

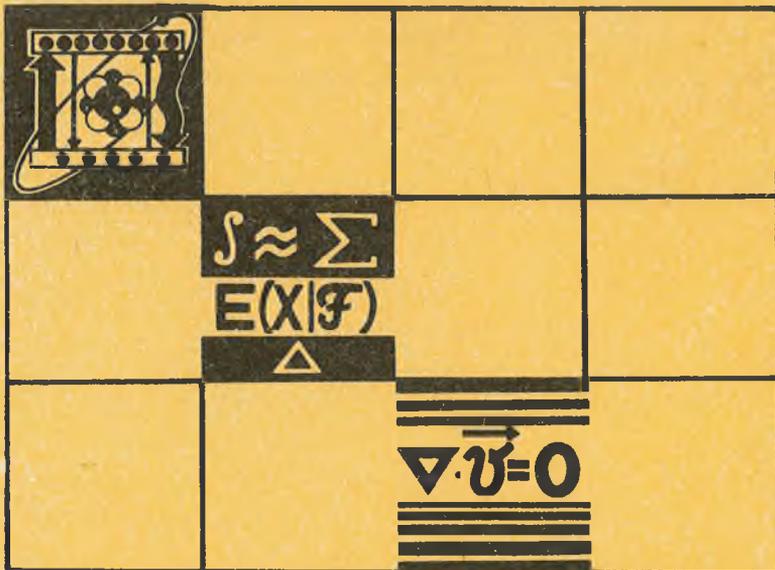
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

3'94



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Бельский А. М.</i> О поперечных смещениях слаборасходящегося светового пучка при отражении	3
<i>Сахарук С. А., Горбачевич С. К.</i> Теоретический анализ бистабильного поведения спектров поглощения вязких растворов сложных молекул	7
<i>Ермаков В. В., Сташкевич I. В.</i> Вуглавая характарыстыка аптычных сістэм з анізатропнымі матэрыяламі	10
<i>Станкевич А. И., Могильный В. В.</i> Оптические свойства слаборассеивающих термохромных полимерных пленок, содержащих тетраиодомеркурат серебра . .	14
<i>Ильяшук Ю. М., Федотов А. К.</i> Релаксация заряда на электрически активных границах зерен в профилированном кремнии	17
<i>Данилькевич М. И.</i> Частоты оптических фононов в кислородных шпинелях по спектроскопическим и акустическим данным	21
<i>Анищик В. М., Ярмолович В. А., Рабкевич Т. М.</i> Расчет характеристик датчиков перемещений на эффекте Холла с использованием фиктивных магнитных зарядов	25
<i>Умрейко Д. С., Першина М. Ю., Сытько В. В., Алешкевич Н. А.</i> Спектрально-люминесцентные свойства и перенос энергии в фосфатных стеклах с высокой концентрацией ионов WO^{2+} и Tb^{3+}	28
<i>Онищенко Н. С.</i> Немарковская многовременная теория нестационарного выжигания спектральных провалов: приложение к низкотемпературным кристаллам рубина	33
<i>Лабуда А. А., Сидерко А. А.</i> Термическая обработка борофосфоросиликатных стекол	36

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Бабайцев А. Ю., Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И.</i> Новое доказательство теоремы Байнеке о реберных графах	40
<i>Жук Е. Е.</i> Устойчивость решающего правила L-средних в условиях «малой выборки»	43
<i>Новик А. А., Федосенко В. С.</i> Об устойчивости неустановившихся волн на поверхности раздела потоков неоднородной жидкости	48
<i>Задворный Б. В.</i> Применение преобразований переменных к исследованию обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных	51
<i>Калинин Б. С., Калинина Л. В.</i> Оптимизация оценки области притяжения методом функций Ляпунова	54
<i>Калинин А. И.</i> Асимптотически оптимальный регулятор для линейной сингулярно возмущенной системы	57
<i>Шилин А. П.</i> Бесконечная алгебраическая система с матрицами, близкими к кусочно-теплицевой и кусочно-ганкелевой	60
<i>Зверович Э. И., Корзан Л. А.</i> Решение в замкнутой форме одного частного случая задачи сопряжения на римановой поверхности	65

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Леонид Кондратьевич Тутаев	68
--------------------------------------	----

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Альсевич Л. А.</i> Линейные системы с распадающейся отражающей матрицей	69
<i>Русак В. Н., Агафонова Н. К.</i> Точный порядок наилучших рациональных приближений для одного класса функций	71
<i>Подкопаев Д. П.</i> О нецелочисленных вершинах многогранника задачи о k-медиане графа	73

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Владимир Алексеевич Белый	76
---	----

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

3'94

СЕНТЯБРЬ



МИНСК
„УНИВЕРСИТЭЦКАЕ”

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, А. М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный секретарь),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора),
Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО,
В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. Н. КИВАЧ,
Н. И. КОЗЛОВСКИЙ, В. И. КОРЗЮК, П. Д. КУХАРЧИК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕЦКО,
С. Г. МУЛЯРЧИК, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,
Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1994. № 3

Редактор *И. А. Лешкевич*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *В. А. Ермоленко*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

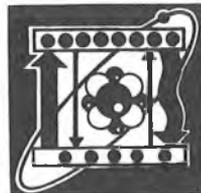
Набор и верстка журнала выполнены на издательско-редакционной системе
«Союз»

Сдано в набор 05.08.94. Подписано в печать 20.09.94. Формат 70×108 1/16.
Бумага офс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 6,81.
Тираж 735 экз. Заказ 820. Цена 300 р.

Издательство «Універсітэцкае». 220048, Минск, проспект Машерова, 11. Адрес
редакции: 220080, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати».
220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.

© Вестник Белгосуниверситета, 1994



УДК 535.39

А. М. БЕЛЬСКИЙ

О ПОПЕРЕЧНЫХ СМЕЩЕНИЯХ СЛАБОРАСХОДЯЩЕГОСЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ ОТРАЖЕНИИ

The transverse displacement of a narrow light beam undergoing reflection at a linear dielectric interface is studied. It is shown that the transverse shift exists for all angles of incidence greater than the Brewster angle. Analytical expressions for the transverse shift are obtained.

При отражении когерентного светового пучка от плоской преломляющей поверхности его структура искажается. В некоторых случаях искажение носит очень простой характер — структура поля в поперечном сечении отраженного пучка совпадает со структурой поля в поперечном сечении падающего пучка, но смещена на определенное расстояние относительно геометрического положения. Такой сдвиг может происходить как в плоскости падения пучка, проходящей через ось пучка и нормаль к отражающей поверхности (продольный сдвиг), так и перпендикулярно ей. В то время как продольный сдвиг изучен достаточно подробно (см., например, [1]), условия возникновения поперечного сдвига до сих пор являются дискуссионными [2].

В настоящей работе исследуются условия существования поперечного сдвига трехмерного пучка при отражении от плоской изотропной преломляющей поверхности.

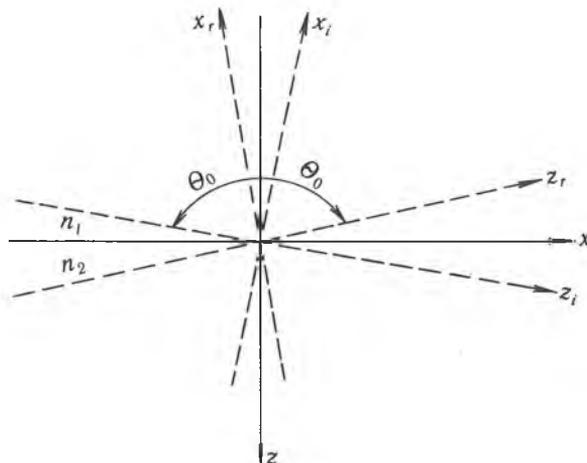


Рис. 1. Координатные системы падающего и отраженного пучков

Пусть на плоскую преломляющую поверхность $z = 0$ (см. рис. 1) под углом Θ_0 падает световой пучок. Преломляющая поверхность считается изотропной, и, кроме того, предполагается, что в результате отражения

от нее плоской волны возникает отраженная плоская волна, так что приведенные далее результаты применимы и к случаю, когда ниже преломляющей поверхности (в полупространстве $z > 0$) имеется система прозрачных или поглощающих плоскопараллельных слоев.

Поперечные компоненты электрического поля падающего пучка в системе $x_i y z_i$ (ось z_i совпадает с осью пучка) запишем в виде

$$E_x^i = \kappa_x E(x_i, y, z_i), \quad E_y^i = \kappa_y E(x_i, y, z_i),$$

где функция E определяет структуру поля падающего пучка, а комплексные параметры κ_x, κ_y задают состояние его поляризации.

В [2] было показано, что для слабобрасходящихся пучков ($w_0 \gg \lambda$; w_0 — характерный поперечный размер пучка) компоненты электрического поля отраженного пучка в системе координат $x_r y z_r$ (ось z_r совпадает с геометрической осью отраженного пучка) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x^r &= \kappa_x R_{p0} E(-x_r - \bar{l}_p, y + \bar{d}_p, z_r), \\ E_y^r &= \kappa_y R_{s0} E(-x_r - \bar{l}_s, y + \bar{d}_s, z_r), \end{aligned} \quad (1)$$

где $R_s(\theta), R_p(\theta)$ — амплитудные коэффициенты отражения плоской волны s - и p -поляризации соответственно от рассматриваемой преломляющей поверхности

$$R_{j0} = R_j(\theta_0), \quad \bar{l}_j = \frac{i}{kn_1} \frac{R_{j0}'}{R_{j0}}, \quad R_{j0}' = \left. \frac{dR_{j0}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0}, \quad j = s, p, \quad (2)$$

$$\bar{d}_p = i \frac{\kappa_y}{\kappa_x} \frac{R_{s0} + R_{p0}}{R_{p0}} \frac{\text{ctg}\theta_0}{kn_1} = - \frac{\kappa_y^2}{\kappa_x^2} \frac{R_{s0}}{R_{p0}} \bar{d}_s. \quad (3)$$

Выражения (1) применимы только при выполнении условий

$$|(R_{s0} + R_{p0}) \frac{\text{ctg}\theta_0}{kn_1}| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{kn_1} \frac{R_{j0}'}{R_{j0}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\kappa_y}{\kappa_x} \right| \sim 1. \quad (4)$$

Таким образом, согласно (1), при выполнении условий (4) компоненты поля отраженного пучка всегда можно представить как смещенные компоненты поля падающего пучка. Однако в общем случае эти смещения комплексные, что соответствует амплитудно-фазовым искажениям поля падающего пучка; кроме того, x - и y -компоненты поля пучка смещаются различным образом.

Чистый продольный сдвиг без искажения структуры поля наблюдается при выполнении условий $\text{Im } \bar{l}_j = 0$; из (2) следует, что это возможно только если $R_j = C_j \exp(i\delta_j)$, где C_j не зависит от угла падения θ_0 . При выполнении этого условия для величины продольного сдвига из (2) получаем:

$$l_j = \frac{1}{kn_1} \frac{d\delta_j}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}. \quad (5)$$

Если преломляющая поверхность представляет собой поверхность раздела между двумя прозрачными изотропными средами, условие $|R_j| = \text{const}$ выполняется для углов падения θ_0 , больших критического угла полного отражения; формула (5) в этом случае совпадает с известным выражением для продольного сдвига при полном отражении [1].

Для исследования поперечных сдвигов пучка d_j положим $R_{j0} = |R_{j0}| \exp(i\delta_j)$, $\kappa_y/\kappa_x = k \exp(i\gamma)$, где k и γ характеризуют эксцентриситет e и ориентацию эллипса поляризации падающего пучка

$$\text{tg } 2\psi = \frac{2\kappa}{1-\kappa^2} \cos\gamma, \quad 1-e^2 = \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}, \quad u = \frac{2\kappa \sin\gamma}{1+\kappa^2} \quad (6)$$

(ψ — угол между большей осью эллипса и осью x_i). Из (3) получаем, что $\text{Im } \bar{d}_p$, если

$$\cos\gamma + \left| \frac{R_{s0}}{R_{p0}} \right| \cos(\delta + \gamma) = 0, \quad \delta \equiv \delta_p - \delta_s; \quad (7)$$

соответствующая величина поперечного сдвига $d_p = \text{Re } \bar{d}_p$

$$d_p = - \frac{\kappa \operatorname{ctg} \theta_0}{kn_1} \frac{\sin \delta}{\cos(\delta + \gamma)} \quad (8)$$

Аналогично, $\operatorname{Im} \vec{d}_s = 0$, если

$$\cos \gamma + \frac{|R_{p0}|}{|R_{s0}|} \cos(\delta + \gamma) = 0, \quad (9)$$

и соответствующий поперечный сдвиг

$$d_s = - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\kappa kn_1} \frac{\sin \delta}{\cos(\gamma + \delta)} = \frac{d_p}{\kappa^2} \quad (10)$$

При заданном угле падения θ_0 уравнения (7) и (9) определяют значение параметра γ , т. е. форму и ориентацию эллипса поляризации падающего пучка (см. (7)), при котором будет наблюдаться чистый сдвиг. Однако, поскольку в общем случае $|R_{s0}| \neq |R_{p0}|$, условия (7) и (9) не совпадают, т. е. при выполнении одного из них соответствующая компонента поля будет испытывать чистый сдвиг; ортогональная же компонента будет искажаться при сдвиге, равно как и суммарное поле отраженного пучка. Сдвиги (8) и (10) можно наблюдать экспериментально только с помощью поляризатора, установленного соответствующим образом в поле отраженного пучка.

Исследуем теперь возможность наблюдения чистого сдвига обеих компонент поля одновременно на одинаковую величину; для этого должны совпадать, прежде всего, условия (7) и (9). Очевидно, что они будут совпадать, если или $|R_{s0}| |R_{p0}| = 1$, или же $\delta = 0, \pm\pi$.

1) Случай $|R_{s0}| = |R_{p0}| = 1$, (полное отражение).

Уравнения (7) и (9) сводятся к одному уравнению:

$$\cos(\gamma + \frac{\delta}{2}) = 0, \quad \gamma = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{\pi}{2}; \quad (11)$$

если при этом выбрать эллипс поляризации так, чтобы было $\kappa = 1$, то из (8), (10) и (11) следует, что обе компоненты поля сдвигаются на одинаковую величину:

$$d_i = \pm \frac{\lambda_1}{\pi} \operatorname{ctg} \theta_0 \cos \frac{\delta}{2} \quad (12)$$

(λ_1 — длина волны света в первой среде). Два знака в формуле (12) соответствуют двум возможным направлениям вращения электрического вектора в падающем пучке (правой и левой поляризации). Величина $\delta(\theta)$ сдвига фаз между p- и s-компонентами плоской волны при полном отражении однозначно определяется углом падения θ_0 (см., например, [3]); таким образом, из (11), (12) следует, что если при определенном угле падения θ_0 задать параметры эллипса поляризации (см (6))

$$\psi = \pm \frac{\pi}{4}, \quad e^2 = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta \mp \pi}{4},$$

будет наблюдаться чистый поперечный сдвиг отраженного пучка, величина которого определяется формулой (12). Если угол падения точно равен критическому углу полного отражения ($\delta = 0$), падающий лучок должен иметь циркулярную поляризацию ($e = 0$). Соответствующая величина сдвига $d_i = \pm(\lambda_1/\pi) \operatorname{ctg} \theta_0$ совпадает со значением, получаемым методом стационарной фазы [4].

2) Случай $\delta = 0, \pm\pi$.

Как известно [3], при частичном отражении плоской волны от границы раздела двух прозрачных сред $\delta = \pm\pi$ для углов падения, меньших угла Брюстера θ_B , и $\delta = 0$ при $\theta_B < \theta_0 < \pi/2$ (или же $\theta_B < \theta_0 < \theta_K$ при отражении от оптически менее плотной среды). Из уравнений (7) и (9) получаем, что при $\delta = 0, \pm\pi$ чистый поперечный сдвиг будет наблюдаться, только если $\gamma = \pm\pi/2$, т. е. если оси эллипса поляризации падающего пучка совпадают с s- и r-направлениями. Поскольку в этом случае соотношения (8) и (10) дают неопределенные значения, для получения величины сдвига необходимо вернуться к общим соотношениям (3). Из них

следует, что при $\delta = \pm\pi$ ни при каком значении κ нельзя получить $d_s = d_p$, т. е. при углах падения, меньших угла Брюстера, невозможно выбрать такую форму эллипса поляризации, чтобы наблюдался чистый поперечный сдвиг пучка. Если же $\delta = 0$, т. е. угол падения θ_0 больше угла Брюстера, то из (6) получаем:

$$\kappa = \left(\left| \frac{R_{p0}}{R_{s0}} \right| \right)^{1/2}, \quad \gamma = \pm \frac{\pi}{2}, \quad e = (1 - \kappa^2)^{1/2}, \quad (13)$$

$$d_s = d_p = \mp \frac{\lambda_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \theta_0 \frac{1 + \kappa^2}{\kappa}. \quad (14)$$

На рис. 2 приведены зависимости параметров эллипса поляризации κ и γ , построенные по формулам (11), (12) и (13), (14), для которого наблюдается чистый поперечный сдвиг при отражении от границы раздела стекло—воздух ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$), а на рис. 3 соответствующая величина сдвига.

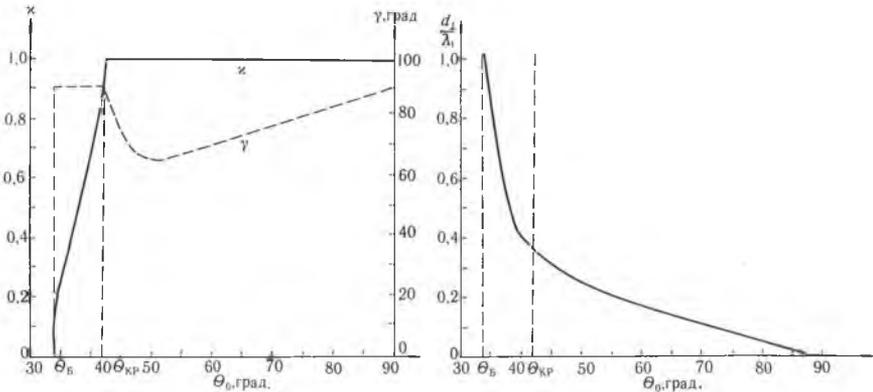


Рис. 2. Зависимость параметров эллипса поляризации падающего пучка от угла падения (θ_B — угол Брюстера, θ_K — критический угол полного отражения)

Рис. 3. Зависимость величины поперечного сдвига от угла падения

Из графика (рис. 3) видно, что чистый поперечный сдвиг возможен как для углов падения, меньших критического угла полного отражения θ_K , так и для углов, больших критического; критический угол θ_K в отношении поперечного сдвига ничем не выделяется. В то же время при приближении угла падения к углу Брюстера величина поперечного сдвига неограниченно нарастает. Однако в окрестности угла Брюстера нарушается условие применимости полученных здесь формул для величины сдвига. Действительно, при $\theta_0 \rightarrow \theta_B$ для получения чистого сдвига необходимо, чтобы $\kappa \rightarrow 0$ (см. рис. 2); это противоречит третьему из условий (4). При $\theta_0 \rightarrow \theta_B$ понятие чистого поперечного сдвига теряет смысл, поскольку при $\kappa = 0$ падающий пучок имеет линейную р-поляризацию и при $\theta_0 = \theta_B$, $R_{p0} = 0$, в плосковолновом приближении отраженный пучок вообще отсутствует.

Для получения в окрестности угла Брюстера отраженного пучка можно пользоваться общими формулами (1), если их правые части разложить в ряд Тейлора, ограничившись первым приближением. В частности, если $\kappa_y = 0$, $\kappa_x = 1$, $\theta_0 = \theta_B$, из (1) получим:

$$E_x^r = \frac{i}{\kappa n_2} \frac{n_2^4 - n_1^4}{2n_1^2 n_2^2} \frac{\partial E}{\partial x_r}, \quad E_y^r = \frac{i}{\kappa n_2} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \frac{\partial E}{\partial y}. \quad (15)$$

Согласно (15), структура поля пучка р-поляризации, отраженного под углом Брюстера, определяется производными по поперечным координатам поля падающего пучка; поэтому подобие между ними отсутствует и понятие сдвига теряет смысл. В частности, если падающий пучок имеет хорошо выраженный центральный максимум в распределении интенсивности, в отраженном пучке такой максимум будет отсутствовать.

1. Б р е х о в с к и х Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
2. Б е л ь с к и й А. М. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 60. № 4. С. 792.
3. Б о р н М., В о л ь ф Э. Основы оптики. М., 1973.
4. Т у р н е р R. G. // Austr. Journ. Phys. 1980. V. 33. № 2. P. 319.

Поступила в редакцию 28.03.94

УДК 535.37

С. А. САХАРУК, С. К. ГОРБАЦЕВИЧ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИСТАБИЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЕКТРОВ ПОГЛОЩЕНИЯ ВЯЗКИХ РАСТВОРОВ СЛОЖНЫХ МОЛЕКУЛ

The possibility of a bistable response of absorption (fluorescence intensity) for a system «complex moleculesolvation cell» to the change in the excitation intensity due to the processes of intermolecular relaxation has been theoretically studied.

Процессы межмолекулярной релаксации (ММР) играют важную роль в фотофизических явлениях, происходящих в растворах сложных органических молекул, и оказывают существенное влияние на формирование их спектрально-люминесцентных характеристик. Соответствующие закономерности хорошо изучены как для обычных условий возбуждения [1], так и при воздействии на систему оптическим излучением высокой интенсивности [2—5]. Подробно изучены закономерности проявления ММР ориентационной и трансляционной природы в спектрах излучения растворов. Показано [1, 6], что характер соответствующих молекулярных перестроек и скорость их протекания существенно зависят от соотношения между временем пребывания молекулы в возбужденном состоянии τ_e и постоянной времени ММР τ_R . При этом, варьируя интенсивность, длительность и спектральный состав возбуждающего излучения, можно менять параметры ММР в широких пределах, а следовательно, и оптические свойства растворов [6—11]. Это создает возможность для управления спектрально-люминесцентными характеристиками таких систем.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию возможного бистабильного отклика поглощения (интенсивности флуоресценции) системы «сложная молекула — сольватная оболочка» на изменение возбуждающей интенсивности, обусловленного процессами ММР. Для анализа процессов, протекающих в такой системе, воспользуемся четырехуровневой схемой, предложенной в [1]. Ее параметры определяются соотношением между средним временем пребывания молекулы в основном (τ_g) и возбужденном (τ_e) состояниях, постоянной времени ММР (τ_R), а также длительностью воздействия на систему мощным оптическим излучением ($t_{\text{возб}}$). Согласно [1, 3, 5—9, 12], могут быть реализованы четыре основных случая: 1) полная релаксация в основном и возбужденном состояниях ($\tau_R \ll \tau_e, \tau_g$); 2) полная релаксация в основном и частичная в возбужденном состояниях ($\tau_e < \tau_R < \tau_g$); 3) полная релаксация в возбужденном и частичная в основном состояниях ($\tau_g < \tau_R < \tau_e$); 4) частичная релаксация в основном и возбужденном состояниях ($\tau_g \sim \tau_e \sim \tau_R$).

Рассмотрим процессы межмолекулярной релаксации в данной системе, когда время τ_R больше времени жизни молекул в возбужденном состоянии τ_e . Тогда за время пребывания молекулы активатора в возбужденном состоянии процесс межмолекулярной релаксации не будет успевать завершиться. Если процесс возбуждения достаточно длинный

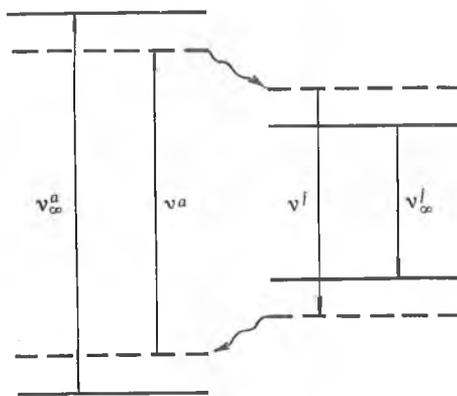


Рис. 1. Схема энергетических уровней и переходов при $\tau_R > \tau_e$, τ_g и $t_{\text{возб}} \gg \tau_R$.

($t_{\text{возб}} \gg \tau_R$) и его интенсивность велика (время жизни молекулы в основном состоянии оказывается меньше, чем время ориентационной релаксации), то возникают условия для осуществления вынужденной (ступенчатой) релаксации, впервые описанной в [8, 9] (рис. 1). При этом, как показано в [8, 9], при достаточно больших значениях $t_{\text{возб}}$ положения спектров поглощения и испускания будут осциллировать около некоторых средних значений, отвечающих стационарному режиму. Выражения для стационарных значений частот поглощения и испускания молекулы активатора получены в предположении дебаевской модели межмолекулярной релаксации [3, 5]:

$$v_{\text{ст}}^a = v_{\infty}^a - (v_{\infty}^a - v_{\infty}^f) \frac{\tau_e}{\tau_e + \tau_g} \frac{\tau_R}{\tau_R + \tau_g}, \quad (1)$$

$$v_{\text{ст}}^f = v_{\infty}^f - (v_{\infty}^f - v_{\infty}^a) \frac{\tau_g}{\tau_e + \tau_g} \frac{\tau_R}{\tau_R + \tau_e}. \quad (2)$$

Из выражений (1), (2) следует, что положение спектров поглощения и испускания, отвечающих стационарному режиму возбуждения, определяется временем пребывания молекулы активатора в основном состоянии между актами поглощения света, которое, в свою очередь, определяется интенсивностью возбуждения и сечением поглощения молекулы на частоте поглощения.

Рассмотрим вопрос о релаксационном смещении спектра поглощения. При слабой накачке, когда время жизни основного состояния велико, процессы межмолекулярной релаксации успевают полностью завершиться за промежутки времени между актами поглощения света. При увеличении интенсивности света, когда процессы межмолекулярной релаксации в основном состоянии не успевают завершиться за промежутки времени, следующие между актами поглощения света, спектр поглощения может испытывать только длинноволновый сдвиг [13].

Такое длинноволновое смещение спектра поглощения активатора при увеличении интенсивности возбуждения может, в принципе, привести к появлению бистабильного отклика поглощения (интенсивности люминесценции) на изменение интенсивности возбуждающего излучения. Действительно, если проводить возбуждение молекул активатора на достаточно далеком красном крае спектра поглощения, то даже при значительной интенсивности возбуждающего излучения, в силу малости сечения поглощения, в возбужденное состояние будет переходить малая доля молекул активатора. При увеличении интенсивности возбуждающего излучения произойдет смещение спектра поглощения молекулы активатора в низкочастотную область, что приведет к резкому увеличению сечения поглощения на частоте возбуждающего излучения. После этого может оказаться, что снижение интенсивности возбуждения до первоначальной интенсивности не приведет к уменьшению доли молекул в возбужденном состоянии до величины, которая наблюдалась до повышения интенсивности возбуждения, т. е. в ходе зависимости интенсивности флуоресценции (положения спектра поглощения или испускания) активатора от интенсивности возбуждения может наблюдаться гистерезис.

Для проверки высказанного предположения проведем расчет. Будем считать, что молекула активатора имеет достаточно большой квантовый выход образования триплета. Это устранил нежелательные в данном случае вынужденные переходы, а также, что более существенно, приведет к большому времени жизни возбужденного состояния, что, в свою очередь, позволит наблюдать все эффекты при умеренных интенсивностях возбуждающего излучения.

Спектр поглощения молекулы (его длинноволновой край) зададим в экспоненциальном виде. Воспользуемся выражениями, приведенными в [3, 5] для положения спектров поглощения при стационарном возбуждении, не представляется возможным, поскольку при выводе этих выражений полагалось, что интенсивность возбуждения — постоянная величина. В нашем же случае, в ходе релаксационного смещения спектра поглощения, меняется интенсивность поглощения. Поэтому воспользуемся следующей процедурой, которая близка к процедурам расчета,

описанным в [3—5], но позволяющей учесть изменение интенсивности поглощения в ходе релаксационного смещения спектра. Согласно [1], частота поглощения (испускания) $\nu_t^{a(f)}$ в любой момент времени $t > 0$ равна:

$$\nu_t^a = \nu_\infty^a + (\nu_0^a - \nu_\infty^a) e^{-t/\tau_R}, \quad (3)$$

$$\nu_t^f = \nu_\infty^f + (\nu_0^f - \nu_\infty^f) e^{-t/\tau_R}, \quad (4)$$

где частоты $\nu_0^{a(f)}$ соответствуют положению спектров поглощения и испускания в момент времени $t = 0$, а частоты $\nu_\infty^{a(f)}$ соответствуют положению спектров поглощения или испускания при достижении равновесия в системе. Будем считать, что в момент времени $t = 0$ было ступенчато включено возбуждающее излучение. Тогда по прошествии некоторого времени t_1 система перейдет в возбужденное состояние и просуществует там некоторое время.

После перехода молекулы активатора в возбужденное состояние в сольвате начнется процесс релаксации, а после перехода молекулы в основное состояние будет проходить процесс обратной релаксации. Если время жизни молекулы в основном и возбужденном состояниях окажется меньше времени ориентационной релаксации, то молекула в основном и в возбужденном состояниях не будет успевать прийти к своему равновесному состоянию, характеризующемуся значениями частот $0-0$ -перехода $\nu_\infty^{a(f)}$.

В этом случае после n -го цикла возбуждения (по прошествии некоторого времени t' после включения возбуждающего излучения) положение спектров испускания (поглощения) может быть описано выражениями (3) и (4), однако в этом случае конечное значение частоты $(n-1)$ -цикла возбуждения является начальным для следующего. При этом время t , которое следует подставлять в выражения (3), (4), отсчитывается от момента последнего квантового перехода. После проведения усреднения по случайным величинам различных интервалов времени $t_n - t_{n-1}$ нахождения молекулы в основном (возбужденном) состоянии и устремлении числа циклов возбуждения n к бесконечности, можно получить значение частоты поглощения (испускания) для стационарного режима возбуждения. При этом учитывалось, что случайная величина времени нахождения молекулы активатора в возбужденном состоянии определяется параметром τ_e , а в основном — τ_g . Причем величина τ_g зависит от интенсивности возбуждения и положения спектра поглощения молекулы активатора согласно

$$\frac{1}{\tau_g} = I \sigma(\nu_m, \nu_{\text{возб}}), \quad (5)$$

где I и $\nu_{\text{возб}}$ — интенсивность и частота возбуждающего света, $\sigma(\nu_m, \nu_{\text{возб}})$ —

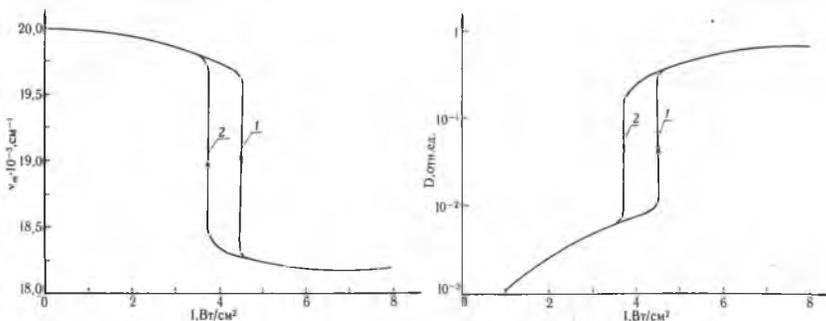


Рис. 2. Зависимость ν_m спектра поглощения активатора от интенсивности возбуждающего излучения

Рис. 3. Зависимость интенсивности поглощения активатора в максимуме от интенсивности возбуждающего излучения

сечение поглощения активатора на частоте $\nu_{\text{возб}}$, ν_m — частота максимума спектра поглощения, зависящая от интенсивности возбуждения.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости ν_m спектра поглощения активатора и интенсивности поглощения в максимуме от интенсивности возбуждающего света при увеличении интенсивности возбуждения (кривые 1) и уменьшении интенсивности возбуждения (кривые 2). В расчете были приняты следующие параметры: $\nu_0^a = 20\,000\text{ см}^{-1}$, $\nu_0^a = 18\,000\text{ см}^{-1}$, $\nu_{\text{возб}} = 17\,500\text{ см}^{-1}$, $\tau_c = 0,01\text{ с}$, $\tau_R = 0,1\text{ с}$, $\sigma = 4 \cdot 10^{-16}\text{ см}^2$, полуширина низкочастотного крыла спектра $\sim 300\text{ см}^{-1}$. Из рисунков видно, что данные зависимости имеют ярко выраженный гистерезисный вид. При времени жизни возбужденного (триплетного) состояния молекулы активатора порядка 0,01 с интенсивности возбуждения оказываются вполне приемлемыми для наблюдения указанных зависимостей в эксперименте.

1. Бахшиев Н. Г. Спектроскопия межмолекулярных взаимодействий. Л., 1972.
2. Мазуренко Ю. Т. // Квант. электроника. 1979. Т. 6. № 8. С. 1712.
3. Бахшиев Н. Г., Воропай Е. С., Гайсенюк В. А., Гириин О. П., Саржевский А. М. // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 50. Вып. 6. С. 1117.
4. Бахшиев Н. Г., Гириин О. П. // Там же. 1982. Т. 52. Вып. 1. С. 12.
5. Они же. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1982. Т. 46. № 2. С. 318.
6. Бахшиев Н. Г. // Тр. ГОИ. 1979. Т. 45. Вып. 179. С. 3.
7. Аристов А. В., Бахшиев Н. Г., Кузин В. А., Питерская И. В. // Оптика и спектроскопия. 1971. Т. 30. Вып. 1. С. 143.
8. Гириин О. П. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 3. С. 550.
9. Гириин О. П., Бахшиев Н. Г. // Вестн. ЛГУ. Сер. 4: Физ. Хим. 1978. № 16. С. 141.
10. Бутько А. И., Воропай Е. С., Жолнеревич И. И. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 3. С. 626.
11. Богданов В. Л., Клочков В. П. // Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 46. Вып. 1. С. 188.
12. Аристов А. В., Маслюков Ю. С. // Там же. 1978. Т. 45. Вып. 6. С. 1102.
13. Гириин О. П., Бахшиев Н. Г. // Там же. 1986. Т. 60. Вып. 2. С. 418.

Поступила в редакцию 11.04.94.

УДК 535.39

В. В. ЕРМАКОВ, И. В. СТАШКЕВИЧ

ВУГЛОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АПТЫЧНЫХ СИСТЕМ З АНИЗОТРОПНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

The angle characteristic of optical systems containing birefringent materials has been determined and its form for spherical refractive surface has been calculated.

Тэорыя эйканала з'яўляецца эфектыўным метадам выўлення агульных заканамернасцяў распаўсюджання светлавых пучкоў. Адным са спосабаў вызначэння законаў параксіальнай аптыкі і аберацый ніжэйшых парадкаў у рамках гэтай тэорыі з'яўляецца прымяненне вуглавой характарыстыкі [1, 2]. Для ізатропных рэчываў тэорыя дастаткова развітая. Мэтай дадзенай работы з'яўляецца абгульненне разглядаемай тэорыі на выпадак анізатропных рэчываў — разлік вуглавой характарыстыкі аптычных сістэм, якія ўтрымліваюць крысталічныя элементы.

Нагадаем пастулаты, на аснове якіх будзе праводзіцца разлік вуглавой характарыстыкі. У адпаведнасці з прынцыпамі геаметрычнай аптыкі прамень распаўсюджваецца ў анізатропным рэчыве па прынцыпу Ферма [3], г. зн. прамень, што праходзіць праз пункты А і В, распаўсюджваецца ўздоўж той лініі, для якой даўжыня аптычнага шляху дасягае мінімальнага значэння. Хвалевымі паверхнямі называюць паверхні, ў якіх фаза хвалі аднолькавая. У адпаведнасці з [2] і [5] даўжыні аптычнага шляху рэальных промяў паміж пунктамі, што знаходзяцца на адных і тых жа хвалевых паверхнях, роўныя. У адрозненне ад ізатропных рэчываў паказчык пераламлення для промяя ў анізатропным асяроддзі залежыць ад напрамку распаўсюджання, таму промні ў анізатропным рэчыве не артаганальныя хвалевай паверхні, а скорасць распаўсюджання энергіі не роўна фазовай скорасці. Паказчыкі пераламлення для промяя і фазовай нармалі, а таксама напрамкі промяя і нармалі для аднавосевага крышталю звязаны паміж сабой суадносінамі [4]:

$$n = n_N SN \quad (1)$$

$$S/n = \hat{\epsilon} / (\epsilon_0 \epsilon_e) n_N N \quad (2)$$

дзе n — паказчык пераламлення для промня, n_N — паказчык пераламлення для нармалі, S — адзінкавы вектар ў напрамку промня, N — адзінкавы вектар нармалі, $\hat{\epsilon}$ — тэнзар дыэлектрычнай пранікальнасці, ϵ_0 , ϵ_e — галоўныя дыэлектрычныя пранікальнасці.

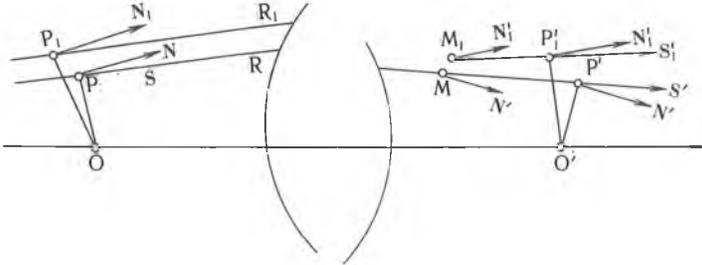


Рис. 1. Агульны выгляд аптычнай сістэмы для вызначэння параметраў промня праз вуглавую характарыстыку

Для разліку вуглавой характарыстыкі разгледзім аптычную сістэму, якая складаецца з анізатропных матэрыялаў (рис. 1). У агульным выпадку першае і апошняе асяроддзе з'яўляюцца анізатропнымі. Няхай O і O' пачаткі каардынат у прасторы прадмета і відарысаў. Разгледзім у прасторы прадметаў два паралельных бясконачна блізкіх промні R і R_1 , што распаўсюджваюцца ўздоўж адзінкавага вектара S . Пасля пераламлення ў прасторы відарысаў промні будуць распаўсюджвацца ўздоўж адзінкавых вектараў S' і S'_1 . Выберам на промнях у прасторы відарысаў пункты M і M_1 (ім адпавядаюць радыус-вектары M і M_1 у прасторы відарысаў) такія, што вектар $M-M_1$ будзе перпендыкулярны вектарам нармаліў N' і N'_1 промняў R і R_1 . Гэтыя пункты ў агульным выпадку будуць вызначацца адназначна. Вектары нармаліў звязаны з адзінкавымі вектарамі промняў суадносінамі (2). Выберам на промнях R і R_1 пункты P і P_1 у прасторы прадметаў, P' і P'_1 у прасторы відарысаў такія, каб радыус-вектары гэтых пунктаў у сваіх каардынатах P, P_1, P', P'_1 былі перпендыкулярны адпаведным вектарам нармаліў N, N_1, N', N'_1 для промняў R і R_1 , і знойдзем прырост аптычнага шляху

$$dT = [P_1 P'_1] - [PP'].$$

Вектар $P-P_1$ перпендыкулярны N і N_1 , таму пункты P і P_1 знаходзяцца на адной хвалевай паверхні. Па аналогіі пункты M і M_1 таксама знаходзяцца на адной хвалевай паверхні. Тады, у адпаведнасці з названымі пастулатамі, $[P_1 M_1] = [PM]$ і $dT = [M_1 P'_1] - [MP']$.

Разлічым аптычныя шляхі $[M_1 P'_1]$ і $[MP']$:

$$M-P' = S' | P'M |$$

$$M_1 - P'_1 = S'_1 | P'_1 M_1 |.$$

Памножыўшы першую роўнасць на N' , а другую на N'_1 і ўлічыўшы, што $P'N' = 0$ і $P'_1 N'_1 = 0$, атрымаем

$$N'M = S'N' | P'M |$$

$$N'_1 M_1 = S'_1 N'_1 | P'_1 M_1 |$$

(3)

Улічыўшы, што

$$[M_1 P'_1] - [MP'] = n_1 | M_1 P'_1 | - n | MP' |$$

і ў адпаведнасці з (1) $NS = \frac{n}{n_N}$ з дапамогай (3) атрымаем

$$dT = n_1 M_1 - nM, \quad (4)$$

дзе $\mathbf{n} = n_N \mathbf{N}$ — вектар нармальнай рэфракцыі.

У каардынатым выглядзе $\mathbf{n} = (p, q, m)$, $\mathbf{M} = (X, Y, Z)$, а

$$\mathbf{n}_1 = (p + dp, q + dq, m + dm), \quad \mathbf{M}_1 = (X + dX, Y + dY, Z + dZ).$$

Такім чынам:

$$dT = pdX + qdY + mdZ + Xdp + Ydq + Zdm.$$

Пры гэтым здабыткі другога парадку меншасці не ўлічваюцца. У сувязі з тым, што $(M_1 - M)\mathbf{n} = 0$,

$$pdX + qdY + mdZ = 0.$$

I канчаткова

$$dT = Xdp + Ydq + Zdm. \quad (5)$$

Для вектара нармальнай рэфракцыі \mathbf{n} выконваецца судачыненне [4]

$$\mathbf{n}\hat{\mathbf{n}} = \epsilon_0 \epsilon_e. \quad (6)$$

Прадыферэнцаваўшы (6) з улікам таго, што тэнзар $\hat{\epsilon}$ сіметрычны і ўлічыўшы (2), атрымаем $Sdn = 0$, або ў каардынатым выглядзе

$$S_x dp + S_y dq + S_z dm = 0.$$

Адсюль

$$dm = -(S_x/S_z)dp - (S_y/S_z)dq. \quad (7)$$

Падставіўшы (7) у (5), атрымаем

$$dT = (X - (S_x/S_z)Z)dp + (Y - (S_y/S_z)Z)dq, \\ \partial T/\partial p = X - (S_x/S_z)Z, \quad \partial T/\partial q = Y - (S_y/S_z)Z.$$

Правыя часткі гэтых выразаў роўныя каардынатам перасячэння промняў (x, y) з плоскасцю відарысаў $Z = 0$:

$$\partial T/\partial p = x, \quad \partial T/\partial q = y. \quad (8)$$

Па аналогіі атрымаем

$$\partial T/\partial p_0 = x_0, \quad \partial T/\partial q_0 = y_0, \quad (9)$$

дзе x_0, y_0 — каардынаты перасячэння промня з плоскасцю прадмета. Такім чынам, для знаходжання пункта перасячэння промня з плоскасцю прадметаў і плоскасцю відарысаў дастаткова знайсці вуглавую характарыстыку для кампанентаў вектара нармальнай рэфракцыі і выкарыстаць формулы (8), (9).

Знойдзем вуглавую характарыстыку для сферычнай пераламляльнай паверхні, што раздзяляе два анізатропныя рэчывы. Такая паверхня апісваецца формулай:

$$z = (x^2 + y^2)/(2r) + (x^2 + y^2)^2/(8r^3). \quad (10)$$

Няхай з абодвух бакоў ад паверхні рэчывы з'ўляюцца аднароднымі і анізатропнымі (аднавосевымі). Галоўныя дыэлектрычныя пранікальнасці для гэтых рэчываў абазначым $\epsilon_{00}, \epsilon_{e0}$ для першага асяроддзя і $\epsilon_{01}, \epsilon_{e1}$ для другога. Адзінкавыя вектары восі першага і другога рэчыва абазначым як \mathbf{c}_0 і \mathbf{c}_1 . Аднясём вуглавую характарыстыку да каардынатыных сістэм, восі якіх паралельныя восям сістэмы з пачаткам у пункце O , а пачаткі знаходзяцца ў пунктах $O_0(0, 0, a_0)$ і $O_1(0, 0, a_1)$ (рыс. 2). Калі P — пункт перасячэння промня з пераламляльнай паверхняй, то адпаведна [2] — вуглавая характарыстыка T , роўная

$$T = (xp_0 + yq_0 + (z - a_0)m_0) - (xp_1 + yq_1 + (z - a_1)m_1), \quad (11)$$

дзе (x, y, z) — каардынаты пункта P у сістэме каардынат з пачаткам у O ; (p_0, q_0, m_0) , (p_1, q_1, m_1) — кампаненты вектара нармальнай рэфракцыі.

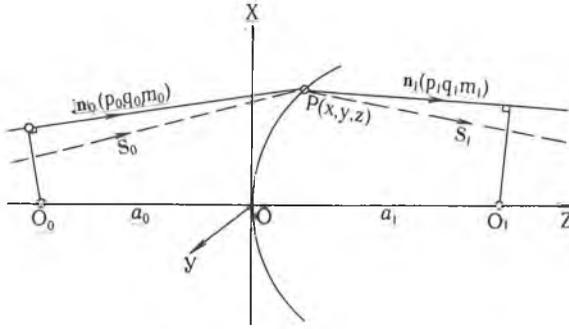


Рис. 2. Вуглавая характарыстыка сферычнай пераламляльнай паверхні

Вектар $N(p_0 - p_1, q_0 - q_1, m_0 - m_1)$ у анізатропным асяроддзі таксама як і ў ізатропным, адпаведна [4], перпендыкулярны да пераламляльнай паверхні. Такім чынам, калі (10) запісаць у выглядзе:

$$F(x, y, z) = z - (x^2 + y^2)/(2r) + (x^2 + y^2)^2/(8r^3) = 0,$$

то

$$\lambda(\partial F/\partial x) = p_0 - p_1,$$

$$\lambda(\partial F/\partial y) = q_0 - q_1,$$

$$\lambda(\partial F/\partial z) = \lambda = m_0 - m_1$$

і x, y выражаюцца праз p, q і m з дакладнасцю да велічынь трэцяга парадку. Далей па формуле (10) знаходзім z . Падставіўшы x, y і z у (9), знойдзем расклад вуглавой характарыстыкі да складнікаў чацвертага парадку ключна па p і q у выглядзе:

$$\begin{aligned} T(p_0, q_0, m_0; p_1, q_1, m_1) = & -m_0 a_0 + m_1 a_1 + r/(2(m_1 - m_0)) \times \\ & \times [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] - r/(8(m_1 - m_0)^2) [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

У адрозненне ад ізатропных рэчываў тут суадносіны паміж кампанентамі вектара нармальнай рэфракцыі p, q, m маюць больш складаны характар. Так, судачыненне (6) для аднавосевага крышталю прымае выгляд [4]:

$$(n)^2 = \epsilon_e - \epsilon'(\eta c)^2,$$

дзе $\epsilon' = (\epsilon_e - \epsilon_o)/\epsilon_o$,

або ў каардынатным выглядзе

$$p^2 + q^2 + m^2 = \epsilon_e - \epsilon'(p\alpha + q\beta + m\gamma)^2.$$

Пасля рашэння гэтага квадратнага раўнання адносна m атрымаем:

$$m = \delta\sqrt{1 - \lambda} - \sigma, \quad (13)$$

дзе $\delta = n_e/(1 + \epsilon'\gamma^2)^{1/2}$,

$$\lambda = (\epsilon'(p\alpha + q\beta)^2 + (1 + \epsilon'\gamma^2)(p^2 + q^2))/((1 + \epsilon'\gamma^2)n_e^2),$$

$$\sigma = (\epsilon'\gamma(p\alpha + q\beta))/(1 + \epsilon'\gamma^2).$$

Раскладаем m па ступенях p і q :

$$m = \delta(1 - \lambda/2 - \lambda^2/8) - \sigma = \delta - \delta\lambda/2 - \delta\lambda^2/8 - \sigma, \quad (14)$$

гэтак сама

$$\frac{1}{m_1 - m_0} = \frac{1}{\delta_1 - \delta_0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{(\delta_1 - \delta_0)^2} + \frac{\delta_1 \lambda_1 - \delta_0 \lambda_0}{2(\delta_1 - \delta_0)^2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^3}. \quad (15)$$

Калі падставіць (14, 15) у (12) і выдзеліць складнікі аднаго парадку, то канчаткова знойдзем вуглавую характарыстыку:

$$T(p_0, q_0, p_1, q_1) = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} - T^{(4)},$$

дзе

$$T^{(0)} = -a_0 \delta_0 + a_1 \delta_1,$$

$$T^{(1)} = a_0 \delta_0 - a_1 \delta_1,$$

$$T^{(2)} = a_0 / 2 \delta_0 \lambda_0 - a_1 / 2 \delta_1 \lambda_1 + r / (2(\delta_1 - \delta_0)) ((p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2),$$

$$T^{(3)} = \frac{r(\sigma_1 - \sigma_0)}{2(\delta_1 - \delta_0)^2} ((p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2), \quad (16)$$

$$T^{(4)} = \frac{a_0}{8} \delta_0 \lambda_0^2 - \frac{a_1}{8} \delta_1 \lambda_1^2 - \frac{r}{8(\delta_0 - \delta_1)^2} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 + \\ + \frac{r}{2} \left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_0)^2}{(\delta_1 - \delta_0)^3} + \frac{\delta_1 \lambda_1 - \delta_0 \lambda_0}{(\delta_1 - \delta_0)^3} \right) [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2].$$

Таксама, як і ў выпадку ізатропных рэчываў, для знаходжання вуглавой характарыстыкі двух пераламляльных паверхняў неабходна скласці вуглавую характарыстыкі кожнай паверхні. Пры гэтым адпаведныя каардынаты восі ўсіх сістэм павінны быць паралельнымі і прамежвая сістэма каардынат павінна супадаць для першай і другой паверхні, г. зн.

$$T(p_0, q_0; p_2, q_2) = T_1(p_0, q_0; p_1, q_1) + T_2(p_1, q_1; p_2, q_2). \quad (17)$$

Для выключэння велічынь p_1 і q_1 выкарыстоўваюцца теснасці:

$$\partial T_1 / \partial p_1 = \partial T_2 / \partial p_1, \quad \partial T_1 / \partial q_1 = \partial T_2 / \partial q_1. \quad (18)$$

Такім чынам, калі вядома вуглавая характарыстыка для адной пераламляльнай паверхні (16), з дапамогай формул (17) і (18) знойдзем вуглавую характарыстыку для любой цэнтраванай аптычнай сістэмы, што дазваляе па формулах (8) і (9) разлічыць яе аберацыі.

1. С л ю с а р е в Г. Г. Методы расчета оптических систем. Л., 1969.

2. Б о р н М., В о л ь ф Э. Основы оптики. М., 1970.

3. Г е л ь п е р н Д. Ю. Геометрическая оптика кристаллов // Тр. ГОИ. 1967. Т. 47. Вып. 181.

4. Ф е д о р о в Ф. И., Ф и л и п о в В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. Мн., 1976.

5. К р а в ц о в Ю. А., О р л о в Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980.

Паступіла ў рэдакцыю 12.04.94.

УДК 541.141.1:546.57

А. И. СТАНКЕВИЧ, В. В. МОГИЛЬНЫЙ

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛАБОРАССЕИВАЮЩИХ ТЕРМОХРОМНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК, СОДЕРЖАЩИХ ТЕТРАИДОМЕРКУРАТ СЕРЕБРА

Thermochromic polymer materials with low light-scattering level based on Ag_2HgI_4 are synthesized and studied. Their use as the reversible registering media for photothermal information recording is considered.

Термофотографические материалы, действие которых основано на температурной зависимости оптических характеристик, обладают рядом достоинств, в числе которых достаточно высокая чувствительность,

обратимость записи, малая постоянная времени и т. д. [1]. Значительное место среди термофотографических материалов занимают материалы с термохромными свойствами. Среди них выделяются термохромные вещества, для которых изменение цвета происходит в узком температурном интервале при фазовом переходе. К ним относятся тетраиодомеркураты серебра (I), меди (I) и некоторых других одновалентных металлов, для которых происходит переход из упорядоченной β -фазы в неупорядоченную α -фазу [2]. Из этого ряда соединений тетраиодомеркурат серебра (ТИМС) является наиболее чувствительным, так как фазовый переход в его микрокристаллах происходит при более низкой температуре — около 323 К.

Однако термохромные тетраиодомеркураты — труднорастворимые соединения, и, чтобы исследовать или использовать температурные изменения их оптических характеристик, их наносят либо в виде мелкокристаллических порошков, регистрируя спектр отражения [3], либо приготавливают в виде эмульсий [4, 5]. Однако хотя тщательно измельченная и приготовленная на фторуглеродном масле эмульсия и позволяет записать спектры поглощения для ТИМС [5], тем не менее рассеивание все еще велико и составляет примерно 50 %. Это обстоятельство существенно ограничивает разрешающую способность материалов. Создание слабоссеивающих материалов на основе термохромных тетраиодомеркуратов может позволить увеличить разрешающую способность и получить обратимые материалы для оптической записи и информации.

ТИМС — практически нерастворимое во многих растворителях вещество. Обычно синтез ТИМС проводят в водных растворах из стехиометрических количеств тетраиодомеркурата калия и нитрата серебра. При этом образуется мелкокристаллический осадок, из которого с большим трудом удается получить эмульсии [5].

Предотвратить образование мелкокристаллического осадка можно, если синтез ТИМС проводить в среде с высокой вязкостью. Такими средами могут служить набухшие полимеры. В силу ограниченной диффузии вещества в полимерной среде удастся подобрать оптимальные условия для приготовления практически прозрачных полимерных пленок. В качестве основы при получении пленок были использованы полимеры, содержащие гидроксильные и карбоксильные группы, способные набухать в водных растворах солей, необходимых для синтеза ТИМС: поливиниловый спирт, целлофан, полиметакриловая кислота (ПМАК) и сополимеры метакриловой кислоты и винилацетата (СПМКВА). Кроме образцов на основе целлофана полимерные пленки готовили из растворов методом полива. После испарения растворителя получали пленки толщиной 10—100 мкм в зависимости от количества взятого полимера.

Промышленно изготовленные целлофановые пленки имели толщину 80—90 мкм. Для введения в них ТИМС готовили два водно-глицериновых раствора (содержание глицерина 10 % по объему) солей тетраиодомеркурата калия с концентрацией 0,4 М и нитрата серебра с концентрацией 0,8 М. Более высокие концентрации приводят к образованию сильнорассеивающих свет пленок, более низкие концентрации — к образованию пленок с небольшой оптической плотностью.

На первом этапе окрашивания пленки погружали в водно-глицериновый раствор нитрата серебра на определенное время, которое зависело от толщины пленки. Для пленок толщиной 10 мкм время выдерживания в растворе не превышало 10 с и достигало 600 с для пленок толщиной 100 мкм. После экспозиции пленок в первом растворе их высушивали в вакууме в течение 15 мин, а затем выдерживали от 3 до 10 с в зависимости от толщины в водно-глицериновом растворе тетраиодомеркурата калия. В результате диффузии этой соли внутрь пленки образовывался ТИМС, и пленки окрашивались в желтый цвет. После экспозиции во втором растворе пленки окунали на 1 с в воду и высушивали в вакууме в течение 15 мин. Двухэтапный процесс окрашивания полимерных пленок очень критичен ко времени экспозиции в первом и особенно во втором растворах. Для каждой толщины пленки существуют достаточно узкие временные интервалы экспозиции в растворах.

Спектры поглощения полученных пленок, содержащих ТИМС, были измерены на спектрофотометре Spesord-M40.

Полимеры, содержащие гидроксильные группы (поливиниловый спирт, целлофан), при двухэтапном окрашивании дают пленки с удовлетворительными по прозрачности характеристиками (рассеивание не более 35 %). Однако при нагреве их выше температуры фазового перехода сдвиг краевого поглощения ТИМС составил лишь 400—600 см^{-1} (рис. 1, кривые 1, 2). Гораздо больший сдвиг краевого поглощения ТИМС наблюдается при нагревании полимерной пленки на основе ПМАК и составляет 1000 см^{-1} (рис. 1, кривые 3, 4). Кроме того, термохромные пленки на основе ПМАК обладают большей прозрачностью (рассеивание не более 10—15 %) и хорошей воспроизводимостью параметров по сравнению с полимерами, имеющими гидроксильные группы.

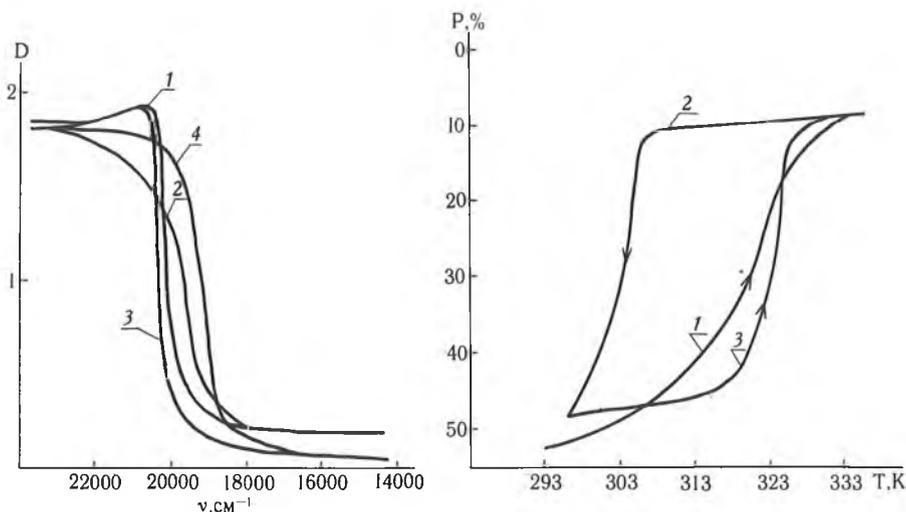


Рис. 1. Спектры поглощения полимерных пленок, содержащих ТИМС: 1, 2 — в поливиниловом спирте; 3, 4 — в полиметилметакрилате; 1, 3 — при температуре 293 К; 2, 4 — при температуре 333 К

Рис. 2. Зависимость пропускания пленки из СПМКВА, содержащей ТИМС, от температуры:

1 — медленное нагревание; 2 — охлаждение; 3 — быстрое нагревание

Недостатком пленок на основе ПМАК является их повышенное растрескивание и слабая адгезия к стеклу. Для устранения этих недостатков были использованы сополимеры СПМКВА. Наилучшие результаты получены для СПМКВА с соотношением в исходном составе для синтеза мономеров метакриловой кислоты и винилацетата 4:1 по массе. Сдвиг краевого поглощения ТИМС так же, как и в ПМАК, составляет 1000 см^{-1} . Следует отметить, что во всех полимерных матрицах смещение спектра поглощения ТИМС в температурном интервале 293—333 К заметно меньше, чем для фторуглеродной масляной эмульсии этой соли, где сдвиг краевого поглощения достигает 1700 см^{-1} [5].

Условия роста этих частиц в полимерной матрице зависят от степени ее набухания (связанной напрямую со временем контакта пленки с раствором) и концентрации проникающих в полимер растворов. Пока набухание полимера невелико, образуются частицы ТИМС небольших размеров, что позволяет получать слаборассеивающие полимерные пленки. Неравномерность набухания по толщине создает значительный разброс частиц по размерам. Меньшие размеры частиц вместе с большим разбросом по этому параметру снижают сдвиг краевого поглощения, резкость перехода из одной фазы в другую, а также ширину петли гистерезиса зависимости пропускания от температуры (рис. 2).

При медленном нагревании (0,5—1 К/мин) пленки на основе СПМКВА происходит сначала медленное увеличение поглощения на частоте 19500 см^{-1} , затем более быстрое потемнение в области температур фазового перехода 322—332 К (рис. 2, кривая 1). Быстрое нагре-

вание (5—10 К/мин) приводит к более резкому изменению пропускания пленкой. Это, по-видимому, обусловлено тем, что частицы ТИМС в полимерном окружении не успевают отрелаксировать до равновесного при этой температуре состояния за короткий промежуток времени (рис. 2, кривая 3). Охлаждение термохромной полимерной пленки первоначально не приводит к заметному изменению пропускания пленки, и лишь при температуре 300—305 К происходит переход из неупорядоченной α -фазы в упорядоченную β -фазу (рис. 2, кривая 2). Более широкая петля гистерезиса для полимерных пленок (примерно 20 К по сравнению с 4—5 К для поликристаллических образцов [6]) и более плавный переход из одной фазы в другую косвенно свидетельствуют о более широком распределении свойств частиц ТИМС в полимерной матрице.

Описанные слаборассеивающие полимерные материалы могут служить обратимыми регистрирующими средами при фототермической записи информации, например в виде амплитудных голограмм, в спектральном диапазоне 510—520 нм. Оптическая информация может быть сохранена достаточно длительное время, если температуру образца поддерживать в пределах 308—313 К, когда еще не происходит обратного резкого перехода из α - в β -фазу ТИМС.

1. Несеребрянные фотографические процессы / Под ред. А. Л. Картужанского. Л., 1984. С. 234.

2. Funke K. // Prog. Solid State Chem. 1976. V. 11. P. 345.

3. Chivian I. S., Clayton R. N., Eden D. D., Hemphill R. B. // Appl. Opt. 1972. V. 11. № 11. P. 2649.

4. Картужанский А. Л., Кудряшова Л. К., Резников В. А. // Журн. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр. 1988. Т. 33. № 3. С. 206.

5. Jaw H.-R. C., Mooney M. A., Novinson T. et al. // Inorg. Chem. 1987. V. 26. P. 1387.

6. Веккер С., Шонн Ж. // Solid State Ionics. 1984. V. 13. № 2. P. 141.

Поступила в редакцию 30.05.94.

УДК 548.55

Ю. М. ИЛЬЯШУК, А. К. ФЕДОТОВ

РЕЛАКСАЦИЯ ЗАРЯДА НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ГРАНИЦАХ ЗЕРЕН В ПРОФИЛИРОВАННОМ КРЕМНИИ

In this work the influence of oxygen and carbon segregation on the voltage-current ($I-V$) characteristics measured across the plane of the individual grain boundaries, spontaneously nucleated during the growth (SNGBs) of shaped Silicon is studied. The investigations carried out have shown that such SNGBs display the slow temporal relaxation of $I-V$ which can be described by a logarithmic law with the gigantic values of the characteristic times ($\sim 10^3-10^4$ sec) for a relaxation process.

Введение

В данной работе приводятся результаты изучения вольт-амперных характеристик (ВАХ) границ зерен, спонтанно зарождающихся в процессе кристаллизации (СЗГЗ). В качестве исследуемых СЗГЗ использовались одиночные плоские электрически активные границы зерен общего типа в кристаллах кремния, выращенных способом Степанова [1]. Ранее [2—6] нами было показано, что спонтанно зародившиеся на фронте кристаллизации границы зерен общего типа в Ge и Si в структурном и электрическом смысле подобны естественным двойным гетеропереходам типа сильно легированный полупроводник (СЛП) — вырожденный полупроводник (ВП) — сильно легированный полупроводник (СЛП). При этом предполагается, что ВП-область формируется вблизи «ядра» границы, где происходит кристаллографическая стыковка (согласование) двух соседствующих зерен, а прилегающие к ней с обеих сторон СЛП-области связаны с приграничными участками, обогащенными примесями вследствие их сегрегации по границе. Концентрация некоторых примесей в СЛП-области может достигать значений выше предела растворимости и приводить к выделению вдоль границ второй фазы. Так,

например, специфика получения кристаллов профилированного кремния (т. е. их рост через графитовый формообразователь) обуславливает сильное обогащение приграничных областей СЗГЗ общего типа кислородом и углеродом и появление в связи с этим эффектов релаксации заряда на таких границах. Изучению этих эффектов и посвящена данная работа.

Результаты измерений

Проведенные нами исследования показали, что на характер движения носителей заряда поперек плоскости СЗГЗ общего типа в профилированном кремнии существенное влияние оказывает присутствие на них преципитатов карбида и оксида кремния. Наличие таких преципитатов подтверждается результатами металлографического и электронно-микроскопического анализов [2, 3, 7], а также данными Оже-спектроскопии (рис. 1). В частности, локальная Оже-спектроскопия (уровень локальности ~50—100 нм) показывает, что на некоторых границах общего типа количество углерода и кислорода может достигать нескольких атомных процентов, тогда как в объеме зерен их содержание не превышает 10^{16} см⁻³.

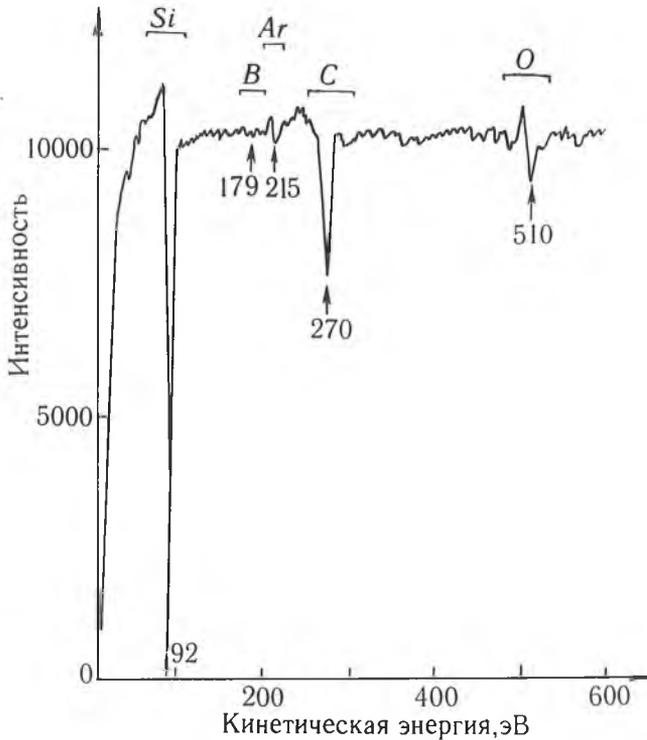


Рис. 1. Оже-спектр области границы, обогащенной углеродом и кислородом

Присутствие выделений SiC и SiO₂ на границах зерен приводит к существенному изменению их ВАХ, измеряемых поперек плоскости границы (методика, применяемая нами для измерения ВАХ СЗГЗ, описана в [2]). Результат трансформации поперечных ВАХ представлен на рис. 2, а. На кривой 1 показаны ВАХ, снимавшиеся как в режиме нарастания, так и в режиме убывания тока для СЗГЗ общего типа, не содержащей преципитатов вблизи границы. Изменение формы ВАХ при наличии карбидно-оксидных выделений отражено на кривых 2, 2'. В этом случае первоначально записывалась ВАХ в режиме нарастания тока (кривая 2), затем развертка напряжения источника питания останавливалась в определенной точке ВАХ и регистрировалось уменьшение напряжения при неизменном токе. Через некоторое время (≥ 30 —60 мин), в течение которого граница приходит в стационарное состояние, записывалась кривая 2' в режиме убывания тока. Как видно из рис. 2,

a, кривые 2 и 2' не совпадают. Эксперименты показали, что характер гистерезиса поперечной ВАХ определяется скоростью развертки и максимальным приложенным напряжением смещения U_{\max} в точке остановки развертки ВАХ. При импульсной подаче напряжения релаксация ВАХ тем сильнее, чем выше величина U_{\max} (рис. 2, б).

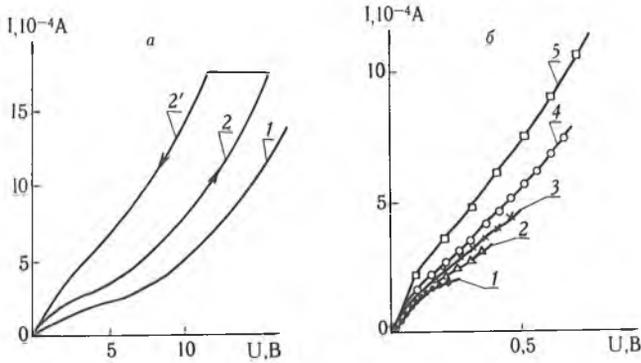


Рис. 2. Поперечные ВАХ для границ общего типа, измеренные при $T = 300$ К:

a — при отсутствии (1) и наличии (2) карбидно-оксидных выделений на границе; б — после релаксации при импульсном приложении различных напряжений смещения: 1 — $U_{\max} = 0,2$ В; 2 — $0,35$ В; 3 — $0,5$ В; 4 — $0,7$ В; 5 — $1,2$ В.

После прекращения воздействия напряжения на образец в течение 30—60 мин СЗГЗ возвращалась в состояние, в котором она находилась до эксперимента.

Исследования показали, что релаксация напряжения во времени (после остановки развертки ВАХ) подчиняется логарифмическому закону: значительная часть кривых $\Delta U(t) = U_{\max} - U(t)$ характеризуется зависимостями типа

$$\Delta U(t) = \Delta U_0 - r \cdot \lg t, \quad (1)$$

где

$$\Delta U_0 = r \cdot \lg t_0. \quad (2)$$

Здесь $r = dU/d(\lg t)$ характеризует логарифмическую скорость релаксации ВАХ. Параметр t_0 можно рассматривать как характерное время для процесса релаксации, достигавшее гигантских величин ($\sim 10^3 - 10^4$ с). При этом чем больше максимально приложенное напряжение U_{\max} , тем при меньших t начинается отклонение от прямолинейной зависимости.

Параметры релаксации поперечных ВАХ для СЗГЗ общего типа, обогащенной кислородом и углеродом

T, К	t_0 , с	ΔU_0 , мВ	r	U_{\max} , В
300	1553,3	1,4030	0,4397	0,50
	1255,1	2,1875	0,7059	0,74
	1160,1	2,6028	0,8493	0,85
	861,3	3,3799	1,1515	0,89
77	69,58	112,52	61,071	1,84
	150,48	151,83	69,730	3,90
	265,65	236,65	97,616	5,20

Обработка экспериментальных кривых релаксации напряжения на СЗГЗ по формулам (1), (2) методом наименьших квадратов дала значения параметров t_0 , ΔU_0 , r , U_{\max} (см. таблицу). Из таблицы видно,

что логарифмическая скорость релаксации заряда τ на СЗГЗ растет по мере увеличения максимального значения приложенного к границе напряжения. Аналогично ведет себя и величина ΔU_0 , характеризующая амплитуду релаксации.

Гетеропереходная модель СЗГЗ, обогащенной кислородом и углеродом

Нами было показано, что в случае сильной локальной сегрегации углерода и кислорода в окрестности СЗГЗ общего типа в кремнии выпадающие при этом преципитаты SiC и SiO_2 существенно трансформируют электрические свойства этих участков границ. Указанная трансформация проявляется, в частности, во временной релаксации заряда логарифмического типа, приводящей к гистерезису поперечных ВАХ для таких границ. Логарифмический характер релаксации заряда свидетельствует о том, что связанные с преципитатами глубокие ловушечные центры обеспечивают туннельный механизм движения НЗ, подобный наблюдаемому в МНОП-структурах [8]. При этом существует целый спектр таких ловушек с экспоненциальным разбросом их времен релаксации [5].

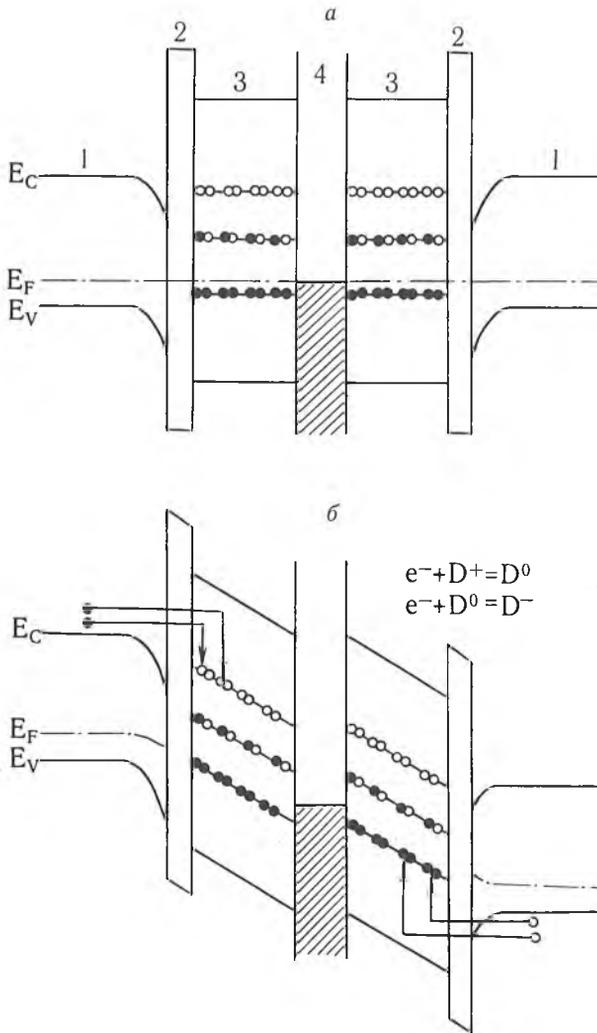


Рис. 3. Зонная диаграмма обогащенной кислородом и углеродом границы общего типа в профилированном кремнии:

a — равновесная диаграмма ($U=0$); b — $U>0$; 1 — зерно (кремний);
2 — SiO_2 ; 3 — SiC ; 4 — «ядро» границ

Учитывая гетеропереходный характер СЗГЗ общего типа в полупроводниках [2—6], поведение такого рода границ зерен с карбидно-оксидными преципитатами можно описать на основе модели зонной структуры, показанной на рис. 3. Согласно этой модели, структуру СЗГЗ можно качественно представить в виде гетероструктуры Si (зерно)—SiO₂—SiC—металл («ядро» СЗГЗ)—SiC—SiO₂—Si (зерно). Пространственное разделение областей с преобладанием SiC либо SiO₂ может быть обусловлено различием коэффициентов диффузии кислорода и углерода в кремнии.

Следуя [8], образование ловушек в карбиде кремния можно приписать атомам кремния с измененной координацией (возникающим, например, из-за наличия зернограничных дислокаций либо оборванных связей на границе раздела кремний—карбид). При этом естественно предположить наличие трех различных зарядовых состояний у таких дефектов в запрещенной зоне SiC (рис. 3, а). Нейтральный дефект D⁰ (оборванная связь атома кремния с одним электроном на ней) в этом случае располагается по энергии между заряженными дефектами D⁺ и D⁻. Отрицательно заряженный дефект D⁻ с двумя электронами на оборванной связи кремния лежит в области энергий около потолка валентной зоны, тогда как положительно заряженное состояние D⁺ оборванной связи с двумя дырками находится вблизи дна зоны проводимости. При приложении напряжения поперек плоскости границы носители заряда могут туннелировать через включения SiC и SiO₂, захватываясь заряженными ловушками (рис. 3, б). При захвате электрона (дырки) на центр D⁺ (D⁻) происходит переход дефекта D⁺ (D⁻) в состояние D⁰. Увеличение концентрации нейтральных дефектов в результате туннельной релаксации заряда и объясняет релаксацию ВАХ в этой модели.

1. Артемьев А. В., Горелик С. С., Евтодий Б. Н. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1988. Т. 52. С. 1951.

2. Артемьев А. В., Горелик С. С., Евтодий Б. Н. и др. // Препринт ИПТМ и ОМ АН СССР. Черноголовка, 1989. С. 32.

3. Fedotov A. K., Evtodiy B. N., Katz E. A., Ilyashuk Ju. M. // Phys. Stat. Solidi(a). 1990. V. 119. P. 523.

4. Fedotov A., Evtodiy B., Katz E. et al. // Journ. Cryst. Growth. 1990. V. 104. P. 186.

5. Федотов А. К., Евтодий Б. Н., Кац Е. А., Ильяшук Ю. М. // Тез. докл. VII Всесоюз. конференции по физике полупроводников. 23—25 окт. 1990 г. Киев. 1990. Ч. 2. С. 267.

6. Ильяшук Ю. М., Федотов А. К. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1990. № 3. С. 20.

7. Кац Е. А. Зеренная структура и электрическая активность границ зерен в профилированном поликристаллическом кремнии для фотопреобразователей: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. М., 1990.

8. Селезнев В. Н. // Тр. физ. ин-та. им. П. Н. Лебедева. 1987. Т. 184. С. 90.

Поступила в редакцию 26.04.94.

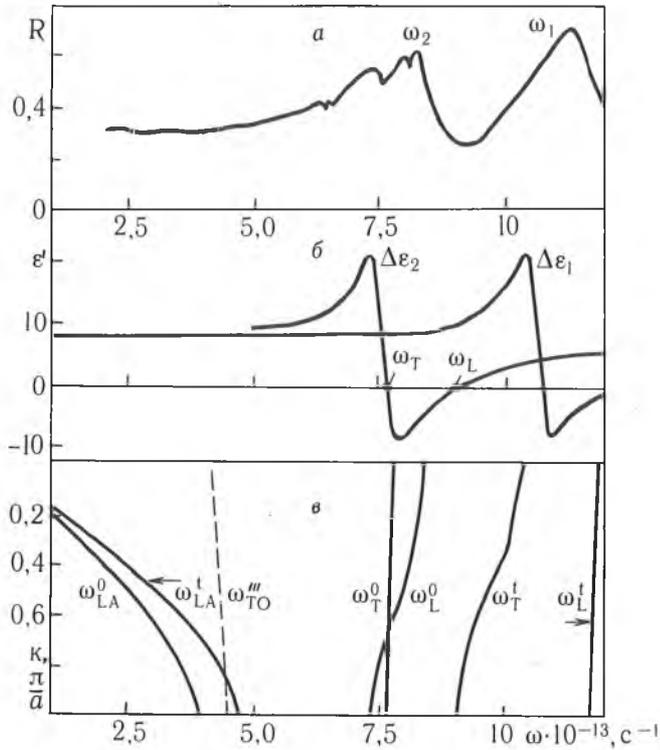
УДК 548.3:543.01

М. И. ДАНИЛЬКЕВИЧ

ЧАСТОТЫ ОПТИЧЕСКИХ ФОНОНОВ В КИСЛОРОДНЫХ ШПИНЕЛЯХ ПО СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИМ И АКУСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

The calculation rule for the ratio of resonance vibrational frequencies of ions in spinels has been proposed. Dielectric spectra of Ni_{0.3}Zn_{0.7}Fe₂O₄ have been determined in the region of lattice resonances and have been used as a basis for the curves of phonon dispersion.

В оптических спектрах кристаллов со структурой шпинели (MgAl₂O₄) в области резонансов решеточных колебаний наблюдается несколько характерных полос. Две наиболее интенсивные ω_1 и ω_2 (рисунок, а), впервые обнаруженные Уолдроном [1] по ИК поглощению в ферритах—шпинелях, до сих пор не имеют однозначной интерпретации. Измеренные нами спектры коэффициента отражения R(ω) Ni_{0.3}Zn_{0.7}Fe₂O₄, дополненные восстановленными из них диэлектрическими функциями $\epsilon'(\omega)$ и $\epsilon''(\omega)$ и данными о скоростях ультразвуковых волн, позволяют отнести ω_1 к резонансу колебаний ионов, связанных в тетраэдрах, а ω_2 — к резонансу колебаний ионов октаэдрической координации.



Спектр коэффициента отражения $R(\omega)$ (а), восстановленные из него спектры составляющей диэлектрической проницаемости ϵ' (б) и дисперсия фононов (в) тетраэдрических (т) и октаэдрических (о) ионов (А — акустические, О — оптические фононы).

Минимальная длина волны, связанная с колебаниями кристаллической решетки, равна удвоенному кратчайшему межатомному расстоянию. При этом ближайшие соседи данного атома смещаются в противофазе. Для значений волнового вектора $|k| > 0$ эти колебания представляют собой упругие волны [2]. Если предположить, что их скорость v равна ультразвуковой, то в кристаллах шпинелей для предельных частот решеточных колебаний получим следующие выражения:

$$\omega_{\Gamma}^{\text{тетра}} = \frac{2\pi v_{\Gamma}}{\lambda_{\text{мин}}^{\text{тетра}}} = \frac{\pi\sqrt{G/\rho}}{(\sqrt{3/8})a}, \quad \omega_{\Gamma}^{\text{окта}} = \frac{2\pi v_{\Gamma}}{\lambda_{\text{мин}}^{\text{окта}}} = \frac{\pi\sqrt{G/\rho}}{a/4} \quad (1)$$

для поперечных (Т) колебаний и

$$\omega_{\text{L}}^{\text{тетра}} = \frac{2\pi v_{\text{L}}}{\lambda_{\text{мин}}^{\text{тетра}}} = \frac{\pi\sqrt{E/\rho}}{(\sqrt{3/8})a}, \quad \omega_{\text{L}}^{\text{окта}} = \frac{2\pi v_{\text{L}}}{\lambda_{\text{мин}}^{\text{окта}}} = \frac{\pi\sqrt{E/\rho}}{a/4} \quad (2)$$

для продольных (L) колебаний. Здесь G и E — упругие модули, a — постоянная решетки, ρ — плотность кристалла.

Для поликристаллической шпинели $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$ значения входящих в (1) и (2) констант, определенные нами экспериментально, а для G заимствованные из работы Гримса [3], составили $G = 14,25 \cdot 10^{10}$ Па, $E = 25,15 \cdot 10^{10}$ Па, $a = 8,398 \cdot 10^{-8}$ см, $\rho = 5,36$ г/см³. Тогда рассчитанные предельные частоты оптических фононов ($k \rightarrow \pi/a$) этой шпинели в последовательности, принятой в (1) и (2), составят

$$8,94 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 7,72 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 11,86 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 10,24 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

Частоты, определенные из максимумов и нулей диэлектрических функций (см. рисунок, б) при $k \rightarrow 0$, равны соответственно

$$10,35 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 7,74 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 11,90 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; 8,42 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

Диэлектрические спектры $\Delta\epsilon'(\omega) + \epsilon_{\infty}$ основных колебательных мод получены совмещением расчетного спектра

$$R(\omega) = |\sqrt{\epsilon^*(\omega) - 1}|^2 \cdot |\sqrt{\epsilon^*(\omega) + 1}|^{-2}$$

со спектром экспериментальным [4]. Для описания низкочастотной полосы ω_2 применялась трехосцилляторная модель ($i=3$). Для дальнейших обсуждений использовано усредненное значение их частоты $8,42 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

Экспериментальные значения характеристических частот обычно находят по минимумам пропускания или соответствующим им максимумам поглощения или отражения. В $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$ максимум высокочастотной полосы $R(\omega)$ лежит при $11,25 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, а низкочастотной — при $8,2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. В одноосцилляторной модели максимум решеточного отражения расположен посередине между ω_T и ω_L [5]. Поэтому полученные по (1) и (2) оценочные значения частот можно считать удовлетворительными и полосу ω_1 отнести к резонансу колебаний ионов, связанных в тетраэдрах, а ω_2 — к резонансу октаэдрически связанных ионов. Такое же отнесение полос ω_1 и ω_2 дается и в [6].

Согласно (1) и (2), резонансные частоты тетраэдрически связанных ионов и резонансные частоты октаэдрически связанных ионов соотносятся как:

$$\omega_0^{\text{тетра}} : \omega_0^{\text{окта}} = 2 : \sqrt{3} \approx 1,16. \quad (3)$$

Сопоставление экспериментальных отношений ω_{01} и ω_{02} с соотношением (3) для ряда шпинелей приведено в таблице.

Шпинель	$\omega_{01} \cdot 10^{-13},$ с^{-1}	$\omega_{02} \cdot 10^{-13},$ с^{-1}	ω_{01}/ω_{02}	$2/\sqrt{3}$	Литературный источник по ω_1, ω_2
MgAl_2O_4	13,565	10,739	1,26	1,16	[7]
ZnAl_2O_4	12,999	10,833	1,20	1,16	[8]
ZnCo_2O_4	12,623	10,965	1,15	1,16	— « —
ZnCr_2O_4	11,963	10,117	1,18	1,16	— « —
CoCo_2O_4	12,660	11,116	1,14	1,16	— « —
ZnFe_2O_4	9,834	8,007	1,23	1,16	наши данные
CoFe_2O_4	10,531	7,687	1,37	1,37**	— « —
$\text{Mn}_{0,97}\text{Zn}_{0,03}\text{Fe}_2\text{O}_4$	11,220	7,586	1,46	1,40**	— « —
$\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$	11,250	8,200	1,37	1,39**	— « —

Примечание. * — монокристалл, ** — вычислено с учетом кислородного параметра $u < 3/8$.

Кроме приведенных в таблице, можно указать около двух десятков других исследованных в инфракрасном диапазоне шпинелей, для которых отношение ω_1/ω_2 совпадает с (3) с разницей не более 5%. В ряду отношений ω_1/ω_2 наблюдается хорошо выраженная тенденция увеличения отношения по мере перехода от слабомагнитных к сильномагнитным шпинелям. Для последних лучшее согласие с экспериментом получается в том случае, если соотношение (3) записать с учетом кислородного параметра u , выражающего статические смещения ионов кислорода от их позиций в идеальной плотной упаковке, и положить $u < 3/8$.

На величину отношения (3) может влиять также и тот факт, что смещения ионов, связанных в октаэдрической координации, происходят не только в направлениях $\langle 100 \rangle$, а ионов тетраэдрической координации — $\langle 110 \rangle$, как это было предположено при вычислениях ω_T и ω_L . При учете смещений в других направлениях, для которых упругие постоянные отличаются [7] от принятых в (1) и (2), диапазон отно-

шений $\omega_0^{\text{тетра}} / \omega_0^{\text{окта}}$ расширится от 1,1 до 1,6 и перекроет все известные экспериментальные данные.

Определив из спектров $\Delta \epsilon'_i(\omega) + \epsilon_\infty$ значения предельных частот $\omega_0(k \rightarrow 0)$, а по ним силовые постоянные C отдельно для тетраэдрических ионов C_A и ионов октаэдрической координации C_B из соотношений

$$\omega_{\text{от}}^{\text{тетра}} = \sqrt{2C_A \left(\frac{1}{M_{\text{КА}}} + \frac{1}{M_{\text{O}^{2-}}} \right)}, \quad \omega_{\text{от}}^{\text{окта}} = \sqrt{2C_B \left(\frac{1}{M_{\text{КВ}}} + \frac{1}{M_{\text{O}^{2-}}} \right)},$$

можно рассчитать дисперсию частот соответствующих оптических и акустических фононов в модели цепочки колеблющихся атомов с двумя атомами в примитивной ячейке

$$\omega_i^2(k) = \frac{C}{M_1 M_2} \left[(M_1 + M_2) \pm \sqrt{(M_1 + M_2)^2 - 2M_1 M_2 (1 - \cos ka)} \right].$$

Результаты расчета приведены на рисунке *в*. Для продольных оптических фононов тетраэдрических ионов и поперечных фононов октаэдрически связанных ионов дисперсия получена интерполяцией между частотами $\omega_0(k=0)$ и $\omega_0(k=\pi/a)$. Проверка правильности полученной картины дисперсии при отсутствии экспериментальных данных может быть сделана на основе теоремы Брута [9]. Она связывает суммы квадратов частот решеточных колебаний при заданном k и сжимаемость κ кристалла. Для значений k на краях зоны Бриллюэна эта теорема или правило сумм запишется следующим образом:

$$\sum_i \omega_{ci}^2(k=0) = \sum_i \omega_{ci}^2(k=\frac{\pi}{a}) = \frac{18R_0}{\kappa} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right). \quad (4)$$

При использовании этого соотношения межионные расстояния R_0 и массы катионов M_1 мы усредняли по тетраэдрически- и октаэдрически связанным ионам. Для $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$

$$\kappa = (C_{12} + 2C_{44})^{-1} = 0,45 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2 \cdot \text{дин}^{-1}.$$

Согласно данным, представленным на рис. 1, *в*,

$$\sum_{i=1}^4 \omega_{oi}^2(k=0) = 379 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-2}, \quad \sum_{i=1}^6 \omega_{oi}^2(k=\frac{\pi}{a}) = 375 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-2},$$

а правая часть (4) равна $396 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-2}$. Небольшое превышение рассчитанной по сжимаемости суммы квадратов частот над их значениями, взятыми из расчетного спектра дисперсии фононов, очевидно, связано с учетом низкочастотных колебательных мод, представляющих обертону основных. Намеченная на рисунке *в* пунктиром частота, дополняющая основные до выполнения правила Брута, практически совпадает с обертоном ω_3 , предсказанным Уолдроном [1]. След этой полосы заметен и на спектре $R(\omega)$.

Доводом в пользу предложенного способа восстановления основных черт фононного спектра шпинели по диэлектрическому может служить то, что наблюдение фононов в шпинели методом неупругого рассеяния нейтронов [10] дает картину, близкую к рисунку *в*.

1. Waldron R. D. // Phys. Rev. 1955. V. 99. P. 1727.
2. С л е т е р Дж. Диэлектрики, металлы, полупроводники. М., 1969.
3. G r i m e s N. W. // Phys. Stat. Sol.(b). 1973. V. 58. K 129.
4. Д а н и л ь к е в и ч М. И. // Тез. докл. Всесоюз. конференции по физике магнит. явлений. Харьков, 1979. С. 222.
5. П у л е А., А т ь е Ж.—П. Колебательные спектры и симметрия кристаллов. М., 1973.
6. J o s y u l u O. S., S o b h a n a r d i J. // Phys. stat. sol.(a). 1981. V. 65. P.479.
7. G r i m e s N. W. // Spectrochim. acta. 1972. V. 28. № 11. P.2217.
8. P r e u d h o m m e J., T a r t e P. // Ibid. 1971. V. 27A. № 9. P. 1817.
9. B r o u t R. // Phys. Rev. 1959. V. 113. № 1. P. 43.
10. T h o m p s o n P., G r i m e s N. W. // Sol. stat. com. 1978. V. 25. № 8. P.609.

Поступила в редакцию 11.04.94

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ДАТЧИКОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ЭФФЕКТЕ ХОЛЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ЗАРЯДОВ

A semiempirical calculation method for the characteristics of Hall-effect displacement transducers using the surface density distribution of fictions magnetic charges is proposed.

Датчики механических перемещений на эффекте Холла, как правило, содержат две независимые части, которые могут перемещаться относительно друг друга [1], например неподвижный элемент Холла (ЭХ) и подвижная система, состоящая из постоянных магнитов и магнитно-мягкой арматуры. Численный расчет характеристик трехмерных магнитных систем достаточно сложен и требует применения компьютеров со значительным объемом оперативной памяти. Кроме того, в алгоритм задачи обычно закладываются идеализированные параметры магнитов и ферромагнитной арматуры, которые существенно отличаются от реальных. Сборка магнитных систем осуществляется с рядом геометрических допусков, которые, естественно, не могут быть введены в алгоритм решения, и незначительное колебание размеров приводит к существенному изменению распределения магнитного поля в узких зазорах магнитных частей. В такой ситуации численный расчет из первых принципов (уравнения Масквелла) не дает хорошего согласия с экспериментом. Использование эмпирического метода в разработке таких датчиков достаточно трудоемко и не воссоздает полной физической картины распределения индукции магнитного поля в зависимости от геометрических параметров магнитной системы и свойств материалов.

В связи с этим нами предлагается полуэмпирический способ расчета характеристик датчиков, функционирующих на эффекте Холла. Суть его заключается в том, что в собранной магнитной системе экспериментально измеряется распределение индукции магнитного поля вдоль каждой поверхности, которой ставится в соответствие поверхностная плотность фиктивных магнитных зарядов $\sigma(x, y, z)$. Поверхности магнитов и ферромагнитной арматуры разбиваются на небольшие прямоугольные участки, каждому из которых приписывается постоянная плотность фиктивных магнитных зарядов σ_i , являющаяся средней для данного i -го участка. В произвольной точке рабочего зазора прямоугольной системы координат OXYZ магнитная индукция определяется по принципу суперпозиции суммированием компонент индукции B_{xi} , B_{yi} , B_{zi} в данной точке i -го прямоугольного элемента ферромагнитной поверхности с плотностью зарядов σ_i :

$$\begin{aligned} B_x &= \sum_i B_{xi}, \\ B_y &= \sum_i B_{yi}, \\ B_z &= \sum_i B_{zi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Выходной сигнал с датчика определяется как $U = \gamma V_n(X, Y, Z)$, где γ — чувствительность элемента Холла, V_n — перпендикулярная составляющая индукции магнитного поля в точке расположения ЭХ.

Следует отметить некоторые особенности изложенного подхода проектирования характеристик устройств. Анализ компонент B_{xi} , B_{yi} , B_{zi} позволяет выделить участки (т. е. значения i), которые вносят основной вклад в формирование структуры магнитного поля в данной точке, что предоставляет методологическую возможность дальнейшего варьирования геометрии именно этих участков с целью улучшения характеристик устройства. В свою очередь возможность расчета компонент магнитного поля B_x , B_y , B_z в точке пространства позволяет не только представить общую физическую картину функционирования датчика, но и выбирать соответствующее расположение пластины Холла в пространстве и ее

траекторию, например для увеличения линейности выходного сигнала в датчиках линейных перемещений либо чувствительности к перемещению за счет выбора максимального градиента магнитного поля. Заметим, что параметры магнитов и ферромагнитной арматуры системы прямым образом в расчетах не фигурируют. Они входят опосредованно, т. е. через σ . Однако это не мешает анализировать их вклад в характеристики устройств, если проводить определение σ_i при варьировании материалов, например магнитов, и оставлять неизменной геометрию магнитной системы. В этом случае необходимы эксперименты по определению σ_i . Отметим, что $\sigma(x, y, z) = -U/(\mu_0 \cdot \gamma)$, где μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума, а U — величина сигнала с элемента Холла в точке x, y, z , когда пластина Холла параллельна исследуемой ферромагнитной поверхности и прижата к ней. Размеры элемента Холла должны быть минимально возможными (в нашем случае чувствительная область не превышала $50 \times 50 \times 7$ мкм).

Процедура определения σ_i для i -го элементарного прямоугольника может быть различной в зависимости от способа усреднения σ по поверхности i -го элемента. Однако она обычно не представляет затруднений вследствие ее приближенно-линейной зависимости от координат в пределах размеров элементарного i -го элемента. При необходимости можно воспользоваться интегральными методиками усреднения или уменьшить размеры элементов разбиения поверхности.

После определения σ_i необходимо задать пространственную ориентацию каждого элемента. Для этого следует ввести локальную систему прямоугольных координат $O_i X_i Y_i$ и поместить ее в геометрический центр элемента под номером i . Пусть ось $O_i X_i$ совпадает с вектором внешней нормали i -го элемента. Если найти $t_{11}^{(i)}, t_{21}^{(i)}, t_{31}^{(i)}$, направляющие косинусы оси $O_i X_i$ относительно осей OX, OY, OZ ; $t_{12}^{(i)}, t_{22}^{(i)}, t_{32}^{(i)}$ — направляющие косинусы оси $O_i Y_i$; $t_{13}^{(i)}, t_{23}^{(i)}, t_{33}^{(i)}$ — направляющие косинусы оси $O_i Z_i$ относительно осей OX, OY, OZ , то компоненты индукции $B_{x_i}, B_{y_i}, B_{z_i}$ легко записать, если использовать формулы преобразования координат [2]:

$$\begin{aligned} B_{x_i}/\mu_0 &= t_{11}^{(i)} H_{x_i}^{(i)} + t_{12}^{(i)} H_{y_i}^{(i)} + t_{13}^{(i)} H_{z_i}^{(i)}, \\ B_{y_i}/\mu_0 &= t_{21}^{(i)} H_{x_i}^{(i)} + t_{22}^{(i)} H_{y_i}^{(i)} + t_{23}^{(i)} H_{z_i}^{(i)}, \\ B_{z_i}/\mu_0 &= t_{31}^{(i)} H_{x_i}^{(i)} + t_{32}^{(i)} H_{y_i}^{(i)} + t_{33}^{(i)} H_{z_i}^{(i)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $H_{x_i}^{(i)}, H_{y_i}^{(i)}, H_{z_i}^{(i)}$ — составляющие векторы напряженности магнитного поля в i -ой системе координат [3], с учетом замены σ на σ_i . Используя формулы (1) и (2), а также выражения, приведенные в [3], можно вычислить компоненты вектора индукции магнитного поля в любой точке, а следовательно, и характеристики устройства.

На рис. 1 представлены схемы исследованных магнитных систем двух типов, применяемых в датчиках перемещений на эффекте Холла [1, 4]. Каждая состоит из двух бариевых магнитов, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов, намагниченности которых антипараллельны. Магниты армированы пластинами из магнитно-мягкого материала (железа). При уменьшении зазора t между магнитами и магнитно-мягкой пластины до нуля магнитная система второго типа переходит в первый тип. Для расчетов характеристик устройства поверхности пластин и магнитов разбивались не менее чем на 40 элементарных участков прямоугольной формы (см. рис. 1). Внешняя нормаль к поверхности \vec{n}_i совпадала с осью $O_i X_i$ локальной системы координат $O_i X_i Y_i$, а оси $O_i Y_i$ и $O_i Z_i$ совпадали с осями симметрии i -го элемента.

Для магнитов, изготовленных из редкоземельных материалов типа $S_m Co_5$, а также бариевых магнитов коэрцитивная сила по намагниченности в несколько раз больше коэрцитивной силы по индукции. Это позволяет с достаточной степенью точности допустить постоянство намагниченности M , т. е. $M=0$ во всех точках внутри магнита [5, 6]. В то же время из условия $\nabla M = -\rho/\mu_0$, где ρ — объемная плотность фиктивных магнитных зарядов, следует, что магнитные заряды образуются только на концах магнитов, примыкающих к арматуре [5]. Сле-

довательно, по распределению поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов, приведенных на рис. 1, однозначно можно вычислить вклад магнита в напряженность магнитного поля в любой точке

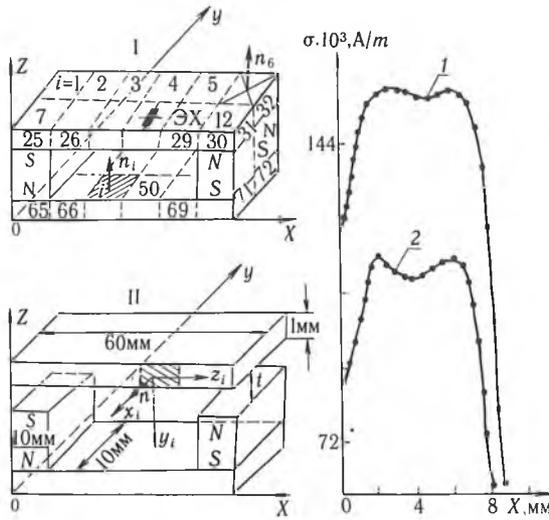


Рис. 1. Магнитные системы датчиков перемещений на эффекте Холла двух типов I, II и распределение для системы II поверхностной плотности фиктивного магнитного заряда на магните по координате x при различных зазорах t между магнитом и верхней пластиной:
1 - $t=2$ мм, 2 - $t=9,5$ мм

воздушного пространства, так как $\rho=0$. В более общем случае, для магнитов, изготовленных из других материалов, требуется самосогласованное решение, подчиняющееся условию нейтральности зарядов $\int \rho dv + \int \sigma ds = 0$, что, конечно, усложняет применение данного метода.

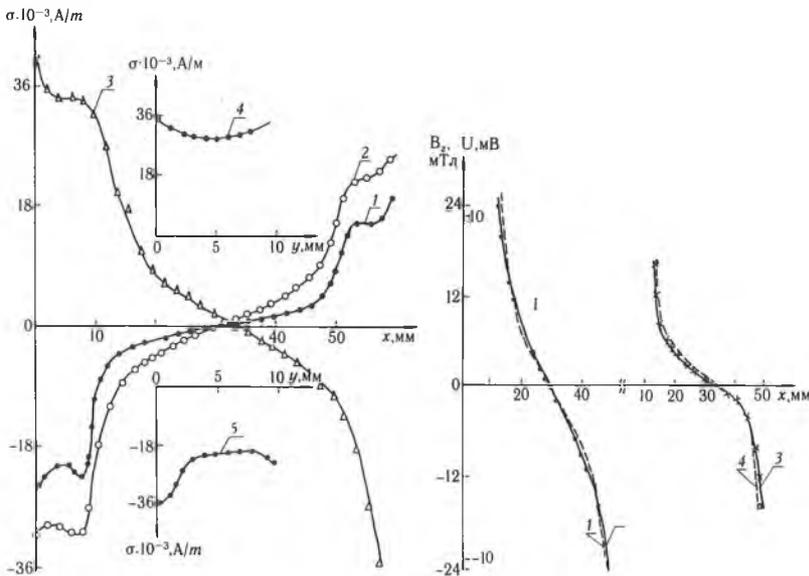


Рис. 2. Распределение поверхностной плотности фиктивного магнитного заряда по координатам x и y для верхней пластины магнитной системы типа I: 1 - $i=7,12$; 2 - $i=25,30$; 3 - $i=65,70$; 4 - $i=31,32$; 5 - $i=71,72$

Рис. 3. Расчетные и экспериментальные зависимости выходного сигнала U , составляющей индукции B_2 от координаты перемещения x элемента Холла в воздушном зазоре магнитных систем двух типов: 1, 4 - расчет; 2, 3 - эксперимент $y=5$ мм и $z=3,75$ мм.

На рис. 2 представлено распределение поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов от координат x , y для магнитной системы типа I. Явно прослеживается небольшая асимметрия в распределении σ относительно симметрии магнитной системы, что обусловлено технологическими параметрами магнитов и точностью сборки магнитной системы. Даже зазоры в несколько микрон, перекосы в месте контакта магнит — магнитная арматура способны изменить распределение поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов, а следовательно, исказить индукцию в рабочем зазоре датчика. Определение σ и V_x , V_y , V_z позволяет обосновывать критерии технологических допусков системы, размещения арматуры совместно с магнитами и требования к последним.

На рис. 3 представлены расчетные и экспериментальные зависимости сигнала с элемента Холла и составляющей индукции V_z от координаты x . Различие между расчетами и экспериментальными данными не превышает 5—7%. Таким образом, предложенный способ расчета характеристик датчиков целесообразно применять как при оптимизации параметров магнитных систем, так и при разработке конструкторской документации и технологических допусков при сборке датчика.

1. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Ярмолевич В. А. Устройства автоматики и робототехники на эффекте Холла: Учеб. пособие. Мн., 1991.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974.

3. Прошкин В. В. // Приборостроение. 1990. № 9. С. 69.

4. Прокошин В. И., Васильев И. И., Шепелевич В. Г., Ярмолевич В. А. // Приборы и системы управления. 1990. № 8. С. 31.

5. Коген-Далин В. В., Комаров Е. В. Расчет и испытание систем с постоянными магнитами. М., 1977.

6. Прокошин В. И., Ярмолевич В. А., Рабкевич Т. М., Андалал Л. А. // Вести АН БССР. 1990. Сер. физ.-мат. наук. № 3. С. 98.

Поступила в редакцию 21.03.94

УДК 535.37

Д. С. УМРЕЙКО, М. Ю. ПЕРШИНА,
В. В. СЫТЬКО, Н. А. АЛЕШКЕВИЧ

СПЕКТРАЛЬНО-ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ СВОЙСТВА И ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ В ФОСФАТНЫХ СТЕКЛАХ С ВЫСОКОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ИОНОВ WO_2^{2+} И Tb^{3+}

The luminescence and kinetic characteristics of activated Tb^{3+} tungsten diophosphate glasses have been studied. It has been found the presence of electronic excitation energy transfer in a system $WO_2^{2+} \rightarrow Tb^{3+}$, which provides a high level of luminescence yield. Dissipation of Tb^{3+} ions excitation in turn occurs by resonance and diffusion mechanisms. Micro- and macroparameters of $Tb-Tm$ excitation have been determined.

Активированные трехвалентными ионами редкоземельных элементов (TR^{3+}) материалы представляют интерес в плане создания оптических трансформаторов, люминесцентных экранов, лазерных сред и т. д. Однако низкие значения коэффициентов поглощения в УФ области спектра у большинства из них приводят к необходимости использования сенсibilизированных систем, в частности — соактивированных TR^{3+} и ионами уранила UO_2^{2+} [1—4]. Для них наблюдается люминесценция TR^{3+} с квантовым выходом, близким к единице, который реализуется за счет эффективного переноса энергии возбуждения от уранила к TR^{3+} . Одновременно обеспечиваются и высокие значения коэффициентов поглощения в области более $25\ 000\text{см}^{-1}$. В частности было показано [2—4], что в высококонцентрированных фосфатных материалах перенос энергии по каналу $\cdot UO_2^{2+} + TR^{3+} \rightarrow UO_2^{2+} + \cdot TR^{3+}$ характеризуется квантовой эффективностью порядка 0,8—0,9 и происходит по обменному механизму. В [5] исследована серия активированных Eu^{3+} вольфрамилфосфатных стекол с соотношением групп вольфрамила WO_2^{2+} к активатору в диапазоне от 0,5 до 2. Установлено наличие переноса энергии электронного возбуждения от WO_2^{2+} к Eu^{3+} с неэкспоненциальным затуханием люминесценции акцептора.

Настоящая работа посвящена исследованию люминесцентных свойств и процессов диссипации энергии электронного возбуждения в стеклах типа ($P_2O_5-K_2O-WO_3-Tb_2O_3$). Стекла были синтезированы по методике [4] при соотношении ионов WO_2^{2+}/Tb^{3+} от 1:0,1 до 1:1,5. Спектры люминесценции и поглощения в области $14\ 000-100\ 000\text{ см}^{-1}$ регистрировались на спектрофотометрах ДФС-12, Spexord M 40 и ВМР-2. Кинетика затухания люминесценции исследовалась путем непосредственного наблюдения интенсивности свечения образцов на экране осциллографа с регистрацией сигнала фотоприемником ФЭУ-84 А (фронт затухания импульса анодного тока 18 нс на уровне 0,1). Возбуждение осуществлялось излучением азотного лазера с длительностью импульса 9 нс на уровне 0,1.

Типичным примером вольфрамилового соединения может служить кристалл цезий-вольфрамирлхлорида $Cs_2WO_2Cl_4$, в котором, в отличие от ближайшего уранилового аналога $Cs_2UO_2Cl_4$ с линейной группой $O=U=O$ [6], вольфрамовые атомы кислорода находятся в цис-положениях, а сами вольфрамовые квазиоктаэдр хаотически ориентированы в решетке кристалла [7]. Следует заметить, что для вольфрамила характерна нелинейность связей $O=W=O$ [8]. В кристаллах $Cs_2WO_2Cl_4$ при низких температурах наблюдается широкополосная люминесценция с максимумом около 16600 см^{-1} , характеризующаяся стоксовым сдвигом порядка 15000 см^{-1} и эффективным термотушением. Стеклообразные системы типа $K_2O-WO_3-P_2O_5$ [5] характеризуются люминесценцией вольфрамила, наблюдаемой при комнатных температурах с максимумом около 19800 см^{-1} при стоксовом сдвиге до 12500 см^{-1} . Наличие вольфрамиловых связей в деформированных октаэдрах в исследуемых стеклах подтверждается данными ИК спектроскопии и независимыми структурными исследованиями [9].

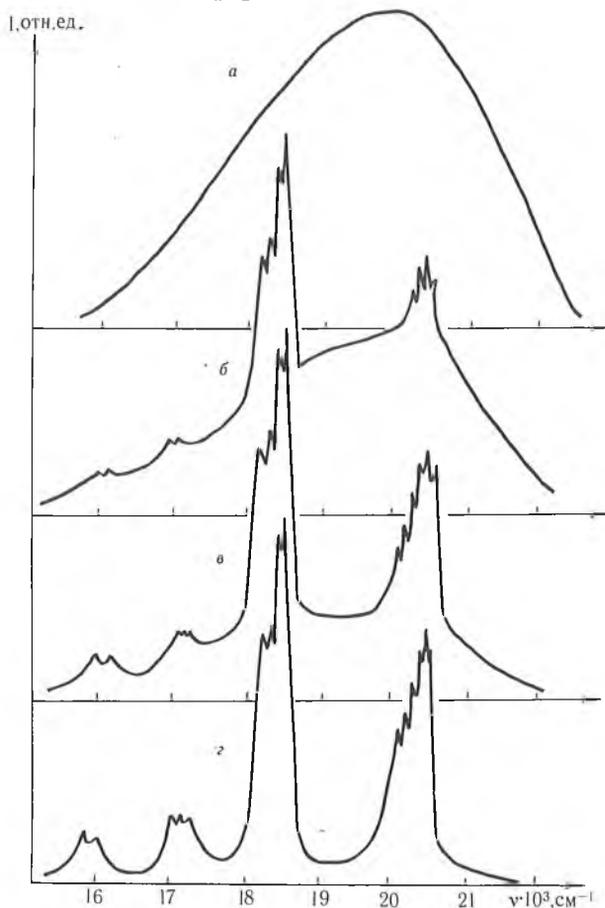


Рис. 1. Спектры люминесценции вольфрамирлфосфатных стекол соактивированных Tb при соотношении активных ионов $[WO_2^{2+}]:[Tb^{3+}]$:
 а - 1:0; б - 1:0,25; в - 1:0,5; г - 1:1

Для исследуемых калий — тербий — вольфрамилфосфатных стекол также свойственна широкополосная люминесценция вольфрамила с максимумом около 19900 см^{-1} , интенсивность которой изменяется в зависимости от соотношения в образце ионов WO_2^{2+} и Tb^{3+} (рис. 1). Увеличение концентрации Tb^{3+} в стеклах ведет к подавлению люминесценции WO_2^{2+} и росту интенсивности люминесценции тербия. При соотношении ионов $\text{WO}_2^{2+}/\text{Tb}^{3+} = 1:1$ и более люминесценция вольфрамила практически подавлена. Наблюдается только люминесценция Tb^{3+} , причем ее интенсивность более чем на порядок выше, чем у соответствующих калий — тербий — фосфатных стекол.

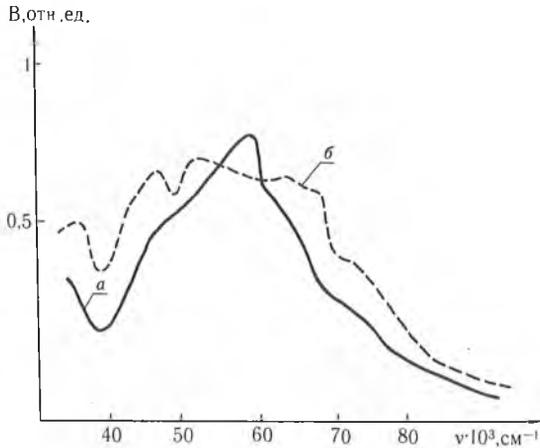


Рис. 2. Спектры возбуждения люминесценции: *a* — вольфрамилфосфатных стекол; *b* — стекло, активированных Tb^{3+} при соотношении активных ионов (1:1)

На рис. 2 приведены спектры возбуждения люминесценции ионов WO_2^{2+} и Tb^{3+} в исследуемых стеклах. Подобие данных спектров свидетельствует о наличии безызлучательного переноса энергии электронного возбуждения от WO_2^{2+} к Tb^{3+} , наблюдавшегося ранее [5] в калиевых вольфрамилфосфатных стеклах, активированных Eu^{3+} .

Штарковская структура люминесцентных переходов Tb^{3+} в исследуемых стеклах обусловлена переходами с $^5\text{D}_4$ уровня на уровни $^7\text{F}_j$ мультиплета (см. таблицу). Доминирующими являются переходы $^5\text{D}_4 - ^7\text{F}_5$, $^7\text{F}_6$. Максимум интенсивности достигается в линии $^5\text{D}_4 - ^7\text{F}_5$, расщепляющейся на 4 компоненты. Характер расщепления и спектральное положение линий люминесценции Tb^{3+} практически не зависит от соотношения компонент стекла.

С целью определения возможных механизмов диссипации энергии электронного возбуждения в системе $\text{WO}_2^{2+} - \text{Tb}^{3+}$ нами была исследована кинетика затухания люминесценции донор (WO_2^{2+})-акцепторной (Tb^{3+}) пары в рассматриваемых стеклах. Оказалось, что в неактивированных стеклах затухание свечения WO_2^{2+} происходит по достаточно сложному закону. Здесь удается выделить только первую экспоненту с константой затухания $\tau = 114 \text{ мкс}$. В целом же процесс высвечивания не может быть интерпретирован в рамках индуктивно-резонансных взаимодействий либо процессов с участием фононов. В активированных стеклах наличие переноса $\text{WO}_2^{2+} \rightarrow \text{Tb}^{3+}$ приводит, аналогично [5], к увеличению скорости диссипации и возбуждения WO_2^{2+} при сохранении общего вида ее временной зависимости. В то время как в системе $\text{UO}_2^{2+} - \text{TR}^{3+}$ кривая разгорания люминесценции TR^{3+} зеркально симметрична кривой затухания свечения UO_2^{2+} , для исследуемых стекол разгорание люминесценции Tb^{3+} происходит за время, меньшее временного разрешения используемой аппаратуры. Таким образом, перенос энергии $\text{WO}_2^{2+} \rightarrow \text{Tb}^{3+}$, очевидно, происходит по верхним возбужденным состояниям. К сожалению,

высокая степень перекрытия спектров люминесценции WO_2^{2+} и Tb^{3+} в данных стеклах не позволяет провести полные количественные измерения концентрационной зависимости кинетики люминесценции WO_2^{2+} . Тем не менее полученные данные дают основание полагать, что она аналогична наблюдаемой для активированных Eu^{3+} калий — вольфрамилфосфатных стекол [5].

Спектральное положение и относительные интенсивности люминесцентных переходов Tb^{3+} в калиевых вольфрамилфосфатных стеклах

λ , нм	ν , см^{-1}	Переход	I, отн. ед
487,9	20496	—	63
490,6	20383	—	68
491,4	20305	$^5\text{D}_4-^7\text{F}_6$	64
493,5	20263	—	56
495,8	20169	—	48
497,8	20088	—	42
542,1	18450	—	100
543,2	18416	$^5\text{D}_4-^7\text{F}_5$	96
546,6	18308	—	73
547,9	18252	—	76
581,9	17185	$^5\text{D}_4-^7\text{F}_4$	20
585,0	17094	—	19
587,5	17021	—	18
615—630	16260— 15886	$^5\text{D}_4-^7\text{F}_3$	15

Сложный неэкспоненциальный характер кривых затухания люминесценции ионов Tb^{3+} , представленных на рис. 3, может быть описан в рамках подхода, принятого в [10]. При этом следует предположить, что должна существовать миграция по тербиевым активным ионам. Таким образом, в исследуемых стеклах часть из активных ионов Tb^{3+} должна выступать в качестве «вторичных» доноров.

Проведенный в [10] анализ процессов миграции энергии по активным центрам показывает его сильную зависимость от кристаллографических свойств основы и температуры, обусловленную значениями интегралов перекрытия взаимодействующих орбиталей. В рассматриваемом (см. рис. 1) случае особенности электронного строения активных ионов (при разупорядоченном характере матрицы) позволяют использовать «статистический вариант» описания кинетики преобразования энергии электронного возбуждения в ансамбле взаимодействующих частиц. При этом кинетика дезактивации возбужденных состояний донора претерпевает три стадии: упорядоченную (1), неупорядоченную (2) и диффузионную (3). Они аппроксимируются соответственно функциями вида:

$$N/N_0 = \exp(-W_m t), \quad t < t_1, \quad (1)$$

$$N/N_0 = \exp[-(W_N t)^{3/5}], \quad t_1 < t < t_2, \quad (2)$$

$$N/N_0 = (W_g t)^{-3/2}, \quad t > t_2. \quad (3)$$

Представив зависимость N/N_0 в спрямляющих координатах ($\ln[N/N_0]$, t для стадии (1), $\ln[N/N_0]$, $t^{3/5}$ для (2) и $[N/N_0]$, $t^{-3/2}$ для (3)), можно определить макропараметры, описывающие процессы миграции энергии возбуждения. Граничные времена t_1 и t_2 определяются по зависимостям $\lg[-\lg(N/N_0)]$, $\lg t$, и $\lg(N/N_0)$, $\lg t$ (см. рис. 3), а также по формуле $t_2 = 9W_N^{-1}$. Полученные результаты показывают, что в рассматриваемом случае распад возбужденных состояний Tb^{3+} реализуется через все указанные стадии.

Из рис. 3 видно, что на начальной стадии $t_1 < 45$ мкс процесс описывается прямой, тангенс угла наклона которой порядка 1. Скорость миграции энергии на упорядоченной стадии составляет $2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Вторая стадия процесса наблюдается в диапазоне 45—150 мкс и описывается прямой с $\text{tg } \varphi = 0,5$, что соответствует мультипольности взаимодействия $S = 6$ и характеризуется скоростью переноса $W_N = 5,6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Диффузи-

онная миграция наблюдается при временах более 150 мкс после снятия возбуждения и происходит со скоростью около 890 с^{-1} .

Установленный диполь-дипольный характер взаимодействия позволяет оценить микропараметр $C_{dd}(\text{Tb}-\text{Tb})$ и минимальное расстояние между взаимодействующими ионами $R_m(\text{Tb}-\text{Tb})$:

$$W_N^{1/2} = \gamma_N = 4 / 3\pi\Gamma (1 - 3/S) 2\chi NC_{dd}, \quad (4)$$

$$t_1 = R_m^3 / 2C_{dd} = t_0 / 2.$$

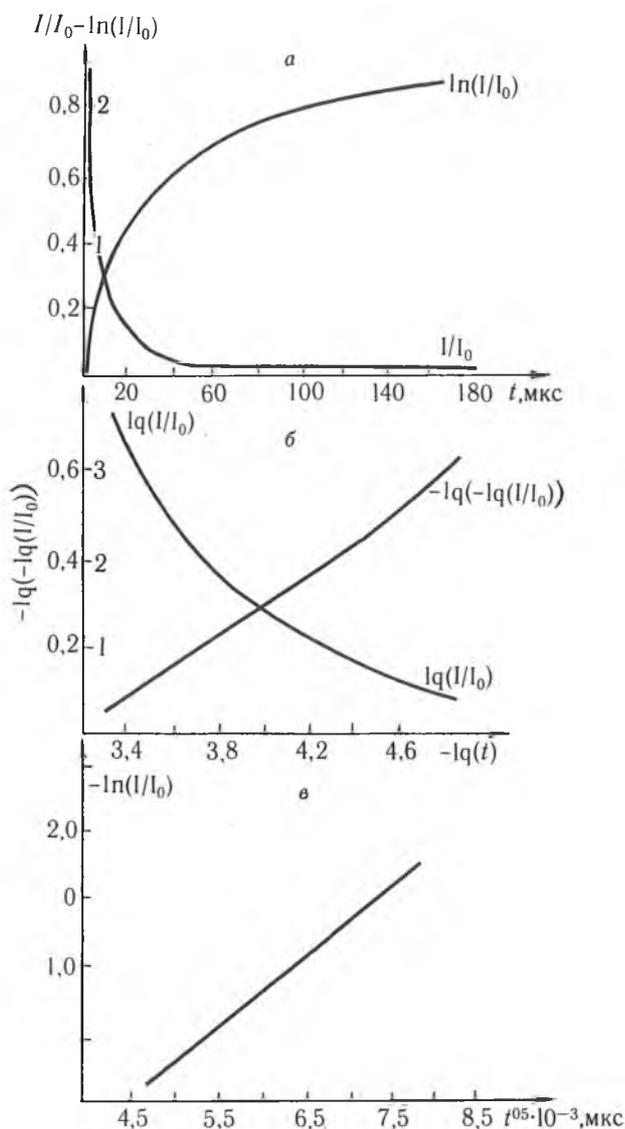


Рис. 3. Кривые затухания люминесценции Tb^{3+} в вольфрамил-фосфатных стеклах, построенные в различных осях координат: а - $[I/I_0, t]$, $[-\ln(I/I_0), t]$; б - $[\lg(I/I_0) - \lg(t)]$, $[-\lg(-\lg(I/I_0)) - \lg(t)]$; в - $[-\ln(I/I_0), t^{0.5}]$.

Для оптимальной, с точки зрения эффективности люминесценции, концентрации Tb^{3+} в стекле $N = 1,02 \cdot 10^{21}$ ион/см³, $C_{dd} = 2,45 \cdot 10^{-38} \text{ с}^{-1} \text{ см}^6$, $R_m = 1,14 \text{ нм}$, т. е. при высокой концентрации ионов Tb^{3+} в стекле,

взаимодействие между ними достаточно слабое. Это может быть обусловлено структурными особенностями стекла, где ионы «первичного» донора WO_2^{2+} находятся между «первичными» акцепторами Tb^{3+} , препятствуя миграции энергии между ними и обеспечивая при этом более 50 % дезактивации энергии возбуждения Tb^{3+} на упорядоченной стадии процесса.

Таким образом, в активированных Tb^{3+} калиевых вольфрамилфосфатных стеклах имеет место перенос энергии электронного возбуждения от WO_2^{2+} к Tb^{3+} с последующей миграцией по ионам Tb^{3+} . Концентрационное тушение люминесценции с уровня 5D_4 тербия осуществляется в рамках диполь-дипольных взаимодействий на минимальных расстояниях около 1 нм при концентрациях $1 \cdot 10^{21}$ ион/см³. Исследованные стекла могут служить в качестве люминесцентных преобразователей УФ и ВУФ излучения в излучение видимого диапазона.

1. Re is f e l d R., J o r g e n s e n C. K. Lasers and Excited States of Rare Earths. Berlin, 1977.

2. С ы т ь к о В. В., К р а с и л о в Ю. И., А л е ш к е в и ч Н. И. и др. // Оптика и спектроскопия. 1985. № 59.

3. С ы т ь к о В. В., А л е ш к е в и ч Н. И., А н и с о в а Л. А. и др. // Журн. прикл. спектроскопии. 1989. № 51.

4. О н и ж е // Физика и химия стекла. 1991. № 17.

5. А л е ш к е в и ч Н. И., А н и с о в а Л. А., П е р ш и н а М. Ю. и др. // Журн. прикл. спектроскопии. 1989. № 50.

6. В о л о д ь к о Л. В., К о м я к А. И., У м р е й к о Д. С. Ураниловые соединения. Мн., 1981.

7. B l a s s e G., D i r k s e n G. J., B r i x n e r L. H. // Mat. Res. Bull. 1985. № 20.

8. Х а р и т о н о в Ю. Я., Б у с л а е в Ю. А. // Изв. АН СССР. Сер. хим. 1964.

9. S t u d e r F., L e b a i l A., R a v e a u D., S o l J. // St. Chem. 1986. № 63.

10. А л и м о в О. К., А ш у р о в М. Х., Б а с и е в Т. Т. и др. // Тр. ИОФ АН СССР. 1987. № 9.

Поступила в редакцию 16.03.94.

УДК 535.35

Н. С. ОНИЩЕНКО

НЕМАРКОВСКАЯ МНОГОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЫЖИГАНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОВАЛОВ: ПРИЛОЖЕНИЕ К НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫМ КРИСТАЛЛАМ РУБИНА

Stochastic theory of time-resolved hole burning in low-temperature ion-doped crystals is developed using the multiple stochastic jump processes to model the diphasing frequency fluctuations.

Нестационарное выжигание спектральных провалов (НВСП) в неоднородно уширенных спектрах является одним из важных направлений нестационарной когерентной спектроскопии.

Эксперименты по НВСП в низкотемпературных ионно-легированных кристаллах с высоким временным разрешением [1, 2] продемонстрировали многовременную динамику ядер решетки, спиновые перевороты которых оказывают дефазирующее воздействие на примесные ионы. Необходимо отметить, что в слабелегированных низкотемпературных примесных кристаллах причиной флуктуаций U^i частот переходов примесных ионов являются взаимные перевороты спинов ядер решетки [2], связанных с примесью супер-сверхтонким взаимодействием (ССТВ). При этом примесь, активно взаимодействуя со спинами ближайших к ней ядер решетки, существенно «отстраивает» собственные частоты их переходов (во внешнем постоянном магнитном поле) от частот переходов тех ядер, которые удалены от примесного иона. Вследствие этого резонансный обмен возбуждением между спинами ядер решетки из этих двух групп оказывается затрудненным и соответственно вокруг примесного иона образуется оболочка из «замороженных» ядер решетки («frozen core» [3]), перевороты спинов которых происходят сравнительно редко. В результате ССТВ «замороженных» ядер с примесным ионом его переходы оказываются квазистатически (гетерогенно [2]) уширенными. Перевороты спинов в «замороженной» оболочке обуславливают медлен-

ные флуктуации частот в пределах полосы квазистатического уширения, называемые часто спектральной диффузией. Наоборот, сравнительно частые взаимные перевороты спинов ядер решетки, расположенных в объеме кристалла, приводят к существенно более быстрой модуляции частот переходов примесных ионов и к их однородному уширению.

В эксперименте по НВСП [2] в рубине Сабо и Каарли использовали следующую последовательность лазерных импульсов: накачка — задержка — зондирующий импульс (длительность $T = 50$ мкс) для выжигания провала в линии R_1 и считывания его формы. При короткой задержке ($\tau_d = 10$ мкс) они получили узкий (однородный) провал с полушириной на полувывоте Γ в несколько десятков кГц. В этом случае зависимость Γ от мощности накачки не укладывалась в рамки предсказаний оптических блоховских уравнений, что указывало на влияние лазерного излучения на процесс дефазировки (немарковость релаксации [4]). Кроме того, варьируя время задержки τ_d , экспериментаторы изучали уширение провала с увеличением τ_d (вследствие медленной спектральной диффузии) в пределах линии R_1 иона Cr^{3+} , однородно уширенной ССТВ $Cr-Al$ и оценили время спектральной диффузии $T_{diff} = 300$ мкс.

Учитывая частые перевороты спинов ядер решетки и гораздо более резкие перевороты спинов «frozen core», мы в данной работе моделируем дефазирющие флуктуации U^t суммой двух независимых скачкообразных марковских процессов $U^t = U_1^t + U_2^t$ с различными частотами скачков ν_1, ν_2 ($\nu_1 \gg \nu_2$) и дисперсиями σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \ll \sigma_2$). Для процесса U_1^t используется случайная телеграфная модель, а для второго процесса — модель Кубо-Андерсона с лоренцевским распределением возможных значений U_2^t . Форма провала, наблюдаемая как спектр поглощения зондирующего излучения в момент времени t , определяется по формуле [5]:

$$W^t(\Delta) = \frac{1}{V} \int_0^V dV \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t d\varepsilon \int_{T+\tau_d}^t dt e^{-i(\varepsilon-\Delta)(t-\tau)} \langle R_0^T(\varepsilon + U^t, V) e^{-i \int_{\tau}^t d\varepsilon \theta} \rangle \right\}, \quad (1)$$

где $\Delta = \omega_1 - \omega_0$, ω_0 и ω_1 — частоты накачки и зондирующего излучения; $\varepsilon = \omega_{ab} - \omega_0$ — расстройка накачки; V — частота Раби накачки; R_0^T — разность заселенностей в конце импульса накачки. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по реализациям случайного процесса U^t , а интегрирование по ε — усреднение по неоднородному распределению частот переходов ω_{ab} примесных ионов, по V — по гауссовскому профилю пучка накачки с максимильным значением частоты Раби V на оси пучка.

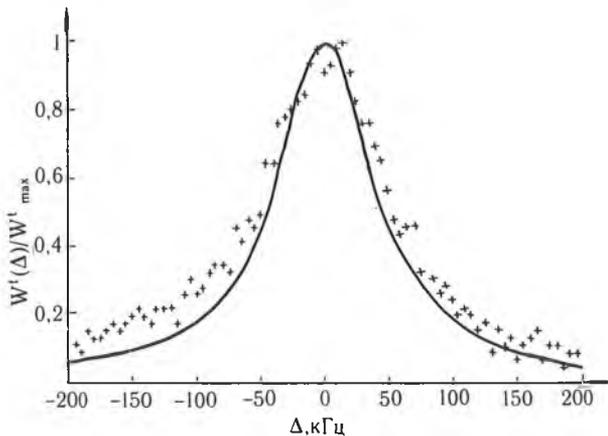


Рис. 1. Нормированная форма узкого провала $W^t(\Delta)/W_{max}^t$ при осевой частоте Раби импульса накачки $V = 70$ кГц. Параметры модели $\nu_1 = 21,2$ кГц и $\sigma_1^2/\nu_1^2 = 0,5$. Длительность импульса накачки $T = 50$ мкс, время задержки $\tau_d = 10$ мкс, время наблюдения $t = 85$ мкс. Крестиками изображены экспериментальные значения из [2]

Величина R^T_0 находится путем поэтапного решения обобщенных квантово-кинетических уравнений для матрицы плотности [5] на стадиях накачки, задержки и зондирующего излучения. При кратковременной задержке $\tau_d \ll \nu^{-1}_2$ форма провала $W^i(\Delta)$ определяется только процессом U^i_1 . При $V = 70$ кГц вычисленный спектр $W^i(\Delta)$ показан на рис. 1. Удовлетворительное согласование с экспериментальными данными достигалось при допущении, что флуктуации U^i_1 являются довольно медленными ($\sigma^2_1/\nu^2_1 = 0,5$). Величина $\nu_1/2 = 10,6$ кГц взята из экспериментального значения затухания сигнала фотонного эха $T_{\text{echo}} = 15$ мкс ($\nu/2 = (2\pi T_{\text{echo}})^{-1}$), а соотношение $\sigma^2_1/\nu^2_1 = 0,5$ обеспечивало наилучшую аппроксимацию при предельно малой накачке для экспериментальной полуширины провала. Промежуточные вычисления показали, что нутационная структура в форме спектра провала, предсказанная в [6], сглаживается вследствие интегрирования по ϵ и V . Из рис. 2 видно, что теория также хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью полуширины Γ узкого провала от частоты Раби V накачки.

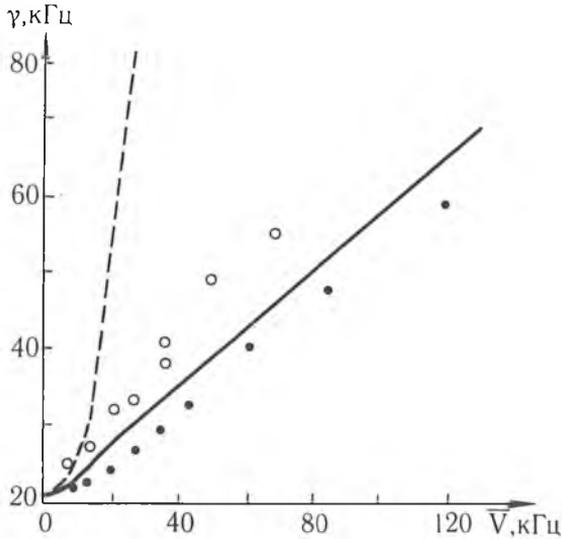


Рис. 2. Зависимость частоты Раби от полуширины спектрального провала Γ . Точки соответствуют экспериментальным данным по затуханию свободной поляризации [2], кружки — эксперимент по нестационарному выжиганию провалов [2]. Штриховая линия соответствует блоховской теории

При большой задержке, когда $\tau_d - T_{\text{diff}} = 300$ мкс, скачки процесса U^i_2 уширяют провал и его вычисленная форма при $\nu_2 = (2\pi T_{\text{diff}})^{-1} = 0,5$ кГц и $\sigma_2 = 250$ кГц становится широкой лоренцевской функцией с полушириной $\Gamma = 500$ кГц, что и наблюдалось в [2].

1. W a n n e m a c h e r R., M e l t z e r R. S., M a c f a r l a n e R. M. // Journ. Lumin. 1990. V. 45. P. 307.
2. S z a b o A., K a a r l y R. // Phys. Rev. 1991. V. B44. P. 12307.
3. B l o m b e r g e n N. // Physica. 1949. V. 15. P. 36.
4. О н и щ е н к о Н. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2. С. 16.
5. Н и з о в ц е в А. П., О н и щ е н к о Н. С. // Опт. и спектр. 1993. Т. 74. Вып. 5. С. 965.
6. S z a b o A., M u r a m o t o T. // Phys. Rev. 1988. V. A37. P. 4040.

Поступила в редакцию 17.02.94.

ТЕРМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА БОРОФОСФОРОСИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

Thermal processing of borophosphosilicate glasses has been studied in the relief-planarization process of integrated circuits and the optimum parameters of this process have been determined.

Развитие технологии производства СВИС связано с переходом от двухмерного расположения интегральных схем (ИС) к многослойным структурам. Поэтому проблема планаризации топологического рельефа становится все более важной и особенно остро стоит при производстве МОП-СВИС, отличающихся развитым топологическим рельефом на стадии формирования межуровневой изоляции.

Одна из первых попыток применения борфосфосиликатного стекла (БФСС) в качестве планаризирующего межуровневого диэлектрика была предпринята Керном [1]. В настоящее время БФСС приобрело промышленное значение как материал межуровневой изоляции МОП-СВИС.

Существует несколько способов решения данной проблемы, однако, как отмечалось в [2], наиболее распространенным и дешевым является оплавление силикатных стекол. Данный метод включает два этапа: формирование на поверхности структуры ИМС слоя легированного стекла и термическую обработку осажденного слоя. Процесс осаждения БФСС при атмосферном и пониженном давлениях рассматривался нами в [3, 4]. При термической обработке происходит размягчение стекла и планаризация рельефа поверхности. Основными параметрами процесса термической обработки (оплавления) стекла являются температура и время проведения процесса. Поэтому более детальное исследование данного процесса представляет как научный, так и практический интерес.

Экспериментальная часть

Слои БФСС осаждались в реакторе атмосферного давления вертикального типа с холодной стенкой и с резистивным нагревом по режимам, указанным в [3]. В качестве подложки использованы пластины монокристаллического кремния диаметром 100 мм со сформированным топологическим рельефом из поликристаллического кремния. Высота ступенек поликристаллического кремния составляла 0,33—0,37 мкм, что наиболее часто наблюдается в реальных структурах ИМС.

Зависимость тангенциального угла оплавления α
БФСС от концентрации бора (C_B)
и фосфора (C_P) (температура отжига 850° С,
время термообработки 45 мин)

C_B	C_P	$C_B + C_P$	α (град.)
5,91	3,4	9,31	13
6,58	2,31	8,89	14
6,75	2,12	8,87	18
6,24	2,6	8,84	20
5,57	2,8	8,55	20
6,01	2,77	8,78	30
6,17	2,12	8,29	31
5,47	2,77	8,24	26
5,29	2,72	8,01	22
5,08	2,66	7,74	43
5,60	1,75	7,35	44
5,52	1,95	7,47	45
8,2	—	8,2	57
5,72	—	5,72	60
5,65	—	5,65	64
3,4	—	3,4	80

Оценка качества планаризации проводилась по микрофотографиям поперечных слоев структур, полученным на растровом электронном

микроскопе (РЭМ). На микрофотографиях замерялся тангенциальный угол оплавления α [5], угол между горизонталью и касательной к профилю диэлектрика в поперечном сечении. Концентрация бора, фосфора и коэффициент преломления определялись по методике, изложенной в [3]. Механические напряжения в пленках и их плотность определялись рентгенодифракционными методами. Термическая обработка проводилась в промышленной диффузионной печи при атмосферном давлении. Толщина пленок составляла 0,8 мкм.

В таблице приводятся зависимости значения тангенциального угла α от состава стекла после оплавления в атмосфере сухого кислорода в течение 45 мин при стандартной температуре оплавления для силикатных стекол 850° С. Из анализа таблицы следует, что содержание бора и фосфора оказывает влияние на текучесть стекла. Чем выше суммарное содержание данных компонентов в стекле, тем меньше угол планаризации α . Отдельные отклонения от этой зависимости можно объяснить отклонением локальной концентрации легирующей примеси.

В процессе проведения эксперимента установлено, что свежесоздаваемые пленки БСС и БФСС с содержанием бора свыше 5,8 % вес. обладают низкой химической стойкостью и интенсивно адсорбируют влагу из атмосферы, что приводит к высокой дефектности данных пленок. Поэтому оптимальным составом для БФСС является концентрация бора в пределах 5,3—5,7 % вес., а фосфора 2,8—3,0 % вес. Данный состав гарантирует низкую дефектность БФСС и удовлетворительную планаризацию поверхности, так как известно, что металл наносится на поверхность прибора в ИС без разрывов, если величина α не превышает 35°. Отметим, что свежесоздаваемые пленки БФСС, полученные при температуре 325° С при атмосферном давлении без последующего оплавления, имеют α порядка 95° С. При проведении термической обработки происходит уменьшение α с увеличением времени термообработки. Скорость уменьшения α зависит от температуры отжига и спустя некоторое время выходит на стационарное значение.

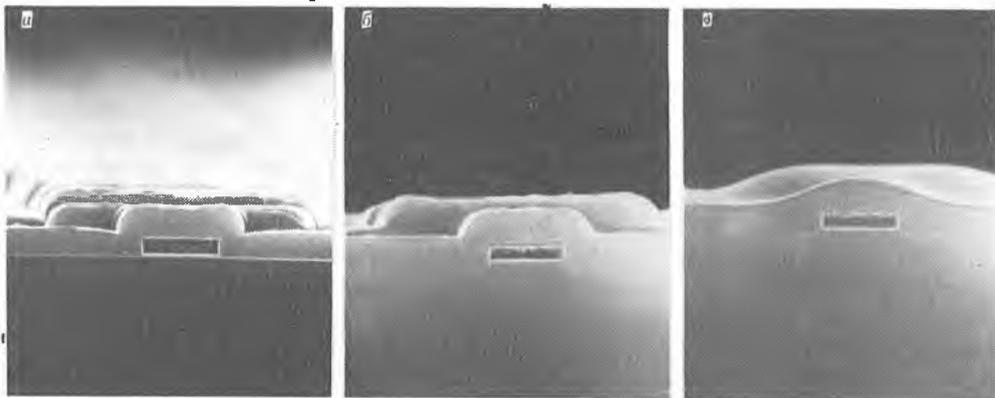


Рис. 1. Микрофотографии поперечных сколов структур с различным временем оплавления:
 а — без оплавления; б — t оплавления 5 мин; в — t оплавления 40 мин

На рис. 1 приведены микрофотографии поперечных сколов структур с различным временем оплавления: 0, 5, 40 мин соответственно в атмосфере сухого кислорода при температуре 850° С. Содержание бора в стекле составляло 5,7 % вес., фосфора 2,9 % вес.

На рис. 2 представлена зависимость α для стекол различного состава от времени термообработки для температур оплавления 850° С и 1100° С в атмосфере сухого кислорода. Очевидно, что в процессе оплавления БФСС происходит уменьшение угла α с течением времени. При этом скорость оплавления и выход значения α на стационарное значение, а также окончательная величина α зависят как от концентрации легирующих примесей бора и фосфора, что подтверждается данными таблицы, так и от температуры обработки. Увеличение температуры оплавления с 850°С до 1100°С при неизменных концентрациях бора и фосфора

приводит к сокращению времени оплавления с 40±45 мин до 10±15 мин. Дальнейшее увеличение времени оплавления существенного влияния на значение α не оказывает.

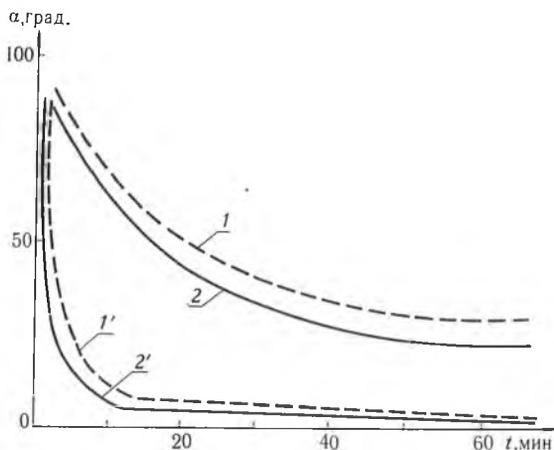


Рис. 2. Зависимость угла планаризации α от времени отжига БФСС в атмосфере сухого кислорода при различных температурах и концентрациях бора (C_B) и фосфора (C_P):

1	-	$C_B = 5,0$ %;	$C_P = 1,73$ %;	$t^* = 850^\circ\text{C}$;
1'	-	"	"	$t^* = 1100^\circ\text{C}$;
2	-	$C_B = 6,75$ %;	$C_P = 2,12$ %;	$t^* = 850^\circ\text{C}$;
2'	-	"	"	$t^* = 1100^\circ\text{C}$

Исходя из рис. 2 можно сделать вывод, что для любой температуры термической обработки БФСС существует оптимальное время оплавления, при превышении которого тангенциальный угол α практически не изменяется. Это можно объяснить тем, что в процессе оплавления происходит размягчение БФА и силы поверхностного натяжения стремятся минимизировать свободную энергию поверхности, которая пропорциональна ее площади. При достижении своего минимального значения (полное оплавление и максимальная планаризация) «растекание» стекла прекращается и при продолжении отжига α остается без изменения. Оптимальное время оплавления при температуре отжига 850°C составляет 40—45 мин.

В процессе термообработки наблюдалось изменение некоторых параметров пленок БФСС. Так, при температуре отжига 850°C , по сравнению со свежесажденными пленками, наблюдалось уменьшение толщины пленки до 4 %, обеднение бором до 30 %, незначительное возрастание коэффициента преломления до 1,46—1,48 и плотности до 2,50—2,70 г/см³, в 13—20 раз снижалась скорость растворения пленок в буферном стравителе на основе плавиковой кислоты. Скорость травления становилась порядка 0,9—1,3 нм/с, что сравнимо со скоростью травления термического окисла. Изменение перечисленных параметров в процессе термообработки свидетельствует о внутреннем изменении структуры стекла.

Методом электронной дифракции «на просвет» было установлено, что при рассмотренных концентрациях легирующих примесей в БФСС и температурах отжига 850 — 1100°C пленки стекла оставались аморфными и в отожженных образцах раздела фаз не наблюдалось.

Выводы:

1. Время оплавления пленок БФСС, осажденных в оптимальном режиме, зависит как от содержания легирующих примесей бора и фосфора, так и от температуры отжига: при неизменных концентрациях бора

и фосфора время оплавления сокращается с ростом температуры. Оптимальное время оплавления при температуре 850°C составляет 40—45 мин.

2. Угол планаризации α уменьшается с ростом суммарной концентрации бора и фосфора.

3. В процессе термообработки БФСС происходит усадка пленки, обеднение бором, возрастание плотности и коэффициента преломления, повышается кислотостойкость: скорость травления в буферных травителях на основе HF сравнивается со скоростью травления термического окисла.

4. Оптимальный состав БФСС, используемого в качестве планаризирующего диэлектрика, составляет $C_B - 5,3 \div 5,7 \%$ вес., $C_P - 2,8 \div 3,0 \%$ вес.

1. Kern W., Schable L. // RCA Rev. 1982. V. 43. № 3. P.425.

2. Лабуда А. А., Сидерко А. А. // Актуальные проблемы социально-гуманитарных и естественных наук. Мн., 1991. С. 124.

3. Лабуда А. А., Сидерко А. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 25.

4. Лабуда А. А., Сидерко А. А. // Вакуумная техника и технология. 1993.

5. Васильев В. Ю., Духанова Т. Г. и др. // Электр. промышленность. 1988. Вып. 5 173. С. 40.

Поступила в редакцию 02.05.94.

УДК 519.1

А. Ю. БАБАЙЦЕВ, Ю. М. МЕТЕЛЬСКИЙ, Р. И. ТЫШКЕВИЧ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БАЙНЕКЕ О РЕБЕРНЫХ ГРАФАХ

The article deals with the new proof of Beineke's theorem, characterizing line graphs of simple graphs by the list of forbidden induced subgraphs. The proof is based on classical theorem of Krausz.

Множество вершин и множество ребер графа G обозначаются через VG и EG соответственно.

Для произвольного графа G *реберный граф* $L(G)$ определяются следующими условиями:

(1) $V L(G) = E G$;

(2) вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, когда ребра e_1 и e_2 смежны в G (рис. 1).

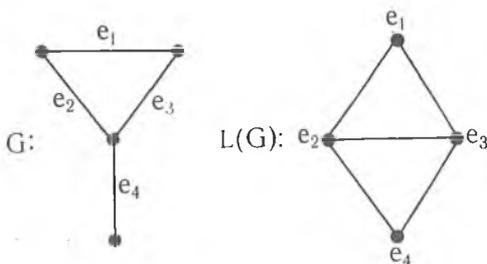


Рис. 1. Граф и его реберный граф

Граф H называется *реберным*, если существует такой граф G , что $L(G) \cong H$.

Широко известны два классических критерия реберности. Первый — это теорема Краууса [1], дающая глобальную характеристику реберных графов.

Объединение $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 определяется следующим образом: $V(G_1 \cup G_2) = V G_1 \cup V G_2$, $E(G_1 \cup G_2) = E G_1 \cup E G_2$.

Семейство графов $(G_i : i = \overline{1, m})$ называется *покрытием*

графа G , а графы G_i — *компонентами* этого покрытия, если $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$.

Одновершинные компоненты называются *тривиальными*.

Назовем покрытие *крауусовым*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) все компоненты покрытия являются полными графами;
- 2) каждая вершина входит не более чем в две компоненты;
- 3) любые две компоненты имеют не более одной общей вершины.

Характеризационную теорему из [1] можно сформулировать так:

Теорема Краууса. Граф является реберным тогда и только тогда, когда существует крауусово покрытие этого графа.

Эта характеристика близка к определению, доказательство теоремы несложно.

Второй из упомянутых критериев — локальная характеристика реберных графов Байнеке в терминах запрещенных порожденных подграфов [2].

Теорема Байнеке. Для графа G следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) граф G является реберным;
(ii) ни один из девяти графов, изображенных на рис. 2, не является порожденным подграфом графа G .

Здесь предлагается новое доказательство теоремы Байнеке, свободное от большого перебора. В нем максимальным образом используется теорема Краусса.

Обозначения: $G(X)$ — подграф графа G , порожденный подмножеством вершин X ; $N(v) = N_G(v)$ — окружение вершины v в графе G ; если α — покрытие, а H — подграф графа G , то $H \in \alpha$ означает, что граф H слугит компонентой покрытия α ; (a, b, c) — треугольник с вершинами a, b, c ; $a-b$ ($a \neq b$) — вершины a и b смежны (не смежны). Другие обозначения общеприняты и взяты из [3].

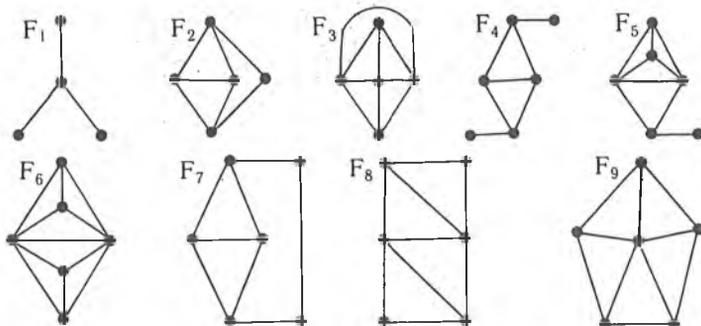


Рис. 2. Запрещенные порожденные подграфы для реберных графов

2. Доказательство теоремы Байнеке. (i) \Rightarrow (ii). Очевидно, что ни один из девяти графов рис. 2 не имеет крауссова покрытия и потому не является реберным. Отсюда вытекает истинность нужной импликации, поскольку свойство графа «быть реберным» сохраняется при переходе к порожденным подграфам.

(ii) \Rightarrow (i). Очевидно, что полные графы и всякий граф G , максимальная степень вершин которого $\Delta(G)$ меньше трех, являются реберными, поэтому такие графы можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Очевидно также, что достаточно рассматривать связные графы.

Итак, пусть G — связный n -вершинный граф, удовлетворяющий следующим условиям: в G нет порожденных подграфов из формулировки теоремы, $G \neq K_n$, $\Delta(G) > 2$. Пусть далее, a — вершина максимальной степени графа G , $H = G(N(a))$.

Лемма 1. Граф H имеет один из следующих двух видов:

I. $H = G_1 \cup G_2$ — объединение двух полных графов без общих вершин;

II. $H = G_1 \cup G_2 \cup M$, где G_1 и G_2 — такие, как выше, а M — совершенное паросочетание, каждое ребро которого имеет один конец в G_1 , а другой в G_2 .

Положим $H' = G - a$ и будем считать теорему верной для всех $(n-1)$ -вершинных графов. По индуктивному предположению существует крауссово покрытие графа H' . Пусть α — одно из таких покрытий. Теорема будет доказана, как только удастся преобразовать α в крауссово покрытие графа G .

Если оба графа G_1 и G_2 являются компонентами покрытия α , то после замены в α этих компонент полными графами с множествами вершин $VG_i \cup \{a\}$, $i = 1, 2$, получается крауссово покрытие графа G . Ниже мы стремимся получить эту ситуацию.

Лемма 2. Если $K = K_1$ — полный подграф в H' , не содержащийся целиком ни в одной из компонент покрытия α , то $l = 3$ и ребра графа K имеются в трех разных компонентах.

Лемма 3. Если $|VG_i| = l > 2$, то либо $G_i \in \alpha$, либо $l = 3$ и ребра графа G_i находятся в трех разных компонентах покрытия α .

Лемма 4. Пусть H_1 — компонента покрытия α , в которой есть вершина b , не входящая в G_1 , и ровно две вершины b_1 и b_2 , входящие в G_1 . Пусть далее, в G_2 есть вершина c , не смежная ни с b_1 , ни с b_2 . Тогда:

(iii) $H_1 = (b, b_1, b_2)$ — треугольник;
 (iv) существует крауссово покрытие β графа H' , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) ребро $b_1b_2 \in \beta$ или $G_1 \in \beta$;
- 2) каждая компонента покрытия α , содержащая вершину из G_2 , служит компонентой и для β .

Доказательства этих лемм опущены.

Пусть далее, $G_1 = K_r$, $G_2 = K_s$, $r \geq s$ и пусть вначале выполняется одно из следующих условий:

- 1) $r > 3$;
- 2) для любой пары x, y вершин графа G_1 в G_2 есть вершина, не смежная ни с x , ни с y .

Тогда, используя леммы 3 и 4, можно показать, что в этой ситуации покрытие α можно выбрать так, чтобы граф G_1 был его компонентой.

Обратимся к G_2 . Если $G_2 \in \alpha$, то $s \leq 3$. При $s > 1$ выполняется условие, аналогичное условию 2): для любой пары b_1, b_2 вершин графа G_2 в G_1 есть вершина, не смежная ни с b_1 , ни с b_2 . Следовательно, к G_2 применима лемма 4. Так что можно считать, что и $G_2 \in \alpha$.

Перейдем к $s = 1$. Пусть $G_2 \notin \alpha$, $VG_2 = \{c\}$, $V_c = N_G(c) \setminus (VG_1 \cup \{a\}) \cup \{c\}$. Тогда $G(V_c) = K$ — клика. Если $|V_c| > 1$, то покажем, что покрытие α можно выбрать так, чтобы K была его единственной нетривиальной компонентой, содержащей вершину c . Если это так, то ничто не мешает считать $G_2 \in \alpha$.

Согласно лемме 2, $|V_c| \leq 3$. Если $|V_c| = 2$, то α — нужное покрытие.

Пусть $V_c = \{c, d_1, d_2\}$. Тогда $cd_1 = H_1$, $cd_2 = H_2$, $d_1d_2 \in EH_3$, $H_i \in \alpha$, $i = 1, 3$. Если $H_3 = d_1d_2$, то, устранив из α компоненты H_i , $i = 1, 3$ и добавив клику K , получим крауссово покрытие графа H' , обладающее нужным свойством.

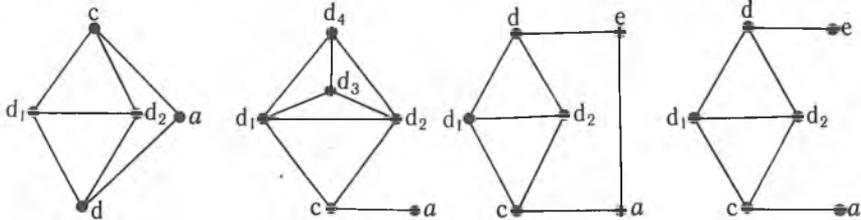


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5

Пусть $d_1d_2 \notin H_3$. Заметим, что $d_1 \neq a$, иначе вершина d_1 входила бы в G_1 и по определению V_c получили бы, что $d_1 \notin V_c$ — противоречие. Аналогично $d_2 \neq a$. Если теперь $d \in VH_3$ и $d = a$, то $d \neq c$ и $G(a, c, d, d_1, d_2) = F_2$ — запрещенный подграф (рис. 3). Если $VH_3 = \{d_1, d_2, d_3, d_4, \dots\}$, то $G(a, c, d_1, d_2, d_3, d_4) = F_5$ — запрещенный подграф (рис. 4). Следовательно, $VH_3 = \{d_1, d_2, d\}$. Если теперь e — новая вершина, смежная с d , то $e \neq d_1$, $e \neq d_2$, $e \neq c$ и $G(a, c, d, d_1, d_2, e) = F_4$ или F_7 — запрещенные подграфы (рис. 5). Таким образом, H_3 — единственная нетривиальная компонента покрытия α , содержащая вершину d . Устранив из α компоненты H_1, H_2, H_3 и тривиальную компоненту $\{d\}$, если она есть, и добавив компоненты K, dd_1, dd_2 , получим новое крауссово покрытие с нужным свойством.

Ситуация, в которой выполняются условия 1) или 2), рассмотрена полностью. В этой ситуации можно считать, что $G_i \in \alpha$, $i = 1, 2$.

Рассмотренная ситуация охватывает следующие случаи:

- (1) $r > 3$ или $r = s = 3$;
- (2) $r = 3$ или $r = 2, s = 2$, граф H имеет вид I, или M (лемма 1) является ребром;
- (3) $r = 3$ или $r = 2, s = 1$, граф H имеет вид I.

Нарушение условий 1) или 2) приводит к нескольким ситуациям, которые объединяет обстоятельство:

- 3) граф H имеет вид II, причем мощность паросочетания M максимальна.

Эти ситуации следующие:

а) $r = 3, s = 1$ или $s = 2$, выполняется 3);

б) $r = 2, s = 1$, выполняется 3).

в) $r = 2, s = 2$, выполняется 3).

а) поскольку $r = 3$, то по лемме 3 $G_1 \in \alpha$. В противном случае ребра G_1 принадлежали бы трем разным компонентам покрытия α , что вело бы к противоречию с крауссовостью этого покрытия (из-за условия 3), по крайней мере одна из вершин G_1 содержалась бы в трех компонентах покрытия α).

Если $s = 1$, то к G_2 применимы рассуждения, проводимые выше. Поэтому можно считать, что $G_2 \in \alpha$. Если $s = 2$, то уже по лемме 4 можно считать, что $G_2 \in \alpha$.

б) $VG_1 = \{b_1, b_2\}, VG_2 = \{c\}, b_1 - c -$ по условию 3).

Обозначим $V_{b_2} = N_H(b_2) \setminus \{b_1\} \cup \{b_2\}, V_c = N_H(c) \setminus \{b_1\} \cup \{c\}$. Так как $\text{dega} = \Delta(G) = 3$, то $|V_{b_2}| > 2$ или $|V_c| > 2$ — невозможны. Невозможно и $|V_{b_2}| = |V_c| = 2$, ибо тогда появится один из запрещенных подграфов F_2, F_4 или F_7 (так как $c \neq b_2$).

Если $|V_{b_2}| = |V_c| = 1$ или $|V_{b_2}| = 2, |V_c| = 1$, то, добавив к α тривиальную компоненту G_2 , получим требуемое крауссово покрытие β графа H .

Если $|V_{b_2}| = 1, |V_c| = 2$, то аналогично, поменяв местами обозначения вершин b_2 и c , получим требуемое крауссово покрытие β графа H .

в) $VG_1 = \{b_1, b_2\}, VG_2 = \{c_1, c_2\}, b_1 - c_1, b_2 - c_2 -$ по условию 3).

Если по крайней мере одна из компонент $G_i, i = 1, 2$, не принадлежит α , то $G_i \subset H_i$, причем $|H_i| = 3$, а ребра b_1c_1 и b_2c_2 совпадают с компонентами крауссова покрытия α , так как $\text{dega} = \Delta(G) = 4$. В этой ситуации из крауссова покрытия α исключаем компоненты b_1c_1 и b_2c_2 и добавляем треугольники (a, b_1, c_1) и (a, b_2, c_2) , в результате чего получаем крауссово покрытие γ графа G .

1. K r a u s z J. // Mat. Fiz. Lapok. 1943. V. 50.

2. В е и н е к е L. W. // Beitrage zur graphentheorie / Red. H. Sach, H. Voss, H. Walther. Leipzig, 1968.

3. Х а р а р и Ф. Теория графов. М., 1973.

4. Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1970.

Поступила в редакцию 14.02.93.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА L-СРЕДНИХ В УСЛОВИЯХ «МАЛОЙ ВЫБОРКИ»

The problem of L-means decision rule stability under «small sample» is investigated by means of risk asymptotic expansion method. The case of normal distribution mixture (Fisher model) is given and some stability measures are proposed and evaluated.

Пусть в пространстве R^N возникают подлежащие классификации независимые в совокупности случайные наблюдения x_1, \dots, x_n из $L \geq 2$ классов $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$. Наблюдение из класса Ω_i есть случайный N -вектор, описываемый плотностью распределения вероятностей $q(x; \theta_i^0)$, $x \in R^N$, с параметром сдвига $\theta_i^0 \in R^N$, равным математическому ожиданию:

$$\int_{R^N} x q(x; \theta_i^0) dx = \theta_i^0, i \in S = \{1, \dots, L\}.$$

Через d_i^0 обозначим неизвестный номер класса, к которому принадлежит $x_t, t = \overline{1, n}$. Составной вектор «центров классов» (математических ожиданий) $\theta^0 = (\theta_1^{0T} | \dots | \theta_L^{0T})^T \in R^{LN}$ неизвестен. Задача заключается в оценивании вектора истинной классификации $D^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)^T$ по случайной выборке $X = (x_1 | \dots | x_n)^T$ объема n .

Для решения поставленной задачи классификации в кластер-анализе широко используется алгоритм L-средних [1, 2]. Однако при этом предполагается, что наблюдения из X имеют чисто геометрическую природу, т. е. детерминированы в R^N . А это затрудняет аналитическое исследование алгоритма. Поэтому в статье предлагается трактовать данные как совокупность случайных N-векторов, объединенных в выборку X.

Согласно [1, 2], метод L-средних состоит в совместном вычислении оценок $\hat{\theta}$ и \hat{D} для θ^0 и D^0 посредством решения экстремальной задачи:

$$W_n(\theta, D) \rightarrow \inf_{\theta \in R^{LN}, D \in S^n}; \quad W_n(\theta, D) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \|x_t - \theta_{i_t}\|^2, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо векторная норма. Нетрудно видеть, что

$$W_n^*(\theta) = \min_{D \in S^n} W_n(\theta, D) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \min_{i \in S} \|x_t - \theta_i\|^2$$

является статистической оценкой следующего функционала:

$$W^0(\theta; \theta^0) = \int_{R^N} g(x; \theta) q_x(x; \theta^0) dx;$$

$$g(x; \theta) = \min_{i \in S} \|x - \theta_i\|^2; \quad q_x(x; \theta^0) = \sum_{i \in S} \pi_i q(x; \theta_i^0),$$

где $\{\pi_i\}_{i \in S}$ — априорные вероятности классов; $\pi_i = P\{d_i^0 = i\}$, $i \in S$. Решающее правило (РП) L-средних может быть записано в виде:

$$d \cdot (x; \hat{\theta}) = \operatorname{argmin}_{i \in S} \|x - \hat{\theta}_i\|; \quad \hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta \in R^{LN}} W_n^*(\theta), \quad (2)$$

который для проведения исследований является более удобным, чем (1) ($x \in R^N$ — классифицируемое наблюдение). В качестве показателя эффективности РП $d \cdot (\cdot; \hat{\theta})$ будем использовать безусловный риск:

$$r_n = E \{r \cdot (\hat{\theta}; \theta^0)\}; \quad (3)$$

$$r \cdot (\hat{\theta}; \theta^0) = \sum_{i \in S} \pi_i \left(1 - \int_{R^N} \prod_{j \in S} U(\|x - \theta_j^*\|^2 - \|x - \theta_i^*\|^2) q(x; \theta_i^0) dx \right),$$

где $U(z) = \{1, \text{если } z \geq 0; 0, \text{если } z < 0\}$ — единичная функция Хэвисайда. Величина r_n имеет смысл вероятности ошибки при классификации одного наблюдения.

На практике весьма актуальна задача исследования устойчивости РП L-средних (2) к эффектам «малой выборки» X [3]. Удобным методом такого исследования является метод асимптотического разложения риска (3) по степеням величины $n^{-1/2}$ [4].

Изучим сначала асимптотическое ($n \rightarrow +\infty$) поведение оценки $\hat{\theta}$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия регулярности типа Чибисова [5], и единственная точка минимума:

$$\theta^* = \operatorname{argmin}_{\theta \in R^{LN}} W^0(\theta; \theta^0), \quad (4)$$

тогда $\hat{\theta}$ сходится почти наверное к θ^* :

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п. н.}} \theta^*. \quad (5)$$

Доказательство. В условиях регулярности оценка $\hat{\theta}$ удовлетворяет соотношению:

$$\nabla_{\theta} W_n^*(\theta) |_{\theta = \hat{\theta}} = O_M, \quad M = L \cdot N, \quad (6)$$

где O_M — нулевой M-вектор. Необходимым условием минимума $W^0(\theta; \theta^0)$ является:

$$\nabla_{\theta} W^0(\theta; \theta^0) |_{\theta = \theta^*} = O_M. \quad (7)$$

С учетом (7) и усиленного закона больших чисел имеем:

$$\nabla_{\theta} W_n'(\theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п.н.}} O_M. \quad (8)$$

При помощи известных теорем непрерывности [6] из (6) и (8) заключаем:

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п.н.}} \theta^*,$$

и соотношение (5) доказано.

Следствие. Если классы «хорошо разделимы»:

$$\|\theta_i^0 - \theta_j^0\| \rightarrow +\infty, \quad i \neq j \in S, \quad (9)$$

а в качестве $\|\cdot\|$ используется:

$$\|y\| = \sqrt{y^T B y}, \quad B > 0, \quad y \in R^N, \quad (10)$$

то в условиях теоремы 1 оценка $\hat{\theta}$ строго состоятельна:

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п.н.}} \theta^0.$$

Доказательство следует из соотношения:

$$\theta^* \rightarrow \theta^0,$$

которое имеет место в силу (9), (10).

Построим асимптотическое разложение риска (3) РП L-средних (2). Обозначим:

$$r_0 = \sum_{i \in S} \pi_i \left(1 - \int_{R^N} \prod_{j \in S} U(\pi_j q(x; \theta_i^0) - \pi_j q(x; \theta_j^0)) q(x; \theta_i^0) dx \right) -$$

риск байесовского РП (БРП):

$$d_0(x) = \arg \max_{i \in S} \pi_i q(x; \theta_i^0), \quad x \in R^N, \quad (11)$$

минимизирующего вероятность ошибочной классификации в условиях наличия полной априорной информации о классах [1];

$$I(\theta^*; \theta^0) = \quad (12)$$

$$= A^{-1}(\theta^*; \theta^0) \int_{R^N} \nabla_{\theta} g(x; \theta^*) (\nabla_{\theta} g(x; \theta^*))^T q_{d_0}(x; \theta^0) dx A^{-1}(\theta^*; \theta^0),$$

где $A(\theta^*; \theta^0)$ — симметрическая матрица вторых производных:

$$A(\theta^*; \theta^0) = \nabla_{\theta}^2 W^0(\theta; \theta^0) |_{\theta = \theta^*}.$$

Разобьем матрицу (12) на блоки:

$$I(\theta^*; \theta^0) = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ N \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} I_{11}(\theta^*; \theta^0) & - \\ \hline I_{L1}(\theta^*; \theta^0) & - \\ \hline I_{LL}(\theta^*; \theta^0) \end{array} \right) \end{matrix}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, тогда если: А) $\|y\|^2$ непрерывно дифференцируема по $y \in R^N$ (R — расширенная числовая прямая) и конечны поверхностные интегралы:

$$\int \{ \nabla_{\theta_t} \|x - \theta_i^0\|^2 q(x; \theta_i^0) | \nabla_x \|x - \theta_k^0\|^2 - \nabla_x \|x - \theta_j^0\|^2 |^{-1} ds_{N-1} | < \infty, \\ \{x: \|x - \theta_k^0\| = \|x - \theta_j^0\|\}$$

$$j \neq k; \quad i, j, k, t \in S,$$

то риск r_n из (3) допускает асимптотическое разложение:

$$r_n = r_0(\theta^*; \theta^0) + O(n^p), \quad p \leq -0,5, \quad (13)$$

где $r_0(\theta^*; \theta^0)$, θ^* определены в (3) и (4) соответственно;

Б) выполнены условия (9), (10) следствия к теореме 1; $q(x; \bar{\theta})$ трижды непрерывно дифференцируема по $\theta \in \mathbb{R}^N$, дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^N$; конечны все встречающиеся ниже поверхностные интегралы и

$$U(\|x - \theta_i^0\|^2 - \|x - \theta_j^0\|^2) = U(\pi_j q(x; \theta_j^0) - \pi_i q(x; \theta_i^0)), \quad i \neq j \in S, \quad (14)$$

тогда

$$r_n = r_0 + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \sum_{k=1}^{j-1} (B_{jjkj} + B_{kkkj} - 2B_{kjjk}) n^{-1} + o(n^{-1}), \quad (15)$$

где

$$B_{ijkl} = \pi_i \pi_j \int_{\{x: G_{ij}(x)=0\}} (\nabla_{\theta^0} q(x; \theta_k^0))^T I_{kl}(\theta^0; \theta^0) \nabla_{\theta^0} q(x; \theta_i^0) |\nabla_x G_{ij}(x)|^{-1} ds_{N-1};$$

$$G_{ij}(x) = \pi_i q(x; \theta_i^0) - \pi_j q(x; \theta_j^0), \quad i \neq j, \quad i, j, k, l \in S.$$

Доказательство основано на применении к функционалу риска (3) формулы Тейлора относительно $\Delta \bar{\theta} = \bar{\theta} - \theta^0$ в окрестности точки θ^0 и использовании следующих выражений для моментов:

$$E\{\Delta \bar{\theta}\} = |_{M} O(n^p), \quad p \leq -0,5;$$

$$E\{\Delta \bar{\theta} (\Delta \bar{\theta})^T\} = I(\theta^0; \theta^0) n^{-1} + |_{M \times M} O(n^{-1});$$

$$E\{\Delta \bar{\theta}_i \Delta \bar{\theta}_j \Delta \bar{\theta}_k\} = o(n^{-1}), \quad i, j, k = \overline{1, M},$$

где через $\Delta \bar{\theta}_i$ обозначена i -ая компонента вектора $\Delta \bar{\theta}$ ($i = \overline{1, M}$), а через $|_{M}$ и $|_{M \times M}$ — соответственно M -вектор и $(M \times M)$ -матрица, состоящие из единиц. При доказательстве асимптотического разложения (15) используется тот факт, что при выполнении условий следствия теоремы 1 оценка $\bar{\theta}$ строго состоятельна, а условие (14) обеспечивает совпадение РП $d(\cdot; \theta^0)$ с БРП (11).

В качестве показателя устойчивости РП L -средних (2) рассмотрим относительное смещение риска (ОСР) относительно минимального значения риска $r_0 > 0$, достижимого БРП (11):

$$\kappa_n = (r_n - r_0) / r_0 \geq 0. \quad (16)$$

Чем меньше κ_n , тем устойчивее РП L -средних.

Если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_n = 0,$$

то РП (2) назовем асимптотически устойчивым (его риск r_n с ростом объема n выборки X приближается к риску БРП).

Результаты теоремы 2 позволяют приблизительно вычислить риск (3) и ОСР (16) при данном объеме n классифицируемой выборки, отбросив остаточные члены, неявно записанные в разложениях (13) и (15).

Отметим, что, согласно (13), (15), РП L -средних является асимптотически устойчивым лишь в случае Б.

Проиллюстрируем полученные результаты на часто встречающейся в практических приложениях модели Фишера [1]:

$$q(x; \theta_i^0) = p_N(x | \theta_i^0, \Sigma), \quad i \in S, \quad (17)$$

где

$$p_N(x | \bar{\theta}, \Sigma) = (2\pi)^{-N/2} (\det(\Sigma))^{-0,5} \exp(-0,5(x - \bar{\theta})^T \Sigma^{-1}(x - \bar{\theta})), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad -$$

плотность N -мерного нормального (гауссовского) закона с математическим ожиданием $\bar{\theta}$ и невырожденной ковариационной матрицей Σ ($\det(\Sigma) > 0$).

Рассмотрим случай двух классов ($L = 2$). Пусть межклассовое расстояние Махаланобиса

$$\Delta = \sqrt{(\theta_1^0 - \theta_2^0)^T \Sigma^{-1} (\theta_1^0 - \theta_2^0)}$$

достаточно велико ($\Delta \rightarrow +\infty$), т. е. классы Ω_1, Ω_2 «хорошо разделимы». Если в качестве нормы, используемой в РП L-средних (2), выбрать:

$$\|y\| = \sqrt{y^T \Sigma^{-1} y}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad (18)$$

то будут выполнены условия следствия к теореме 1, и

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{п.н.}} \theta^0.$$

Воспользуемся результатами теоремы 2 и построим асимптотические разложения риска r_n РП L-средних (2). Возможны два варианта.

Вариант 1. Пусть $\pi_1 \neq \pi_2$, тогда РП $d(\cdot; \theta)$ не является асимптотически устойчивым, а его риск r_n , согласно (13) и (17), (18), представим в виде:

$$r_n = r_0 + \gamma^* + O(\Delta^{-3} \exp(-\Delta^2/8) + n^p), \quad p \leq -0,5; \quad (19)$$

$$\gamma^* = \frac{4(0,5 - \sqrt{(1-\pi_1)\pi_1})}{\Delta} \cdot \varphi\left(\frac{\Delta}{2}\right) > 0,$$

где $\varphi(z) = \Phi'(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2)$ — плотность распределения вероятностей стандартного нормального закона с функцией распределения $\Phi(\cdot)$. Из (19) видно, что устойчивость РП L-средних возрастает (уменьшается ОСР κ_n) при уменьшении $|0,5 - \pi_1|$ (или, что то же самое, $|\pi_1 - \pi_2|$).

Вариант 2. В случае равновероятных классов ($\pi_1 = \pi_2 = 0,5$) выполняется условие (14), и можно воспользоваться разложением (15). РП L-средних при этом является асимптотически устойчивым, а его риск r_n допускает представление:

$$r_n = r_0 + \frac{N-1+\Delta^2/4}{\Delta} \cdot \varphi\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot n^{-1} + o(n^{-1}). \quad (20)$$

Соотношение (20) позволяет приближенно с точностью до $o(n^{-1})$ вычислить ОСР κ_n :

$$\kappa_n \approx \frac{N-1+\Delta^2/4}{\Delta \Psi^*(\Delta/2)n} > 0$$

и определить минимальный δ -допустимый объем выборки:

$$n^* = n^*(\delta) = \left[\frac{N-1+\Delta^2/4}{\delta \Delta \Psi^*(\Delta/2)} \right] + 1,$$

где $\Psi^*(z) = \Phi(-z)/\varphi(z)$ — отношение Миллса; $[\cdot]$ — целая часть числа. При объеме n классифицируемой выборки X не меньшем чем $n^*(\delta)$ заведомо выполняется: $\kappa_n \leq \delta$, где $\delta > 0$ наперед задано.

Отметим, что асимптотическое разложение (20) с точностью до члена порядка малости $o(n^{-1})$ совпадает с разложением риска подстановочного БРП, использующего в качестве оценки для θ^0 оценку максимального правдоподобия [4]. Поэтому в случае равновероятных классов ($\pi_1 = \pi_2 = 0,5$) целесообразнее использовать РП L-средних в силу его более простой численной реализации.

Эта работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований РБ (грант Ф40—263).

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М., 1989.
2. Миленский А. В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. М., 1975.
3. Гаскаров Д. В., Шаповалов В. И. Малая выборка. М., 1978.
4. Харин Ю. С. Робастность в статистическом распознавании образов. Мн., 1992.
5. Чибисов Д. М. // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18. № 2. С. 303.
6. Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПОТОКОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

It is considered the Cauchy—Poisson problem for internal waves generated by initial disturbances at a horizontal interface between two fluids of different densities and velocities. Solution of this problem is given. It is shown that the appearance of capillarity leads to the stability of these waves.

Известно [1, 2], что неустановившиеся волны, возникающие от начальных возмущений в потоке неоднородной двухслойной жидкости, будут устойчивыми, если скорости потоков в каждом из слоев совпадают. В случае, когда скорости потоков различны (по величине или по направлению), на поверхности раздела при произвольных начальных возмущениях возникают волны, амплитуда которых растет с течением времени, т. е. они являются неустойчивыми [3, 4]. Однако в работе [5] показано, что возмущенная поверхность раздела будет устойчивой, если начальные возмущения имеют специальный вид. Заметим, что в [3, 5] не учитывалось действие капиллярных сил.

Рассмотрим двухслойный поток неоднородной бесконечно глубокой жидкости. Совместим направление оси абсцисс с направлением потока нижнего слоя, имеющего скорость $u_2 > 0$. Проекции вектора скорости верхнего потока на оси Ox и Oy обозначим через u_1 и v_1 . Тогда задача определения вида волн на поверхности раздела потоков $z = \zeta(x, y, t)$, возникающих от начальных смещений этой поверхности, сводится к решению уравнений Лапласа для потенциалов скоростей возмущенного движения [1, 2, 5]

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (|x|, |y| < \infty, z \geq 0), \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad (|x|, |y| < \infty, z \leq 0)$$

с граничными

$$\varphi_{2t} - \gamma\varphi_{1t} + u_2\varphi_{2x} - \gamma u_1\varphi_{1x} - \gamma v_1\varphi_{1y} + g\epsilon\zeta - \frac{T}{\rho_2} (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = 0,$$

$$\zeta_t + u_1\zeta_x + v_1\zeta_y = \varphi_{1z}, \quad \zeta_t + u_2\zeta_x = \varphi_{2z} \quad \text{при } z = 0;$$

$\varphi_1 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\varphi_2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\varphi_{1,2} \rightarrow 0$ при $|x|, |y| \rightarrow \infty$
и начальными условиями

$$\rho_1\varphi_1 = \rho_2\varphi_2, \quad \zeta = a_0 f(x, y) \quad \text{при } t = 0, z = 0,$$

где $\rho_{1,2}$ — плотности жидкостей в потоках, $\gamma = \rho_1/\rho_2$, $\epsilon = 1 - \gamma$, T — коэффициент поверхностного натяжения.

Методом интегральных преобразований для произвольной функции $f(x, y)$, представимой интегралом Фурье, находим для вида поверхности раздела выражение

$$\zeta = \frac{a_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r F(r \cos\theta, r \sin\theta) (e^{iN_1} + e^{iN_2}) d\theta dr, \quad (1)$$

где

$$F(m, n) \triangleq f(x, y), \quad m = r \cos\theta, \quad n = r \sin\theta,$$

$$N_{1,2} = N(r, \theta) \mp v r \cos(\theta - \bar{\varphi}), \quad v = R_1/t, \quad \psi = \operatorname{arctg}(v_1/(u_1 - u_2)),$$

$$R_1 = ((x - c_1 t)^2 + (y - c_2 t)^2)^{1/2}, \quad \bar{\varphi} = \operatorname{arctg}((y - c_2 t)/(x - c_1 t)),$$

$$N(r, \theta) = (g_1 r + \xi_1 r^3 - \gamma_1 r^2 c^2 \cos^2(\theta - \psi))^{1/2},$$

$$c_1 = \gamma v_1 / (1 + \gamma), \quad c_2 = (u_2 + \gamma u_1) / (1 + \gamma) \quad c^2 = (u_1 - u_2)^2 + v_1^2,$$

$$g_1 = g\epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon / (1 + \gamma), \quad \xi_1 = T / \rho_2 (1 + \gamma), \quad \gamma_1 = \gamma / (1 + \gamma)^2.$$

У нас нет возможности привести здесь полный анализ выражения (1).

Несколько упростим задачу. Будем считать, что $v_1 = 0$, $u_1 \neq u_2$, а $f(x, y) = f(x)$, т. е. рассмотрим плоский случай. Тогда из (1) имеем

$$\zeta = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(r) (e^{itM_1} + e^{itM_2}) dr, \quad (2)$$

где $F(r) \stackrel{\circ}{=} f(x)$, $M_{1,2} = rv \mp M$, $v = (x - ct)/t$,

$$M = (g_1 r + \xi_1 r^3 - \gamma_1 c_1^2 r^2)^{1/2}, \quad c_1 = u_1 - u_2, \quad c = (u_2 + \gamma u_1)/(1 + \gamma).$$

Если скорости потоков верхнего и нижнего слоев жидкости совпадают ($u_1 = u_2$), то $M^2 \geq 0$ и к интегралу (2) применим метод стационарных фаз. Очевидно, что при больших значениях t получается $\zeta = O(t^{-1/2})$, т. е. образующиеся волны на поверхности раздела являются устойчивыми. Анализ ζ при $u_1 = u_2$ проведен в [2] и поэтому здесь его не даем.

При $c_1 \neq 0$ особенность интегралов (2) состоит в том, что подкоренное выражение в M при некоторых значениях параметров g_1 , ξ_1 , γ_1 и c_1 может быть отрицательным. Уравнение $M^2 = 0$ относительно положительных r имеет корни $r_{1,2} = (\gamma_1 c_1^2 \mp \sqrt{\Delta})/2\xi_1$ при $\Delta = \gamma_1^2 c_1^4 - 4\xi_1 g_1 \geq 0$, а при $\Delta < 0$ — корней не имеет. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) $\Delta \leq 0$. Это означает, что существует некоторая критическая скорость $c_0 = (4g_1 \xi_1 \gamma_1^{-2})^{1/4}$ такая, что при $|c_1| \leq c_0$ (u_1 может иметь любой знак) подкоренное выражение в M остается положительным и интегралы (2) можно исследовать при больших t и $|x|$ порядка t методом стационарных фаз. Уравнения $M'_{1,2} = 0$, которые определяют стационарные точки, равносильны следующим:

$$v = \pm \varphi(r) = \pm \frac{1}{2} (3\xi_1 r^2 - 2\gamma_1 c_1^2 r + g_1) / M. \quad (3)$$

а) $|c_1| < c_0 = (3g_1 \xi_1 \gamma_1^{-2})^{1/4} < c_0$. В этом случае $\varphi(0) = \varphi(\infty) = \infty$, а в точке $r = r^0$ функция $\varphi(r)$ имеет минимум, где r^0 — единственный корень уравнения $\varphi'(r) = 0$. Уравнение $M'_1 = 0$ имеет два вещественных корня r_1 и r_2 при $x > v_1 t$ и не имеет корней при $x < v_1 t$. Уравнение $M'_2 = 0$ не имеет корней при $x > v_2 t$, а при $x < v_2 t$ имеет два вещественных корня r_3 и r_4 ($v_{1,2} = c \pm \varphi(r^0)$). Следовательно,

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + O(t^{-1}), \quad (4)$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_1(r_1) + \eta_2(r_2); & x > v_1 t; \\ 0; & x < v_1 t \end{cases} \quad (5)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \bar{\eta}_1(r_3) + \bar{\eta}_2(r_4); & x < v_2 t; \\ 0; & x > v_2 t; \end{cases}$$

$$\eta_{1,2}(r) = A(r) \cos\left(tM_1(r) \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad A = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{F(r)}{\sqrt{|M|}},$$

$$\bar{\eta}_{1,2}(r) = A(r) \cos\left(tM_2(r) \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 < r_{1,3} < r^0 < r_{2,4} < \infty.$$

Отсюда следует, что по всей поверхности раздела, за исключением ее части $x \in D = (v_2 t, v_1 t)$, распространяются неустановившиеся капиллярно-гравитационные (η_1, η_2) и капиллярные ($\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$) волны, напоминающие прогрессивные, но амплитуда которых зависит от x и t и затухает с ростом t как $t^{-1/2}$. Эти основные волны имеют ярко выраженные задние фронты, существование которых обусловлено исключительно действием капиллярных сил. В области D образуются волны, амплитуда которых затухает, по крайней мере, как t^{-1} .

б) $c^0 < |c_1| < C_0$. Так как в этом случае $\varphi(0) = \varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(r^0) = 0$, $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = 0$, $\varphi(r^0) < 0$, где $m_1 < r^0 < m_2$,

$$m_{1,2} = (\gamma_1 c_1^2 + \sqrt{\gamma_1^2 c_1^4 - 3\xi_1 g_1}) / 3\xi_1,$$

то при $x > v_3 t$ уравнение $M'_1 = 0$, а при $x < v_4 t$ уравнение $M'_2 = 0$ всегда

имеют по два корня $r_{1,2}$ и $r_{3,4}$ соответственно ($v_{3,4} = c \mp v$, $v = |\varphi(r^0)|$, $v_3 < v_4$). Тогда вид поверхности раздела будет определяться формулами (4), где в выражениях (5) необходимо заменить $v_{1,2}$ соответственно на $v_{3,4}$. Следовательно, при $c^0 < |c_1| < c_0$ вся поверхность раздела покрыта неустановившимися волнами, амплитуда которых затухает как $t^{-1/2}$. В областях $x > v_4 t$ и $x < v_3 t$ эти волны напоминают прогрессивные, а в области $x \in (v_3 t, v_4 t)$ образуются своеобразные прогрессивно-стоячие волны.

2) $\Delta > 0$. Поскольку при $r \in (n_1, n_2)$ подкоренное выражение в M отрицательно, то выражение (2) принимает вид:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad (6)$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{a_{1,2}}^{a_{1,2}^2} F(r) (e^{iM_1} + e^{iM_2}) dr, \quad (7)$$

$$\zeta_3 = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi n_1}} \int_{a_1}^{n_2} F(r) (e^{iN} + e^{-iN}) \cos(vr) dr, \quad (8)$$

$$N = (\gamma_1 c_1^2 r^2 - \xi_1 r^3 - g_1 r)^{1/2} \quad (N^2 \geq 0), \quad a_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = n_1, \quad a_2 = n_2, \quad \bar{a}_2 = \infty.$$

При $r \in (0, n_1) \cup (n_2, \infty)$ стационарные точки в интегралах (7) определяются из уравнений (3). Анализ показывает, что при $r \in (0, n_1)$ функция $\varphi(r)$ является монотонно убывающей; при $r \in (n_2, \infty)$ $\varphi(r)$ имеет единственный минимум в точке r^0 . При этом $0 < m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < r^0 < \infty$, $\varphi(m_1) = 0$, $\varphi(r^0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(n_2 + 0) = \varphi(\infty) = \infty$, $\varphi(n_1 - 0) = -\infty$. Применяя теперь к интегралам (6) метод стационарных фаз, имеем

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \mu_1(\bar{r}_1) + \mu_2(\bar{r}_2) + O(t^{-1}), \quad (9)$$

где

$$\mu_{1,2}(r) = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{F(r)}{\sqrt{|M'|}} \cos\left(tM_{1,2}(r) \pm \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}),$$

$\zeta_{1,2}$ определяются формулами (5), причем $n_2 < r_{1,3} < r^0 < r_{2,4} < \infty$, а $\bar{r}_{1,2}$ являются корнями уравнений (3) при $r \in (0, n_1)$.

Для интеграла (8) имеем:

$$\zeta_3 = \zeta_{31} + \zeta_{32},$$

$$\zeta_{3k} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{a_1}^{n_2} F(r) e^{iNk} dr \quad (k = 1, 2), \quad (10)$$

$$N_{1,2} = ivr \pm N(r) \quad (N(n_{1,2}) = 0).$$

Так как $N'_{1,2}(r)$ не обращаются в ноль на промежутке интегрирования, то, проводя вычисление интегралов (10) по частям, легко показать, что $\zeta_{3k} = O(t^{-2})$.

Таким образом, при $\Delta > 0$ вид поверхности раздела определяется формулами (9). В данном случае $n_2 \gg 1$, а $F(r)$ при $r \rightarrow \infty$ убывает, по крайней мере, как r^{-1} ; поэтому амплитуды волн $\zeta_{1,2}$ в (9) весьма малы по сравнению с аналогичными волнами в случае $|c_1| < c^0$, хотя они во многом похожи.

Неустановившиеся волны $\mu_{1,2}$ покрывают всю поверхность раздела и в сумме представляют собой прогрессивно-стоячие волны, амплитуда которых зависит от x и t и затухает как $t^{-1/2}$.

Таким образом, наличие сил поверхностного натяжения приводит к устойчивости внутренних волн в случае, когда потоки верхнего и нижнего слоев имеют различные по величине или по направлению скорости. Заметим, что на функцию начального смещения поверхности раздела существенных ограничений не накладывалось: $f(x)$ должна быть представима интегралом Фурье. Образующиеся при этом в некоторых случаях неустановившиеся волны отличны от традиционных и могут носить характер прогрессивно-стоячих волн.

1. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 137.
 2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Волны в неоднородном море. Киев, 1983.
 3. Гандин Л. С. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1957. № 3. С. 407.
 4. Куликовский А. Г., Шикина И. С. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 12.
 5. Сретенский Л. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1955. № 6. С. 505.
- Поступила в редакцию 22.02. 94.

УДК 517.917

Б. В. ЗАДВОРНЫЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОБЩЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Variables transformations are applied to an investigation of relative behavior of integral curves. The extended continuous dependence of diagonal systems solutions are studied.

1. В [1] для задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(s) = \xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с $D = [s, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, определяется понятие обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных (условие А). Обозначая: решения задачи (1) $x(t) = x(t; s, \xi)$ (в [1] s было фиксировано), правый максимальный промежуток существования этого решения $[s, \beta(s, \xi)[$; для $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$ соответственно $x_0(t) = x(t; s_0, \xi_0)$, $[s_0, \beta(s_0, \xi_0)[= [s_0, \beta_0[$; $\gamma_0 = \{ (t, x_0(t)), t \in [s_0, \beta_0[\}$ — интегральная кривая решения $x_0(t)$ в пространстве переменных t, x ; $|\cdot|, \|\cdot\|$ — евклидово расстояние между точками в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , $d(\cdot, \cdot)$ — расстояние от точки до множества в \mathbb{R}^{n+1} , дадим следующее определение условию А.

Определение. Решения задачи (1) обобщенно непрерывно зависят от начальных значений (s, ξ) при $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall (s, \xi), (s_0, \xi_0) \leq \delta(\epsilon), \forall t \in [s, \beta(s, \xi)[$,

$$\exists \bar{t} \in [s_0, \beta_0[\Rightarrow \|(t, x(t; s, \xi)) - (\bar{t}, x_0(\bar{t}))\| \leq \epsilon.$$

Примечания. 1) Везде в этой статье будем рассматривать продолжение решений вправо от s , а $D = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, t_0 \leq s$. 2) Последнюю строчку в определении можно заменить условием $d((t, x(t; s, \xi)), \gamma_0) \leq \epsilon$.

В [2] указывается, что условие А занимает промежуточное положение между устойчивостью по Ляпунову и орбитальной устойчивостью (в случае продолжимости лишь на конечный промежуток речь идет о решениях специальной вспомогательной задачи), откуда возникает идея использования для исследований метода функций Ляпунова [1]. В предлагаемой статье применяется нелинейный аналог преобразования Ляпунова, сохраняющий выполнение или невыполнение условия А, что в принципе позволяет упростить исследование некоторых систем. С этой целью в п. 3 рассматривается обобщенная непрерывная зависимость решений диагональных уравнений, которые, впрочем, и сами по себе представляют интересные случаи взаимного расположения интегральных кривых в окрестности концов промежутка существования.

2. Рассмотрим диффеоморфизм $L: D \rightarrow E \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$L(t, x) = (L_0(t, x), L_1(t, x), \dots, L_n(t, x)) = (\tau, y_1, \dots, y_n) = (\tau, y)$, преобразующий задачу (1) в задачу

$$dy/d\tau = g(\tau, y), \quad y(\sigma) = \eta, \quad (\sigma, \eta) = L(s, \xi), \quad g: E \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Заметим следующее:

1) Расстояние между образами $(\tau, y), (\tau', y') \in E$ точек $(t, x), (t', x') \in D$ можно оценить с помощью теоремы о модуле конечного приращения дифференцируемого отображения:

$$\|(\tau, y), (\tau', y') \| \leq M \cdot \|(t, x), (t', x') \|,$$

где M — верхняя грань нормы матрицы Якоби отображения L на отрезке, соединяющем точки (t, x) и (t', x') ;

2) Для любой замкнутой окрестности U точки $(s, \xi) \in D$ найдется замкнутая окрестность V точки $(\sigma, \eta) \in E$ такая, что прообраз множества V целиком лежит в U , т. е. $L^{-1}(V) \subset U$.

Учитывая эти замечания, несложно получить достаточное условие сохранения условия A при преобразовании L .

Теорема 1. Если все частные производные $\partial L_j / \partial t$, $\partial L_j / \partial x_i$, $j = 0, 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n$, ограничены в области D , то выполнение условия A для решений задачи (1) с любыми начальными значениями (s, ξ) обеспечивает выполнение условия A для решений соответствующей начальной задачи (2).

Следствие. Если все частные производные обратного отображения $L^{-1}(\tau, y) = (t, x)$ также окажутся ограниченными (на E), то задачи (1) и (2) эквивалентны в смысле выполнения условия A .

3. Будем далее рассматривать задачу (1) с диагональной функцией $f(t, x)$, т. е. $f(t, x) = (f_1(t, x_1), \dots, f_n(t, x_n))$. Ясно, что компоненты $x_1(t), \dots, x_n(t)$ решения такой задачи являются сужениями продолженных решений одномерных задач

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i), \quad x_i(s) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3_1)$$

на промежутки $[s, \beta(s, \xi)]$ (ξ_i — компоненты вектора ξ). Обозначив $\beta_i = \beta_i(s, \xi_i)$ правый конец максимального промежутка существования решения задачи (3₁), очевидно, будем иметь:

$$\beta = \beta(s, \xi) = \min \{ \beta_i(s, \xi_i), \quad i = 1, \dots, n \}, \quad (4)$$

причем β как функция начальных значений будет непрерывна в точке (s, ξ) , если окажется непрерывной функция $\beta_k(s, \xi_k)$, на которой достигается минимум в (4) (если таких функций β_k несколько, то достаточно непрерывности одной из них).

Для диагональных уравнений исследование условия A можно во многих случаях свести к изучению поведения отдельных компонент их решений. В дальнейшем изложении интерес представляет только случай конечного значения $\beta(s, \xi)$, что мы и будем предполагать. Кроме того, всюду далее $f(t, x)$ определена и непрерывна во всем пространстве R^{n+1} ($D = R^{n+1}$) и каждая точка интегральной кривой γ_0 является точкой локальной единственности.

Рассмотрим два естественных случая поведения решений задачи (1) с начальными значениями (s, ξ_0) (ξ_i^0 — компоненты вектора ξ_0).

Теорема 2. Пусть для некоторого k , $1 \leq k \leq n$, выполняется $\beta_0 = \beta_k(s_0, \xi_k^0)$, причем функция β_k непрерывна в точке (s_0, ξ_k^0) , и $\beta_i(s_0, \xi_i^0) > \beta_0$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq k$. Тогда решения задачи (1) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных при $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$.

Теорема 3. Если существуют по крайней мере два номера k и l , $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n$, такие, что $\beta_0 = \beta_k(s_0, \xi_k^0) = \beta_l(s_0, \xi_l^0)$, причем функции $\beta_i(s_0, \xi_i)$ непрерывны и строго монотонны по ξ_i в некоторых окрестностях значений ξ_i^0 , а функции $f_i(t, x_i)$ сохраняют знак ($\text{sign } f_i$) на некоторых множествах $\{ (t, x_i), t \in [\beta_0 - r, \beta_0], (\text{sign } f_i) \cdot x_i \geq M \}$, $i = k, l$, $r > 0$ — сколь угодно мало, $M > 0$, то решения задачи (1) не удовлетворяют условию A при $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$.

Утверждение теоремы 2 следует из того, что для любого достаточно малого $\epsilon > 0$:

1) имеет место обычная непрерывная зависимость решений задачи (3_k) от начальных данных в точке (s_0, ξ_k^0) на отрезке $[s_0, \beta_0 - \epsilon]$ и решений задач (3_l), $l \neq k$, в точках (s_0, ξ_l^0) на $[s_0, \beta_0 + \epsilon]$, [3];

2) решение $x_0(t) \rightarrow \infty$, а вместе с ним $x_k(t; s_0, \xi_k^0) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \beta_0 - 0$, что вместе с непрерывностью β_k обеспечивает обобщенную непрерывную зависимость решений задачи (3_k) от начальных данных при (s_0, ξ_k^0) (ср. [4]), т. е. для всех (s, ξ) достаточно близких к (s_0, ξ_0) будет выполняться условие приведенного выше определения (в одномерном случае);

3) ввиду 1) и ограниченности непрерывных функций $f_i(t, x_i)$, $i \neq k$, на соответствующих компактных множествах, включающих в себя интегральные кривые задач (3_i) при $(s, \xi_i) = (s_0, \xi_i^0)$, будет выполняться оценка:

$$|x_i(t; s, \xi_i) - x_i(\bar{t}; s_0, \xi_i^0)| \leq c\varepsilon \quad (i \neq k),$$

где t и \bar{t} взяты из определения (см. п. 2)), c — постоянная, которая может быть выбрана сразу для всех i ; s и ξ_i — начальные значения из некоторой окрестности точки (s_0, ξ_0) , которая может быть выбрана настолько малой, чтобы имело место 2).

Доказательство. Пусть для определенности $k = 1$, $l = 2$, и обе функции $\beta_i(s_0, \xi_i)$, $i = 1, 2$, убывают по ξ_i в окрестности точки (s_0, ξ_i^0) . При этом в силу единственности выполняется $x_i(t, s_0, \xi_i^0) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \beta_0 - 0$, $i = 1, 2$. (Другие случаи аналогичны.)

В сколь угодно малой окрестности точки (s_0, ξ_0) всегда найдется точка $(s_0, \bar{\xi})$ с компонентами $\bar{\xi}_1 > \xi_1^0$ и $\bar{\xi}_2 < \xi_2^0$. Тогда решение $x(t; s_0, \bar{\xi})$ определено на $[s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[= [s_0, \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)[$, причем компонента $x_1(t; s_0, \bar{\xi}) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \beta(s_0, \bar{\xi}) - 0$, а компонента $x_2(t; s_0, \bar{\xi})$ ограничена на $[s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[= [s_0, \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)[$, так как $\beta_2(s_0, \bar{\xi}_2) > \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)$.

Для любой точки $t_1 \in [s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[$ найдется точка $t_2 = t_2(t_1)$ такая, что

$$d((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0) = d((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), (t_2, x_0(t_2))).$$

При этом, если t_1 устремить к $\beta(s_0, \bar{\xi})$, будем иметь:

1) либо $t_2(t_1) \rightarrow \beta_0$ при $t_1 \rightarrow \beta(s_0, \bar{\xi})$;

2) либо существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность (t_1^m) такая, что $t_1^m \rightarrow \beta(s_0, \bar{\xi})$ при $m \rightarrow \infty$, и

$$t_2^m = t_2(t_1^m) \leq \beta_0 - \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Однако в первом случае расстояние

$$d((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0) = d((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), (t_2, x(t_2; s_0, \xi_0))) \geq \\ \geq |x_2(t_1; s_0, \bar{\xi}_2) - x_2(t_2; s_0, \xi_2^0)|$$

и неограниченно возрастает при $t_1 \rightarrow \beta(s_0, \bar{\xi})$, а во втором точно так же

$$d((t_1^m, x(t_1^m; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0) \geq$$

$$\geq |x_1(t_1^m; s_0, \bar{\xi}_1) - x_1(t_2^m; s_0, \xi_1^0)| \rightarrow +\infty \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

т. е. в обоих случаях условие А выполняться не может. В силу произвольности $(s_0, \bar{\xi})$ получаем утверждение теоремы.

В заключение укажем, как изменятся условия теорем 2 и 3, если функции $f_i(t, x_i)$ в задачах (3_i) имеют вид $f_i(t, x_i) = c_i(t) \cdot x_i$, т. е. вместо (1) рассмотрим задачу

$$\dot{x} = C(t)x, \quad x(s) = \xi, \quad t \in [s, \beta_0[, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где $C(t) = \text{diag}[c_1(t), \dots, c_n(t)]$, а s считаем фиксированным. Ясно, что интерес здесь представляет случай, когда матрица коэффициентов имеет в точке β_0 разрыв второго рода. При этом максимальный промежуток существования решений (вправо) $[s, \beta(s, \xi)[= [s, \beta_0[$ при любом ξ .

Теорема 4. Пусть выполняется одно из двух условий:

$$1) \overline{\lim}_{t \rightarrow \beta_0 - 0} \int_s^t c_i(\tau) d\tau < +\infty, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$2) \text{ для некоторого } k, 1 \leq k \leq n, \int_{\beta_0 - \varepsilon}^{\beta_0} c_k(\tau) d\tau = +\infty \text{ и } \xi_k^0 \neq 0, \text{ а все остальные}$$

$c_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq k$, ограничены на $[s, \beta_0[$. Тогда решения задачи (5) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных при любом $\xi = \xi_0$.

Теорема 5. Если хотя бы две компоненты матрицы $C(t)$ стремятся

$k + \infty$ при $t \rightarrow \beta_0 - 0$, и интегралы от них на любом отрезке $[\beta_0 - \varepsilon, \beta_0]$ не ограничены, то решения уравнения (5) не могут удовлетворять условию А ни при каких начальных значениях.

Доказательства этих утверждений, несмотря на то, что $\beta(\xi) = \text{const}$, идейно похожи на доказательства теорем 2 и 3.

1. Задворный Б. В. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 332.
2. О н ж е // Материалы республиканской научно-практической конференции творческой молодежи «Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение». Мн., 1988. С. 126.
3. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
4. З а д в о р н ы й Б. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 351.

Поступила в редакцию 01.02.94

УДК 517.925

Б. С. КАЛИТИН, Л. В. КАЛИТИНА

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

The paper deals with the problem of the estimation of regions of asymptotic stability for continuous autonomous nonlinear systems. The assumed problem on the estimation may be reduced to the solution of the special problem of nonlinear programming. The example of application is reported.

Пусть G — открытое множество, содержащее начало координат n -мерного вещественного пространства R^n . Предположим, что G связно и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G, \quad f(0) = 0, \quad (1)$$

где функция $f: G \rightarrow R^n$ непрерывна и обеспечивает единственность решений (1) в G .

Известно, что теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости в прямом методе [1] позволяет оценить область притяжения нулевого решения (см. [2, С. 17]). Обобщение этого утверждения содержится в [3—5] и других работах. Центральное место в этом направлении исследований занимает критерий В. И. Зубова [6, теорема 22], однако в практическом отношении он недостаточно эффективен. Приведем одно из таких утверждений, вытекающее из [4].

Теорема 1. Пусть для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция $V: G \rightarrow R^+$ такая, что:

- 1) $V(x) > 0 \forall x \in G \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;
- 2) область $V_c = \{x \in G \mid 0 \leq V(x) < c\}$ ограничена;
- 3) $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in V_c \setminus \{0\}$.

Тогда нулевое решение (1) асимптотически устойчиво и множество V_c содержится в области притяжения этого решения. Здесь V — производная по времени, вычисленная от функции V в силу системы (1).

В данной статье показывается, что задача о построении наилучшей оценки V_c области асимптотической устойчивости с помощью теоремы 1 может быть сведена к задаче нелинейного программирования. Эта же идея была использована в работах [7, 8] для частного случая систем второго порядка, где в качестве функции Ляпунова взята квадратичная форма.

Определение 1. Непрерывная определенно положительная функция $V: G \rightarrow R^+$ называется *концентрической* на интервале $[0, c^*]$, если множество уровня $V_c = \{x \in G \mid 0 \leq V(x) < c\}$ имеет связное компактное замыкание \bar{V}_c для всех $0 < c < c^*$, содержащееся в области G .

Через c_0 будем обозначать верхнюю грань всех таких чисел c^* (возможно, что $c_0 = +\infty$), т. е. $[0, c_0[$ есть наибольший интервал, на котором V является концентрической.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют окрестность U точки $x = 0$ в G и непрерывно дифференцируемая концентрическая на интервале $[0, c_0[$ функция $V: G \rightarrow R^+$ такая, что:

- 1) $V(x) > 0 \forall x \in G \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;

$$2) \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{0\}.$$

Пусть x^0 — решение задачи нелинейного программирования

$$\begin{cases} V(x) \rightarrow \min, \\ \dot{V}(x) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда для любого числа r такого, что

$$0 < r < \min \{V(x^0), c_0\}, \quad (3)$$

множество

$$V_r = \{x \in G \mid 0 \leq V(x) < r\}$$

расположено в области асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Доказательство. По теореме 1 решение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Пусть x^0 — оптимальный план задачи (2), а число r удовлетворяет (3). Покажем, что имеет место соотношение

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in V_r \setminus \{0\}. \quad (4)$$

С этой целью предположим противное, т. е. существует точка $x^* \in V_r \setminus \{0\}$, что $V(x^*) \geq 0$. Сразу отметим, что равенство $V(x^*) = 0$ в данном случае невозможно, поскольку, иначе, на плане x^* задачи (2) функция $V(x)$ принимала бы значение, меньшее, чем в оптимальной точке x^0 . Следовательно, $V(x^*) > 0$.

Далее, множество V_r есть окрестность нуля и поэтому существует точка $y \in V_r \cap U$, для которой $\dot{V}(y) < 0$. При этом так как множество V_r связано (функция V — концентрическая на интервале $[0, c_0]$), то точки y и x^* можно соединить непрерывной линией, целиком содержащейся в V_r . По построению в концевых точках этой линии непрерывная функция $V(x)$ принимает значения разных знаков. Поэтому в одной из точек линии (пусть это будет в точке $z \neq 0$) неизбежно выполняется равенство $V(z) = 0$ и условие $V(z) < V(x^0)$.

С другой стороны, точка z есть план задачи (2), т. е. $V(z) \geq V(x^0)$ по определению ее решения. Но это приводит нас к противоречию. Таким образом, неравенство (4) справедливо. Отсюда в силу ограниченности множества V_r по теореме 1 и следует требуемое.

Теорема 3. Пусть для непрерывной определенно положительной функции $V: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ существует непрерывная определенно положительная концентрическая на интервале $[0, c^*]$ функция $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$V(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in G. \quad (5)$$

Тогда функция V является также концентрической на $[0, c^*]$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что для множеств уровней $V_c = \{x \in G \mid 0 \leq V(x) < c\}$ и $\varphi_c = \{x \in G \mid 0 \leq \varphi(x) < c\}$ имеет место включение

$$V_c \subset \varphi_c \quad \forall c \in [0, c^*]. \quad (6)$$

Действительно, в противном случае для некоторого значения $c \in [0, c^*]$ существует точка $y \in V_c \cap G$, для которой одновременно выполнялись бы неравенства $V(y) < c$ и $\varphi(y) \geq c$. Однако это противоречило бы заданному неравенству (5), т. е. соотношению (6) справедливо.

Докажем теперь связность замыкания \bar{V}_c для $0 < c < c^*$. Поскольку функция φ концентрическая, то множество φ_c компактно и связно. Из (6) следует, что $V_c \subset \varphi_c$, т. е. V_c также компактно. Если V_c несвязно, то его можно представить как объединение двух непересекающихся множеств W_1 и W_2 , каждое из которых непусто и компактно. Заметим, что функция V определенно положительная, это, в частности, означает, что V_c есть окрестность нуля. Поэтому, не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что W_2 есть компактная связная окрестность начала \mathbb{R}^n . Пусть x^0 есть решение задачи нелинейного программирования $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in Fr W_2$, где $Fr W_2$ — граница множества W_2 . Тогда ясно, что справедливы соотношения

$$\bar{\varphi}_c(x^0) \subset W_2, \quad V(x^0) = c. \quad (7)$$

Кроме того, так как $W_2 \subset \bar{V}_c \subset \bar{\varphi}_c$, то $\varphi(x^0) \leq c$.

С другой стороны, на основании (5), $c = V(x^0) \geq \varphi(x^0)$. Следовательно, имеем равенство $c = \varphi(x^0)$. Поэтому из (7) вытекают условия: $W_1 \cap \Phi_{\varphi(x^0)} = W_1 \cap \Phi_c = \emptyset$. Но последнее невозможно на основании (6), так как $\text{Fr} W_1 \cap \bar{V}_c \neq \emptyset$. Следовательно, \bar{V}_c связно. Теорема 3 доказана.

Пример. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -bf(x_1) - ax_2, \end{cases} \quad (8)$$

где $a > 0$, $b > 0$; $f(x_1) = \sin(x_1 + \delta) - \sin \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

Возьмем семейство функций Ляпунова

$$V(x) = b \int_0^{x_1} f(t) dt + \frac{x_2^2}{2} + \lambda \left(b \int_0^{x_1} f(t) dt + \frac{(ax_1 + x_2)^2}{2} \right), \quad \lambda > 0.$$

Производная по времени от нее, равная

$$\dot{V}(x) = -\lambda_1 x_1 f(x_1) - ax_2^2, \quad \lambda_1 = \lambda ab,$$

является определенно отрицательной функцией для

$$-(\pi + 2\delta) < x_1 < \pi - 2\delta. \quad (9)$$

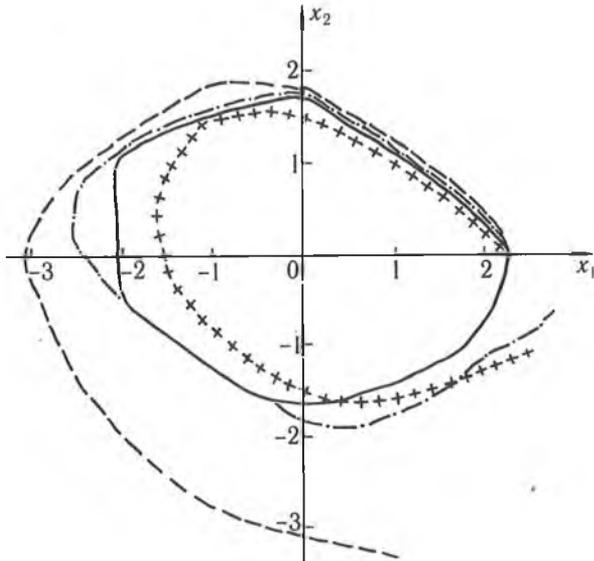
В полосе (9) плоскости R^2 функция V определенно положительна и, кроме того, имеет место оценка

$$V(x) \geq \frac{x_2^2}{2} + \lambda \frac{(ax_1 + x_2)^2}{2}.$$

Поэтому по теореме 3 функция V является концентрической, по крайней мере, на интервале $[0, c[$ при условии, что эллипс

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{(ax_1 + x_2)^2}{2} = c$$

не выходит за границу вертикальной полосы (9). Производя необходимые вычисления, легко видеть, что наибольшее значение c , при котором указанный эллипс содержится в замыкании области (9), соответствует значению $c = c_0 = \frac{1}{4} a^2 (\pi - 2\delta)^2$. Следовательно, функция V является концентрической на максимальном в данном случае интервале $[0, c_0[$.



Решая для каждого значения $\lambda > 0$ задачу оптимизации (2), получим семейство оценок области асимптотической устойчивости нулевого решения системы (8). Объединение этого семейства по всем $\lambda > 0$ дает

некоторую суммирующую оценку области притяжения, которая изображена на рисунке сплошной линией для наборов значений параметров задачи $a = 0,3$; $v = 1$; $\delta = 0,412$.

Для сравнения приведены оценки области притяжения системы (8), полученные методом Попова (на рис. обозначены + + +) и ТОП-методом (— · — · —) в [9] с теми же значениями параметров a , v , δ . Пунктирной линией отмечена точная граница области притяжения, построенная в [9].

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. М., 1990.
3. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Л а - С а л л ь Ж., Л е ф ш е ц С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
5. А б д у л л и н Р. З., А н а п о л ь с к и й Л. Ю. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М., 1987.
6. З у б о в В. И. Устойчивость движения. М., 1984.
7. С к и б е н к о В. П., О к у н е в а В. М. // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1982. С. 127.
8. О н и ж е // Численные методы анализа и их приложения. Иркутск, 1983. С. 98.
9. G u r u g r a s a d a V. R., K r i s h n a m o o r t h y N. // Electrical Power and Energy Systems. 1989. V. 11.

Поступила в редакцию 04.06.93.

УДК 517.977

А. И. КАЛИНИН

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ*

An algorithm for the construction of an asymptotically optimal controller for a linear singularly perturbed system is described.

1. В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий рассмотрим следующее семейство задач терминального управления линейной стационарной системой:

$$J(u) = c_1^T y(t^*) + \mu c_2^T z(t^*) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(\tau) = y^*,$$

$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(\tau) = z^*, \quad (2)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \quad T = [\tau, t^*], \quad (3)$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2, \quad (4)$$

где μ — малый положительный параметр, y , z , g_1 , g_2 — векторы размерности n_1 , n_2 , m_1 , m_2 соответственно ($m_1 < n_1$, $m_2 \leq n_2$), а остальные элементы задач имеют соответствующие размеры. Предполагается, что:

а) матрица A_4 является устойчивой, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Кусочно-непрерывное управление $u(t, \mu)$, $t \in T$, для которого выполнено условие (3), назовем допустимым, если порожденная им траектория системы (2) удовлетворяет терминальным ограничениям (4). Если же равенства (4) выполняются с точностью до $O(\mu)$, то управление будем называть асимптотически допустимым. Асимптотически допустимое управление назовем асимптотически оптимальным, если оно отклоняется по критерию качества (1) от оптимального управления на величину порядка $O(\mu)$.

В реальных условиях динамические системы функционируют в присутствии возмущений, не учтенных в модели (1)–(4). Предположим, что в некотором конкретном случае поведение системы на промежутке

* Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

времени $[0, t^0]$, $t^0 < t^*$, описывается не уравнениями (2), а следующими уравнениями:

$$\dot{y}^* = A_1 y^* + A_2 z^* + b_1 u + \omega_1(y^*, z^*, t),$$

$$\dot{z}^* = A_3 y^* + A_4 z^* + b_2 u + \omega_2(y^*, z^*, t),$$

где ω_1, ω_2 — неизвестные кусочно-непрерывные вектор-функции помех. Никакой априорной информацией о помехах мы не располагаем, однако можем замерять состояние $y^*(\tau), z^*(\tau)$ системы в любой момент времени $\tau \in [0, t^0]$. Устройство, способное в каждом конкретном процессе вычислять в режиме реального времени асимптотически оптимальное управление для любой реализовавшейся начальной позиции $(\tau, y^*(\tau), z^*(\tau))$, $\tau \in [0, t^0]$, назовем асимптотически оптимальным регулятором. Асимптотически оптимальное управление определено нами для модели, не учитывающей помехи. Соответственно с этим асимптотически оптимальный регулятор парирует только те возмущения, которые реализовались к текущему моменту. Информация о них заложена в текущем состоянии системы, которое рассматривается как начальное. Регулятор не учитывает возмущения, которые реализуются в дальнейшем, поскольку никакой информации о них не имеется.

В [1] предложен метод синтеза оптимальных управлений типа обратной связи для линейных систем. В [2] описан конструктивный подход к построению асимптотически оптимальных программных управлений для сингулярно возмущенных систем. Цель данной статьи — опираясь на методы, изложенные в [1, 2], описать алгоритм работы асимптотически оптимального регулятора.

Заметим, что непосредственное построение оптимального регулятора, предложенного в [1], в данном случае встречает серьезные трудности, поскольку прямая и сопряженная динамические системы при малом μ являются жесткими [3]. Асимптотический подход позволяет избежать интегрирования жестких систем. Кроме того, при его применении происходит своеобразная декомпозиция исходной задачи на две задачи меньшей размерности.

2. Пусть в начальный момент $\tau = 0$ система находилась в состоянии (y_0, z_0) . Предположим, что регулятор построен и проработал на промежутке $[0, \tau]$, $\tau < t^0$. Обозначим через $(y^*(\tau), z^*(\tau))$ состояние динамической системы, в котором она оказалась в момент τ под действием выработанного регулятором управления и реализовавшего возмущения. Асимптотически оптимальное программное управление в задаче (1) — (4) с $y^* = y^*(\tau), z^* = z^*(\tau)$ может быть построено с помощью алгоритма, описанного в [2]. Заключается он в следующем. Прежде всего решается вырожденная задача

$$c_1^0 y(t^*) \rightarrow \max, \dot{y} = A_0 y + b_0 u, y(\tau) = y^*(\tau),$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in T, H_1 y(t^*) = g_1, \quad (5)$$

где $A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$, $b_0 = b_1 - A_2 A_4^{-1} b_2$. Согласно [4], оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в нормальной вырожденной задаче имеет вид: $u^0(t) = \text{sgn } \Delta(t)$, $t \in T$, где

$$\Delta(t) = \psi'(t) b_0, \psi' = -A_0' \psi, \psi(t^*) = c_1 - H_1' \lambda(\tau),$$

а $\lambda(\tau)$ — вектор множителей Лагранжа. Обозначим через $t_1(\tau), \dots, t_l(\tau)$ ($l = l(\tau)$) нули коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$, занумеровав их в порядке возрастания. Считаются выполненными условия:

б) $t_1(\tau) > \tau$; в) $t_j(\tau) < t^*$, $\Delta(t_j(\tau)) \neq 0$, $j = \overline{1, l}$;

г) $\text{rank } (\varphi(t_j(\tau)), j = \overline{1, l}) = m_1$,

где $\varphi(t) = H_1 F(t) b_0$, $t \in [0, t^*]$, а $F(t)$, $t \in [0, t^*]$, — $(n_1 \times n_1)$ -матричная функция, являющаяся решением дифференциального уравнения $\dot{F} = -FA_0$, $F(t^*) = E$. Заметим, что условие г) обеспечивает нормальность задачи (5).

Нули $t_j(\tau)$, $j = \overline{1, l}$, коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$, (точки переключения

оптимального управления вырожденной задачи) и вектор множителей Лангранжа $\lambda(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{j=0}^1 \alpha_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(t) dt + H_1 F(\tau) y^*(\tau) - g_1 = 0, \\ (c_1' - \lambda' H_1) F(t_j) b_0 = 0, \quad j = \overline{1, 1}, \quad (6)$$

где $t_0 = \tau$, $t_{1+1} = t^*$, $\alpha_0 = \text{sgn } \Delta(\tau + 0)$, $\alpha_j = -\alpha_{j-1}$, $j = \overline{1, 1}$.

После решения вырожденной задачи решается следующая задача оптимального управления с нефиксированной длительностью процесса:

$$c'(\tau) z(0) - |\Delta(t^*)| \int_{s^*}^0 (u(s) + 1) ds \rightarrow \max, \\ \sqrt{\frac{dz}{ds}} = A_4 z - \alpha_1 b_2 u, \quad s \leq 0, \quad z(s^*) = -\alpha_1 A_4^{-1} b_2, \quad (7)$$

$$|u(s)| \leq 1, \quad H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1} A_3 y_r^0(t^*) + g_2,$$

где $c'(\tau) = c_2' + (c_1' - \lambda'(\tau) H_1) A_2 A_4^{-1}$, а $y_r^0(t)$, $t \in T_r$, — оптимальная траектория в вырожденной задаче. Задача (7), которую будем называть второй базовой, обладает одной интересной особенностью: начальное состояние $-\alpha_1 A_4^{-1} b_2$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(s) \equiv -1$, которое обращает в нуль подынтегральное выражение в критерии качества. Поэтому если вторая базовая задача имеет решение, то множество оптимальных начальных моментов в ней представляет собой бесконечный полуинтервал $]-\infty, s^0(\tau)[$. Как следствие, эта задача эквивалентна аналогичной задаче с фиксированной, но достаточно большой длительностью процесса. Согласно [4], оптимальное управление $u^*(s)$, $s \in [s^*, 0]$, в нормальной задаче (7) имеет вид: $u^*(s) = \text{sgn } \Pi \Delta_r(s)$, $s \in [s^*, 0]$, где $\Pi \Delta_r(s) = -\alpha_1 \Pi \Psi_r'(s) b_2 - |\Delta(t^*)| \frac{d}{ds} \Pi \Psi_r = -A_4 \Pi \Psi_r$, $\Pi \Psi_r(0) = c(\tau) - H_2 v(\tau)$, а $v(\tau)$ — вектор множителей Лагранжа. Пусть $s_1(\tau), \dots, s_p(\tau)$ ($p = p(\tau)$) — нули функции $\Pi \Delta_r(s)$, $s \leq 0$, упорядоченные по возрастанию. Будем считать, что:

$$д) s_p(\tau) < 0; \quad е) \frac{d}{ds} \Pi \Delta_r(s_i(\tau)) \neq 0, \quad i = \overline{1, p};$$

$$ж) \text{rank}(\Pi \varphi(s_i(\tau))), \quad i = \overline{1, p} = m_2,$$

где $\Pi \varphi(s) = H_2 G(s) b_2$, $s \leq 0$, а $G(s)$, $s \leq 0$, — $(n_2 \times n_2)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4, \quad G(0) = E.$$

Если момент s^* выбран достаточно малым, то $s_1(\tau) = s^0(\tau)$, а $u^*(s) = -1$, $s \in [s^*, s_1(\tau)[$. Точки переключения оптимального управления $s_1(\tau), \dots, s_p(\tau)$ и вектор множителей Лангранжа $v(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\alpha_1 \left(\int_{-\infty}^{s_1} \Pi \varphi(s) ds - \int_{s_1}^{s_2} \Pi \varphi(s) ds + \dots + (-1)^p \int_{s_p}^0 \Pi \varphi(s) ds \right) - \\ - H_2 A_4^{-1} A_3 y_r^0(t^*) - g_2 = 0, \quad (8)$$

$$(c'(\tau) - v' H_2) G(s_i) b_2 + (c_1' - \lambda'(\tau) H_1) b_0 = 0, \quad i = \overline{1, p}.$$

В дальнейшем уравнения (6), (8) будем называть определяющими.

Согласно [2], при выполнении условий а)—ж) релейное управление $u^0(t|\tau, y^*(\tau))$, $t \in T_r$, с точками переключения $t_1(\tau), \dots, t_l(\tau)$, $t^* + \mu_{s_1}(\tau), \dots, t^* + \mu_{s_p}(\tau)$, которое на первом промежутке постоянства принимает значение α_0 , будет асимптотически оптимальным управлением в задаче (1)—(4) с $y^* = y^*(\tau)$, $z^* = z^*(\tau)$. Заметим, что это управление не зависит от $z^*(\tau)$.

3. Опишем алгоритм работы асимптотически оптимального регулятора, считая выполненным условие а). Перед включением регулятора решаются базовые задачи (5), (7) при $\tau=0$, $y^*(0) = y_0$. В результате станут известны стартовые значения $t_1(0), \dots, t_l(0), s_1(0), \dots, s_p(0), \lambda(0), v(0)$ ($l=l(0), p=p(0)$). Далее на промежутке $[0, t^0]$ выбирается сетка $T_h^0 = \{0, h, \dots, kh\}$, $t^0 = kh$. С началом функционирования системы управления в режиме реального времени решаются уравнения (6), (8) последовательно при $\tau = h, 2h, \dots, kh$ путем коррекции предыдущих решений. Алгоритм решения уравнений (6) в режиме реального времени описан в [1]. Уравнения (8) по структуре аналогичны (6) и могут быть решены по той же схеме.

В результате решения определяющих уравнений для каждого $\tau = h, 2h, \dots, kh$ будут известны числа $t_1(\tau), \dots, t_l(\tau), s_1(\tau), \dots, s_p(\tau)$ ($l=l(\tau), p=p(\tau), \tau \leq t_1(\tau) < \dots < t_l(\tau) < t^*, s_1(\tau) < \dots < s_p(\tau) \leq 0$). Предполагается, что для любой реализовавшейся позиции $(\tau, y^*(\tau))$, $\tau \in T_h^0$, выполнены условия в), г), е), ж). На каждом шаге регулятор строит асимптотически оптимальное управление $u_{\tau}^0(t | \tau, y^*(\tau))$, $t \in T_{\tau}$, по правилу, описанному в п. 2. Заметим, что при этом не исключаются случаи, когда $t_1(\tau) = \tau, s_p(\tau) = 0$. Понятно, что если $t_1(\tau) = \tau$, то первой точкой переключения асимптотически оптимального управления будет $t_2(\tau)$. Если $s_p(\tau) = 0$, то это управление последний раз переключается в точке $t^* + \mu s_{p-1}(\tau)$. На промежутке $[0, t^0]$ динамическая система будет изменять свое состояние под действием выработанного регулятором управления $u_{\tau}^*(t) = u_{\tau}^0(t | \tau, y^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h[$, и реализовавшегося возмущения. В случае $t_1(\tau) = \tau$ возникает опасность появления скользящего режима. Чтобы избежать ее, описанный алгоритм можно дополнить правилом, «запрещающим» управлению $u_{\tau}^*(t)$, $t \in [0, t^0]$, иметь точки переключения, отстоящие друг от друга на расстояние, меньшее γ , где γ — некоторый заданный параметр. Как видно из изложенного, для построения регулятора не обязательно располагать информацией о быстрой переменной z .

1. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К о с т ю к о в а О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.

2. К а л и н и н А. И. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 3. С. 366.

3. Р а к и т с к и й Ю. В., У с т и н о в С. М., Ч е р н о р о у ц к и й И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.

4. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.

Поступила в редакцию 24.03.94.

УДК 517.968

А. П. ШИЛИН

БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С МАТРИЦАМИ, БЛИЗКИМИ К КУСОЧНО-ТЕПЛИЦЕВОЙ И КУСОЧНО-ГАНКЕЛЕВОЙ

Some discrete convolution equation is solved.

Рассмотрим систему

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} x_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n,k} \overline{x_k} = g_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1)$$

Предположим, что двусторонние последовательности комплексных чисел $\{g_n\}$, $\{x_n\}$, а также

$$\dots, a_{-3,-1}, a_{-2,-1}, a_{-1,-1}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, \dots, \quad (2)$$

$$\dots, a_{-1,-3}, a_{-1,-2}, a_{-1,-1}, a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots \quad (3)$$

принадлежат классу $\{1\}$ [1]. Те коэффициенты $a_{n,k}$ системы (1), которые

являются членами последовательностей (2) и (3), зададим, причем $a_{-1,-1} = a_{0,0} = 1$, а остальные коэффициенты $a_{n,k}$ и коэффициенты $b_{n,k}$ выразим через них следующим образом:

$$a_{-1,k} = a_{0,k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad a_{0,k} = a_{-1,k-1}, \quad k = -1, -2, -3, \dots;$$

$$a_{n,k} = a_{n+1,k+1} + a_{0,k+1} \cdot a_{n,-1}, \quad n = -2, -3, -4, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,0} \cdot a_{-1,k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = -2, -3, -4, \dots;$$

$$a_{n,k} = a_{n+1,k+1} + a_{n,-1} \cdot a_{-1,k}, \quad n = -2, -3, -4, \dots, \quad k = -2, -3, -4, \dots;$$

$$a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,0} \cdot a_{0,k+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_{n,k} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_{n,k} = -a_{n,-k}, \quad n = 0, -1, -2, \dots, \quad k = -1, -2, -3, \dots \text{ и } n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$k = -n-1, -n-2, -n-3, \dots; \quad b_{n,-n} = 1 - a_{n,n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_{n,k} = a_{n+k-1,-1} + a_{n+k,0} - a_{n,-k}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad k = -1, -2, \dots, -n+1.$$

В [1. С. 225] приведена матрица дискретного аналога интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами. Это кусочно-теплицева матрица, два «куска» ее теплицевости соответствуют значениям индексов $k \leq -1$ и $k \geq 0$. Можно считать, что в каждом «куске» заданы элементы с такими же индексами, как и индексы у членов последовательностей (2) и (3), а остальные элементы находятся согласно требованию теплицевости. С указанной матрицей интересно сопоставить матрицу $(a_{n,k})$: в матрице $(a_{n,k})$ также естественно выделить «куски» при $k \leq -1$ и $k \geq 0$ и отметить, что элементы этой матрицы выражаются через члены последовательностей (2) и (3). Матрица $(a_{n,k})$ уже не является кусочно-теплицевой, но тем не менее при достаточно больших значениях $|n|$ или $|k|$ в каждом ее «куске» $a_{n,k} \approx a_{n+1,k+1}$, так что эта матрица близка к кусочно-теплицевой. Похожим образом устроена и матрица $(b_{n,k})$, являясь близкой к кусочно-ганкелевой.

Предположим, что функции

$$A_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} t^n, \quad A_2(t) = \sum_{n=-\infty}^0 a_{n,-1} t^n,$$

$$A_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} t^{-k}, \quad A_4(t) = \sum_{k=-\infty}^0 a_{-1,k-1} t^{-k}$$

не обращаются в нуль при $|t| = 1$.

Введем обозначения: η_n — нули функции $A_1(z)$ в области $|z| < 1$, μ_r — соответствующие кратности этих нулей, $\alpha = 1, 2, \dots, r$; θ_s — нули функции $A_2(z)$ в области $|z| > 1$, ν_β — соответствующие кратности этих нулей, $\beta = 1, 2, \dots, s$; z_m — нули функции $A_3(\bar{z}^{-1})A_4(z)$ в области $|z| < 1$, ϵ_m — соответствующие кратности этих нулей, $Q_m(k)$ — многочлены степеней $\epsilon_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $m = 1, 2, \dots, q$;

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{A_1(t)t^{n+1}}, \quad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{A_2(t)t^{n+1}},$$

$$w_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{|A_3(t)|^2 A_4(t)t^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Непосредственно проверяется, что решение системы (1) сводится к последовательному решению систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n a_{n-k,0} y_k = g_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \sum_{k=-n}^{-1} a_{n-k-1,-1} y_k = g_n, \quad n = -1, -2, -3, \dots, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=n}^{\infty} a_{0,k-n} x_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{-1,k-n-1} x_k - \sum_{k=-\infty}^{-n} a_{0,-k-n} \bar{x}_k + \\ + \sum_{k=-n}^{-1} a_{-1,-k-n-1} \bar{x}_k = y_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k-n} x_k + \sum_{k=-\infty}^{\min(-1,n)} a_{-1,k-n-1} x_k - \\ - \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{0,-k-n} \bar{x}_k = y_n, \quad n = 0, -1, -2, \dots \end{array} \right. \quad (5)$$

Этот неочевидный факт удалось обнаружить благодаря некоторой аналогии системы (1) с дискретным уравнением, обратным уравнению Винера—Хопфа [2].

Системы (4) и (5) имеют коэффициенты с разностными или суммарными индексами, и их можно решить методами, изложенными в [1]. Эти методы основаны на использовании преобразования Лорана с последующим решением возникающих краевых задач для аналитических функций.

На решении системы (4) не останавливаемся: ее легко истолковать как частный случай дискретного аналога интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами.

Остановимся на решении системы (5). После преобразования Лорана эта система перейдет в соотношение, которому можно придать вид

$$A_3(t)F^+(t) + A_4(t)R(t) = Y(t), \quad |t| = 1, \quad (6)$$

где $F^+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_{-n}} t^n$ есть H -непрерывное предельное значение функции, аналитической в единичном круге,

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_{-n}} t^n \quad (7)$$

есть H -непрерывная действительная функция, $Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n t^n$.

Вводя обозначение $H(t) = \frac{Y(t)}{|A_3(t)|^2 A_4(t)}$, преобразуем соотношение (6) следующим образом:

$$\frac{F^+(t)}{A_3(t)A_4(t)} - H^+(t) = H^{(R)}(t) - \frac{R(t)}{|A_3(t)|^2}, \quad (8)$$

где функция $H^+(t) = i \operatorname{Im} H(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[H(\tau) - \frac{\overline{H(\tau)}t}{\tau} \right] \frac{d\tau}{\tau-t}$ аналитически продолжима в единичный круг, а функция $H^{(R)}(t) = \operatorname{Re} H(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left[H(\tau) - \frac{\overline{H(\tau)}t}{\tau} \right] \frac{d\tau}{\tau-t}$ является действительной.

Функция $A_4(t)$ аналитически продолжима в единичный круг. Функ-

ция $A_3(t)$ аналитически продолжима во внешность единичного круга, так что функция $\overline{A_3(t)}$ будет аналитически продолжима по симметрии в единичный круг. Теперь ясно, что обе части соотношения (8) мы должны приравнять к Н-непрерывной действительнoзначной функции на единичной окружности, аналитически продолжимой в единичный круг, кроме, быть может, точек z_m , в которых допускаются полюсы порядка не выше ϵ_m , $m = 1, 2, \dots, q$. Общий вид такой функции

$$\Psi(t) = \delta + \sum_{m=1}^q \sum_{j=1}^{\epsilon_m} \left[\frac{p_{mj}}{(t-z_m)^j} + \frac{\overline{p_{mj}t^j}}{(1-tz_m)^j} \right],$$

где δ — произвольная действительная постоянная, p_{mj} — произвольные комплексные постоянные.

Теперь найдем $F^+(t) = \overline{A_3(t)}A_4(t) [H^+(t) + \Psi(t)]$, $R(t) = |A_3(t)|^2 [H^{(R)}(t) - \Psi(t)]$.

Из формулы (7) видно, что обратное преобразование Лорана от функции $R(t)$ должно иметь нулевую компоненту, равную нулю. Этому всегда можно добиться надлежащим подбором постоянной δ . Для получения решения исходной системы (1) останется найти сумму $F^+(t) + R(t)$ и выполнить обратное преобразование Лорана. Подробные выкладки приводят к следующему результату.

Теорема. Для разрешимости системы (1) необходимы и достаточны условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n n^j \eta_n^\alpha = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \mu_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} g_n n^j \theta_n^\beta = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \nu_\beta - 1, \quad \beta = 1, 2, \dots, s,$$

при выполнении которых общее решение дается формулами:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\left(\varphi_{n-k} - \frac{\psi_n \psi_{-k}}{\psi_0} \right) \sum_{m=1}^q z_m^{-k} Q_m(k) + \right. \\ \left. + \left(\varphi_{n+k} + \frac{\psi_n \psi_k}{\psi_0} \right) \sum_{m=1}^q \overline{z_m^{-k}} \overline{Q_m(k)} \right] + \omega_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$\varphi_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_{0,n-k}} a_{-1,-k-1} - \sum_{k=-\infty}^0 \overline{a_{0,n-k}} a_{0,-k}, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ - \sum_{k=-\infty}^n \overline{a_{0,n-k}} a_{0,-k}, & n = 0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$\psi_n = \sum_{k=-\infty}^0 \overline{a_{0,n-k}} a_{0,-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\omega_n = \sum_{\sigma=-\infty}^0 \overline{a_{0,n-\sigma}} f_\sigma, \quad n = -1, -2, -3, \dots; \quad \omega_0 = \sum_{\sigma=-\infty}^{-1} \overline{a_{0,-\sigma}} f_\sigma + h;$$

$$\omega_n = \sum_{\sigma=1}^n \overline{a_{0,n-\sigma}} \left[\sum_{\gamma=0}^n a_{-1,\gamma-n-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l-k} g_k + \sum_{l=-\infty}^{-1} w_{\gamma-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} d_{l-k} g_k \right) - \right. \\ \left. - \sum_{\gamma=1}^n a_{-1,\gamma-n-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_{l-k}} g_k + \sum_{l=-\infty}^{-1} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=-\infty}^{-1} \overline{d_{l-k}} g_k \right) \right] + \\ + \sum_{\sigma=-\infty}^{-1} \overline{a_{0,n-\sigma}} f_\sigma + \overline{a_{0,n}} h, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$f_{\sigma} = \sum_{\gamma=\sigma}^{-1} a_{0,\gamma-\sigma} \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l-k} g_k + \sum_{l=-\infty}^{-1} w_{\gamma-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} d_{l-k} g_k \right) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_{0,\gamma-\sigma} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_{l-k} g_k} + \sum_{l=-\infty}^{-1} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=-\infty}^{-1} \overline{d_{l-k} g_k} \right),$$

$$\sigma = -1, -2, -3, \dots;$$

$$h = \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l-k} g_k + \sum_{l=-\infty}^{-1} w_{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} d_{l-k} g_k \right) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_{0,\gamma} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_{l-k} g_k} + \sum_{l=-\infty}^{-1} \overline{w_{-\gamma-1}} \sum_{k=-\infty}^{-1} \overline{d_{l-k} g_k} \right).$$

Приведем пример системы (1), записав ее в развернутом виде для лучшей возможности видеть связь между коэффициентами:

$$\dots + \frac{91}{3^4} X_{-3} + \frac{10}{3^3} X_{-2} + \frac{1}{3^2} X_{-1} + \frac{1}{3^2} X_0 + \frac{1}{3^3} X_1 + \frac{1}{3^4} X_2 + \frac{1}{3^5} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{1}{3^5} \overline{X_{-3}} - \frac{1}{3^4} \overline{X_{-2}} - \frac{1}{3^3} \overline{X_{-1}} = 0$$

$$\dots + \frac{10}{3^3} X_{-3} + \frac{10}{3^2} X_{-2} + \frac{1}{3} X_{-1} + \frac{2}{3^2} X_0 + \frac{2}{3^3} X_1 + \frac{2}{3^4} X_2 + \frac{2}{3^5} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{2}{3^5} \overline{X_{-3}} - \frac{2}{3^4} \overline{X_{-2}} - \frac{2}{3^3} \overline{X_{-1}} = 0$$

$$\dots + \frac{1}{3^2} X_{-3} + \frac{1}{3} X_{-2} + X_{-1} + \frac{1}{3} X_0 + \frac{1}{3^2} X_1 + \frac{1}{3^3} X_2 + \frac{1}{3^4} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{1}{3^4} \overline{X_{-3}} - \frac{1}{3^3} \overline{X_{-2}} - \frac{1}{3^2} \overline{X_{-1}} = 0$$

$$\dots + \frac{1}{3^3} X_{-3} + \frac{1}{3^2} X_{-2} + \frac{1}{3} X_{-1} + X_0 + \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3^2} X_2 + \frac{1}{3^3} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{1}{3^3} \overline{X_{-3}} - \frac{1}{3^2} \overline{X_{-2}} - \frac{1}{3} \overline{X_{-1}} = 1$$

$$\dots + \frac{2}{3^4} X_{-3} + \frac{2}{3^3} X_{-2} + \frac{2}{3^2} X_{-1} + \frac{1}{3} X_0 + \frac{10}{3^2} X_1 + \frac{10}{3^3} X_2 + \frac{10}{3^4} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{10}{3^4} \overline{X_{-3}} - \frac{10}{3^3} \overline{X_{-2}} - \frac{1}{3^2} \overline{X_{-1}} = \frac{2}{3}$$

$$\dots + \frac{1}{3^4} X_{-3} + \frac{1}{3^3} X_{-2} + \frac{1}{3^2} X_{-1} + \frac{1}{3^2} X_0 + \frac{10}{3^3} X_1 + \frac{91}{3^4} X_2 + \frac{91}{3^5} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{91}{3^5} \overline{X_{-3}} - \frac{10}{3^4} \overline{X_{-2}} + \frac{8}{3^3} \overline{X_{-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\dots + \frac{4}{3^6} X_{-3} + \frac{4}{3^5} X_{-2} + \frac{4}{3^4} X_{-1} + \frac{1}{3^3} X_0 + \frac{10}{3^4} X_1 + \frac{91}{3^5} X_2 + \frac{820}{3^6} X_3 + \dots -$$

$$- \frac{91}{3^6} \overline{X_{-3}} + \frac{71}{3^5} \overline{X_{-2}} + \frac{17}{3^4} \overline{X_{-1}} = \frac{4}{3^3}$$

(Четвертое уравнение соответствует значению $n = 0$.)

В этом примере $g_n = 0$, $n = -1, -2, -3, \dots$, $g_n = (n+1)/3^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $a_{n,0} = a_{0,n} = a_{-1,-n-1} = a_{-n-1,-1} = 3^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, а остальные коэффициенты $a_{n,k}$ и коэффициенты $b_{n,k}$ вычислены по указанным выше формулам. (Можно было бы явно, без рекуррентных соотношений указать выражения в общем виде для коэффициентов в примере.)

Легко вычислить, что

$$A_1(z) = \frac{3}{3-z}, \quad A_2(z) = \frac{3z}{3z-1}, \quad \overline{A_3(\bar{z}^{-1})} A_4(z) = \frac{9}{(3-z)^2}.$$

Отсутствие нулей у этих функций (соответственно в областях $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| < 1$) говорит о том, что решение системы безусловно существует и единственно. Вычисления дают в качестве решения значения $x_n = -3^n$, $n = -1, -2, -3, \dots$, $x_0 = 8/9$, $x_n = (8(n+1) - 9)/3^{n+2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
2. Черский Ю. И. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 6. С. 29.

Поступила в редакцию 08.02.94

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. А. КОРЗАН

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

This paper gives a solution in closed form of one special case of the problem of the conjugation on the Riemann's surface. A peculiarity of this problem is that for its solution does not need a solution of the auxiliary Jacoby's problem.

Пусть R — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $h > 0$. Зафиксируем на ней достаточно гладкое каноническое рассечение $a_1, b_1, \dots, a_h, b_h$ и обозначим через $L = a_1 \cup b_1 \cup \dots \cup a_h \cup b_h$. Ориентация контура L показана на рисунке, где поверхность $R \setminus L$ представлена в виде нормального фундаментального многоугольника. Рассмотрим задачу линейного сопряжения для нахождения функций Φ , аналитических на $R \setminus L$, непрерывно продолжимых слева и справа на L , по соотношению:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

$$\text{где } G(t) = \begin{cases} A_1 & \text{при } t \in a_1, \\ B_1 & \text{при } t \in b_1, \\ \dots & \dots \\ A_h & \text{при } t \in a_h, \\ B_h & \text{при } t \in b_h. \end{cases} \quad (1')$$

Здесь A_v, B_v — заданные отличные от нуля константы, $v = 1, \dots, h$.

Эта задача при более общих предположениях исследовалась в [1]. Однако там ее решение выражено через решение вспомогательной проблемы обращения Якоби [2]. Цель данной статьи — выделить такие частные случаи задачи линейного сопряжения, которые для своего решения не требуют привлечения проблемы Якоби.

Рассмотрим сначала однородную задачу (1), предполагая, что $g(t) \equiv 0$;

$$\Phi_0^+(t) = G(t)\Phi_0^-(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Применяя к этому равенству принцип аргумента, заключаем, что решение задачи (2), если оно существует, не может иметь нулей на R , а значит, в силу теоремы о монодромии [3], должна существовать однозначная на $R \setminus L$ ветвь логарифма $\ln \Phi_0(p)$. Логарифмируя равенство (2), получим:

$$\ln \Phi_0^+(t) = \ln \Phi_0^-(t) + \ln G(t), \quad t \in L. \quad (3)$$

Дифференцируя это последнее равенство и учитывая, что $G(t)$ постоянна на каждой линии a_v и b_v , имеем:

$$d \ln \Phi_0^+(t) = d \ln \Phi_0^-(t), \quad t \in L. \quad (4)$$

Отсюда, в силу теоремы об аналитическом продолжении, заключаем, что $d \ln \Phi_0(p)$ есть абелев дифференциал первого рода:

$$d \ln \Phi_0(p) = dw(p), \quad (5)$$

где через $dw(p)$ обозначен общий вид абелевых дифференциалов первого рода римановой поверхности R . Интегрируя и потенцируя равенство (5), заключаем, что общее решение задачи (2) содержится в формуле:

$$\Phi_0(p) = C e^{w(p)}, \quad (6)$$

где C — постоянная, а $w(p) =$

$$= \int_{p_0}^p dw(p) \text{ — абелев интеграл пер-$$

вого рода, обращающийся в нуль в фиксированной точке $p_0 \in R$.

Для решения вопроса о том, при каких условиях правая часть равенства (6) является общим решением задачи (2), введем в рассмотрение базис абелевых дифференциалов первого рода dw_1, \dots, dw_h . Будем считать его комплексно-нормированным, т. е. таким, что $\int dw_j = \delta_{kj}$,

где δ_{kj} — символ Кронекера ($k, j = 1, \dots, h$). Если каноническое рас-

сечение поверхности выбрано так, как показано на рисунке, то B -периоды $B_{kj} = \int_{b_k} dw_j$, $k, j = 1, \dots, h$ образуют симметричную матрицу ($B_{kj} = B_{jk}$),

мнимая часть которой положительно определена (а значит, и невырождена). Подставляя выражение (6) в (2) и учитывая (1'), получим:

$$e^{w^+(t) - w^-(t)} = \begin{cases} A_j & \text{при } t \in a_j, \quad j = 1, \dots, h. \\ B_j & \text{при } t \in b_j, \quad j = 1, \dots, h. \end{cases} \quad (7)$$

Но

$$w^+(t) - w^-(t) = \begin{cases} - \int dw, & t \in a_j, \\ \int_{a_j}^{b_j} dw, & t \in b_j, \quad j = 1, \dots, h. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим:

$$\exp \left\{ - \int_{b_j} dw \right\} = A_j, \quad j = 1, \dots, h, \quad (9)$$

$$\exp \left\{ \int_{a_j} dw \right\} = B_j, \quad j = 1, \dots, h. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение дифференциала dw через базис, т. е. $dw = \sum_{k=1}^h z_k dw_k$, получим $e^{z_j} = B_j$, $j = 1, \dots, h$. Отсюда находим:

$$z_j = \ln B_j - 2\pi i n_j, \quad j = 1, \dots, h, \quad (10')$$

где n_j пока произвольные целые числа. Чтобы их найти, используем равенства (9):

$$\exp \left\{ - \int_{b_j} \sum_{k=1}^h (\ln B_k - 2\pi i n_k) dw_k \right\} = A_j, \quad j = 1, \dots, h.$$

Отсюда находим:

$$\exp \left\{ 2\pi i \sum_{k=1}^h B_{kj} n_k \right\} = A_j \exp \left\{ \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln B_k \right\}, \quad j = 1, \dots, h.$$

Логарифмируя эти равенства, получим:

$$2\pi i \sum_{k=1}^h B_{kj} n_k = \ln A_j + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln B_k - 2\pi i m_j, \quad j = 1, \dots, h. \quad (11)$$

где m_j — неопределенные целые числа. Деля (11) на $2\pi i$ и выделяя мнимые части, получим линейную систему:

$$\sum_{k=1}^h n_k \operatorname{Im} B_{kj} = \operatorname{Im} \left(\frac{\ln A_j + \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln B_k}{2\pi i} \right), \quad j = 1, \dots, h. \quad (12)$$

Эта система имеет единственное решение n_1, \dots, n_h . Таким образом, для нетривиальной разрешимости задачи (2) необходимо, чтобы решение системы (12) было целочисленным вектором. Предполагая это условие выполненным, из (11) находим числа m_j :

$$m_j = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \ln A_j + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^h B_{kj} \ln B_k - \sum_{k=1}^h B_{kj} n_k \right\}, \quad j = 1, \dots, h. \quad (13)$$

Для нетривиальной разрешимости задачи (2) необходимо, чтобы числа m_j из (13) также были целыми. Если все числа m_j и n_j целые, то правая часть равенства (6) уже является общим решением задачи (2). Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. Для того чтобы однородная задача (2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы все числа n_k и m_j , которые однозначно определяются из равенств (12) и (13), были целыми. Если это условие выполнено, то общее решение задачи (2) имеет вид:

$$\Phi_0(p) = C \exp \left\{ \sum_{k=1}^h z_k w_k(p) \right\}, \quad (14)$$

где z_1, \dots, z_h находятся из (10'), а C — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (1). В случае, когда соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение $\Phi_0(p)$, мы с помощью этого решения профакторизуем коэффициент $G(t)$ и перейдем к задаче «о скачке»:

$$\frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\Phi_0^+(t)} = \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)}, \quad t \in L, \quad (15)$$

равносильной задаче (1). Задачу (15) решаем в виде интеграла типа Коши, умножая который на $\Phi_0(t)$, находим частное решение задачи (1) в виде:

$$\Phi_1(p) = \frac{\Phi_0(p)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)}{\Phi_0^+(p)} d\hat{\omega}_{lq_0}(p). \quad (16)$$

Отсюда

Теорема 2. Если однородная задача (2) имеет нетривиальное решение, то соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)} dw_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Если эти условия выполняются, то частное решение задачи (1) дается формулой (16).

1. З в е р о в и ч Э. И. //Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.

2. Р и м а н Б. Соч. М., 1948.

3. С п р и н г е р Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.

Наши юбиляры



ЛЕОНИД КОНДРАТЬЕВИЧ ТУТАЕВ



Уже много лет подряд каждый вторник в 17.30 начинает работу научный геометрический семинар БГУ. Основателем и самым активным его участником до сих пор является доцент Леонид Кондратьевич Тутаев, которому 20 июня исполнилось 90 лет.

Родился Л. К. Тутаев в 1904 г. в Царицыне в семье рыбака, рано начал работать, помогая отцу.

После окончания в 1925 г. педтехникума он поступил на физико-математический факультет Саратовского университета. С 1930 г. работал преподавателем физики и математики в школах и техникумах Саратовской области, ассистентом Волгоградского механического института.

С 1933 по 1936 г. Л. К. Тутаев обучался в аспирантуре при МГУ, затем до 1941 г. работал преподавателем Волгоградского пединститута. С 1941 по 1942 г. Л. К. Тутаев служил в рядах Красной Армии, а после увольнения из армии по состоянию здоровья — старшим преподавателем Волгоградского педагогического и Уфимского авиационного институтов. В 1944 г. Л. К. Тутаев защитил кандидатскую диссертацию на тему «О проблеме Шалая» из области проективной геометрии.

С ноября 1945 г. Л. К. Тутаев работает доцентом, а с 1954 по 1969 г. — заведующим кафедрой

геометрии БГУ. С приходом Л. К. Тутаева в БГУ начинаются прерванные войной научные исследования по дифференциальной геометрии, создается постоянно действующий научный геометрический семинар, на котором выступили сотни геометров из разных республик бывшего СССР.

В 1959 г. Л. К. Тутаев издал первую после войны в нашей республике монографию по геометрии «Геометрия Лобачевского», содержание которой не утратило актуальности до нашего времени. Он становится активным пропагандистом нового в то время метода внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Спецкурсы, спецсеминары по этой тематике, непосредственное использование этого метода в научных исследованиях позволили ученому создать белорусскую научную школу внешних дифференциальных форм в геометрии. Итогом работы в этом направлении явилась изданная в 1962 г. его монография «Линии и поверхности в аффинном трехмерном пространстве», переведенная на английский язык и изданная в США.

Методом внешних форм и подвижного репера Л. К. Тутаев построил основы теории линий и поверхностей в проективном, аффинном, эллиптическом пространствах и в пространстве Минковского. Результаты по геометрии пространства Минковского он успешно применил для решения некоторых задач электродинамики. Ученый опубликовал более 50 научных работ, подготовил 5 кандидатов наук.

По инициативе Л. К. Тутаева на кафедре геометрии начались работы по созданию учебных пособий. В 1963 г. вышел «Сборник задач по дифференциальной геометрии», одним из авторов которого является Л. К. Тутаев, затем неоднократно переиздававшийся и переведенный на венгерский, французский и испанский языки.

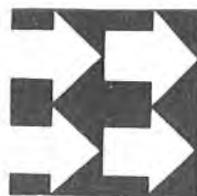
Сотни выпускников физмата и мехмата БГУ с благодарностью вспоминают лекции Л. К. Тутаева, четкие по построению, сопровождаемые изящными рисунками, его обаяние и доброжелательность.

И хотя уже 20 лет, как Леонид Кондратьевич Тутаев находится на заслуженном отдыхе, он не порывает связей с кафедрой, регулярно посещает научный геометрический семинар, живо интересуется научными проблемами и сам ежегодно выступает с докладами. В своем докладе «О преподавании плоских геометрий», сделанном в мае 1994 г., Л. К. Тутаев дал развернутую программу перестройки преподавания курса аналитической геометрии, призвал сотрудников кафедры к написанию новых учебных пособий.

Интерес Л. К. Тутаева к науке, его необычайное творческое долголетие служат для всех нас примером.

Желаем Леониду Кондратьевичу доброго здоровья, большого личного счастья.

А. А. Бурдун, Е. В. Коробенок, К. Д. Лукин,
В. И. Платонова, Р. П. Хацкевич



УДК 517.962.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ

Periodic linear differential systems are investigated by the Mironenko method. The conditions to reduce the investigation of a linear system with the dimension 4 to the analysis of a linear system with the dimension 2 are given.

В случае, если для периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений удастся найти отражающую функцию ОФ, то, как известно [1], для такой системы можно указать начальные данные периодических решений и исследовать эти решения на устойчивость. В. И. Мironenko (см., напр., [1]) и Л. А. Альсевич (см., напр., [2]) указаны классы систем, неинтегрируемых в квадратурах, для которых удастся найти ОФ. Оказывается, что аппарат ОФ полезен и тогда, когда саму ОФ изучаемой системы найти невозможно. Впервые об этом четко говорится в [3].

В настоящей работе указаны случаи, когда изучение вопроса существования и устойчивости периодических решений линейной периодической системы размерности 4 удастся заменить изучением линейной системы размерности 2. Основным требованием при этом является то, что для рассматриваемой линейной системы

$$\dot{x}k = p_{k1}(t)x_1 + p_{k2}(t)x_2 + p_{k3}(t)x_3 + p_{k4}(t)x_4, \quad k = \overline{1, 4} \quad (1)$$

с непрерывными на \mathbb{R} коэффициентами $p_{kj}(t)$, $k, j = \overline{1, 4}$ отражающая матрица (ОМ) должна иметь вид:

$$M(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) & 0 & 0 \\ \gamma(t) & \delta(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & 0 & \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В данной работе это требование сводится к условиям на коэффициенты $p_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, 4}$ системы (1). Опуская случаи, когда такая ОМ находится в конечном виде и при этом по определенному алгоритму, мы подробно остановимся на ситуации, когда ОМ в принципе не может быть найдена.

Один из таких случаев был отмечен ранее [4]. Это система вида:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} P(t) & \alpha(t)E \\ \beta(t) & P(t) + \gamma(t)E \end{bmatrix} x,$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — нечетные непрерывные 2ω -периодические скалярные функции, $P(t)$ — произвольная непрерывная 2ω -периодическая и E -единичная матрицы размерностей $n \times n$. Изучение такой системы сводится к изучению системы $\dot{y} = P(t)y$. При этом если ОМ последней системы — $F(t)$, то ОМ исходной системы —

$$\begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix},$$

где 0 — нулевая матрица размерности $n \times n$.

Введем обозначения $\varphi(-t) = \bar{\varphi}$; $2\varphi_ч = \varphi + \bar{\varphi}$, $2\varphi_н = \varphi - \bar{\varphi}$.
 Будем считать, что коэффициенты p_{13} , p_{14} , p_{23} , p_{24} системы (1) удовлетворяют условию:

А. Сумма $p_{24} + \bar{p}_{13}$ обращается в нуль только в изолированных точках τ_k , в которых функции

$$\frac{p_{14}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \quad \text{и} \quad \frac{p_{23}}{p_{24} + \bar{p}_{13}}$$

доопределяются до непрерывно дифференцируемых функций.

В настоящей работе доказана

Теорема. Пусть коэффициенты $p_{14}(t)$, $p_{23}(t)$, $p_{13}(t)$, $p_{24}(t)$ системы (1) 2ω -периодические, непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют условию А, остальные коэффициенты системы (1) 2ω -периодические и непрерывные, при этом все коэффициенты системы (1) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p_{14}(t) \neq 0; \quad p_{23}(t) \neq 0; \quad p_{14}(0) = p_{23}(0) = 0; \\ (p_{13} + p_{24})_ч \neq 0; \quad (p_{31} + p_{42})_ч \neq 0; \quad (p_{11} + p_{22} - p_{33} - p_{44})_ч \neq 0; \\ (p_{13})_ч \equiv \frac{(p_{14}p_{23})_н}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \quad 2(p_{31})_ч = \frac{p_{14}p_{41} - \bar{p}_{23}\bar{p}_{32}}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \\ p_{32} \equiv \frac{p_{14}(p_{42} + \bar{p}_{31})}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \quad p_{41} \equiv \frac{p_{23}(\bar{p}_{31} + p_{42})}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \\ p_{34} - p_{12} \equiv \frac{p_{14}(p_{11} + \bar{p}_{22} - p_{33} - \bar{p}_{44})}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \quad p_{43} - p_{21} \equiv \frac{p_{23}(p_{11} + \bar{p}_{22} - p_{33} - \bar{p}_{44})}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \\ (p_{11})_ч - (p_{33})_ч \equiv (p_{13})_ч \frac{p_{33} + \bar{p}_{44} - p_{11} - \bar{p}_{22}}{p_{24} + \bar{p}_{13}}; \\ \frac{p_{14}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \left(p_{22} - p_{11} + \frac{p_{14}p_{21} - \bar{p}_{23}\bar{p}_{12}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right) + \frac{\bar{p}_{14}(p_{14}\bar{p}_{21} - \bar{p}_{23}p_{12})}{(p_{24} + \bar{p}_{13})^2} + \\ + \left(\frac{p_{14}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right)' - p_{12} = 0; \\ \frac{p_{23}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \left(p_{11} - p_{22} + \frac{\bar{p}_{14}\bar{p}_{21} - p_{23}p_{12}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right) + \frac{\bar{p}_{23}(\bar{p}_{14}p_{21} - p_{23}\bar{p}_{12})}{(p_{24} + \bar{p}_{13})^2} + \\ + \left(\frac{p_{23}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right)' + p_{21} = 0; \end{aligned}$$

Тогда характер устойчивости системы (1) совпадает с характером устойчивости двумерной системы

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} y. \quad (3)$$

Решение $x(t; \omega, x_0)$ системы (1) будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^T = (y_{10}, y_{20}, y_{10}, y_{20})^T$ и решение $y(t; \omega, y_0)$, $y_0 = (y_{10}, y_{20})^T$ системы (3) 2ω -периодично.

Доказательство, согласно [1], вытекает из [3] и следующей леммы.

Лемма. При выполнении условий теоремы отражающая матрица системы (1) имеет вид (2), где функции $\alpha(t)$ и $\delta(t)$ являются решениями задачи Коши:

$$\begin{aligned} \alpha' + \left(2(p_{11})_ч + \frac{\bar{p}_{23}\bar{p}_{12} - p_{14}p_{21}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right) \alpha + \frac{p_{23}\bar{p}_{12} - \bar{p}_{14}p_{21}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \delta = 0, \\ \delta' + \left(2(p_{22})_ч + \frac{p_{23}p_{12} - \bar{p}_{14}\bar{p}_{21}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \right) \delta + \frac{\bar{p}_{23}p_{12} - p_{14}\bar{p}_{21}}{p_{24} + \bar{p}_{13}} \alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\alpha(0) = \delta(0) = 1;$$

функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ определяются равенствами

$$\beta = \frac{-1}{p_{24} + \bar{p}_{13}} (p_{14}\alpha + \bar{p}_{14}\delta),$$

$$\gamma = \frac{1}{p_{24} + \bar{p}_{13}} (\bar{p}_{23}\alpha + p_{23}\delta).$$

При этом матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}$$

является отражающей матрицей системы (3).

Доказательство первой части леммы следует из основного соотношения [1]:

$$M'(t) + M(t)P(t) + P(-t)M(t) = 0, \quad M(0) = E,$$

где $P(t)$ — матрица коэффициентов системы (1), E — единичная матрица. Это соотношение является необходимым и достаточным для того, чтобы дифференцируемая матрица $M(t)$ была ОМ системы (1).

Доказательство второй части леммы следует из теоремы 1 [2] и условий на коэффициенты системы (1):

$$\begin{aligned} p_{13}(0) = p_{14}(0) = p_{23}(0) = p_{24}(0) = \\ = p_{31}(0) = p_{32}(0) = p_{41}(0) = p_{42}(0) = 0. \end{aligned}$$

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986. С. 30.

2. Альсевич Л. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 882.

3. Мироненко В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 39.

4. Мироненко В. И., Кастрица О. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 1. С. 67.

Поступила в редакцию 01.07.93.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, Н. К. АГАФОНОВА

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

The nonperiodical continuous functions with a given restriction for integral modulus of smoothness are studied. Exact orders of the best rational approximations in uniform metric are found for those classes of functions.

Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, где норма задается равенством

$$\|f(x)\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Будем рассматривать конечные разности порядка $r+1$ с шагом τ

$$\Delta_{r+1}^r f(x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu f(x + \nu\tau),$$

и обозначим через $W^r \Omega_M$, $r \in \mathbb{N}$, классы функций из пространства $C[a, b]$, которые подчинены ограничению

$$\int_a^{b-(r+1)\tau} |\Delta_{r+1}^r f(x)| dx \leq M\tau^{r+1}, \quad \text{для любого } \tau > 0. \quad (1)$$

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C[a, b]$ алгебраическими полиномами в равномерной метрике, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{p_n(x)} \|f(x) - p_n(x)\|.$$

В свою очередь, наилучшее рациональное приближение в метрике пространства $C[a, b]$ определяется равенством:

$$R_n(f) = \inf_{r_n(x)} \|f(x) - r_n(x)\|, \quad r_n(x) = p_n(x)/q_n(x),$$

где $p_n(x)$ и $q_n(x)$ — алгебраические полиномы порядка не выше n .

Если бесконечно малые (α_n) и (β_n) имеют одинаковый порядок, то пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$, и через C_j обозначаем положительные константы, не зависящие от n и f .

Теорема 1.

$$\sup_{f \in W^r_{\Omega_M}} R_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Доказательство теоремы базируется на промежуточном приближении класса $W^r_{\Omega_M}$ такими функциями, которые имеют r -ую производную ограниченной вариации. Пусть W^rV_M , $r \in \mathbb{N}$, есть класс функций $f(x)$ из пространства $C[a, b]$, которые можно представить по формуле:

$$f(x) = \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{r!} \int_a^x (x-t)^r df^{(r)}(t), \quad [\text{Var } f(x)]_a^b \leq M.$$

Непосредственно проверяется, что имеется вложение

$$W^rV_M \subset W^r\Omega_{C_1M}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Из [1, 2] следует, что существует такое непрерывное финитное продолжение $F(x)$ на $(-\infty, \infty)$, для которого $F(x) = f(x)$, если $x \in [a, b]$, и выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{r+1}^x F(x)| dx \leq C_2 M \tau^{r+1}. \quad (4)$$

Для продолженной функции $F(x)$ определим функции Стеклова, полагая

$$F_{h,1}(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(u) du = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F(x+v) dv,$$

$$F_{h,j}(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F_{h,j-1}(u) du.$$

Пользуясь свойствами конечных разностей и функций Стеклова [3], с помощью (1) находим, что усреднение $F_{h,r+1}(x)$ удовлетворяет условию (4), имеет абсолютно непрерывную производную порядка r и при любом h

$$[\text{Var } F_{h,r+1}^{(r)}(x)]_a^b = \int_a^b |F_{h,r+1}^{(r+1)}(x)| dx \leq C_2 M. \quad (5)$$

Кроме того, выполняется равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_{h,r+1}(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

В силу неравенства (5) и теоремы В. А. Попова [4] существует рациональная функция $r_{n,h}(x)$ порядка не выше n такая, что

$$\|F_{h,r+1}(x) - r_{n,h}(x)\| \leq \frac{C_3}{n^{r+1}}, \quad (6)$$

причем полюсы $\{z_k\}$ рациональной функции $r_{n,h}(x)$ подчинены соотношению

$$|z_k - x| \geq C_4/n^{r+1}, \quad x \in [a, b],$$

а положительные константы не зависят от h .

Таким образом, рациональные функции $r_{n,h}(x)$ образуют нормальное семейство, из которого можно выделить последовательность, сходящуюся по норме пространства $C[a, b]$. Перейдя в (6) к пределу при $h \rightarrow 0$ по указанной последовательности, получим

$$\|f(x) - r_n(x)\| \leq \frac{C_3}{n^{r+1}}.$$

Что касается нижней оценки в соотношении (2), то она вытекает из

вложения (3), поскольку в согласии с [4] точный порядок рациональных приближений на более узком классе $W^r V_M$ также равен $(1/n)^{r+1}$.

Замечание 1. Для наилучших полиномиальных приближений на классе $W^r \Omega_M$ нетрудно получить оценку

$$\sup_{f \in W^r \Omega_M} E_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^r, \quad r \in \mathbb{N},$$

которая в сравнении с (2) означает, что полиномиальная аппроксимация на этом классе на порядок больше, чем рациональная.

1. Б е с о в О. В. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 3. С. 497.

2. Б е с о в О. В. // Матем. сб. 1965. Т. 66. № 1. С. 963.

3. Т и м а н А. Ф. // Теория приближения функций действительной переменной. М., 1960. С. 177.

4. P e t r u s h e v P. P., P o r o v V. A. Rational Approximation of real Functions. Cambridge, 1987. P. 114.

Поступила в редакцию 20. 12.93.

УДК 519.1

Д. П. ПОДКОПАЕВ

О НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ О k-МЕДИАНЕ ГРАФА*

New fractional vertices of graph medians polytope has been found

Многогранником $M(k, n)$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n - 1$, $n, k \in \mathbb{N}$ известной задачи о k-медиане графа [1, 2] является множество матриц $X = \|x_{ij}\|_{n,n}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = k, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N_n, \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall (i, j) \in N_n^2, \quad i \neq j, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in N_n^2, \quad (4)$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Известны следующие свойства многогранника $M(k, n)$ (см. [1, 3, 4,]):

1) размерность многогранника $M(k, n)$ при любом k , $1 \leq k \leq n - 1$, равна $n^2 - n - 1$;

2) при $k = 1$, $n - 1$ многогранник является целочисленным, т. е. все его вершины целочисленные;

3) количество целочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ равно

$$\binom{n}{k} k^{n-k};$$

4) при $2 \leq k \leq n - 2$ многогранник имеет нецелочисленные вершины.

Если $2 \leq k \leq n - 2$, то, как показано в [1], для всякой пары неравных индексов $s, r \in N_n$ точка X многогранника $M(k, n)$ с компонентами

$$x_{is} = \frac{n-k-1}{n-2}, \quad \forall i \in N_n; \quad x_{ii} = \frac{k-1}{n-2}, \quad \forall i \in N_n \setminus \{s\}; \quad x_{sp} = \frac{k-1}{n-2}; \quad (5)$$

$x_{ij} = 0$ для остальных (i, j) из N_n^2 является нецелочисленной вершиной. Тем самым при $2 \leq k \leq n - 2$ число нецелочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ не менее числа

$$\left[\frac{n}{2} \right].$$

Следующая теорема указывает новые нецелочисленные вершины.

* Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Теорема. Пусть $n \geq 4$, $2 \leq k \leq n - 2$, $0 \leq q \leq k - 2$. Тогда для любого $w \subset N_n$, $|w| = q$, любых $s, p \in N_n \setminus w$, $s \neq p$, точка $Y = \|y_{ij}\|_{n,n}$ с элементами

$$y_{is} = \frac{n-k-1}{n-q-2}, \quad \forall i \in N_n \setminus w,$$

$$y_{ii} = \frac{k-q-1}{n-q-2}, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s,$$

$$y_{ii} = 1, \quad \forall i \in w,$$

$$y_{sp} = \frac{k-q-1}{n-q-2},$$

$y_{ij} = 0$ для остальных (i, j) из N_n^2 является нецелочисленной вершиной многогранника $M(k, n)$.

Доказательство. Легко видеть, что $Y \in M(k, n)$. Как известно [1], точка X многогранника в пространстве R^m является его вершиной, если среди условий, задающих многогранник, найдутся m линейно независимых ограничений, каждому из которых X удовлетворяет как равенству. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти среди условий (1)–(4) n^2 линейно независимых ограничений, каждому из которых Y удовлетворяет как равенству. Рассмотрим систему уравнений, составленную из (1), (2) и следующих условий:

$$x_{is} = x_{ss}, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s,$$

$$x_{ij} = 0, \quad (i, j) \in J_1 \cup J_2,$$

где $J_1 = \{(i, j) \in N_n^2: i \neq j, j \neq s, (i, j) \neq (s, p)\}$, $J_2 = \{(i, j) \in N_n^2: j = s, i \in w\}$.

Перепишем ее в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = k, \quad (6)$$

$$x_{ss} + x_{sp} = 1, \quad (7)$$

$$x_{ii} + x_{is} = 1, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s, \quad (8)$$

$$x_{ii} = 1, \quad \forall i \in w, \quad (9)$$

$$x_{is} = x_{ss}, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s, \quad (10)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ для остальных } (i, j). \quad (11)$$

Нетрудно показать, что матрица Y является ее решением. Докажем, что ранг этой системы равен n^2 .

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = 0, \quad (12)$$

$$x_{ss} + x_{sp} = 0, \quad (13)$$

$$x_{ii} + x_{is} = 0, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s, \quad (14)$$

$$x_{ii} = 0, \quad \forall i \in w, \quad (15)$$

$$x_{is} + x_{ss}, \quad \forall i \in N_n \setminus w, \quad i \neq s, \quad (16)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ для остальных } (i, j). \quad (17)$$

Пусть Z – ее решение. Предположим, что $z_{ss} = a$. Тогда из (16), (14), (13) следуют равенства $z_{is} = a$, $\forall i \in N_n \setminus w$; $z_{ii} = -a$, $\forall i \in N_n \setminus w$, $i \neq s$; $z_{sp} = -a$. Кроме того, $\sum_{i=1}^n x_{ii} = (-a)(n-q-1) + a = 0$. Отсюда получаем $a = 0$. Поэтому,

если Z – решение системы (12)–(17), то $z_{ij} = 0$, $\forall (i, j) \in N_n^2$. Следовательно, ранг этой системы, а значит, и системы (6)–(11), равен n^2 . Поэтому система ограничений (6)–(11) состоит из n^2 линейно независимых уравнений. Теорема доказана.

Заметим, что при $q=0$ теорема дает вершины с компонентами, заданными формулами (5).

Поскольку при фиксированных числах $n \geq 4$, $2 \leq k \leq n-2$, $0 \leq q \leq k-2$ количество вершин, указанных в формулировке теоремы, равно

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-q \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ то справедливо}$$

Следствие. Число нецелочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ при $n \geq 4$, $2 \leq k \leq n-2$ не меньше числа $\sum_{q=0}^{k-2} \begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-q \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.

2. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. М., 1978.

3. Ковалев М. М., Нгуен Нгиа. Многогранник медиан графа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1988. № 3. С. 45.

4. Горунович С. А. Алгоритм нахождения r -медиан графа // Кибернетика. 1985. № 5. С. 67.

Поступила в редакцию 01.02.94.

ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ БЕЛЫЙ



17 августа 1994 г. после тяжелой и продолжительной болезни скончался заслуженный деятель науки и техники, лауреат Государственной премии, академик АН Беларуси, доктор технических наук, профессор Владимир Алексеевич Белый.

В. А. Белый родился 8 июня 1922 г. в Краснодаре. Научную и педагогическую деятельность начал в 1945 г. после окончания Института инженеров железнодорожного транспорта в Ростове-на-Дону. В 1953 г. он успешно защитил кандидатскую диссертацию и был направлен в Гомель для организации Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта, где возглавил лабораторию технической механики. За короткий срок ему удалось разработать новое научное направление и сформировать коллектив исследователей для решения важнейшей народнохозяйственной проблемы — создания новых конструкционных материалов. В. А. Белым и его учениками обнаружен ряд весьма важных эффектов в области механики металлополимеров: наследственное термоокисление, транскристаллизация, способность расплавов полимеров растворять металлы в окислительной среде. Получены принципиально новые научные данные о механике трения.

В области механики полимерных материалов, в частности найдена связь молекулярной подвижности и образования свободных радикалов, эмиссионных явлений и фрикционных характеристик, изучен механизм фрикционного переноса, предложены новые методы управления фрикционными свойствами при взаимодействии твердых тел. В 1969 г. отдел механики полимеров, созданный на базе лаборатории технической механики, был преобразован в Институт механики металлополимеров АН БССР. Первым директором института назначается В. А. Белый.

Наряду с работой в Институте механики металлополимеров В. А. Белый много сил отдаст созданию Гомельского государственного университета, первым ректором которого он был утвержден в 1969 г. За научные достижения в области трибоники полимеров Французское научно-инженерное общество наградило В. А. Белого медалями Вакансона (1968 г.) и Жакарра (1970 г.). В 1969 г. он избирается членом-корреспондентом АН БССР. В 1971 г. Владимир Алексеевич защищает докторскую диссертацию, в 1972 г. избирается академиком АН БССР, а в 1973 г. становится вице-президентом республиканской Академии наук.

С 1978 по 1983 г. В. А. Белый — ректор Белорусского государственного университета. В эти годы наиболее ярко проявился его талант организатора. Благодаря настойчивости, умению и энергии В. А. Белого в жизни Белгосуниверситета произошли значительные изменения. Под влиянием научного потенциала Академии наук обогатился учебный процесс, академические лаборатории открыли двери для занятий студентов всех факультетов университета. Возросло количество и качество публикаций ученых университета, научных разработок, защищенных авторскими свидетельствами страны и патентами за рубежом, существенно улучшилась подготовка кандидатов и докторов наук, укрепилась материальная база университета, его международные связи. По важнейшим показателям научной и учебно-воспитательной деятельности Белгосуниверситет под руководством В. А. Белого вышел в первые ряды среди более чем 800 вузов СССР. В 1979, 1980 и 1981 гг. университет награждался переходящим Красным знаменем Министерства высшего и среднего специального образования СССР и ЦК профсоюзов работников просвещения, высшей школы и научных учреждений.

Отдавая много сил и энергии научной, организационной и общественной деятельности, В. А. Белый продолжал исследовательскую работу. Академик В. А. Белый — автор 9 монографий и около 500 научных работ. Им подготовлено 17 докторов и более 50 кандидатов наук. Способности исследователя В. А. Белый сочетал с практической изобретательской деятельностью, на его счету более 300 изобретений, несколько десятков патентов зарубежных стран. Заслуженный изобретатель БССР В. А. Белый награжден четырьмя золотыми медалями ВДНХ. Владимир Алексеевич был главным редактором всесоюзного журнала «Трение и износ», членом экспертного совета ВАК СССР.

Трудовые заслуги В. А. Белого отмечены орденами Ленина, Октябрьской революции, Трудового Красного Знамени, Почетными Грамотами Верховного Совета БССР.

Ушел из жизни талантливый ученый, выдающийся организатор науки, вдумчивый педагог, в котором гармонично сочетались государственный подход к делу, гражданский долг, высокая требовательность к себе и другим с внимательным отношением к нуждам коллег, студентов и подчиненных, интересом к любой новой идее.

Светлая память о Владимире Алексеевиче Белом, талантливом ученом, видном организаторе науки, удивительном человеке навсегда останется в сердцах всех, кто знал его и работал вместе с ним.

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.39

Б е л ь с к и й А. М. О поперечных смещениях слабобрасходящегося пучка при отражении // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Исследована структура поля пучка, отраженного от плоской диэлектрической поверхности, а также условия, при которых возможен поперечный сдвиг пучка при отражении. Показано, что поперечный сдвиг возможен не только при углах падения пучка, больших угла полного отражения, но и при углах, меньших критического, но больших угла Брюстера. Получены формулы для величины поперечного сдвига и параметров эллипса поляризации падающего пучка, при которых наблюдается сдвиг.

Библиогр. 4 назв., ил. 3.

УДК 535.37

С а х а р у к С. А., Г о р б а ц е в и ч С. К. Теоретический анализ бистабильного поведения спектров поглощения вязких растворов сложных молекул // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Теоретически исследована возможность бистабильного отклика поглощения (интенсивности флуоресценции) системы «сложная молекула — сольватная оболочка» на изменение возбуждающей интенсивности, обусловленного процессами межмолекулярной релаксации.

Библиогр. 13 назв., ил. 3.

УДК 535.39

Е р м а к о ў В. В., С т а ш к е в и ч И. В. Вуглавая характарыстыка аптычных сістэм з анізатропнымі матэрыяламі // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Вызначана вуглавая характарыстыка для аптычных сістэм з анізатропнымі рэчывамі і разлічаны яе яўны выгляд для сферычнай пераламляльнай паверхні.

Бібліягр. 5 назв., ил. 2.

УДК 541.141.1:546.57

Станкевич А. И., Могильный В. В. Оптические свойства слвборассеивающих термохромных полимерных пленок, содержащих тетраиодомеркурат серебра // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Разработана методика получения слаборассеивающих термохромных пленок, содержащих тетраиодомеркурат серебра. Исследовано изменение их оптического пропускания в разных режимах нагревания/охлаждения. Указанные слаборассеивающие полимерные материалы могут служить обратимыми регистрирующими средами при фототермической записи информации, например в виде амплитудных голограмм в спектральном диапазоне 510—520 нм.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 548.55

И л ь я ш у к Ю. М., Ф е д о т о в А. К. Релаксация заряда на электрически активных границах зерен в профилированном кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Приводятся результаты изучения влияния сегрегации кислорода и углерода на ВАХ границ зерен, спонтанно зарождающихся в процессе кристаллизации (СЗГЗ) профилированного кремния. Показано, что такие границы обнаруживают долговременную релаксацию ВАХ, которая может быть описана логарифмическим законом с гигантскими характерными временами (10^3 — 10^4 с) для процесса релаксации.

Библиогр. 9 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 548.3:543.01

Д а н и л ь к е в и ч М. И. Частоты оптических фононов в кислородных шпинелях по спектроскопическим и акустическим данным // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Предложено правило для определения отношения резонансных частот колебаний ионов тетраэдрической координации к резонансным частотам октаэдрически связанных ионов в решетке шпинели. По восстановленным из спектра коэффициента отражения диэлектрическим функциям и данным о параметрах решетки и скоростях ультразвука оценены $\omega_0(k=0)$ и $\omega_0(k=\pi/a)$ и построены дисперсионные кривые $\omega(k)$ оптических и акустических фононов в шпинели $Ni_{0.3}Zn_{0.7}Fe_2O_4$.

Библиогр. 10 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 538.123 + 621.3.083.8

Анищик В. М., Ярмлович В. А., Рабкевич Т. М. Расчет характеристик датчиков перемещений на эффекте Холла с использованием фиктивных магнитных зарядов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Предложен полуэмпирический метод проектирования характеристик датчиков перемещений на эффекте Холла с использованием распределения поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 535.37

Умрейко Д. С., Першина М. Ю., Сытько В. В., Алешкевич Н. А. Спектрально-люминесцентные свойства и перенос энергии в фосфатных стеклах с высокой концентрацией ионов WO_2^{2+} и Tb^{3+} // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Исследованы люминесцентно-кинетические характеристики активированных Tb^{3+} вольфрамил-фосфатных стекол. Установлено наличие в системе $WO_2^{2+} \rightarrow Tb^{3+}$ переноса энергии электронного возбуждения, обеспечивающего высокий квантовый выход люминесценции. Диссипация возбуждения ионов Tb^{3+} , в свою очередь, происходит по резонансному и диффузному механизмам. Определены микро- и макропараметры взаимодействия $Tb-Tb$.

Библиогр. 10 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 535.35

Онищенко Н. С. Немарковская многовременная теория нестационарного выжигания спектральных провалов: приложение к низкотемпературным кристаллам рубина // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Рассматривается стохастическая теория нестационарного выжигания провалов в низкотемпературных примесных кристаллах, использующая модель множественности стохастических скачкообразных процессов для дефазирующих флуктуаций.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 621.396.6.181.48

Лабуда А. А., Сидерко А. А. Термическая обработка борофосфоросиликатных стекол // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Исследована температурная обработка борофосфоросиликатных стекол в технологическом процессе планаризации рельефа интегральных схем. Определена динамика изменения угла планаризации и оптимальные параметры технологического процесса: температура, компонентный состав, время термообработки, а также изменение ряда других параметров.

Библиогр. 5 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 519.1

Бабайцев А. Ю., Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И. Новое доказательство теоремы Байнеке о реберных графах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Предлагается новое доказательство теоремы Байнеке, дающей характеристику реберных графов простых графов посредством списка, включающего девять запрещенных порожденных подграфов.

Приведенное доказательство, требующее значительно меньшего перебора, чем доказательство Байнеке, основано на глобальной характеристике реберных графов, которую содержит классическая теорема Краусса.

Библиогр. 4 назв., ил. 5.

УДК 519.2

Жук Е. Е. Устойчивость решающего правила L-средних в условиях «малой выборки» // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Рассматривается задача анализа устойчивости решающего правила L-средних (L — число классов) при классификации «малой выборки». На основе вероятностного описания наблюдений при помощи построения асимптотического разложения риска, имеющего смысл вероятности ошибочной классификации, вычислены количественные характеристики устойчивости решающего правила L-средних. Полученные результаты проиллюстрированы на модели смеси многомерных нормальных распределений (модель Фицера).

Библиогр. 6 назв.

УДК 532.59

Новик А. А., Федосенко В. С. Об устойчивости неустановившихся волн на поверхности раздела потоков неоднородной жидкости // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

В статье решена задача Коши—Пуассона для внутренних волн, возникающих от начальных возмущений на поверхности раздела потоков неоднородной жидкости. Предполагается, что потоки верхнего и нижнего слоев могут иметь разные по величине и по направлению скорости. Показано, что наличие сил поверхностного натяжения приводит к устойчивости внутренних волн. При определенном соотношении параметров задачи на поверхности раздела могут образовываться неустановившиеся прогрессивно-стоячие волны, отличные от традиционных.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.917

З а д о р н ы й Б. В. Применение преобразований переменных к исследованию обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Для исследования взаимного расположения интегральных кривых в окрестности границы промежутка существования применяется нелинейный аналог преобразования Ляпунова. Подробно исследовано в этом смысле поведение решений диагональных систем.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.925

К а л и т и н Б. С., К а л и т и н а Л. В. Оптимизация оценки области притяжения методом функций Ляпунова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Проводится качественный анализ возможностей метода функций Ляпунова в решении задачи об оценке области асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений. Показано, что исходная задача об оценке может быть сведена к решению специальной задачи нелинейного программирования. Приведен иллюстрирующий пример.

Библиогр. 8 назв., ил. 1.

УДК 517.977

К а л и н и н А. И. Асимптотически оптимальный регулятор для линейной сингулярно возмущенной системы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Предложен алгоритм построения асимптотически оптимального регулятора в задаче терминального управления линейной сингулярно возмущенной системой с подвижным правым концом траекторий.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.968

Ш и л и н А. П. Бесконечная алгебраическая система с матрицами, близкими к кусочно-теплицевой и кусочно-ганкелевой // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Решено одно дискретное уравнение, аналогичное уравнениям типа свертки. Наряду с неизвестными величинами в уравнение входят их комплексно-сопряженные значения.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.948.32:517.544

З в е р о в и ч Э. И., К о р з а н Л. А. Решение в замкнутой форме одного частного случая задачи сопряжения на римановой поверхности // Вест. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

В работе построено решение а замкнутой форме одного частного случая задачи сопряжения на римановой поверхности. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что для своего решения она не требует привлечения вспомогательной проблемы обращения Якоби.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.926.4

А л ь с е в и ч Л. А. Линейные системы с распадающейся отражающей матрицей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Указаны условия на коэффициенты линейной периодической системы размерности 4, при которых изучение вопроса существования и устойчивости периодических решений исходной системы удастся заменить изучением линейной периодической системы размерности 2.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.5

Р у с а к В. Н., А г а ф о н о в а Н. К. Точный порядок наилучших рациональных приближений для одного класса функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Для непрерывных непериодических функций, имеющих заданную мажоранту интегрального модуля гладкости, найден точный порядок наилучшей рациональной аппроксимации при больших p .

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.1

Подкопаяв Д. П. О нецелочисленных вершинах многогранника задачи о k -медиане графа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 3.

Найдены новые нецелочисленные вершины многогранника задачи о k -медиане графа.

Библиогр. 4 назв.

CONTENTS

PHYSICS

<i>Belski A. M.</i> On transverse displacements of a weakly divergent light beam upon reflection	3
<i>Sakharuk S. A., Gorbatshevich S. K.</i> A theoretical analysis of the absorption-spectra bistable behaviour in viscous solutions of complex molecules	7
<i>Ermakov V. V., Stashkevitch I. V.</i> Angle characteristic of optical systems containing birefringent materials	10
<i>Stankevitch A. I., Mogil'ny V. V.</i> Optical properties of weakly-scattering thermochromic polymer films containing silver tetraiodomercurate	14
<i>Ilyashuk Yu. M., Fedotov A. K.</i> Charge relaxation at the electrically active grain boundaries of shaped Silicon	17
<i>Danilkevich M. I.</i> Optical phonon frequencies in oxidic spinels from spectroscopical and acoustical dates	21
<i>Anishchik V. M., Yarmolovitch V. A., Rabkevitch T. M.</i> Calculation of the characteristics of Hall-effect displacement transducers with the use of fictitious magnetic charges	25
<i>Umreiko D. S., Pershina M. Yu., Syt'ko V. V., Aleshkevitch N. A.</i> Spectral and luminescence properties, energy transfer in phosphate glasses with high concentration of WO_2^{2+} and Tb^{3+}	28
<i>Onistchenko N. S.</i> Nonmarkovian multi-time theory of nonstationary hole-burning as applied to low-temperature crystals of ruby	33
<i>Labuda A. A., Siderko A. A.</i> Thermal processing of borophosphosilicate glasses	36

MATEMATICS, MECHANICS

<i>Babaitsev A. Yu., Metelsky Yu. M., Tyshkevich R. I.</i> New proof of Beineke's theorem for line graphs	40
<i>Zhuk E. E.</i> L-means decision rule stability under «small sample»	43
<i>Novik A. A., Fedosenko V. S.</i> On the stability of non-stationary waves at an interface between two flows of an inhomogeneous fluid	48
<i>Zadvornyy B. V.</i> An application of variables transformations to an investigation of the extended continuous dependence from initial points	51
<i>Kalitin B. S., Kalitina L. V.</i> Optimization of the estimation of the domain of attraction with method of Lyapunov function	54
<i>Kalinin A. I.</i> An asymptotically optimal controller for a linear singularly perturbed system	57
<i>Shilin A. P.</i> Infinitely algebraic system with matrices similar to piecewise Toeplitz's and piecewise Hankel's ones	60
<i>Zverovitch E. I., Korzan L. A.</i> A solution in a closed form of the boundary value problem on a Riemann surface	65

OUR JUBILEE

Leonid Kondratjevich Tutaev	68
---------------------------------------	----

BRIEF COMMUNICATIONS

<i>Alsevich L. A.</i> Linear systems with a decomposing reflecting matrix	69
<i>Rusak V. N., Agaphonova N. K.</i> Exact order of the best rational approximations for a class of functions	71
<i>Podkopaev D. P.</i> Fractional vertices of graph medians polytope	73

IN COMMEMORATION OF THE SCIENTIST

Vladimir Alekseevich Belyi	76
--	----