[-\|A\|, 0]$ изменения λ . Очевидно, например, что привычное требование L -устойчивости (см. [4]) приводит к численным методам, которые таким важным свойством (монотонности локальной погрешности по шагу) не обладают.

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.

2. Бобков В. В., Бобкова Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.

3. Бобков В. В. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1967. № 4. С. 27.

4. Холл Д. Ж., Уатт Д. Ж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ.. М., 1979.

Поступила в редакцию 08.02.94

УДК 517.948.32:517.544

Л. А. КОРЗАН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

This paper gives solutions of fundamental boundary problems of flat theory of elasticity in case of the field is occupied by solid in the strip with rectilinear sections lying on the real axis.

1. Пусть упругая полоса, занимающая область $\{|\operatorname{Im} z| < h\}$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, разрезана вдоль n отрезков $[a_k, b_k]$ действительной оси, причем выполняется $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < +\infty$. Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости описываются потенциалами Колосова—Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, связанными равенствами:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \quad z = x + iy, \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi(\bar{z})}, \quad (2)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial y}{\partial x} + i \frac{\partial x}{\partial y} \right) = \kappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(\bar{z})}, \quad (3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, u и v — компоненты вектора смещений, κ, μ — заданные постоянные. Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ однозначны и аналитичны в полосе $\{|\operatorname{Im} z| < h\}$, кроме возможных разрывов на вещественной оси.

Пусть на краях полосы для функций Φ и Ω выполнены условия периодичности, т. е.

$$\Phi(x - ih) = \Phi(x + ih), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\Omega(x - ih) = \Omega(x + ih), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Чтобы сделать задачу более определенной, необходимо задать асимптотику неизвестных функций при $|\operatorname{Re} z| \rightarrow +\infty$. С этой целью потребуем, чтобы было:

$$\Phi(z) = \begin{cases} o(1), & \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty \\ O(1), & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \end{cases},$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} o(1), & \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty \\ O(1), & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \end{cases}.$$

Заметим, что решения должны допускать интегрируемые особенности при $z \rightarrow a_k$ и $z \rightarrow b_k$.

2. Перейдем теперь к решению первой основной задачи, т. е. будем считать заданными значения σ_y^+ , τ_{xy}^+ на $L = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$. Знаками «+» и «-» отмечены, как всегда, граничные значения, принимаемые соответственно на верхнем и нижнем краях разрезов.

На основании формулы (2) граничные условия примут вид:

$$\sigma_y^+(x) - i\tau_{xy}^+(x) = \Phi^+(x) + \Omega^-(x), \quad x \in L, \quad (4)$$

$$\sigma_y^-(x) - i\tau_{xy}^-(x) = \Phi^-(x) + \Omega^+(x), \quad x \in L. \quad (5)$$

Складывая и вычитая (4) и (5), получим:

$$[\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = p(x), \quad x \in L, \quad (6)$$

$$[\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = q(x), \quad x \in L, \quad (7)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные на L функции:

$$p(x) = \sigma_y^+ + \sigma_y^- - i(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-),$$

$$q(x) = \sigma_y^+ - \sigma_y^- - i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-).$$

Считаем, что $p(x)$, $q(x)$ удовлетворяют на L условию Н и их асимптотика такая, как и асимптотика функций Φ и Ω .

Общее решение граничной задачи (7) дается формулой:

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(\tau) d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}}, \quad (8)$$

где в качестве аналога ядра Коши взято выражение:

$$\frac{d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}}, \quad \lambda = \frac{\pi}{h},$$

так как правая часть (7) исчезает при $x \rightarrow +\infty$.

Далее, полагая

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (e^{\lambda z} - e^{\lambda a_k})(e^{\lambda z} - e^{\lambda b_k})}}, \quad (9)$$

факторизуем коэффициент задачи (6). В результате этого придем к задаче о «скачке»:

$$\left[\frac{\Phi(x) + \Omega(x)}{\chi(x)} \right]^+ - \left[\frac{\Phi(x) + \Omega(x)}{\chi(x)} \right]^- = \frac{p(x)}{\chi^+(x)}, \quad x \in L. \quad (10)$$

Аналог ядра Коши, с помощью которого можно решить задачу (10), должен быть таким, чтобы сходился интеграл типа Коши с этим ядром и с плотностью $\frac{p(x)}{\chi^+(x)}$. Такое ядро удобно взять в следующем виде:

$$\frac{e^{nz} + 1}{e^{n\lambda\tau} + 1} \frac{d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}}. \quad (11)$$

Беря интеграл типа Коши с ядром (11) и вышеуказанной плотностью, умножая его на $\chi(z)$, получим общее решение задачи (6):

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{e^{nz} + 1}{e^{n\lambda\tau} + 1} \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}}. \quad (12)$$

Из формул (8) и (12) следует:

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{4\pi i} \int_L \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{e^{nz} + 1}{e^{n\lambda\tau} + 1} \frac{d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{q(\tau) d\tau}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}},$$

$$\Omega(x) = \frac{\chi(z)}{4\pi i} \int_L \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{e^{nz} + 1}{e^{nz} + 1} \frac{de^{\tau z}}{e^{\tau z} - e^{z^2}} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{q(\tau) de^{\tau z}}{e^{\tau z} - e^{z^2}}.$$

Таким образом, задача решена.

3. Рассмотрим теперь вторую основную задачу, т. е. будем считать, что на L заданы значения смещений $u^+(x)$, $v^-(x)$ на верхнем крае разрезом и $u^-(x)$, $v^+(x)$ на нижнем крае.

Согласно формуле (3), граничные условия запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \kappa\Phi^+(x) - \Omega^-(x) &= 2\mu(u^{+'} + iv^{+'}), \\ \kappa\Phi^-(x) - \Omega^+(x) &= 2\mu(u^{-'} + iv^{-'}) \end{aligned} \right\}.$$

Складывая и вычитая, получим:

$$[\kappa\Phi(x) - \Omega(x)]^+ + [\kappa\Phi(x) - \Omega(x)]^- = f(x), \quad x \in L, \quad (13)$$

$$[\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^+ - [\kappa\Phi(x) + \Omega(x)]^- = g(x), \quad x \in L, \quad (14)$$

где $f(x)$, $g(x)$ — заданные на $\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ функции:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2\mu[(u^{+'} + u^{-'}) + i(v^{+'} + v^{-'})], \\ g(x) &= 2\mu[(u^{+'} - u^{-'}) + i(v^{+'} - v^{-'})] \end{aligned} \right\}.$$

Считаем, что эти функции удовлетворяют на L условию Н.

Аналогично предыдущему общие решения граничных задач (13), (14) даются соответственно формулами:

$$\kappa\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{e^{nz} + 1}{e^{nz} + 1} \frac{f(\tau) de^{\tau z}}{\chi^+(\tau)(e^{\tau z} - e^{z^2})}, \quad (15)$$

$$\kappa\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) de^{\tau z}}{e^{\tau z} - e^{z^2}}, \quad (16)$$

где $\chi(z)$ есть функция, определяемая формулой (9).

Складывая и вычитая (15) и (16), получим выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

4. В заключение решим смешанную задачу. В ней задаются внешние напряжения, приложенные, скажем, к верхним краям разрезов, и смещения на нижних краях. На основании формул (2), (3) граничные условия запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ &= \Phi^+(x) + \Omega^-(x), \\ 2\mu\left(\frac{\partial u^-}{\partial x} + i\frac{\partial v^-}{\partial x}\right) &= \kappa\Phi^-(x) - \Omega^+(x) \end{aligned} \right\}.$$

Умножая второе из этих равенств сначала на $-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}$, а затем на $+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}$ и складывая с первым, получаем условия на L :

$$\left[\Phi(x) + \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^+ - i\sqrt{\kappa}\left[\Phi(x) + \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^- = f_1(x), \quad (17)$$

$$\left[\Phi(x) - \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^+ + i\sqrt{\kappa}\left[\Phi(x) - \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^- = f_1(x). \quad (18)$$

Таким образом, функции $\Phi(z) + \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \Omega(z)$, $\Phi(z) - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \Omega(z)$ определяются решением граничных задач (17) и (18), представляющих собой частные случаи задачи сопряжения $F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t)$, $t \in L$. Для задачи (17) $G(t) = i\sqrt{\kappa}$, для задачи (18) $G(t) = -i\sqrt{\kappa}$. Решая эти задачи по способу, указанному в [1], получаем:

$$\Phi(z) + \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \Omega(z) = \frac{\chi_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)} \frac{e^{nz} + 1}{e^{n\tau} + 1} \frac{de^{\tau}}{e^{\tau} - e^{iz}}, \quad (19)$$

$$\Phi(z) - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \Omega(z) = \frac{\chi_2(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f_2(\tau)}{\chi_2^+(\tau)} \frac{e^{nz} + 1}{e^{n\tau} + 1} \frac{de^{\tau}}{e^{\tau} - e^{iz}}, \quad (20)$$

$$\chi_1(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\gamma_1} (z - b_k)^{\gamma_1 - 1},$$

$$\chi_2(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\gamma_2} (z - b_k)^{\gamma_2 - 1},$$

причем

$$\gamma_1 = \frac{\ln(i\sqrt{\kappa})}{2\pi i} = \frac{1}{4} - \frac{i \ln \kappa}{4\pi},$$

$$\gamma_2 = \frac{\ln(-i\sqrt{\kappa})}{2\pi i} = \frac{3}{4} - \frac{i \ln \kappa}{4\pi}.$$

Складывая и вычитая формулы (19) и (20), получаем явные выражения для $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, которые здесь не выписываем.

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. С. 391.

Поступила в редакцию 25.05.94.

УДК 514.75

О. Г. ДУШКЕВИЧ

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ОДНОРОДНЫМ Φ-ПРОСТРАНСТВОМ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ЛИ

A connection between some properties such as regularity, reductivity, existence of invariant normalization of Φ -space and special vector fiber bundle over the Φ -space is studied.

1. Группа Ли VG

Пусть G — линейная группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Будем рассматривать $\mathfrak{g}$ и как группу Ли относительно операции сложения.

$\text{Aut}(\mathfrak{g}, +)$ — группа автоморфизмов группы Ли $(\mathfrak{g}, +)$.

Зададим действие $(\cdot)$ группы Ли G на $\mathfrak{g}$:

$$(\cdot): G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Будем полагать, что отображение $(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $e \cdot X = X$,
- 2) $v \cdot (u \cdot X) = (vu) \cdot X$,
- 3) $u \cdot (X + Y) = u \cdot X + u \cdot Y$, где $u, v \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, e — единица G .

Это означает, что отображение $\bar{A}$, связанное с $(\cdot)$ следующим образом:

$$\bar{A}_u = (u \cdot),$$

является, во-первых, гомоморфизмом (условия 1, 2), а, во-вторых, образ $\bar{A}$ лежит в $\text{Aut}(\mathfrak{g}, +)$ (условие 3).

Пространство $\text{Aut}(\mathfrak{g}, +)$ совпадает с полной линейной группой $GL(\mathfrak{g})$, поэтому отображение $\bar{A}$ есть линейное представление группы Ли G в $\mathfrak{g}$.

Как известно [1], данная конструкция позволяет ввести на пространстве $g \times G$ структуру группы Ли, которая называется полупрямым произведением $g \ltimes G$. В том случае, когда A есть присоединенное представление Ad группы Ли G , $g \ltimes G$ представляет собой касательное расслоение TG .

Пусть $\tilde{r}: gl(n, R) \rightarrow gl(n, R)$ — линейный изоморфизм векторных пространств, обладающий свойством $r(\tilde{A}_u X) = \tilde{A}_u \tilde{r}(X)$, $\forall u \in G, \forall X \in g$.

Будем рассматривать векторные пространства V из множества

$$\{r(V'): V' \subset g, G \cdot V' \subset V', r = \tilde{r}|_{g'}\}.$$

Можно задать действие $(\cdot)$ группы Ли G на V по формуле

$$u \cdot X = r(u \cdot r^{-1}(X)), \text{ где } u \in G, X \in g.$$

Таким образом, используя отображение r , мы расширяем действие группы Ли G на построенный класс векторных пространств. Так как $G \cdot V \subset V$, то $r(u \cdot r^{-1}(X)) \in V$, и действие $(\cdot)$ задано корректно. Проверим выполнение условий 1—3:

$$1) e \cdot X = r(e \cdot r^{-1}(X)) = r(r^{-1}(X)) = X;$$

$$2) v \cdot (u \cdot X) = r(v \cdot r^{-1}(u \cdot X)) = r(v \cdot r^{-1}(r(u \cdot r^{-1}(X)))) = \\ = r((vu) \cdot r^{-1}(X)) = (VU) \cdot X;$$

$$3) u \cdot (X + Y) = r(u \cdot r^{-1}(X + Y)) = r(u \cdot r^{-1}(X) + u \cdot r^{-1}(Y)) = \\ = r(u \cdot r^{-1}(X)) + r(u \cdot r^{-1}(Y)) = u \cdot X + u \cdot Y.$$

Отображение $A: G \rightarrow \text{Aut}(V)$, $u \rightarrow (u \cdot)$ является линейным представлением G в V , причем $A_u = r \circ A_{u_0} \circ r^{-1}$.

Таким образом, можно построить полупрямое произведение групп Ли G и V , которое в дальнейшем будем обозначать VG :

$$VG \stackrel{\text{def}}{=} V \ltimes G.$$

Операция умножения в VG действует следующим образом:

$$(X, u)(Y, v) = (X + A_u(Y), UV).$$

Алгебру Ли VG , являющуюся полупрямой суммой $V \ltimes g$, будем обозначать Vg .

Теперь найдем вид экспоненциального отображения, присоединенного представления и коммутатора алгебры Ли Vg группы Ли VG .

Введем следующее обозначение: $a \stackrel{\text{def}}{=} d(A)_e: g \rightarrow gl(V)$.

Из определения дифференциала следует, что $A(\exp tX) = \exp tX \times (d(A)_e X) = \exp(ta_x)$.

Непосредственным вычислением легко проверяется истинность следующего утверждения.

Предложение 1. 1. Однопараметрическая подгруппа группы Ли VG , соответствующая касательному вектору (X_0, X) , имеет вид:

$$\{(E_{t,x}(X_0), \exp tX) : t \in R\}, \text{ где } E_{t,x}: V \rightarrow V,$$

$$E_{t,x} = (A_{\exp tX} - Id)/a_x = \sum_{n=1}^{\infty} (t^n/n!) (a_x)^{n-1}.$$

Таким образом, $\text{EXP}(X_0, X) = (E_{1,x}(X_0), \exp X)$.

2. Присоединенное представление группы Ли VG задается формулой:

$$\text{Ad}_{(z,u)}(X_0, X) = (A_u X_0 - a_{\text{Ad}_u X} Z, \text{Ad}_u X).$$

3. Коммутатор алгебры Ли Vg действует следующим образом:

$$[(X_0, X), (Y_0, Y)] = (a_x Y_0 - a_y X_0, [X, Y]).$$

2. $V\Phi$ — пространство группы Ли VG

Пусть $\Phi: G \rightarrow G$ — эндоморфизм группы Ли G , а $\phi \in gl(V)$ таково, что

$$\phi \circ A_u = A_{\phi(u)} \circ \phi \quad \forall u \in G. \quad (1)$$

Пара отображений (ϕ, Φ) , связанных равенством (1), называется

эквивариантной [2]. Легко проверить, что эквивариантная пара задает эндоморфизм группы Ли VG .

Обозначим

$$V\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi, \Phi) \text{ и } H^{V\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (X, u) \in VG : V\Phi(X, u) = (X, u) \}.$$

Пространство $H^{V\Phi}$, являющееся группой Ли и векторным расслоением одновременно, представляет собой полупрямое произведение вида:

$$H^{V\Phi} = VH^{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} H^* \rtimes H^{\Phi}.$$

Действие, соответствующее данному полупрямому произведению, является естественным ограничением действия $(\cdot)$ [2].

Предложение 2. Пусть эндоморфизм удовлетворяет условию

$$d\Phi_e(u \cdot X) = \Phi(u) \cdot d\Phi_e(X).$$

Тогда для Φ можно подобрать такую эквивариантную пару φ , что

$$VH^* = r(H^{d\Phi_e} \cap V').$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\varphi = r \circ d\Phi_e \circ r^{-1}$.

$$\begin{aligned} \varphi \circ A_u &= r \circ d\Phi_e \circ r^{-1} \circ r \circ \tilde{A}_u \circ r^{-1} = r \circ \tilde{A}_u \circ d\Phi_e \circ r^{-1} = r \circ \tilde{A}_u \circ R^{-1} \circ r \circ D\Phi_e \circ r^{-1} = \\ &= A_{\varphi(u)} \circ \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, (φ, Φ) — эквивариантная пара. Остается показать, что $H^* = r(H^{d\Phi_e} \cap V')$.

Пусть $X \in H^*$, следовательно, $r \circ d\Phi_e \circ r^{-1}(X) = X$, следовательно, $d\Phi_e(r^{-1}(X)) = r^{-1}(X)$, следовательно, $r^{-1}(X) \in H^{d\Phi_e}$. $X \in V$, следовательно, $r^{-1}(X) \in V'$, следовательно, $r^{-1}(X) \in H^{d\Phi_e} \cap V'$, следовательно, $X \in r(H^{d\Phi_e} \cap V')$.

Пусть $X = r(X') \in r(H^{d\Phi_e} \cap V')$.

$\varphi \circ r(X') = r \circ d\Phi_e \circ r^{-1} \circ r(X') = r \circ d\Phi_e(X') = r(X')$, следовательно, $r(X') \in H^*$.

Предложение доказано.

Пусть (φ, Φ) — произвольная эквивариантная пара.

Определим следующее подрасслоение векторного расслоения VG :

$$VM \stackrel{\text{def}}{=} \{ (X, u) \cdot V\Phi((X, u)^{-1}) : (X, u) \in VG \}.$$

Предложение 3. VM является одновременно однородным $V\Phi$ -пространством VG/VH^* и векторным расслоением над однородным Φ -пространством G/H^* , или, другими словами, векторное расслоение над однородным Φ -пространством есть однородное $V\Phi$ -пространство векторного расслоения VG на группе Ли G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим базу и слои VM .

$$\begin{aligned} VM &= \{ (X, u) \cdot V\Phi((X, u)^{-1}) : (X, u) \in VG \} = \{ (X, u) \cdot (\varphi(-u^{-1} \cdot X), \Phi(u^{-1})) : (X, u) \in VG \} = \\ &= \{ (X - u \cdot \varphi(u^{-1} \cdot X), u \cdot \Phi(u^{-1})) : (X, u) \in VG \} = \\ &= \{ (X - (u \cdot \Phi(u^{-1})) \cdot \varphi(X), u \cdot \Phi(u^{-1})) : u \in G, X \in V \}. \end{aligned}$$

Таким образом, базой VM является подмногообразие

$$M \subset G, M = \{ u \cdot \Phi(u^{-1}) : u \in G \}.$$

Как известно [3], M есть реализация однородного Φ -пространства G/H^* . Поэтому естественно считать VM векторным расслоением над однородным Φ -пространством и обозначать его следующим образом:

$$V(G/H^*) \stackrel{\text{def}}{=} VM = \{ (X - m \cdot \varphi(X), m) : m \in M, X \in V \}.$$

Кроме того, VM по построению является реализацией однородного $V\Phi$ -пространства VG/VH^* , следовательно, $VG/VH^* = V(G/H^*)$. Предложение доказано.

3. Связь свойств расслоенного пространства и базы в векторном расслоении $V(G/H^*)$

Наследование регулярности доказано для случая полупрямого произведения произвольных групп Ли [2]. Поэтому без доказательства может быть сформулирована

Теорема 1. $V(G/H^*)$ регулярно тогда и только тогда, когда G/H^* регулярно.

Пусть теперь $\tilde{A} = \text{Ad}$, т. е. $A = r_0 \text{Ad} \circ r^{-1}$.

Тогда имеет место аналогичная теорема для свойства редуктивности

Теорема 2. $V(G/H^*)$ редуктивно тогда и только тогда, когда G/H^* редуктивно.

Доказательство: Достаточность доказана в [2].

Необходимость. Пусть G/H^* редуктивно, а $g = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — редуктивное разложение алгебры Ли g .

Чтобы доказать редуктивность $V(G/H^*)$, нужно построить редуктивное разложение пространства Vg . Первым слагаемым прямой суммы должно быть $\mathfrak{h} = T_{(0,e)} H^{V^*} = r(\mathfrak{h} \cap V') \times \mathfrak{h}$.

Построим в качестве редуктивного дополнения $\tilde{\mathfrak{m}} = r(\mathfrak{m} \cap V') \times \mathfrak{m}$.

Проверим, что $Vg = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{m}}$.

$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$, следовательно, $r(\mathfrak{h} \cap V') \cap r(\mathfrak{m} \cap V') = \{0\}$, следовательно, $\mathfrak{h} \cap \tilde{\mathfrak{m}} = \{(0, 0)\}$.

$\forall (X_0, X) \in Vg$, следовательно, $\exists X \in g$, следовательно, $X = X_h + X_m$ ($X_h \in \mathfrak{h}$, $X_m \in \mathfrak{m}$), $X_0 = r(Y')$, $Y' \in V'$.

Из условия следует, что $\exists Y'_h \in \mathfrak{h} \cap V'$, $Y'_m \in \mathfrak{m} \cap V'$ такие, что $Y' = Y'_h + Y'_m$, следовательно, $(X_0, X) = (r(Y'_h), X_h) + (r(Y'_m), X_m)$. $(r(Y'_h), X_h) \in \mathfrak{h} \times r(\mathfrak{h} \cap V')$, $(r(Y'_m), X_m) \in \mathfrak{m} \times r(\mathfrak{m} \cap V')$, следовательно $Vg = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{m}}$.

Проверим, что $\text{Ad}_{H^{V^*}}(\tilde{\mathfrak{m}}) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$. $\forall (X, u) \in H^{V^*}$, $\forall (Y_0, Y) \in \tilde{\mathfrak{m}}$, $Y_0 = r(Y'_0)$, $Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$.

Мы установили, что присоединенное представление группы Ли VG действует следующим образом: $\text{Ad}_{(X, u)}(Y_0, Y) = (A_u Y_0 - a_{\text{Ad}_u Y} X, \text{Ad}_u Y)$. $\text{Ad}_{H^*} \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, следовательно, $\text{Ad}_u Y \in \mathfrak{m}$. $A_u Y_0 = A_u(r(Y'_0)) = r(\text{Ad}_u Y'_0)$, $u \in H^*$, $Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $\text{Ad}_u Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $A_u Y_0 \in r(\mathfrak{m} \cap V')$, следовательно, $a_{\text{Ad}_u Y} X = a_{\text{Ad}_u Y}(r(X')) = r(a_{\text{Ad}_u Y} X')$, $\text{Ad}_u Y \in \mathfrak{m}$, $X' \in \mathfrak{h} \cap V'$, $\text{ad}_g V' \subset V'$, $\text{ad}_h \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, следовательно, $\text{ad}_{\text{Ad}_u Y} X' \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $A_u Y_0 - a_{\text{Ad}_u Y} X \in r(\mathfrak{m} \cap V')$.

Теорема доказана.

1. Винберг Э. Б., Онищук А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., 1988.

2. Степанов Н. А. // Изв. вузов: Сер. Математика. 1983. № 10. С. 64.

3. Там же. 1967. № 3. С. 88.

Поступила в редакцию 09.06.94.

УДК 519.24

Е. И. МИРСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННЫХ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

The moments convergence rate of the smoothed spectral densities estimates of stationary time series is investigated in this article. These estimates are based on time averaging of modified periodograms.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с $MX(t) = 0$, неизвестной ковариационной функцией $R(\tau)$, $\tau \in Z$ и неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$. В [1] в качестве оценки $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, была исследована статистика $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, полученная путем осреднения модифицированных периодограмм, построенных по пересекающимся интервалам наблюдений. Оценки такого вида были предложены в [2] для гауссовских процессов. В работе [1] исследована оценка вида

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_N(\lambda, l), \quad (1)$$

$\lambda \in \Pi$, построенная по $T = LN - (L - 1)K$ наблюдениям для произвольных стационарных случайных процессов, где L — число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, N, K — целые числа, а $I_N(\lambda, l)$ — модифицированная периодограмма.

В [3] в качестве оценки $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, исследована статистика

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^T W(\lambda - \frac{2\pi s}{T}) \bar{f}(\frac{2\pi s}{T}), \quad (2)$$

где $W(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ — спектральное окно, а $\bar{f}(\lambda)$ задается выражением (1). Показано, что оценка $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, является асимптотически несмещенной при $T \rightarrow \infty$, а

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\bar{f}(\lambda) = 0.$$

В данной работе исследуется скорость сходимости первых двух моментов статистики (2), причем $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет следующему условию

$$|f(x + \lambda) - f(\lambda)| \leq C|x|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3)$$

для любых $x \in \Pi$, C — некоторая положительная постоянная. Будем предполагать, что $W(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ — непрерывная, четная периодическая функция, удовлетворяющая требованиям:

$$a) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} |W(x)| dx = 1, \quad 0 < \delta \leq \pi,$$

$$б) \int_{-\pi}^{\pi} W(x) dx = 1. \quad (4)$$

Также будем предполагать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} W^2(x) dx < \infty. \quad (5)$$

В дальнейшем потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. Для любого положительного ядра $\Phi_N(x)$ на $\Pi = [-\pi, \pi]$ при любом $\beta > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^\beta \Phi_N(x) dx \rightarrow 0. \quad (6)$$

Теорема 1. Если спектральная плотность, $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет соотношению (3), то для математического ожидания оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), имеет место равенство

$$|M\bar{f}(\lambda) - f(\lambda)| = o\left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(z) |z|^\alpha dz\right) + o\left(\int_{-\pi}^{\pi} |W(y)| \cdot |y|^\alpha dy\right), \quad (7)$$

где

$$\Phi_N(x) = \left(2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2\right)^{-1} |k_N(x)|^2, \quad (8)$$

$$\varphi_N(x) = \sum_{p=0}^{N-1} h_N(p) e^{ipx}, \quad (9)$$

а $h_N(p)$ — окно просмотра данных.

Доказательство. Нетрудно показать, что если функция $g(x)$ непрерывна на Π , то выполняется равенство

$$\left|\frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^T g\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx\right| = o(T^{-1}). \quad (10)$$

Учитывая (10) и (4), получим, что

$$|M\bar{f}(\lambda) - f(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} W(y) (M\bar{f}(y+\lambda) - f(\lambda)) dy| = o(T^{-1}).$$

Откуда, используя соотношения (3), (5), (6), (10) и теорему 1 работы [1], получим требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 2. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π и удовлетворяет соотношению (3), семинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, функция $h_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограничена, имеет ограниченную вариацию и выполняется соотношение

$$\sup_N \int_{\Pi^3} |\Phi_N(y_1, y_2, y_3)| dy_1 dy_2 dy_3 \leq K_1, \quad (11)$$

где K_1 — некоторая постоянная,

$$\Phi_N(y_1, y_2, y_3) = \quad (12)$$

$$= \left((2\pi)^3 \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4 \right)^{-1} \Phi_N(y_1) \Phi_N(y_2) \Phi_N(y_3) \overline{\Phi_N(y_1 + y_2 + y_3)},$$

а $\Phi_N(x)$ задается выражением (9), то для дисперсии оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), справедливо соотношение

$$D\bar{f}(\lambda) = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Используя определение дисперсии, свойства математического ожидания и соотношение (10), можем записать, что

$$D\bar{f}(\lambda) = \int_{\Pi^2} W(\lambda - \mu_1) W(\lambda - \mu_2) \text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\} d\mu_1 d\mu_2 +$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) D\bar{f}(\mu) d\mu + o(T^{-1}) = I_1 + I_2 + o(T^{-1}),$$

где $\Pi^2 = \{\mu_1 \in \Pi, \mu_2 \in \Pi, \mu_1 \neq \mu_2\}$.

Рассмотрим каждый из интегралов.

Воспользуемся неравенством Гельдера, получим

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left(\int_{\Pi^2} |W(\lambda - \mu_1)|^2 |W(\lambda - \mu_2)|^2 d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{\Pi^2} |\text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\}|^2 d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В [4] показано, что

$$|\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\}| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (14)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \pmod{\pi}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Откуда, учитывая (5), получим

$$|I_1| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим I_2 .

В соответствии с формулой (11) работы [1] дисперсия оценки спектральной плотности $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, может быть представлена в виде суммы трех слагаемых A_1, A_2, A_3 . Тогда

$$I_2 = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) A_1 d\mu + \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) A_2 d\mu +$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2 (\lambda - \mu) A_3 d\mu = I_{21} + I_{22} + I_{23},$$

$$A_1 = \frac{2\pi}{L} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^2} \int_{\Pi^3} \Phi_N(y_1, y_2, y_3) f_4(y_1 + \mu, y_2 - \mu, y_3 + \mu) \times \\ \times P_L[(N-K)(y_1 + y_2)] dy_1 dy_2 dy_3,$$

где

$$P_L[(N-K)(x+y)] = \frac{1}{L} \frac{\sin^2 \frac{L(N-K)(x+y)}{2}}{\sin^2 \frac{(N-K)(x+y)}{2}}. \quad (16)$$

Если предположить, что семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена постоянной C_1 , то выполняется условие (11) и так как

$$P_L[(N-K)(x+y)] \leq L \quad (17)$$

для любых $x, y \in \Pi$ и произвольных целочисленных N, K , то

$$|A_1| \leq 2\pi C_1 K_1 \frac{\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^2}.$$

Откуда, учитывая свойства окон просмотра данных и (10), получим

$$|A_1| = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Значит,

$$|I_{21}| = o\left(\frac{1}{TN}\right).$$

Рассмотрим I_{22} .

$$I_{22} = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) \times \\ \times \frac{1}{L} \int_{\Pi^2} \Phi_N(x - \mu) \Phi_N(y + \mu) P_L[(N-K)(x+y)] f(x) f(y) dx dy d\mu.$$

Тогда

$$|I_{22}| \leq \frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{L} \int_{\Pi^3} W^2(\lambda - \mu) \Phi_N(x) \Phi_N(y) P_L[(N-K)(x+y)] |f(x + \mu)| \times \\ \times |f(y - \mu)| dx dy d\mu.$$

Так как спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π , выполняются соотношения (5), (17) и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) dx = 1, \quad (18)$$

то

$$|I_{22}| = O(T^{-1}).$$

Рассмотрим I_{23} .

$$I_{23} \leq \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) \times$$

$$\times \frac{1}{L} \int \int_{\Pi^3} \Phi_N(x+\mu, x-\mu) \Phi_N(y-\mu, y+\mu) P_L[(N-K)(x+y)] \times$$

$$\times f(x) f(y) dx dy d\mu,$$

где

$$\Phi_N(x, y) = \left(2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^{-1} \Phi_N(x) \overline{\Phi_N(y)}, \quad (19)$$

а $\Phi_N(x)$ задается выражением (9).

Учитывая непрерывность $f(\lambda)$ на Π и соотношение (17), можно показать, что

$$|I_{23}| \leq \frac{2\pi}{T} \frac{1}{L} LA^2 \int \int_{\Pi^3} W^2(\lambda-\mu) |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| |\Phi_N(y-\mu, y+\mu)| dx dy d\mu,$$

где A — некоторая постоянная.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx &\leq \frac{1}{2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2} \times \\ &\times \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x-\mu)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x)|^2 dx.$$

Откуда, учитывая (9), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx \leq 1 \quad (20)$$

для любых значений $\mu \in \Pi$.

В силу справедливости соотношений (20) и (5) получим, что

$$|I_{23}| = o(T^{-1}).$$

Значит,

$$|I_2| = o(T^{-1}).$$

Откуда следует требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 3. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π и удовлетворяет соотношению (3), семинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, функция $h_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ограничена, имеет ограниченную вариацию и выполняется соотношение (11), то для ковариации оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), справедливо соотношение

$$|\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\}| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$.

Доказательство. Используя определение ковариации, свойства математического ожидания, соотношение (10), можем записать, что

$$\begin{aligned} &\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\} = \\ &= \int \int_{\Pi^2} W(\lambda_1 - \mu_1) W(\lambda_2 - \mu_2) \text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\} d\mu_1 d\mu_2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda_1 - \mu) W(\lambda_2 - \mu) Df(\mu) d\mu + o(T^{-1}) = I_1 + I_2 + o(T^{-1}),$$

где $\bar{\Pi}^2 = \{\mu_1 \in \Pi, \mu_2 \in \Pi, \mu_1 \neq \mu_2\}$.

Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что

$$|I_1| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$|I_2| = o(T^{-1}).$$

Теорема доказана.

В [1] показано, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Df(\lambda) = \frac{f^2(\lambda)}{L},$$

а для оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), имеет место соотношение (13), т. е. при $T \rightarrow \infty$ оценка $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, является состоятельной.

1. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: Сб. науч. ст. Мн., 1991. С. 180.

2. Welch P. D. // IEEE Trans. Audio Electroacou. 1967. AU-15. № 2. Р. 70.

3. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 35.

4. Мирская Е. И. // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: 18—20 мая 1994 г. Мн., 1994. С. 163.

Поступила в редакцию 30.08.94.

УДК 517.977

И. Ю. СЫРОИД

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО МЕТОДА СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The third order system stabilization results obtained by PC with the aid of the feedback constructed by means of the optimal control synthesis in the special auxiliary problem are adduced.

Стабилизация и улучшение характеристик переходных процессов относятся к центральным проблемам теории управления [1]. Цель работы — на конкретной системе 3-го порядка представить результаты экспериментальной проверки на ПЭВМ одного нового метода стабилизации. В отличие от наиболее распространенных методов стабилизации, основанных на теории устойчивости [2], предлагаемый метод базируется на теории оптимального управления [3]. Он отличается и от метода Летова — Калмана [4, 5] из теории оптимального управления, в котором не учитываются прямые ограничения на управление.

Задача стабилизации динамической системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

с помощью ограниченного управления состоит в построении такой функции $u(x)$, $|u(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$; $u(0) = 0$, при которой замкнутая система $\dot{x} = Ax + bu(x)$ имеет решения $x(t)$, $t \geq 0$, в окрестности начала координат и состояние $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Пусть $X_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: -\epsilon e \leq x \leq \epsilon e\}$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Выберем $\theta: 0 < \theta < +\infty$, и в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T = [0; \theta]$, рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$\rho_\theta(z) = \min_p,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z,$$

$$x(\theta) \in X, \quad (2)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T.$$

Пусть $u^0(t|z)$, $t \in T$, — оптимальное программное управление задачи (2);

$$C = \bigcup_{t \geq 0} C(t^*) \quad \text{— множество управляемости,}$$

$$\text{где } C(t^*) = \{z \in \mathbb{R}^n: \rho_*(z) = 0\}.$$

Определение. Функция

$$u_*(z) = u^0(0|z), \quad z \in C, \quad (3)$$

называется оптимальным управлением типа обратной связи [3].

Предлагаемый метод стабилизации системы (1) состоит в использовании (3) для построения стабилизирующей обратной связи вида:

$$u(x) = \begin{cases} u_*(x), & \text{если } \rho_*(x) \geq \varepsilon; \\ u_{\theta(x)}^0(x), & \text{если } 0 < \rho_*(x) < \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число, $\theta(x)$ — такое число $0 < \theta(x) < \theta$, что $\rho_{\theta(x)}(x) \geq \varepsilon$.

Таким образом, проблема стабилизации исходной динамической системы свелась к эффективной реализации управления типа обратной связи (4).

Поскольку, согласно определению (4), стабилизирующая обратная связь строится с помощью решений задачи (2), то укажем метод нахождения $u^0(t|z)$, $t \in T$.

Пусть $x_0(\tau)$ — состояние системы (1), в котором она оказалась в момент τ после действия стабилизирующей обратной связи (4) на промежутке $[0; \tau]$. Оптимальное управление $u^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, задачи (2) при $z = x_0(\tau)$ имеет вид: $u^0(t|x_0(\tau)) = \text{sign} \Delta^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, где

$$\Delta^0(t|x_0(\tau)) = v_*' H(t); \quad H(t) = F(\theta, t)b;$$

v_* — оптимальный вектор Лагранжа; $F(\theta, t)$, $\theta \geq t \geq 0$, — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$.

Отсюда видно, что для работы стабилизатора достаточно знать поведение вдоль $x_0(\tau)$, $\tau \geq 0$, вектора Лагранжа v_* и моментов

$$T_*(\tau) = \{t_i(\tau), i = \overline{1, p(\tau)}\} = \{t \in T: \Delta^0(t|x_0(\tau)) = 0\}. \quad (5)$$

В дальнейшем предположим, что $\forall \tau \geq 0$ имеет место

$$\text{rank} (H_{\text{оп}}(t), t \in T_*(\tau); e(I_{\text{оп}}), e(I_{\text{оп}}^*)) = p(\tau) + 1. \quad (6)$$

$$I_{\text{оп}} = \{i \in \{1, \dots, n\}: -\rho = x_i(\theta)\},$$

$$I_{\text{оп}}^* = \{i \in \{1, \dots, n\}: \rho = x_i(\theta)\}, \text{ где } H_{\text{оп}}(t) = (H_i(t), i \in I_{\text{оп}} \cup I_{\text{оп}}^*).$$

Рассмотрим моменты (5), считая их упорядоченными:

$$t_i(\tau) < t_{i+1}(\tau), \quad i = \overline{1, p(\tau)}.$$

Положим, $s_0 = 0$, $t_0(\tau) = 0$, если $t_1(\tau) > 0$;

$$s_0 = 1, \text{ если } t_1(\tau) = 0;$$

$$s_* = p(\tau), \quad t_{p(\tau)+1}(\tau) = \theta, \text{ если } t_{p(\tau)}(\tau) < \theta;$$

$$s_* = p(\tau) - 1, \text{ если } t_{p(\tau)}(\tau) = \theta;$$

$$K(\tau) = \{s_0, s_0 + 1, \dots, s_*\}; \quad K^+(\tau) =$$

$$= \{i \in K(\tau): \Delta^0(t|x_0(\tau)) > 0, t \in]t_i(\tau); t_{i+1}(\tau)[\};$$

$$K^-(\tau) = \{i \in K(\tau): \Delta^0(t|x_0(\tau)) < 0, t \in]t_i(\tau); t_{i+1}(\tau)[\}.$$

Совокупность $S(\tau) = \{K^-(\tau), K^+(\tau), p(\tau), I_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}^*\}$ назовем

структурой оптимального коуправления $\Delta^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, задачи (2). Пусть позиция $\{\tau, x_0(\tau)\}$ такова, что при $\tau = \tau$ справедливы соотношения:

$$t_1(\tau) > 0; t_p(\tau) < \theta; \frac{\partial \Delta^0(t|x_0(\tau))}{\partial t} \Big|_{t=t_i(\tau)} \neq 0, i = \overline{1, p(\tau)}. \quad (7)$$

Положим $p. = p(\tau.)$; $K^- = K^-(\tau.)$; $K^+ = K^+(\tau.)$;

$$k_i = 1, i \in K^+; k_i = -1, i \in K^-.$$

К системе (1) в начальной позиции $x_0(\tau.)$ приложим управление $u^0(0|x_0(\tau))$, в силу чего она станет двигаться по траектории $x_0(\tau)$, $\tau \geq \tau.$

Обозначим через $T^+(\tau.)$ малую правостороннюю окрестность точки $\tau.$.

Для $\tau \in T^+(\tau.)$ структура $S(\tau)$ совпадает с $S(\tau.)$, значения

$$t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; v.; \rho_e(x_0(\tau)), \quad (8)$$

соответствующие позиции $\{\tau, x_0(\tau)\}$, удовлетворяют определяющим уравнениям:

$$\begin{cases} f(t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; x_0(\tau); \rho_e(x_0(\tau))) = 0; \\ q_i(t_i(\tau); v.) = 0, i = \overline{1, p.}; \\ \bar{q}(v.) = 0; \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f(t_i, i = \overline{1, p.}; \kappa; \rho) &= \sum_{l=1}^p \int_{t_l}^{t_l+1} H_{оп}(t) k_l dt + \\ &+ \int_0^{t_1} H_{оп}(t) k_0 dt + F_{оп}(\theta, 0) \kappa + \rho \begin{bmatrix} e(I_{оп}) \\ -e(I_{оп}^*) \end{bmatrix}, t_{p+1} = \theta; \\ q_i(t_i; v) &= v' F(\theta, t_i) b, i = \overline{1, p.}; \bar{q}(v) = v' \begin{bmatrix} e(I_{оп}) \\ -e(I_{оп}^*) \end{bmatrix} - 1, \\ F_{оп}(\theta, t) &= (F_{ij}(\theta, t), i \in \{I_{оп} \cup I_{оп}^*\}, j \in \{1, \dots, n\}). \end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что матрица Якоби $G(t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; v.) \Big|_{\tau=\tau.}$ не вырождена.

Здесь

$$G(t_i, i = \overline{1, p.}; v) = \begin{bmatrix} B1 & B3 & 0 \\ B2 & 0 & B4 \\ 0 & 0 & B5 \end{bmatrix};$$

$$B1 = 2H_{оп}(t_i)k_{i+1}, i = \overline{1, p.};$$

$$B2 = \text{diag}(-v' F(\theta, t_i) A b), i = \overline{1, p.};$$

$$B3 = (e'(I_{оп}), -e'(I_{оп}^*))';$$

$$B4 = H'_{оп}(t_i), i = \overline{1, p.};$$

$$B5 = (e'(I_{оп}), -e'(I_{оп}^*)).$$

Значит, при $\tau \in T^+(\tau.)$ существует единственное непрерывное решение (8) уравнений (9).

Поведение $t_i(\tau)$, $i = \overline{1, p(\tau)}$; v_z ; $\rho_s(x_0(\tau))$ описывается уравнениями (9) на промежутке $[\tau; \tau]$, где τ — наименьший момент, при котором $S(\tau) \neq S(\tau)$.

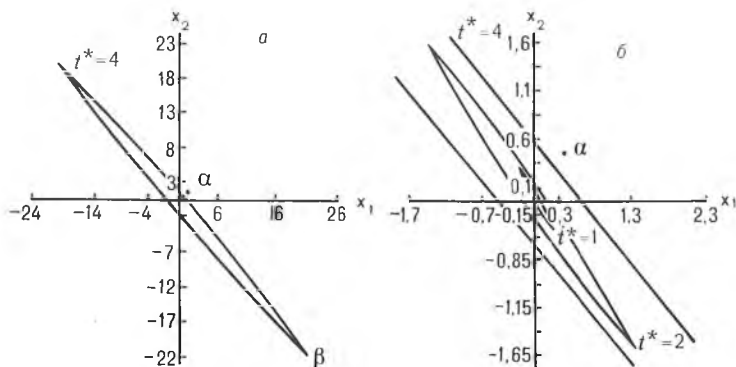


Рис. 1

Определяющие уравнения (9) можно решить в режиме реального времени при помощи метода Ньютона [6]. По результатам решения в том же темпе, согласно формулам (3), (4), строится текущее значение стабилизирующего управления типа обратной связи. Правила изменения структуры описаны в [6].

Проиллюстрируем изложенный метод на задаче стабилизации математического маятника относительно верхнего неустойчивого положения равновесия с помощью инерционного момента, приложенного к нему на оси подвеса.

Составим уравнение первого приближения:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = u.$$

В терминах задачи (2) имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что всегда $x_3(0) = 0$.

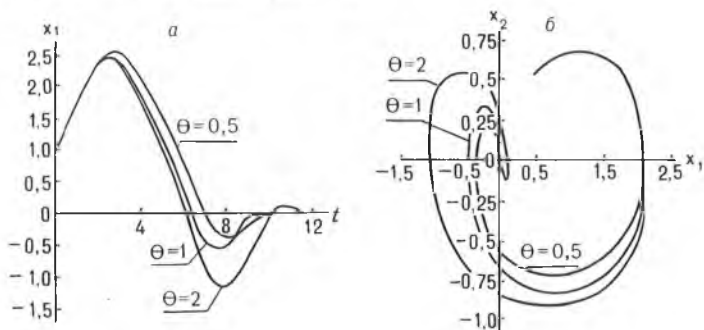


Рис. 2

С целью выяснения возможностей стабилизирующей обратной связи (4) построим проекцию множеств управляемости $C(t^*)$ системы (1) на плоскость (x_1, x_2) для нескольких значений времени t^* (рис. 1, а, б). С помощью обратной связи (4) были стабилизированы траектории системы (1), стартующие из точек $\alpha(0.45; 0.45; 0)$ и $\beta(20.036; -20.78; 0)$ (рис. 1, а, б). На рис. 2, а изображено поведение первой компоненты $x_1(t)$, $t \geq 0$, траектории системы, стартующей из точки α , для трех значений параметра θ , ($\theta = 0.5; 1; 2$).

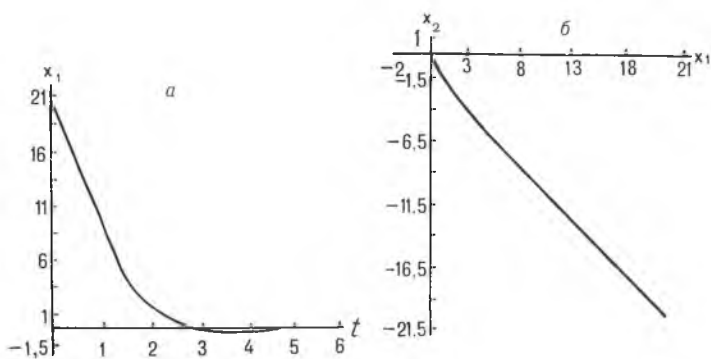


Рис. 3

На рис. 2,б изображены соответствующие фазовые траектории системы. Результаты для траектории, выходящей из точки β и стабилизируемой обратной связью (4) при $\theta = 1$, изображены на рис. 3,а и 3,б.

1. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., 1956.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
4. Лето А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. Вып. 4.
5. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. М., 1961. Т. 1.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. АН РФ. Техническая кибернетика. 1992. № 4.

Поступила в редакцию 16.09.94.

УДК 519.2

Д. В. РУСАК

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛОЖНОЙ «РАЗЛАДКИ» ПО КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЕ В МНОГОМЕРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

The problem of detection complex change moment in the covariance matrix for multivariate gaussian sequence with unknown mean vector is investigated. The decision rule for statistical detection of a change in the covariance matrix was constructed by means of generalized likelihood ratio statistic asymptotic expansion.

При решении задач статистического регулирования технологических процессов, описываемых независимой последовательностью многомерных гауссовских наблюдений, обычно предполагается, что «разладка» происходит в векторе математического ожидания [1, 2]. Однако подобно тому, как при анализе последовательности одномерных гауссовских наблюдений возникает необходимость контролировать дисперсию (контрольной картой среднеквадратических отклонений), в многомерном случае становится актуальной задача обнаружения «разладки» по ковариационной матрице. Исследование в этом направлении проводилось [см. 3]. На основе методов многомерного статистического анализа для двух простейших моделей «разладок» (скачкообразного и пропорционального изменения ковариационной матрицы) был разработан контролирующий алгоритм кумулятивных сумм [3]. В случае же произвольных изменений ковариационной матрицы, или так называемой сложной «разладки», задача до сих пор не имела решения.

Пусть в момент времени $t \in \{1, 2, \dots\}$ наблюдается случайная N -мерная выборка объема n_t

$$X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n_t}^{(t)}\} \in \mathbb{R}^N$$

из некоторого невырожденного гауссовского распределения с N -мерной плотностью

$$p_N (x | \mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) =$$

$$= (2\pi)^{-N/2} |\Sigma^{(t)}|^{-1/2} \exp \left\{ - (x - \mu^{(t)})^T (\Sigma^{(t)})^{-1} (x - \mu^{(t)}) / 2 \right\}.$$

Наблюдаемая последовательность независимых случайных выборок $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ характеризуется последовательностью неизвестных векторов математического ожидания $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots \in R^N$ и последовательностью ковариационных $(N \times N)$ -матриц $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$. Ковариационная матрица $\Sigma^{(t)}$ в некоторый неизвестный момент времени $t = t^0$ претерпевает сложную «разладку»:

$$(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \begin{cases} \Omega_0, & t = 1, 2, \dots, t^0, \\ \Omega_1, & t = t^0 + 1, t^0 + 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Omega_0 = \{ \mu \in R^N, \Sigma > 0 : \|\Sigma^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+ \} \text{ и}$$

$$\Omega_1 = \{ \mu \in R^N, \Sigma > 0 : \|\Sigma^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+ \} -$$

области значений параметров до и после «разладки» соответственно; $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ — параметрическое пространство; $\Sigma > 0$ — символ положительной определенности матрицы; Σ_0 — некоторое заданное «номинальное значение» ковариационной матрицы; $\delta_+ > 0$ — максимально допустимый уровень отклонения обратной ковариационной матрицы (матрицы точности) Σ^{-1} от «номинального значения» Σ_0^{-1} по евклидовой матричной норме $\|\cdot\|$.

Определим в соответствии с моделью (1) сложные параметрические гипотезы $H_{0t}: (\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \Omega_0$, $H_{1t}: (\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \Omega_1$. Тогда задача обнаружения момента «разладки» по ковариационной матрице состоит в построении решающего правила (РП) последовательной проверки статистических гипотез H_{0t} , H_{1t} для моментов времени $t = 1, 2, \dots$.

Определим в момент времени $t \in \{1, 2, \dots\}$ статистику логарифма отношения правдоподобия:

$$\mu_t = \ln \frac{(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})_{\sup} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})}{(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})_{\inf} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})}, \lambda_t \in]-\infty, 0], \quad (2)$$

где $L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})$ — функция правдоподобия, полученная по случайной выборке $X^{(t)}$. Примем обозначения: $O_{N \times N}$ — $(N \times N)$ -матрица, все элементы которой равны нулю; $1_{N \times N}$ — $(N \times N)$ -матрица, все элементы которой равны единице; 1 — единичная $(N \times N)$ -матрица; $\bar{\mu}^{(t)} = 1/n_t \sum_{j=1}^{n_t} x_j^{(t)}$ — оценка максимального правдоподобия (ОМП) математического ожидания $\mu^{(t)}$;

$$\hat{\Sigma}^{(t)} = 1/n_t \sum_{j=1}^{n_t} (x_j^{(t)} - \bar{\mu}^{(t)}) (x_j^{(t)} - \bar{\mu}^{(t)})^T -$$

— ОМП ковариационной матрицы.

Лемма. Если B — произвольная $(N \times N)$ -матрица, то при $\delta \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\ln |1 + \delta B| = \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2).$$

Доказательство леммы основано на выделении из определителя $|1 + \delta B|$ членов порядка малости $O(\delta)$:

$$|1 + \delta B| = 1 + \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2).$$

и дальнейшем использовании формулы Тейлора для функции

$$\ln(1 + \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2)).$$

Теорема 1. Если наблюдается N -мерная случайная выборка $X^{(t)}$

объема n_t из $N_N(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})$, $|\Sigma^{(t)}| \neq 0$ и $|\Sigma_0| \neq 0$, то статистика логарифма отношения правдоподобия λ_t для проверки гипотез H_{0t} , H_{1t} допускает асимптотическое представление:

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, & \|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+, \\ (n_t/2)\beta_t, & \|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \end{cases}$$

где

$$\beta_t = \ln |\Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)}| + \text{tr} \left((1 - \Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)}) \right) + \delta_+ \|\hat{\Sigma}^{(t)} - \Sigma_0\| + O(\delta_+^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо решить две экстремальные задачи, возникающие в числителе и знаменателе (2). Решение задачи на безусловный максимум в знаменателе известно из многомерного статистического анализа [4]:

$$\left(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)} \right)_{\max} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) = (2\pi e)^{-n_t N/2} |\hat{\Sigma}^{(t)}|^{-n_t/2}. \quad (4)$$

При решении экстремальной задачи в числителе (2) возникает две ситуации. Если точка глобального максимума $\Sigma^{(t)}$ функции правдоподобия удовлетворяет условию $\|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+$, то значение максимума в числителе (2) совпадает с (4). В случае, когда $\|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+$, имеем задачу на условный максимум, которую с использованием логарифмической функции правдоподобия [4] можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & l_0 \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \mu^{(t)} \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) - \\ & - \left(\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)} \right)^T (\Sigma^{(t)})^{-1} (\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)}) \rightarrow \max_{\mu^{(t)} \in R^N, \|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку матрица $(\Sigma^{(t)})^{-1}$ неотрицательно определена, то $(\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)})^T \times (\Sigma^{(t)})^{-1} (\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)}) \geq 0$ и поэтому максимальное значение целевой функции в (5) достигается при $\mu^{(t)} = \hat{\mu}^{(t)}$. Подставляя это оптимальное значение в (5), получаем

$$\begin{aligned} & l_0 \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \mu^{(t)} \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \max_{\|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решим задачу (6) с использованием метода множителей Лагранжа. Функция Лагранжа равна

$$\begin{aligned} & L \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \lambda \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) + \\ & + \lambda \left(\|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| - \delta \right), \end{aligned}$$

где λ — множитель Лагранжа. Дифференцируя эту функцию по λ и по элементам $\bar{\sigma}_{ij}^{(t)}$ матрицы $(\Sigma^{(t)})^{-1}$, имеем для нахождения стационарных точек систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \Sigma^{(1)} - \hat{\Sigma}^{(1)} + \frac{2\lambda}{n_1\delta} \left((\Sigma^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \right) = O_{N \times N}, \\ \| (\Sigma^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \| = \delta. \end{cases} \quad (7)$$

Ввиду нелинейности системы (7) по $(\Sigma^{(0)})^{-1}$ будем отыскивать решение, применяя метод последовательных приближений [6]:

$$(\Sigma^{(1)})^{-1} = \Sigma_0^{-1} + \delta Z + O(\delta^2) 1_{N \times N}, \quad (8)$$

где Z — неизвестный матричный коэффициент. С учетом невырожденности матрицы Σ_0 и асимптотического разложения обратной матрицы [5] получаем для $\Sigma^{(0)}$ представление

$$\Sigma^{(1)} = (\Sigma_0^{-1} + \delta Z)^{-1} = (1 + \delta \Sigma_0 Z)^{-1} \Sigma_0 = \Sigma_0 - \delta \Sigma_0 Z \Sigma_0 + O(\delta^2) 1_{N \times N}. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), имеем в результате с точностью до $O(\delta)$

$$\lambda = + \frac{n_1}{2} \| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|, \quad Z = + \frac{1}{\| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|} (\hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0),$$

и тогда

$$(\Sigma^{(1)})^{-1} = \Sigma_0^{-1} + \frac{\delta}{\| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|} (\hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0) + O(\delta^2) 1_{N \times N} \quad (10)$$

Из непосредственного анализа знака квадратичной формы матрицы вторых производных функции Лагранжа по элементам $\sigma_{ij}^{(1)}$ обратной матрицы $(\Sigma^{(0)})^{-1}$ следует, что максимум в (6) достигается при выборе знака «-» в разложении (10). Подставляя (10) в целевую функцию (6) и осуществляя преобразование с учетом утверждения леммы и свойств следа матрицы, получаем

$$\begin{aligned} l_0 \left((\Sigma^{(1)})^{-1}, \mu^{(1)} \right) = \\ = n_1/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |\Sigma_0^{-1}| - \text{tr} \left(\Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(1)} \right) + \delta \| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \| \right) + \\ + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Производя теперь максимизацию по $\delta \in [0, \delta_+]$ согласно (6) и учитывая (4), приходим к (3).

С целью построения РП для проверки H_{0t} , H_{1t} найдем асимптотические распределения основных статистик β_t и $\gamma_t = \| (\hat{\Sigma}^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \|^2$ в (3).

Пусть $u(1), u(2), \dots, u(m_t), \dots \in \mathbb{R}^p$ — последовательность случайных p -векторов ($p = (N+1)N/2$, $m_t = n_t - 1$):

$$u(m_t) = \text{vec}(U(m_t)),$$

где $U(m_t) = \frac{n_t}{m_t} \hat{\Sigma}^{(1)}$, $\text{vec}(U(m_t)) = (u_{ij}(m_t))$, $i, j = \overline{1, n_t}$, $i \geq j$ — векторное представление симметричной $(N \cdot N)$ -матрицы $U(m_t)$. Обозначим: $V(m_t) = \sqrt{m_t} (U(m_t) - \Sigma^{(1)})$; $v(m_t) = \text{vec}(V(m_t))$; $b^{(0)} = \text{vec}(\Sigma^{(0)})$; $b_0 = \text{vec}(\Sigma_0)$; $\bar{b}^{(0)} = \text{vec}((\Sigma^{(0)})^{-1})$; $\bar{b}_0 = \text{vec}(\Sigma_0^{-1})$; $T^{(0)}$ — ковариационную (р·р)-матрицу с элементами, определяемыми по формуле:

$$T^{(1)}_{(i,j)(k,l)} = \text{cov}(v_{ij}(m_t), v_{kl}(m_t)) = \sigma_{ik}^{(1)} \sigma_{jl}^{(1)} + \sigma_{il}^{(1)} \sigma_{jk}^{(1)}, \quad (i \leq j, k \leq l).$$

Теорема 2. Если $\hat{\Sigma}^{(0)}$ — выборочная ковариационная матрица (ВКМ), вычисленная по выборке $X^{(0)}$ объема $n_t = m_t + 1$ из $N_N(\mu^{(0)}, \hat{\Sigma}^{(0)})$, $|\Sigma^{(0)}| \neq 0$ и $\Sigma^{(0)} \neq \Sigma_0$, то при $n_t \rightarrow \infty$ и справедливой H_{0t} статистики β_t и γ_t распределены асимптотически нормально:

$$L \left\{ \frac{\sqrt{m_t} (\beta_t - a_1(\Sigma^{(1)}))}{\sigma_1(\Sigma^{(1)})} \right\} \rightarrow N_1(0, 1), \quad (11)$$

$$L \left\{ \frac{\sqrt{m_t} \left(\gamma_t - a_2 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right)}{\sigma_2 \left(\Sigma^{(t)} \right)} \right\} \rightarrow N_1 (0, 1), \quad (12)$$

$$a_1 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \ln |\Sigma_0^{-1} \Sigma^{(t)}| + \text{tr} \left(1 - \Sigma_0^{-1} \Sigma^{(t)} \right) + \delta_+ \|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\| + O \left(\delta_+^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) &= \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right) + \\ &+ \frac{2\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + \\ &+ \frac{\delta_+^2}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|^2} \left(b^{(t)} - b_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^3 \right), \end{aligned}$$

$a_2 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \left\| \left(\Sigma^{(t)} \right)^{-1} - \Sigma_0^{-1} \right\|^2$, $\sigma_2^2 \left(\Sigma^{(t)} \right)$ — асимптотическая дисперсия, для которой найдено явное выражение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ВКМ $\hat{\Sigma}^{(t)}$ является состоятельной оценкой параметра ковариационной матрицы, т. е. при $n_t \rightarrow \infty$

$$\hat{\Sigma}^{(t)} \xrightarrow{P} \Sigma^{(t)}.$$

По теореме об асимптотической нормальности ВКМ [4] имеет место также сходимость

$$L \left\{ \sqrt{m_t} \left(u \left(m_t \right) - b^{(t)} \right) \right\} \rightarrow N_p \left(0, T^{(t)} \right).$$

Из соотношения (3) видно, что статистика β_t есть функция

$$f(U) = N \ln \frac{m_t}{n_t} + \ln |\Sigma_0^{-1} U| + \text{tr} \left(1 - \frac{m_t}{n_t} \Sigma_0^{-1} U \right) + \delta_+ \left\| \frac{m_t}{n_t} U - \Sigma_0 \right\| + O \left(\delta_+^2 \right).$$

Устремляя n_t к бесконечности, получаем предельное функциональное преобразование относительно U :

$$a_1(U) = \ln |\Sigma_0^{-1} U| + \text{tr} \left(1 - \Sigma_0^{-1} U \right) + \delta_+ \|U - \Sigma_0\| + O \left(\delta_+^2 \right).$$

В силу того, что U — симметричная $(N \cdot N)$ -матрица, можно считать функцию $a_1(\cdot)$ зависимой не от всех элементов матрицы U , а только от p компонент ее векторного представления u . Выполнены все условия теоремы о функциональном преобразовании асимптотически нормальной последовательности [4]. Следовательно, при $m_t \rightarrow \infty$

$$L \left\{ \sqrt{m_t} \left(\beta_t - a_1 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right) \right\} \rightarrow N_1 \left(0, \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right). \quad (13)$$

Согласно [4], дисперсия в (13) вычисляется по формуле:

$$\sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \Phi_{b,t}^T T^{(t)} \Phi_{b,t},$$

где

$$\Phi_{b,t} = \nabla_u a_1(u) |_{u=b^{(t)}} \bar{b}^t - \bar{b}_0 + \frac{\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^2 \right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) &= \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right) + \\ &+ \frac{2\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + \\ &+ \frac{\delta_+^2}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|^2} \left(b^{(t)} - b_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^3 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Если воспользоваться разложением решающей статистики (3) с точностью до $O \left(\delta_+^3 \right)$, можно показать, что главный член в разложении дис-

персии выделен точно, а остаток $O(\delta_+^2) = 0$, Поэтому, осуществляя нормировку статистики слева в (13) на $\sigma_1(\Sigma^0)$, получаем справедливость (11). Доказательство (12) проводится аналогично.

Для построения РП, основанного на статистике (3), воспользуемся принципом Неймана — Пирсона. Введем обозначения: Z — симметричная положительно-определенная $(N \times N)$ -матрица; T^0 — $(p \times p)$ -матрица, элементы которой определяются по формуле:

$$T^0_{(i,j)(k,l)} = \sigma_{ik}^0 \sigma_{jl}^0 + \sigma_{il}^0 \sigma_{jk}^0, \quad (i \leq j, k \leq l);$$

$$f(Z) =$$

$$= \left(\text{vec}(Z) - \frac{1}{\|\Sigma_0 Z \Sigma_0\|} \text{vec}(\Sigma_0 Z \Sigma_0) \right)^T T^0 \left(\text{vec}(Z) - \frac{1}{\|\Sigma_0 Z \Sigma_0\|} \text{vec}(\Sigma_0 Z \Sigma_0) \right);$$

$\Phi^{-1}(\cdot)$ — квантиль стандартного нормального распределения; $d_i = 0$, $d_i = 1$ — решения в пользу принятия гипотез H_{0i} , H_{1i} соответственно.

Теорема 3. Пусть Z^* — решение экстремальной задачи на условный максимум

$$f(Z) \rightarrow \max_{Z, \|Z\| = 1},$$

тогда для РП проверки гипотез H_{0i} , H_{1i} :

$$d_i = d_i(X^{(i)}) = \begin{cases} 0, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+, \\ 0, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \quad (n_i/2)\beta_i \geq \Delta_i, \\ 1, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \quad (n_i/2)\beta_i < \Delta_i, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Delta_i = (-\delta_+/2) (n_i f(Z^*))^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$$

при $n_i \rightarrow \infty$ асимптотический размер не превосходит заданного уровня значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство основано на построении РП проверки гипотез H_{0i} , H_{1i} с использованием критерия обобщенного отношения правдоподобия с решающей статистикой (3), причем порог Δ_i находится из условия равенства оценки сверху размера РП заданному уровню значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

Замечание 1. В предположении независимости статистик β_i и γ_i можно построить РП (15), порог которого равен

$$\Delta_i = (-\delta_+/2) (n_i f(Z^*))^{1/2} \Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon).$$

Замечание 2. Решение экстремальной задачи, определенной в условии теоремы 3, находится с использованием численного метода Ньютона [7].

РП (15) реализовано в виде программы на языке Паскаль версии 5.0 для IBM PC/AT, исследовано методом статистического моделирования и показало достаточную эффективность.

1. Lowry C. A., Woodall W. H., Champ C. W., Rigdon S. E. // Technometrics. 1992. V. 34. P. 46.

2. Crosier R. B. // Ibid. 1988. V. 30. P. 291.

3. Филаретов Г. Ф. // Применение статистических методов в производстве и управлении: Тез. докл. междунар. конф. Пермь, 1990. С. 398.

4. Андерсон Т. // Введение в многомерный статистический анализ. М., 1964.

5. Белман Р. // Введение в теорию матриц. М., 1969. С. 296.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. // Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. С. 160.

7. Васильев Ф. П. // Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Поступила в редакцию 17.09.94.

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ С p -НИЛЬПОТЕНТНЫМ ДЕФЕКТОМ 2

A local formation X is called reducible if $X = \text{lform}(UX_i)$, where $\{X_i | i \in I\}$ is the set of all nontrivial local subformations of X . In this paper we obtain the exact description of unreducible local formations of finitesoluble groups X which have p -nilpotent defect 2.

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Буквами X , Ψ , и Θ обозначаются некоторые непустые формации групп; Δ_p — формация всех p -групп; $\Sigma_{p'}$ — формация всех p' -групп. Остальные определения и обозначения можно найти в [1, 2]. Напомним [3] определение Ψ -дефекта локальной формации. Пусть X — некоторая локальная формация, Ψ — непустой класс групп. Если $X \subseteq \Psi$, то Ψ -дефект формации X равен 0. Ψ -дефект формации X равен n (n — натуральное число), если $X \not\subseteq \Psi$, в X имеется максимальная локальная подформация Ψ -дефекта $n-1$ и среди других максимальных локальных подформаций формации X (если таковые имеются) нет ни одной с Ψ -дефектом меньшим, чем $n-1$. В [3] были описаны локальные формации с нильпотентным дефектом 2. В дальнейшем в классе разрешимых групп были описаны [4] локальные формации с p -разложимым дефектом 2.

Целью данной работы является получение классификации неприводимых локальных формаций с p -нильпотентным дефектом 2 в классе разрешимых групп.

Пусть X — некоторая локальная формация, Ψ — некоторая локальная подформация формации X . Если найдется такая максимальная локальная подформация Θ формации X , что Ψ — максимальная локальная подформация формации Θ , то будем говорить, что Ψ — 2-максимальная локальная подформация формации X .

Теорема. Пусть, X — разрешимая локальная формация. Тогда и только тогда X — неприводимая формация с p -нильпотентным дефектом 2, когда $X = \text{lform } G$, где $G = R\lambda N$ — такая монолитическая группа с монолитом $R = C_G(R)$, что R — v -группа для некоторого простого числа r , а N — такая монолитическая группа с монолитом Q , что выполняется одно из следующих условий:

1) $r = p$, $|\pi(X)| = 2$, $Q \subseteq \Phi(N)$, группа N p -нильпотентна и либо $\text{lform } N$ — 2-максимальная локальная подформация формации X , либо N — одна из следующих групп:

а) простая абелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq p$; б) циклическая примарная группа порядка q^2 , $q \neq p$;

2) $r \neq p$, $N = Q\lambda S$, где $Q = C_N(Q)$ — p -группа, а $S = T\lambda P$, где T — минимальная нормальная, t — подгруппа группы S для некоторого простого числа $t \neq p$, а P — элементарная абелева p -подгруппа группы S .

Доказательство. Пусть Ψ — некоторая минимальная локальная не p -нильпотентная формация. Как известно, формация всех p -нильпотентных групп совпадает в точности с произведением $\Sigma_p \Delta_p$. Пусть l — максимальный внутренний локальный экран формации $\Sigma_p \Delta_p \vee \Psi$. Согласно 18.16 из [2], $\Psi = \text{lform } M$, где $M = R\lambda N$ — такая монолитическая группа с монолитом $P = C_M(P)$, что P — p -группа, а $N = Q\lambda S$ — такая монолитическая группа с монолитом $Q = C_N(Q) = O_1(N)$, $t \neq p$, что $\Phi(N) = 1$ и S — p -группа. Используя теорему 8.3, следствие 8.6 и лемму 9.15 из [2], легко убедиться, что $l(q) = \Sigma_p \Delta_p$, если $q \nmid \pi(M)$; $l(q) = \Delta_p \text{form}(\{Q\lambda S\} \cup \Delta_p)$, если $q = p$ и $l(q) = \Delta_p \text{form}(\{S\} \cup \Sigma_p \Delta_p)$, если $q = t$.

Необходимость. Пусть Θ — максимальная локальная подформация формации X . Ясно, что Θ является единственной максимальной локальной подформацией формации X . Значит, p -нильпотентный дефект формации Θ равен 1. Поэтому, согласно теореме 1 [5], $\Theta = \Theta_1 \vee \Psi$, где Θ_1 — некоторая локальная p -нильпотентная формация, а Ψ — минимальная локальная не p -нильпотентная формация. Поскольку $\Theta \subseteq \Sigma_p \Delta_p \vee \Psi$, то X — минимальная локальная не $\Sigma_p \Delta_p \vee \Psi$ -формация. Пусть $\bar{l}$ — минимальный локальный экран формации X . Согласно следствию 18.5 из [2],

$X = \text{lform } K$, где K — такая монолитическая группа с монолитом L , что $L = K^{\Sigma_p \Delta_p \Psi}$ и $f(q)$ — минимальная не $l(q)$ -формация для любого $q \in \pi(L)$. Ясно, что $L \in \Phi(K)$. Это, в частности, означает, что найдется такая максимальная подгруппа D группы K , что $K = L\Delta D$. Значит, $C_K(L) = L$. Кроме того, очевидно, что L — q -группа для некоторого простого числа q .

Предположим, что группа K является p -замкнутой. Тогда формация Θ_1 p -разложима. Поскольку группа M p -замкнута, то $P\Delta S$ является нормальной подгруппой группы M . Такое возможно, лишь когда $S = 1$. Значит, $M = P\Delta Q$. Теперь нетрудно убедиться, что M — группа Шмидта, а поскольку для любой группы B $\text{lform } B = \text{lform}(B/\Phi(B))$, то группу M можно считать группой Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, т. е. $M = P\Delta Q$, где $P = C_M(P) = O_p(M)$, а $|Q| = t$ для некоторого простого числа $t \neq p$. Значит, согласно пункту 18.20 из [2], Ψ — минимальная локальная не p -разложимая формация. Поэтому, ввиду леммы 4 [4], формация Θ является разрешимой локальной формацией с p -разложимым дефектом 1. Значит, X — неприводимая локальная формация с p -разложимым дефектом 2. Поэтому, согласно теореме 2 [4], $X = \text{lform } G$, где $G = R\Delta H_1$ — монолитическая pd -группа с монолитом $R = C_G(R)$ и выполняется одно из следующих условий:

1) H_1 — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, причем, если p делит $|H_1|$ и не делит $|R|$, то в H_1 инвариантна силовская p -подгруппа;

2) H_1 — циклическая примарная группа порядка q^2 ;

3) H_1 — группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q ;

Пусть группа H_1 удовлетворяет условию 1. Тогда H_1 — p -замкнутая группа. Но это противоречит лемме 3.9 [1]. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен. В случаях, когда группа H_1 удовлетворяет условию 2 или 3, нетрудно убедиться, что формация X удовлетворяет условию.

Пусть теперь группа K не p -замкнута. Пусть $K \notin \Delta_p \Sigma_p \Delta_p$. Поскольку $M \in \Delta_p \Sigma_p \Delta_p$, то X — минимальная локальная не $\Delta_p \Sigma_p \Delta_p$ -формация. Согласно следствию 18.12 [2], $X = \text{lform } G$, где $G = R\Delta H_1$ — монолитическая группа с монолитом $R = C_G(R)$, R — q -группа для некоторого простого числа $q \neq p$, а $H_1 = Q_1\Delta S_1$ — монолитическая группа с монолитом $Q_1 = C_{H_1}(Q_1)$, Q_1 — p -группа, а группа S_1 p -нильпотентна. Применяя лемму 18.7 [2], видим, что формация X имеет единственную максимальную локальную подформацию X_1 , обладающую таким внутренним локальным экраном x , что $x(p) = \text{form } S_1$.

Ввиду леммы 5.13 [1], $\text{form } S_1 \subseteq \Delta_p \text{form}(\{Q\Delta S\} \cup \Delta_p)$. Значит, S_1 — $\{p, t\}$ -группа. Используя теорему 8.3 [2], легко показать, что $f(q) = \text{form } H_1$, если $q = r$; $f(q) = \text{form } S_1$, если $q = p$; $f(q) = \text{form}(S_1/F_t(S_1))$, если $q = t$; $f(q) = \Phi$ для всех остальных простых q . Пусть m, m_1 и h — минимальные локальные экраны формаций Θ, Θ_1 и Ψ соответственно. Снова используя теорему 8.3 [2], легко убеждаемся, что $m(q) = \text{form}(Q\Delta S)$, если $q = p$; $m(q) \subseteq \Sigma_p \Delta_p$, если $q = r$; $m(q) \subseteq \Sigma_p \Delta_p$, если $q = t$; $\emptyset$ для всех остальных простых q . Ясно, что $\pi(X) = \{p, t, r\}$. Предположим, что $r = t$. Тогда, применяя лемму 21.2 [2], видим, что $m(p) = \text{form } S_1 = f(p) = \text{form}(Q\Delta S)$. Предположим, что $r \neq t$. Снова применяя лемму 21.2 [2], получим, что $\text{form } S_1 = \text{form}(Q\Delta S)$. Значит, ввиду теоремы 2.2 [1], $S_1 = Q_2\Delta S_2$, где Q_2 — минимальная нормальная t -подгруппа группы S_1 , а S_2 — элементарная абелева p -подгруппа группы S_1 . Итак, в рассматриваемом случае, формация X удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь $K \in \Delta_p \Sigma_p \Delta_p$. Тогда L — p -группа. Предположим, что $K \notin \Sigma_p \Delta_p \Psi$. Тогда X — минимальная локальная не $\Sigma_p \Delta_p \Psi$ -формация. Согласно следствию 18.11 [2], $X = \text{lform } G$, где $G = R\Delta H_1$ — такая монолитическая группа с монолитом $R = C_G(R) = O_p(G)$, что $(|R|, |H_1|) = 1$. Тогда $m(p) = \text{form}(Q\Delta S) \subseteq f(p) = \text{form } H_1$. Но $p \in \pi(Q\Delta S)$. Данное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен.

Пусть теперь $K \in \Sigma_p \Delta_p \Psi$. Тогда $K \in \Delta_p \Psi$. Поскольку $\pi(\Psi) = \{p, t\}$, то $|\pi(X)| = 2$. Согласно следствию 7.13 [2], формация $\Delta_p \Psi$ имеет такой внутренний локальный экран s , что $s(p) = \Psi$ и $s(t) = \text{form } S$. Поскольку $m_1(t) \subseteq s(t)$, то $\Theta_1 \subseteq \Psi$. Поэтому Ψ — единственная максимальная локаль-

ная подформация формации X . Согласно лемме 18.7 [2], формация Ψ обладает единственной максимальной локальной подформацией Ψ_1 , которая, очевидно, является p -нильпотентной. Поскольку $f(p) = \text{form } D$ и $f \leq s$, то $\text{form } D \subseteq \Psi$.

Пусть A — группа минимального порядка из $f(p) \setminus l(p)$. Тогда A монолитична. Пусть A_1 — монолит группы A . Поскольку $A/A_1 \in l(p)$, то A_1 является, очевидно, t -группой для некоторого простого числа $t \neq p$. Значит, поскольку $A \in \Delta_p \Sigma_p \Delta_p$, то группа A p -нильпотентна. Но $\text{form } A = \text{form } D$. Поэтому группа D p -нильпотентна. Следовательно, $\text{lform } D \subseteq \Psi_1$. С другой стороны, поскольку $\Psi \subseteq X$, то $h(p) = \text{form } (Q\lambda S) \subseteq f(p) = \text{form } A$. Поэтому $\text{lform } (Q\lambda S) \subseteq \Psi_1$.

Пусть h_1 и g — минимальные локальные экраны формаций Ψ_1 и $\text{lform } (Q\lambda S)$ соответственно. Используя теорему 8.3 и лемму 18.7 [2], легко установить, что $h_1 = g$. Поэтому $\text{lform } (Q\lambda S) = \text{lform } A = \Psi_1$. Это, в частности, означает, что $\text{lform } A$ — 2-максимальная локальная подформация формации X . Согласно лемме 18.8 [2], существует точный неприводимый $GF(p)[A]$ -модуль R . Пусть $G = R\lambda A$. Поскольку $R = O_p(G) = F_p(G)$, то, применяя лемму 4.5 [1] и лемму 8.2 [2], получим, что $G \in X$ и $G \notin \Sigma_p \Delta_p \vee \Psi$. Это означает, что $X = \text{lform } G$.

Пусть d — минимальный локальный экран формации $\text{lform } A$. Тогда ясно, что $g(t) = \text{form } S = d(t) = \text{form } (A/F_i(A))$. Предположим, что $A_1 \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда найдется такая максимальная подгруппа E группы A , что $A = A_1 \lambda E$. Это, в частности, означает, что $C_A(A_1) = A_1$. Но $F_i(A) \subseteq C_A(A_1)$ и, как уже установлено, $A/F_i(A)$ — p -группа. Значит, E — p -группа. Поэтому X — минимальная локальная не p -нильпотентная формация. Полученное противоречие показывает, что $A_1 \subseteq \Phi(A)$. Следовательно, в рассматриваемом случае формация X удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть группа H удовлетворяет условию 1, причем $\text{lform } H$ — 2-максимальная локальная подформация формации X . Поскольку монолит R группы G является p -группой, то p -нильпотентный дефект формации X не может быть равен 0. Предположим, что формация X имеет p -нильпотентный дефект 1. Тогда, согласно теореме 1 [5], $X = \Theta \vee_1 \Psi$, где Θ — некоторая локальная p -нильпотентная формация, а Ψ — минимальная локальная не p -нильпотентная. Согласно теореме 18.16 [2], $\Psi = \text{lform } M$, где $M = R\lambda T$ — такая монолитическая группа с монолитом $P = C_M(P)$, что P — p -группа, а $T = Q_1 \lambda S$ — такая монолитическая группа с монолитом $Q_1 = C_T(Q_1)$, что Q_1 — t -группа для некоторого простого числа $t \neq p$, а S — p -группа.

Пусть f, h, m — минимальные локальные экраны формаций X, Ψ, Θ соответственно. Тогда $f = h \vee m$. Ясно, что $F_p(G) = R$. Поэтому $f(p) = \text{form } H$. С другой стороны, $f(p) = \text{form } (Q_1 \lambda S)$. Поэтому $\text{form } H = \text{form } (Q_1 \lambda S)$. Применяя теорему 3.37 [2], видим, что $H \approx Q\lambda S$. Но это противоречит тому, что $Q \subseteq \Phi(H)$. Следовательно, p -нильпотентный дефект формации X не может быть равен 1. Предположим, что p -нильпотентный дефект формации X равен 2 и формация X приводима. Тогда, согласно теореме 2 [5], формация X удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $X = \Psi_1 \vee_1 \Psi_2 \vee_1 \Theta$, где Ψ_1 и Ψ_2 — различные минимальные локальные не p -нильпотентные формации, а Θ — некоторая локальная p -нильпотентная формация;

2) $X = \Psi \vee_1 \Theta$, где Ψ — некоторая локальная неприводимая формация с p -нильпотентным дефектом 2, а Θ — некоторая локальная p -нильпотентная формация.

Пусть формация X удовлетворяет условию 1. Снова применяя теорему 3.37 [2], приходим к противоречию с тем, что $Q \subseteq \Phi(H)$. Следовательно, формация X удовлетворяет условию 2. Пусть f, h и m — минимальные локальные экраны формаций X, Ψ и Θ соответственно. Тогда $f(p) = h(p)$ и $f(t) = h(t) \cup m(t)$. Применяя теперь для формации Ψ результаты, полученные при доказательстве необходимости настоящей теоремы, заключаем, что формация X неприводима. Кроме того, ясно, что p -нильпотентный дефект формации X не больше 2.

Случаи, когда формация X удовлетворяет остальным условиям теоремы, аналогичны. Теорема доказана.

1. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
2. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
3. С к и б а А. Н., Т а р г о н с к и й Е. А. // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 4. С. 490.
4. С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 4. С. 63.
5. А н и с ь к о в В. В. Общие свойства локальных функций с заданным X-дефектом. Гомель, 1994.

Поступила в редакцию 19.10.94.

УДК 517.925

В. А. ГАЙКО

БИФУРКАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЕПАРАТРИСНЫХ ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A new approach to the studying of limit cycle bifurcations and classification of separatrix cycles of the polynomial systems is given.

Будем рассматривать динамические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \quad (1)$$

где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — полиномы действительные переменных x, y с действительными коэффициентами и степени не выше n . Такие системы могут использоваться как математические модели различных процессов в физике, химии, биологии, в теории вычислительных систем. Однако многие вопросы качественного исследования систем (1) до сих пор остаются открытыми, главный среди них — вопрос о максимальном количестве и взаимном расположении предельных циклов (16-я проблема Гильберта).

Как известно [1], основными источниками рождения предельных циклов являются особые точки типа центр или фокус (бифуркация Андронова — Хопфа) и особые (сепаратрисные) циклы системы. В отличие от локальной бифуркации Андронова — Хопфа, бифуркация рождения предельного цикла из сепаратрисного изучена недостаточно полно. Она носит глобальный характер и имеет принципиальное значение как для вопроса о предельных циклах, так и для качественного исследования системы в целом [2].

В последнее время интерес к исследованию сепаратрисных циклов значительно возрос. В работе [3], например, дается классификация сепаратрисных циклов и исследуется их цикличность, т. е. возможность рождения предельных циклов, для простейшего случая полиномиальных систем, когда $n = 2$. Аналогичная классификация для сепаратрисных циклов в смысле Дюлака [4] была проведена автором в работах [5—7]. Приведенный в этих работах подход отличается простотой и наглядностью. Кроме указанной классификации, он позволяет получить также разбиение пространства параметров системы на области, каждой из которых соответствует определенный вид сепаратрисного цикла, а также решить многие задачи качественного исследования в целом, теории бифуркаций и, главное, может быть использован для исследования более общих полиномиальных систем.

Изложим вкратце основные идеи этого подхода на примере квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \quad (2)$$

и соответствующего ей уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)}. \quad (3)$$

Применяя метод двух изоклин Н. П. Еругина [2],

опишем все случаи взаимного расположения изоклин уравнения (3) [7]. Полученные изоклинные «портреты» являются своеобразным каркасом интегральных кривых уравнения: по ним с точностью до некоторого числа предельных циклов и различения центра и фокуса можно получить все топологически различные качественные картины поведения интегральных кривых. Таким образом можно провести грубую классификацию всех полиномиальных систем.

С помощью изоклин также можно получить наиболее простые (канонические) системы и потом использовать их в самых различных целях: для изучения бифуркаций предельных циклов различных видов и различной коразмерности, решения проблемы центра — фокуса, классификации сепаратрисных циклов. В этом случае мы будем иметь дело уже с негрубыми структурами и сможем проводить более тонкие качественные исследования полиномиальных систем (1).

Для квадратичной системы (2), в частности, имеет место следующая

Теорема. Система (2) с предельными (сепаратрисными) циклами приводится к системе одного из видов:

$$\frac{dx}{dt} = -(x+1)y + \alpha Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (4)$$

$$\text{или } \frac{dx}{dt} = -y + \alpha y^2, \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $Q(x, y) = x + \lambda y + ax^2 + b(x+1)y + cy^2$.

Система (4) будет основной при изучении предельных и сепаратрисных циклов. Классификацию сепаратрисных циклов с помощью этой системы удобно проводить по числу и характеру ее особых точек в конечной части плоскости. Можно выделить такие случаи особых точек: 1) три седла и одно антиседло; 2) три антиседла и одно седло; 3) два седла и два антиседла; 4) простое седло и антиседло; 5) два простых антиседла. Это невырожденные случаи, и еще: 6) вырожденные случаи.

Положим $\alpha = b = \lambda = 0$. Получим центр в начале координат и симметрию векторного поля системы. Вопрос о сепаратрисных циклах (4) в этом случае не вызывает никаких затруднений: они ограничивают области центров на плоскости x, y . А плоскость параметров a, c , в свою очередь, разбивается на области так, что каждой из них соответствует определенный вид сепаратрисного цикла. Отталкиваясь от этих областей, в каждом из случаев 1) — 6) будем последовательно изменять оставшиеся параметры λ, b и α .

Достоинством системы (4) является то, что изменение любого из этих параметров вызывает поворот ее векторного поля [8]: при изменении α и b — на всей плоскости x, y , при изменении λ — в каждой из полуплоскостей $x < -1, x > -1$ (в противоположных направлениях). Это значительно облегчает работу по определению возможных видов сепаратрисных циклов и отысканию соответствующих областей в пространстве параметров системы (4).

Как изучаются бифуркации предельных циклов с помощью системы показано в [9], а в [10] для этих целей строится другая каноническая система и приводятся примеры систем с различным количеством предельных циклов.

1. Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Transl. of Math. Monogr. 66. AMS., Providence, 1986.

2. Еругин Н. П. // Прикл. матем. и мех. 1950. Т. 14. Вып. 5. С. 459.

3. Dumortier F., Rousarie R., Rousseau C. // J. of Differential Equat. 1994. V. 112. № 2. Р. 86

4. Дюлак Г. О предельных циклах. М., 1980. С. 16.

5. Гайко В. А. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37. № 3. С. 18.

6. Gaiko V. A. // Nonlin. Phen. in Compl. Syst. St. Petersburg, 1993. Р. 60.

7. Gaiko V. A. // Adv. in Synerg. 1994. V. 2. Р. 104.

8. Duff G. F. D. // Ann. of Math. 1953. V. 57. № 1. Р. 16.

9. Гайко В. А., Черкас Л. А. // Вопр. качеств. теории дифференц. уравнений. Новосибирск, 1988. С. 17.

10. Черкас Л. А., Гайко В. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1544.

Поступила в редакцию 21.11.94.



УДК 512:517.53

О. Б. ДОЛГОПолова

ПОСТРОЕНИЕ ДВУЛИСТНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА ДВА

In this paper all smooth unlimited covers of Riemann surface of genus 2 which have two sheets are constructed.

Рассмотрим задачу построения всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода два (кренделя), реализованной как правильный восьмиугольник с классическим отождествлением сторон.

Имеется взаимно однозначное соответствие между неразветвленными накрытиями $S_1 \rightarrow S$ римановой поверхности S и подгруппами ее фундаментальной группы $\pi(S)$. При этом π -листному накрытию отвечает подгруппа индекса n [1], [2].

Для того чтобы найти все двулистные накрытия римановой поверхности рода два, исследуем ее фундаментальную группу. Это группа с четырьмя образующими a, b, c, d и одним соотношением $[a, b] \cdot [c, d] = 1$. Опишем все ее подгруппы индекса два. Одной из таких подгрупп будет, очевидно, группа, в которую входят слова, обладающие свойством: сумма всех степеней, с которыми входит в слово символ a , четна. Представители классов смежности по этой подгруппе 1 и a . Ее индекс равен двум.

Подгруппу также образуют слова, в которых сумма всех степеней a и b четна. Например, $a^{-1}b^3c^5da^2c$. Сумма $-1+3+2=4$, следовательно, слово принадлежит этой подгруппе. Представители классов смежности по подгруппе 1 и a . Ее индекс равен двум.

Аналогично можно рассмотреть подгруппу, в которой сумма степеней a, b и c делится на два. И, наконец, подгруппу, в которой сумма всех степеней четна. Представителями классов смежности для обеих подгрупп будут 1 и a . Их индекс равен двум.

Группы, получающиеся из описанных путем переименования букв, например группа, в которой сумма степеней c и d четна, также будут являться подгруппами фундаментальной группы индекса два. Заметим, что все эти подгруппы нормальны.

Используя алгоритм, описанный в [3], т.е. рассматривая произвольное транзитивное представление F группы $\pi(S)$, находя подгруппу F , оставляющую на месте 1, и соответствующую ей подгруппу $\pi(S)$, мы приходим к выводу, что других подгрупп индекса два у фундаментальной группы кренделя нет.

Запишем образующие четырех найденных подгрупп:

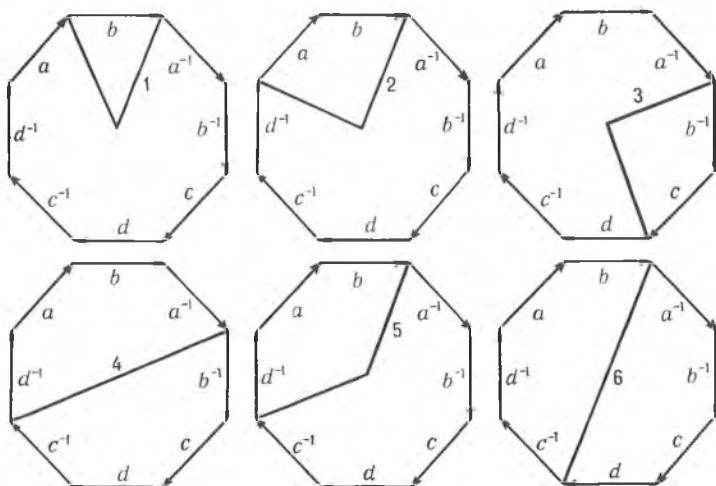
- 1) $\{b, c, d, aba, aca, ada\};$
- 2) $\{c, d, a^2, ab, aca, ada\};$
- 3) $\{d, ab, ba, ca, a^2, ac\};$
- 4) $\{ab, ba, ca, ac, da, ad\}.$

Теорема.

Все двулистные накрытия кренделя получаются путем разрезания его по неразбивающему циклу и склеивания двух таких экземпляров крест на крест.

Чтобы доказать это, нам достаточно указать такие неразбивающие

циклы, что накрытия, полученные описанным выше способом, индуцируют все указанные подгруппы фундаментальной группы. Сделаем это графически (см. рисунок).



Цикл 1 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a четна.

Цикл 2 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и b четна.

Цикл 3 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и d четна.

Цикл 4 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и c четна.

Цикл 5 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a , b и c четна.

Цикл 6 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма всех степеней четна.

Все остальные накрытия получаются из приведенных путем переименования букв.

Итак, мы описали все подгруппы индекса два фундаментальной группы кренделя и соответствующие им двулистные безграничные неразветвленные накрытия.

1. С п р и н г е р Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. С. 99.
2. Ш о к у р о в В. В. //Итоги науки и техники ВИНИТИИ: Современ. пробл. мат. фундам. направления. 1988. № 11. С. 34.
3. З е й ф е р т Г., Т р е л ь ф а л ь В. Топология. М., С. 229.

Поступила в редакцию 23.05.94.

Наши юбиляры



АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ ХАПАЛЮК

Исполнилось 70 лет со дня рождения видного ученого в области физической оптики и лазерной физики, заведующего лабораторией нелинейной оптики Научно-исследовательского института прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко, доктора физико-математических наук профессора Александра Петровича Хапалюка.

А. П. Хапалюк родился 13 марта 1925 г. в д. Великорита Малоритского района Брестской области в крестьянской семье. В годы Великой Отечественной войны сражался против фашистских захватчиков в составе партизанской бригады имени А. К. Флегонтова, I-го и II-го Белорусских фронтов. Награжден медалями «За отвагу» и «За победу над Германией».

В 1955 г. А. П. Хапалюк с отличием окончил физико-математический факультет Белорусского государственного университета. После завершения учебы в аспирантуре (1959 г.) работал младшим научным сотрудником Института физики АН БССР, ассистентом кафедры спектрального анализа БГУ, заведующим сектором проблемной лаборатории, доцентом кафедры физической оптики. В НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко при Белгосуниверситете Александр Петрович работает с момента его основания (1971 г.) в должности заведующего лабораторией нелинейной оптики.

Уже на старших курсах университета под руководством академика АН Беларуси Б. И. Степанова началась научная деятельность А. П. Хапалюка. За время обучения в аспирантуре он выполнил цикл работ по общей теории интерференционных фильтров и по результатам этих исследований в 1962 г. защитил кандидатскую диссертацию. В это же время А. П. Хапалюком было получено полное решение уравнений Максвелла для волн, распространяющихся вдоль круговых осей кристаллов и в оптически активных средах.

С начала 60-х гг. Александр Петрович работает в области лазерной физики. Им доказано существование обратного лазерного эффекта, который является основой современной внутрирезонаторной спектроскопии. Ученый внес большой вклад в теорию генерации, распространения и дифракции световых пучков. Профессором А. П. Хапалюком построена волновая теория открытых оптических резонаторов, разработаны аналитические методы представления и преобразования структуры поля световых пучков в устойчивых и неустойчивых лазерных резонаторных системах (в том числе разъюстированных, усложненных линзами, гауссовыми диафрагмами), заполненных поперечно квадратично неоднородной или продольно слабо неоднородной активной средой. Результаты исследований по этой тематике отражены А. П. Хапалюком в монографии «Пространственная структура лазерного излучения» и докторской диссертации. Им получены (обобщенные) решения уравнений Максвелла, которые используются при разработке новых методов в теории внутренних и внешних краевых задач электродинамики. Выявлены и частично изучены калейдоскопические пространственные структуры, на основе которых создается новая элементная база для оптического и оптико-электронного приборостроения.

А. П. Хапалюком опубликованы более 230 научных статей, 3 монографии, получены 33 авторских свидетельства на изобретения.

Александр Петрович проводит большую педагогическую и воспитательную работу. Его курсы лекций для студентов университета отличаются высоким педагогическим мастерством, глубиной изложения материала. Он активно участвует в работе советов университета и института по защите докторских и кандидатских диссертаций. Им подготовлено 2 доктора и 13 кандидатов наук.

За многолетнюю плодотворную научную и педагогическую деятельность А. П. Хапалюк награжден Почетными грамотами Министерства образования республики, Белгосуниверситета и НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко.

Александр Петрович — человек высокой культуры, чуткий и отзывчивый товарищ, талантливый ученый и педагог.

Друзья, коллеги и многочисленные ученики сердечно поздравляют Александра Петровича Хапалюка с семидесятилетием и желают ему крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих успехов.



ГЕННАДИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ МЕДВЕДЕВ



Исполнилось 60 лет со дня рождения заведующего кафедрой теории вероятностей и математической статистики Белгосуниверситета, доктора физико-математических наук профессора Геннадия Алексеевича Медведева.

Г. А. Медведев родился 22 февраля 1935 г. в г. Уссурийске Приморского края в семье военнослужащего.

В 1957 г. окончил радиофизический факультет Томского госуниверситета. В 1961 г. защитил кандидатскую, а в 1967 г. докторскую диссертацию. Через год ему было присвоено звание профессора. Он является основателем факультета и кафедры прикладной математики Томского университета.

С 1974 г. Геннадий Алексеевич работает в Белорусском государственном университете, где им была открыта первая в Белоруссии кафедра теории вероятностей и математической статистики. С его именем связано создание в Белгосуниверситете ряда новых кафедр, а также специализаций по теории вероятностей, математической статистике, программированию задач проектирования вычислительных систем и сетей, роботам и робототехническим системам, актуарной математике.

Профессором Г. А. Медведевым получены важные результаты в ряде разделов прикладной теории вероятностей, математической статистики и кибернетики. Основные из них: обнаружение, классификация и оценивание параметров радиосигналов (в том числе сигналов связи и радиолокационных), принимаемых в присутствии шумов высокого уровня; поведение радиотехнических устройств, находящихся под воздействием случайных сигналов, в том числе импульсных; поведение экстремальных систем автоматического управления, подверженных влиянию случайного дрейфа; разработка адаптивных алгоритмов управления в самонастраивающихся системах и анализ их эффективности; синтез оптимальных и асимптотически оптимальных систем автоматического управления; создание методов оценивания параметров случайных процессов и полей, описываемых регрессионными и авторегрессионными моделями и, в частности, рекуррентных оценок по зависимым наблюдениям, поступающим в темпе текущего времени; разработка методов анализа и оптимизации сетей связи и, в частности, связанных информационно-вычислительных систем с использованием искусственных спутников Земли и цифровых сетей интегрального обслуживания; развитие методов теории марковских процессов и массового обслуживания в интересах исследования систем и сетей связи, в том числе локальных информационно-вычислительных сетей.

В списке научных работ Г. А. Медведева более 180 публикаций, среди которых монографии «Вероятностные методы исследования экстремальных систем», «Теория и применение методов случайного поиска», «Справочник по теории автоматического управления», учебные пособия для вузов — лабораторные практикумы на ЭВМ по временным рядам и теории массового обслуживания.

Большое внимание Геннадий Алексеевич уделяет практическому применению полученных научных результатов. Под его руководством и при его активном участии выполнен ряд хозяйственных научно-исследовательских работ, в том числе более 20 по важнейшей тематике.

Г. А. Медведев является руководителем научно-исследовательской лаборатории вероятностного анализа. Под его руководством коллектив белорусских специалистов в области теории массового обслуживания стал одним из лидеров в области развития этой теории в странах СНГ. Геннадий Алексеевич является бессменным организатором Белорусских зимних школ-семинаров по теории массового обслуживания, которые в настоящее время являются одним из самых представительных форумов специалистов в этой области.

Геннадий Алексеевич — прекрасный педагог. Он умеет пробуждать интерес студентов к научным исследованиям. Им подготовлено более 40 кандидатов наук, 9 из которых в настоящее время являются докторами наук. Ученики Г. А. Медведева работают в вузах и научных учреждениях различных городов Беларуси, России, Литвы, стран дальнего зарубежья.

Научная и педагогическая деятельность Г. А. Медведева снискали ему заслуженный авторитет среди ученых СНГ и зарубежья. Он является действительным членом Международной академии информатизации, членом-корреспондентом Петровской академии наук и искусств, членом Национальной академии Беларуси по автоматическому управлению.

Геннадий Алексеевич ведет большую общественную работу. Он является председателем комитета по прикладной математике и вычислительной технике Белорусского союза научно-инженерных обществ, председателем и членом ряда специализированных советов по присуждению ученых степеней.

Успешная научная работа и педагогическая деятельность профессора Г. А. Медведева не раз отмечалась правительственными наградами.

Коллектив преподавателей, сотрудников и студентов факультета прикладной математики и информатики, редколлегия журнала «Вестник БГУ» сердечно поздравляют Геннадия Алексеевича с юбилеем, желают крепкого здоровья, счастья, новых творческих успехов на благо Родины.

ПЕТР ДМИТРИЕВИЧ КУХАРЧИК

Исполнилось 50 лет со дня рождения первого проректора Белорусского государственного университета, заведующего кафедрой радиофизики, члена-корреспондента АН Беларуси, доктора физико-математических наук профессора Петра Дмитриевича Кухарчика.

П. Д. Кухарчик родился 22 марта 1945 г. в д. Орда Клецкого района Минской области в крестьянской семье. После окончания школы учился в Минском электротехникуме связи, в 1967 г. поступил на отделение радиофизики физического факультета Белгосуниверситета.

С 1972 г. Петр Дмитриевич работает младшим, затем старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией радиоголографии НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко. В 1977 г. он защищает кандидатскую, а в 1988 г. — докторскую диссертацию. В 1989 г. П. Д. Кухарчик избирается на должность заведующего кафедрой радиофизики Белгосуниверситета, в 1990 г. ему присваивается звание профессора. С 1990 г. Петр Дмитриевич Кухарчик является первым проректором Белорусского государственного университета, в 1994 г. его избирают членом-корреспондентом Академии наук Беларуси.

Научные интересы П. Д. Кухарчика сосредоточены в области радиооптики и голографии. Петр Дмитриевич внес существенный вклад в создание физических основ нового научного направления, связанного с разработкой и исследованиями голографических методов в радио-, инфракрасном, СВЧ и оптическом диапазонах электромагнитных волн. Им предложены и реализованы методы преобразования излучений инфракрасного и СВЧ диапазонов в оптический диапазон, выполнен ряд принципиальных работ по теоретическому и экспериментальному исследованию нетрадиционных методов формирования радиоизображений. Под его руководством разработаны методы и оптоэлектронные системы построения изображений движущихся радиоотражающих объектов и внутренней структуры неоднородных диэлектрических сред с высоким разрешением по глубине. Рассмотрены и изучены голографические схемы с частично заполненной апертурой, которая обеспечивает высокую разрешающую способность и низкий уровень шума, а также методы повышения чувствительности сред для регистрации инфракрасного излучения.

Последние исследования ученого посвящены решению проблем восстановления изображений в радиоголографии, в частности разработаны новые алгоритмы для их восстановления с использованием конечных алгебраических структур. Важное народнохозяйственное значение имеют разработки методов и создание приборов для определения влажности и массы листовых диэлектрических материалов при помощи излучений инфракрасного и СВЧ диапазонов длин волн.

Результаты научно-исследовательской деятельности П. Д. Кухарчика нашли отражение в 120 научных работах, в том числе в монографии «Системы технического зрения», свидетельствах об изобретениях. Под его руководством защищены 5 кандидатских диссертаций.

Профессор П. Д. Кухарчик ведет большую научно-организационную работу, являясь членом трех специализированных советов по защите диссертаций, научного совета СНГ «Голография», председателем секции Научно-технического совета по физике Министерства образования и науки Республики Беларусь, ответственным редактором журнала «Вестник БГУ», сер. 1.

Петр Дмитриевич много времени уделяет совершенствованию учебного процесса и повышению качества подготовки специалистов. При его непосредственном участии на кафедре радиофизики разработан учебный план и начата подготовка студентов по новой специализации «Радиооптика и голография», пересмотрены с учетом современных требований учебные планы и программы по специализации «Статистическая радиофизика». Велика заслуга П. Д. Кухарчика в создании при кафедре студенческой научно-исследовательской лаборатории.

П. Д. Кухарчик активно содействует укреплению научного авторитета нашей страны за рубежом. Установленные им контакты с университетами Германии, Франции, Дании направлены на взаимовыгодный обмен научными идеями и результатами. О международном признании его научных достижений свидетельствует избрание Петра Дмитриевича президентом комитета Международного союза радионаук (URSI) в Беларуси.

П. Д. Кухарчик — человек высокой культуры, огромной энергии, широких взглядов и интересов. Он привлекает коллег своей одаренностью, оптимизмом, умением добиваться поставленной цели, неизменной доброжелательностью и готовностью оказать поддержку наряду с требовательностью и принципиальностью.

Коллективы факультетов и кафедр, сотрудники и студенты Белорусского государственного университета сердечно поздравляют Петра Дмитриевича с пятидесятилетием и желают ему доброго здоровья, счастья, дальнейших творческих успехов.



ВИКТОР МИХАЙЛОВИЧ АНИЩИК



Исполнилось 50 лет со дня рождения заведующего кафедрой физики твердого тела Белгосунiversитета доктора физико-математических наук профессора Виктора Михайловича Анищика.

В. М. Анищик родился 19 марта 1945 г. в г. п. Новоельня Дятловского района Гродненской области. После окончания в 1967 г. физического факультета Белгосунiversитета поступил в аспирантуру при кафедре физики твердого тела к профессору Н. Ф. Кунину, под руководством которого еще студентом начал исследование структуры и электрических свойств висмута. Установленные им закономерности образования текстур и изменения электрических свойств при пластической деформации этого полуметаллического кристалла составили основу кандидатской диссертации, которую Виктор Михайлович защитил в 1971 г. В 1974 г. он стажировался в США, в 1982 г. — в Англии.

В середине 70-х гг. Виктор Михайлович осваивает новое направление в физике твердого тела — ионно-лучевую модификацию кристаллов. Совместно с учениками им выполнен цикл работ по исследованию свойств ионно-имплантированных металлических пленок, а также массивных образцов переходных металлов и сплавов на их основе. Обнаруженный при этом эффект дальнего действия играет существенную роль в практических приложениях ионной имплантации для упрочнения деталей машин и механизмов. В. М. Анищиком открыты неизвестные ранее структурно-фазовые превращения при имплантации, контролирующие поведение механических свойств в ряде технически важных металлов и сплавов. Достигнутые в этом направлении научные и практические результаты вошли в докторскую диссертацию В. М. Анищика (1990 г.).

Крупный специалист в области физики взаимодействия ионных пучков с кристаллами, модификации свойств металлов и сплавов методом ионной имплантации, В. М. Анищик опубликовал свыше 130 научных работ, является соавтором учебного пособия «Структурный анализ», автором ряда методических пособий по кристаллографии, ионной имплантации и дифракционным методам исследования структуры; подготовил 9 кандидатов физико-математических наук. Им организован Межвузовский центр структурных исследований. Виктор Михайлович является научным руководителем НИЛ «Твердотельные преобразователи робототехнических систем».

С 1986 по 1991 г. В. М. Анищик — член научного совета ГКНТ при СМ СССР, в настоящее время — член экспертного совета ВАК, член советов БГУ, ИФТТП АНБ и ФТИ АНБ по присуждению ученых степеней доктора наук. В 1994 г. Виктор Михайлович избран действительным членом Петровской академии наук и искусств.

В. М. Анищик много внимания уделяет педагогической и организационной работе, укреплению материальной базы кафедры. Он разработал специальные курсы лекций по кристаллографии, структурному анализу и оптике кристаллов, взаимодействию заряженных частиц с твердым телом и ионной имплантации, организовал подготовку специалистов по новым направлениям «Физика защитных покрытий» и «Вакуумные технологии».

Педагогическая деятельность В. М. Анищика отмечена знаком «Отличник народного образования».

В. М. Анищик активно участвует в общественной жизни. Он член Совета университета, член профкома, председатель Федерации силового троеборья Беларуси.

Свой юбилей профессор В. М. Анищик встречает в расцвете сил, полный энергии и новых творческих замыслов. Преподаватели, сотрудники и студенты физического факультета, редколлегия журнала «Вестник БГУ» сердечно поздравляют Виктора Михайловича с пятидесятилетием и от всей души желают ему крепкого здоровья, счастья, дальнейших успехов.

УДК 534

Барковский Л. М., Шарапова В. В. Эволюционные операторы в акустике несовершенных кристаллов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Обсуждается проблема решения тензорного уравнения Грина — Кристоффеля для кристаллов, подвергшихся облучению или ионной имплантации. Предполагается ковариантное приближенное операторное решение с помощью функций некомутирующих тензорных аргументов аналогично формализму квантовой теории поля. Влияние несовершенств учитывается добавкой к тензору модулей упругости, которая в общем случае может быть комплексной и зависеть от частоты и длины волны. Предлагается пример построения эволюционного оператора для кристалла ниобата лития.

Библиогр. 18 назв.

УДК 621.378

Вельский А. М. Компоненты векторов поля и потоки энергии бездифракционных электромагнитных пучков // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Получены в явном виде компоненты электрического и магнитного полей бездифракционных (бесселевых) пучков любого порядка. Исследованы линии тока энергии таких пучков. Показано, что для пучков произвольного порядка линии тока представляют собой спиральные кривые, накрученные на цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси пучка.

Библиогр. 10 назв.

УДК 518.12

Мозалевский В. В., Дорошева Л. В. О выборе параметра и функции регуляризации при решении некорректной обратной задачи в оптико-электронной системе // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Описан метод, с помощью которого выбран регуляризирующий параметр и регуляризирующая функция на основе учета предельных возможностей оптической системы.

Библиогр. 8 назв.

УДК 535.37

Горбачевич С. К., Сахарук С. А. Теоретический анализ поляризации люминесценции растворов бихромовых при интенсивном возбуждении // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Проведено рассмотрение характеристик поляризации люминесценции твердых растворов бихромовых, состоящих из двух сложных органических молекул, в условиях, когда нелинейная зависимость заселенности состояния молекулы донора определяется не насыщением ее уровней, а обменом энергии электронного возбуждения с акцептором.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 535.37:530.182

Асенчик О. Д., Могильный В. В. Самомодуляция миграции энергии электронного возбуждения при насыщении // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Рассмотрен ансамбль трехуровневых неподвижных поглощающих центров с насыщающимся метастабильным состоянием, связанных безызлучательной миграцией энергии возбуждения. Возникающее при насыщении замедление скорости транспорта возбуждений не может быть объяснено лишь уменьшением доли центров, находящихся в основном состоянии. В качестве дополнительного фактора, ограничивающего миграцию, рассмотрена микроскопическая самоорганизация системы в виде увеличения доли компактных групп центров в основном состоянии. Для количественного описания эффекта предложено использовать вводимую функцию парных корреляций взаимного расположения центров.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 534.42:534.8

Кулак Г. В. Солитоны связанного состояния в планарных и волоконных оптических волноводах ниобата лития // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Рассмотрены особенности формирования медленных оптических солитонов связанного состояния при коллинеарном сонаправленном акустооптическом взаимодействии ортогонально-поляризованных мод планарного и волоконного световодов, изготовленных из кристаллов ниобата лития. Изучено влияние акустического затухания и группового запаздывания световых импульсов на особенности акустооптической дифракции.

Библиогр. 8 назв., ил. 2.

УДК 621.039

Дудчик Ю. И., Комаров Ф. Ф., Константинов Я. А. Особенности малоуглового выхода флуоресцентного рентгеновского излучения из тонкопленочных мишеней // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Приведены методика расчета и результаты экспериментальных исследований малоуглового выхода флуоресцентного рентгеновского излучения из тонкопленочных мишеней.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 669:539.374

Савенко В. С., Пинчук А. И., Понарядов В. В., Злотник В. Б. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного поля в монокристаллах висмута // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Показана роль свободной поверхности при электропластической деформации монокристаллов висмута в условиях одновременного наложения электрического и магнитного полей во взаимоперпендикулярных направлениях. Выбор двойникующегося материала в качестве объекта исследования обусловлен возможностью отследить процессы взаимодействия двойнирующих дислокаций с возбужденной электромагнитным полем свободной поверхностью при нагружении кристалла в «точке». Предложена теоретическая модель, описывающая наблюдаемые явления.

Библиогр. 16 назв., ил. 3.

УДК 537.22; 548: 539.12.04

Данилькевич М. И. Накопление и релаксация заряда в имплантированных ионами диэлектриках // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Изложены результаты исследования дозовой и временной зависимости заряда, накопленного в результате имплантации ионов бора в пленки политетрафторэтилена, полиэтилентерефталата и массивные образцы полиметилметакрилата и титаната бария. Зависимость заряда от дозы бомбардирующих ионов представляется кривыми с максимумом, а падение его во времени описывается экспонентами с несколькими временами релаксации в интервале наблюдений в течение 350 сут. Обсуждается влияние удельного электросопротивления на время жизни электретенного заряда.

Библиогр. 6 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 546.273.171

Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Лугаков Н. Ф., Рубанов А. С. Электрофизические свойства кубического нитрида бора марки «Светланит» // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Изучены электрофизические свойства кубического нитрида бора (КНБ) марки «Светланит» в зависимости от условий изотермического отжига в различных средах. Определены характерные режимы, соответствующие максимальным параметрам.

Библиогр. 8 назв., табл. 3.

УДК 621.315

Федотов А. К., Тарасик М. И., Янченко А. М. Перколяционный механизм транспорта носителей заряда в сильнолегированных поликремниевых пленках после отжига сканирующим лазерным лучем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Проведены исследования рекомбинационных свойств и особенностей транспорта носителей заряда в исходных и рекристаллизованных после отжига сканирующим лазерным лучем поликристаллических кремниевых пленках. Определены эффективные величины потенциальных барьеров на границах зерен, установлены основные механизмы транспорта носителей заряда и сформулирована качественная модель электропереноса в температурном интервале 4—300 К.

Библиогр. 15 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 519.62

Бобков В. В. Об одном способе построения методов численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Предлагается новый способ построения методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе жестких). Он основан на монотонных аппроксимациях спектральной функции оператора перехода линейного (по зависимой переменной) приближения. Допускает регулирование уровня аппроксимации в «мягкой» и «жесткой» частях спектра матрицы Якоби исходной системы.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.948.32:517.544

К о р з а н Л. А. Граничные задачи для полосы с прямолинейными разрезами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

В работе даются решения основных граничных задач плоской теории упругости, когда область, занятая телом, представляет собой полосу с прямолинейными разрезами, лежащими на вещественной оси.

Библиогр. 1 назв.

УДК 514.75

Д у ш к е в и ч О. Г. Векторные расслоения над однородным Φ -пространством линейной группы Ли // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Исследуется связь ряда свойств: регулярность, редуцируемость, наличие инвариантного оснащения Φ -пространства и специального векторного расслоения над Φ -пространством. Наличие такой связи у касательного расслоения установлено Н. А. Степановым. В случае полупрямого произведения произвольных групп Ли наследование свойств происходит лишь частично и с наложением дополнительных ограничений.

В данной статье строится специальный класс векторных расслоений над линейной группой Ли G , который включает в себя касательное расслоение и на который переносятся факты, установленные для касательного расслоения.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.24

М и р с к а я Е. И. Исследование скорости сходимости моментов сглаженных оценок спектральных плотностей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

В качестве оценки спектральной плотности рассматривается статистика $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, использующая оценку $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, полученную путем осреднения модифицированных периодограмм, построенных по пересекающимся интервалам наблюдений. Исследована скорость сходимости первых двух моментов оценки $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.977

С ы р о и д И. Ю. Экспериментальное исследование одного метода стабилизации динамических систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Приводятся полученные на ПЭВМ результаты стабилизации системы 3-го порядка с помощью обратной связи, построенной путем синтеза оптимального управления в специальной вспомогательной задаче.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 519.2

Р у с а к Д. В. Обнаружение сложной «разладки» по ковариационной матрице в многомерных гауссовских последовательностях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Рассматривается задача обнаружения момента сложной «разладки» по ковариационной матрице в многомерной гауссовской последовательности с неизвестным вектором математического ожидания. При помощи асимптотического разложения статистики обобщенного отношения правдоподобия построено решающее правило для статистического обнаружения «разладки».

Библиогр. 7 назв.

УДК 512.542

А н и с ь к о в В. В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с r -нильпотентным дефектом 2 // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Получена классификация неприводимых локальных формаций с r -нильпотентным дефектом 2 в классе разрешимых групп.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.925

Г а й к о В. А. Бифуркации предельных циклов и классификация сепаратрисных циклов двумерных полиномиальных динамических систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Дается новый подход к изучению бифуркаций предельных циклов и проведению классификации сепаратрисных циклов полиномиальных систем.

Библиогр. 10 назв.

УДК 512:517.53

Д о л г о п о л о в а О. Б. Построение двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода два // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2.

Описаны все подгруппы индекса два фундаментальной группы кренделя и соответствующие им двулистные безграничные неразветвленные накрытия.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Barkovsky L. M., Sharapaeva V. V.</i> Evolutionary operators in acoustic of imperfect crystals	3
<i>Belsky A. M.</i> Components of the field vectors and energy flows of the nondiffracting electromagnetic beams	8
<i>Mozalevsky V. V., Dorocheva L. V.</i> On the choice of regularizing parameters and functions when solving an incorrect reverse problem in a optoelectronic system . .	11
<i>Gorbatsevich S. K., Sakharuk S. A.</i> Theoretical analysis of the luminescence polarization in solutions of bichromophores upon strong excitation	13
<i>Asenchik O. D., Mogilny V. V.</i> Selfmodulation effect in the electron energy migration under saturation	16
<i>Kulak G. V.</i> Bound-state solitons in planar and fiberoptic waveguides of lithium niobate	19
<i>Dudchik Yu. I., Komarov F. F., Konstantinov Ya. A.</i> Features of the glancing angle X-ray fluorescence of thin-film targets	22
<i>Savenko V. S., Pinchuk A. I., Ponariadov V. V., Zlotnik V. B.</i> Electroplastic effect in bismuth monocrystals during simultaneously influence of electrical and magnetic fields	27
<i>Danilkevich M. I.</i> Accumulation and relaxation of a charge in ion implanted dielectrics	30
<i>Ghovor G. A., Dobryansky V. M., Leusenko A. A., Lugakov N. F., Rubanov A. S.</i> Eelectrophysical Properties of cubic nitride of boron, mk. «SVETLANIT»	33
<i>Fedotov A. K., Tarasik M. I., Yanchenko A. M.</i> Percolation mechanism of the charge-carrier transport in heavily-doped polysilicon films upon annealing by a scanning laser beam	36

MATHEMATICS, MECHANICS

<i>Bobkov V. V.</i> On some way of construction of numerical methods for stiff systems of ordinary differential equations	41
<i>Korzan L. A.</i> Boundary problems for the strip with rectilinear sections	45
<i>Dushkevich O. G.</i> Vector fiber bundles over homogeneous Φ -space of linear Lie group	48
<i>Mirskaya E. I.</i> The investigation of the moments convergence rate of the smoothed spectral densities estimates	51
<i>Syroid I. Y.</i> Experimental investigation of one stabilization method of dynamic systems	56
<i>Rusak D. V.</i> Detection of complex change in the covariance matrix for multivariate gaussian sequences	60
<i>Aniskov V. V.</i> Classification of soluble irreducible local formations which have p-nilpotent defect 2	66
<i>Gaiko V. A.</i> Bifurcations of limit cycles and classification of separatrix cycles of two-dimensional polynomial dynamical systems	69

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Dolgopolova O. B.</i> Construction of all smooth unlimited twosheeted covers of Riemann surface of genus 2	71
---	----

OUR JUBILEE

Alexander Petrovich Khapalyuk	73
Gennadi Alexeevich Medvedev	74
Petr Dmitrievich Kukharchik	75
Victor Mikhailovich Anishchik	76

С 15 по 18 ноября 1994 г. на базе Белорусского государственного университета проходило II совещание «Мышление, мозг и нейрокомпьютеры», которое было призвано объединить усилия специалистов различных областей, изучающих процессы хранения и обработки информации как в естественных, так и в искусственных информационных системах, а также стимулировать развитие новых методов и подходов к изучению этих систем.

Внимание участников совещания было сконцентрировано на следующих основных вопросах:

новые математические методы в нейродинамике и теории информационных процессов;

разработка, моделирование и исследование новых функциональных сред для систем распределенной обработки информации нейросетей;

обработка информации сетями из нейроподобных элементов.

Были также представлены доклады по смежным вопросам: нейросетевые модели социально-экономических систем, химико-биологические аспекты функционирования естественных нейронных систем, механизмы мыслительных процессов и функционирования мозга и ряд других. Исследования, результаты которых отражены в докладах, выполнялись в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Республики Беларусь «Физика информационных процессов».

Кроме белорусских, в работе совещания приняли участие ученые Украины, Литвы и Польши. Материалы совещания будут опубликованы в отдельном сборнике.

III совещание планируется провести в середине октября 1995 г. За информацией можно обращаться по адресу: 220080, Минск, пр. Ф. Скорины, 4, Белгосуниверситет, физический факультет, Крылову Г. Г.; телефон 26-57-47; E-mail: root@mfp. bsu. Minsk, by.