

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

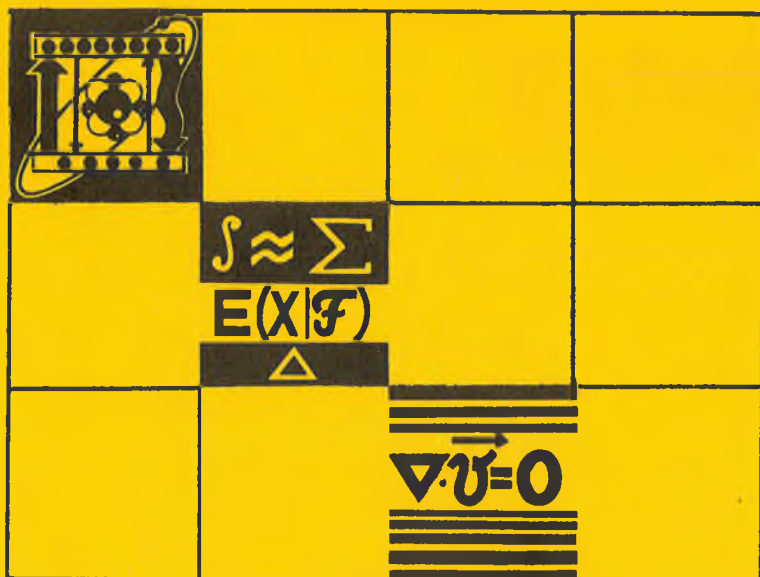
СЕРИЯ 1

Физика

Математика

Механика

1'95



СОДЕРЖАНИЕ

НАШИ ЛАУРЕАТЫ

<i>Коляк А. И., Умрейко Д. С.</i> Исследования ураниловых соединений в Белорусском государственном университете	3
---	---

ФИЗИКА

<i>Анищик В. М., Конюшко Л. И., Ярмолевич В. А., Горбачевский Д. А., Герасимова Т. Г.</i> Структура и электрофизические свойства пленок диоксида олова	6
<i>Шенелевич В. Г.</i> Дискретный преобразователь угла поворота	10
<i>Савенко В. С., Пинчук А. И., Злотник В. Б., Шаверей С. Д., Поняров В. В.</i> Механизмы влияния электромагнитных полей на деформацию металлов	12
<i>Ксеневич В. К., Доросинец В. А., Говор Л. В., Бутылина И. Б.</i> Движение вихрей в джозефсоновской среде пленок $Y_1Ba_2Cu_3O_x$	15
<i>Бондаренко В. П., Бондаренко Е. А., Дорофеев А. М., Самуйлов В. А., Троянова Г. Н.</i> Процессы самоорганизации при транспорте заряда в пористом кремнии	18
<i>Веселова Т. М., Самуйлов В. А.</i> Эффекты самоорганизации и динамического хаоса в полуизолирующем GaAs	22
<i>Мельникова Е. А., Сташкевич И. В.</i> Влияние анизотропии на просветление гофрированной границы диэлектриков	25
<i>Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Чобот Г. М.</i> Термостойкость кубического нитрида бора марки «Светланит»	28
<i>Лабуда А. А., Сидерко А. А.</i> Дефектность слоев борфосфоросиликатного стекла, осажденного при атмосферном давлении	30

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Конюх В. С.</i> Импримитивные локально нильпотентные линейные группы	35
<i>Горбузов В. Н., Павлючик П. Б.</i> О траекториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем	38
<i>Кирлица В. П.</i> Точные D- и A-оптимальные линейные планы и их устойчивость при неравноточных наблюдениях	42
<i>Жук Е. Е.</i> Робастное решающее правило L-средних в случае равномерного «засорения»	45
<i>Тимохович О. В.</i> Построение канонической матрицы одной задачи линейного сопряжения с подстановочной матрицей четвертого порядка	50
<i>Буза М. К., Певзнер Л. В.</i> Пакет программ для активизации процесса обучения <i>Ромашевский А. Б.</i> Преобразование Меллина в алгебре мнемофункции	55
<i>Жогаля С. И.</i> Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка для неавтономных квазилинейных систем с непараметрическим случайным воздействием	58
<i>Грушевская Г. В., Крылов Г. Г., Хмельницкий А. И.</i> Нелинейная динамика дифференциальных уравнений с сингулярным источником, описывающих молекулярное узнавание	62
	66

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Александр Михайлович Широков	70
--	----

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<u>Владимир Иванович Крылов</u>	73
<u>Федор Иванович Федоров</u>	74
<u>Иван Алексеевич Прусов</u>	75
<u>Илья Григорьевич Некрашевич</u>	76

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

1'95

ЯНВАРЬ



МИНСК
„УНІВЕРСІТЭЦКАЕ”

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А. М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный
секретарь), В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора),
Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО,
В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. Н. КИВАЧ,
Н. И. КОЗЛОВСКИЙ, В. И. КОРЗЮК, П. Д. КУХАРЧИК,
Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕНКО, С. Г. МУЛЯРЧИК,
В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1995. № 1

Редактор И. А. Лешкевич
Младший редактор Г. М. Добыш
Художественный редактор В. А. Ермоленко
Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Набор и верстка журнала выполнены на издательско-редакционной системе
«Союз»

Сдано в набор 02.12.94. Подписано в печать 09.01.95. Формат 70×108 1/16.
Бумага офс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,32.
Тираж 880 экз. Заказ 1264. Цена 1200 р.

Издательство «Универсітэцкае». 220048, Минск, проспект Машерова, 11. Адрес
редакции: 220080, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати».
220041, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.

© Вестник Белгосуниверситета, 1995

НАШИ ЛАУРЕАТЫ

Решением Ученого совета Белгосуниверситета от 31 октября 1994 г. лауреатами премии им. А. Н. Севченко за достижения в области естественных наук за 1994 г. стали профессора А. И. Комяк и Д. С. Умрейко.

Предлагается изложение доклада А. И. Комяка и Д. С. Умрейко на заседании совета.

УДК 535.37

А. И. КОМЯК, Д. С. УМРЕЙКО

ИССЛЕДОВАНИЯ УРАНИЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ В БЕЛОРУССКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

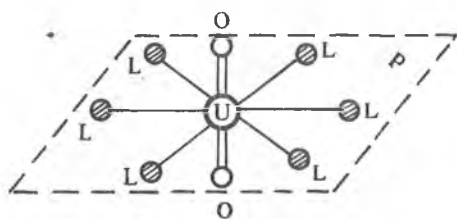
A history of the development of investigations into the electronic spectra of Uranyl compounds has been followed. The role of the Belarussian State University in investigations of the structure of electronic vibrational spectra in Uranyl compounds has been demonstrated. The results obtained in the process of these investigations have been considered as applied in chemistry and physics.

Среди большой совокупности существующих в природе и синтезируемых в лабораториях объектов шестивалентного урана заметное место занимают ураниловые соединения, обладающие, как правило, характерной и интенсивной фотолюминесценцией в желто-зеленой области спектра.

Ураниловая молекула (лучше комплекс) состоит из центральной трехатомной группировки UO_2^{2+} (см. рисунок) и окружающих ее атомов (или атомных групп). Группа UO_2^{2+} называется уранилом, откуда и пошло название самих соединений. Сам уранил представляет собой линейное образование, в перпендикулярной плоскости к которому (экваториальной P) расположены другие атомы или атомные группы (L).

Еще в прошлом веке было замечено интенсивное желто-зеленое свечение [1], так называемая люминесценция, соединений уранила под действием ультрафиолетового излучения. В начале XX в. Николс и Хаус [2], Ван-Хил и другие [3] обнаружили, что спектр люминесценции ураниловых соединений состоит из регулярно расположенных полос, которые они приписали уранилу. Таким образом, было высказано предположение, что свечение этих соединений обусловлено только ионом уранила.

В 40-х гг., когда резко возрос интерес к урану как источнику ядерной энергии, начались регулярные исследования физических, в том числе спектроскопических и химических свойств этого класса соединений. Особенно интенсивно они проводились в США в рамках так называемого Манхэттенского проекта. Результаты обобщены в монографии Дике и Дункана [4], посвященной спектроскопии ураниловых соединений. В спектрах при низких температурах (77 К) авторы [4] обнаружили большой набор узких линий, на которые расщеплялись упомянутые выше полосы, и попытались их систематизировать, считая, что основной вклад в формирование этой тонкой структуры вносит уранил. Лишь в начале 50-х гг. А. Н. Севченко и Б. И. Степанов [5, 6] на основе тщательно проведенного эксперимента и разработанной ими теории



Схематическое изображение иона уранила и его окружения. Химические связи в ионе UO_2^{2+} перпендикулярны плоскости P

выдвинули идею об участии в образовании тонкоструктурного спектра кристаллической решетки, т. е. не только иона уранила, но и всех составных частей комплекса в целом. Их точка зрения базировалась на том, что необходимо рассматривать ураниловую молекулу (комплекс) как единое целое при взаимодействии ее с возбуждающим люминесценцию квантом электромагнитной энергии. При изменении состояния электронного облака с поглощением кванта света должны изменяться колебания как иона UO_2^{2+} , так и всей молекулы в целом (а не только ее отдельных частей), а также межмолекулярные колебания. Уровни энергии уранила в этом случае будут обладать системой других колебательных подуровней, а в спектрах наряду с колебаниями UO_2^{2+} будут проявляться и колебания решетки. Такой результат явился существенным уточнением всех ранее предлагавшихся схем анализа электронных спектров ураниловых соединений.

Для экспериментального подтверждения этой гипотезы уже нами (А. Н. Севченко и его учениками в Белгосуниверситете) были поставлены обширные эксперименты на большом числе ураниловых соединений, включая и кристаллы [7], и доказана справедливость указанной идеи. Было показано, что хотя сам процесс поглощения и излучения идет через уранил (именно им определяется положение спектра), в формировании спектра участвует вся молекула (комплекс) в целом, электронная оболочка которой в значительной степени обобщена и является экраном от внешних воздействий, в результате чего электронно-колебательные переходы происходят внутри комплекса и дают структурный (квазилинейчатый) спектр, наподобие спектра редкоземельного иона.

Последующее развитие наших исследований показало, что при еще более низкой температуре (4 К) происходит дальнейшее расщепление спектральных линий на отдельные группы (так называемые мультиплеты). Одновременно Н. А. Толстым с сотрудниками [8, 9] (ГОИ, Санкт-Петербург) и нами (БГУ) такой эффект был объяснен многоцентровостью излучателей. Эта точка зрения затем была подтверждена на большом числе примеров и позволила объяснить многие, наблюдавшиеся ранее и позднее закономерности: изменение длительности свечения, характер кинетики его разгорания и затухания, безызлучательный перенос энергии возбуждения, поляризационные зависимости и др. Возможность образования многоцентровости всегда присутствует в реальных объектах: это дефекты структуры, нарушения в координационной сфере, облучение γ -квантами за счет внутренней радиоактивности ^{235}U , различные внешние воздействия, в том числе неоднородности температуры.

Исследуя дальше эту проблему, мы пришли к выводу, что вообще люминесценция происходит за счет нарушения структуры, что коррелирует с аналогичными представлениями в физике полупроводников. В результате можно сделать заключение, что при анализе тонкой структуры спектров ураниловых соединений следует принимать во внимание многие факторы: природу и структуру (строение) комплекса, энергетику и конфигурацию электронных состояний, однородное и неоднородное уширение линий, резонанс кристаллических колебаний, кристаллографическую неэквивалентность молекул и структурные дефекты, радиационно-химические повреждения и фазовые переходы в кристаллах. Все эти причины, влияющие на характер спектра, детально изучены нами и обобщены в монографии [7] и ряде публикаций в республиканских и международных научных периодических изданиях.

Изложенный выше материал касался больше фундаментальной науки. Однако из него вытекает и ряд практических приложений в химии и физике. Например, хорошая растворимость и экстрагируемость нитратных и перхлоратных соединений уранила рядом нейтральных экстрагентов обусловлена склонностью уранил-иона образовывать координационные комплексы в среде экстрагентов. Из этого следует, что растворитель не может рассматриваться как инертная среда, в которой происходят те или иные реакции. Влияние растворителя на данную молекулярную систему может основываться на разных ее свойствах.

Полученные нами данные свидетельствуют о том, что очень важное значение для комплексобразования уранила в растворах имеет относи-

тельная донорная сила растворителя. Установлена линейная корреляционная зависимость частоты чисто электронного перехода ν_{0-0} от донорного числа DN по Гутману. На основании этой зависимости и других исследований нами было установлено координационное число иона уранила в растворах (к. ч. = 5).

Использование DN и перенос этих данных на твердые соединения типа $UO_2(NO_3)_2 \cdot 2S$, где S — нейтральный лиганд, позволили установить не только аналогичную зависимость (ν_{0-0} от DN), но и зависимость структурных параметров (расстояний уран — лиганд, уран — ацидолиганд) от донорного числа нейтрального лиганда. Это позволило связать спектральные, химико-физические и структурные параметры нитратных соединений в единое целое.

Подобной связи для других соединений актинового ряда (нептунила, плутонила и др.) еще не установлено. На основании люминесцентных измерений интенсивности свечения сделана оценка определения минимальной концентрации уранил-иона в природных средах (10^{-6} — 10^{-7} мол/л). Систематика спектральной информации дала возможность подойти к решению проблемы автоматизации спектрально-структурного анализа координационных соединений (к которым относятся и ураниловые). В настоящее время разрабатывается машинная программа, с помощью которой по заданной брутто-формуле соединения и данным спектра будет определена структура комплекса и приведено графически его геометрическое строение.

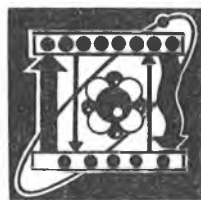
Еще один аспект — это создание метрологических средств (эталонов) для измерения сверхнизких температур (от азотных до гелиевых). Проблема эта очень важна из-за отсутствия приборов для измерения температур в этом интервале. Сейчас нами разрабатывается методика по уширению контуров спектральных линий ураниловых кристаллов.

Наконец, следует упомянуть еще об одном интересном проекте, находящемся в настоящее время в МАГАТЭ на экспертизе. Речь идет об экологически чистом, без применения фторидных соединений, дешевом способе обогащения урана. Суть его состоит в том, что при фазовых переходах за счет избирательности по массе происходит разделение изотопов урана с коэффициентом эффективности 0,4 % за один цикл. Если осуществить несколько десятков таких циклов, то можно добиться повышения концентрации вещества без применения весьма энергоемкого (а значит, и дорогого) и очень вредного для обслуживающего персонала газо-диффузионного метода. Перспективен и другой предложенный нами метод обогащения урана — на основе твердофазных реакций с включением солей щелочно-галлоидных соединений.

Мы обозначили лишь основные направления, которые решались в рамках программы исследований спектров ураниловых соединений. Сюда не вошли многие вопросы образования, природы химической связи и электронных состояний, а также проведение их квантово-химических расчетов с учетом симметрии комплекса.

1. В е с q u e r e l E. // Compt. rend. 1872. V. 75. P. 296.
2. N i c k o l s E. L., H o w e s H. L. // Fluorescence of the Uranyl salts. Washington, 1919.
3. V a n N e e l A. C. S. // Leiden Comm. 1927. V. 187. P. 3.
4. D i e k e G. H., D u n c a n A. B. F. // Spectroscopic Properties of Uranium Compounds. New York, 1949.
5. С е в ч е н к о А. Н., С т е п а н о в Б. И. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21. С. 213.
6. С т е п а н о в Б. И., С е в ч е н к о А. П. // Тр. ГОИ: Сессия, посвященная памяти академика С. И. Вавилова. Л., 1953. С. 114.
7. В о л о д ь к о Л. В., К о м я к А. И., У м р е й к о Д. С. Ураниловые соединения (строение, спектры). Мн., 1981.
8. А б р а м о в А. П., Т о л с т о й Н. А. // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 37. С. 360.
9. А б р а м о в А. П., Р а з у м о в а И. К., Т о л с т о й Н. А. // Спектроскопия кристаллов. М., 1975. С. 330.

Поступила в редакцию 14.11.94.



УДК 539.2

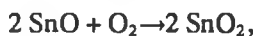
В. М. АНИЩИК, Л. И. КОНЮШКО, В. А. ЯРМОЛОВИЧ,
Д. А. ГОРБАЧЕВСКИЙ, Т. Г. ГЕРАСИМОВА

СТРУКТУРА И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ДИОКСИДА ОЛОВА

Using X-ray analysis the structure of tin oxide films was studied, as well as the change of electrical resistivity during thermal treatment.

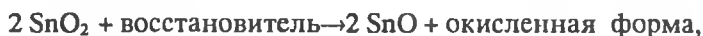
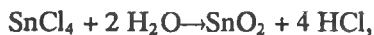
В последнее время пристальное внимание исследователей привлекают пленки диоксида олова (SnO_2), которые применяются как проводящие прозрачные покрытия для отвода в анодную цепь электронов с люминесцентного экрана и внутренних поверхностей стеклянных оболочек электровакуумных приборов, в качестве чувствительных элементов газочувствительных датчиков, в микроэлектронике для изготовления терморезисторов и резистивных проводников, а также в солнечных и фотоэлектрических преобразователях энергии и т. д. Применение SnO_2 в столь разных областях объясняется уникальным сочетанием оптических и электрофизических свойств пленок и достаточно простыми способами их изготовления, которые все время модернизируются.

Можно выделить четыре базовых способа получения пленок диоксида олова, каждый из которых имеет несколько модификаций. В основе первого лежат процессы пиролиза. Пленки получаются при испарении паров галоидных соединений вещества, в частности хлористого олова, которые конденсируются на поверхность подогретой до 450—480 °С подложки. При этом:



Образующаяся пленка состоит из диоксида олова, в которой равномерно распределены электропроводящие включения примеси окиси олова и элементарного олова в количестве 0,01—0,001 %.

Суть второго способа заключается в нанесении с помощью пульверизатора или иным способом холодного раствора хлористого олова $\text{SnCl}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ на разогретую подложку. При этом происходят процессы гидролиза хлористого олова с образованием пленки, содержащей диоксид олова, окись олова и элементарное олово. Реакция происходит в присутствии восстановителя:



Восстановителем обычно служит спирт, ацетон, фенилгидразин и др.

Применяется также способ конденсации металлического олова на подложку в вакуумной камере с последующим его окислением. Если при

температуре от 200 °С до 380 °С окись олова и элементарное олово окисляются до SnO_2 ($2 \text{SnO} + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{SnO}_2$; $\text{Sn} + \text{O}_2 \rightarrow \text{SnO}_2$), то при температуре выше 380 °С дополнительно идет распад окиси олова: $2 \text{SnO} \rightarrow \text{Sn} + \text{SnO}_2$ [1]. В этом случае пленки обычно характеризуются высоким удельным электросопротивлением.

Четвертый способ заключается в погружении подложки в раствор пленкообразующего вещества с дальнейшей термообработкой.

Следует заметить, что применение разновидностей указанных способов, например напыление пленок с одновременной имплантацией кислородом [2], позволяет в широких пределах варьировать структуру пленок, концентрации легирующих примесей, а следовательно, ее проводимость и другие свойства. Появились сообщения и о получении эпитаксиальных пленок диоксида олова [3].

В данной работе исследовались структура и электрофизические свойства пленок диоксида олова на подложке из ситалла марки СТ-50-1. Пленки изготавливались путем нанесения холодного водного раствора пленкообразующего вещества [4] на подложку, которая вращалась в центрифуге со скоростью 3000 об/мин. Для кристаллизации образец помещался в печь с температурой 300 °С на 30 мин. Полученные таким образом пленки имели желтоватый оттенок и мелкодисперсную, поликристаллическую структуру. С целью изучения воздействия температуры проводился отжиг пленок в течение 30 мин при 350, 400, 450 °С с дальнейшим их быстрым охлаждением на воздухе (т. е. термообработка типа «мягкой закалки»). При этом наблюдалось частичное почернение пленок, увеличивающееся с ростом температуры термообработки, что характерно для присутствия фазы SnO.

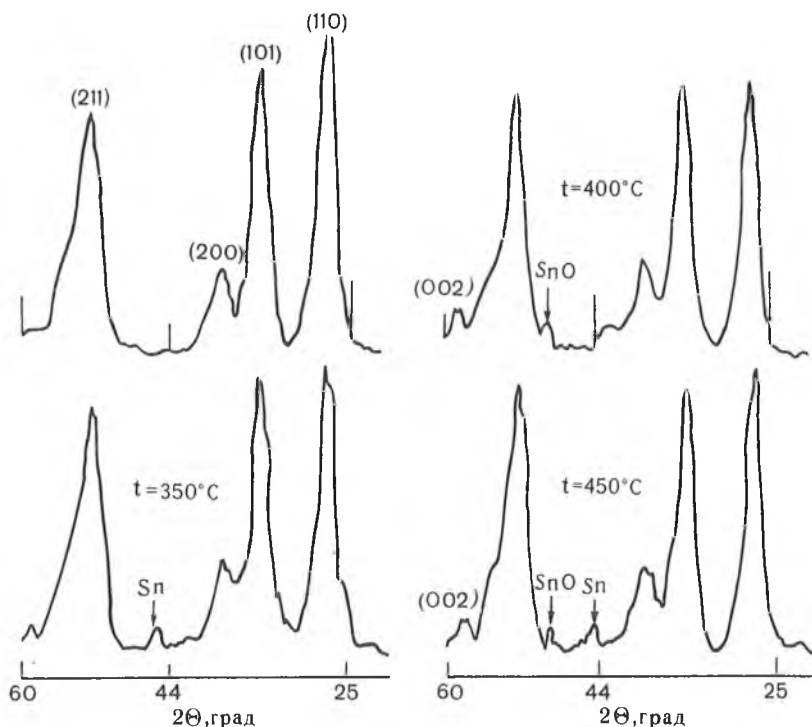


Рис. 1. Рентгенограммы исходной пленки SnO_2 и пленки после термообработки, полученные при фокусировке по Бреггу—Брентано

На рис. 1 представлен участок рентгенограмм пленок до и после термообработок. Рентгенограммы получены на дифрактометре ДРОН-2 в медном излучении при фокусировке по Бреггу — Брентано.

На рентгенограммах видны рефлексы (110), (101), (200) и (211), что совпадает с данными [5]. Термообработка приводит к появлению реф-

лекса (002), интенсивность которого возрастает с ростом температуры закалки, что может быть связано с протеканием в пленках рекристаллизационных процессов.

Качественный фазовый анализ показывает, что в пленках SnO_2 , подвергнутых охлаждению с 350°C , присутствуют включения элементарного олова, которые не успели окислиться до SnO_2 , а в пленках, охлажденных с 400°C , обнаруживается фаза SnO . Поскольку, как показано в [1], при температурах выше 400°C интенсивно идет распад окиси олова ($2\text{SnO} \rightarrow \text{Sn} + \text{SnO}_2$), охлаждение от 450°C приводит к возникновению фаз SnO и Sn .

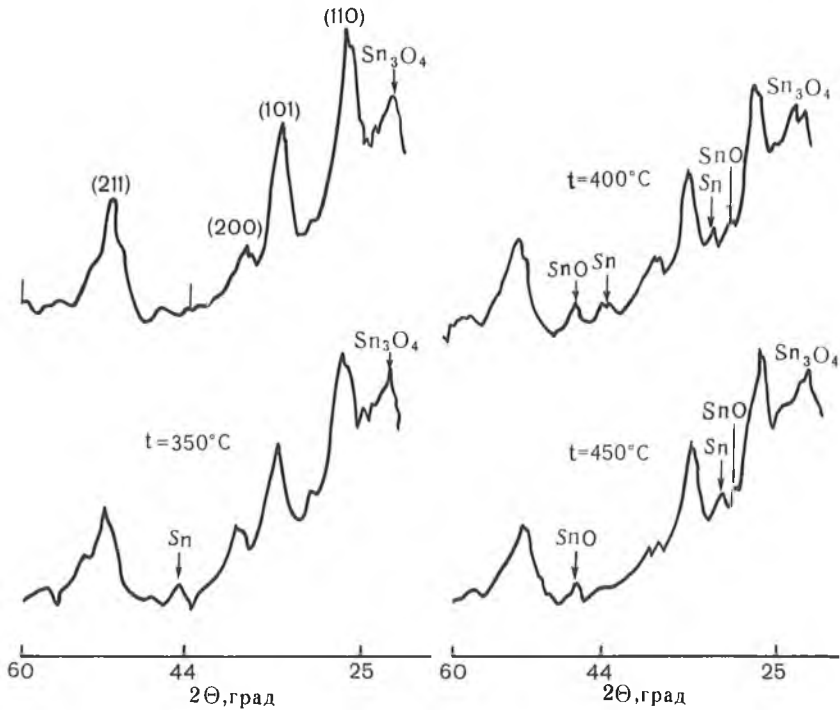


Рис. 2. Рентгенограммы исходной пленки SnO_2 и пленки после термообработок, полученные в условиях скольжения рентгеновского пучка под углом $\alpha = 3^\circ$ к поверхности пленки

Для исследования приповерхностных слоев пленок дифрактограммы снимались при падении первичного пучка рентгеновских лучей под углами $\alpha = 1^\circ, 3^\circ$ (метод скользящего пучка). На рис. 2 представлены рентгенограммы пленок при $\alpha = 3^\circ$. Глубина проникновения рентгеновского излучения в этом случае не превышает $0,4 \mu\text{м}$. На рисунке видно появление рефлекса, соответствующего Sn_3O_4 , что согласуется с [2]. Эта фаза устойчива и сохраняется при термообработках ($350\text{--}500^\circ\text{C}$). Отсутствие этой фазы при съемках с фокусировкой по Бреггу — Брентано объясняется ее расположением в поверхностных слоях пленки. Охлаждение образцов от температур $400, 450^\circ\text{C}$ приводит к «замораживанию» на поверхности пленок фаз элементарного олова и его окиси, так как Sn и SnO не успевают окислиться до SnO_2 .

Следует отметить, что структура приповерхностного слоя метастабильна. При повышении температуры пленок до 500°C и последующем охлаждении на рентгенограммах наблюдались следующие изменения: исчезали рефлексы решеток Sn и SnO и возвращался к исходному цвет. Различие в рентгенограммах исходных пленок и отожженных с медленным охлаждением только в наличии отражений от плоскости (002), т. е. за время отжига произошли необратимые процессы рекристаллизации.

Из рис. 3, на котором представлено изменение логарифма электропроводности исходной пленки R от температуры t в условиях двух

циклов квазистатических процессов нагревания и охлаждения, следует, что электросопротивление обладает значительным гистерезисом. На первом этапе (приблизительно до 240 °С) изменения R полностью обратимы, что указывает на отсутствие взаимодействия пленки с кислородом. Это хорошо согласуется с диаграммой реакций в системе $\text{SnO}_2\text{—SnO—Sn}$ [1]. Уменьшение электросопротивления с ростом температуры на этом этапе может быть обусловлено увеличением концентрации носителей заряда вследствие их перехода с примесных уровней в зону проводимости. Энергия активации по величине сильно различается (по данным разных авторов) вследствие различной технологии и качества изготовления пленок и по порядку величины составляет сотые доли электрон-вольта [1].

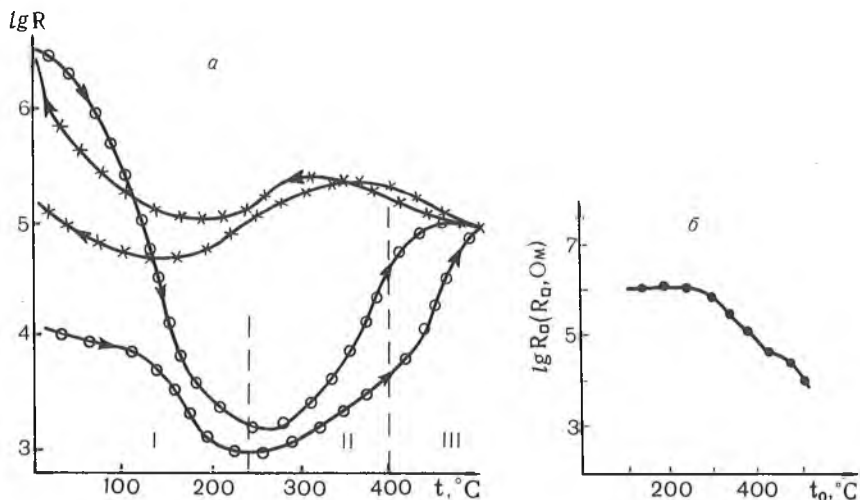


Рис. 3. Изменение логарифма электросопротивления пленок от: а — температуры (о — нагрев, х — охлаждение); б — температуры термообработки t_0

Дальнейшее увеличение температуры приводит к необратимым изменениям R . Условно можно выделить температурный интервал $240^\circ\text{C} \leq t \leq 400^\circ\text{C}$, в котором электросопротивление при нагреве переходит от минимума к увеличению. Рост электросопротивления в основном обусловлен характером реакций в системе $\text{SnO}_2\text{—SnO—Sn}$, поскольку идет окисление Sn и SnO до SnO_2 , т. е. $2\text{SnO} + \text{O}_2 \rightarrow \text{SnO}_2$, и $\text{Sn} + \text{O}_2 \rightarrow \text{SnO}_2$. Отметим, что стехиометрические пленки SnO_2 обладают большой величиной удельного электросопротивления и перенос заряда в них осуществляется по кислородным вакансиям [1]. Еще одним фактором, вносящим вклад в изменение электросопротивления в этом интервале температур, являются рекристаллизационные процессы, что подтверждается появлением кристаллитов, дающих отражение от плоскости (002). На третьем этапе (в области температур $t > 400^\circ\text{C}$) конкурируют два процесса, один из которых приводит к росту электросопротивления вследствие химических реакций, описанных на втором этапе, а другой стремится его уменьшить вследствие распада окиси олова: $2\text{SnO} \rightarrow \text{Sn} + \text{SnO}_2$ [1], происходящего при температуре выше 400°C . Следует отметить, что значительное возрастание электросопротивления после медленной циклической обработки указывает на большую стехиометричность пленок SnO_2 по сравнению с исходным состоянием.

На рис. 3 представлены значения электросопротивления квадрата пленки в зависимости от температуры термообработки t_0 (в данном случае при каждой температуре образцы перед охлаждением выдерживались в течение 20 мин). Уменьшение величины электросопротивления с ростом температуры термообработки обусловлено в основном наличием проводящих фаз Sn и SnO. Эта зависимость коррелирует с данными рентгенофазового анализа (см. рис. 1, 2). Следует отметить, что уменьшение величины электросопротивления при $t_0 > 450^\circ\text{C}$ свидетельствует

о «замораживании» фаз Sn и SnO в процессе охлаждения. Вообще говоря, поскольку процесс быстрого охлаждения после отжига является термодинамически неравновесным, то строгое использование диаграммы реакций в системах SnO₂—SnO—Sn от температуры является не совсем корректным, так как эти реакции построены для термодинамически равновесного процесса. Замедление темпа уменьшения электросопротивления в области температур $t_0 \sim 400$ °С, вероятно, обусловлено включением нового механизма, связанного с распадом окиси олова на элементарное олово и SnO₂.

1. Кузнецов А. Я. // Физика твердого тела. 1960. Т. 11. Вып. 1. С. 3.
2. Ram Lab, Rajni Grover, Vispule R. D. et al. // Thin Solid Films. 1991. V. 206. № 1—2. P. 88.
3. Semancix S., Cavicchi R. F. // Ibid. 1991. V. 206. № 1—2. P. 81.
4. Пат. 1809846 СССР // Бюл. № 14. 1993.
5. Sapon G., Rup R., Mansingh A. // Thin Solid Films. 1990. V. 190. № 2. P. 287.

Поступила в редакцию 18.04.94.

УДК 621.318:538.26

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ

ДИСКРЕТНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ УГЛА ПОВОРОТА

The design of discrete angular transducer, stable to the axis displacements of rotor, is described. A study of the magnetic field in working clearance is conducted and its parameters are determined.

При автоматизации и оснащении робототехнических комплексов необходимы разнообразны преобразователи механических величин. В данной работе рассмотрен преобразователь угла поворота на основе эффекта Холла, позволяющий задавать дискретные угловые перемещения, и который может быть успешно применен в различных узлах транспортных средств [1].

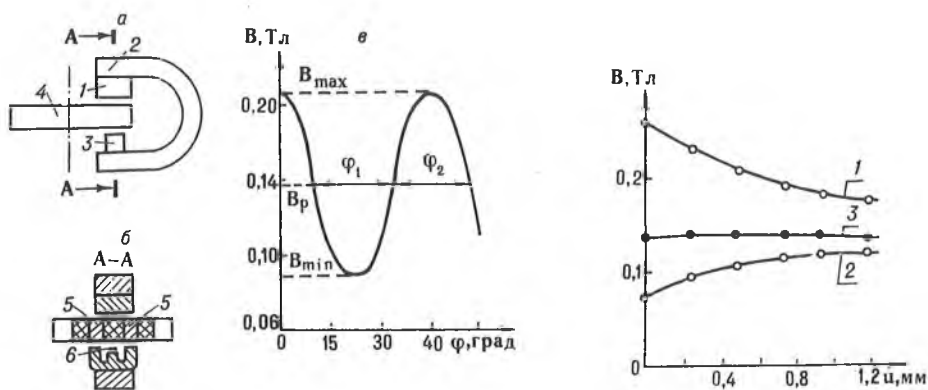


Рис. 1. Схема преобразователя вращения (а), его сечение по А—А (б) и изменение индукции магнитного поля при вращении ротора (в)

Рис. 2. Зависимости B_{\max} (1), B_{\min} (2) и B_p (3) от величины зазора u

Дискретный преобразователь угла поворота, схема и сечение по А—А которого приведены на рис. 1 (а, б), состоит из магнитной системы и датчика Холла. Магнитная система устройства включает постоянный магнит 1, магнитопровод 2, Ш-образный концентратор 3 и ротор 4 с ферромагнитными стержнями 5. Постоянный самарий-кобальтовый магнит имеет форму цилиндра, диаметр и высота которого равны 10 и 6 мм соответственно. Магнитопровод и Ш-образный концентратор изготовлены из технического железа. Концентратор имеет три выступа, между которыми находятся два зазора по 2 мм. Ротор, изготовленный из неферромагнитного материала, содержит ферромагнитные стержни в

виде цилиндров. Угловое расстояние $\Delta\varphi$ между центрами ферромагнитных стержней равно $\frac{2\pi}{n}$ (n — число ферромагнитных стержней). В работе представлены результаты по исследованию преобразователя при $n = 8$ и $\Delta\varphi = 45^\circ$. При необходимости n может иметь и более высокие значения, например 12, 18, 24 и т. д. Расстояние между центрами ферромагнитных стержней равно расстоянию между центрами крайних выступов Ш-образного концентратора.

Датчик Холла изготовлен на основе гетерозипитаксиальной структуры $n\text{-InSb-i-AsGa}$. Размер его чувствительной области $0,1 \times 0,1$ мм. Входное и выходное сопротивления достигают 20 Ом. Магнитная чувствительность γ равна 400 мВ/Тл. Датчик Холла 6 располагается на среднем выступе Ш-образного концентратора и заливается эпоксидной смолой. Суммарная высота среднего выступа и датчика Холла не превышает высоты крайних выступов концентратора, таким образом датчик Холла надежно защищен от случайных механических воздействий.

Вращение ротора вызывает перераспределение магнитного поля в пространстве между постоянным магнитом и концентратором. Магнитная индукция B в области расположения датчика Холла является периодической функцией угла поворота φ ротора, причем ее период равен углу между центрами двух соседних ферромагнитных стержней, т. е. 45° .

Максимальное значение индукции B_{\max} наблюдается при расположении ферромагнитного стержня ротора против среднего выступа Ш-образного концентратора. В случае расположения ферромагнитных стержней ротора против крайних выступов Ш-образного концентратора наблюдается минимальное значение магнитной индукции B_{\min} . В первом варианте магнитный поток идет преимущественно через средний выступ концентратора, а во втором — через крайние. Изменение магнитной индукции вызывает изменение сигнала, формируемого датчиком Холла, с помощью которого можно управлять движением. Например, устройство, фиксирующее сигнал датчика Холла, срабатывает при его выходном напряжении $U_p = \gamma B_p$, соответствующем магнитной индукции B_p . При этом B_p выбирается так, чтобы интервалы углов, на которых $B < B_p$ и $B > B_p$, были равны друг другу, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 22,5^\circ$.

Погрешность $\Delta\varphi$, с которой осуществляется поворот ротора, определяется стабильностью величины B_p по отношению к таким факторам, как случайные осевые смещения ротора и точность изготовления его ферромагнитных стержней. Величина погрешности $\Delta\varphi$ может быть рассчитана по формуле

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} \right)_{B_p}^{-1} \sum_i \left| \frac{\partial B_p}{\partial a_i} \right| \Delta a_i,$$

где $(\partial B / \partial \varphi)_{B_p}$ — производная, значение которой берется в точке, соответствующей B_p ; a_i — факторы, влияющие на B_p , например осевые смещения ротора u , диаметр d и высота H стержней ротора; $\partial B_p / \partial a_i$ — производные, характеризующие влияние указанных факторов на величину B_p [2].

С целью определения путей уменьшения погрешности $\Delta\varphi$ проведены исследования по влиянию формы концентратора, а также u , d , H на зависимости $B(\varphi)$, что позволило определить как $(\partial B / \partial \varphi)_{B_p}$, так и $\partial B_p / \partial a_i$. Например, при использовании ферромагнитных стержней диаметром $d = 4$ мм и высотой $H = 5$ мм с зазором $u = 0,25$ мм величина $(\partial B / \partial \varphi)_{B_p}$ достигает 0,015 Тл/град.

Применение конусообразных и 1-образных концентраторов в преобразователе угла поворота показало значительную чувствительность сигнала к осевым смещениям ротора. Оказалось, что смещения ротора вызывают одновременное увеличение (или уменьшение) максимального и минимального значения сигнала, что приводит к сдвигу кривых $B(\varphi)$ и является причиной значительного изменения B_p .

При использовании Ш-образного концентратора осевые смещения ротора, вызывающие изменение зазора, по-иному влияют на $B(\varphi)$: наблюдается либо увеличение B_{\max} и уменьшение B_{\min} , либо уменьшение

V_{\max} и увеличение V_{\min} . Поэтому зависимости $V(\varphi)$, соответствующие различным значениям зазора, будут пересекаться. И если окажется, что V_p близко к значению магнитной индукции, при которой кривые $V(\varphi)$ пересекаются, то его значение будет незначительно зависеть от осевых смещений ротора. На рис. 2 представлены зависимости V_{\max} , V_{\min} и V_p от величины зазора и при использовании ферромагнитных стержней диаметром $d = 4$ мм и высотой $H = 6$ мм. Если V_{\max} и V_{\min} существенно зависят от величины зазора, то V_p незначительно изменяется. При изменении u от 0 до 1,2 мм величина $\partial V_p / \partial u$ не превышает 0,004 Тл/мм. Таким образом, дискретный преобразователь угла поворота характеризуется устойчивостью к осевым смещениям ротора.

Проведены исследования по влиянию высоты H и диаметра d ферромагнитных стержней ротора на параметры V_{\max} , V_{\min} и V_p . Установлено, что $\partial V_p / \partial d$ достигает значения 0,005 Тл/мм при изменении диаметра от 3 до 5 мм. Величина $\partial V_p / \partial H$ в области изменения высоты магнита от 5 до 7 мм достигает 0,02 Тл/мм.

Экспериментально определенные величины $(\partial V / \partial \varphi)_{V_p}$, $\partial V_p / \partial u$, $\partial V_p / \partial d$ и $\partial V / \partial H$ позволяют рассчитать погрешность угла поворота ротора. Например, если величина осевых смещений ротора достигает $\pm 0,2$ мм, а высота и диаметр ферромагнитных стержней заданы с погрешностью $\pm 0,03$ мм, то погрешность угла поворота составляет $0,1^\circ$.

1. А. с. № 1768951 СССР. Дискретный преобразователь угла поворота.

2. Ш е п е л е в и ч В. Г. // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1988. № 4. С. 50.

Поступила в редакцию 11.04.94.

УДК 534.8.539.039

В. С. САВЕНКО, А. И. ПИНЧУК, В. Б. ЗЛОТНИК,
С. Д. ШАВРЕЙ, В. В. ПОНАРЕДОВ

МЕХАНИЗМЫ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ДЕФОРМАЦИЮ МЕТАЛЛОВ

The article deals with the problem of existing mechanisms of electroplastic effect [EPE] — the decrease of deformation efforts when a high density current is passed through a deforming sample. The existing models do not describe the EPE completely. On the basis of twinning of bismuth crystals a new model is the easing of outcropping of dislocations by means of the surface energy decrease.

К настоящему времени хорошо известны электропластический эффект (ЭПЭ) и магнитопластический эффект (МПЭ) в металлах и ионных кристаллах, фотомеханический эффект (ФМЭ) и электромеханический эффект (ЭМЭ) в полупроводниках. Их сущность заключается в снижении усилий деформации и уменьшении микротвердости при помещении образцов в электромагнитные поля или при освещении, как в случае полупроводников. Открыт и исследован ЭПЭ при двойниковании металлов, обнаружено улучшение физико-механических характеристик медной проволоки при электропластической деформации [1, 2]. Теоретические модели, описывающие все эти явления, делятся на две большие группы:

1. Силовое влияние на движущиеся дислокации со стороны внешних энергетических воздействий непосредственно или с помощью промежуточных механизмов.

2. Снижение потенциальных барьеров для движущихся дислокаций.

К первой группе относится описываемая ЭПЭ в металлах модель «электронного ветра», которая уже нашла широкое применение в промышленности. Суть ее заключается в резком скачке пластической деформации при пропускании тока плотностью порядка 10^8 А/м². Он проявляется в виде характерных сбросов деформирующего усилия на диаграмме растяжения или сжатия образцов [3].

Экспериментально установлено, что скачки не связаны с тепловым расширением образцов и их разупрочнением в результате джоулева нагрева электрическим током, а также с пинч-действием импульса тока

высокой плотности [4, 5]. Согласно указанной модели, электроны проводимости передают импульс дрейфовой скорости дислокациям при рассеянии на них. Сила, действующая на дислокацию, пропорциональна плотности тока [6, 7]:

$$f = -\hat{B}j/en, \quad (1)$$

где \hat{B} — тензор коэффициентов электронного торможения дислокации, e — элементарный заряд, n — концентрация электронов проводимости. Максимальное значение B находится по формуле:

$$B = 4\hbar n \approx 10^{-4} \text{ гр/см} \cdot \text{с},$$

где \hbar — постоянная Планка [8].

Принципиальной особенностью силы (1) является ее независимость от направления вектора Бюргера. Экспериментальные результаты показывают, что величина ЭПЭ пропорциональна квадрату j и на четыре порядка выше, чем следует из (1). Выдвигаемое представление о «локальном разогреве» в области ядра дислокации не описывает физическую природу ЭПЭ, поскольку порождаемая дислокацией неоднородность температурного поля успевает исчезнуть прежде, чем произойдет открепление дислокации от локальных стопоров [7].

Рассеяние электронов проводимости происходит не только на дислокациях, но и на других дефектах кристалла. В результате формируется внешнее поле напряжений для дислокаций. Наиболее эффективными здесь являются планарные дефекты. В результате торможения электронной жидкости появляется напряжение сдвига:

$$\sigma_{if} \approx P p_F j / c,$$

где P — параметр Фукса диффузности рассеяния ($0 \leq P \leq 1$), p_F — импульс Ферми.

Это напряжение складывается с напряжением от внешних деформирующих усилий. Для $j = 250 \text{ А/мм}^2$ величина $\sigma \approx 10^3 \text{ Па}$ [9]. Следовательно, этот эффект не создает напряжений в решетке, которые появляются при ЭПЭ.

Допустив, что положительная часть деформационного потенциала дислокаций экранирована полностью локализованными на нем электронами проводимости, можно оценить порядок электростатической силы, действующей на отрицательную часть деформационного потенциала с плотностью заряда:

$$\rho_-(r) \sim \text{const } r^{-5/2} \sin(2k_F r + 1/4\pi),$$

где k_F — волновой вектор электрона на поверхности Ферми, r — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси дислокации, $|\rho_-(r)/en_0| < 0,13$, где n_0 — невозмущенная плотность ионов решетки [10]:

$$f_e = -q_d E, \quad E = \rho j, \quad (2)$$

где q_d — заряд деформационного потенциала дислокаций на единицу ее длины, ρ — удельное сопротивление металлов.

Оценка показывает, что сила (2) по порядку величины сравнима с силой (1) «электронного ветра». Попытка объяснить ЭМЭ силовым действием электрического поля на заряженные дислокации, а ФМЭ электростатическим взаимодействием заряженных под действием света дислокаций также встречает затруднения. Так, например, в [11] отмечается, что и ФМЭ и ЭМЭ наблюдаются в поверхностных слоях одинаковой величины полупроводниковых кристаллов кремния и германия и полуметаллов висмута и сурьмы, составляющих от 1,5 до 3 микрометров, что на 2—3 порядка превышает толщину фотопроводящего слоя. Этот факт указывает на единый физический механизм обоих эффектов. Причем он не может быть выработан на базе концепции электростатического действия на заряженные дислокации.

Вторая группа физических моделей, описывающих влияние электромагнитных полей на деформационные характеристики кристаллов за счет понижения дислокационных потенциальных барьеров, активно

развивается в течение нескольких последних лет. В [10] предложен один из возможных механизмов ЭПЭ — возбуждение локализованных состояний на дислокации. Электроны локализуются на положительной части деформационного потенциала дислокаций:

$$\rho_+(\mathbf{r}) = \frac{e_0 \mathbf{b}}{r} \sin \varphi, \quad \mathbf{b} = \frac{Z e \mathbf{b}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right),$$

где φ — угол между векторами \mathbf{b} и \mathbf{r} , ν — коэффициент Пуассона, Z_e — заряд иона, \mathbf{b} — вектор Бюргерса [10].

Внешние энергетические воздействия возбуждают локализованные электронные состояния на потенциале (5). При этом, очевидно, происходит размытие их волновых функций. Увеличение электронной плотности в ядре дислокаций понижает величину потенциального барьера типа Пайерлса—Набарро. Уменьшением крутизны рельефа этого барьера в [12, 13] также объясняется и механизм магнитоэластического эффекта в NaCl и Al, суть которого заключается в перемещении под действием магнитного поля дислокаций в ненагруженных исследуемых кристаллах. До помещения кристалла в магнитное поле дислокации находятся в равновесии, зависая в далекодействующем поле внутренних напряжений на локальных барьерах, связанных с точечными дефектами и рельефом Пайерлса. Понижая величину последнего наложением магнитного поля, можно привести дислокации в движение. Однако подобный механизм может быть применим для ионных и ковалентных кристаллов, в металлах же высота барьеров типа Пайерлса—Набарро невелика и величина активационного объема для них на несколько порядков меньше, чем для потенциальных барьеров, создаваемых другими дислокациями и точечными дефектами [14].

Таким образом очевидно, что к настоящему времени не существует универсального механизма, однозначно описывающего влияние электромагнитных полей на деформационные процессы в кристаллах. По мнению авторов, рассмотрение наиболее вероятных механизмов влияния электромагнитных полей на пластическую деформацию металлов следует проводить с учетом состояния поверхности кристалла, так как возбуждение электронной подсистемы кристалла электромагнитным полем приводит к изменению его поверхностной энергии. При деформационных процессах движущиеся дислокации, взаимодействуя со свободной поверхностью, приобретают избыточную свободную энергию, становятся неустойчивыми и стремятся выйти на поверхность кристалла [15]. Краевая дислокация притягивается к поверхности силой «зеркального изображения», которая определяется медленно меняющимся логарифмическим потенциалом. Вместе с тем выход дислокации на поверхность сопровождается появлением характерной ступеньки. При этом на создание новой ячейки затрачивается энергия $b^2 \gamma$, где γ — поверхностная энергия. Эта сила распределяется в глубь кристалла на полуширину дислокации порядка нескольких b и в непосредственной близости от поверхности может преобладать над силой «зеркального изображения». Поэтому уменьшение поверхностной энергии металла облегчит выход дислокаций одного знака на поверхность и приведет к увеличению скорости пластической деформации и уменьшению деформационного наклепа. В то же время увеличение поверхностной энергии интенсифицирует работу поверхностных источников дислокаций за счет компенсации силы «зеркального изображения».

Проблема влияния поверхностного слоя твердых тел, в частности металлов, на их механические и физические свойства в настоящее время является одной из наиболее актуальных и сложных в физике твердого тела и имеет большое прикладное значение. Например, в [16] выяснено, что, удаляя тонкий наклепанный поверхностный слой посредством электрополировки, можно добиться снижения усилий деформирования и более чем в 6 раз увеличить относительное сужение, достигаемое при разрушении монокристаллического вольфрама.

В случае металлов, полуметаллов и полупроводников изменение поверхностной энергии может быть достигнуто в результате создания в кристалле поля Холла при одновременном наложении во взаимоперпендикулярных направлениях электрического и магнитного полей. Экспе-

риментальная проверка роли поверхности и ее вклада в механизм электронно-пластической деформации проводилась на монокристаллах висмута технической чистоты. Изучалось влияние суперпозиции электрического и магнитного полей при пластической деформации двойникованием. Экспериментальная установка позволяла накладывать электрические и магнитные поля к образцу во взаимоперпендикулярных направлениях при одновременном деформировании плоскости спайности кристалла алмазным индентором.

Проведенные исследования показали, что диагонали отпечатка, длина двойниковых лучей и ширина их у устья, число двойников и сдвоенный объем при плотности тока в 20 А/мм^2 и магнитной индукции в $0,2 \text{ Тл}$ соответствуют «классическому» электропластическому эффекту, наблюдаемому в [1] при плотности тока в 1000 А/мм^2 . Очевидно, что в данном случае плотность электромагнитной энергии в образце меньше на 3—4 порядка. Указанный эффект имеет полярный характер в зависимости от ориентации вектора Холла по отношению к «индентуемой» поверхности.

Полученные результаты позволяют рассматривать механизмы воздействия электромагнитными полями на электропластическую деформацию с учетом поверхностного состояния и открывают возможность управления процессами пластической деформации с помощью немеханических сил при обработке металлов давлением.

1. Савенко В. С., Спицын В. И., Троицкий О. А. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1181.
2. Троицкий О. А., Савенко В. С. и др. // Изв. АН СССР. 1986. Сер. Металлы. № 5. С. 97.
3. Спицын В. И., Троицкий О. А. Электропластическая деформация металлов. М., 1985.
4. Спицын В. И., Троицкий О. А. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 5. С. 1070.
5. Троицкий О. А. // Там же. 1980. Т. 251. С. 400.
6. Фикс В. Б. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 1539.
7. Рощупкин А. М., Батаронов И. Л. // Изв. вузов. Сер. Черная металлургия. 1990. № 10. С. 75.
8. Кравченко В. Я. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1676.
9. Roshchupkin A. M., Bataronov I. L., Troitski O. A., Moiseenko M. M. // Physica status solidi (b). 1989. V. 151. № 1. P. 121.
10. Brown R. A. // Phys. Rev. 1966. V. 141. № 2. P. 568.
11. Urit G. P., Varshenya S. A., Spalvin I. P. // Physica status solidi. 1966. V. 15. № 617. P. 617.
12. Альшиц В. И. и др. // ФТТ. 1987. Т. 29. Вып. 2. С. 467.
13. Там же. 1992. Т. 34. Вып. 1. С. 155.
14. Савенко В. С., Пинчук А. И. // Изв. вузов. Сер. Черная металлургия. 1992. № 1. С. 93.
15. Лихтман В. И., Щукин Е. Д., Ребиндер П. А. Физико-химическая механика металлов. М., 1962.
16. Баранов Ю. И., Березин А. В. // Машиноведение. 1988. № 2. С. 28.

Поступила в редакцию 03.10.94.

УДК 537. 312.62

В. К. КСЕНЕВИЧ, В. А. ДОРОСИНЕЦ,
Л. В. ГОВОР, И. Б. БУТЫЛИНА

ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕЙ В ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ СРЕДЕ ПЛЕНОК $Y_1Ba_2Cu_3O_x$

The model of the Josephson junction array for studying of the current percolation mechanism in granulated films of the high temperature superconductors of $Y_1Ba_2Cu_3O_x$ has been used. The type of the fluxon penetrated in the film and features of their motion and interaction have been defined from the type of IV-characteristics and dependencies of the critical current on magnetic field.

К синергетическим явлениям в сверхпроводниках относятся явления, связанные с проникновением, движением и взаимодействием магнитных вихрей, несущих квант магнитного потока $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$. Процессы в двухмерной сети джозефсоновских переходов описываются системой уравнений синус-Гордона для пространственной и временной зависимо-

сти фазы параметра порядка $\phi(x, y, t)$ [1]. Она имеет и решения, описывающие движения отдельных солитонов. Свойствами джозефсоновской среды могут обладать сверхпроводящие гранульные пленки, поскольку экспериментально установлено, что границы гранул во многих случаях могут служить слабыми связями между сверхпроводящими гранулами, т. е. проявлять джозефсоновские свойства подобно туннельным переходам. Анализ имеющихся данных позволяет ожидать проявления свойств джозефсоновской среды гранульными пленками с плотностями критического тока в области $10^3 < j_c < 10^5$ А/см².

Первым этапом исследования такой системы должно быть установление наличия слабых и сильных (не проявляющих свойств туннельных переходов) связей между гранулами, их количественного соотношения, определения механизма протекания тока, типа вихрей, условий их проникновения, особенностей движения и взаимодействия в пленках.

Нами исследовались сверхпроводящие пленки $Y_1Ba_2Cu_3O_x$, полученные лазерным напылением на подложки MgO(100). Средний размер зерен составлял 0,3 мкм, температура сверхпроводящего перехода $T_c = 88$ К. Из пленок формировались мостики, плотность критического тока для которых при $T = 77$ К лежала в интервале от $8 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^4$ А/см².

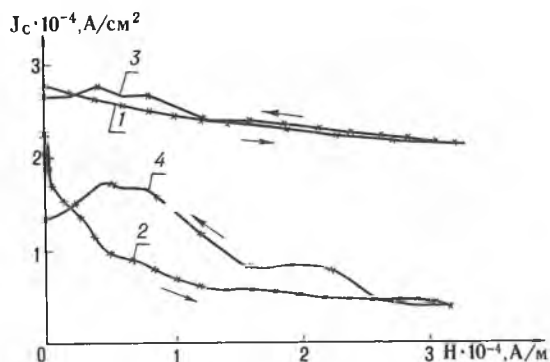


Рис. 1. Зависимость плотности критического тока от магнитного поля для образцов первой (кривые 1, 3) и второй (кривые 2, 4) групп. Стрелками указано направление изменения магнитного поля

Все образцы систематизированы нами по трем группам. К первым двум группам отнесены образцы с $j_c \geq 10^4$ А/см². Температурные зависимости критического тока в окрестности T_c для них аппроксимировались нами степенной зависимостью $I_c(T) \sim (1 - t)^n$, где $t = T/T_c$. Показатель степени n для различных мостиков принимал значения от 1,4 до 2,3. Из зависимостей $j_c(H)$ (рис. 1) видно, что мостики с близкими значениями $j_c(H = 0)$ проявляют разную степень зависимости от магнитного поля. В полях $H > 10^4$ А/м эта зависимость ослабляется. Сопоставление кривых $j_c(H)$ и $j_c(T)$ позволяет установить, что для мостиков со слабой зависимостью критического тока от магнитного поля характерны большие значения показателя степени $n > 2$, для мостиков с сильной зависимостью $n \approx 1,5$.

Падение I_c в малых магнитных полях (порядка единиц А/м), значительно меньших теоретического значения критического поля H_{c1} , связывалось нами с проникновением магнитного поля по границам слабосвязанных гранул в виде гипервихрей, охватывающих несколько гранул [2]. Для мостиков второй группы сильная зависимость $j_c(H)$ обусловлена преобладающей ролью в токопереносе слабых связей, поэтому значение показателя степени $n = 1,5$ температурной зависимости I_c можно связать с преимущественным SNINS-типом слабых связей в пленках. Дальнейшее повышение величины магнитного поля приводит к подавлению слабых связей и ток определяется преимущественно сильными связями и слабо зависит от приложенного магнитного поля. Значения $n = 2 - 2,3$ для мостиков первой группы со слабой зависимостью

$j_c(H)$ характерны для неоднородных широких мостиков эпитаксиальных пленок ВТСП, j_c которых определяются движением абрикосовских вихрей, и могут быть объяснены пространственно-неоднородным распределением длины свободного пробега электронов или толщины пленки [3]. Подтверждением предложенной модели служит наблюдение гистерезиса на кривых $j_c(H)$ в понижающемся магнитном поле, значительно более выраженного для мостиков второй группы. Гистерезис интерпретировался нами захватом магнитного потока в контурах квантования, образованных слабыми связями.

Вольтамперные характеристики для мостиков первой группы при приложении магнитного поля лишь смещаются вниз, не изменяя формы. Их можно разбить на два участка: линейный начальный и последующий степенной $V \sim (I - I_c)^m$ с $m = 1,7 - 1,75$. Поскольку для этого мостика наблюдается слабая зависимость критического тока от магнитного поля, мы предполагаем существование перколяционных путей протекания тока, в которые не входят слабые связи. ВАХ таких мостиков определяются движением абрикосовских вихрей и находят объяснение в переходе от режима, в котором от величины транспортного тока зависит лишь концентрация вихрей (малые токи, $U \sim I$), к режиму, когда от величины тока зависят концентрация вихрей и скорость их движения ($U \sim I^2$) [4].

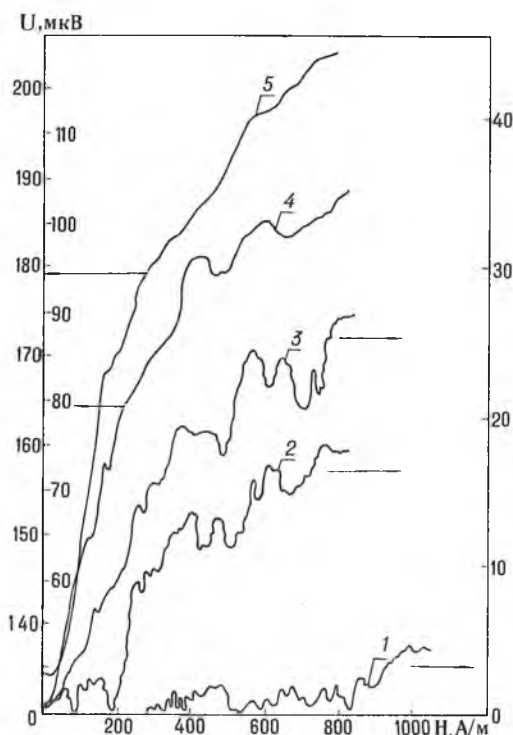


Рис. 2. Зависимость напряжения на переходе от магнитного поля для образца третьей группы при различных фиксированных токах: 1— $I = 1$ мА; 2— $I = 1,5$ мА; 3— $I = 1,75$ мА; 4— $I = 3$ мА; 5— $I = 4,5$ мА.

Для удобства представления кривых 4 и 5 на одном рисунке оси Y для них смещены относительно друг друга и указаны стрелками

Для мостиков второй группы ВАХ можно представить состоящей из двух степенных участков. Для начального участка в отсутствие магнитного поля $m = 1,67 - 1,7$. Приложение магнитного поля приводит к понижению значения показателя степени ($m = 1,2 - 1,3$). Для второго участка показатель степени, напротив, слабо зависит от магнитного поля, составляя $1,76 - 1,9$. Такая зависимость связывалась нами с изменением доминирующего типа вихрей при повышении величин тока и магнитного

поля, переходом от режима, определяемого гипер- или джозефсоновскими вихрями, к режиму, определяемому движением абрикосовских вихрей, характерному для мостиков первой группы.

Определив из зависимостей $I_c(H)$ значения критического тока для перколяционных путей и взяв для его плотности значения, характерные для пленок без слабых связей $j_c = 10^6 - 10^5$ А/см², получим суммарную ширину этих путей на самом слабом участке, который и определяет величину критического тока, $W = 0,5 - 5$ мкм. Поскольку порог протекания для двухмерных гауссовых систем составляет 0,5 [5], а результирующая ширина пленки, отвечающая сильной связи между зернами, значительно меньше половины, можно предположить, что в образовании сильных связей участвует много зерен, однако сильная связь устанавливается не по всему размеру гранул, а лишь в виде микроразоротов между ними.

К третьей группе мы отнесли пленки с наименьшими значениями плотности критического тока, $j_c < 10^4$ А/см². Для этих образцов характерна наиболее сильная зависимость критического тока от магнитного поля $j_c(H)$ для малых его значений. Зависимость неплывная, что объясняется неоднородностью распределения транспортного тока по ширине пленок, разбросом размеров слабых связей и образованных ими контуров квантования магнитного потока. Начальные участки ВАХ, имеющие степенной характер $U \sim I^m$ с $m = 1,3 - 1,5$, при повышении транспортного тока сменяются линейными.

Для анализа механизма движения вихрей в соответствии с [6] нами были построены зависимости $U(H)$ для фиксированных значений тока I через переход (рис. 2). Сглаживание кривых для напряжений $U > U_b \approx 140$ мкВ в соответствии с [6] можно связать с переходом к вязкому течению вихрей. Этим же значениям U соответствует и переход на участок линейной зависимости на ВАХ, характерный для вязкого течения вихрей. При использовании значения коэффициента вязкости движения джозефсоновских вихрей при $T = 77$ К $\eta = 6 \cdot 10^{-19}$ Н·с/м [6] в предположении наличия лишь одной слабой связи в перколяционном пути для ее ширины W из соотношения $U_b = v\Phi_0/W$, где $v = \Phi_0/\eta$ — скорость движения вихрей, получим $W = 3$ мкм, т. е. меньше ширины мостика. Следовательно, понижению критического тока пленок соответствует появление в перколяционных путях, образованных сильно связанными гранулами, одной или нескольких слабых связей, проникновение джозефсоновских вихрей в которые и особенности их движения, характер взаимодействия с захваченными в гранулах абрикосовскими вихрями определяют величину критического тока, вид вольтамперных характеристик и их изменение в магнитном поле.

1. Zagrodzinski J. // Physica C. 1991. V. 180. P. 216.
2. Соинин Э. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. № 8. С. 415.
3. Schneider J. et al. // Appl. Phys. Lett. 1993. V. 63. № 17. P. 2426.
4. Асламазов А. Л., Ларкин А. И. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. Вып. 2. С. 766.
5. Шкловский Б. И., Эфрос А. А. Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979. С. 147.
6. Satchel J. et al. // Physica C. 1991. V. 180. № 1—4. P. 247.

Поступила в редакцию 24.10.94.

УДК 621.315.592

В. П. БОНДАРЕНКО, Е. А. БОНДАРЕНКО, А. М. ДОРОФЕЕВ,
В. А. САМУЙЛОВ, Г. Н. ТРОЯНОВА

ПРОЦЕССЫ САМООРГАНИЗАЦИИ ПРИ ТРАНСПОРТЕ ЗАРЯДА В ПОРИСТОМ КРЕМНИИ

The experimental results on nonlinear charge transport in semi-insulating fractal-like porous silicon in high electric fields are presented. Low frequency current oscillations in porous Si have been found for the first time. This self-organized phenomena seems to be promising as a diagnostic tool for deep levels. Porous silicon is supposed to be a new semiconductor material for functional electronic.

Введение

Изучение пространственно разупорядоченных и фрактальных систем является одной из основных тенденций в современной физике твердого

тела [1, 2]. Пористый кремний (ПК), широко используемый в микроэлектронике, можно рассматривать как пример такой системы [3, 4]. Этот материал представляет собой слой монокристалла, пронизанный сетью микропор, формируемой при электрохимической анодной обработке поверхности кремниевых пластин в электролитах на основе плавиковой кислоты. Как специфическая морфологическая форма кристаллического кремния он известен уже более 30 лет [5]. Однако в последнее время ПК привлек внимание в связи с обнаружением его свойства излучать видимый свет при комнатной температуре [6]. Это позволяет надеяться на изготовление на основе ПК светоизлучающих элементов, полностью совместимых с кремниевыми микроэлектронными компонентами.

Электрофизические параметры ПК существенно отличаются от характеристик объемного материала. Предполагается [6], что для ПК характерно изменение зонной структуры, связанное с эффектами квантового ограничения в кристаллитах нанометровых размеров. В настоящее время вопрос о том, какая физическая модель адекватно описывает структуру и физические свойства ПК, остается открытым. Однако можно считать установленным факт, что ПК представляет собой полупрозрачный, более широкозонный по сравнению с объемным кремнием, полупроводниковый материал с высокой концентрацией глубоких центров, наличие и характеристики которых определяются состоянием внутренней поверхности пор [7—9]. Кроме того фракталоподобная структура ПК должна оказывать воздействие на процессы релаксации и рекомбинации неравновесного заряда в ПК [10].

Цель настоящей работы заключается в экспериментальном исследовании нелинейных динамических свойств в полупрозрачном фракталоподобном пористом кремнии в сильных электрических полях.

Материал и методика

Для изготовления экспериментальных образцов использовали пластины монокристаллического кремния марки КДБ-10(111). Эквипотенциальность планарной поверхности при проведении анодной обработки обеспечивалась дополнительным легированием непланарной стороны пластины бором и последующим напылением слоя алюминия (Al) толщиной 0,5 мкм. Вжигание металла проводили в азоте. Пленки ПК толщиной 1,5 мкм и различной пористостью (40—55 %) получали анодированием в 48 %-ной плавиковой кислоте (HF) при плотности тока в диапазоне 5—80 мА/см². Перед нанесением слоя алюминия половину каждой пластины на 1 мин погружали в 5 %-ный водный раствор HF для удаления с поверхности структуры естественного слоя оксида. Затем проводилось вакуумное напыление слоя Al (0,5 мкм) и формирование контактов 1×1 мм², с расстоянием между ними 2 мм. Таким образом, из одной структуры ПК-pSi были получены два типа образцов, отличавшихся технологией изготовления.

Вольтамперные характеристики (ВАХ) структур со слоем ПК были исследованы в сильных электрических полях на установке с диапазонами напряжения 10^{-2} — 10^2 В и тока 10^{-10} —1 А. Эффекты токовой неустойчивости изучались с помощью методики для измерения зависимости сигнала от времени. Осцилляции тока с амплитудой более 10^{-11} А усиливались и пропускались через низкочастотный фильтр во избежание наблюдения ложных пиков, превышающих частоту Найквиста [11]. Оцифровка сигнала производилась 14-разрядным АЦП с частотой дискретизации 200 Гц и ниже. Запоминание и быстрое преобразование Фурье производилось на IBM-совместимом компьютере.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 приведены ВАХ структур Al—ПК—pSi. Обнаружено, что обработка поверхности ПК перед напылением контактов существенно изменяла характер ВАХ исследуемых структур.

Для ВАХ структур, изготовленных без обработки в HF, характерно насыщение тока в области высоких напряжений или даже появление участков N-типа с отрицательным дифференциальным сопротивлением.

Можно предположить, что этот эффект связан со стимулированными электрическим полем процессами захвата на ловушечные состояния в сильных электрических полях. Кроме этого наблюдалось явление гистерезиса тока. Гистерезис на ВАХ может быть вызван влиянием континуума локализованных состояний непрерывно распределенных в пространстве и по энергиям в запрещенной зоне на поверхности раздела ПК-SiO₂. Эти состояния могут быть причиной чрезвычайно широкого спектра постоянных времени [12].

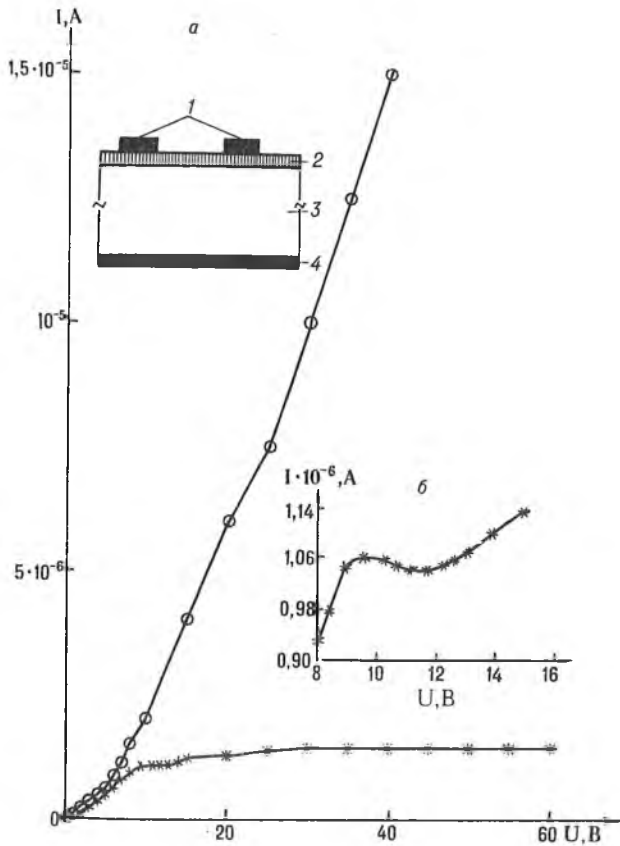


Рис. 1. Вольтамперные характеристики структур ПК с алюминиевыми контактами:

■ — для структур, изготовленных без обработки в плавиковой кислоте; ○ — для структур, изготовленных с обработкой в плавиковой кислоте; вставка а — схематическое изображение поперечного сечения исследованных структур; 1, 4 — Al контакты; 2 — слой пористого кремния; 3 — монокристаллическая подложка; вставка б — участок ВАХ с отрицательным дифференциальным сопротивлением

ВАХ структур, которые обрабатывались в HF перед напылением контактов, имели сверхлинейный характер. Для них характерно отсутствие насыщения в области высоких напряжений. Такая особенность может быть следствием уменьшения концентрации ловушек в ПК в результате проведения обработки его поверхности в HF [13] за счет пассивации локализованных состояний или удаления с поверхности слоя естественного оксида.

Нами впервые были обнаружены низкочастотные квазигармонические токовые осцилляции в структурах на основе пористого кремния (рис. 2, а). Был проведен Фурье-анализ этих осцилляций (рис. 2, б), позволивший выявить значения их основных частот. Частоты осцилляций варьировались в диапазоне 0,1—10 Гц. На рис. 3 представлена экспериментально полученная зависимость частоты основной моды осцилляции от приложенного напряжения. Видно, что с ростом смещения частота осцилляций монотонно возрастает, а при определенных значениях на-

пряжения появляется дополнительная мода. Можно предположить, что переход к хаотическим осцилляциям в ПК может соответствовать сценарию Рюэля—Такенса—Ньюхауса [14].

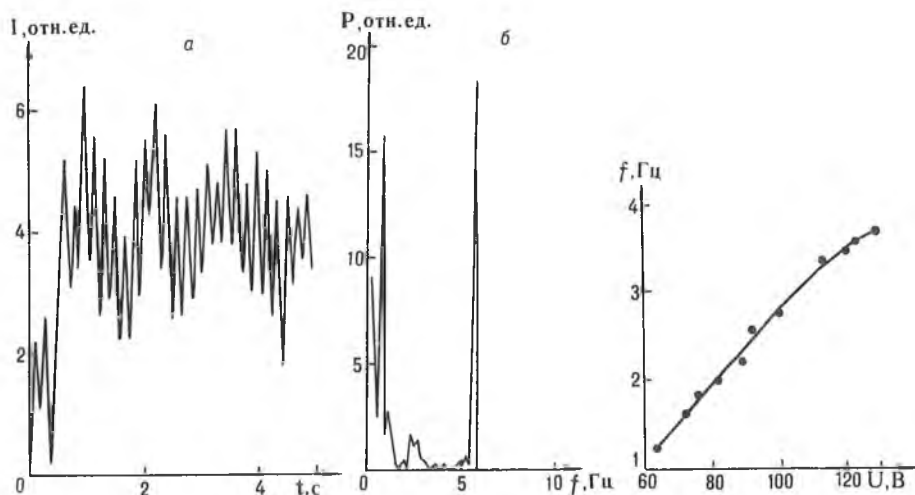


Рис. 2. Низкочастотные осцилляции тока (а) и Фурье спектр (б) в структурах с ПК
Рис. 3. Зависимость основной частоты низкочастотных осцилляций тока в структурах ПК от приложенного напряжения

Вероятным механизмом возникновения низкочастотных осцилляций в ПК может быть следующий механизм [15]. Инжектированные в ПК носители заряда захватываются ловушечными состояниями на поверхности кремниевых нанокристаллитов и таким образом происходит формирование встроеного электрического поля. Когда его величина достигает определенного порогового значения, возникают условия для ударной ионизации захваченных носителей. Концентрация свободных носителей заряда в полуизолирующем ПК возрастает. Процесс диэлектрической релаксации заряда приводит к уменьшению напряженности встроеного поля до величины, меньшей пороговой, захват носителей на ловушечные состояния начинает преобладать и процесс повторяется.

Обнаружение в пористом кремнии низкочастотных токовых осцилляций позволяет рассматривать его как перспективный материал для функциональной электроники. Анализ токовых осцилляций может оказаться полезным инструментом для исследования глубоких уровней в пористом кремнии. Такой метод, основанный на исследовании периодических, непериодических и хаотических осцилляций [16, 17], является полезным и информативным для определения концентрации глубоких центров, особенно полуизолирующих полупроводников, для которых стандартные методики (например DLTS) не применимы [18].

1. Richter D., Dianoux A. J., Petry W., Teixeira K. Dynamics of Disordered Materials. Berlin, 1989.
2. Schilling R. In Dynamics in Solids / Ed. by H. Thomas. Berlin, 1992.
3. Smith R. L., Collins S. D. // J. Appl. Phys. 1992. V. 71. R1.
4. Searson P. S., Macaulay J. M. // Nanotechnology. 1992. V. 3. № 188.
5. Лабуннов В. А., Бондаренко В. П., Борисенко В. Е. // Зар. электронная техника. 1978. Вып. 15.
6. Сэнхэм Л. Т. // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 57. № 10. P. 1046.
7. Inoue K., Machashi K., Nakashima H. // J. J. Appl. Phys. 1993. V. 32. № 3B. Pt. 2. P. L. 361.
8. T. van Buuren, Gao Y., Tiedje T. et al. // Appl. Phys. Lett. 1992. V. 60. № 24. P. 3013.
9. Cadet C., Deresmes D., Vuillaume D. et al. // Materials Science Forum. 1994. V. 143—147. P. 1475.
10. Chen Z., Bosman G., Ochoa R. // Appl. Phys. Lett. 1993. V. 62. № 7. P. 708.
11. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М., 1982.
12. Li He, Hasegawa H., Sawada T., Ohno H. // J. Appl. Phys. 1988. V. 63. № 6. P. 2120.
13. Cheung W. Y., Wong S. P., Wilson I. H. et al. // Mat. Res. Soc. Symp. Proc. 1993. V. 283. P. 155.

14. Dorosinets V. A., Poklonski N. A., Samuilov V. A., Stelmakh V. F. // Sov. Phys. Semicond. 1988. V. 49. № 6. P. 476.
 15. Schöll E. // J. Phys. Chem. Solids. 1988. V. 49. № 6. P. 651.
 16. Marakas G. N., Jonson D. A., Goronkin H. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 46. № 3. P. 305.
 17. Backhouse C., Samuilov V. A., Young L. // Appl. Phys. Lett. 1992. V. 60. № 23. P. 2906.
 18. Walukiewicz W., Ladowski J., Gatos H. C. // Appl. Phys. Lett. 1983. V. 43. № 2. P. 192.

Поступила в редакцию 27.09.94.

УДК 621.315.592.

Т. М. ВЕСЕЛОВА, В. А. САМУЙЛОВ

ЭФФЕКТЫ САМООРГАНИЗАЦИИ И ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В ПОЛУИЗОЛИРУЮЩЕМ GaAs

The period-doubling bifurcations and intermittent chaotic behaviour of low frequency current oscillations were found to be observed at the same samples in dependence on applied voltage. The dependences of principal frequency modes on applied voltage was found to be sharply nonmonotonical. The influence of arsenic pressure under heat treatment on LFO's peculiarities and routes to chaos was found.

Введение

Полуизолирующие полупроводники представляют собой интересный объект для экспериментальных исследований нелинейной динамики и детерминированного хаоса [1]. Фундаментальной проблемой в этих исследованиях нелинейной динамики является установление соответствия между микроскопическими параметрами материалов и явлениями образования в них пространственно-временных структур при нелокальных внешних воздействиях [2]. В литературе имеются сведения об экспериментальных попытках получения информации о глубоких уровнях в зоне запрещенных энергий полуизолирующих полупроводников GaAs [3] и InP [4] посредством анализа температурных зависимостей частотных мод низкочастотных осцилляций электрического тока, обусловленных захватом электронов, который стимулирован электрическим полем, на глубокие уровни и эмиссией с них. Этот метод очень полезен и продуктивен [5], поскольку традиционные методики, такие как неравновесная токовая и емкостная спектроскопия глубоких уровней, плохо применимы к полуизолирующим полупроводникам [6].

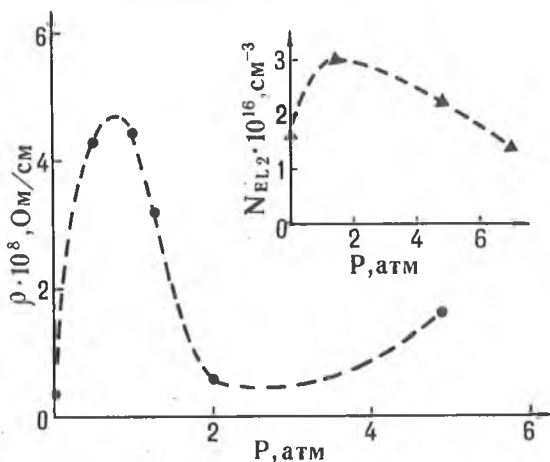


Рис. 1. Удельное сопротивление образцов и концентрация EL2-центров как функции давления мышьяка

Особенностью данной работы является то, что в ней впервые представлены экспериментальные результаты влияния технологических режимов обработки образцов полуизолирующего GaAs, обуславливающей

изменение микроскопических параметров, на свойства процессов нелинейной динамики при транспорте заряда в полуизолирующем GaAs.

Экспериментальные образцы и результаты

Исследовались монокристаллы полуизолирующего GaAs, выращенные методом Чохральского. Исходные слитки отжигались при различном давлении мышьяка $P(As_2) = (0-5)$ атм при температуре в зоне кристалла $1000^\circ C$ в течение 5 ч. Контроль давления As_2 осуществлялся заданием температуры в зоне его испарения. Концентрация $EL2$ -центров немонотонно зависит от давления As_2 с максимумом при 1 атм [7].

Изучение эффектов неустойчивости электрического тока в сильном электрическом поле производилось при постоянном напряжении и комнатной температуре в отсутствие подсветки. Сигнал регистрировался и усиливался в аналоговой форме, оцифровывался с помощью 14-разрядного АЦП и передавался на компьютер, который выполнял Фурье-преобразование.

На рис. 1 представлены зависимости удельного сопротивления образцов и концентрации $EL2$ -центров от давления мышьяка. На обеих кривых максимум наблюдается в области давления 1 атм.

Вольт-амперные характеристики образцов подобны представленным в [8]. Их можно разбить на следующие области: 1) линейный и сублинейный участок; 2) малые квазигармонические осцилляции; 3) квазипериодические осцилляции большой амплитуды для образца, отожженного при $P(As_2) = 0,0$ атм, и релаксационные осцилляции для остальных образцов; 4) хаотические осцилляции (наблюдались только для образца, отожженного при $P(As_2) = 0,0$ атм).

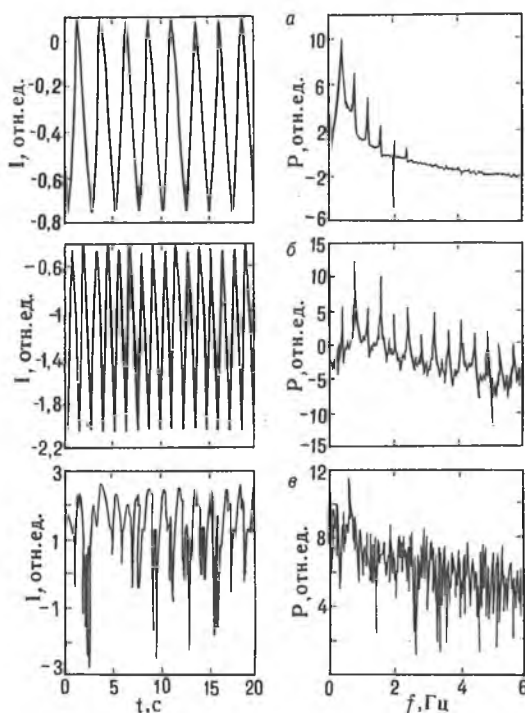


Рис. 2. Временные развертки токовых осцилляций и соответствующие им спектры мощностей при различных напряжениях, В:
а - 15; б - 35; в - 100

Многие нелинейные физические системы демонстрируют переход от регулярного поведения к хаотическому при изменении контрольного параметра [2]. Существует несколько универсальных путей к хаосу [9-12]. На наших образцах осцилляции наблюдались при низких электрических полях. Переход к хаосу происходил через бифуркации удвоения

периода [9] и перемежаемость [10]. Приложенное напряжение является бифуркационным параметром для такой системы (рис. 2).

На рис. 3 изображены немонотонные зависимости основных частотных мод от напряжения.

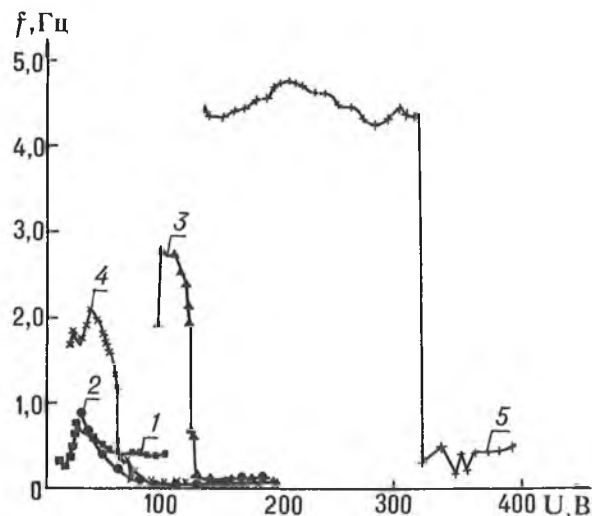


Рис. 3. Зависимости основных частотных мод от приложенного напряжения, $P(\text{As}_2)$ атм:
1 - 0.0; 2 - 1.0; 3 - 1.3; 4 - 2.0; 5 - 4.9

Согласно [8], различие между второй и третьей областями ВАХ соответствует переходу от синусоидальных токовых осцилляций (слабые, флуктуирующие домены, образующиеся в некоторых точках у катодной границы) к релаксационным колебаниям (домены сильного поля, образующиеся по всей толщине и распространяющиеся от катода к аноду, где релаксируют, и цикл начинается снова). Мы полагаем, что причиной резкого уменьшения частоты основных частотных мод может являться этот переход. Наши экспериментальные результаты по резко немонотонным зависимостям частотных мод от электрического поля при учете разных значений концентрации $EL2$ -центров в результате технологической обработки могут соответствовать переходу между двумя механизмами осцилляций.

Исследования зависимости частотных мод от температуры и эксперименты по прямому наблюдению пространственно-временных структур в GaAs могут помочь в объяснении представленных результатов.

1. Schöll E. Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors. Berlin, 1987.
2. Huebner B. R., Peinke J., Parisi J. // Appl. Phys. 1989. V. A48. P. 107.
3. Maracas G. N., Johnson D. A., Goronkin H. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 46. P. 305.
4. Backhouse C., Samuilov V., Young L. // Ibid. 1992. V. 60. P. 2906.
5. Backhouse C., Young L. // Solid State Electronics. 1992. V. 35. P. 1601.
6. Walukiewicz W., Lagowski J., Gatos H. C. // Appl. Phys. Lett. 1983. V. 43. P. 192.
7. Chen Chao, Вук овски V. A., Тарасик M. I. // Physics and Technics of Semiconductors. 1994. V. 28. P. 35.
8. Willing B., Maan J. C. // Phys. Lett. 1993. July 23.
9. Кнар W., Jesewski M., Luzakovski J., Kuszko W. // Solid State Electr. 1988. V. 31. P. 813.
10. Maracas G. N., Porod W., Johnson D. A. et al. // Physica B. 1985. V. 134. P. 276.
11. Požela J., Tamasevicius A., Ulbikas J. // Appl. Phys. 1989. V. A48. P. 181.
12. Schöll E. // Physica Scripta. 1989. V. T29. P. 152.

Поступила в редакцию 26.09.94.

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА ПРОСВЕТЛЕНИЕ ГОФРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ

The effect of anisotropy on bleaching of the corrugate surface of dielectrics has been studied.

Одним из способов просветления поверхности диэлектриков является создание на границе рельефа с периодом, значительно меньшим длины волны [1]. Однако такой метод просветления практически может быть реализован только для излучения ИК диапазона, где современные технологии позволяют получать нужный период гофра. Учитывая, что большинство оптических материалов для этого диапазона являются кристаллами, представляет интерес рассмотрение влияния анизотропии материала на эффект просветления.

Для того чтобы рассмотреть просветление анизотропного материала, представим его поверхность равномерно заполненной цилиндрами из того же материала с диаметрами $d < \lambda/2$, расположенными перпендикулярно плоскости поверхности. Такая граница может быть рассмотрена как слой диэлектрика с эффективной диэлектрической проницаемостью ϵ_{ef} [2]. В случае анизотропного материала диэлектрическая проницаемость будет различной для обыкновенной ϵ_{e0} и $\epsilon_{e\epsilon}$ необыкновенной волн. Эффективная диэлектрическая проницаемость определяется соотношением:

$$\frac{\epsilon_{ef}^{o,e} - n_a^2}{\epsilon_{ef}^{o,e} + 2n_a^2} = q \frac{n_{o,e}^2 - n_a^2}{n_{o,e}^2 + 2n_a^2},$$

где $n_{o,e}$ — показатель преломления материала пленки для обыкновенной и необыкновенной волн, n_a — показатель преломления окружающей среды, q — относительный объем, занимаемый цилиндрическими частицами в пленке.

В соответствии с [2] диэлектрическая проницаемость пленки будет определяться из условия полного просветления следующим образом:

$$\epsilon_{ef} = \left\{ (1 - \sin^2 f) (n^2 - \sin^2 f) \right\}^{1/2} + \sin^2 f, \quad (1)$$

где n — показатель преломления пленки, f — угол падения света для волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, и

$$\epsilon_{ef||} = \frac{n^2 + \left\{ n^4 - 4 \left\{ (1 - \sin^2 f) (n^2 - \sin^2 f) \right\}^{1/2} n^2 \sin^2 f \right\}^{1/2}}{2 \left\{ (1 - \sin^2 f) (n^2 - \sin^2 f) \right\}^{1/2}}, \quad (1')$$

для волны, поляризованной параллельно плоскости падения.

Из соотношений (1) и (1') получаем, что при нормальном падении света ($f = 0$) $\epsilon_{ef\perp} = n$, $\epsilon_{ef||} = n$.

Очевидно, что при такой геометрии для определенной величины n всегда можно подобрать значение q , позволяющее просветлить слой для обоих направлений поляризации световой волны.

Учтем влияние анизотропии на эффект просветления раздела диэлектриков. Пусть диэлектрическая среда с внедренными в нее цилиндрическими частицами обладает оптической анизотропией. Тогда в формулах (1, 1') ϵ_{ef} будет иметь вид, определяемый направлением оптической оси кристалла.

Рассмотрим несколько характерных случаев.

1. Плоскость падения проходит через оптическую ось, параллельную границе (рис. 1а).

Падающую волну разложим на составляющие, поляризованные в плоскости падения и в перпендикулярном направлении. Выражения (1, 1') для данного случая примут вид:

$$\epsilon_{ef} = \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_o - \sin^2 f) \right\}^{1/2} + \sin^2 f,$$

$$\epsilon_{ef||} = \frac{\left\{ \epsilon_f + \left\{ (\epsilon_f^2 - 4 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_f - \sin^2 f) \right\}^{1/2} \epsilon_f \sin^2 f) \right\} \right\}^{1/2}}{2 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_f - \sin^2 f) \right\}^{1/2}},$$

где $\epsilon_{o,e} = n_{o,e}^2$ — для обыкновенной и необыкновенной волн. Причем для такого расположения оптической оси зависимость ϵ_f от угла падения имеет вид:

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_o \epsilon_e}{\epsilon_o \cos^2 f + \epsilon_e \sin^2 f}.$$

2. Оптическая ось перпендикулярна границе раздела, плоскость падения проходит через оптическую ось (рис. 1, б).

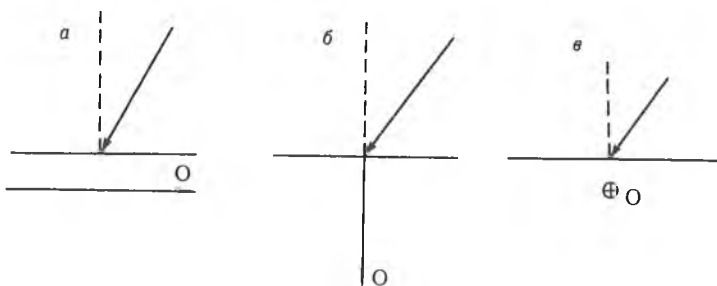


Рис. 1. Ориентация оптической оси кристалла

Выражения (1, 1') для такого случая имеют вид:

$$\epsilon_{ef} = \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_o - \sin^2 f) \right\}^{1/2} + \sin^2 f,$$

$$\epsilon_{ef||} = \frac{\left\{ \epsilon_f + \left\{ (\epsilon_f^2 - 4 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_f - \sin^2 f) \right\}^{1/2} \epsilon_f \sin^2 f) \right\} \right\}^{1/2}}{2 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_f - \sin^2 f) \right\}^{1/2}},$$

а зависимость ϵ_f от угла падения f :

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_o \epsilon_e}{\epsilon_o \cos^2 (\pi/2 - f) + \epsilon_e \sin^2 (\pi/2 - f)}.$$

3. Оптическая ось параллельна границе раздела, плоскость падения перпендикулярна оптической оси (рис. 1, в). Выражения (1,1') имеют вид:

$$\epsilon_{ef} = \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_f - \sin^2 f) \right\}^{1/2} + \sin^2 f,$$

$$\epsilon_{ef||} = \frac{\left\{ \epsilon_o + \left\{ (\epsilon_o^2 - 4 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_o - \sin^2 f) \right\}^{1/2} \epsilon_o \sin^2 f) \right\} \right\}^{1/2}}{2 \left\{ (1 - \sin^2 f) (\epsilon_o - \sin^2 f) \right\}^{1/2}}.$$

Зависимость ϵ_f от угла падения f :

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_o \epsilon_e}{\epsilon_o \cos^2 (0) + \epsilon_e \sin^2 (0)} = \epsilon_e.$$

На рис. 2 представлены рассчитанные зависимости величины q , кото-

рая соответствует полному просветлению границы, от угла падения f для кристалла Hg_2Cl_2 , имеющего положительную анизотропию ($n_o = 1,96$ и $n_e = 2,60$), и CaCO_3 , имеющего отрицательную анизотропию ($n_o = 1,66046$ и $n_e = 1,48736$) (рис. 3). Как видно из графиков, в случае, когда оптическая ось перпендикулярна границе раздела и плоскость падения проходит через ось (рис. 2, б, 3, б), как и в случае изотропной среды, всегда можно подобрать значение q , позволяющее при нормальном падении света просветлить слой для обыкновенной и необыкновенной волн одновременно. Для двух других рассмотренных случаев расположения оптической оси результаты имеют иной качественный характер. Для кристалла Hg_2Cl_2 , имеющего положительную анизотропию, в случае, когда оптическая ось параллельна границе раздела и перпендикулярна плоскости падения, одновременное просветление для любой поляризации падающей волны (т. е. для обеих компонент поляризации одновременно) возможно лишь при $q = 0,514$ для угла падения $f = 0,37$ рад (рис. 3, д). Если оптическая ось параллельна границе раздела и плоскость падения проходит через оптическую ось (рис. 3, а), одновременного просветления для различных поляризаций достигнуть невозможно. Для кристалла Ca_2CO_3 , имеющего отрицательную анизотропию, одновременное просветление возможно в случае, если оптическая ось параллельна разделу и плоскость падения проходит через оптическую ось (см. рис. 2, а) ($q = 0,48$ и $f = 0,136$ рад).

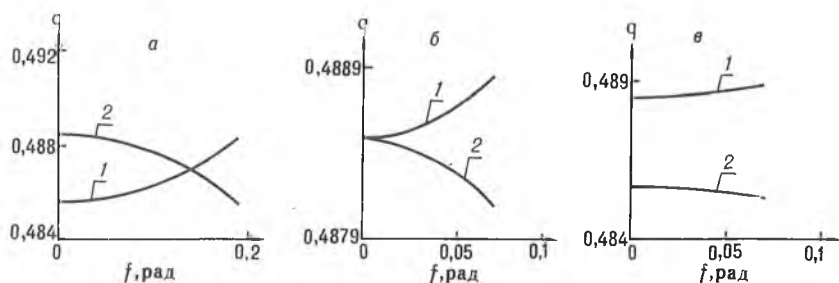


Рис. 2. Зависимость коэффициента заполнения q от угла падения f для кристалла Hg_2Cl_2 :
1 — для волны, поляризованной в плоскости падения; 2 — для волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения

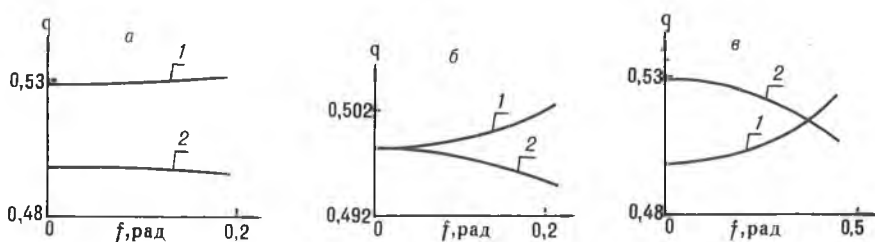


Рис. 3. Зависимость коэффициента заполнения q от угла падения f для кристалла CaCO_3 :
1 — для волны, поляризованной в плоскости падения; 2 — для волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения

Таким образом, просветление анизотропных материалов для любой поляризации падающей волны возможно только для определенных значений коэффициентов заполнения и угла падения света, которые определяются знаком анизотропии и ориентацией кристаллической оси.

1. В л а с о в С. Н., К о л о с о в а Е. В. // ЖТФ. 1993. Т. 63. № 3. С. 123.
2. А з а м Р., Б а ш а р а Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М., 1981. С. 408.

Поступила в редакцию 06.06.94.

Г. А. ГОВОР, В. М. ДОБРЯНСКИЙ,
А. А. ЛЕУСЕНКО, Г. М. ЧОБОТ

ТЕРМОСТОЙКОСТЬ КУБИЧЕСКОГО НИТРИДА БОРА МАРКИ «СВЕТЛАНІТ»

The characteristic intervals of temperatures at which a loss of mass due to the deterioration of thermo-resistance of the material is observed has been determined. It is established that the thermo-resistance of CBN mk «Svetlanit» is preserved up to 1300 K.

Метод прямого (без специального введения катализаторов-растворителей) превращения графитоподобного нитрида бора в кубическую модификацию нитрида бора (КНБ) при давлениях 4,0—9,0 ГПа и температурах 2000—3000 К [1, 2] позволяет получить поликристаллы КНБ с повышенными физико-механическими свойствами. При этом установлено, что зернистость, чистота, степень совершенства кристаллической структуры исходного нитрида бора существенно влияют на скорость превращения и свойства синтезированных поликристаллов [2—4]. Для исключения отрицательного влияния на свойства поликристаллов КНБ присутствия в порошке графитоподобного нитрида бора воды, оксида бора и адсорбированных газов спрессованные заготовки (по форме и размерам равные реакционному объему камеры высокого давления) подвергались отжигу в вакуумной печи при остаточном давлении не более $1,3 \cdot 10^{-3}$ Па и температуре порядка 1500 К. После отжига вакуумная печь заполнялась азотом химической чистоты, что исключало проникновение в объем заготовки влаги в процессе дальнейшей подготовки к синтезу. Для получения высокочистых поликристаллов КНБ также использовался пиролитический нитрид бора (ПНБ), являющийся высокочистым монокристаллическим материалом.

Термобарическая обработка высокочистых исходных материалов с соблюдением специальных мер, исключающих попадание примесей из контейнера и графитового нагревателя в процессе синтеза, производилась в аппаратах высокого давления типа наковален с лункой «елочка» [5]. Получаемый в этих условиях высокочистый поликристаллический кубический нитрид бора имеет товарный знак «Светланіт» и обладает уникальными физико-механическими и режущими свойствами [2, с. 109]: модули упругости $E_{\text{пар}} = 680—800$ ГПа вдоль оси образца и перпендикулярно ей $E_{\text{перп}} = 840—920$ ГПа; теплопроводность $\lambda_{\text{пар}} = 150$ Вт/м·К; $\lambda_{\text{перп}} = 280$ Вт/м·К; пьезомодули $d_{\text{пар}} = -(0,5—5) \cdot 10^{-13}$ Кл/Н; удельное электросопротивление $10^{11}—10^{16}$ Ом·м; диэлектрическая проницаемость 6,9 на частоте 1 кГц; тангенс диэлектрических потерь $3,55 \cdot 10^{-4}$ на частоте 3 кГц; полосы поглощения ИК спектра лежат в области волновых чисел 580 см^{-1} , $1000—1300 \text{ см}^{-1}$, $1600—2200 \text{ см}^{-1}$.

Исследование термостойкости КНБ марки «Светланіт» проводили с помощью прибора «Дериватограф» производства ВНР. Исследовалась термогравиметрия (ТГ), дифференциальный термический анализ (ДТА) в диапазоне температур от комнатной до 1800 К при линейном законе изменения температуры. Нагрев осуществлялся со скоростью 7,5 К/мин как в воздушной стационарной атмосфере, так и в гелиевой динамической атмосфере.

На рис. 1 представлены зависимости температуры навески КНБ марки «Светланіт» (кривая 1), потери массы навески в зависимости от времени измерения в воздушной стационарной атмосфере (кривая 2) и в гелиевой динамической атмосфере (кривая 3). Как следует из рисунка, имеют место две температурные области, в которых наблюдается потеря массы навески в воздушной стационарной атмосфере, первоначальная величина которой равнялась 600 мг. В первой области температур (300—900 °С) происходит плавное уменьшение массы навески с постоянной скоростью порядка 0,01 мг/мин, что соответствует общей потере массы (4,5 мг) на этом температурном участке. В области температур (900—1150 °С) наблюдается резкое понижение массы навески. В этом температурном интервале абсолютное уменьшение массы равно 19 мг.

Таким образом, общая потеря массы в диапазоне температур (300—1150 °С) равна 23,5 мг, что составляет 3,9 % от первоначальной массы навески. Причем в первом температурном интервале испаряется 0,8 %, а во втором 3,1 % от общей массы навески.

В гелиевой динамической атмосфере величина массы навески перед

началом измерения равнялась 500 мг. Как следует из рис. 1 (кривая 3), в данном случае также имеют место две температурные области, в которых наблюдается потеря массы навески. На первом участке температуры 300—900 °С теряется 2,5 мг навески, что составляет 0,6 % от ее общей массы. В области температур 900—1150 °С наблюдается резкое уменьшение массы навески, при этом ее абсолютное уменьшение составляет 9 мг (1,8 % от общей массы).

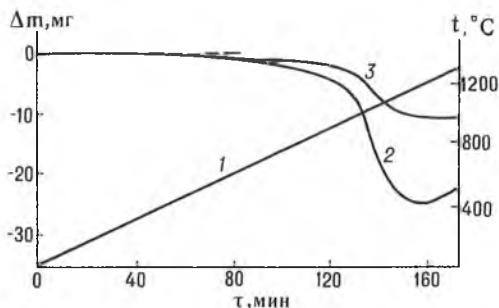


Рис. 1. 1 — зависимость температуры навески кубического нитрида бора марки «Светланит»; 2 — потери массы навески от времени измерения в воздушной стационарной атмосфере; 3 — в гелиевой динамической атмосфере

При проведении исследований в воздушной атмосфере в диапазоне температур 300—1150 °С теряется несколько большая масса (3,9 %), чем в гелиевой атмосфере (2,4 %). Сравнение кривых 2 и 3 на рис. 1 показывает, что в области температур 850—1200 °С наблюдается принципиальное отличие в поведении кривых. Исследования в гелиевой динамической атмосфере при температуре выше 1200 °С изменений массы навески практически не выявили, в то время как в воздушной атмосфере при температурах выше 1200 °С наблюдается некоторое увеличение массы навески, что связано, по всей видимости, с окислением исследуемого материала.

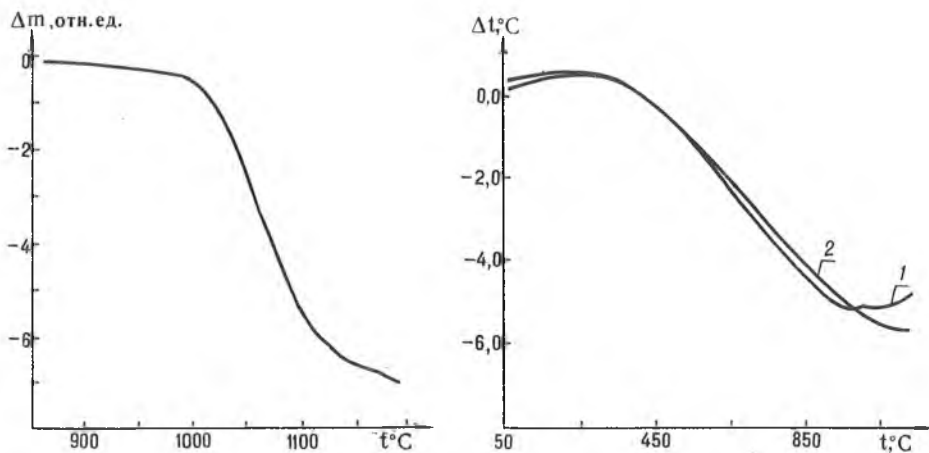


Рис. 2. Зависимость потери массы (в относительных единицах) от температуры навески кубического нитрида бора марки «Светланит» при скорости нагрева 15 С/мин

Рис. 3. Результаты исследований ДТА кубического нитрида бора марки «Светланит» при скорости нагрева:
1 — 10 С/мин, 2 — 5 С/мин

Скорость нагрева навески КНБ марки «Светланит» практически не влияет на величину температурного интервала, соответствующего резкой потере массы навески. На рис. 2 представлена зависимость потери массы (в относительных единицах) от температуры навески в диапазоне

850—1200 °С при скорости нагрева 15 С/мин. Из рис. 1 и 2 легко заметить, что температурные области, соответствующие резкому уменьшению массы навески, практически совпадают.

Таким образом, результаты проведенных исследований термогравиметрии свидетельствуют о том, что термостойкость кубического нитрида бора марки «Светланит» нарушается при температурах выше 900 °С. При исследовании дифференциального термического анализа (ДТА) изменение температуры в печи нагрева осуществляли в линейном режиме со скоростью 5 и 10 С/мин. Измерение температуры при ДТА проводили традиционным способом при помощи Pt—Pt—Rh термопар в воздушной стационарной атмосфере. В качестве инертного материала использовали окись алюминия.

На рис. 3 представлены результаты исследования ДТА порошкообразных навесок кубического нитрида бора марки «Светланит» в диапазоне температур 50—1200 °С при скоростях нагрева 5 С/мин (кривая 2) и 10 С/мин (кривая 1). Как следует из рис. 3, в диапазоне температур от комнатной до 300 °С разница температур исследуемого и инертного материалов практически не изменяется. Однако, начиная с температуры 300 °С и до 900 °С, наблюдается практически линейное увеличение разности температур. Следует отметить, что этот температурный диапазон хорошо коррелирует с первым температурным интервалом, соответствующим уменьшению массы навески КНБ (см. рис. 1).

Таким образом, исследования термогравиметрии, ДТА в различных средах показали, что термостойкость КНБ марки «Светланит» сохраняется до температуры 1300 К. При более высокой температуре интенфицируется обратный процесс превращения КНБ в его графитоподобную модификацию.

1. А. с. 286743 СССР. В 23В27/16. Способ получения кубического нитрида бора.
2. Мазуренко А. М., Ракицкий Э. Б. и др. Техника и технологии высоких давлений. Мн., 1990. С. 189.
3. Бойко Б. Б., Мазуренко А. М., Леусенко А. А. Сверхтвердые материалы. Киев, 1981. Т. 1. С. 16.
4. Мазуренко А. М., Леусенко А. А. и др. // Синтетические алмазы. 1982. № 2. С. 11.
5. А. с. 1417253 СССР. В 0113/06. Устройство для создания сверхвысокого давления.

Поступила в редакцию 03.10.94.

УДК 621.396.181.48

А. А. ЛАБУДА, А. А. СИДЕРКО

ДЕФЕКТНОСТЬ СЛОЕВ БОРОФOSFOSИЛИКАТНОГО СТЕКЛА, ОСАЖДЕННОГО ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

The conditions of defect formation in the layers of borophosphosilicate glass in the process of planarization have been determined, their classification has been performed and the processing regimes for their minimization have been determined.

Слои борофосфоросиликатного стекла (БФСС) являются перспективным материалом межуровневой изоляции интегральных микросхем (ИМС), так как позволяют производить планаризацию поверхности приборов при более низких температурах, чем в случае использования фосфоросиликатного стекла (ФСС) [1, 4]. Однако в технологическом процессе при использовании этого материала на обрабатываемой поверхности появляется ряд неконтролируемых дефектов в виде иородных включений, трещин и др., что приводит к увеличению брака и снижению процента выхода годных изделий. Поэтому выявление причин и закономерностей дефектообразования в БФСС имеет практическое значение для технологии производства ИМС. Данная проблема рассматривалась в [1, 2] для стекол, полученных методами окисления гидридов при температуре 440 °С и пиролизом элементоорганических соединений [3]. В настоящей работе обобщены исследования по дефектообразованию в слоях БФСС блока технологических операций: осаждение БФСС — химическая обработка — оплавление.

Экспериментальная часть

Пленки БФСС осаждались на структуры со сформированным рельефом из легированного поликристаллического кремния методом окисления газовых смесей моносилана, фосфина, диборана с аргоном и кислородом при температуре 325 °С в реакторе атмосферного давления вертикального типа с холодной стенкой [5]. Контроль компонентного состава пленок, в частности содержания в них бора и фосфора, производился по методике, изложенной в [5]. Были опробованы различные способы химических обработок пленок БФСС с целью уменьшения их дефектности. Оплавление стекла проводилось при атмосферном давлении в среде сухого кислорода при температуре 850 °С.

В ходе выполнения исследований было установлено, что дефекты в БФСС могут образовываться как в процессе осаждения пленки, так и при их химической обработке, а также в период межоперационного хранения.

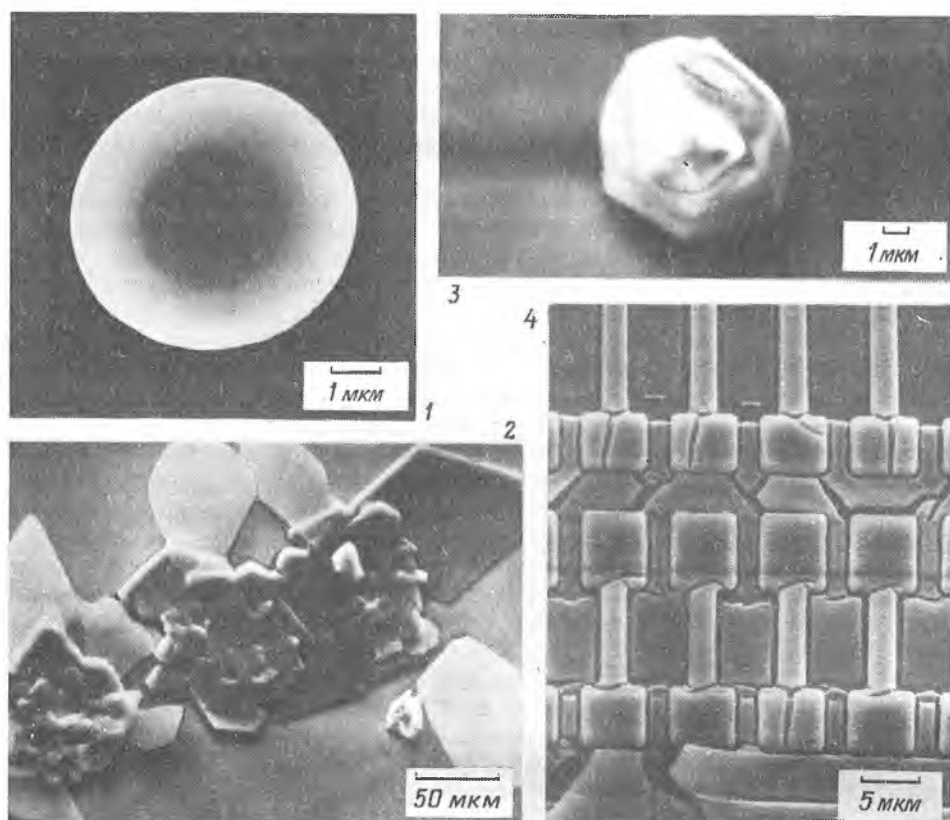


Рис. 1. Микрофотография дефекта типа «пустоты» в БФСС

Рис. 2. Микрофотография дефекта типа «чешуйки» борной кислоты

Рис. 3. Микрофотография дефекта на поверхности БФСС, образовавшегося после отмывки на автомате гидромеханической отмывки и после термообработки

Рис. 4. Растрескивание слоев свежеосажденного БФСС при отмывке в растворе КАРО и последующей термообработке

При осаждении БФСС в реакторах вертикального типа с «холодной стенкой» возможно загрязнение пленки продуктом реакции — аэросилом, осаждаемым на подколпачных устройствах реактора в незначительных количествах. Данные дефекты имеют большие линейные размеры, более 5—10 мкм, и хорошо классифицируются с помощью оптического микроскопа. Они могут быть частично устранены гидромеханической отмывкой.

Из-за некачественной подготовки поверхности ИМС перед осаждением БФСС возможно загрязнение потожировыми отпечатками, органиче-

скими веществами и т. п. При осаждении пленки есть вероятность возникновения «пустот»: достаточно крупных шарообразных образований в толщине пленки с линейными размерами свыше 4 мкм. На рис. 1 приведена микрофотография дефекта данного типа, полученная на просвечивающем электронном микроскопе. При качественной отмывке поверхности структур перед осаждением БФСС возникновения данных дефектов не наблюдается.

Хранение структур со свежесажденными пленками БФСС способствует интенсивному дефектообразованию. На поверхности пленок могут образовываться «чешуйки» борной кислоты, легко классифицируемые под оптическим микроскопом по их неправильной форме и линейному размеру более 3 мкм. При нагревании свыше 280 °С происходит возгонка данных образований. На рис. 2 представлена микрофотография одного из таких дефектов, полученная методом растровой электронной микроскопии через 38 ч после осаждения. Содержание бора и фосфора в образцах было 5,74 и 2,87 весовых частей соответственно. Отмечено, что с повышением процентной концентрации бора в стекле время, необходимое для образования дефектов данного типа, уменьшается и при концентрации бора порядка 8,5 и фосфора порядка 2,9 весовых частей оно составляет ~5 мин. Были отмечены случаи образования «чешуек» борной кислоты в течение 30 мин при содержании в БФСС 5,49 весовых частей бора и 2,97 — фосфора.

Наблюдение за динамикой роста «чешуек» борной кислоты показало, что после их образования на поверхности подложки со сформированным рельефом с течением времени происходит их линейный рост. Размер данных образований может превосходить 150—200 мкм. Дефектообразование идет одновременно на значительной поверхности подложки со сформированным топологическим рельефом. На подложках без рельефа этот процесс идет гораздо менее интенсивно, что позволяет предположить о влиянии механических напряжений в структурах на процесс образования дефектов данного типа. После достижения дефектом линейного размера порядка 200 мкм увеличение размера «чешуек» прекращается, что, вероятно, связано с обеднением бором приповерхностного слоя пленки БФСС. С увеличением температуры окружающей среды и влажности воздуха процесс дефектообразования идет более интенсивно.

Установлено, что дефекты данного типа могут образовываться на поверхности пленок БФСС, нанесенных на структуры со сформированным топологическим рельефом, с содержанием бора более 5,65 весовых частей и фосфора — более 2,75, в течение короткого промежутка времени, порядка 60 мин. Минимизировать данный дефект позволяет снижение температуры окружающей среды и влажности воздуха, что не всегда является практически осуществимым. Наиболее устойчивыми к данному типу дефектообразования были пленки БФСС с концентрацией бора 5,5 весовых частей, фосфора — 2,7. Образование дефектов данного типа на свежесажденной пленке БФСС данного состава не наблюдалось в течение 42 ч. На пленках же БФСС, подвергающихся термической обработке непосредственно после осаждения, образования данных дефектов не наблюдалось в течение 180 сут. Поэтому эффективным средством уменьшения вероятности возникновения дефектов является сокращение срока хранения между операциями осаждения и отжига (оплавления) БФСС до 30—40 мин.

Следует отметить, что интенсивность образования дефектов данного типа уменьшается при снижении процента содержания в стекле легирующих компонентов бора и фосфора, однако при этом одновременно снижается и текучесть стекла. Следовательно, снижение концентрации бора и фосфора в пленке менее 5,5 и 2,7 весовых частей соответственно нецелесообразно.

Для устранения включений аэросила на поверхности пленок диэлектриков применялась обработка подложек после осаждения на автоматах гидромеханической отмывки раствором синтанола и деионизованной воды. После же данной обработки структур со свежесажденным БФСС

наблюдались дефекты, изображенные на рис. 3. Дефекты данного типа хорошо классифицируемы под оптическим микроскопом после операции «оплавления БФСС» по достаточно крупному линейному размеру до 4 мкм и характерной кристаллографической огранке. Причем внешний вид, изображенный на рис. 3, они приобретают именно после отжига при температуре 850 °С в атмосфере сухого кислорода.

Данные дефектообразования чрезвычайно устойчивы к воздействию химических травителей на основе плавиковой кислоты и аргоновой плазмы. Поэтому не удалось утончить данные дефекты до толщины, прозрачной для электронного пучка, и, как следствие, невозможность определения фазового состава дефектов методом электронной дифракции на просвет. Анализ данных дефектов методом вторичной ионной масс-спектропии показал, что в масс-спектре присутствуют интенсивные пики бора, бородисборных комплексов и фосфора, что дает возможность предположить, что наблюдаемые дефекты представляют собой труднорастворимое соединение типа силицида бора с сегрегацией примеси фосфора и кислорода. Воспроизводимое цепочное расположение данных дефектов в виде концентрических окружностей дает основание предположить, что причиной возникновения данных дефектов является операция гидромеханической отмывки, а отжиг лишь стимулирует кристаллизацию стекла. Дефекты данного типа приводят к полному браку структуры.

Не обнаружено влияния концентраций бора в пределах 5,3+6,1 весовых частей и фосфора — 2,5+3,1 на закономерность возникновения дефектов отмеченного выше типа в блоке операций гидромеханическая обработка — оплавление БФСС. Следовательно, образование дефектов данного типа может быть несколько снижено контролем прижима кисти автомата к подложке гидромеханической отмывки. При исключении операции гидромеханической отмывки возникновения дефектов не наблюдалось.

При гидромеханической обработке и промывке в деионизованной воде в каскадной ванне структур с дефектами типа «чешуйки» борной кислоты были отмечены случаи растрескивания БФСС по границам рельефа (рис. 4).

Отмечена также возможность растрескивания слоев свежесаждаемого БФСС при отмывке в растворе КАРО. Последующее термическое воздействие, как и в предыдущем случае, ведет к дальнейшему растрескиванию слоя и нарушению адгезии слоя БФСС к подложке, которые ведут к окончательному браку структур.

В результате проведенных исследований установлено, что дефекты в БФСС возникают в процессе осаждения, химической обработки и межоперационного хранения. При межоперационном хранении и гидромеханической отмывке возможно выделение фазы другого состава. Обработка БФСС в смеси КАРО, деионизованной воде может стимулировать растрескивание пленок. Последующая термическая обработка приведет к окончательному браку структур. Поэтому целесообразно исключать названные химические обработки из технологического маршрута изготовления приборов, а необходимой чистоты поверхностного слоя осаждаемой пленки достигать в процессе осаждения периодической очисткой реакторного объема и подколпачных устройств установки.

Для устранения дефектов типа «чешуйки» борной кислоты при межоперационном хранении подложек с нанесенным слоем БФСС необходимо жестко поддерживать температуру и влажность окружающей среды в производственном помещении. Наиболее бездефектные слои содержат 5,3+6,1 весовых частей бора и 2,5+3,1 — фосфора и могут быть с успехом использованы для межуровневой изоляции ИМС с оплавливаемым рельефом. Межоперационный срок хранения не должен превышать 30 мин, что реально при нормальной организации производства и отработанных технологических процессах. При возникновении данного вида дефектов возможно восстановление БФСС, заключающееся в травлении слоя стекла в перекисиоаммиачном растворе (ПАР). Скорость травления БФСС в кипящем ПАР составляет порядка 0,01 мкм/мин.

Выполнение данных условий позволяет при серийном производстве ИМС минимизировать процессы образования дефектов в БФСС и существенно повысить процент выхода годных изделий в блоке операций осаждения и оплавления БФСС.

1. В а с и л ь е в В. Ю., Д у х а н о в а Т. Г. // Электрон. пром-сть. 1989. № 3. С. 31.
2. Э д е л ь м а н Ф. Л., Л а т у т а В. З., Н о в и к о в В. В., В о л к о в А. Ф. // Электронная техника. Сер. 6. Материалы. 1975. Вып. 3. 84. С. 102.
3. W i l l i a m s D. S., D e i n E. A. // J. Electrochem. Soc. 1987. V. 134. № 3. P. 657.
4. Л а б у д а А. А., С и д е р к о А. А. // Актуальные проблемы социально-гуманитарных и естественных наук: Тез. науч. конференции. Мн., 1991. С. 124.
5. Л а б у д а А. А., С и д е р к о А. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 25.

Поступила в редакцию 13.07.94.



УДК 519.4

В. С. КОНЮХ

ИМПРИМИТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Imprimitive locally nilpotent linear groups over an arbitrary field are considered: The study of such groups is reduced to the case of primitive groups.

Максимальные локально нильпотентные линейные группы над алгебраически замкнутым полем описаны Д. А. Супруненко [1]; им дано полное описание примитивных локально нильпотентных групп над произвольным полем [2].

В настоящей работе рассматриваются импримитивные локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем. Изучение таких групп полностью сведено к изучению примитивных максимальных локально нильпотентных линейных групп.

Основной результат этой работы без доказательства приведен в [3]. В отношении терминологии мы придерживаемся книги [1]. Пусть Γ — максимальная неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$,

$$P^n = Q_1 + \dots + Q_r$$

— разложение пространства P^n на системы импримитивности Γ . В силу [2] мы можем считать, что Γ абсолютно неприводима над P , $n = p^t$ — простое число.

Пусть $\psi: \Gamma \rightarrow S_r$ — гомоморфизм группы Γ в симметрическую группу S_r , определяемый этим разложением. Тогда $\psi(\Gamma)$ — транзитивная r -группа. Так как r -подгруппа Силова группы S_r является сплетением циклов длины r , то существует разложение пространства P^n на системы импримитивности группы Γ вида

$$P^n = L_1 + \dots + L_p. \quad (1)$$

Пусть $\phi: \Gamma \rightarrow S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $G = \ker \phi \upharpoonright L_1$ — ограничение группы $\ker \phi$ на подпространство L_1 , $S_p(G)$ — силовская p -подгруппа группы G , u_{11}, \dots, u_{1m} , $m = p^{t-1}$ — базис подпространства L_1 . В качестве базиса пространства P^n возьмем систему векторов

$$u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{p1}, \dots, u_{pm}, \quad (2)$$

где $u_{ki} = a^{k-1} u_{1i}$, $a \in \Gamma$, $a \notin \ker \phi$, $1 < k \leq p$.

Очевидно, в базисе (2) матрица оператора a имеет вид

$$a = h(g) = \begin{bmatrix} 0 & g \\ E_{n-m} & 0 \end{bmatrix}, \quad g \in G. \quad (3)$$

Пусть $b \in \ker \phi$. Тогда $b = \text{diag} [g_1, \dots, g_p]$, где $g_i \in G$, $i = 1, \dots, p$. Так как $\Gamma \upharpoonright P^*$ — p -группа [2], то $b^{p^s} = \lambda \in P$ и, следовательно, $g_i^{p^s} = g_i \lambda^{p^s}$, $i = 1, \dots, p$. Отсюда, в силу того, что коммутант группы G — p -группа, следует, что $g_i = g_i d_i$, $d_i \in S_p(G)$. Пусть H -подгруппа $GL(n, P)$, состоящая из всех матриц вида

$$\text{diag} [g_1 d_1, \dots, g_1 d_p], \quad g_1 \in G, \quad d_i \in S_p(G),$$

а $\Gamma_1 = \{h(g), H\}$ — группа, порожденная подгруппой H и матрицей $h(g)$. Очевидно, Γ_1/P^* — p -группа, причем $\Gamma \leq \Gamma_1$. Отсюда и из максимальности группы Γ следует, что $\Gamma = \Gamma_1$, а группа G максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$.

Обозначение. Зафиксируем базис (2) пространства P^n . Пусть G — максимальная абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(m, P)$, H — подгруппа $GL(n, P)$, состоящая из всех матриц вида

$$\text{diag} [a d_1, \dots, a d_p], \quad a \in G, \quad d_i \in S_p(G).$$

Подгруппу группы $GL(n, P)$, порожденную матрицей $h(g)$, $g \in G$ и группой H , будем обозначать $\Gamma(g, G)$. Очевидно, (1) — разложение пространства P^n на системы импримитивности группы $\Gamma(g, G)$. Подгруппу группы G , порожденную группой $S_p(G)$ и всеми элементами вида g^p , $g \in G$, обозначим G^p .

Теорема (i). Пусть Γ — максимальная абсолютно неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, $n = p^l$. Тогда Γ сопряжена в $GL(n, P)$ с группой $\Gamma(g, G)$.

(ii). Группы $\Gamma_1 = \Gamma(g_1, G)$ и $\Gamma_2 = \Gamma(g_2, G)$ тогда и только тогда сопряжены в $GL(n, P)$, когда $g_1 = g_2^r a$, $1 \leq r < p$, $a \in G^p$.

(iii). Группа $\Gamma(g, G)$ почти всегда максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$. Исключение составляют лишь случаи, когда

1) $n = 2^l$, $g \in G^p$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| = 2$;

2) $l > 1$, $g \in G^p$, а группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$, $g_1 \in G^p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (i) было доказано выше.

(ii). Пусть

$$g_1 = g_2^r a^p d, \quad 1 \leq r < p, \quad a \in G, \quad d \in S_p(G).$$

Так как $\Gamma(g_1, G) = \Gamma(g_1 d^{-1}, G)$, то мы можем считать, что $d = E_m$. Положим $c = h^r(g_2)(a \cdot E_p)$. Пусть b — матрица перехода от базиса (2) к базису

$$u_{11}, \dots, u_{1m}, cu_{11}, \dots, cu_{1m}, \dots, c^{p-1}u_{1m}.$$

Непосредственно проверяется, что $b^{-1}\Gamma_2 b = \Gamma_1$. Обратное.

Пусть $b\Gamma_1 b^{-1} = \Gamma_2$, H — подгруппа Γ_i , $i = 1, 2$, порожденная всеми матрицами вида

$$\text{diag} [u d_1, \dots, u d_p], \quad u \in G, \quad d_i \in S_p(G).$$

Если $g_1, g_2 \in G^p$, то наше утверждение доказано. Пусть $g_1 \notin G^p$. Тогда

$$b h(g_1) b^{-1} = h^r(g_2) h, \quad h \in H, \quad 0 \leq r < p.$$

Так как Γ_i/P^* — p -группа, то для некоторого числа α

$$[b (g_1 \times E_p) b^{-1}]^{p^\alpha} = (g_1 \times E_p) p^\alpha.$$

Отсюда, в силу того, что коммутант группы Γ_i является p -группой, получаем

$$g_1 \times E_p = (g_2^r \times E_p) h^p d_1, \quad d_i \in S_p(H).$$

Поэтому $g_1 = g_2^r a^p d$, где $d \in S_p(G)$, $a \in G$, так как $g_1 \notin G^p$, то $r \geq 1$.

(iii). Пусть K — коммутант группы $\Gamma(g, G)$.

Так как группа P^* содержит элемент порядка p , то $|S_p(H)| = |S_p(G)|^p \geq p^p$ и прямые вычисления показывают, что в случаях, когда $p > 2$; $p = 2$, а G — импримитивная группа; $p = 2$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| > 2$, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные.

Рассмотрим, например, последний случай. Если $S_p(G) \subset P^*$, то так как центр G равен P^* ; существуют элементы $a \in G$, $d \in S_p(G)$ такие, что $(a, d) = d_1 \neq 1$. Тогда

$$(a \times E_2, \text{diag} [d, E_2^{l-1}]) = \text{diag} [d_1, E_2^{l-1}] \in K$$

и, следовательно, среди неприводимых частей группы K есть неэквива-

лентные. Если же $S_p(G) \subset P^*$, то так как $|S_p(G)| > 2$, группа P^* содержит элемент i порядка 4. Очевидно,

$$(h(g), \text{diag}[iE_2^{t-1}, E_2^{t-2}]) = \text{diag}[-iE_2^{t-1}, iE_2^{t-1}] \in K,$$

и, следовательно, ограничения группы K на подпространства L_i , $i = 1, 2$, неэквивалентны.

Пусть $\Gamma \in \Gamma_1$, где Γ_1 — локально нильпотентная группа. Поскольку Γ — N -группа [4], то будем считать, что $\Gamma \Delta \Gamma_1$. Рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) $g \notin G^p$; 2) G — примитивная группа, причем при $p = 2$, $|S_p(G)| > 2$; 3) $t > 1$, $g \in G^p$, G — импримитивная группа и G не сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$, где $g_1 \notin G^p$.

Случай 1. Пусть $a \in \Gamma_1$, $h \in N$ и $aha^{-1} = h^r(g)h_1$, $h_1 \in N$, $0 \leq r < p$. Так как Γ/P^* — p -группа, $K \subset S_p(\Gamma)$, то для некоторого числа l $aha^{-1} = h^{p^l}i$ и, следовательно, $aha^{-1} = h^r(g)h_1 = hd$, $d \in S_p(\Gamma)$. Возводя обе части последнего равенства в степень p , получим $(g^r \times E_p)h^p d_1 = h^p d_2$, $d_i \in S_p(H)$.

Так как $g \notin G^p$, то $r = 0$, $aNa^{-1} = N$. Поэтому для $h \in N$, $h(aL_i) = aL_i$. Так как неприводимые части группы N попарно неэквивалентны, то $aL_1 = L_j$ и, следовательно, $a = h^p(g)b$, где $b = \text{diag}[g_1, \dots, g_p]$. В силу максимальной G , $g \in G$, $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$, Γ — максимальна среди локально нильпотентных подгрупп $GL(n, P)$.

Случай 2. Из примитивности группы G следует, что неприводимые части группы $K_1|L_i$ попарно эквивалентны. Очевидно, для

$$a \in \Gamma_1, aKa^{-1} = K.$$

Как отмечалось выше, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные. Поэтому $aL_i = L_j$. Рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства случая 1, показывают, что $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$.

Случай 3. Так как $K \Delta \Gamma_1$, причем среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные, то Γ_1 — импримитивная группа.

Пусть $P^n = Q_1 + \dots + Q_p$ — разложения пространства P^n на системы импримитивности Γ_1 , $\psi: \Gamma_1 \rightarrow S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $N_1 = \ker \psi$. Если $H \subset N_1$, то $Q_j = L_j$ и, в силу максимальной G , $N = N_1$, $\Gamma = \Gamma_1$. Пусть $H \subset N_1$, $N_2 = H \cap N_1$. Тогда $N:N_2 = p$. Так как представители различных смежных классов N по N_2 линейно независимы над кольцом $\langle N_2 \rangle_p$, а $\langle N_2 \rangle_p : P = p^{2(t-1)+1}$, то $\langle N_2 \rangle_p : P = p^{2(t-1)}$.

Пусть p^r — степень неприводимой части группы N_2 , p^k — число неэквивалентных частей. Из импримитивности группы G следует, что $|S_p(G)| > p$. Так как группа N содержит подгруппу D порядка $|S_p(G)|^p$, а $N:N_2 = p$, то среди неприводимых частей группы N_2 есть неэквивалентные и, следовательно, $k > 0$. Очевидно,

$$p^{2(t-1)} = \langle N_2 \rangle_p : P \leq p^{2r+k}.$$

Отсюда в силу того, что $r+k \leq t$, получаем $r \geq t-2$. Если $r = t-1$, то $Q_j = L_j$, $H \subset N_1$.

Противоречие. Таким образом, $r = t-2$, $k = 2$, неприводимые части группы N абсолютно неприводимы и попарно неэквивалентны. Пусть $L_1 = L_{11} + \dots + L_{1p}$ — разложение L_1 в прямую сумму инвариантных и неприводимых относительно группы N_2 подпространств, $G_1 = GL_{11}$. Тогда группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$. Так как $N:N_2 = p$, то очевидно $g_1 \in G^p$.

Противоречие. Таким образом, в случаях 1—3 Γ максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p^t, P)$. Пусть $p = 2$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| = 2$, $\Gamma = \Gamma(E_p^{t-1}, G)$.

Положим

$$a = \begin{bmatrix} E_p^{t-1} & E_p^{t-1} \\ E_p^{t-1} & -E_p^{t-1} \end{bmatrix}, p = 2.$$

Очевидно, $a^2 = 2$, $aGa^{-1} = G$, группа Γ_1 , порожденная элементом a и группой Γ , локально нильпотентна, $\Gamma \in \Gamma_1$.

Непосредственно проверяется, что группа $\Gamma(E_p^{t-1}, G)$, где $G = \Gamma(g_1, G_1)$, $g_1 \notin G_1^p$, сопряжена с собственной подгруппой группы $\Gamma(g_1 \times E_p G_2)$, где $\Gamma(E_p^{t-2}, G_1)$. Теорема доказана.

Доказанная теорема сводит задачу классификации максимальных импримитивных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ к аналогичной задаче для групп меньшей размерности и, следовательно, в конечном итоге к классификации примитивных локально нильпотентных линейных групп.

1. Супруненко Д. А. Группы матриц. М., 1972.
2. Он же // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 4. С. 674.
3. Конох В. С. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 3. С. 197.
4. Гарашук М. С. // Там же. 1960. Т. 4. № 7. С. 276.

Поступила в редакцию 04.05.94.

УДК 517.925

В. Н. ГОРБУЗОВ, П. Б. ПАВЛЮЧИК

О ТРАЕКТОРИЯХ И ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА АЛГЕБРАИЧЕСКИ ВЛОЖИМЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The notion of algebraic imbeddability of the solutions for autonomous ordinary differential systems with rational right parts is introduced. The conditions of the stability by Lyapunov's function for such type systems and the character of the trajectories are obtained.

В. И. Мироненко [1] разработана методика исследования одного класса обыкновенных дифференциальных систем, которые, по предложению Ю. С. Богданова, получили название вложимых. Дадим решение некоторых поставленных в [1] задач, введя понятия алгебраической вложимости и сильной алгебраической вложимости.

Предметом рассмотрения является автономная обыкновенная дифференциальная система n -го порядка

$$\frac{dx}{dt} = R(x), \quad (1)$$

где векторная функция векторного аргумента $R: D \rightarrow \mathbb{C}^n, D \subset \mathbb{C}^n$, представляет собой вектор-столбец $R(x) = \text{colon} (R_1(x), \dots, R_n(x))$, координаты $R_i: D \rightarrow \mathbb{C}, i = \overline{1, n}$, которого являются рациональными функциями относительно $x = (x_1, \dots, x_n)$ с постоянными коэффициентами, вектор-столбец

$$\frac{dx}{dt} = \text{colon} \left[\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right].$$

Определение 1. Будем называть i -ю компоненту $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, дифференциальной системы (1) алгебраически вложимой, если для каждого решения $x = x(t)$ этой системы можно указать алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{\xi=0}^m a_{\xi} \prod_{k=1}^{s_{\xi}} \left[u^{(\nu_{k\xi})} \right]^{\mu_{k\xi}} = 0 \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами $a_{\xi} \in \mathbb{C}, \xi = \overline{0, m}$, решением которого является i -я координатная функция $x_i(t)$ векторной функции $x = x(t)$.

Здесь $\nu_{k\xi}$ и $\mu_{k\xi}, k = \overline{1, s_{\xi}}, \xi = \overline{0, m}$, суть целые неотрицательные числа.

Определение 2. Будем называть i -ю компоненту $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложимой, если для всех решений $x = x(t)$ этой системы можно указать одно алгебраическое дифференциальное уравнение (2), решениями которого будут i -е координатные функции $x_i(t)$ всех этих функций-решений $x = x(t)$.

На основании алгебраической вложимости представляется возможность решать задачи по построению систем (1), составляющие общего решения которых являются функциями-решениями конкретных дифференциальных уравнений. Частные и первые интегралы таких систем (1) определяют связи между этими функциями-решениями и, наоборот, если известны связи между этими функциями-решениями, то представляется возможность установления интегралов системы (1). Обратим внимание на связь такого подхода с задачей униформизации [2].

Так, у автономной полиномиальной дифференциальной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1^2 \quad (3)$$

компонента x_1 сильно алгебраически вложима в алгебраическое дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $d^2x_1/dt^2 = 6x_1^2$, интегрируемое в эллиптических функциях Вейерштрасса $x_1 = P(t - C_1, 0, C_2)$ [3], где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные. Компонента x_2 является производной этой функции Вейерштрасса: $x_2 = dP/dt$.

Дифференциальная система (3) имеет первый автономный интеграл

$$4x_1^3 - x_2^2 = C, \quad C = \text{const}, \quad (4)$$

униформизируемый эллиптической функцией $P(t - C_1, 0, C_2)$ и ее производной dP/dt .

Интеграл (4) доставляет определяющее дифференциальное уравнение

$$4P^3 - \left[\frac{dP}{dt} \right]^2 = C \quad (5)$$

для функции Вейерштрасса P .

Наоборот, из определяющего дифференциального уравнения (5) устанавливаем, что семейство (4) является общим автономным интегралом системы (3).

Относительно траекторий системы (1) с алгебраически вложимыми компонентами справедливы такие закономерности.

Теорема 1. Если у дифференциальной системы (1) некоторая компонента алгебраически вложима, но не сильно алгебраически вложима, то траектории этой системы расположены на алгебраическом многообразии.

Доказательство. Пусть у системы (1) алгебраически вложимая компонента $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, не сильно алгебраически вложима. Построим множество скалярных функций векторного аргумента

$$S_i^{(0)}(x) = x_i, \quad S_i^{(e)}(x) = \frac{d^e x_i}{dt^e} |_{(1)}, \quad \theta = \overline{1, \nu_{ik}}. \quad (6)$$

В соответствии с определением 1 для каждого решения $x = x(t)$ системы (1) существуют числа $a_r \in \mathbb{C}, \nu_{ik} \in \mathbb{N}_0, \mu_{ik} \in \mathbb{N}_0, \xi = \overline{0, m}, k = \overline{1, s_r}$, такие, что совместно тождество

$$\sum_{r=0}^m a_r \prod_{k=1}^{s_r} \left\{ S_i^{(\nu_{ik})} (x(t)) \right\}^{\mu_{ik}} \equiv 0. \quad (7)$$

Если тождество (7) не является общим тождеством для всех решений $x = x(t)$ системы (1), то траектория этой системы расположена на алгебраическом многообразии

$$\sum_{r=0}^m a_r \prod_{k=1}^{s_r} \left\{ S_i^{(\nu_{ik})} (x) \right\}^{\mu_{ik}} = 0. \quad (8)$$

Это обосновано тем, что в противном случае равенство (8) обращается в тождество, что соответствует сильной алгебраической вложимости компоненты x_i системы (1). Теорема 1 доказана.

Подобным образом доказывается

Теорема 2. Пусть у дифференциальной системы (1) существует такое решение $x = x(t)$, что координатная функция $x_i(t)$ векторной функции $x = x(t)$ является решением алгебраического дифференциального уравнения (2), а i -я компонента x_i системы (1) не сильно алгебраически вложима.

Тогда траектория, соответствующая решению $x = x(t)$, расположена на алгебраическом многообразии (8).

Далее систему (1) и уравнение (2) будем считать вещественными, т. е. $a_r \in \mathbb{R}, \xi = \overline{0, m}$, рациональные функции $R_i: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, i = \overline{1, n}$.

Теорема 3. Если у вещественной автономной дифференциальной

системы (1) второго порядка (случай $n = 2$) хотя бы одна компонента алгебраически вложима, но не сильно алгебраически вложима, то эта система не имеет предельных циклов.

Это следует из того, что по теореме 1 все траектории системы (1) при $n = 2$ суть алгебраические кривые.

Обратим внимание на то, что, когда для системы (1) при $n = 2$ имеет место сильная алгебраическая вложимость, то предельные циклы могут существовать.

Например, у системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

компоненты x_1 и x_2 сильно алгебраически вложимы в алгебраические дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1^2 \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

и

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \left[\frac{dx_2}{dt} \right]^3 - \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0$$

соответственно и существует один предельный цикл, который является устойчивым [4].

Пусть у системы (1) компонента x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, сильно алгебраически вложима в дифференциальное уравнение

$$x_i^{(r)} = b_0 x_i + b_1 x_i^1 + \dots + b_{r-1} x_i^{(r-1)} + Q(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{(r-1)}), \quad (9)$$

где $Q: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ суть полином степени $\deg Q \geq 2$, коэффициенты $b_r \in \mathbb{R}$, $\tau = 0$, $r - 1$.

Если среди корней алгебраического уравнения

$$\lambda^r - \sum_{r=0}^{r-1} b_r \lambda^r = 0 \quad (10)$$

существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то [5, с. 33] существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ и положительное число α такие, что

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(9)} &= \alpha V(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{r-1}) + \sum_{r=0}^{r-1} \{x_i^{(r)}\}^2 + \\ &+ U(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{(r-1)}). \end{aligned}$$

При этом функция $V: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, не будет знакоотрицательной, а $U: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ суть полином степени $\deg U \geq 3$.

Тогда с учетом представлений (6) имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} &= \alpha V[S_i^{(0)}(x), S_i^{(1)}(x), \dots, S_i^{(r-1)}(x)] + \\ &+ \sum_{r=0}^{r-1} \{S_i^{(r)}(x)\}^2 + U[S_i^{(0)}(x), S_i^{(1)}(x), \dots, S_i^{(r-1)}(x)], \quad (11) \end{aligned}$$

и справедлива

Теорема 4. Пусть i -я компонента x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, вещественной дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложима в уравнение (9), уравнение (10) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

Тогда существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$, не являющаяся знакоотрицательной в окрестности точки $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_{r-1} = 0$, и положительное число α такое, что имеет место соотношение (11).

Если все корни уравнения (10) имеют отрицательные вещественные части, то [5, с. 31] существует определенно положительная квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(9)} = - \sum_{r=0}^{r-1} \{ x_1^{(r)} \}^2 + U (x_1, x_1^1, \dots, x_1^{(r-1)}),$$

где у полинома $U: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ степень $\deg U \geq 3$.

Отсюда с учетом (6) имеем, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(1)} = - \sum_{r=0}^{r-1} \{ S_i^{(r)}(x) \}^2 + U [S_i^{(0)}(x), S_i^1(x), \dots, S_i^{(r-1)}(x)], \quad (12)$$

и справедлива

Теорема 5. Пусть i -я компонента $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, вещественной дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложима в уравнение (9), а все корни уравнения (10) имеют отрицательные вещественные части.

Тогда существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$, определенно положительная в проколотой окрестности точки $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_{r-1} = 0$, такая, что имеет место соотношение (12).

Возможность использования утверждений, сформулированных в теоремах 4 и 5, покажем на примерах.

Систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^5, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 + x_2^3 \quad (13)$$

умножением ее правых частей на $\mu = x_2^{-2}$ (множитель вложимости) приводим к системе (13), у которой компонента x_1 сильно алгебраически вложима в уравнение

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 3 \frac{dx_1}{dt} - 3x_1 + 3x_1^2. \quad (14)$$

Уравнение (10) для (14) имеет корни $\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому, согласно теореме 4, для системы (13) существуют незнакоотрицательная в окрестности точки $O(0; 0)$ квадратичная форма $V(x_1, x_2^3)$ и положительное число α такие, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(13)} = x_2^2 \{ \alpha V(x_1, x_2^3) + x_1^2 + x_2^6 + U(x_1, x_2^3) \}.$$

Стало быть, по теореме 7.5.4 из [6, с. 248], состояние равновесия $O(0; 0)$ системы (13) неустойчиво.

Аналогичным образом систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^5, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 - x_2^3 \quad (15)$$

посредством множителя вложимости $\mu = x_2^{-2}$ приводим к системе (15) с сильно алгебраически вложимой компонентой x_1 . Уравнение (10) в этом

случае будет иметь корни $-\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно теореме 5, для системы (15) существует определенно положительная в проколотой окрестности точки $O(0; 0)$ квадратичная форма $V(x_1, x_2^3)$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(15)} = x_2^2 \{ -x_1^2 - x_2^6 + U(x_1, x_2^3) \}.$$

По теореме 7.5.3 из [6, с. 247] с учетом того, что прямая $x_2 = 0$ не является траекторией системы (15), заключаем об асимптотической устойчивости состояния равновесия $O(0; 0)$.

Систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 - x_2^2 \quad (16)$$

с помощью множителя вложимости $\mu = x_2^{-1}$ приводим к системе (16), у которой компонента x_1 сильно алгебраически вложима в уравнение

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2 \frac{dx_1}{dt} - 2x_1 + 2x_1^2. \quad (17)$$

Уравнение (10) для (17) имеет корни $-1 \pm i$. Тогда, по теореме 5, для системы (16) существует определено положительная в проколотовой окрестности точки $O(0; 0)$ квадратичная форма $V(x_1, x_2)$ такая, что

$$\frac{dV}{dt} |_{(16)} = x_2 \{ -x_1^2 - x_2^4 + U(x_1, x_2) \}.$$

Согласно теореме 7.5.4. из [6, с. 248], это означает неустойчивость состояния равновесия $O(0; 0)$ системы (16).

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Мн., 1981.

2. Неванлинна Р. Униформизация. М., 1955.

3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. С. 442.

4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М., 1986. С. 174.

5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М., 1970.

6. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.

Поступила в редакцию 18.05.94.

УДК 519.6

В. П. КИРЛИЦА

ТОЧНЫЕ D- И A-ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАНЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Exact A-optimal linear designs are constructed under variance changing linearly. Problem of exact D- and A-optimal linear designs is investigated.

Рассмотрим простейшую линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где y_i — наблюдаемые значения; θ_0, θ_1 — неизвестные параметры; x_i — контролируемые переменные из отрезка $[-1, 1]$; $\varepsilon(x_i)$ — некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\varepsilon(x_i)\} = ax_i + b. \quad (2)$$

В (2) a и b константы, $|a| < b$, $b > 0$.

Известно, [1], что для множественной линейной регрессии с равноточными наблюдениями непрерывные D-оптимальные планы являются и A-оптимальными. В [2] показано, что планы

$$\varepsilon_{2s}^0 = \left\{ \begin{matrix} -1; \\ s; \end{matrix} \frac{1}{s} \right\}, \quad \varepsilon_{2s+1}^0 = \left\{ \begin{matrix} -1; \\ s; \end{matrix} \frac{1}{s+1} \right\}, \quad \varepsilon_{2s+1}^1 = \left\{ \begin{matrix} -1; \\ s+1; \end{matrix} \frac{1}{s} \right\} \quad (3)$$

являются одновременно точными D- и A-оптимальными для модели (1) с равноточными наблюдениями ($a = 0$). В статье [3] доказано, что планы (3) остаются точными D-оптимальными для модели неравноточных наблюдений (1), (2).

Однако, как будет показано ниже, структура точных A-оптимальных планов для модели наблюдений (1), (2) будет зависеть от коэффициента $k = a/b$, $|k| < 1$.

Лемма. Точки спектра точного A-оптимального плана для модели наблюдений (1), (2) лежат на концах интервала $[-1, 1]$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что точки спектра плана $x_i, i = 1, n-1$ фиксированы, а точка $x_n = x$ — «плавающая», $x \in [-1, 1]$. Вводя обозначения

$$c = \sum_{i=1}^{n-1} (1 + kx_i)^{-1}, \quad d = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 (1 + kx_i)^{-1}, \quad e = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (1 + kx_i)^{-1}, \quad (4)$$

след дисперсионной матрицы плана эксперимента можно записать в виде:

$$\text{tr}M^{-1} = \frac{1}{b} \left\{ c + d + \frac{1+x^2}{1+kx} \right\} / \left\{ \left[c + \frac{1}{1+kx} \right] \left[d + \frac{x^2}{1+kx} \right] - \left[e + \frac{x}{1+kx} \right]^2 \right\} = t(x)/b,$$

где

$$t(x) = \frac{x^2 + k(c+d)x + c + d + 1}{cx^2 + [(cd - e^2)k - 2e]x + d + cd - e^2}. \quad (5)$$

Учитывая, что $x_i \in [-1, 1]$, $i = \overline{1, n-1}$, из (4) заключаем, что

$$c > 0, d > 0, d < c, |e| < c. \quad (6)$$

Лемма будет доказана, если показать, что для любых c, d, e минимальное значение $t(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается при $x^0 = \pm 1$. Для этого надо показать, что

$$t(x) \geq t(-1), \quad x \in [-1, 1], \quad (7)$$

если

$$t(-1) \leq t(1), \quad (8)$$

либо

$$t(x) \geq t(1), \quad x \in [-1, 1], \quad (9)$$

если

$$t(1) \leq t(-1). \quad (10)$$

Для определенности положим, что реализуется ситуация, описываемая соотношениями (7), (8). Ситуация, соответствующая (9), (10), рассматривается аналогично.

Учитывая, что для всех $x \in [-1, 1]$ знаменатель в (5) положителен, нетрудно показать, что (8) эквивалентно

$$\beta = k(c^2 + d^2 + 2e^2) + 2e(d + c + 2) \geq 0, \quad (11)$$

а неравенство (7) — неравенству

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (12)$$

где

$$\alpha = 2e - (1-k)(c^2 + e^2) + d - c, \quad (13)$$

$$\gamma = 2e + (c+e)^2 + (e+d)^2 - (1-k)(e^2 + d^2) + c - d.$$

Итак, покажем, что будет выполняться неравенство (12) при условии, что имеет место неравенство (11).

Из (7) следует, что $\varphi(-1) = 0$. Если $\alpha \leq 0$, то неравенство (12) имеет место, поскольку, в силу (11), $\varphi(1) = 2\beta \geq 0$.

Если $\alpha > 0$, то с учетом того, что $\varphi(-1) = 0$, неравенство (12) будет выполняться, если $d\varphi(x)/dx|_{x=-1+0} = \beta - 2\alpha > 0$, или, с учетом (11), (13), если

$$\beta - 2\alpha = 2c^2 - kc^2 + kd^2 + 2e^2 + 2e(c+d) + 2(c-d) > 0. \quad (14)$$

Убедимся, что неравенство (14) имеет место. По предположению $\alpha > 0$. Отсюда, с учетом неравенств (6), легко получаем, что

$$e > [(1-k)(c^2 + e^2) + c - d]/2 > 0. \quad (15)$$

Учитывая неравенства (6), (15), легко показать выполнимость неравенства (14). Лемма доказана.

Теорема. Точный А-оптимальный план для модели наблюдений (1), (2) имеет вид:

$$\epsilon_n^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ s^0; \\ 1 \\ n-s^0 \end{array} \right\}, \quad (16)$$

где

$$s^0 = \arg \min_{s \in \{1, \dots, n-1\}} t_n(s, k), \quad (17)$$

а функция

$$t_n(s, k) = [2sk + n - nk] / [s(n-s)]. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно доказанной лемме, точный А-оптимальный план должен иметь структуру:

$$\epsilon_n(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ s \\ 1 \\ n-s \end{array} \right\}, \quad (19)$$

где s — число -1 в спектре плана, $s \in \{0, \dots, n\}$. След дисперсионной матрицы плана (19) равен: $t_n(s, k)/b$, следовательно, оптимальное значение S^0 , определяющее точный А-оптимальный план, должно удовлетворять (17). Теорема доказана.

Основываясь на результатах работы [3] и доказанной теореме, можно утверждать, что для модели наблюдений (1), (2) структура точных D-оптимальных планов «груба», устойчива к изменению параметра k , $|k| < 1$, так как эти планы не зависят от k . В то же время, структура точных А-оптимальных планов чувствительна к изменению параметра k .

В формуле (2) слагаемое ax , $|x| \leq 1$, можно рассматривать как линейное искажение дисперсии b равноточных наблюдений. Естественно, возникает задача определения уровня искажения, при котором функционал качества точного оптимального плана будет устойчивым. Устойчивость функционала качества характеризуется коэффициентом

$$\lambda = |\Phi(M(k)) - \Phi(M(0))| / \Phi(M(0)),$$

где $M(k)$ — информационная матрица плана, зависящая от k (при отсутствии искажения $k = 0$), $\Phi(\cdot)$ — функционал, для D-оптимальных планов $\Phi(M) = |M|$, для А-оптимальных планов $\Phi(M) = \text{tr} M^{-1}$.

Соответствующий критерий качества точного оптимального плана будет устойчивым относительно искажения kx дисперсии равноточных наблюдений, если $\lambda \leq \epsilon$, где ϵ — некоторый заданный уровень, $0 < \epsilon < 1$.

Пример. Пользуясь формулами (16), (17), можно показать, что

$$\text{для } -1 \leq k \leq -\frac{9}{12}, \quad \epsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ 5; \\ 1; \\ 1 \end{array} \right\}; \text{ для } -9/11 \leq k \leq -1/3,$$

$$\epsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ 4; \\ 2; \\ 1 \end{array} \right\}; \text{ для } |k| \leq 1/3,$$

$$\epsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ 3; \\ 3; \\ 1 \end{array} \right\}; \text{ для } 1/3 \leq k \leq 9/11,$$

$$\epsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ 2; \\ 4; \\ 1 \end{array} \right\}; \text{ для } 9/11 \leq k \leq 1, \quad \epsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{array}{l} -1; \\ 1; \\ 5; \\ 1 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, для $|k| \leq 1/3$ точные D- и А-оптимальные планы для модели наблюдений (1), (2) совпадают; для $1/3 < |k| < 1$ структура этих планов различна.

Нетрудно подсчитать, что соответствующие функционалы качества точных планов $\epsilon_6^0(k)$ будут устойчивы при $|k| \leq \epsilon / (1 + \epsilon)$ для D-оптимальных планов и для А-оптимальных планов при $|k| \leq 1/3$.

1. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М., 1968.

2. Кирлица В. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1990. № 2. С. 36.

3. Кирлица В. П. // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования. Мн., 1991. С. 68.

РОБАСТНОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО L-СРЕДНИХ В СЛУЧАЕ РАВНОМЕРНОГО «ЗАСОРЕНИЯ»

The problem of robust L-means decision rule construction under uniform «contaminations» is solved using Bayesian optimality principle. The risk functional value for this decision rule is evaluated.

На практике очень часто встречается ситуация, когда области концентрации наблюдений из $L \geq 2$ классов $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$ (кластеры [1]) «равномерно окружены» в R^N наблюдениями-«засорениями». В теории кластер-анализа для решения задачи классификации при данных модельных предположениях используются методы так называемой «нечеткой» классификации [1, 2]: каждому наблюдению ставится в соответствие L-вектор вероятностей, с которыми данное наблюдение относится к тому или иному классу. Недостатком таких методов является то, что относительно наблюдения не делается однозначного вывода о принадлежности его к конкретному классу или «засорениям».

Искажения типа равномерного «засорения» удобно определять, вводя в рассмотрение дополнительный класс Ω_0 , содержащий «засорения», имеющий априорную вероятность ε ($0 < \varepsilon < 1$) и описываемый равномерной плотностью распределения вероятностей:

$$h_*(x) = \begin{cases} h \frac{1}{\mu(V)}, & x \in V, \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, наблюдения-«засорения» из класса Ω_0 равномерно распределены в ограниченной односвязной области $V(\mu(\cdot))$ — мера Лебга в R^N). Класс Ω_i состоит из неискаженных наблюдений, описываемых плотностью $q(\cdot; \theta_i)$, $x \in R^N$, из параметрического семейства

$$P = \{q(x; \theta), x \in R^N; \theta \in R^N\} \quad (2)$$

с параметром сдвига $\theta_i^0 \in R^N$, равным математическому ожиданию:

$$\int_{R^N} x q(x; \theta_i^0) dx = \theta_i^0, \quad i \in S = \{1, \dots, L\},$$

и имеет априорную вероятность $\pi_i(1 - \varepsilon)$, $i \in S$ ($\pi_1 + \dots + \pi_L = 1$).

Через d_i^0 обозначим неизвестный номер класса, к которому принадлежит наблюдение $x_i \in R^N$, $t = \overline{1, n}$. Составной вектор «центров классов» (математических ожиданий) $\theta^0 = (\theta_1^{0T} | \dots | \theta_L^{0T})^T \in R^{LN}$ неизвестен. Задача заключается в оценивании вектора истинной классификации $D^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)^T$ по случайной выборке $X = (x_1 | \dots | x_n)^T$ объема n .

При отсутствии искажений ($\varepsilon_+ = 0$) в кластер-анализе широко используется алгоритм L-средних [1, 3], состоящий в совместном вычислении оценок $\hat{\theta}$ и \hat{D} для θ^0 и D^0 посредством решения экстремальной задачи:

$$W_n(\theta, D) \rightarrow \inf_{\theta \in R^{LN}, D \in S^n}; \quad W_n(\theta, D) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i - \theta_{d_i}\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо векторная норма. Однако при $\varepsilon_+ > 0$ он теряет свои оптимальные свойства. Более того, на практике важен случай, когда $\varepsilon_+ = O(1)$, т. е. наблюдений-«засорений» в выборке X объема n может быть достаточно много (их количество является величиной порядка $O(n)$).

Получим робастное (устойчивое к искажениям типа (1)) решающее правило (РП) L-средних. Пусть сначала составной вектор $\theta^0 = (\theta_1^{0T} | \dots | \theta_L^{0T})^T$ «центров классов» $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ и область V известны априори. Рассмотрим задачу построения оптимального в смысле минимума риска (вероятности ошибочной классификации наблюдения из X) байесовского РП (БРП) [1, 4] для классификации наблюдений в $L + 1$ класс $\{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_L\}$.

Через $U(\cdot)$ обозначим единичную функцию Хэвисайда:

$$U(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ равновероятны: $\pi_i = L^{-1}$, $i \in S$, а параметрическое семейство (2) имеет вид:

$$P = \{q(x; \theta) = Q(\|x - \theta\|), x \in \mathbb{R}^N; \theta \in \mathbb{R}^N\}, \quad (3)$$

где функция $Q(z): [0, +\infty) \rightarrow (0, Q(0)]$ непрерывная и строго убывающая. Тогда БРП $d_*(\cdot; \theta^0; V)$ задается соотношением:

$$d_*(x; \theta^0; V) = \arg \min_{\alpha \in kL} g_i(x); \quad (4)$$

$$g_i(x) = \begin{cases} \|x - \theta_i^0\|, & i \in S, \\ +\infty, & i = 0, x \notin V, \\ Q^{-1}\left(\frac{\epsilon L}{(1-\epsilon)\mu(V)}\right) \cdot U\left(Q(0) - \frac{\epsilon L}{(1-\epsilon)\mu(V)}\right), & i = 0, x \in V, \end{cases}$$

($Q^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $Q(\cdot)$) и обладает минимальным значением риска $R_*(\theta^0; V)$:

$$R_*(\theta^0; V) = 1 - \int_{\mathbb{R}^N} \max \left\{ \frac{1-\epsilon}{L} \cdot \max_{i \in S} q(x; \theta_i^0), \epsilon h_*(x) \right\} dx. \quad (5)$$

Доказательство. Согласно [1, 4], БРП, минимизирующее вероятность ошибочной классификации, имеет вид:

$$d_*(x; \theta^0; V) = \arg \max_{\alpha \in kL} \bar{\pi}_i \bar{q}_i(x);$$

$$\bar{\pi}_i = \begin{cases} L^{-1}(1-\epsilon), & i \in S, \\ \epsilon, & i = 0; \end{cases}$$

$$\bar{q}_i(x) = \begin{cases} q(x; \theta_i^0), & i \in S, \\ h_*(x), & i = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся (3), конкретным видом (1) плотности $h_*(\cdot)$, тем фактом, что строго монотонная непрерывная функция имеет обратную, и получим (4). Из [1, 4] имеем:

$$R_*(\theta^0; V) = 1 - \int_{\mathbb{R}^N} \max_{\alpha \in kL} \bar{\pi}_i \bar{q}_i(x) dx,$$

что с учетом конкретного вида $\{\bar{\pi}_i \bar{q}_i(\cdot)\}_{i=0}^L$ приводит к (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Правило (4) можно применять и при $L = 1$. В этом случае решается задача удаления наблюдений-«засорений» из выборки, порожденной «гипотетическим» распределением с плотностью $q(x; \theta_1^0)$ и содержащей «примесь» из наблюдений с плотностью (1).

Предположим, что кластеры (области концентрации неискаженных наблюдений):

$$w_i = \{x: q(x; \theta_i^0) \geq v > 0, v = o(1)\}, \quad i \in S,$$

принадлежат области V , в которой равномерно распределены «засорения». Причем V является прямоугольным параллелепипедом в \mathbb{R}^N :

$$V = \{x: x \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N], a_i < b_i, i = \overline{1, N}\};$$

$$\mu(V) = \prod_{j=1}^N (b_j - a_j),$$

где « \times » — символ декартова произведения. В этом случае можно предложить следующий алгоритм, реализующий робастное РП L -средних $d_*(\cdot; \theta; \hat{V})$, получающееся из РП $d_*(\cdot; \theta^0; V)$, приведенного в (4), в

результате замены θ^0, V на их статистические оценки $\hat{\theta}, \hat{V}$, вычисленные по выборке X объема n .

По X строится оценка $\mu(\hat{V})$ для $\mu(V)$:

$$\mu(\hat{V}) = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^N \prod_{j=1}^N \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_{kj} - \min_{1 \leq k \leq n} x_{kj} \right),$$

получающаяся из $\mu(V)$ путем замены $(b_j - a_j)$ на статистическую оценку $(b_j \hat{\Delta} a_j)$ [5]:

$$(b_j \hat{\Delta} a_j) = \frac{n+1}{n-1} \cdot \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_{kj} - \min_{1 \leq k \leq n} x_{kj} \right), j = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Задается уровень «засорения» ϵ и проверяется условие:

$$\frac{\epsilon L}{(1-\epsilon)\mu(\hat{V})} \geq Q(0). \quad (7)$$

Если оно выполняется, то выборка X не классифицируется, поскольку, согласно (4), данные, из которых она состоит, не имеют ярко выраженной кластерной структуры (принимается решение: $\hat{d}_t = 0$, $t = \overline{1, n}$). В противном случае задаются начальные приближения $\{\hat{\theta}_i^{(0)}\}_{i \in S}$ для центров $\{\theta_i^0\}_{i \in S}$, и классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, и строится следующий итерационный процесс:

$$\hat{d}_t^{(k)} = \arg \min_{0 \leq k \leq L} \hat{g}_t(x_t), t = \overline{1, n}; k = 1, 2, \dots; \quad (8)$$

$$\hat{g}_t(x) = \begin{cases} \|x - \hat{\theta}_i^{(k-1)}\|, & i \in S, \\ Q^{-1} \left(\frac{\epsilon L}{(1-\epsilon)\mu(\hat{V})} \right), & i = 0; \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_i^{(k)} = \left(\sum_{t=1}^n \delta_{it} \hat{d}_t^{(k)} \right)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n \delta_{it} \hat{d}_t^{(k)} x_t, i \in S. \quad (9)$$

Процесс (8), (9) завершается через конечное число шагов [1, 3] при $\hat{D}^{(k)} = \hat{D}^{(k-1)}$ ($k \geq 2$) и получается: $\hat{D} = \hat{D}^{(k)}$ — оценка для вектора истинной классификации D^0 выборки X , $\hat{\theta} = \hat{\theta}^{(k)}$ — оценка для составного вектора θ^0 .

Замечание 2. Из (6) видно, что все наблюдения, образующие выборку X , принадлежат области

$$\hat{V} = [\min_{1 \leq k \leq n} x_{k1}, \max_{1 \leq k \leq n} x_{k1}] \times \dots \times [\min_{1 \leq k \leq n} x_{kn}, \max_{1 \leq k \leq n} x_{kn}],$$

и случай $x_t \notin \hat{V}$ в (8) исключается.

Если $\epsilon = 0$, то алгоритм (8), (9) превращается в свой классический аналог [1, 3]:

$$\hat{d}_t^{(k)} = \arg \min_{i \in S} \|x_t - \hat{\theta}_i^{(k-1)}\|, t = \overline{1, n}; k = 1, 2, \dots;$$

$$\hat{\theta}_i^{(k)} = \left(\sum_{t=1}^n \delta_{it} \hat{d}_t^{(k)} \right)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^n \delta_{it} \hat{d}_t^{(k)} x_t, i \in S,$$

поскольку, согласно условиям теоремы 1, $Q^{-1}(0) = +\infty$.

Если уровень «засорения» ϵ неизвестен априори, то итерационный процесс (8), (9) можно модифицировать: задается начальное приближение $\epsilon^{(0)}$ и на k -ой итерации в (8) используется $\epsilon^{(k-1)}$ после предварительной проверки условия (7), затем, после уточнения центров классов (9), производится пересчет текущего значения уровня «засорения»:

$$\epsilon^{(k)} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \delta_{0t} \hat{d}_t^{(k)}.$$

Рассмотрим частный случай — модель Фишера [1, 4]:

$$q(x; \theta_i^0) = n_N(x | \theta_i^0, \Sigma), i \in S; \quad (10)$$

$p_N(x | \theta_1^0, \Sigma) = (2\pi)^{-N/2} (\det(\Sigma))^{-0.5} \exp(-0.5(x - \theta_1^0)^T \Sigma^{-1}(x - \theta_1^0))$,
 в которой наряду с $\{\theta_{ij}^0\}_{i,j \leq N}$ неизвестна и ковариационная матрица Σ . Если в качестве нормы выбрать:

$$\|y\| = \sqrt{y^T \Sigma^{-1} y}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad (11)$$

то функция $Q(z)$, определенная в (3), примет вид:

$$Q(z) = (2\pi)^{-N/2} (\det(\Sigma))^{-0.5} \exp(-z^2/2). \quad (12)$$

С учетом (11), (12), вычислительный алгоритм (8), (9) легко модифицируется. В качестве оценки $\hat{\Sigma}$ для Σ можно использовать любую робастную оценку [6], являющуюся положительно определенной матрицей.

Пусть $L = 1$ (смотри замечание 1), ковариационная матрица в (10) имеет специальный вид: $\Sigma = \sigma^2 I_N$ ($\sigma > 0$), а область V является N -мерным кубом, «диагонали» которого пересекаются в точке θ_1^0 , и «сторона» имеет длину, равную $2a$ ($a > 0$):

$$V = [\theta_{11}^0 - a, \theta_{11}^0 + a] \times \dots \times [\theta_{1N}^0 - a, \theta_{1N}^0 + a],$$

где θ_{1j}^0 — j -ая компонента вектора θ_1^0 , $j = \overline{1, N}$.

Воспользуемся (7), (12), а также специальным видом Σ и V , получим соотношение:

$$\frac{a}{\sigma} > \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{1/N}, \quad (13)$$

которому должны удовлетворять a , σ , ϵ и N , чтобы задача классификации имела смысл.

Предположим, что $0 < \epsilon \ll 1 \ll 0.5$, тогда условие (13) можно усилить:

$$\frac{a}{\sigma} > \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (14)$$

Соотношением (14) удобно пользоваться для определения допустимого значения отношения $\frac{a}{\sigma}$ при неизвестном уровне «засорения», не превышающем 0.5.

Вычислим риск (5) РП (4). Обозначим через V' следующую вспомогательную область:

$$V' = \left\{ x : \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \cdot p_N(x | \theta_1^0, \sigma^2 I_N) \geq \frac{1}{\mu(V)} \right\} = \left\{ x : (x - \theta_1^0)^T (x - \theta_1^0) \sigma^{-2} \leq p^2, \right.$$

$$\left. p = \sqrt{2 \cdot \left(\ln \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + N \cdot \ln \left(\frac{a}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right)} \right\}. \quad (15)$$

Пусть выполняется условие:

$$p \leq a, \quad (16)$$

тогда $V' \subset V$, и при помощи таблиц интегралов [7] имеем:

$$R_r(\theta^0; V) = \epsilon \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^N \cdot \frac{(p/a)^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} + \\ + (1-\epsilon) \left((1 - 2\Phi(-a/\sigma))^N - \frac{\tilde{\Gamma}\left(\frac{N}{2}, \frac{p^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right), \quad (17)$$

где

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2) dz$$

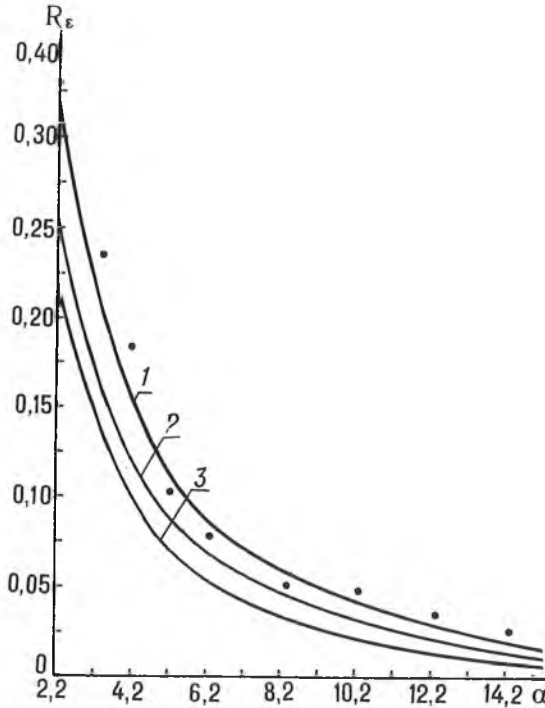
функция распределения вероятностей стандартного нормального закона;

$$\tilde{\Gamma}(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} e^{-z} z^{\alpha-1} dz \quad (\alpha > 0) \quad (18)$$

неполная гамма-функция ($\tilde{\Gamma}(\alpha, +\infty) = \Gamma(\alpha)$ — обычная гамма-функция). Из (15) видно, что $p = o(a)$ при $a \rightarrow +\infty$, поэтому условие (16) заведомо выполняется, а из (18) для (17) имеем:

$$R_\varepsilon(\theta^0; V) \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty$$

т. е. с ростом объема области V качество классификации повышается.



Риск робастного РП L-средних в случае равномерного «засорения»:
1 — $\varepsilon = 0.5$; 2 — $\varepsilon = 0.3$; 3 — $\varepsilon = 0.25$

На рисунке изображены графики зависимости $R_\varepsilon = R_\varepsilon(a)$, построенные при помощи формулы (17) для следующих конкретных значений: $N = 2$; $\sigma = 1.0$; $\varepsilon = 0.25$; 0.3 ; 0.5 . Величина a изменяется на отрезке $[2.2, 15.2]$, что обеспечивает выполнение условий (14), (16). Видно, что с ростом уровня «засорения» ε вероятность ошибочной классификации R_ε увеличивается. Символом «•» на рисунке показаны значения показателя:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n \cdot M} \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^n \delta_{d_t}^0(j), \quad \hat{a}_t(j), \quad (19)$$

подсчитанные для $\varepsilon = 0.5$ по результатам вычислительных экспериментов при различных значениях a (в качестве Σ использовалась робастная оценка медианного типа [6]). Каждый такой эксперимент включал в себя моделирование $M = 10$ выборок объема $n = 20$ с нулевым вектором математического ожидания $\theta_1^0 = (0, 0)^T$, нахождение значения величины (19) по результатам классификации и нанесение его на рисунок. Как следует из рисунка, риск R_ε достаточно точно характеризует величину:

$$\bar{\gamma} = E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \delta_{d_t}^0, \quad \hat{a}_t \right\}$$

(значения $\hat{\gamma}$ расположены вблизи графика) и может быть использован при $n \rightarrow +\infty$ как показатель эффективности РП L-средних $d_\varepsilon(\cdot; \theta; V)$.

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М., 1989.
2. Стирапка А. И. Решение кластерной задачи большой размерности в нечеткой постановке//Кибернетика. 1991. № 1. С. 116.
3. Миленский А. В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. М., 1975.
4. Харин Ю. С. Робастность в статистическом распознавании образов. Мн., 1992.
5. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/Под ред. В. С. Королюка. М., 1985.
6. Хьюбер П. Робастность в статистике. М., 1984.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.

Поступила в редакцию 09.06.94.

УДК 517.948.32:517.544

О. В. ТИМОХОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С ПОДСТАНОВОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

The canonical matrix is being constucted explicitly by means of reduction of the original problem to scalar problem on Riemann surface.

Рассмотрим следующую задачу: на расширенной комплексной плоскости S с разрезом по отрезку $L = [-1, 1]$ найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z), \Phi_4(z))$, предельные значения которого удовлетворяют следующему условию:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L \setminus \Lambda, \quad (1)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} f_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2(t) \\ 0 & 0 & f_3(t) & 0 \\ 0 & f_4(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, & t \in (-1, 0), \\ \begin{bmatrix} 0 & f_1(t) & 0 & 0 \\ f_2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_3(t) \\ 0 & 0 & f_4(t) & 0 \end{bmatrix}, & t \in (0, 1); \end{cases}$$

$f_j(t)$, $j = \overline{1, 4}$ — гёльдеровские, нигде не обращающиеся в нуль функции, имеющие конечные односторонние пределы при $z \rightarrow -1, 0, 1$, $z \in L \setminus \Lambda$, также не обращающиеся в нуль, $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$.

Задачу (1) будем решать в классе функций, ограниченных в окрестностях точек Λ . Если $f_j(t) \equiv 1$, $j = \overline{1, 4}$, то рассматриваемая задача эквивалентна задаче построения основных функционалов римановой поверхности, являющейся четырехлистным накрытием сферы. При этом точки $z = -1, 0, 1$ являются проекциями точек ветвления данного накрытия, а подстановки

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

описывают закон склеивания листов накрытия в окрестностях точек $-1, 0, 1$ соответственно.

Алгебраическое уравнение, соответствующее указанному накрытию, построено в [1]. Оно имеет следующий вид:

$$w^4 - 4zw^3 + \gamma zw^2 - 2(\gamma - 4)zw + \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2 z = 0, \quad (2)$$

где $\gamma \in (-4, -3)$ — корень уравнения $\gamma^4 - 12\gamma^3 - 54\gamma^2 - 32\gamma - 64 = 0$. Род

поверхности равен нулю [1]. Упорядочим теперь корни уравнения (2) так, чтобы они удовлетворяли условию сопряжения. С этой целью из (2) выразим z :

$$z = \frac{w^4}{4w^3 - \gamma w^2 + 2(\gamma - 4)w - \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2}$$

Отсюда видно, что $z \rightarrow \infty$ только при $w \rightarrow \infty$ или при $4w^3 - \gamma w^2 + 2(\gamma - 4)w - \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2 \rightarrow 0$.

Корни знаменателя при указанном значении γ лежат в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$. Обозначим их через w_0', w_0'', w_0''' соответственно. Вектор $(w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z))$, где $w_1(\infty) = \infty$, $w_2(\infty) = w_0''$, $w_3(\infty) = w_0'$, $w_4(\infty) = w_0'$, удовлетворяет условию (1) при $f_j(t) \equiv 1$, $j = \overline{1, 4}$ [1]. Каноническая матрица задачи (1) в случае $f_j(t) \equiv 1$, $j = \overline{1, 4}$ имеет вид [2]:

$$\chi(z) = \begin{bmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 - c_1 z w_1 & w_1^3 - c_1 z w_1^2 - c_2 z w_1 \\ 1 & w_2 & w_2^2 - c_1 z w_2 & w_2^3 - c_1 z w_2^2 - c_2 z w_2 \\ 1 & w_3 & w_3^2 - c_1 z w_3 & w_3^3 - c_1 z w_3^2 - c_2 z w_3 \\ 1 & w_4 & w_4^2 - c_1 z w_4 & w_4^3 - c_1 z w_4^2 - c_2 z w_4 \end{bmatrix},$$

где постоянные c_1, c_2 определяются следующим образом:

$$w_1(z) = c_1 z + O(1) = c_1 z + k_1(z); \quad (3)$$

$$w_1(z)k_1(z)O = c_2 z + O(1) \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Так как при выводе (2) предполагалось, что $w(z) \sim 4z$, при $z \rightarrow \infty$, то имеем $c_1 = 4$. Для нахождения c_2 воспользуемся методом диаграмм Ньютона. Введем обозначения $v = 1/z$, $m = 2 - \gamma/2$ и перепишем (2) в виде:

$$vm^4 - 4w^3 + (4 - 2m)w^2 + 4mw + m^2 = 0. \quad (2')$$

Разложение w в окрестности нуля ищем в виде: $w = 4v^{-1} + av^2 + \dots$.

Подставляя это выражение в (2'), находим, что $\epsilon = 0$, $a = \frac{m-2}{2}$.

Сопоставляя полученный результат с формулой (3), получаем $c_2 = -\gamma$. Таким образом, каноническая матрица задачи (1) при $f_j(t) \equiv 1$, $j = \overline{1, 4}$ имеет вид:

$$\chi(z) = \begin{bmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 - 4zw_1 & w_1^3 - 4zw_1^2 - \gamma zw_1 \\ 1 & w_2 & w_2^2 - 4zw_2 & w_2^3 - 4zw_2^2 - \gamma zw_2 \\ 1 & w_3 & w_3^2 - 4zw_3 & w_3^3 - 4zw_3^2 - \gamma zw_3 \\ 1 & w_4 & w_4^2 - 4zw_4 & w_4^3 - 4zw_4^2 - \gamma zw_4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Построим некоторое решение задачи (1). С этой целью рассмотрим вспомогательную неоднородную задачу:

$$\bar{\Phi}^+(t) = \bar{G}\bar{\Phi}^-(t) + \ln f(t), \quad t \in L,$$

$$\ln f(t) = (\ln f_1(t), \ln f_2(t), \ln f_3(t), \ln f_4(t))^T, \quad (5)$$

где \bar{G} получается из G при $f_j(t) \equiv 1$, $j = \overline{1, 4}$. Ограниченная на бесконечности функция $\bar{\Phi}(z)$, определяемая формулой

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{\bar{\chi}(z)}{2\pi i} \int_L [\chi^+(t)]^{-1} \ln f(t) \frac{dt}{t-z}, \quad (6)$$

является частным решением задачи (5). Вектор

$$\exp \bar{\Phi}(z) = (\exp \bar{\Phi}_1(z), \exp \bar{\Phi}_2(z), \exp \bar{\Phi}_3(z), \exp \bar{\Phi}_4(z))^T$$

будет удовлетворять краевому условию (1). Для компонент $\bar{\Phi}_j(z)$ вектора $\bar{\Phi}(z)$ из (6) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(t) dt}{t-z} + \frac{w_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(t) dt}{t-z} + \\ & + \frac{w_1(z) - 4zw_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_3(t) dt}{t-z} + \\ & + \frac{w_j^3(z) - 4zw_j^2(z) + 7zw_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_4(t) dt}{t-z}, \quad j = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (6')$$

где

$$\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = [\chi^+(t)]^{-1} \begin{bmatrix} \ln f_1(t) \\ \ln f_2(t) \\ \ln f_3(t) \\ \ln f_4(t) \end{bmatrix}.$$

Найдя обратную матрицу $[\chi(t)]^{-1}$, получим:

$$F_1(t) = \frac{w_2 w_3 w_4}{A} \ln f_1(t) - \frac{w_1 w_3 w_4}{B} \ln f_2(t) + \frac{w_1 w_2 w_4}{C} \ln f_3(t) - \frac{w_1 w_2 w_3}{D} \ln f_4(t);$$

$$\begin{aligned} F_2(t) = & \frac{4t(w_2 + w_3 + w_4) + 7t - w_2 w_4 - w_2 w_3 - w_3 w_4 - 16t^2}{A} \ln f_1(t) + \\ & + \frac{-4t(w_1 + w_3 + w_4) - 7t + w_1 w_3 + w_1 w_4 + w_3 w_4 + 16t^2}{B} \ln f_2(t) + \\ & + \frac{4t(w_1 + w_2 + w_4) + 7t - w_2 w_1 - w_2 w_4 - w_1 w_4 - 16t^2}{C} \ln f_3(t) + \\ & + \frac{-4t(w_1 + w_2 + w_3) - 7t + w_1 w_3 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + 16t^2}{D} \ln f_4(t); \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} F_3(t) = & \frac{w_2 + w_3 + w_4 - 4t}{A} \ln f_1(t) + \frac{4t - w_1 - w_3 - w_4}{B} \ln f_2(t) + \\ & + \frac{w_1 + w_2 + w_4 - 4t}{C} \ln f_3(t) + \frac{4t - w_1 - w_2 - w_3}{D} \ln f_4(t); \end{aligned}$$

$$F_4(t) = \frac{-\ln f_1(t)}{A} + \frac{\ln f_2(t)}{B} - \frac{\ln f_3(t)}{C} + \frac{\ln f_4(t)}{D},$$

где

$$A = (w_4 - w_1)(w_3 - w_1)(w_2 - w_1); \quad B = (w_2 - w_1)(w_4 - w_2)(w_3 - w_2);$$

$$C = (w_3 - w_2)(w_3 - w_1)(w_4 - w_3); \quad D = (w_4 - w_1)(w_1 - w_2)(w_4 - w_3).$$

Вектор $\bar{X}(z) = \exp \bar{\Phi}(z)$ удовлетворяет условию сопряжения (1), однако он не является решением задачи (1) в классе ограниченных при $z \rightarrow -1, 0, 1$ функций. Исследуем поведение функций $\Phi_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, в окрестностях точек $z = -1, 0, 1$. Для этого найдем разложения ветвей $w_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ в окрестностях точек $z = -1, 0, 1$. Вновь воспользовавшись методом диаграмм Ньютона, получим: в окрестности точки $z = 0$

$$w_1(z) = \sqrt{1 - \frac{7}{4}} (1+i)z^{1/4} + o(z^{1/4}), \quad z \rightarrow 0,$$

$$w_2(z) = \sqrt{1 - \frac{7}{4}} (-1+i)z^{1/4} + o(z^{1/4}), \quad z \rightarrow 0,$$

$$w_3(z) = \sqrt{1 - \frac{7}{4}} (-1-i)z^{1/4} + o(z^{1/4}), \quad z \rightarrow 0,$$

$$w_4(z) = \sqrt{1 - \frac{7}{4}} (1-i)z^{1/4} + o(z^{1/4}), \quad z \rightarrow 0;$$

в окрестности точки $z = 1$

$$w_{1,2} = a_1 \pm \frac{a_1^2}{2\sqrt{m+1}} (z-1)^{1/2} + o(z-1)^{1/2}, \quad z \rightarrow 1,$$

$$w_{3,4} = a_2 \pm \frac{a_2^2}{2\sqrt{m+1}} (z-1)^{1/2} + o(z-1)^{1/2}, \quad z \rightarrow 1,$$

где

$$a_1 = 1 + \sqrt{1+m}, \quad a_2 = 1 - \sqrt{1+m}, \quad m = 2 - \frac{7}{2};$$

в окрестности точки $z = -1$

$$w_i = a_i + o(1), \quad z \rightarrow -1, \quad i = \overline{1, 4},$$

где a_i — различные корни уравнения

$$a^4 + 4a^3 + (2m-4)a^2 - 4ma - m^2 = 0, \quad m = 2 - \frac{7}{2}.$$

Теперь можно найти следующие пределы:

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_1(t) = a_1^1 \ln f_1(\pm 0) + a_2^1 \ln f_2(\pm 0) + a_3^1 \ln f_3(\pm 0) + a_4^1 \ln f_4(\pm 0);$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} [F_1(t) + w_1(1)F_2(t) + (w_1^2(1) - 4w_1(1))F_3(t) +$$

$$+ (w_1^3(1) - 4w_1^2(1) + \gamma w_1(1))F_4(t)] =$$

$$= b_1^1 \ln f_1(1) + b_2^1 \ln f_2(1) + b_3^1 \ln f_3(1) + b_4^1 \ln f_4(1);$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} [F_1(t) + w_1(-1)F_2(t) + (w_1^2(-1) + 4w_1(-1))F_3(t) +$$

$$+ (w_1^3(-1) + 4w_1^2(-1) - \gamma w_1(-1))F_4(t)] =$$

$$= c_1^1 \ln f_1(-1) + c_2^1 \ln f_2(-1) + c_3^1 \ln f_3(-1) + c_4^1 \ln f_4(-1);$$

где коэффициенты a_j^i , b_j^i , c_j^i , $i = \overline{1, 4}$ определяются из таблицы.

Значение i	Коэффициент при	$a_j^i(t=0)$	$b_j^i(t=1)$	$c_j^i(t=-1)$
$(i=1)$ $\psi_1(t)$	$\ln f_1(t)$	1/3	1/2	1
	$\ln f_2(t)$	1/3	1/2	0
	$\ln f_3(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_4(t)$	1/3	0	0
$(i=2)$ $\psi_2(t)$	$\ln f_1(t)$	1/3	1/2	0
	$\ln f_2(t)$	1/3	1/2	1
	$\ln f_3(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_4(t)$	1/3	0	0
$(i=3)$ $\psi_3(t)$	$\ln f_1(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_2(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_3(t)$	1/3	1/2	1
	$\ln f_4(t)$	1/3	1/2	0
$(i=4)$ $\psi_4(t)$	$\ln f_1(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_2(t)$	1/3	0	0
	$\ln f_3(t)$	1/3	1/2	0
	$\ln f_4(t)$	1/3	1/2	1

Выберем целые числа $\gamma_1^{(1)}$, $\gamma_2^{(1)}$, $\gamma_1^{(-1)}$, $\gamma_2^{(-1)}$, $\gamma_3^{(-1)}$, $\gamma_4^{(-1)}$, $\gamma_1^{(0)}$ из условий [3]:

$$\begin{aligned}
0 \leq \gamma_1^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{arg} f_1(1) + \operatorname{arg} f_2(1)}{2\pi} \right] < 1, \\
0 \leq \gamma_2^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{arg} f_3(1) + \operatorname{arg} f_4(1)}{2\pi} \right] < 1, \\
0 \leq \gamma_1^{(-1)} - \frac{\operatorname{arg} f_1(-1)}{2\pi} < 1, \\
0 \leq \gamma_2^{(-1)} - \frac{\operatorname{arg} f_2(-1)}{2\pi} < 1, \\
0 \leq \gamma_3^{(-1)} - \frac{\operatorname{arg} f_3(-1)}{2\pi} < 1, \\
0 \leq \gamma_4^{(-1)} - \frac{\operatorname{arg} f_4(-1)}{2\pi} < 1, \\
0 \leq \gamma_1^{(0)} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 \frac{\operatorname{arg} f_i(+0) - \operatorname{arg} f_i(-0)}{2\pi} < 1, \\
0 \leq \operatorname{arg} f_j(t) \leq 2\pi, \quad j = \overline{1, 4}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}); \\
\alpha_2 &= \max(\gamma_1^{(-1)}, \gamma_2^{(-1)}, \gamma_3^{(-1)}, \gamma_4^{(-1)}); \quad \alpha_3 = \gamma_1^{(0)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тогда вектор, компоненты которого задаются формулой

$$X_j(z) = (z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_3} (z+1)^{\alpha_2} \exp \bar{\phi}_j(z), \quad j = \overline{1, 4},$$

принадлежит классу ограниченных в окрестностях точек $z = -1, 0, 1$ вектор-функций. Матрица

$$\begin{aligned}
K(z) &= (z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_3} (z+1)^{\alpha_2} \times \\
&\times \operatorname{diag} [\exp \bar{\phi}_1(z), \exp \bar{\phi}_2(z), \exp \bar{\phi}_3(z), \exp \bar{\phi}_4(z)] \chi(z)
\end{aligned} \tag{10}$$

также принадлежит рассматриваемому классу, удовлетворяет краевому условию (1), и порядок ее определителя равен

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_{z=-\infty}(\det K(z)) &= \sum_{j=1}^4 \operatorname{ord}_{z=-\infty}((z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_3} (z+1)^{\alpha_2} \exp \bar{\phi}_j(z)) + \\
&+ \operatorname{ord}_{z=-\infty}[\det \chi(z)] = -4 \sum_{K=1}^3 \alpha_K - 3.
\end{aligned}$$

(Порядок функции в бесконечно удаленной точке мы определяем следующим образом: если функция $\Phi_j(z)$ в точке $z = \infty$ имеет нуль порядка $s > 0$, то, по определению, $\operatorname{ord}_{z=\infty} \Phi_j(z) = s$. Если $\Phi_j(z)$ в точке $z = \infty$ имеет полюс порядка $s > 0$, то $\operatorname{ord}_{z=\infty} \Phi_j(z) = -s$.) Порядки столбцов $K(z)$ соответственно равны

$$\kappa_1 = - \sum_{K=1}^3 \alpha_K, \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = - \sum_{K=1}^3 \alpha_K - 1$$

и их сумма равна порядку $\det K(z)$.

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Матрица $K(z)$, задаваемая формулой (10), где целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определяются из соотношений (8), (9); $\varphi_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ — решения задачи (5), определяемые формулами (6'), (7); матрица $\chi(z)$, определяемая по формуле (4), является канонической матрицей задачи (1) в классе функций, ограниченных в окрестностях точек $z = -1, 0, 1$. Ее частные индексы равны

$$\kappa_1 = - \sum_{k=1}^3 \alpha_k, \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = - \sum_{k=1}^3 \alpha_k - 1.$$

1. Д ж у р а е в О. //Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1987. № 1. С. 57.
2. Б р о в к а Н. В., П р и м а ч у к Л. П. //Там же. 1990. № 3. С. 61.
3. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 31. 05. 94.

УДК 681.3.06:51

М. К. БУЗА, Л. В. ПЕВЗНЕР

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ АКТИВИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

Some aspects of using mathematical theory for program pedagogical sistem projecting is described in the article.

В настоящей работе предлагается математический аппарат, используемый при разработке программно-педагогического средства (ППС), ориентированного на автоматизацию процесса обучения по дисциплинам цикла «ЭВМ и программирование» (темы: модульное, структурное, объектно-ориентированное программирование) [1]. Описана структура, назначение и процедуры функционирования ППС. Цель предлагаемого ППС — активизация процесса обучения.

ППС состоит из двух основных частей:

- инструментальной сервисной системы (ИС1) преподавателя-работчика обучающих курсов (ОК);
- инструментальной системы обучаемого (ИС2).

Процесс приобретения знаний с помощью ППС осуществляется в двух режимах: А — обучение с помощью «электронной книги» и В — моделирование.

Основой процесса обучения в режиме А является обучающий курс K , общая структура которого имеет вид:

$$K = \langle T, A, F, G, S \rangle,$$

где $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ — конечное множество тем исходного ОК K . Каждая тема T_i состоит из пар вида (I_i, Q_i) , где I_i — конечное множество информационных кадров, раскрывающих содержание темы T_i ; Q_i — множество контрольных вопросов по теме T_i . Все контрольные вопросы из множества Q_i по сложности разбиваются на подмножества $\{Q_i^j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$, где Q_i^j — вопросы j -го уровня знаний обучаемого по теме i (заметим, что пересечение подмножеств Q_i^j и Q_i^t , $t = 1, 2, \dots, m$, может быть не пусто).

$A = \{A_q \mid q = 1, 2, \dots, f\}$ — конечное множество ответов обучаемого на заданные ему вопросы. В зависимости от правильности ответа обучаемого на вопросы множества Q_i^j определяется g — следующий уровень вопроса по исходной теме T_i с помощью функции анализа ответа F , где $g = F(Q_i^j, A_i^f)$.

$S = \{S_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ — конечное множество статистической информации о ходе опроса обучаемого по каждой теме T_i исходного курса K (по сути дела, S является путем обхода K).

G — графово-программная грамматика (ГПГ) [2], описывающая иерархическую графовую структуру ОК и отображающая внутренние

связи K . Вершинами графовой структуры являются темы множества T_1 ; путь от вершины T_1 к некоторой вершине T_l ($l = 1, 2, \dots, n$) устанавливается в зависимости от S_l и g с помощью функции перехода $R: T_l \times S_l \times g \rightarrow T_l$.

Таким образом, процесс обучения в режиме А может быть отождествлен с обходом исходной иерархической графовой структуры. Для реализации алгоритма этого обхода был использован алгоритм синтаксического анализа сверху вниз, базирующийся на ГПГ.

В отличие от классических автоматизированных обучающих систем, реализованный в исходной ППС режим А позволяет осуществлять процесс обучения, хорошо адаптируемый к индивидуальным особенностям, степени подготовленности и уровню знаний учащегося, реализуя выполнение функций сличения и коррекции знаний [3] уже в самом процессе обучения.

Основные параметры для функции F и R определяет сам преподаватель-разработчик ОК; от этих функций зависит степень адаптируемости разрабатываемого ОК к учащемуся. Заметим, что для облегчения труда преподавателя-разработчика ОК в ППС существует ИС1, позволяющая либо с помощью специально разработанного языка разработчика ОК, либо с помощью дружественного интерфейса в процессе диалога определить степень сложности каждого вопроса по теме T_l (эти методические аспекты решаются каждым преподавателем индивидуально и не могут быть доверены ИС1). Используя полученную информацию, т. е. качественную и количественную оценку каждого контрольного вопроса, ИС1 автоматически формирует функции F и R , осуществляя разметку графовой структуры (по сути дела, здесь строятся множества правил конкретизации ГПГ G [4]).

Процесс обучения в режиме В ИС2 реализуется двумя способами: с помощью имитационного моделирования (система ИМ1) и обучения по модели (система ИМ2). Здесь под имитационным моделированием в процессе обучения подразумевается выполнение обучающей программой действий, имитирующих выполнение требуемых по теме изучаемой дисциплины функций, с демонстрацией промежуточных и окончательных результатов на экране компьютера в наглядном и удобном для учащегося виде. Имитационные программы рекомендуются использовать на втором этапе обучения (после окончания сеанса работы с ОК в режиме А), где начинается закрепление изучаемого на первом этапе материала с помощью нового способа его подачи и анализа. ИМ1 предусматривает не только имитацию изучаемых функций по заранее подготовленным преподавателем примерам, но и выполнение примеров, предложенных учащимся. Такое участие учащегося в моделировании позволяет активизировать процесс обучения, делая знания более полными и глубокими. В исходной ППС ИМ1 ориентирована на проектирование модульных, структурируемых и объектно-ориентированных программ. При этом основными являются функции анализа текстов, написанных на заданном языке программирования (PASCAL, C и т. п.), на модульность и структурируемость, и, если необходимо, на преобразование анализируемых текстов в функционально-эквивалентные, но удовлетворяющие условиям заданной технологии программирования.

Формально данную задачу можно описать следующим образом. Пусть Π — анализируемый текст программы на языке L ; G — ГПГ, описывающая синтаксис заданного языка L и дополненная множеством правил конкретизации, позволяющих построить Γ — граф информационных и управляющих связей программы Π [4], выделяя при этом подграфы $\Gamma_i \subseteq \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, n$, в которых нарушаются принципы модульности и структурируемости. Таким образом, первый шаг работы ИМ1 формально записывается так:

$$\prod_{G}^{A_1} > * \Gamma, \quad (1)$$

где A_1 — уже рассмотренный в режиме А алгоритм анализа, базирующийся на ГПГ G и основанный на стратегии сверху вниз. На втором шаге граф Γ преобразуется в функционально-эквивалентный ему граф Γ_1 (2), причем процесс преобразования выполняется тем же алгоритмом

A_1 , но грамматика G заменяется на ГПГ G_1 , описывающую граф информационных и управляющих связей, правила конкретизации которой ориентированы на операции преобразования графа G в граф G_1 .

Второй этап ИМ1 может быть формально записан следующим образом:

$$G \stackrel{A_1}{=} > *G_1. \quad (2)$$

На третьем шаге по G_1 строится программа Π_1 на языке $L(G)$, причем Π_1 является функционально-эквивалентной Π , но в отличие от последней удовлетворяет условиям модульности и структурируемости. Третий шаг формально можно записать так же, как процесс вывода

$$G_1 \stackrel{A_1}{=} > * \Pi_1 \quad (3)$$

с использованием алгоритма A_1 по грамматике G_2 , правила конкретизации которой позволяют формировать текст программы Π (заметим, что $L(G) = L(G_2)$).

При работе с ИМ2 осуществляется режим обучения «по модели». Это является следующим этапом методики использования ППС после работы в режиме A и с ИМ1. Если в первых двух режимах обучаемый получал теоретические знания (только в разных формах представления знаний), то работа с системой ИМ2 направлена на формирование у учащегося действенных знаний, умений и навыков, позволяющих использовать полученный на предыдущих этапах теоретический материал при конкретном проектировании программ. Однако на этом этапе обучения ППС еще не оставляет учащегося без внимания и поддержки, так как весь процесс проектирования программ регламентирован заданной в ИМ2 модели, поддерживаемой дружественным интерфейсом (с помощью подсказок, напоминаний и непосредственного возврата к соответствующему ОК в режиме A).

Система ИМ2 реализует в данном ППС обучение проектированию объектно-ориентированных программ (ООП) по модели ГПГ G . Математически данный процесс можно описать следующим образом. Пусть дана ГПГ $G = \langle V_T, V_N, P, R, \sigma \rangle$, где V_T, V_N, P, R, σ соответственно конечные множества терминальных, нетерминальных символов, правил, номеров правил, аксиома грамматики. Тогда должен существовать некоторый алгоритм A_2 , который по G построит ГПГ G_3 , т. е.

$$G \stackrel{A_2}{=} > *G_3,$$

где $G_3 = \langle V_T \cup V_{T1}, V_N \cup V_{N1}, P \cup P_1, R \cup R_1, \sigma \rangle$, где V_{T1}, V_{N1}, P_1, R_1 — дополнительные множества терминальных, нетерминальных символов, правил, номеров правил грамматики, расширяющих исходную G до конкретной грамматики G_3 , описывающей граф информационных и управляющих связей проектируемой ООП (см. формулы (1) и (2)). После чего, воспользовавшись описанным ранее процессом (см. формулу (3)), мы строим вывод ООП $\Pi \in L(G_3)$.

Представленный в настоящей работе математический аппарат использован в реально существующем ППС, разработанном на языке TURBO PASCAL с использованием TURBO VISION на IBM - совместимых ЭВМ.

1. Буза М. К., Певзнер Л. В. // Современные научные технологии: Сб. науч. тр. Мн., 1994. С. 84.

2. Певзнер Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1983. № 3.

3. Певзнер Л. В., Сманцер А. Н. // Учебные заведения нового типа в национальной системе образования: Сб. ст. Мн., 1993. С. 145.

4. Буза М. К., Певзнер Л. В., Седова И. В. Автоматическое построение иерархических структур последовательных программ // Деп. в ВИНТИ. 25.03.81. № 163781.

Поступила в редакцию 30.06.94.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИИ

Algebra of mnemofunctions with everywhere defined Mellin's transformation is constructed.

В настоящей работе построена алгебра мнемофункций со всюду определенными сверткой и преобразованием Меллина, а также рассмотрены теоремы типа Пэли — Винера для указанной алгебры.

1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Возьмем две монотонные последовательности действительных чисел (a_n) и (b_n) такие, что $a_n \rightarrow a + 0$ и $b_n \rightarrow b - 0$. Рассмотрим пространство $\mu(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_{a_n, b_n}$, где μ_{a_n, b_n} — пространство гладких комплекснозначных функций f , определенных на $I = (0, \infty)$, таких, что $\sup_{x>0} |k_{a_n, b_n}(x) x^{k+1} f^{(k)}(x)| < \infty$, а

$$k_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha}, & 0 < x \leq 1, \\ x^{-\beta}, & x > 1. \end{cases}$$

На μ_{a_n, b_n} вводится топология с помощью семейства полуномр

$$\gamma_{s,n}(f) = \max_{k \leq s} \sup_{x>0} |k_{a_n, b_n}(x) x^{k+1} f^{(k)}(x)|.$$

Так как если $a \leq c$ и $d \leq b$, то $\mu_{c,d} \subset \mu_{a,b}$, и на $\mu(a, b)$ вводится топология индуктивного предела. Причем определение $\mu(a, b)$ не зависит от выбора (a_n) и (b_n) . Известно [4], что:

- 1) μ_{a_n, b_n} — полное, векторное пространство Фреше $\forall a_n, b_n$;
- 2) $D(I)$ плотно в $\mu(a, b)$ и $\mu(a, b)$ полно, следовательно, $\mu'(a, b) \subset D'(I)$.

Введем новое пространство $V(a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{-a_n, -b_n}$; $V_{-a_n, -b_n}$ определим как пространство гладких комплекснозначных функций φ , определенных на $I = (0, \infty)$, таких, что

$$\sup_{x>0} |k_{-a_n, -b_n}(x) x^k \varphi^{(k)}(x)| < \infty.$$

На $V_{-a_n, -b_n}$ вводится топология с помощью семейства полуномр

$$V_{s,n}(\varphi) = \max_{k \leq s} \sup_{x>0} |k_{-a_n, -b_n}(x) x^k \varphi^{(k)}(x)|.$$

На $V(a, b)$ вводим топологию проективного предела при помощи семейства полуномр $V_{s,n}$, где $s, n \geq 0$. Определение $V(a, b)$, очевидно, не зависит от выбора последовательностей (a_n) и (b_n) .

Теорема 1. $V(a, b)$ — пространство Фреше, непрерывно и плотно вложенное в $\mu(a, b)$.

На пространстве $\mu'(a, b)$ можно ввести свертку меллиновского типа [4]. Пусть $f(x), g(x) \in \mu'(a, b)$. Сверткой меллиновского типа называется выражение $f \vee g$, определенное формулой $((f \vee g)(x), \varphi(x)) = (f(x), (g(y), \varphi(xy)))$.

Свертка меллиновского типа на $\mu'(a, b)$ согласована [4] с обычной сверткой меллиновского типа, которая задается формулой

$$(f, g)(x) = \int_0^{\infty} f(y) g(x/y) 1/y dy, \quad x > 0.$$

Теорема 2. Пусть $f, g \in V(a, b)$, тогда $f, g \in V(a, b)$, причем свертка меллиновского типа непрерывна на $V(a, b)$.

Пусть $f \in \mu'(a, b)$, тогда преобразование Меллина f на $\mu'(a, b)$ задается формулой $M(f) = (f(t), x^{s-1}) = F(s)$, где $M(f)$ — преобразование Меллина f в $\mu'(a, b)$, а $F(s)$ — аналитическая функция в открытой полосе $a < \text{Res} < b$ [4].

Опишем образ функций, которые являются преобразованием Мелли-

на функций из $V(a,b)$. Для этого введем в рассмотрение новое пространство $H(a,b)$. Это множество функций, аналитических в открытой полосе $a < \text{Re } s < b$ и удовлетворяющих условию: $\sup_{\text{Re } s \in A} |s^k F^{(l)}(s)| < \infty$, где A — любое компактное подмножество интервала (a,b) , а k и l — любые целые неотрицательные числа, $s \in \mathbb{C}$. На $H(a,b)$ введем топологию с помощью семейства полунорм:

$$h_{s,v,A}(F) = \max_{k,l} \sup_{\text{Re } z \in A} |z^l F^{(k)}(z)|,$$

где $s, v, i, l \geq 0$ и целые, а A — любое компактное подмножество интервала (a,b) , $z \in \mathbb{C}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть M — преобразование Меллина, тогда:

- 1) $M: V(a,b) \rightarrow H(a,b)$ — непрерывный оператор;
- 2) $M^{-1}: H(a,b) \rightarrow V(a,b)$ — непрерывный оператор.

Следствие 1. 1) $M: V(a,b) \rightarrow H(a,b)$ — биекция;

2) $M^{-1}: H(a,b) \rightarrow V(a,b)$ — биекция и задается формулой:

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) x^{-s} ds,$$

где $f(x)$ не зависит от выбора σ в пределах интервала (a,b) .

Ранее мы установили, что $V(a,b)$ — векторное пространство Фреше. К сожалению, $V(a,b)$ не является алгеброй относительно обычного умножения, поэтому введем на $V(a,b)$ другую операцию умножения: $\forall f, g \in V(a,b)$, положим

$$f(x) \text{ pg}(x) = f(x)g(x)x^\alpha,$$

где α — фиксированное число из интервала (a,b) .

Теорема 4. Введенная операция умножения непрерывна на $V(a,b)$.

Замечание. Если $a < 0 < b$, то α можно взять равным 0, тогда $f \text{ pg} = fg$, т. е. если $a < 0 < b$, то $V(a,b)$ — алгебра относительно обычной операции умножения!

Теорема 5. Справедливы следующие утверждения:

- 1) Множество $H(a,b)$ является алгеброй и умножение на $H(a,b)$ — непрерывная операция.
- 2) Дифференцирование на $H(a,b)$ — непрерывный оператор.
- 3) Умножение на z^k , где $z \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$ — целое, непрерывный оператор на $H(a,b)$.
- 4) Обычное умножение на $(\ln x)^k$, где $k \geq 0$ — целое, а $x \in I$ — непрерывный оператор на $V(a,b)$.
- 5) $x^k D^k$ — непрерывный оператор на $V(a,b)$.
- 6) $(xD)^k$ — непрерывный оператор на $V(a,b)$.

Теперь $V(a,b)$ — алгебра, непрерывно и плотно вложенная в $\mu'(a,b)$. Это значит, что, используя общую теорию построения новых обобщенных функций [1], $\mu'(a,b)$ можно вложить в некоторую алгебру $G(V(a,b))$ и таким образом определить (корректно) умножение для функций из $\mu'(a,b)$!

Рассмотрим подробнее возможность такого вложения.

2. Обозначим через $G(H(a,b))$ (соотв. $G(V(a,b))$) множество всех последовательностей из $H(a,b)$ (соответственно $V(a,b)$). $G(H(a,b))$ — алгебра с операцией обычного покоординатного умножения. $G(V(a,b))$ — алгебра с операцией покоординатного умножения p . Введем следующие множества:

$$G_M(V(a,b)) =$$

$$= \{ (g_k) \in G(V(a,b)) : \forall \alpha = (s, n) \exists m, c > 0, V_\alpha(g_k) \leq c_\alpha k^m, \forall k \},$$

$$N(V(a,b)) = \{ (g_k) \in G(V(a,b)) : \forall \alpha \forall m \exists c > 0, V_\alpha(g_k) \leq c_\alpha k^{-m}, \forall k \}.$$

Аналогично вводятся множества $G_M(H(a,b))$ и $N(H(a,b))$.

Пусть $G(V(a,b)) = G_M(V(a,b))/N(V(a,b))$ и $G(H(a,b)) = G_M(H(a,b))/N(H(a,b))$.

b))/ $N(H(a, b))$. Легко устанавливается [2], что $G(H(a, b))$ и $G(R(a, b))$ — алгебры и тот факт, что если $F:V(a, b) \rightarrow H(a, b)$ ($F:V(a, b) \rightarrow V(a, b)$, $F:H(a, b) \rightarrow H(a, b)$) — непрерывный оператор, то он по координатно [2] поднимается до отображения $F:G(V(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$, ($F:G(V(a, b)) \rightarrow G(V(a, b))$, $F:G(H(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$).

Теперь, вспоминая теорему 3 и ее следствие, легко получаем:

Теорема 6. Если M — преобразование Меллина на $G(V(a, b))$, то:

- 1) $M:G(V(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$ — биекция,
- 2) $M^{-1}:G(H(a, b)) \rightarrow G(V(a, b))$ — биекция.

Далее, так как $V(a, b) \subset \mu'(a, b)$, а в $\mu'(a, b)$ преобразование Меллина обладает многими полезными свойствами, то, используя теоремы 2, 3, 5, получаем:

Теорема 7. Пусть $f, g \in G(V(a, b))$ и $F, G \in G(H(a, b))$, где $F = M(f)$, а $G = M(g)$, тогда:

- 1) $M((x D)^k f(x)) = (-1)^k s^k M(f)(s)$, $s \in C$,
- 2) $M((\ln x)^k f(x)) = (M(f)(s))^k$,
- 3) $M(f \cdot g) = M(f)M(g)$,
- 4) $M^{-1}(FG) = M^{-1}(F) \cdot M^{-1}(G)$,
- 5) $(x D)^k (f \cdot g) = ((x D)^k f) \cdot g = f \cdot ((x D)^k g)$,
- 6) $M(x^k D^k f(x)) = (-1)^k (s)_k F(s)$, где $(s)_k = s(s+1) \dots (s+k-1)$.

Формулы 1) — 6) имеют смысл, так как отображения, определенные в теореме 5, по координатно поднимаются на пространство $G(V(a, b))$ ($G(H(a, b))$).

Рассмотрим вопрос о вложении $\mu'(a, b)$ в $G(V(a, b))$.

Теорема 8. $\mu'(a, b)$ вкладывается в $G(V(a, b))$ и это вложение инъективно.

Выявим связь между преобразованием Меллина в $\mu'(a, b)$ и преобразованием Меллина функций из $\mu'(a, b)$ в $G(V(a, b))$. Для этого сформулируем следующую теорему:

Теорема 9. Пусть $g \in \mu'(a, b)$ и $F(s) = M(g)$ в $\mu'(a, b)$, и пусть $g \rightarrow (g_k) + N(V(a, b))$ в $G(V(a, b))$ и $(F_k(s)) + N(H(a, b)) = M((g_k) + N(V(a, b)))$, тогда $F_k(s) \rightarrow F(s)$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty}$ точно для $\forall s$ таких, что $Res \in (a, b)$.

3. Теоремы Пэли — Винера для алгебры $G(V(a, b))$.

Для каждого целого $n > 0$ обозначим:

$$\underline{Z}(n) = \{ \psi \in H(C) : \forall k \exists d_k > 0, |z^k \psi(z)| \leq d_k \exp(n|z|), z = x + iy \}$$

$$\underline{Z} = \bigcup_{n > 0} \underline{Z}(n).$$

Теорема 10. Множество \underline{Z} является алгеброй.

\underline{Z} является подалгеброй $H(a, b)$ для любых $a < b$. На \underline{Z} будем рассматривать топологию из $H(a, b)$. Обозначим $G(\underline{Z})$ (соответственно $G(D(I))$) множество всех последовательностей из \underline{Z} (соответственно $D(I)$). Введем следующие множества:

$$G_M(D(I)) = G_M(V(a, b)) \cap G(D(I)), \quad G_M(\underline{Z}) = \\ = G_M(H(a, b)) \cap G(\underline{Z}),$$

$$N(D(I)) = G(D(I)) \cap N(V(a, b)), \quad N(\underline{Z}) = N(H(a, b)) \cap G(\underline{Z}).$$

Легко устанавливается следующий факт:

Теорема 11. Множество $G_M(D(I))$ (соответственно $G_M(\underline{Z})$) является подалгеброй в $G_M(V(a, b))$ (соответственно $G_M(H(a, b))$), а $N(D(I))$ (соответственно $N(\underline{Z})$) является идеалом в $G_M(D(I))$ (соответственно $G_M(\underline{Z})$).

Определим алгебры мнемофункций:

$$G(D(I)) = G_M(D(I)) / N(D(I)), \quad G(\underline{Z}) = G_M(\underline{Z}) / N(\underline{Z}).$$

Определим вложения:

$$j_{DV}: G(D(I)) \ni u = (u_k) + N(D(I)) \rightarrow (u_k) + N(V(a, b)) \in G(V(a, b)),$$

$$j_{ZH}: G(\underline{Z}) \ni u = (u_k) + N(\underline{Z}) \rightarrow (u_k) + N(H(a, b)) \in G(H(a, b)).$$

Теорема 12. Отображения j_{DV} и J_{ZH} инъективны.

Доказательство. Пусть $u, v \in G(D(I))$ и $j_{DV}(u) = j_{DV}(v)$. Это означает, что $(u_k - v_k) \in N(V(a, b))$. Но поскольку

$$u, v \in G(D(I)), \text{ то } (u_k - v_k) \in G(D(I)).$$

Таким образом,

$$(u_k - v_k) \in N(V(a, b)) \cap G(D(I)) = N(D(I)),$$

но тогда $u = v$. Точно так же доказывается, что j_{ZH} — инъекция. В связи с этим $G(D(I)) \subset G(V(a, b))$ и $G(\underline{Z}) \subset G(H(a, b))$.

Как уже было сказано, $G(D(I)) \subset G(V(a, b))$, значит, можно определить сужение преобразования Меллина на $G(D(I))$.

Теорема 13. Преобразование Меллина отображает биективно $G(D(I))$ на $G(\underline{Z})$.

Доказательство. Согласно теореме Пэли — Винера [3,4], преобразование $M: D(I) \rightarrow \underline{Z}(\mathbb{R})$ биективно. Поэтому биективно отображение $M: G(D(I)) \ni (u_k) \rightarrow (Mu_k) \in G(\underline{Z})$. Из непрерывности $M: V(a, b) \rightarrow H(a, b)$ немедленно вытекает биективность следующих отображений:

$$M: G_M(D(I)) \rightarrow G_M(\underline{Z}), \quad M: N(D(I)) \rightarrow N(\underline{Z}).$$

Отсюда следует, что биективно $M: G(D(I)) \rightarrow G(\underline{Z})$.

Эта теорема является расширением теоремы Пэли — Винера на алгебру мнемифункций $G(V(a, b))$.

Пусть $E(\mathbb{R})$ — пространство распределений с компактным носителем. Мы имеем естественные вложения [4]: $E(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}'(a, b) \subset G(V(a, b))$.

Если $u \in E(\mathbb{R}) \subset G(V(a, b))$, то обозначим M_{Eu} преобразование Меллина от u в $E(\mathbb{R})$.

Теорема 14. Пусть $u \in E(\mathbb{R}) \subset G(V(a, b))$. Тогда $Mu \in G(H(a, b))$. Причем $(mu)_k \rightarrow M_{Eu}$ для любых s из полосы $a < \text{Res} < b$.

Эта теорема является аналогом теоремы Пэли — Винера — Шварца для алгебры мнемифункций $G(V(a, b))$.

1. Антонович А. Б., Радыно Я. В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267.
2. Радыно Я. В., Нго Фухань, Сабра Рамадан // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 21.
3. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
4. Землян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1974.

Поступила в редакцию 05.05.94.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГорова—Фоккера—Планка ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

The sufficient conditions of analytic integration of Kolmogorov — Fokker — Planck equations for the quasilinear oscillatory systems with different types of external periodic forces and unparametric random effect are investigated in this paper.

Исследование влияния случайных возмущений на колебательные системы является исключительно важной и актуальной проблемой. Во многих современных задачах механики, теории управления, радиофизики и электроники основную роль играют воздействия, которые не могут быть описаны детерминированными функциями времени. Под действием этих возмущений в динамических системах будут наблюдаться случайные процессы, изучение которых является предметом статистической динамики.

При решении подобного класса задач весьма эффективным является применение метода марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики, особенно для квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы. Однако применение данного метода крайне затруднено вследствие сложности задачи получения аналитического решения соответствующего уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП). В данной работе определяется один, достаточно широкий класс неавтономных квазилинейных колебательных систем, удовлетворяющих полученному нами достаточному условию интегрируемости соответствующих уравнений КФП.

Рассмотрим следующую неавтономную механическую квазилинейную систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \epsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\epsilon} g(t, x, \dot{x}) \xi(t), \quad (1)$$

где $\epsilon > 0$ — малый параметр, ω — частота собственных колебаний системы, $\xi(t)$ — случайный процесс типа «белого шума», f, g — дифференцируемые функции своих аргументов, периодические по t . Используя замену переменных:

$$x(t) = a(t) \cos \psi(t), \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega a(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) = \omega t + \theta(t),$$

где $a(t), \theta(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, и применяя формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции, приходим к следующей системе стохастических дифференциальных уравнений, определяющих двумерный марковский случайный процесс $\{a(t), \theta(t)\}$ [1]:

$$da(t) = \left[-\frac{\epsilon}{\omega} f(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi) \sin \psi + \frac{\epsilon g^2(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi)}{2\omega^2 a} \cos^2 \psi \right] dt - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\omega} g(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi) \sin \psi d\xi(t), \quad (3)$$

$$d\theta(t) = \left[-\frac{\epsilon}{\omega a} f(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi) \cos \psi - \frac{\epsilon g^2(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi)}{\omega^2 a^2} \times \right. \\ \left. \times \sin \psi \cos \psi \right] dt - \frac{\sqrt{\epsilon}}{a\omega} g(t, a \cos \psi, -\omega a \sin \psi) \cos \psi d\xi(t).$$

Соответствующее уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы колебаний $w(a, \theta)$ после применения

к нему метода усреднения (что вполне оправдано, поскольку система (3) имеет стандартную по Н. Н. Боголюбову форму [2]) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (K_1(a, \theta)w) + \frac{\partial}{\partial \theta} (K_2(a, \theta)w) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (K_{11}(a, \theta)w) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} (K_{12}(a, \theta)w) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (K_{22}(a, \theta)w), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{\omega} f \sin \psi + \frac{g^2 \cos^2 \psi}{2\omega^2 a} \right], \\ K_2(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{\omega a} f \cos \psi - \frac{g^2 \sin 2\psi}{2\omega^2 a^2} \right], \\ K_{11}(a, \theta) &= M_t \left[\frac{1}{\omega^2} g^2 \sin^2 \psi \right], \\ K_{12}(a, \theta) &= M_t \left[\frac{1}{2a\omega^2} g^2 \sin 2\psi \right], \\ K_{22}(a, \theta) &= M_t \left[\frac{1}{a^2 \omega^2} g^2 \cos 2\psi \right], \end{aligned} \quad (5)$$

M_t — оператор усреднения.

Получение аналитического решения уравнения КФП (4) для систем вида (1) в большинстве практических случаев невозможно. Для автономных систем, т. е. в случае, когда

$$\begin{aligned} f(t, x, \dot{x}) &= f(x, \dot{x}), \\ g(t, x, \dot{x}) &= g(x, \dot{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

коэффициенты усредненного уравнения КФП будут зависеть только от амплитуды колебаний a , представляется возможным рассмотреть отдельного уравнения КФП для стационарной амплитуды колебаний, допускающего аналитическое решение [1, 2].

Однако существует широкий класс неавтономных систем вида (1), встречающихся при решении многих практических задач механики и математической физики, для которых удается получить аналитическое решение уравнения КФП (4). Это класс систем, соответствующих уравнения КФП (4) которых обладают условием потенциальности [3].

Рассмотрим частный случай системы типа (1), случайные колебания в которой могут быть описаны следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x, \dot{x}) + \varepsilon \sum_{s=0}^S P_s \cos(\Omega_s \omega t) x^s + \\ + \varepsilon \sum_{k=1}^K R_k \cos(\zeta_k \omega t) \dot{x}^k + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $h(x, \dot{x})$ — дифференцируемая функция своих аргументов, $P_s, R_k, \sigma, \Omega_s, \zeta_k, \omega$ — положительные постоянные, $\xi(t)$ — «белый шум» единичной интенсивности, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Колебательные системы, подобные (7), подверженные различным типам внешнего периодического воздействия и непараметрическому случайному возмущению, довольно часто являются предметом многих прикладных исследований [4—6]. Класс систем вида (7), для которых выполняются достаточные условия аналитической интегрируемости соответствующего уравнения КФП (4), может быть определен с помощью доказанной нами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (7) выполняются условия:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ a M_t \left[h (a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi \right] \right\} = 0, \quad (8)$$

$$\Omega_s \neq s - (2n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, \left[\frac{s}{2} \right]. \quad (9)$$

Тогда уравнение КФП (4) будет удовлетворять условию потенциальности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{K_{11}} \left(K_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{11}}{\partial a} \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{1}{K_{22}} \left(K_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{22}}{\partial \theta} - \frac{\partial K_{12}}{\partial a} \right) - \frac{2K_{12}}{K_{11}K_{22}} \left(K_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{11}}{\partial a} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

и, следовательно, решение $w(a, \theta)$ уравнения (4) может быть найдено в квадратурах.

Доказательство. Для усредненного уравнения КФП, согласно (5), имеем:

$$\begin{aligned} K_1(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{\omega} \left\{ h(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \sum_{s=0}^S P_s \cos(\Omega_s \omega t) a^s \cos^s \psi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^K R_k \cos(\zeta_k \omega t) a^k (-\omega)^k \sin^k \psi \right\} \sin \psi + \frac{\sigma^2}{2a\omega^2} \cos^2 \psi \right], \\ K_2(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{a\omega} \left\{ h(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \sum_{s=0}^S P_s \cos(\Omega_s \omega t) a^s \cos^s \psi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^K R_k \cos(\zeta_k \omega t) a^k (-\omega)^k \sin^k \psi \right\} \cos \psi - \frac{\sigma^2}{2a^2\omega^2} \sin 2\psi \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$K_{11}(a, \theta) = M_t \left[\frac{1}{\omega^2} \sigma^2 \sin^2 \psi \right] = \frac{\sigma^2}{2\omega^2},$$

$$K_{12}(a, \theta) = M_t \left[\frac{1}{2a\omega^2} \sigma^2 \sin 2\psi \right] = 0,$$

$$K_{22}(a, \theta) = M_t \left[\frac{1}{a^2\omega^2} \sigma^2 \cos 2\psi \right] = \frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}.$$

Тогда условие потенциальности (10) для системы (7) при выполнении соотношения (8) будет выполняться, если найдутся такие $\Omega_s, s = 0, 1, \dots, S$, и $\zeta_k, k = 1, 2, \dots, K$, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{s=0}^S P_s a^s M_t \left(\cos^s \psi \sin \psi \cos(\Omega_s \omega t) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^K R_k a^k (-\omega)^k M_t \left(\sin^{k+1} \psi \cos(\zeta_k \omega t) \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{s=0}^S P_s a^{s+1} M_t \left(\cos^{s+1} \psi \cos(\Omega_s \omega t) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^K R_k a^{k+1} (-\omega)^k M_t \left(\cos \psi \sin^k \psi \cos(\zeta_k \omega t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, исходя из соотношения (12), необходимо выяснить, при каких Ω_s и ζ_k будут справедливы следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[M_t \left(\cos^s \psi \sin \psi \cos(\Omega_s \omega t) \right) \right] = (s+1) M_t \left(\cos^{s+1} \psi \cos(\Omega_s \omega t) \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[M_t(\sin^{k+1} \psi \cos(\zeta_k \omega t)) \right] = (k+1) M_t(\cos \psi \sin^k \psi \cos(\zeta_k \omega t)),$$

$$(\forall s = \overline{0, S}, \quad \forall k = \overline{1, K}).$$

Воспользовавшись формулами для представления $\sin^k \psi$, $\cos^s \psi$ через тригонометрические функции кратных аргументов [7], получаем, что в резонансном случае при $\Omega_s = s - 2n + 1$, $n \in \{0, 1, \dots, [\frac{s}{2}]\}$, $\zeta_k = k - 2n + 1$, $n \in \{0, 1, \dots, [\frac{k}{2}]\}$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[M_t(\cos^s \psi \sin \psi \cos(\Omega_s \omega t)) \right] = \frac{1}{2^{s+1}} \left[\binom{s}{n} - \binom{s}{n-1} \right] \times$$

$$\times \cos((s-2n+1)\theta) (s-2n+1),$$

$$M_t(\cos^{s+1} \psi \cos(\Omega_s \omega t)) = \frac{1}{2^{s+1}} \binom{s+1}{n} \cos((s-2n+1)\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[M_t(\sin^{k+1} \psi \cos(\zeta_k \omega t)) \right] = \frac{(-1)^{\frac{k+3+2n}{2}}}{2^{k+1}} \binom{k+1}{n} \times$$

$$\times \sin((k-2n+1)\theta) (k-2n+1), \quad k - \text{нечетное},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[M_t(\sin^{k+1} \psi \cos(\zeta_k \omega t)) \right] = \frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}} \binom{k+1}{n} \times \quad (14)$$

$$\times \cos((k-2n+1)\theta) (k-2n+1), \quad k - \text{четное},$$

$$M_t(\cos \psi \sin^k \psi \cos(\zeta_k \omega t)) = \frac{(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{2^{k+1}} \left[\binom{k}{n} - \binom{k}{n-1} \right] \times$$

$$\times \sin((k-2n+1)\theta), \quad k - \text{нечетное},$$

$$M_t(\cos \psi \sin^k \psi \cos(\zeta_k \omega t)) = \frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}} \left[\binom{k}{n} - \binom{k}{n-1} \right] \times$$

$$\times \cos((k-2n+1)\theta), \quad k - \text{четное},$$

$$\text{где } \binom{s}{n} = \frac{s!}{n!(s-n)!}.$$

Исходя из соотношений (14), несложно установить, что условия потенциальности (13) выполняются при любых резонансных соотношениях вида

$$\zeta_k = k - 2n + 1, \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{k}{2} \right], \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

и лишь в одном резонансном случае для Ω_s .

$$\Omega_s = s + 1, \quad \forall s = 0, 1, \dots, S,$$

что соответствует утверждению теоремы. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы усредненное уравнение КФП (4) будет допускать точное решение

$$w(a, 0) = C \exp \left\{ 2 \left\{ \frac{1}{K_{11}} \left(K_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{11}}{\partial a} \right) da + \frac{K_2}{K_{22}} d\theta \right\} \right\}, \quad (15)$$

где C — постоянная нормировки [2].

1. Коломиец В. Г. // Мат. физика и нелинейная механика. 1987. Вып. 7(41). С. 1.
2. Рубаник В. П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн., 1985.
3. Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев, 1992.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., 1961.
5. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М., 1979.
6. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М., 1980.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1984.

Поступила в редакцию 16.09.94

УДК 577.3

Г. В. ГРУШЕВСКАЯ, Г. Г. КРЫЛОВ, А. И. ХМЕЛЬНИЦКИЙ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ ИСТОЧНИКОМ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОЛЕКУЛЯРНОЕ УЗНАВАНИЕ

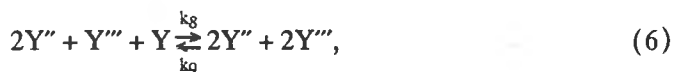
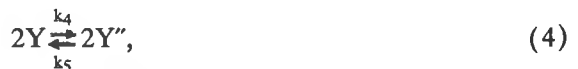
The aperiodically singularly disturbed system of ordinary differential equations describing the molecular level immune reaction has been analyzed. The numerical simulations have shown that there are solutions, that correspond to the primary Hopf's bifurcation and subsequent finite number of Feigenbaum's period-doubling bifurcations leading to chaotization of the system.

В последнее время большой интерес вызывают уравнения с сингулярно возмущенными членами. Это связано с тем, что в этих системах возникают качественно новые решения, включающие переход от одного устойчивого решения к другому [1, 2]. Нами анализируется аperiodически сингулярно возмущаемая система обычных дифференциальных уравнений, моделирующих иммунный отклик на молекулярном уровне. Функционирование иммунной системы организма характеризуется наличием обратной связи [3]. Причины нелинейного поведения иммунного отклика на молекулярном уровне не выяснены. Целью данной работы является математическое моделирование иммунохимических реакций.

Предполагается, что взаимодействие «антиген — антитело» протекает в две стадии — молекулярное узнавание и кластеризация. На стадии молекулярного узнавания происходит специфическое связывание антигена с антителом с образованием их комплекса. Последующее взаимодействие специфически связанных комплексов «антиген — антитело» приводит, как правило, к формированию пятизвенных замкнутых кластеров. Предположим, что стадия молекулярного узнавания описывается следующей системой химических реакций:



а стадия кластеризации — системой:





Здесь X — свободная F_{ab} -субъединица антитела, Y' — F_{ab} -субъединица, связанная с антигеном, у которого свободно второе место связывания; Y — F_{ab} -субъединица антитела, связанная с антигеном, у которого второй центр взаимодействия также связан; Y'' — антитело, соединенное с другим антителом по центру связывания, открывающемуся на F_c -субъединице после специфического связывания с антигеном; Y''' — антитело, у которого заняты два центра связывания на F_c -субъединице; Z — специфически связанный кластер антител, A — антиген; k_0 — k_{11} , c_1 — константы скоростей соответствующих химических реакций. Отметим, что в рассматриваемой системе антиген содержится в избытке.

Реакция (1) описывает приток антител в реакционную среду. Она характеризует обратную связь в системах (1—8). Реакция (8) описывает отток продукта из реакционной среды. Будем считать, что процессы, протекающие на стадии кластеризации, медленные по сравнению с процессом молекулярного узнавания. Тогда скорости изменения субстратов Y'' , Y''' , Z приблизительно равны нулю:

$$\frac{dY''}{dt} = k_4 Y^2 - k_5 Y''^2 \approx 0,$$

$$\frac{dY'''}{dt} = k_6 Y''^2 Y - k_7 Y''^2 Y''' + (k_8 + k_{10} Y''') Y''^2 Y''' Y - k_9 Y''^2 Y'''^2 - k_{11} Y'''^5 \approx 0,$$

$$\frac{dZ}{dt} = k_{11} Y'''^5 \approx 0.$$

Далее находим, что

$$Y'' = \sqrt{k_4/k_5} Y, \quad (9)$$

$$Y''' = \frac{(k_8 Y - k_7) \pm \sqrt{(k_8 Y - k_7)^2 + 4k_6 Y (k_9 - k_{10} Y)}}{2(k_9 - k_{10} Y)}. \quad (10)$$

Из систем (1—8) с учетом уравнений (9, 10) и при сохранении нелинейности, определяемой только слагаемыми, содержащими Y^2 , следует, что скорость изменения субстрата Y описывается уравнением:

$$\frac{dY}{dt} = 2k_2 XY' - 2 \left(k_3 + \frac{k_4}{k_5} (k_8 Y - k_7) Y''' \right) Y^2. \quad (11)$$

Тогда остальные реакции описываются уравнениями:

$$\frac{dX}{dt} = -k_0 XA + k_1 Y' - k_2 XY' + k_3 Y^2 + c_1 Y, \quad (12)$$

$$\frac{dY'}{dt} = 2k_0 XA - 2k_1 Y' - k_2 XY' + k_3 Y^2, \quad (13)$$

$$\frac{dA}{dt} = -k_0 XA + k_1 Y'. \quad (14)$$

Проанализируем на устойчивость решения системы уравнений (11—14) в окрестности стационарного решения в линейном приближении. Стационарное решение удовлетворяет системе уравнений:

$$-k_0 XA + k_1 Y' - k_2 XY' + k_3 Y^2 + c_1 Y = 0,$$

$$2k_0 XA - 2k_1 Y' - k_2 XY' + k_3 Y^2 = 0$$

$$2k_2 XY' - 2k_3 Y^2 = 0,$$

$$-k_0 XA + k_1 Y' = 0$$

и имеет вид:

$$X_{st} = Y_{st} \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_0 k_2 A}}$$

$$Y_{st}' = \frac{k_0}{k_1} X_{st} A,$$

где \bar{k}_3 определяется выражением

$$\bar{k}_3 = k_3 + \frac{k_3}{k_5} (k_8 Y - k_7) Y''.$$

Отметим, что A может принимать произвольные значения. Стационарное значение Y находится из уравнения:

$$\frac{k_4}{k_5} (k_8 Y - k_7) Y'' Y^2 - c_1 Y = 0.$$

Вектор отклонения $\Psi = (\Delta Y, \Delta Y', \Delta X)$ от стационарных решений удовлетворяет матричному уравнению:

$$\frac{d\Psi}{dt} = K\Psi, \quad (15)$$

где K — матрица вида:

$$K = \begin{pmatrix} -k_0 A - k_2 Y_{st}' & k_1 - k_2 X_{st} & 2k_3 Y_{st} + c_1 \\ 2k_0 A - k_2 Y_{st}' & -2k_1 - k_2 X_{st} & 2k_3 Y_{st} \\ 2k_2 Y_{st}' & 2k_2 X_{st} & 4\bar{k}_3 Y_{st} \end{pmatrix}$$

Собственные значения λ системы (15) удовлетворяют алгебраическому уравнению третьей степени, которое в случае действительных коэффициентов и отрицательного дискриминанта имеет два сопряженных мнимых корня, а третий корень — действительное число. Следовательно, согласно теореме Холфа [4] возможны автоколебания концентрации двух компонент иммунохимической реакции: свободных и специфически связанных антител. Результаты численного расчета приведены на рис. 1. Как видно из рисунка, в нелинейной системе (1—8) происходит бифуркация рождения цикла — бифуркация Холфа.

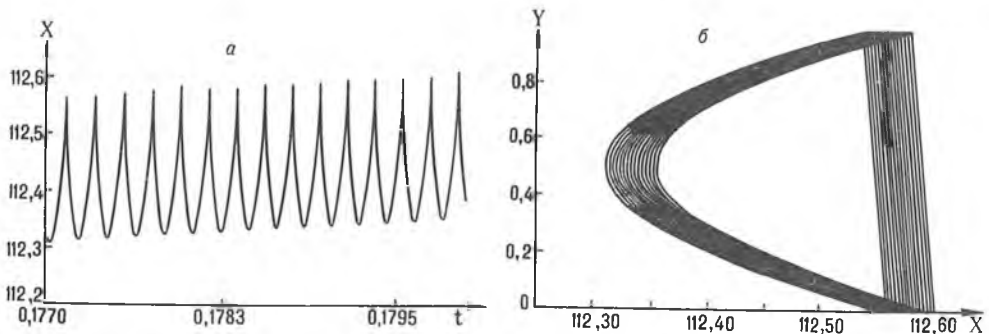


Рис. 1. Временная зависимость X -компоненты (а) и фазовый портрет $V(X)$ (б) для автоколебательного режима

В регулярной области поведения данная система численно решалась методом Рунге — Кутта 4-го порядка. В аномальной области поведения рассматриваемой системы критерий применимости конечно-разностной схемы Рунге—Кутта не выполняется. В этом случае стандартный подход к нахождению численных решений при малых ϵ состоит в использовании асимптотических разложений по ϵ . Однако это часто ведет к громоздким вычислениям. Поэтому в работе используется конечно-разностная схема с переменным шагом интегрирования, которая заключается в следу-

ющем. Хотя скорость изменения субстратов реакций иммунного отклика может быть бесконечно большой, в силу физичности задачи скачок их значений конечен. Тогда, согласно теореме Пеано [5], существует разбиение λ шага интегрирования Δt такое, что интеграл по мере, зависящей от этих величин, сходится. В работе λ выбиралось пропорциональным наибольшему коэффициенту $\Delta t_i < \Delta t/\lambda$.

В численных расчетах использовались следующие значения параметров: $k_0 = 0,001297$, $k_1 = 0,001$, $k_2 = 0,3$, $k_3 = 0,0002$, $k_6 = 25 \cdot 10^{-4}$, $k_7 = 5 \cdot 10^{-3}$, $k_8 - k_{10} = 1$. Численное моделирование показало, что рассматриваемая система имеет решения, которые соответствуют сначала бифуркации Хопфа, а затем последовательности конечного числа бифуркаций удвоения цикла Фейгенбаума с последующей хаотизацией (рис. 2). Таким образом, аналитически показана возможность существования периодических решений и численно промоделирована бифуркация Хопфа для иммунного отклика на молекулярном уровне.

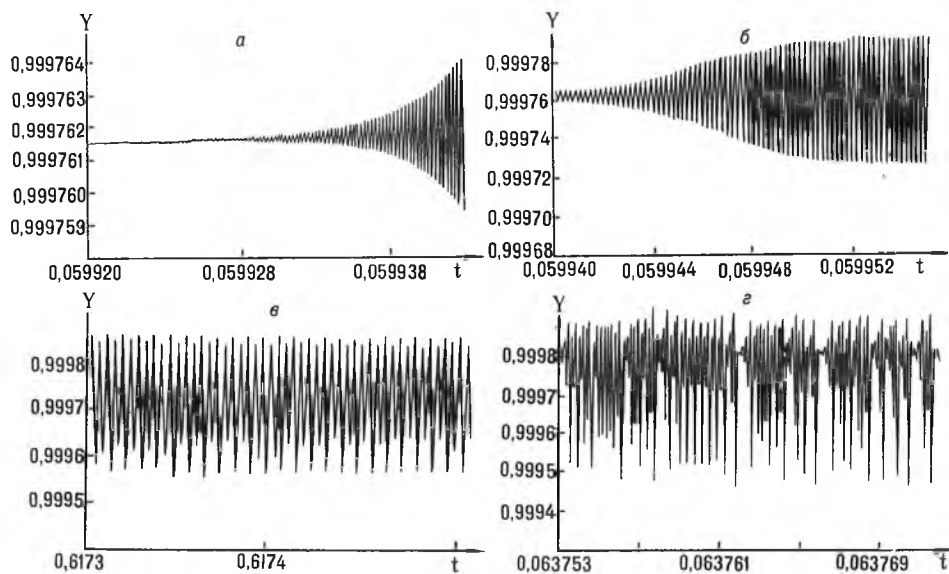


Рис. 2. Сценарий перехода к хаосу в реакциях иммунного отклика: а — бифуркация Хопфа; б — демонстрация стабилизации амплитуды колебаний концентрации компоненты Y; в — бифуркация удвоения периода; г — хаотическое поведение

1. Асимптотические методы математической физики. Сб. науч. тр. Киев, 1988.
2. Грушевская Г. В., Крылов Г. Г., Хмельницкий А. И., Черенкевич С. Н. // Nonlinear phenomena in complex systems. Polatsk, 1992. P. 202.
3. Кузнецов В. А. // Мат. биофизика. Красноярск, 1988. С. 103.
4. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М., 1985.
5. Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М., 1990.

Поступила в редакцию 04.07.94

Наши юбиляры



АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ШИРОКОВ



Исполнилось 70 лет со дня рождения крупного белорусского ученого, заслуженного деятеля науки и техники Республики Беларусь, академика Международной академии информатизации, члена-корреспондента АН Беларуси, доктора технических наук, профессора Широкова Александра Михайловича.

А. М. Широков родился 14 сентября 1924 г. в деревне Заовраг Кирово-Чепецкого района Кировской области в семье крестьянина. После окончания в 1941 г. Пищальского лесотехнического техникума работал лесотехником, помощником лесничего, лесничим.

Семнадцатилетним юношей А. М. Широков добровольцем ушел на фронт и с лета 1943 г. до конца войны находился в действующей армии в составе третьего Украинского фронта. За доблесть, мужество и отвагу А. М. Широков награжден двумя орденами Красной Звезды, орденом Отечественной войны II степени, орденом «За службу Родине в Вооруженных Силах СССР» III степени и 15 медалями.

После окончания войны Александр Михайлович продолжал службу в армии, с отличием окончил Артиллерийскую радиотехническую академию в Харькове. В 1954 г. началась его педагогическая и научная

деятельность. В 1962 г. А. М. Широков закончил адъюнктуру академии и защитил кандидатскую диссертацию; с 1963 по 1980 г. — начальник кафедры, заместитель начальника Минского ВИЗРУ.

А. М. Широков является одним из создателей научного направления в области технической кибернетики — теории надежности и эффективности сложных радиоэлектронных систем. Им разработаны методы прогнозирования надежности таких систем на ранних этапах конструирования, впервые предложены основы теории комплектования. Он автор более 300 научных статей, ряда монографий, учебников и учебных пособий. Под руководством А. М. Широкова защищены 5 докторских и 35 кандидатских диссертаций.

Велика роль А. М. Широкова в становлении и развитии факультета радиофизики и электроники Белгосуниверситета, деканом которого он был с 1980 по 1990 г., одновременно являясь заведующим кафедрой радиофизики, а затем — кафедрой надежности изделий радиоэлектроники. Именно в этот период факультет значительно расширился, были открыты четыре новые кафедры. А. М. Широков явился инициатором ряда крупных научных проектов, осуществленных учеными факультета.

А. М. Широков принимал активное участие в выработке научно-технической политики страны. С 1970 по 1980 г. являлся членом пленума Высшей аттестационной комиссии СССР. Долгое время работал в комитете по Государственным премиям БССР, в научном совете по комплексной программе «Кибернетика» АН СССР, являлся заместителем председателя Белорусского республиканского правления НТО РЭС им. А. С. Попова.

Сегодня А. М. Широков — ректор негосударственного учебного заведения Института современных знаний, который готовит специалистов для различных областей народного хозяйства, и по-прежнему — профессор Белгосуниверситета. Студенты факультета радиофизики и электроники с удовольствием слушают его блестящие лекции по теории вероятностей, теории сложных радиоэлектронных систем, которые отличаются изяществом и глубокой изложением материала. Общение с Александром Михайловичем оказывает глубокое воздействие на формирование личности специалиста и гражданина. В облике ученого гармонично сочетаются широта интересов и строгость научного мышления с исключительной доброжелательностью, внутренней культурой и интеллигентностью.

Неиссякаемая жизненная энергия, неуспокоенность достигнутым позволяют А. М. Широкову постоянно находиться в центре общественной жизни.

Коллектив преподавателей, сотрудников и студентов факультета радиофизики и электроники Белорусского государственного университета поздравляют Александра Михайловича Широкова с 70-летием со дня рождения и 40-летием научной, педагогической и общественной деятельности и желают крепкого здоровья, большого человеческого счастья и творческого долголетия.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1994 г. в «Вестнике
Белорусского государственного университета».
Серия 1: Физика. Математика. Механика

ФИЗИКА

<i>Абакумов Е. Г., Ушаков Е. А.</i> Геодезическая прецессия в поле Керра — Ньюмена	1 3
<i>Анищик В. М., Прокошин В. И., Ярмолевич В. А., Васильев И. И.</i> Использование планарного эффекта Холла для изучения свойств тонких ферромагнитных пленок	1 27
<i>Анищик В. М., Ярмолевич В. А., Рабкевич Т. М.</i> Расчет характеристик датчиков перемещений на эффекте Холла с использованием фиктивных магнитных зарядов	3 25
<i>Барковский Л. М., Жилко В. В., Лауриненко А. В.</i> Расчет электрооптических призмных модуляторов света для линейных и кольцевых резонаторов	2 8
<i>Бельский А. М.</i> О поперечных смещениях слаборасходящегося светового пучка при отражении	3 3
<i>Борздов В. М., Жевняк О. Г.</i> О зависимости низкотемпературной подвижности двумерных электронов инверсионного слоя кремниевого МОП-полевого транзистора от их концентрации	1 20
<i>Виленчик Б. Б., Галич Н. Е., Умрейко Д. С.</i> Аналогия между расходимостью светового пучка в турбулентной среде и самодефокусировкой в спутном потоке газа	2 30
<i>Грицай Ю. В., Мозильный В. В., Станкевич А. И.</i> Термохромизм и оптическая бистабильность растворов солей переходных металлов в органических средах	1 13
<i>Гулис И. М., Марковский О. Л., Цвирко В. А.</i> Флуоресценция антрацена в матрицах Шпольского при селективном возбуждении	2 18
<i>Данилькевич М. И.</i> Частоты оптических фононов в кислородных шпинелях по спектроскопическим и акустическим данным	3 21
<i>Дудчик Ю. И., Комаров Ф. Ф., Константинов Я. А.</i> Исследование распространения рентгеновских лучей в планарных волноводах	2 13
<i>Ермакоу В. В., Сташкевич Г. В.</i> Вуглавая характарыстыка аптычных сістэм з анізатропнымі матэрыяламі	3 10
<i>Зажогин А. П., Серафимович А. И., Зажогин А. А.</i> Изучение зависимости структурных и спектральных параметров бидентатно координированных нитратных групп от расстояния уран-нитрат в уранилнитратах	1 16
<i>Зажогин А. П., Серафимович А. И., Зажогин А. А.</i> Донорная способность нейтральных лигандов и ее влияние на структурные и спектральные параметры уранилнитратов	2 24
<i>Ильяшук Ю. М., Углянец В. В., Федотов А. К.</i> Эффект переключения на границе раздела полупроводник — полупроводник	1 24
<i>Ильяшук Ю. М., Федотов А. К.</i> Релаксация заряда на электрически активных границах зерен в профилированном кремнии	3 17
<i>Касичев П. В., Феранчук И. Д.</i> Самофокусировка волновых пакетов электронов в плазме	1 6
<i>Клищенко А. П., Козлов И. Н., Слободянюк А. И.</i> Статистический анализ работы двухканального поляриметра	2 21
<i>Комаров Л. И., Солодудхин А. М., Цветков И. В.</i> Полуфеноменологическая оценка поляризуемостей многоэлектронных атомов	2 3
<i>Лабуда А. А., Сидерко А. А.</i> Термическая обработка борофосфоросиликатных стекол	3 36
<i>Онищенко Н. С.</i> Немарковская многовременная теория нестационарного выжигания спектральных провалов: приложение к низкотемпературным кристаллам рубина	3 33
<i>Ревинский А. Ф.</i> Расчет фононного спектра и теплоемкости кремния из первых принципов	2 33
<i>Романов О. Г., Толстик А. Л.</i> Дифракция на объемных динамических голограммах при изменении частоты восстанавливающей волны	1 9
<i>Сахарук С. А., Горбацевич С. К.</i> Теоретический анализ бистабильного поведения спектров поглощения вязких растворов сложных молекул	3 7
<i>Соколовский Т. Д., Шашков С. Н.</i> Полная энергия и динамика решетки моносульфида кальция	2 27
<i>Станкевич А. И., Мозильный В. В.</i> Оптические свойства слаборассеивающих термохромных полимерных пленок, содержащих тетраиодомеркурат серебра	3 14
<i>Умрейко Д. С., Першина М. Ю., Сытько В. В., Алешкевич Н. А.</i> Спектрально-люминесцентные свойства и перенос энергии в фосфатных стеклах с высокой концентрацией ионов WO_2^{2+} и Tb^{3+}	3 28
<i>Хаширевич В. Г., Ярмош Н. А., Якушев А. К., Вопнярский В. И., Кулешов А. Я.</i> Расчет параметров фазоимпульсного селектора устройства графического ввода планшетного типа	1 33
<i>Шепелевич В. Г.</i> Текстура и электрические свойства быстрозатвердевших фольг	1 30

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Артельева С. М., Кожеро М. В.</i> Многомерные линейные дифференциальные уравнения с функционально-коммутативным оператором	2 40
<i>Бабайцев А. Ю., Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И.</i> Новое доказательство теоремы Байнеке о реберных графах	3 40
<i>Балашевич Н. В.</i> Построение регулятора для оптимизации динамической системы с терминальными ограничениями-неравенствами	1 48
<i>Бобков В. В., Бобкова Н. А.</i> Об одном классе методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	2 47
<i>Габасов Р., Кириллова Ф. М.</i> Оптимальная обратная связь по выходу	2 64
<i>Гао Сюэдун (КНР).</i> Решение двух кусочно-линейных задач оптимального управления	2 61
<i>Горбузов В. Н., Гнездовский Ю. Ю.</i> О полиномиальных решениях систем алгебраических дифференциальных уравнений	2 37
<i>Жук Е. Е.</i> Устойчивость решающего правила L-средних в условиях *малой выборки*	3 43
<i>Забворный Б. В.</i> Применение преобразований переменных к исследованию обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных	3 51
<i>Зверович Э. И., Корзан Л. А.</i> Решение в замкнутой форме одного частного случая задачи сопряжения на римановой поверхности	3 65
<i>Калинин А. И.</i> Асимптотически оптимальный регулятор для линейной сингулярно возмущенной системы	3 57
<i>Калитин Б. С., Калитина Л. В.</i> Оптимизация оценки области притяжения методом функции Ляпунова	3 54
<i>Кулешов А. А., Мухаммад Шали Хассо (Ирак).</i> Итерационные методы решения интегральных уравнений Фредгольма при любом $\lambda \neq 0$	1 37
<i>Мельников О. И., Корнелюк Г. А., Климова Л. А.</i> Реализация гиперграфов графами, гомеоморфными звезде	2 53
<i>Мироненко В. И., Кастрizza О. А.</i> Линейные периодические системы, у которых отображение за период сохраняет норму	1 67
<i>Новик А. А., Федосенко В. С.</i> Об устойчивости неустановившихся волн на поверхности раздела потоков неоднородной жидкости	3 48
<i>Покатаев А. В., Челисова Т. В.</i> Алгоритм решения задачи геометрического программирования с простыми ограничениями на переменные	2 94
<i>Расулов К. М.</i> Об одной дифференциальной граничной задаче Римана для аналитических функций	1 44
<i>Русак В. Н., Брайесс Д. (ФРГ).</i> Интегральные модули гладкости и наилучшая рациональная аппроксимация	1 63
<i>Синькевич Д. В., Труш Н. Н.</i> Вычисление моментов высших порядков агрегированных частот состояний однородной марковской цепи для полиномиальной схемы	2 55
<i>Хвощинская Л. А., Чумаков Ф. В.</i> Уравнение Карлемана на паре отрезков	1 40
<i>Хомищев И. И.</i> Анализ модели р-настойчивого протокола CSMA/CD	1 54
<i>Чинь Зань Данг (Вьетнам).</i> О частной изохронности высших порядков дифференциальных систем Коши—Римана	2 50
<i>Чурбанов Ю. Д.</i> Канонические f-структуры однородных Ф-пространств порядка 5	1 51
<i>Шилин А. П.</i> К решению в замкнутой форме дискретных уравнений типа свертки с почти стабилизирующимися множителями	2 44
<i>Шилин А. П.</i> Бесконечная алгебраическая система с матрицами, близкими к кусочно-теплицевой и кусочно-ганкелевой	3 60
<i>Шпаковский Г. И., Змачинский С. С., Серикова Н. В., Свиридов М. М.</i> Методы распараллеливания программ для персональных супер-ЭВМ	1 59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Альевич Л. А.</i> Линейные системы с распадающейся отражающей матрицей	3 69
<i>Ермаков В. В., Сташкевич И. В.</i> Первичный астигматизм оптических систем, содержащих анизотропные материалы	2 74
<i>Забелло Л. Е.</i> Метод внутренних вариаций в вариационном исчислении	1 71
<i>Зверович Э. И.</i> Функциональное уравнение для аналитических в бикруге функций с ядром специального вида	1 73
<i>Подкопаев Д. П.</i> О нецелочисленных вершинах многогранника задачи о к-медиане графа	3 73
<i>Русак В. Н., Агафонова Н. К.</i> Точный порядок наилучших рациональных приближений для одного класса функций	3 71

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Дмитрий Степанович Умрейко	2 76
Николай Антонович Лукашевич	2 77
Леонид Кондратьевич Гутаев	3 68

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Владимир Алексеевич Белый	3 76
---	------

Памяти ученого

ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ КРЫЛОВ



31 августа 1994 г. на 92-м году жизни скончался Владимир Иванович Крылов — заслуженный деятель науки Республики Беларусь, лауреат Государственной премии, академик АН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. Ушел из жизни выдающийся математик, замечательный ученый и человек, посветивший свою жизнь и большой талант делу служения науке и Отечеству.

Владимир Иванович Крылов родился 14 декабря 1902 г. в селе Красный Яр Самарской губернии. Начало его научной и педагогической деятельности связано с Ленинградским университетом, физико-математический факультет которого он закончил в 1928 г. и где проработал более 25 лет в должностях ассистента, доцента, профессора, заведующего кафедрой.

Основное направление исследований В. И. Крылова сформировалось в условиях творческой атмосферы научной школы академика В. И. Смирнова, для представителей которой было характерно сочетание фундаментальных и прикладных научных исследований. Первая научная работа В. И. Крылова была опубликована в 1929 г. и была посвящена изучению решений обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых имеют полярную особенность.

Следующий период научной и педагогической работы В. И. Крылова связан с Беларусью. В 1956 г.

он был избран академиком АН БССР. В 1959—1974 гг. Владимир Иванович — заместитель директора Института математики Академии наук и заведующий лабораторией Института физики и математики. В республике В. И. Крылов создал авторитетную школу, представляющую практически все основные направления современной вычислительной математики.

Основной круг исследований Владимира Ивановича был связан с приближенными методами анализа. Еще в 30-е гг. им построены методы конформного отображения односвязных и многосвязных областей, нашедшие широкое применение при решении прикладных задач аэродинамики. Ряд его работ посвящен механическим квадратурам и теории приближения функций. В этой области им сформулированы необходимые и достаточные условия сходимости квадратурного и кубатурного процессов, выяснены условия сходимости алгебраического интерполирования для ряда классов функций, указаны способы увеличения точности механических квадратур, разработаны методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Интересные результаты получены ученым в области численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также в теории интерполяционных методов улучшения сходимости рядов и последовательностей.

В. И. Крылов является автором более 100 научных работ, в том числе 24 монографий. Особо следует отметить монографию «Приближенные методы высшего анализа», написанную им в соавторстве с академиком Л. В. Канторовичем, первое издание которой вышло в 1936 г. Это была одна из первых книг по приближенным методам вычислений, которая неоднократно переиздавалась в нашей стране и за рубежом. Широко известна и монография «Приближенное вычисление интегралов», а также работа «Вычислительные методы» (в 2 т.), написанная совместно с его учениками профессорами В. В. Бобковым и П. И. Монастырным. Государственная премия БССР была присуждена В. И. Крылову за учебные пособия «Вычислительные методы высшей математики» и «Вычислительные методы», опубликованные в 1972—1977 гг.

Много сил отдал Владимир Иванович обучению и воспитанию молодежи. Особенно ярко его педагогический талант проявился в Белгосуниверситете, где он начал работать в 1957 г. Лекции В. И. Крылова отличались глубоким содержанием и четкостью изложения. На созданной им в университете кафедре вычислительной математики многие ученики В. И. Крылова успешно защитили докторские и кандидатские диссертации.

Многолетняя плодотворная научная, научно-организаторская и педагогическая деятельность Владимира Ивановича получила высокую оценку и признание. Он был награжден орденами Дружбы народов, Трудового Красного Знамени, Знак Почета, медалями, Почетными грамотами Верховного Совета Беларуси.

В. И. Крылов обладал замечательными человеческими качествами. Коллеги и ученики знали его как доброго, отзывчивого, тактичного, но в то же время принципиального человека. Все, кому приходилось общаться с Владимиром Ивановичем, отмечали его личное обаяние, высокую культуру, обширные знания.

Благодарная память о Владимире Ивановиче Крылове будет всегда жить в сердцах тех, кому посчастливилось знать его.



Научная общественность Беларуси, физическая наука понесли большую, невосполнимую утрату. 13 октября 1994 г. на 84-м году жизни скоропостижно скончался крупный физик-теоретик, основатель и организатор физической науки республики, Герой Социалистического Труда, заслуженный деятель науки Беларуси, лауреат Государственных премий СССР и БССР, Президент Белорусского физического общества, академик и член Президиума АН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Федор Иванович Федоров. Перестало биться сердце выдающегося сына белорусского народа, отдавшего более 60 лет жизни самоотверженному служению науке, многогранной научной, педагогической и научно-организационной деятельности на благо своего Отечества.

Ф. И. Федоров родился 19 июня 1911 г. в деревне Турец Гродненской области в семье учителя (в будущем известного белорусского писателя Янки Мавра). После окончания в 1931 г. физико-математического отделения педагогического факультета Белгосуниверситета работал преподавателем физики и математики педагогического техникума в Кричеве. В 1933 г. Ф. И. Федоров был направлен на учебу в аспирантуру Ленинградского университета и через три года успешно защитил кандидатскую диссертацию в области квантовой электродинамики, выполненную под руководством академика В. А. Фока, одного из крупнейших физиков-теоретиков. В 1936 г. Ф. И. Федоров возвратился в Минск и начал работать на недавно созданном физико-математическом факультете Белгосуниверситета. По инициативе ученого в 1938 г. была организована кафедра теоретической физики, заведующим которой Федор Иванович был в течение 24 лет. В наиболее трудные для университета годы (1943—1950) Ф. И. Федоров работал деканом физико-математического факультета. В 1954 г. он блестяще защитил докторскую диссертацию на тему «Инвариантные методы в оптике анизотропных сред» и стал первым доктором физико-математических наук в республике.

На протяжении многих десятилетий Ф. И. Федоров отдавал все свои силы, незаурядный талант ученого, яркое педагогическое дарование организации учебного процесса, развертыванию научных исследований, подготовке научно-педагогических кадров университета. Многие его ученики, среди них академики и члены-корреспонденты АН Беларуси, лауреаты Государственных премий, в настоящее время составляют известную белорусскую школу теоретической физики — школу Федорова.

Уникальный творческий потенциал Федора Ивановича как ученого и организатора науки ярко раскрылся в годы работы (с 1936) в Академии наук республики, особенно после открытия в 1955 г. Института физики и математики АН БССР (в настоящее время Института физики имени Б. И. Степанова АН Беларуси). В 1956 г. Ф. И. Федоров был избран членом-корреспондентом, а в 1966 г. — действительным членом АН БССР. В Институте физики им была создана Лаборатория теоретической физики, которой он неизменно руководил до 1987 г. На протяжении 25 лет, с момента основания (1963 г.) и до 1987 г., Ф. И. Федоров возглавлял Отделение физики и математики АН БССР (ныне Отделение физики, математики и информатики АН Беларуси). В последнее время Федор Иванович работал советником, являясь членом Президиума Академии наук республики.

При всей своей многогранной деятельности академик Ф. И. Федоров был прежде всего активно работающим ученым-исследователем, который не мыслил своего существования без постоянного напряженного творческого научного поиска. Им получены важнейшие научные результаты, заложившие фундамент последующих широких исследований по кристаллооптике, акустике кристаллов, теории элементарных частиц и фундаментальных физических взаимодействий. Различные направления научных исследований Ф. И. Федорова объединяет созданный им единый ковариантный подход к решению проблем и задач теоретической физики на основе разработанных и использованных им математических (алгебраических и теоретико-групповых) методов. Выдающиеся достижения Ф. И. Федорова в области оптики анизотропных сред отмечены Государственными премиями СССР и БССР; предсказанное им явление — смещение отраженного луча перпендикулярно плоскости падения — было зарегистрировано в качестве научного открытия. Ф. И. Федоров — автор 6 оригинальных монографий и свыше 450 научных статей.

Идеи Федора Ивановича, разработанные им методы исследований нашли широкое применение и получили развитие в работах его многочисленных учеников и последователей. Границы использования этих методов постоянно расширяются, охватывая все новые области физической науки.

Чуткий и внимательный руководитель, блестящий педагог и лектор, талантливый ученый и организатор Федор Иванович Федоров завоевал уважение и высокий авторитет среди широкой научной общественности республики и за ее пределами. Он был избран первым президентом Белорусского физического общества, являлся почетным членом Президиума Российской Гравитационной Ассоциации, членом Академии Творчества России, почетным членом Российского оптического общества имени Д. С. Рождественского, членом Американского математического общества, членом координационного комитета Европейского физического общества, председателем Минского городского комитета Защиты Мира. Исключительные достижения Ф. И. Федорова в области физической науки, становления и развития высшего образования и научных исследований по физике и математике в нашей республике отмечены высокими государственными наградами.

До последних дней жизни профессор кафедры теоретической физики Ф. И. Федоров сохранял неизменную творческую активность, читал лекции, руководил аспирантами.

Федор Иванович отличался замечательными человеческими качествами: высокой интеллигентностью, неизменной тактичностью в отношениях с людьми и вместе с тем принципиальностью, высоким гражданским мужеством.

Светлая память о Федоре Ивановиче Федорове, крупнейшем ученом, талантливом педагоге и воспитателе научной молодежи, человеке большой души и обаяния, навсегда сохранится в сердцах всех, кто имел счастье его знать, жить и работать с ним.

Капуцкий Ф. Н., Кухарчик П. Д.,
Клищенко А. П., Барковский Л. М.,
Богуш А. А., Борисоглебский Л. А.,
Горбачевич А. К., Комаров Л. И.,
Минкевич А. В., Томильчик Л. М.

ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ ПРУСОВ



13 сентября 1994 г. после тяжелой болезни скончался доктор физико-математических наук, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и робототехники Иван Алексеевич Прусов.

И. А. Прусов родился 11 июня 1919 г. в д. Березовка Славгородского района Могилевской области. В 1938 г. поступил на физико-математический факультет Белорусского государственного университета, однако учебу прервала война. С 1941 по 1945 г. Иван Алексеевич находился в действующей армии. После демобилизации из рядов Советской Армии закончил Львовский университет.

В 1970 г. И. А. Прусова как авторитетного ученого-механика пригласили на работу в Белгосуниверситет для создания и развития отделения механики на механико-математическом факультете. В 1970—1986 гг. он возглавлял кафедру теоретической механики университета (ныне кафедра теоретической механики и робототехники).

В своей научной деятельности И. А. Прусов особое внимание уделял такому актуальному направлению современной механики, как анизотропная термоупругость. Этому в немалой степени способствовала и совместная работа с выдающимися учеными-механиками Г. Н. Савиным, М. П. Шереметьевым, Я. С. Подстригачом. Профессор

И. А. Прусов — один из виднейших ученых в области теории упругости анизотропных сред, ему принадлежат основополагающие результаты в использовании современных математических методов при решении основных граничных задач изгиба анизотропных пластин в классической и уточненной постановках, а также в формулировке и решении задач упругой и термоупругой устойчивости пластин с учетом деформации поперечного сдвига; И. А. Прусов построил новый вариант уточненной теории изгиба пластин с более широким диапазоном применимости, чем в известной теории Рейснера. Ученым получены фундаментальные результаты в разработке и применении одного из наиболее эффективных методов теории функций комплексного переменного — метода линейного сопряжения Н. И. Мусхелишвили — к решению краевых задач стационарной теплопроводности и термоупругости анизотропного тела. Созданные И. А. Прусовым термоупругие комплексные потенциалы, позволяющие получать наиболее простые и эффективные решения основных граничных задач анизотропных сред, широко используются в научных исследованиях и практических приложениях во многих научных школах государств СНГ. Творческое наследие И. А. Прусова, безусловно, требует детального анализа и последующего развития.

Иван Алексеевич был человеком разнообразных научных интересов. Являясь одним из ведущих специалистов по теории анизотропной термоупругости, он получил важные результаты и в теории фильтрации, ярким свидетельством чего является его монография «Двумерные краевые задачи фильтрации». Ученый опубликовал более 90 научных и научно-методических работ, в том числе четыре монографии. Среди его учеников 20 докторов и кандидатов наук.

Широта научных взглядов проявлялась и в педагогической деятельности И. А. Прусова. Во Львовском и Белорусском университетах он блестяще читал лекции по различным дисциплинам механики и математики, разработал большое количество спецкурсов.

Профессор И. А. Прусов был руководителем Минского городского научного семинара по механике деформируемого твердого тела, заместителем председателя специализированного совета Белгосуниверситета по защите кандидатских диссертаций, членом редколлегии журнала «Вестник БГУ» (серия 1).

Светлая память об Иване Алексеевиче Прусове, видном ученом-механике и талантливым педагоге, навсегда останется в сердцах всех, кто знал его.

ИЛЬЯ ГРИГОРЬЕВИЧ НЕКРАШЕВИЧ

(1905—1993)

Прошел год после смерти известного белорусского ученого и педагога, заслуженного деятеля науки Беларуси, профессора кафедры физической электроники Белгосуниверситета Ильи Григорьевича Некрашевича, вся трудовая деятельность которого на протяжении более 60 лет была связана с университетом.

И. Г. Некрашевичем были проведены первые в БГУ научные исследования в области радиофизики дециметровых волн. Им обнаружена и изучена инверсия выпрямления полупроводниковых детекторов, послужившая толчком к исследованию широкого круга явлений в контактах металлов с полупроводниками и газоразрядной плазмой. Особенно плодотворным оказалось изучение контактных явлений в газоразрядной плазме. Ученым была создана основа так называемой миграционной теории электрической эрозии электродов в импульсном электрическом разряде, развитая впоследствии его учениками в физико-техническом институте Академии наук республики, где Илья Григорьевич руководил лабораторией, ставшей известным научным центром электроэрозионной обработки металлов.

Разработанные И. Г. Некрашевичем и его учениками диагностические методы исследования нестационарных плазменных процессов в контакте плазмы с поверхностью твердых тел доказали свою перспективность в период становления Белорусского государственного университета как научного центра республики и особенно в 70—80-е гг. — время бурного развития электронной промышленности в Беларуси. Благодаря им была разработана и внедрена новая для того времени и актуальная сейчас плазменная технология в электронике и микроэлектронике. Широкому использованию этой технологии способствовали появившиеся позднее спектральные методы контроля и автоматического управления плазменными процессами нанесения и травления тонких поверхностных слоев.

Научные идеи профессора И. Г. Некрашевича развивают его ученики, среди которых доктора и кандидаты наук. И в этом неопределимая заслуга Ильи Григорьевича, признанного педагога, воспитателя молодежи.

Достижения Ильи Григорьевича Некрашевича в области фундаментальных и прикладных наук велики, его полувекковая научная, педагогическая и общественная деятельность по достоинству оценена правительственными наградами. И сегодня можно с удовлетворением отметить, что Илья Григорьевич заслуженно получил еще одну высочайшую награду — народную память.

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.37

Комяк А. И., Умрейко Д. С. Исследования ураниловых соединений в Белорусском государственном университете // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Прослежена история развития исследований электронных спектров ураниловых соединений. Показана роль Белорусского государственного университета в исследовании структуры электронно-колебательных спектров соединений уранила. Раскрыты практические приложения указанных исследований в химии и физике.

Библиогр. 9 назв., ил. 1.

УДК 539.2

Анищик В. М., Конюшко Л. И., Ярмолевич В. А., Горбачевский Д. А., Герасимова Т. Г. Структура и электрофизические свойства пленок диоксида олова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Методами рентгеновского анализа изучена структура пленок диоксида олова. Исследовано изменение электросопротивления при термообработке.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.318:538.26

Шепелевич В. Г. Дискретный преобразователь угла поворота // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Рассмотрено устройство дискретного преобразователя угла поворота, устойчивого к осевым смещениям ротора. В устройстве использованы миниатюрный преобразователь Холла, постоянный самарий-кобальтовый магнит, Ш-образный концентратор и ротор с ферромагнитными стержнями. Проведено исследование магнитного поля в рабочем зазоре устройства и определены его параметры.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 534.8.539.039

Савенко В. С., Пинчук А. И., Злотник В. Б., Шаврей С. Д., Понарядов В. В. Механизмы влияния электромагнитных полей на деформацию металлов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Дан критический анализ физических механизмов влияния электромагнитных полей на деформационные характеристики металлов. Показано, что ни одна из существующих моделей не дает непротиворечивого объяснения электропластического эффекта. Предложен механизм пластификации металлов и улучшения их физико-механических характеристик после их обработки давлением за счет уменьшения поверхностной энергии металла в условиях воздействия электромагнитными полями. Приведены результаты эксперимента, выполненного с целью проверки разработанной модели, по изучению двойникования монокристаллов висмута при одновременном наложении на них электрического и магнитного поля во взаимоперпендикулярных направлениях.

Библиогр. 16 назв.

УДК 537.312.62

Ксеневиц В. К., Доросинец В. А., Говор Л. В., Бутылина И. Б. Движение вихрей в джозефсоновской среде пленок $Y_1Ba_2Cu_3O_x$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Предлагается модель джозефсоновской среды для изучения механизма протекания тока в гранулированных пленках высокотемпературных сверхпроводников $Y_1Ba_2Cu_3O_x$. Из вольтамперных характеристик и зависимостей критического тока от магнитного поля определены тип вихрей, проникающих в пленку, и особенности их движения и взаимодействия.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592

Бондаренко В. П., Бондаренок Е. А., Дорофеев А. М., Самуйлов В. А., Троянова Г. Н. Процессы самоорганизации при транспорте заряда в пористом кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Представлены результаты экспериментального исследования процессов транспорта электрического заряда в пористом кремнии в сильных электрических полях. Обнаружены нелинейные динамические эффекты в форме низкочастотных осцилляций тока при посто-

янном напряжении. Эти эффекты могут оказаться полезными для исследования глубоких уровней в пористом кремнии, а также дают основание рассматривать его как перспективный полупроводниковый материал для функциональной электроники.

Библиогр. 18 назв., ил. 3.

УДК 621.315.592

Веселова Т. М., Самуйлов В. А. Эффекты самоорганизации и динамического хаоса в полунизолирующем GaAs // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Установлено влияние давления мышьяка при технологической обработке образцов на низкочастотные токовые осцилляции. Зависимости основных частотных мод от приложенного напряжения проявляют резкую немонотонность. Наблюдался переход от низкочастотных токовых осцилляций к хаосу через бифуркации удвоения периода и перемежаемость.

Библиогр. 12 назв., ил. 3.

УДК 535.8

Мельникова Е. А., Сташкевич И. В. Влияние анизотропии на просветление гофрированной границы диэлектриков // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Исследуется влияние анизотропии на просветление гофрированной поверхности диэлектриков.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 546.273.171

Говор Г. А., Добрянский В. М., Леусенко А. А., Чобот Г. М. Термостойкость кубического нитрида бора марки «Светланит» // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Изучена термостойкость кубического нитрида бора (КНБ) марки «Светланит» методами термогравиметрии и дифференциального термического анализа в инертно-гелиевой и воздушной атмосфере. Определены характерные интервалы температур, в которых наблюдается потеря массы из-за ухудшения термостойкости материала. Установлено, что термостойкость КНБ марки «Светланит» сохраняется до 1300 К.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.396.181.48

Лабуда А. А., Сидерко А. А. Дефектность слоев борофосфоросиликатного стекла, осажденного при атмосферном давлении // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Исследованы условия образования дефектов в слоях борофосфоросиликатного стекла в процессе планаризации, проведена их классификация и определены режимы технологических процессов для их минимизации.

Библиогр. 5 назв., ил. 4.

УДК 519.4

Конюх В. С. Импримитивные локально нильпотентные линейные группы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Рассматриваются максимальные импримитивные локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем. Изучение таких групп полностью сведено к изучению примитивных локально нильпотентных линейных групп.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.925

Горбузов В. Н., Павлючик П. Б. О тракториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Для автономных обыкновенных дифференциальных систем с рациональными правыми частями введены понятия алгебраической вложимости и сильной алгебраической вложимости решений.

В зависимости от характера вложимости устанавливается алгебраичность тракторий, отсутствие предельных циклов и возможность построения функций Ляпунова.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.6

К и р л и ц а В. П. Точные D- и A-оптимальные линейные планы и их устойчивость при неравноточных наблюдениях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Построены точные A-оптимальные линейные планы при линейном изменении дисперсии наблюдений. Исследуется проблема устойчивости точных D- и A-оптимальных линейных планов.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.2

Ж у к Е. Е. Робастное решающее правило L-средних в случае равномерного «засорения» // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

На основе байесовского принципа оптимальности построено робастное решающее правило L-средних (L — число классов), устойчивое к равномерному «засорению», предложена его численная реализация в виде робастного аналога классического алгоритма L-средних и приведено аналитическое выражение для вероятности ошибочной классификации.

Библиогр. 7 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Т и м о х о в и ч О. В. Построение канонической матрицы одной задачи линейного сопряжения с подстановочной матрицей четвертого порядка // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

В явном виде строится каноническая матрица векторно-матричной задачи сопряжения с подстановочной матрицей четвертого порядка. Для этого исходная векторно-матричная задача сводится к скалярной задаче на римановой поверхности, являющейся четырехлистным накрытием сферы, закон склеивания листов которого определяется видом коэффициента задачи.

Библиогр. 3 назв., табл. 1.

УДК 681.3.06:51

Б у з а М. К., П е в з н е р Л. В. Пакет программ для активизации процесса обучения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

В статье приводится описание математического аппарата, используемого при проектировании программно-педагогического средства, ориентированного на автоматизацию процесса обучения основным технологиям программирования (модульному, структурному, объектно-ориентированному).

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.9

Р о м а ш е в с к и й А. Б. Преобразование Меллина в алгебре мнемифункций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Строится алгебра мнемифункций со всюду определенным обратимым преобразованием Меллина и со всюду определенной сверткой меллиновского типа.

Рассматриваются аналоги теорем Пэли—Винера и Пэли—Винера—Шварца для указанной выше алгебры.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.9:531.36

Ж о г а л ь С. И. Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова—Фоккера—Планка для неавтономных квазилинейных систем с непараметрическим случайным воздействием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Исследуются вопросы применимости метода марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики при изучении случайных колебаний в динамических системах. Дана постановка проблемы получения аналитического решения уравнений Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП). Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях интегрируемости усредненных уравнений КФП, соответствующих достаточно широкому классу квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы, подверженных различным типам внешнего периодического воздействия и случайному непараметрическому возмущению.

Библиогр. 7 назв.

УДК 577.3

Грушевская Г. В., Крылов Г. Г., Хмельницкий А. И. Нелинейная динамика дифференциальных уравнений с сингулярным источником, описывающих молекулярное узнавание // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1995. № 1.

Проанализирована аperiodически сингулярно возмущаемая система обычных дифференциальных уравнений, описывающая иммунные реакции на молекулярном уровне. Численные расчеты показали наличие решений системы, соответствующих сначала бифуркации Хопфа, а затем последовательности конечного числа бифуркаций удвоения цикла Фейгенбаума с последующей хаотизацией.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

CONTENTS

OUR LAUREATES

<i>Komyak A. I., Umreiko D. S.</i> Investigations of Uranyl compounds at the Belarussian State University	3
---	---

PHYSICS

<i>Anishchik V. M., Konyushko L. I., Yarmolovich V. A., Gorbachevsky D. A., Gerasimova T. G.</i> The structure and electrophysical properties of tin oxide films	6
<i>Shepelevitch V. G.</i> Discrete angular transducer	10
<i>Savenko V. S., Pinchuk A. J., Zlotnik V. B., Shavrei S. D., Ponariadov V. V.</i> Mechanisms of electromagnetic fields influence on deformation of metals	12
<i>Ksenevich V. K., Dorosinets V. A., Govor L. V., Butylina I. B.</i> Motion of the fluxons in the Josephson junction array of $Y_1Ba_2Cu_3O_x$ films	15
<i>Bondarenko V. P., Bondarionok E. A., Dorofeev A. M., Samuilov V. A., Troyanova G. N.</i> Self — organisation phenomena during nonlinear charge transport in porous silicon	18
<i>Veselova T. M., Samuilov V. A.</i> Effects of self-organization and dynamic chaos in semi-insulating GaAs	22
<i>Mel'nikova E. A., Stashkevitch I. V.</i> The effect of anisotropy on bleaching of the corrugate boundary of dielectrics	25
<i>Govor G. A., Dobryansky V. M., Musenko A. A., Chobot G. M.</i> Thermo-resistance of cubic boron nitride, mk «Svetlanit»	28
<i>Labuda A. A., Siderko A. A.</i> Defects in the layers of borophosphosilicate glass deposited at atmospheric pressure	30

MATHEMATICS, MECHANICS

<i>Konyukh V. S.</i> Imprimitive locally nilpotent linear groups	35
<i>Gorbuzov V. N., Pavluchik P. B.</i> About trajectories and constructing Lyapunov's functions of algebraic imbeddability autonomous differential systems	38
<i>Kirlitsa B. P.</i> Exact D- and A-optimal linear designs and their stability under no exact observations	42
<i>Zhuk E. E.</i> Robust L-means decision rule under uniform «contaminations»	45
<i>Timokhovich O. B.</i> Construction of a canonical matrix of one linear conjugation problem with substitutional matrix of the fourth order	50
<i>Buza M. K., Pevzner L. V.</i> Program packet for training process activation	55
<i>Romashevski A. B.</i> Mellin's transformation in the algebra of memofunctions	58
<i>Zhogal S. I.</i> The sufficient condition of integration of Kolmogorov — Fokker — Planck equations for non-autonomous quasilinear systems with unparametric random disturbance	62
<i>Grushevskaya G. V., Krylov G. G., Khmel'niiski A. I.</i> Nonlinear dynamics of the differential equations with singular source describing molecular recognition	66

OUR JUBILEE

Alexander Michailovich Shirokov	70
---	----

TO THE MEMORY OF SCIENTIST

<u>Vladimir Ivanovich Krilov</u>	73
<u>Fjodor Ivanovich Fjodorov</u>	74
<u>Ivan Alekseevich Prusov</u>	75
<u>Ilja Grigorjevich Nekrashevich</u>	76