

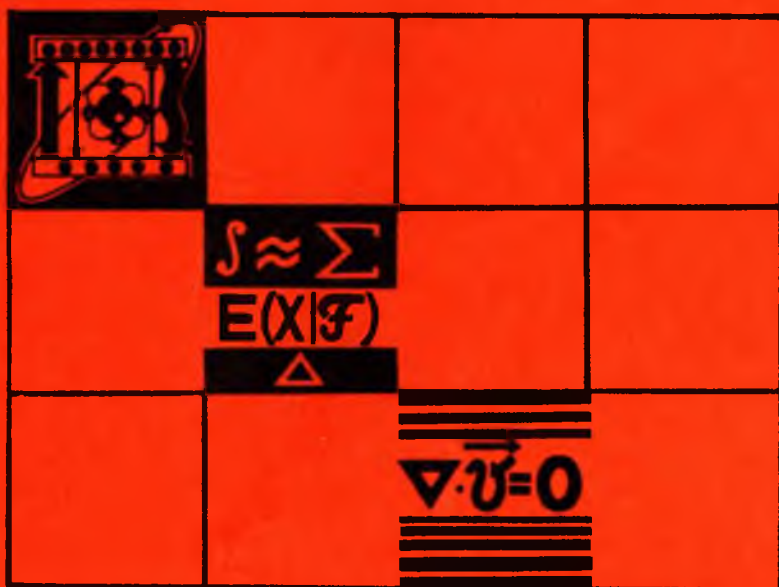
# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Механика

1 '93



# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

Абакумов Е. Г., Ушаков Е. А. Метод движений, ассоциированных с циклом, как теория возмущений . . . . .	3
Буров Л. И., Жвалевский А. В., Клищенко А. П., Козлов И. Н., Листопад А. П. Особенности околопороговой генерации растворов красителей при поляризованной накачке . . . . .	6
Абдаси Джихад (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В. Запись ОВФ-голограмм на переходах в возбужденном канале красителя родамин 6Ж . . . . .	9
Ермаков В. В., Сташкевич И. В. Учет анизотропии при расчете оптических систем по формулам Федера . . . . .	12
Бринкевич Д. И., Петров В. В., Тужик Ю. Т. Влияние преципитатов кислорода на процессы генерации термодоноров в кремнии . . . . .	16
Дроздовский А. В., Тралле И. Е., Федотов А. К. Бистабильность барьера на границе зерен в полупроводнике . . . . .	18
Комяк А. И., Серафимович А. И., Шашков С. Н. Спектроскопия твердофазных реакций с участием солей уранила и щелочно-галлоидных соединений . . . . .	23

## МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

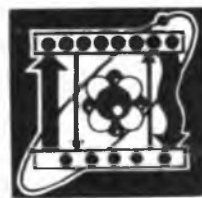
Машинин Д. А. О целочисленных представлениях конечных нильпотентных групп	27
Арсеньева О. Е. Спинорная геометрия алгебры обобщенных кватернионов . . . . .	29
Нгуен Ба Тхи (СРВ), Габасов Р. Критерий локальной оптимальности в терминальной задаче импульсного управления нелинейной динамической системой . . . . .	34
Абдурахимов А. О. Оптимальное управление непрерывной системой с неопределенностью в критерии качества . . . . .	38
Макаров Е. К., Мироненко С. В. Об оценке старшего характеристического показателя уравнения Хилла с нечетным периодическим коэффициентом . . . . .	42
Наумович Н. Ф. Преобразование, сохраняющее отображение за период . . . . .	45
Залорожец А. А. Применение целочисленного линейного программирования при проектировании фильтров на поверхностных акустических волнах . . . . .	47
Шевила Т. А. Краевая задача Карлемана в пространстве $E$ . . . . .	50
Матвеев Г. В., Петрова Г. Л. Строение антицепей в некоторых полиэдральных множествах . . . . .	54
Балашевич Н. В. Синтез оптимальных систем со многими входами . . . . .	57
Труш Н. Н., Скрипко А. П. Вычисление моментов модифицированного конечного преобразования Фурье многомерных однородных полей . . . . .	61

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Кашевский В. В. Интегрально-разностный оператор в гильбертовских пространствах . . . . .	66
Митюшев В. В. Учет разности длин берегов трещин в механике разрушения . . . . .	67
Бруй И. Н. О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера	69

## НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Анатолий Иванович Комяк . . . . .	71
Степан Григорьевич Мулярчик . . . . .	72



УДК 530.12:531.51

Е. Г. АБАКУМОВ, Е. А. УШАКОВ

## МЕТОД ДВИЖЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛОМ, КАК ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. В общей теории относительности (ОТО) гравитация моделируется кривизной пространства-времени, поэтому для описания гравитации фундаментальную роль играет концепция движения, ассоциированного с циклом в смысле Э. Картана [1]. В этом аспекте эффекты ОТО суть движения, ассоциированные с циклом.

Движение вектора, ассоциированное с циклом, определяется кривизной пространства-времени и может быть выражено через неинтегрируемый фазовый фактор, характерный для калибровочных теорий [2]. В связи с этим область применимости движений, ассоциированных с циклом, резко расширяется, поскольку любая калибровочная теория, сформулированная в терминах расслоенных пространств в путезависимом формализме, допускает аналогичные построения.

В данной работе в рамках теории возмущений иллюстрируется метод движений, ассоциированных с циклом, в применении к задаче геодезической прецессии в поле Шварцшильда. Выбор этой задачи обусловлен наличием точного ее решения в ОТО и возможностью исследования сходимости ряда построенной нами теории возмущений к точному решению. Появляется возможность проанализировать результаты не только первого порядка по  $\mu/g$ , которые обычно и составляют наблюдаемые эффекты ОТО, но и более высокого порядка.

Геодезическая прецессия в поле Шварцшильда и Нордстрема – Рейснера как движение, ассоциированное с циклом, впервые рассматривалась в [3,4] в расслоенном пространстве-времени без использования уравнений Эйнштейна. В этой работе мы применим метод движений, ассоциированных с циклом, в рамках ОТО.

Движение вектора, ассоциированное с циклом, может быть задано в виде:

$$A^i = \bar{P} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_C \{ R_{jk}^i dx^k \wedge dx^j \} A_0^i \right\}, \quad (1)$$

где  $\Delta A^i = A^i - A_0^i$  – изменение вектора  $A^i$  после параллельного переноса вдоль кривой, ограничивающей поверхность  $S$ ;  $A_0^i$  – невозмущенное (начальное) значение вектора  $A^i$ ;  $R_{jk}^i$  – тензор кривизны, являющийся оператором возмущения;  $\bar{P}$  означает упорядоченную экспоненту от двухмерного интеграла.

2. Явление изменения направления вектора при его параллельном переносе вдоль кругового решения задачи Шварцшильда носит название геодезической прецессии. Этот эффект может быть непосредственно проверен с помощью гироскопа на искусственном спутнике.

В поле Шварцшильда рассмотрим параллельное перенесение вектора  $S^i$  по круговой геодезической в экваториальной плоскости ( $\theta = 0$ ). Для метрики Шварцшильда

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{-\nu} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где

$$e^{\lambda} = 1 - \frac{2\mu}{r}; \quad \mu = \frac{GM}{c^2}, \quad (3)$$

и символы Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\lambda'}{2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{\lambda}; \quad \Gamma_{33}^1 = -re^{\lambda}\cos^2\theta; \quad (4)$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{\lambda'}{2}e^{2\lambda}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = \cos\theta\sin\theta;$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = -\operatorname{tg}\theta; \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{\lambda'}{2};$$

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr} = e^{-\lambda} \left( \frac{d}{dr} e^{\lambda} \right) = e^{-\lambda} \frac{2\mu}{r^2}.$$

Следует ожидать, что вклад в прецессию  $S^1$  дает как кривизна собственно пространства, так и неевклидова связь пространства и времени. В обычной полярной системе координат это проследить полностью не удастся, поэтому особенно удачной следует считать систему координат де Ситтера [5]. Полагая

$$\varphi = \omega t + \psi, \quad (5)$$

переходим от координат  $x^i = (r, \theta, \varphi, t)$  к координатам  $x^i = (r, \theta, \psi, \tau)$ .

Изменение вектора в новой системе координат связано с изменением в старой обычным образом:

$$\Delta S^i = A_j^i \Delta S^j, \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}. \quad (6)$$

В качестве начального состояния вектора выбирается  $S_0 = (1, 0, 0, 0)$ , а в качестве плоскости движения плоскость  $dx^3 dx^1$ . В этом случае, в силу (1), допустимым является интегрирование только по базису  $dx^3 \wedge dx^1$  и задействуется компонента тензора кривизны  $R^1_{131}$ . Но так как в данной задаче имеется связь  $dx^4 = \frac{c}{\omega_0} dx^3$ , то неизбежно срабатывает компонента  $R^4_{141}$ .

Из этих компонент в поле Шварцшильда отличными от нуля являются только  $R^3_{131}$  и  $R^4_{141}$ :

$$R^3_{131} \approx \frac{\mu}{r^3}, \quad R^4_{141} \approx \frac{2\mu}{r^3}. \quad (7)$$

Поэтому только  $S^3$  и  $S^4$  подвергаются изменению под действием возмущения гравитацией.

В системе координат де Ситтера геодезическая прецессия представляется в виде изменения только одной компоненты:

$$\Delta S^3 = \Delta S^3 - \frac{\omega_0}{c} \Delta S^4. \quad (8)$$

Согласно методу движений, ассоциированных с циклом,

$$\Delta S^3 = -\frac{1}{2} \int \int R^3_{131} S_0^1 dx^3 \wedge dx^1 = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R^3_{131} dr d\varphi = \quad (9)$$

$$= -2\pi\mu \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi\mu}{r_0^2}, \quad \int_0^{r_0} = -\int_{r_0}^0.$$

Аналогично

$$\Delta S^4 = -\frac{1}{2} \int \int R^4_{141} S_0^1 dx^4 \wedge dx^1 = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R^4_{141} dr d\varphi \frac{c}{\omega_0} = \quad (10)$$

$$= \frac{4\pi\mu c}{\omega_0} \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^3} = -\frac{2\pi\mu}{r_0^2} \frac{c}{\omega_0}, \quad \int_0^{r_0} = -\int_{r_0}^0.$$

При вычислении интегралов (9) и (10) получаем расходимость на

нижнем пределе. Для ее устранения проводим процедуру перенормировки, состоящую из устранения расходимости на основе некоторых ясных физических соображений.

Так как поле Шварцшильда асимптотически плоское, то при переносе вектора по круговой орбите бесконечно большого радиуса он не испытывает дополнительного изменения, т. е. частица на орбите  $r_0 \rightarrow \infty$  не возмущается гравитацией и своего состояния не изменяет. Например, в (9) должно выполняться

$$\int_0^{\infty} R_{131}^3 dr = 0. \quad (11)$$

Поэтому из очевидного равенства

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{\infty} = 0$$

вводим правило устранения расходимости:

$$\int_0^{r_0} = - \int_{r_0}^{\infty}. \quad (12)$$

Подставляя в (8) значения (9) и (10), получаем

$$\Delta S^{3'} = \frac{\pi\mu}{r_0^2} + \frac{\omega_0}{c} \left( \frac{c}{\omega_0} \frac{2\pi\mu}{r_0^2} \right) = \frac{3\pi\mu}{r_0^2}. \quad (13)$$

Однако измеримой величиной является не сама  $\Delta S^{3'}$ , а ее физическая компонента

$$\Delta \bar{S}^3 = \sqrt{g_{33}} / r = r_0 \Delta S^{3'}. \quad (14)$$

В приближении, доступном измерению, получаем следующий угол геодезической прецессии:

$$\delta = \Delta \bar{S}^3 \approx r_0 \Delta S^{3'} = \frac{3\pi\mu}{r_0}. \quad (15)$$

Рассмотренная задача имеет точное решение [5]:

$$\bar{S}^1 = \cos \left[ \omega_0 \left( 1 - \frac{3\mu}{2r_0} \right) (t - t_0) \right], \quad (16)$$

$$\bar{S}^3 = - \sin \left[ \omega_0 \left( 1 - \frac{3\mu}{2r_0} \right) (t - t_0) \right],$$

где  $\omega_0$  – угловая скорость невозмущенного движения. Зная решение (16), можно сравнить сходимость к нему решения приближенного, полученного методом движений, ассоциированных с циклом, в рамках теории возмущений.

В (15) вычислен только первый член из (1). Рассмотрим второй. В первом порядке компонента  $S^1$  изменяться не может, так как  $R_{131}^1 = R_{141}^1 = 0$ . Однако в процессе движения появляется  $S^3 \neq 0$ ,  $S^4 \neq 0$  и через  $R_{313}^1$ ,  $R_{414}^1$  «включается» обратная связь и подвергается изменению компонента  $S^1$ :

$$\Delta \bar{S}^1 \approx \Delta S^{1'} = \Delta S^1 = \frac{1}{8} \{ \int R_{313}^1 dx^3 \wedge dx^1 \} \int R_{131}^3 dx^3 \wedge dx^1 + \quad (17)$$

$$+ \frac{c^2}{\omega_0^2} \{ \int R_{441}^1 dx^3 \wedge dx^1 \} \int R_{141}^4 dx^3 \wedge dx^1 \} S_0^1 \approx - \frac{\delta^2}{2}.$$

Для получения этого результата требуется дополнительная перенормировка, обусловленная сохранением нормы вектора. Но точно такой же результат получается из (16) в приближении малых углов:

$$\cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}. \quad (18)$$

Итак, срабатывает не только первый, но и второй порядок метода движений, ассоциированных с циклом, как теории возмущений.

Для оценки порядка величин приведем данные расчета в первом приближении теории возмущений (т. е. согласно (15)). Геодезическая прецессия для Земли составляет  $0'', 019$  в год. Для спутника, скользящего по поверхности Земли, угол прецессии равен  $8'', 5$  в год.

### Список литературы

1. Cartan E. // L'enseignement mathematique. 1924—1925. Т.24. № 1. С. 5.
2. Ушаков Е. А. // Гравитация и электромагнетизм. 1988. С. 242.
3. Там же. 1981. С. 109.
4. Ushakov E. A., Timoshchenko A. I. // Abstracts of Contributed Papers 9 th Intern. Conf. on General Rel. and Grav. Jena, 1980. V. 1. P. 218.
5. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972. С. 191.

Поступила в редакцию 28.09.92

УДК 621.373

Л. И. БУРОВ, А. В. ЖВАЛЕВСКИЙ, А. П. КЛИЩЕНКО,  
И. Н. КОЗЛОВ, А. П. ЛИСТОПАД

## ОСОБЕННОСТИ ОКОЛОПОРОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ РАСТВОРОВ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ НАКАЧКЕ

Одна из возможностей управления энергетическими и поляризационными характеристиками излучения лазеров на растворах красителей основана на вариации состояния поляризации излучения накачки в ее продольном и поперечном вариантах. Этой проблеме посвящено достаточно большое количество работ [напр., 1—3], однако подавляющее большинство из них связано с использованием мощной накачки, причем интерпретация результатов проводилась в приближении модели тонкого оптического слоя. Последнее условие выполняется далеко не всегда и тогда эффекты, связанные с распространением излучения в нелинейной среде, могут существенным образом влиять на поляризацию, как это имеет место, например, для газовых лазеров [4]. Кроме того, по мнению авторов, более тонкого осмысления требует и сам процесс генерации поляризованного излучения в растворах сложных молекул. В этом случае целесообразным представляется вести исследование в области околопороговых мощностей накачки, сводя к минимуму влияние эффектов насыщения. В данной работе сделана попытка ответить на поставленные вопросы на основе исследований генерации жестких растворов красителей для случаев продольного и поперечного вариантов поляризованной накачки.

Для экспериментальных исследований были использованы этанольный и глицериновый растворы родамина 6G различных концентраций в лазере с изотропным резонатором. В качестве резонатора служила прямоугольная кювета из плавленого кварца. Мощность генерации и поляризации излучения лазера на красителе измерялась на установке, схема которой приведена на рис. 1. Накачка осуществлялась поляризованными импульсами длительностью 30 нс, следующими с частотой 12,5 Гц и длиной волны  $\lambda = 532$  нм. Поляризация накачки варьировалась от линейной до круговой с помощью пластинки  $\lambda/4$ . Степень поляризации излучения генерации лазера на красителе определялась при последовательном измерении максимальной и минимальной составляющих мощности генерации измерителем мощности ИМО-2Н. Степень эллиптичности излучения лазера анализировалась пла-

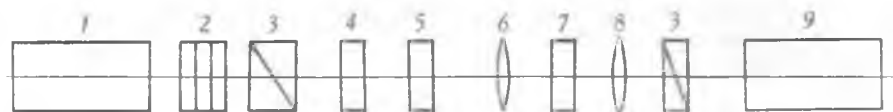


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1—лазер ЛТИ-401; 2—ослабляющие фильтры; 3—поляризатор; 4—фазовая пластинка; 5—фазовая пластинка; 6, 7—кюветы с красителем; 8—собирающие линзы; 9—измеритель мощности лазерного излучения ИМО-2Н

стинкой  $\lambda/4$  ( $\lambda = 560$  нм) и анализатора – пленочного поляроида. Следует отметить, что интенсивность накачки, концентрация раствора и длина кюветы лазера варьировались в пределах, которые обеспечивали практически полное поглощение накачки в пределах кюветы.

Полученные экспериментальные результаты существенным образом отличались от известных ранее [1–3], особенно для случая продольной накачки, который слабо исследован до настоящего времени. Поэтому был проведен самостоятельный теоретический анализ, в основу которого положена стандартная методика [5] – решение уравнений баланса для населенностей и уравнений переноса излучения. Поглощение и излучение света осмысливаются в рамках обычной двухуровневой модели с учетом спектрального сдвига областей поглощения и люминесценции. Для упрощения уравнения переноса учтены следующие условия:

1. Относительно невысокий коэффициент отражения стенок кюветы позволяет считать режим генерации однопроходовым.

2. Изотропность резонатора и окологороговый режим накачки позволяют считать коэффициент потерь постоянным для любой поляризации моды.

3. Рассматриваем только два варианта накачки: продольный (излучение накачки распространяется вдоль оси кюветы) и поперечный (излучение накачки ориентировано ортогонально оси кюветы).

С учетом сделанных допущений в приближении отсутствия насыщения система уравнений существенно упрощается и допускает аналитическое решение. Однако в дальнейшем для анализа экспериментальных данных мы будем использовать результаты численного расчета, используя аналитические выводы лишь в случае необходимости.

С точки зрения правильного задания параметров, входящих в уравнение, обратим внимание на два весьма важных экспериментальных результата:

1. Ни при какой поляризации накачки мы не получаем устойчивых фазовых соотношений в поляризации излучения генерации (т. е. оно может быть частично поляризовано, но не эллиптически).

2. При продольной накачке линейная поляризация оказывается примерно в три раза эффективнее круговой, причем эффект устойчив в широких пределах.

Последний результат кардинальным образом отличается, например, от данных авторов [2] и, казалось бы, противоречит устоявшимся представлениям. Действительно, при накачке циркулярно поляризованным излучением коэффициент усиления для ортогонально поляризованных мод одинаков и составляет  $2/3$  (при тех же условиях) от значения максимального коэффициента усиления при возбуждении линейно поляризованным светом. Однако равенство коэффициентов усиления в данном случае означает просто вырождение, т. е. мода может иметь линейную поляризацию любой ориентации. Поскольку для сложных молекул в распределении населенности возбужденного состояния отсутствуют фазовые корреляции, то при генерации в этом случае мы должны иметь просто некогерентную смесь волн с произвольными линейными поляризациями, что дает обычное неполяризо-

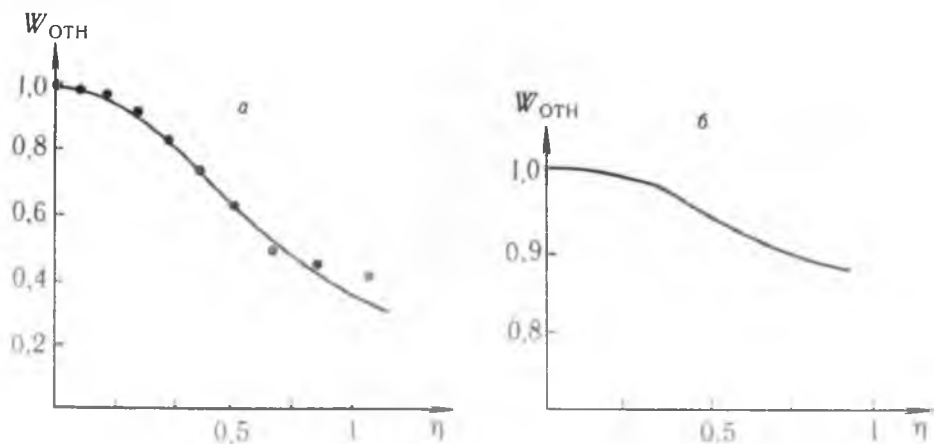


Рис. 2. Зависимость относительной мощности генерации от степени эллиптичности излучения накачки для случаев продольной (а) и поперечной (б) накачки

ванное излучение. С точки зрения теории, такое равновероятное распределение мод с линейными поляризациями означает, что коэффициент усиления в расчете на одну моду должен быть уменьшен на  $\pi$ .

Более того, рассматривая эллиптически поляризованное излучение накачки как суперпозицию линейной и круговой, несложно видеть, что излучение генерации будет представлять суперпозицию линейно поляризованного и естественного излучения, т. е. будет частично поляризовано, что и наблюдается на эксперименте.

С учетом всего сказанного, можно рассчитать зависимость мощности генерации от степени эллиптичности излучения накачки. Результаты такого расчета представлены на рис. 2 для случаев продольной (а) и поперечной (б) накачки. Следует отметить, что относительное распределение мощности сохраняется достаточно устойчиво в широком диапазоне значений интенсивности накачки, концентрации раствора, длины кюветы и коэффициента потерь. Экспериментальные данные для случая продольной накачки (рис. 2, а) хорошо согласуются с данными теоретического расчета. Необходимо подчеркнуть еще два существенных момента. Как указывалось ранее, все расчеты строились в линейном приближении. Учет эффектов насыщения (рис. 2, а, кривая 2) показывает, что даже при их относительно малой величине преимущества линейной поляризации излучения накачки начинают снижаться.

Подобный эффект должен ярко проявляться для случая ортогональной накачки, где, например, согласно результатам работы [2], для раствора родамина 6G при мощной накачке влияние поляризации вообще не обнаруживается. Это вполне объяснимо, поскольку в этом случае при использовании циркулярной накачки вырождения не происходит и сохраняется конечная поляризация излучения генерации.

Зато проявляется вполне отчетливая зависимость относительной мощности генерации от угла поворота  $\phi$  плоскости поляризации излучения накачки относительно оси, ортогональной оси кюветы (рис. 3). Здесь вырождение происходит при значениях  $\phi = \pi/2$ , когда вектор поляризации направлен вдоль оси кюветы, а излучение генерации является неполяризованным. Аналогия с рассматриваемым случаем продольной накачки вполне адекватна, особенно если рассматривать зависимость степени поляризации излучения от угла  $\phi$  (рис. 4). Следует подчеркнуть, что в данном случае эффект усиливается с увеличением эффективной длины генерации, которая определяется полушириной пучка накачки, обладающего гауссовым распределением энергии.

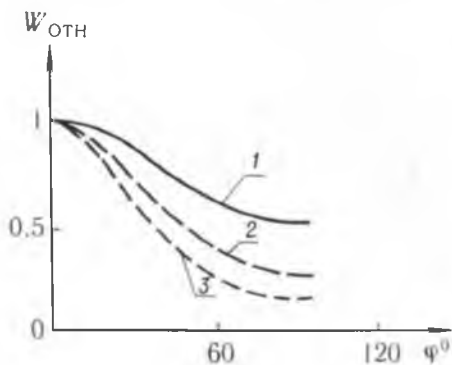


Рис. 3. Зависимость относительной мощности генерации от угла поворота плоскости поляризации излучения накачки относительно оси, ортогональной от оси кюветы. Полуширина пучка накачки увеличивается от 1-го графика к 3-му

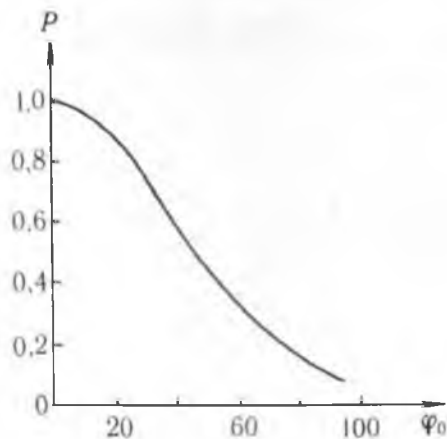


Рис. 4. Зависимость степени поляризации (P) от азимута вектора излучения накачки



Таким образом, полученные нами результаты позволяют утверждать, что в околопороговой области поляризация излучения накачки является существенным фактором, определяющим энергетические и поляризационные характеристики генерируемого излучения. Более того, исследования в этой области позволяют более глубоко разобраться с природой формирования поляризации лазерного излучения, причем дальнейшие исследования в этом направлении просто необходимы, поскольку сразу же возникает целый ряд вопросов, как, например, определение порога генерации при накачке поляризованными импульсами пикосекундного диапазона.

### Список литературы

1. Пилипович В. А., Ковалев А. А. Проблемы современной оптики и спектроскопии. Мн., 1980. С. 173.
2. Безродный В. Н., Тихонов Е. А. // УФЖ. 1982. Т. 27. № 8. С. 1143.
3. Nagata I., Nakaya T. // Journ. Phys. D. 1973. V. 6. P. 1870.
4. Алексеев К. И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 2064.
5. Методы расчета ОКГ/Под ред. Б. И. Степанова. Мн., 1968.

Поступила в редакцию 20.09.92.

УДК.535.34

ДЖИХАД АДДАСИ (Иордания), А. Л. ТОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕЙ

### ЗАПИСЬ ОВФ-ГОЛОГРАММ НА ПЕРЕХОДАХ В ВОЗБУЖДЕННОМ КАНАЛЕ КРАСИТЕЛЯ РОДАМИН 6Ж

Реализация нелинейных процессов при поглощении с возбужденного уровня резонансной среды вызывает интерес в связи с возможностью некогерентного оптического управления эффективностью нелинейного взаимодействия. Так, в работе [1] наблюдалась самодифракция излучения неодимового лазера в растворе красителя родамин 6Ж, связанная с поглощением с возбужденного энергетического уровня, и была показана зависимость интенсивности дифрагированного излучения ( $\lambda = 1,064$  мкм) от интенсивности подкачки в основную полосу поглощения ( $\lambda = 0,532$  мкм). Теоретические исследования светоиндуцированного изменения показателя преломления, вызванного переходами между возбужденными синглетными или триплетными уровнями молекул, проводились в работе [2].

В данной работе за счет поглощения с возбужденного синглетного уровня красителя родамин 6Ж реализовано обращение волнового фронта (ОВФ) в

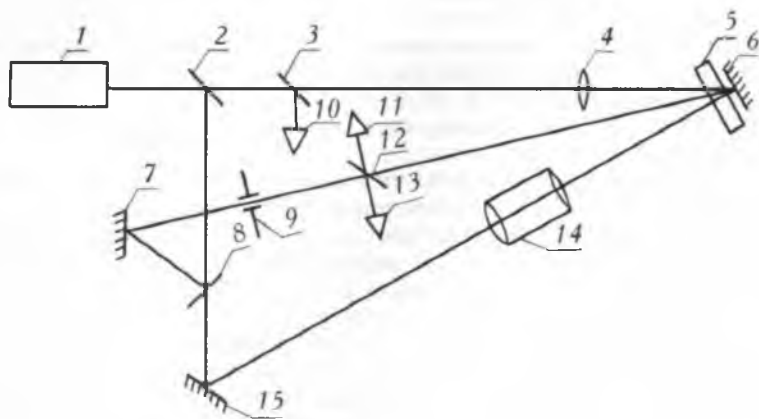


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1—лазер, 2—спектроделитель, 3—зеркало ( $R = 5\%$ ), 4—линза, 5—кювета с красителем родамин 6Ж, 6, 7, 15—зеркала ( $R = 100\%$ ), 8, 12—зеркала ( $R = 40\%$ ), 9—диафрагма, 10, 11, 13—регистрирующие системы, 14—телескопическая система

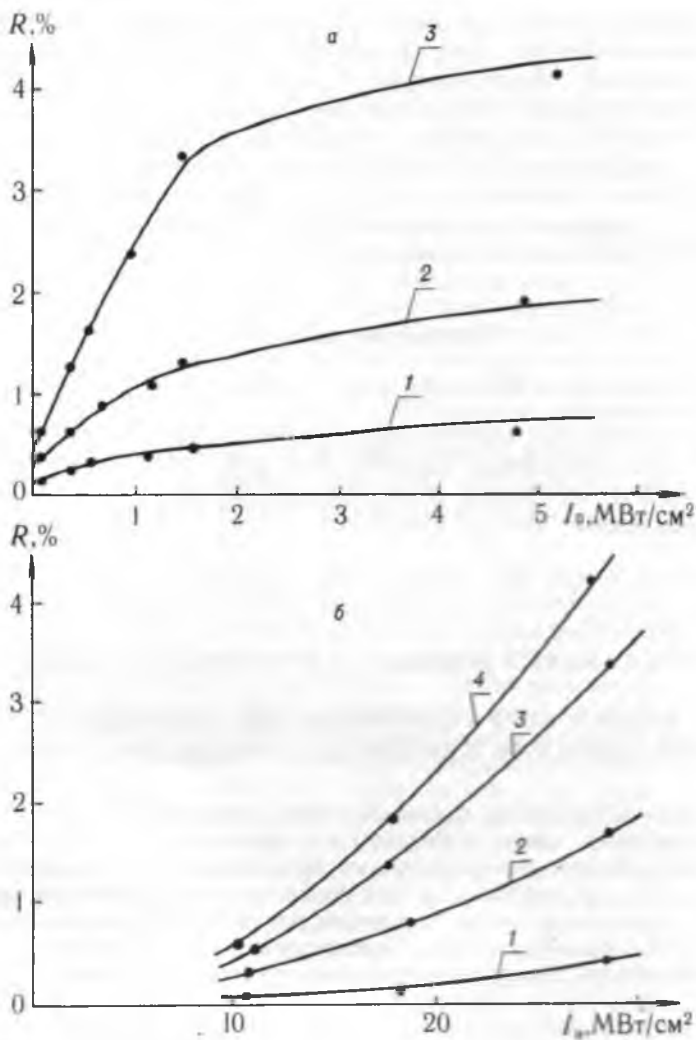


Рис. 2. Зависимости коэффициента отражения обращенной волны  $R$  от :

- а) интенсивности оптической подкачки  $I_0$  при интенсивности волн накачки  $I_H = 11(1), 18(2), 28(3)$  МВт/см<sup>2</sup>;
- б) интенсивности волн накачки  $I_H$  при  $I_0 = 0(1), 0,5(2), 1,5(3), 5(4)$  МВт/см<sup>2</sup>,  $K_0 L = 5,6 (L = 0,5 \text{ см})$

схеме четырехволнового взаимодействия. Перевод молекул в возбужденное состояние  $S_1$  осуществлялся второй гармоникой лазера на алюмоиттриевом гранате. Волны, участвующие в процессе четырехволнового ОВФ, имели частоту, отстроенную в полосу поглощения возбужденного канала  $S_1 - S_2$  (основное излучение лазера).

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Лазер 1 на алюмоиттриевом гранате ЛТИ-403 генерировал основное излучение с длиной волны  $\lambda = 1,064$  мкм (длительность импульса 20 нс) и вторую гармонику с  $\lambda = 0,532$  мкм. Излучение второй гармоники, пройдя спектроделитель 2, направлялось в кювету 5 с этанольным раствором красителя родамин 6Ж. Излучение основной частоты генерации лазера после отражения от спектроделителя попадало в систему формирования сигнальной волны (зеркала 7, 8) и волн накачки (зеркала 6, 15). В результате взаимодействия сигнальной волны и двух встречных волн накачки в кювете 5 формировалась волна с обращенным фронтом, которая распространялась навстречу сигнальной. Угол между направлением распространения волн накачки и сигнальным пучком (0,2 рад.) обеспечивал перекрытие волн по длине кюветы ( $L = 0,15$  или 0,5 см). С помощью линии задержки 7, 8 время прихода сигнальной волны и волн накачки в область взаимодействия было синхронизовано с

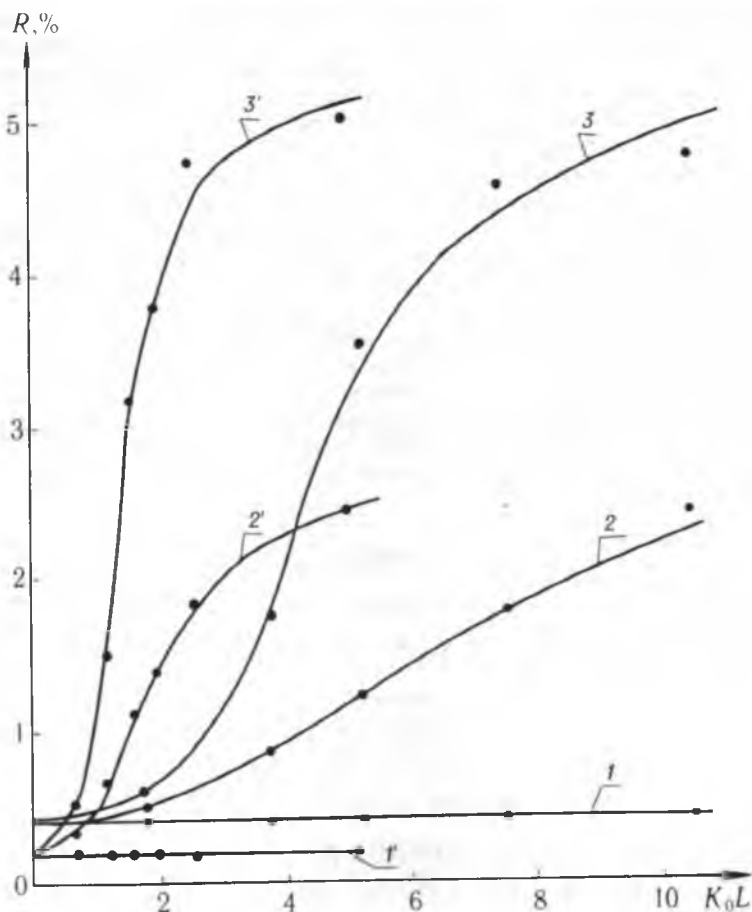


Рис. 3. Зависимости коэффициента отражения обращенной волны  $R$  от оптической плотности раствора красителя  $K_0L$  при интенсивности подкачки  $I_0 = 0(1, 1')$ ,  $0,3(2, 2')$ ,  $3(3, 3')$   $\text{МВт/см}^2$ ,  $I_n = 28 \text{ МВт/см}^2$ ,  $L = 0,15(1, 2, 3)$ ,  $0,5(1, 2, 3)$   $\text{см}$

погрешностью  $\leq 60$  пс, меньшей времени когерентности используемого лазера. Линза 4 и телескопическая система 14 позволяли повысить плотность мощности излучения в области взаимодействия. Для согласования поперечных размеров сигнального пучка и пучков накачки использовалась диафрагма 9. Измерения энергетической эффективности четырехволнового ОВФ проводились с помощью регистрирующих систем 11, 13 на основе фотодиодов ФД-24К, работающих в режиме фотопреобразователя, и импульсных цифровых вольтметров В4-17. Измеритель 10 регистрировал энергию излучения оптической подкачки. Результаты измерений отношения энергий обращенного и сигнального импульсов  $R$  усреднялись в узком интервале значений интенсивностей волн накачки  $I_n$  и оптической подкачки  $I_0$ .

Зависимости коэффициента отражения обращенной волны  $R$  от интенсивности оптической подкачки и волн накачки представлены на рис. 2. В отсутствие подкачки ( $I_0 = 0$ ) запись ОВФ-голограмм обусловлена поглощением взаимодействующих волн этанолом. При этом энергетическая эффективность процесса мала ( $R < 0,5\%$ ) (рис. 2, б, кривая 1). Включение оптической подкачки приводит к заселению возбужденного синглетного уровня молекул красителя  $S_1$ . За счет дополнительного поглощения излучения основной частоты генерации лазера в возбужденном канале  $S_1 - S_2$  эффективность тепловых динамических голограмм, записываемых в растворе красителя, существенно (более чем на порядок) возрастает (рис. 2, а). Насыщение роста коэффициента отражения обращенной волны  $R$  наступает при интенсивностях оптической подкачки, превышающих интенсивность насыщения резонансного перехода  $S_0 - S_1$  ( $I_{\text{нас}} \approx 0,5 \text{ МВт/см}^2$ ). Как и следо-

вало ожидать, для ОВФ при четырехволновом взаимодействии наблюдается квадратичная зависимость коэффициента отражения от интенсивности волны накачки (рис. 2, б). В то же время величина оптической плотности раствора красителя, при которой имеет место насыщение роста коэффициента отражения  $R$ , зависит от геометрической толщины кюветы (рис. 3). Причем близкие значения коэффициента отражения принимаются для разных толщин при одном и том же коэффициенте поглощения раствора красителя (кривые 2,2' или 3,3'). Такая ситуация объясняется тем, что при большой оптической плотности  $K_0L$  интенсивности подкачки достаточно для просветления только части раствора. В этом случае независимо от толщины кюветы во взаимодействии принимает участие одно и то же число молекул в растворе. В остальной части кюветы молекулы красителя находятся в основном состоянии и не участвуют в процессе четырехволнового ОВФ.

Таким образом, на основании приведенных в работе зависимостей коэффициента отражения обращенной волны от интенсивности подкачки, волн накачки и оптической плотности раствора можно сделать вывод о записи в растворе красителя родамин 6Ж ОВФ-голограмм, обусловленных переходом молекул в возбужденное состояние и поглощением с возбужденного энергетического уровня.

### Список литературы

1. И в а к и н Е. В., П е т р о в и ч И. П., Р у б а н о в А. С. // ЖПС. 1973. Т. 18. № 6. С. 1003.
2. А д д а с и Д ж и х а д, Т о л с т и к А. Л., Ч а л е й А. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2. С. 11.

Поступила в редакцию 18.09.92.

УДК 535.8

В. В. ЕРМАКОВ, И. В. СТАШКЕВИЧ

### УЧЕТ АНИЗОТРОПИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ФОРМУЛАМ ФЕДЕРА

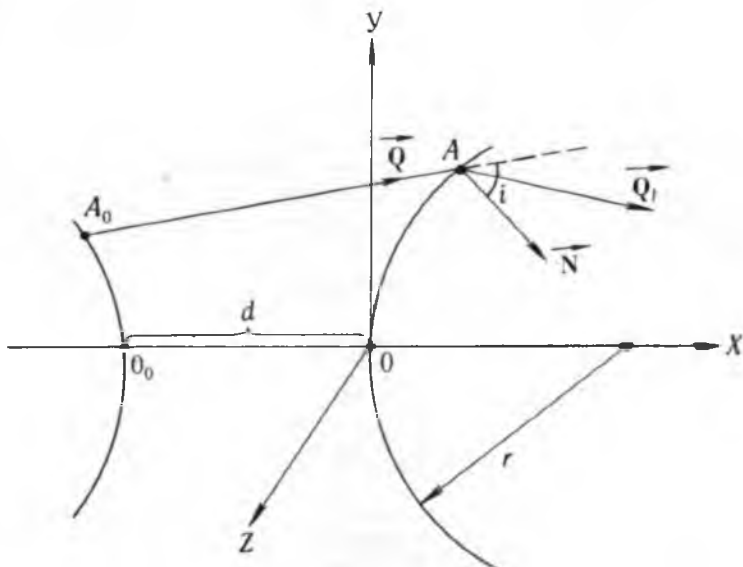
Расчет оптических систем с помощью ЭВМ наиболее удобно проводить по формулам Федера [1]. Однако эти формулы выведены в предположении, что детали оптической системы сделаны из изотропных материалов. Реальные оптические системы могут содержать и анизотропные элементы (пластинки, линзы) [2, 3]. Учет анизотропии отдельных элементов в формулах Федера для наиболее употребительных случаев (оптическая ось кристалла перпендикулярна или параллельна оптической оси системы) и является целью данной статьи.

При рассмотрении хода луча через преломляющую поверхность с учетом анизотропии можно выделить три случая: 1) луч преломляется из изотропного в анизотропный материал; 2) луч преломляется из анизотропного в изотропный материал; 3) луч преломляется из анизотропного в анизотропный материал. Третий случай можно свести к первым двум, введя между анизотропными средами бесконечно тонкий слой изотропного материала.

Рассмотрим случай 1, когда ось кристалла перпендикулярна оптической оси системы. Выберем систему координат, в которой ось  $X$  параллельна оптической оси системы, ось  $Y$  — параллельна оптической оси кристалла (рисунок). Закон преломления в данном случае может быть записан в виде [4]:

$$\begin{aligned} \frac{n_c'^2}{n} X_1 - nX &= g \cos \mu, \\ \frac{n_0'^2}{n} Y_1 - nY &= g \cos \nu, \\ \frac{n_c'^2}{n} Z_1 - nZ &= g \cos \lambda, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $g$  находится при решении квадратного уравнения:



Ход луча через преломляющую поверхность:

$\vec{Q}$  — единичный вектор вдоль луча до преломления;  $\vec{Q}_1$  — единичный вектор вдоль луча после преломления;  $\vec{N}$  — единичный вектор нормали к поверхности в точке преломления;  $A$  — точка пересечения луча с поверхностью, имеющей координаты  $x, y, z$ ;  $A_0$  — точка пересечения луча с предыдущей поверхностью, имеющей координаты  $x_0, y_0, z_0$

$$g^2 \left( \frac{\cos^2 \mu}{n_e'^2} + \frac{\cos^2 \nu}{n_0'^2} + \frac{\cos^2 \lambda}{n_e'^2} \right) + 2g\pi \left( \frac{X \cos \mu}{n_e'^2} + \frac{Y \cos \nu}{n_0'^2} + \frac{Z \cos \lambda}{n_e'^2} \right) + \pi^2 \left( \frac{X^2}{n_e'^2} + \frac{Y^2}{n_0'^2} + \frac{Z^2}{n_e'^2} \right) - 1 = 0.$$

Показатель преломления луча в кристалле связан с  $g$  соотношением:

$$\frac{1}{n^2} = (g \cos \mu - \pi X)^2 \frac{1}{n_e'^4} + (g \cos \nu - \pi Y)^2 \frac{1}{n_0'^4} + (g \cos \lambda - \pi Z)^2 \frac{1}{n_e'^4}. \quad (3)$$

В данных формулах:  $X, Y, Z$  — направляющие косинусы падающего луча;  $X_1, Y_1, Z_1$  — направляющие косинусы преломленного луча;  $\cos \mu, \cos \nu, \cos \lambda$  — направляющие косинусы нормали к преломляющей поверхности в точке падения луча;  $\pi$  — показатель преломления изотропной среды;  $n_0', n_e'$  — обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла;  $n$  — показатель преломления кристалла для необыкновенного луча с направляющими косинусами  $X_1, Y_1, Z_1$ .

В формуле (2) учтем, что  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ,  $\cos^2 \mu + \cos^2 \nu + \cos^2 \lambda = 1$ ,  $X \cos \mu + Y \cos \nu + Z \cos \lambda = \cos i$ , где  $i$  — угол между нормалью к поверхности и падающим лучом.

После элементарных преобразований формулу (2) можно привести к виду:

$$g^2 (1 + \epsilon \cos^2 \nu) + 2g\pi (\cos i + \epsilon Y \cos \nu) + \pi^2 (1 + \epsilon Y^2) - n_e'^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\epsilon = \frac{n_0'^2 - n_e'^2}{n_0'^2}.$$

Выберем направление нормали так, чтобы  $\cos i$  был положительным. В

этом случае реальным решением уравнения (4) будет корень со знаком «+». Тогда:

$$g = \frac{[(\cos i - \epsilon Y \cos v)^2 n^2 - (1 + \epsilon \cos^2 v) ((1 + \epsilon Y^2) n^2 - n_e^2)]^{1/2} - n (\cos i - \epsilon Y \cos v)}{1 + \epsilon \cos^2 v}.$$

Учтем, что  $\cos \mu = 1 - x/r$ ,  $\cos v = -y/r$ ,  $\cos \lambda = -z/r$ , где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты точки пересечения луча с поверхностью.

Таким образом, можно написать сводку формул Федера при преломлении луча через сферическую поверхность, разделяющую изотропный материал и кристалл с осью, перпендикулярной оптической оси системы:

$$1. \quad 1 = dX - (x_0 X + y_0 Y + z_0 Z);$$

$$2. \quad M_x = x_0 + 1X - d;$$

$$3. \quad M^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1^2 - 1dx + d^2;$$

$$4. \quad \cos i = \left( x^2 - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2M_x}{r} \right)^{1/2};$$

$$5. \quad L = 1 + \frac{M^2/r - 2M_x}{x + \cos i};$$

$$6. \quad x = x_0 + LX - d;$$

$$7. \quad y = y_0 + LY;$$

$$8. \quad z = z_0 + LZ;$$

$$9. \quad \epsilon = \frac{n_0^2 - n_e^2}{n_0^2};$$

10.

$$g = \frac{[(\cos i - \epsilon Y y/r)^2 n^2 - (1 + \epsilon y^2/r^2) ((1 + \epsilon Y^2) n^2 - n_e^2)]^{1/2} - n (\cos i - \epsilon Y y/r)}{1 + \epsilon y^2/r^2};$$

$$11. \quad n' = [ (g \cos \mu - nX)^2 \frac{1}{n_e^4} + (g \cos v - nY)^2 \frac{1}{n_0^4} + (g \cos \lambda - nZ)^2 \frac{1}{n_e^4} ]^{-1/2};$$

$$12. \quad X_1 = \frac{n'}{n_e^2} (g(1 - x/r) + nX);$$

$$Y_1 = \frac{n'}{n_0^2} (-gy/r + nY);$$

$$Z_1 = \frac{n'}{n_e^2} (-gz/r + nZ).$$

Рассмотрим случай, когда луч преломляется из анизотропной среды в изотропную. В этом случае формулы преломления имеют вид [4]:

$$n_1 X_1 - \frac{n_e^2}{n} X = g \cos \mu,$$

$$n_1 Y_1 - \frac{n_0^2}{n} Y = g \cos v, \quad (5)$$

$$n_1 Z_1 - \frac{n_e^2}{n} Z = g \cos \lambda,$$

где

$$\frac{1}{n_1^2}g + \frac{2g}{n} \left( \frac{n_e^2 X \cos \mu + n_0^2 Y \cos \nu + n_e^2 Z \cos \lambda}{n_1^2} \right) + \frac{1}{n^2} \left( \frac{n_e^4 X^2 + n_0^4 Y^2 + n_e^4 Z^2}{n_1^2} \right) - 1 = 0. \quad (6)$$

Этот случай является более легким для вычислений в связи с тем, что  $n$  (показатель преломления для необыкновенного луча с направляющими косинусами  $X, Y, Z$  в кристалле) известен. Он рассчитан при преломлении луча на предыдущей поверхности с помощью формулы (3). Остается только выразить  $g$  через известные нам величины.

Учитывая, что  $X \cos \mu + Y \cos \nu + Z \cos \lambda = \cos i$  и  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , выражение (6) можно привести к виду:

$$g^2 + \frac{2g}{n} (n_e^2 \cos i + \epsilon_1 Y \cos \nu) + n^{-2} (n_e^4 + \epsilon_2 Y^2) - n_1^2 = 0,$$

$$\epsilon_1 = n_0^2 - n_e^2, \quad \epsilon_2 = n_0^4 - n_e^4.$$

Откуда

$$g = \frac{[ (n_e^2 \cos i + \epsilon_1 Y \cos \nu)^2 - (n_e^4 + \epsilon_2 Y^2) + n_1^2 n^2 ]^{1/2} - n_e^2 \cos i - \epsilon_1 Y \cos \nu}{n}.$$

Выражая направляющие косинусы нормали к поверхности через координаты точки пересечения луча с поверхностью, получаем искомые формулы. Так как первые 8 формул остались без изменения, запишем только последние.

$$9. \quad \epsilon_1 = n_0^2 - n_e^2, \quad \epsilon_2 = n_0^4 - n_e^4;$$

$$10. \quad g = \frac{[ (n_e^2 \cos i - \epsilon_1 Y y / r^2) - (n_e^4 + \epsilon_2 Y^2) + n_1^2 n^2 ]^{1/2} - n_e^2 \cos i + \epsilon_1 Y y / r}{n};$$

$$11. \quad X_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_e^2 X + n g (1 - x / r)),$$

$$Y_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_0^2 Y - n g y / r),$$

$$Z_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_e^2 Z - n g z / r).$$

Формулы Федера для случая, когда ось кристалла параллельна оптической оси системы, выводятся совершенно аналогично, поэтому приведем только их окончательный вид.

Если луч преломляется из изотропной среды в анизотропную:

$$9. \quad \epsilon = \frac{n_0'^2 - n_e'^2}{n_0'^2};$$

10.

$$g = \frac{[ (\cos i - \epsilon X x / r)^2 n'^2 - (1 + \epsilon x^2 / r^2) ( (1 + \epsilon X^2) n^2 - n_e'^2 ) ]^{1/2} - n (\cos i - \epsilon X x / r)}{1 + \epsilon x^2 / r^2};$$

$$11. \quad n' = [ (g \cos \mu - n X)^2 \frac{1}{n_0'^4} + (g \cos \nu - n Y)^2 \frac{1}{n_e'^4} + (g \cos \lambda - n Z)^2 \frac{1}{n_e'^4} ]^{-1/2};$$

$$12. \quad X_1 = \frac{n'}{n_0'^2} (g (1 - x / r) + n X),$$

$$Y_1 = \frac{n'}{n_e'^2} (-g y / r + n Y),$$

$$Z_1 = \frac{n'}{n_e'^2} (-g z / r + n Z).$$

В случае, когда луч преломляется из анизотропной среды в изотропную:

$$9. \quad \epsilon_1 = n_0^2 - n_c^2, \quad \epsilon_2 = n_0^4 - n_c^4;$$

$$10. \quad g = \frac{[(n_c^2 \cos i - \epsilon_1 X x / r)^2 - (n_c^4 + \epsilon_2 X^2) + n_1^2 n^2]^{1/2} - n_c^2 \cos i + \epsilon_1 X x / r}{n};$$

$$11. \quad X_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_0^2 X + n g (1 - x / r)),$$

$$Y_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_c^2 Y - n g y / r),$$

$$Z_1 = \frac{1}{n_1 n} (n_c^2 Z - n g z / r).$$

Формулы Федера для анизотропных материалов, приведенные в этой статье, обладают теми же преимуществами, что и формулы Федера для изотропных материалов. В частности, в этих формулах нет тригонометрических функций, минимальное число квадратных корней (два в случае преломления из изотропной среды в анизотропную и один в случае преломления из анизотропной среды в изотропную), что позволяет эффективно использовать их при расчетах aberrаций оптических систем на ЭВМ методами прямого поиска.

#### Список литературы

1. С л ю с а р е в Г. Г. Методы расчета оптических систем. Л., 1975.
2. Е р м а к о в В. В., С т а ш к е в и ч И. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 1.
3. О с и п о в Ю. В. Лазерные измерительные устройства с кристаллооптическими элементами из исландского шпата. Л., 1984.
4. Г а л ь п е р н Д. Ю. // Тр. ГОИ. 1981. Т. 47. Вып. 181.

Поступила в редакцию 08.09.92.

УДК 621.315.592

*Д. И. БРИНКЕВИЧ, В. В. ПЕТРОВ, Ю. Т. ТУЖИК*

#### ВЛИЯНИЕ ПРЕЦИПИТАТОВ КИСЛОРОДА НА ПРОЦЕССЫ ГЕНЕРАЦИИ ТЕРМОДОНОРОВ В КРЕМНИИ

Известно [1–4], что эффективность образования кислородсодержащих термодоноров (ТД) в кремнии во многом определяется термической пред- историей кристаллов. Авторами [2, 3] было показано, что даже кратковременный предварительный отжиг в диапазоне температур 530–800°C приводит к уменьшению концентрации центров зарождения данных дефектов. Учитывая, что преципитаты кислорода (ПК), формирующиеся при длительной предварительной термообработке (ПТО), могут оказывать влияние на последующие процессы формирования ТД, интересно выяснить этот важный в практическом аспекте вопрос.

В настоящей работе использовались пластины бездислокационного кремния марки КЭФ-20 с различной концентрацией кислорода. Все образцы подвергались стабилизирующему нагреву (650°C, 1 ч), при котором отжи- гались ростовые ТД [2]. Часть пластин подвергалась ПТО (925°C, 5 ч) в атмосфере водорода. Параметры исследовавшихся образцов представлены в таблице. Концентрация кислорода в междоузельном положении ( $N_0$ ) изме- рялась по полосе ИК поглощения при 1106 см<sup>-1</sup> [5]. Содержание углерода в положении замещения во всех образцах не превышала 2.10<sup>16</sup> см<sup>-3</sup>. Измерения эффекта Холла и проводимости осуществлялись по стандартной методике при комнатной температуре. Термодоноры вводились на воздухе в ходе нагрева длительностью до 20 ч при температуре 450°C.



**Концентрация кислорода и параметры термодоноров  
в исследовавшихся образцах**

№ пластины	№ образца	$N_0 \cdot 10^{-17}, \text{ см}^{-3}$		$НСВ \cdot 10^{-10}, \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$		$МДК \cdot 10^{-14}, \text{ см}^{-3}$	
		Исх.	ТО 925°С, 5 ч	Исх.	ТО 925°С, 5 ч	Исх.	ТО 925°С, 5 ч
1	1Ц	13,50	5,21	41,7	0,03	68,4	< 0,2
	1К	8,19	8,38	12,8	4,39	35,2	30,5
2	2Ц	9,29	9,12	6,29	2,35	21,0	20,9
	2К	5,75	5,02	0,80	1,24	8,3	9,81
3	3Ц	12,0	11,0	3,06	1,32	—	—
	3К	5,87	5,20	0,96	1,13	—	—

**Примечания:** Ц—центр пластины; К—край пластины; НСВ—начальная скорость введения термодоноров; МДК—максимально достижимая концентрация термодоноров.

Кинетические кривые генерации ТД в данной работе не приводятся, поскольку по виду они не отличались от известных кривых, полученных другими авторами, например [6]. Отметим основные особенности.

Проведение ПТО при 925°С снижает эффективность генерации ТД только в образцах с высоким содержанием кислорода (см. таблицу). Характерно, что в образцах с  $N_0 < 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  начальная скорость введения и максимально достижимая концентрация термодоноров после проведения указанной ПТО была даже несколько выше, чем в образцах, вырезанных из той же пластины, но не подвергавшихся предварительному нагреву. Данные экспериментальные результаты не противоречат выводам работ [2, 3, 7], так как в последних исследовались образцы, содержащие в значительной концентрации «ростовые» термодоноры.

В центре пластины в процессе ПТО происходила интенсивная преципитация кислорода, причем скорость удаления данной примеси из междоузлий возрастала при увеличении  $N_0$ . В ее периферийной части, имеющей пониженную из-за испарения при выращивании концентрацию кислорода, преципитацию (заметное уменьшение  $N_0$ ) вследствие ограничений, накладываемых чувствительностью использованной методики, обнаружить не удалось. Отмеченное обстоятельство позволило более детально рассмотреть влияние кислородных преципитатов на генерацию ТД.

Так, образцы 1Ц, с одной стороны, и 2К, 3К, с другой, имели после проведения ПТО близкие по величине значения  $N_0$ , однако содержание в них ПК должно существенно различаться. В образце 1Ц преобладающая доля кислорода находится в преципитатах ( $-8,3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ). В образцах 2К и 3К в процессе нагрева заметного удаления атомов данной примеси из междоузельного положения не наблюдалось (см. таблицу), т. е. преципитация кислорода была подавлена. Характерно, что в образце 1Ц, содержащем ПК в большей концентрации, эффективность введения ТД была значительно ниже, чем в других (2К, 3К). Так как все эти образцы имеют идентичную термическую предысторию, не различаются по содержанию кислорода в междоузельном положении, но концентрации данной примеси, ушедшей на формирование преципитатов, различны, можно сделать следующее заключение: в подавлении генерации ТД в образце 1Ц доминирующую роль играют ПК.

Предполагается [3, 7], что формирование данных точечных дефектов

происходит путем последовательного присоединения определенных структурных единиц к центрам зарождения ТД, в качестве которых могут выступать электрически неактивные комплексы, состоящие из трех атомов кислорода. Природа подвижных частиц, участвующих в формировании термодоноров, к настоящему времени не установлена. Однако известно, что в их состав должен входить один атом кислорода. Ранее также отмечалось [7, 8], что концентрация подвижных частиц не зависит от термической предыстории кристаллов, а определяется только величиной  $N_0$ .

Не исключено, что существует несколько механизмов, учитывающих влияние кислородных преципитатов на генерацию ТД. Так, априори можно утверждать, что присутствие ПК уменьшает концентрацию центров зарождения термодоноров или снижает эффективный радиус захвата ими подвижных частиц. Не исключено, что поля упругих напряжений, создаваемые кислородными преципитатами, могут уменьшать коэффициент диффузии подвижных частиц. Однако наиболее вероятным представляется «захват» ПК подвижных частиц, что исключает часть атомов кислорода из реакций образования ТД.

В заключение отметим, что необходимы дальнейшие исследования для полного выяснения механизмов влияния кислородных преципитатов на генерацию термодоноров.

### Список литературы

1. Ouzmazd A., Schoter W., Bourget A. // Journ. Appl. Phys. 1984. V. 56. № 6. P. 1670.
2. Маркевич В. П., Мурин Л. И., Литвинко А. Г. // Физ. и техн. полупроводн. 1987. Т. 21. № 7. С. 1267.
3. Markevich V. P., Murin L. I. // Phys. Stat. Sol. 1989. V. A111. № 2. P. K149.
4. Gaworzewski P., Hilde E. // Phys. Stat. Sol. 1985. V. A92. № 1. P. 129.
5. Ильин М. А., Коварский В. Я., Орлов А. Ф. // Заводская лаборатория. 1984. Т. 50. № 1. С. 24.
6. Kaiser W., Frisch H. L., Reiss H. // Phys. Rev. 1958. V. 112. № 5. P. 1546.
7. Маркевич В. П. Механизм образования и свойства термодоноров в кремнии: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. М., 1990.
8. Маркевич В. П., Мурин Л. И. // Физ. и техн. полупроводн. 1991. Т. 25. № 2. С. 262.

Поступила в редакцию 03.04.92.

УДК.548.55

А. В. ДРОЗДОВСКИЙ, И. Е. ТРАЛЛЕ, А. К. ФЕДОТОВ

### БИСТАБИЛЬНОСТЬ БАРЬЕРА НА ГРАНИЦЕ ЗЕРЕН В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Границы зерен (ГЗ) являются основным фактором, определяющим электронные свойства приборов и устройств, использующих поликристаллические полупроводники [1]. Это связано, в первую очередь, с наличием на ГЗ большого количества пограничных состояний (ПС), являющихся ловушками для носителей заряда и приводящих к возникновению областей пространственного заряда (ОПЗ) вокруг ГЗ. Весьма малые толщины ОПЗ ( $10 - 1000$  нм [2]) и высокие плотности ПС ( $\sim 10^{11} - 10^{13}$  см $^{-2}$  [3, 4]) могут создавать вблизи ГЗ общего типа сильные «встроенные» электрические поля напряженностью до  $10^4 - 10^6$  В/см [5]. Складываясь с внешним электрическим полем, последние могут способствовать разогреву носителей заряда (НЗ), движущихся поперек плоскости ГЗ, и приводить тем самым к нестабильности пограничного барьера. На эту возможность впервые было указано в работах [6,7].

Целью данной работы является теоретическое исследование влияния разогрева НЗ электрическим полем на высоту пограничного барьера активной ГЗ в полупроводнике на примере кремния *n*-типа проводимости.

Задачу о формировании барьера и движении НЗ поперек плоскости ГЗ будем рассматривать в приближении Шоттки, когда ГЗ моделируется двумя симметричными барьерами Шоттки, включенными навстречу друг другу (см., напр., [8]). Впервые такой подход, развивший идею захвата НЗ на ПС, был сформулирован в работе Тейлора и др. [9] для бикристаллического

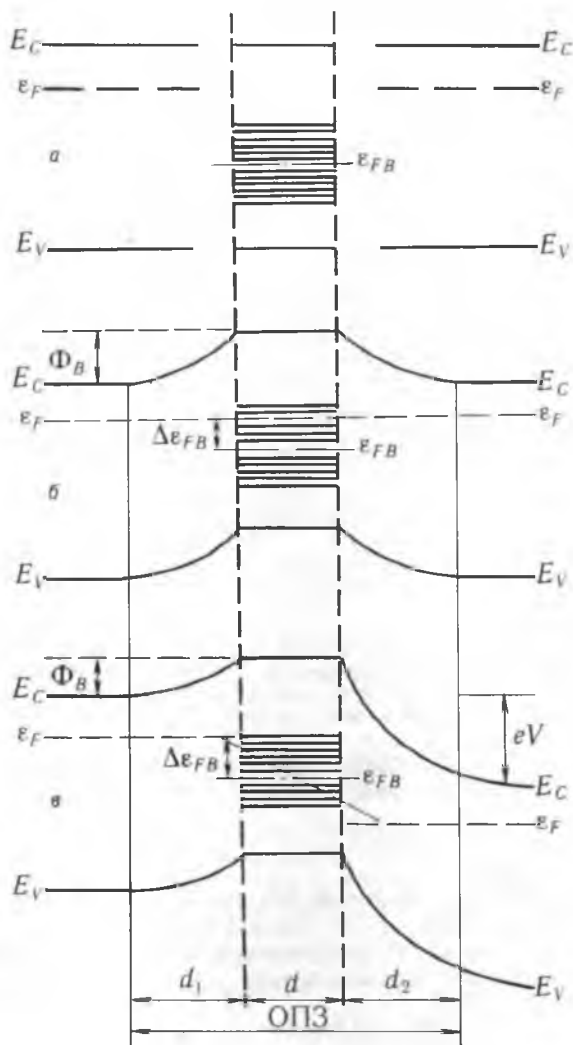


Рис. 1. Схематическое представление изгиба зон около ГЗ в кремнии п-типа  
 а—условное исходное состояние (до соприкосновения «ядра» и зерен); б—структура зон в условиях термодинамического равновесия; в—изгиб зон при приложении внешнего электрического напряжения поперек плоскости ГЗ

германия. Поскольку «ядро» ГЗ, где сосредоточены ПС («оборванные» связи, сегрегированные примеси и т. д.), имеет иную атомную структуру, чем соседствующие зерна, то уровни Ферми в объеме зерен ( $\epsilon_F$ ) и на ГЗ ( $\epsilon_{FB}$ ) должны различаться (рис. 1, а). При образовании системы зерно — «ядро» ГЗ — зерно основные НЗ будут перетекать из объема зерен на ПС до тех пор, пока уровни Ферми зерен и ГЗ не сравняются (отсчет энергии ведется от края С-зоны). Обеднение зерен носителями (и образование ОПЗ) приведет к изгибу зон и возникновению симметричного барьера (рис. 1, б). Высота этого барьера определяется захваченным на ПС зарядом  $Q_i$ , который зависит от разности уровней Ферми в соседствующих зернах и «ядре» ГЗ, энергетического распределения плотности пограничных состояний (ППС)  $N_i(E)$  и функции распределения электронов по энергиям  $f_i(E)$ :

$$Q_i [ \Phi_b (V) ] = e \int_{\epsilon_{FB}}^{\epsilon_F} N_i (E) f_i (E) dE. \quad (1)$$

При приложении поперек плоскости ГЗ напряжения смещения  $V$  квази-уровень Ферми  $\epsilon_{FB}$  будет изменяться на некоторую величину  $\Delta\epsilon_{FB}$ , вызывая, в свою очередь, изменение заряда  $Q_i$  (через изменение  $f(E)$  и пределов

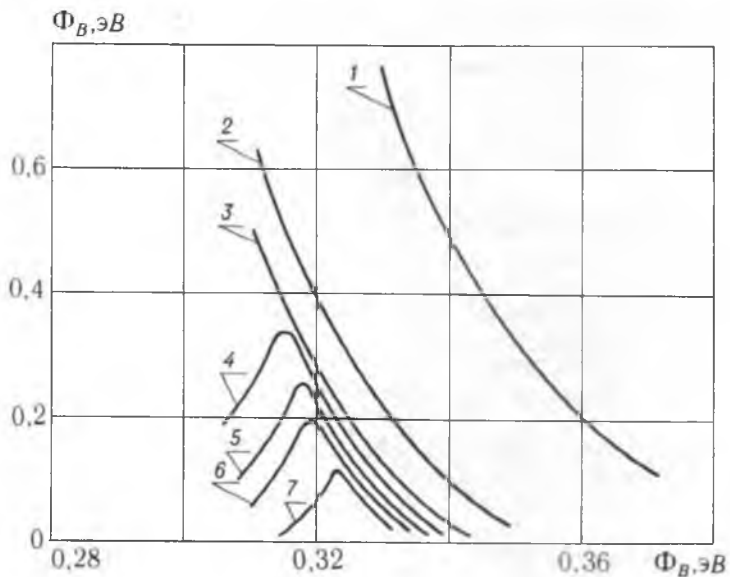


Рис. 2. Изменение величины барьера  $\Phi_B$ , вычисленное самосогласованно, для разных значений приложенного напряжения  $V$  (при накоплении заряда дырок с ростом  $V$ ):

1— $V=0$  В; 2—0,3 В; 3—0,6 В; 4—0,7 В; 5—0,8 В; 6—0,9 В; 7—1,0 В

интегрирования в (1)). Величина отклонения квазиуровня Ферми от равновесного значения была определена в работах [8, 10]:

$$\Delta E_{FB} = kT \ln \left[ \frac{2}{1 + \exp(-eV/kT)} \right]. \quad (2)$$

В результате, высота пограничного барьера  $\Phi_B$  будет отклоняться от его равновесного значения (рис. 1, в). Зависимость  $\Phi_B(V)$  можно определить, решая уравнение Пуассона в приближении Шоттки. Согласно [8, 9], эта зависимость определяется соотношением

$$\Phi_B = \frac{1}{4} V_c \left[ 1 - \frac{V}{V_c} \right]^2. \quad (3)$$

Видно, что при достижении некоторого критического напряжения смещения  $V = V_c$  происходит пробой пограничного барьера, так что  $\Phi_B(V)$  становится равным нулю. При этом величина критического напряжения

$$V_c = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2eN_0} \left[ \frac{Q_i}{\epsilon \epsilon_0} \right]^2 \quad (4)$$

определяется пограничным зарядом  $Q_i$ , который сам зависит от  $V$ , а следовательно, от  $\Phi_B$ . Здесь  $\epsilon \epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость полупроводников,  $e$  — заряд электрона, а  $N_0$  — концентрация основной легирующей примеси. Таким образом, уравнение (3) фактически является трансцендентным уравнением типа:

$$\Phi_B(V) = F[\Phi_B(V)], \quad (5)$$

где  $F(\Phi_B)$  в (5) есть правая часть уравнения (3). Это позволяет самосогласованно определять высоту барьера  $\Phi_B(V)$  (или заряд  $Q_i$ ), применяя соответствующую итерационную процедуру.

Анализ правой части уравнения (3)

$$F(\Phi_B) = \frac{1}{4} V_c \left[ 1 - \frac{V}{V_c} \right]^2$$

позволяет определить изменение высоты барьера  $\Phi_B$ , вычисленное самосогласованно для разных значений приложенного напряжения смещения  $V > 0$ . Результаты этих вычислений подобны кривым 1–3 на рис. 2. Точки пересечения этих кривых  $\Phi_B = F(\Phi_B(V))$  с прямой  $\Phi_B = \Phi_B$  дают стационар-

ные самосогласованные значения высот барьера при соответствующих  $V$ . Анализ кривых свидетельствует о существовании единственного решения уравнения (3) для данного  $V > 0$ .

При разогреве НЗ внешним и «встроенным» электрическими полями и при достижении ими некоторой пороговой энергии может происходить ударная ионизация атомов кремния с образованием некоторого числа неосновных носителей (дырок). Последние, диффундируя к ГЗ, будут захватываться на ПС и, тем самым, изменять  $\Delta E_{\text{FB}}$ ,  $Q_i$  и понижать барьер.

Расчет высоты барьера в новых условиях при наличии неосновных носителей (дырок) заключается в замене электронного поверхностного заряда  $Q_i$  в (1) на полный заряд электронов и дырок.

Полный ток дырок через границу пропорционален электронному току  $J_e^c$ , инжектируемому в положительно смещенное зерно:

$$J^h = gJ_i^c = g \left( J - J_i^c + \frac{1}{2} J_{\text{em}} \right), \quad (6)$$

где ток термоактивации  $J$  равен

$$J = A^* T^2 \exp \left[ - (e\Phi_B + \epsilon_F) / kT \right],$$

а ток захвата электронов на границе и ток эмиссии из пограничных состояний соответственно равны:

$$J_i^c = J \int c(E) N_t(E) [1 - f_i(E)] dE, \quad (7)$$

$$J_{\text{em}}^c = \int b(E) \exp \left[ - (E_B - E) / kT \right] N_t(E) f_i(E) dE. \quad (8)$$

Сечения захвата  $c(E)$  и эмиссии  $b(E)$  аппроксимируются константами. При нулевом напряжении смещения они связаны между собой следующим соотношением:  $b = 2Ac$ ,  $A = A^* T^2$ , где  $A^*$  – постоянная Ричардсона, а  $(E_B - E)$  – энергия активации термоэлектронной эмиссии.

Считаем, что весь входящий поток дырок  $J^h$  полностью захватывается и уравнивается только процессами электронно-дырочной рекомбинации. Безусловно, это окажет влияние на электронный заряд  $Q^c$ , который находится после определения нового положения квазиуровня Ферми.

Уравнение баланса для электронного тока равно:

$$J_i^c = J_i^c - J_{\text{em}}^c - J_{\text{rec}}^c = 0,$$

а для дырочного тока (без эмиссии):

$$J_i^h = J^h - J_{\text{rec}}^h = 0. \quad (9)$$

Используя эти два уравнения и равенства токов

$$J_{\text{rec}}^c = J_{\text{rec}}^h = J_{\text{rec}},$$

получаем условие баланса

$$J_i^c - J_{\text{em}}^c - J^h - J^h = 0.$$

Отсюда получаем новое выражение для квазиуровня Ферми на поверхности, который понижается за счет действия процессов рекомбинации:

$$\Delta E_{\text{FB}} = kT \ln \left[ \frac{2 + g}{1 + \exp(-eV/kT) - g_c} \right], \quad (10)$$

где

$$g_c = g(1 - c^*) / c^*, \quad c^* = c \int N_t(E) [1 - f_i(E)] dE.$$

Здесь  $g$  – эффективность дырочной генерации,  $c^*$  – вероятность захвата. Используя новое выражение для  $E_{\text{FB}}$  в (2), можно вычислить электронный заряд  $Q^c$  на границе.

Далее необходимо вычислить заряд дырок  $Q^h$  на ГЗ. Последний вычисляется с помощью соотношения (9) и следующего выражения для тока рекомбинации:

$$J_{\text{rec}} = \frac{r}{e} Q^c Q^h \cong 1 / \tau_r Q^h,$$

что приводит к конечному выражению

$$Q^h = gJ\tau_r \frac{2-c^*}{2+g}. \quad (11)$$

С учетом полученных изменений полный заряд на границе принимает вид  $Q_i = Q^e - Q^h$  и может быть вычислен самосогласованно для барьера  $\Phi_B$ .

Результат такого расчета представлен на рис. 2. При малых напряжениях смещения, когда накапливания дырок на ПС не происходит, кривые 1–3 на рис. 2 практически совпадают с результатами расчета при  $g=0$ . С ростом  $V$  дырки будут накапливаться, изгибая зависимость  $F(\Phi_B)$  вниз (кривые 4–6 на рис. 2). Это означает наличие двух устойчивых значений для высоты барьера (см. таблицу).

Значения барьера  $\Phi_B$ , при которых граница раздела находится в устойчивом состоянии

V, В	$\Phi_{B1}$ , эВ	$\Phi_{B2}$ , эВ
0,0	0,352	—
0,3	0,332	—
0,6	0,328	—
0,7	0,327	0,291
0,8	0,325	0,309
0,9	0,322	0,313

Заметим, что обнаруженный эффект бистабильности на ГЗ может, по-видимому, регулироваться не только коэффициентом генерации дырок  $g$ , но также плотностью и характером энергетического распределения ловушек на границе.

В работе использовались следующие значения подгоночных параметров в соотношениях (1)–(11) для кремния:

1. Пограничные состояния моделировались моноуровнем  $N_i = N_i \delta(E - E_i)$  с плотностью  $N_i = 10^{13} \text{ см}^{-2}$ , расположенным на расстоянии 0,578 эВ выше края валентной зоны.

2. Плотность мелких доноров бралась равной  $N_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , что характерно при сегрегации примесей на ГЗ.

3. Сечение захвата носителей заряда на пограничные состояния считалось равным  $s = 10^{-13} \text{ см}^{-2}$ .

4. Диэлектрическая постоянная  $\epsilon_{\epsilon_0} = 12$ .

5. Уровень Ферми расположен на  $\epsilon_F = 0,18$  эВ ниже края зоны проводимости.

6. Постоянная Ричардсона выбиралась равной  $A = 50 \text{ Асм}^{-2}\text{К}^{-2}$ .

7. Эффективность генерации дырок считалась равной  $g = 10^{-3}$ .

8. Время рекомбинации носителей было  $\tau_r = 10^{-3} \text{ с}$ .

Все вычисления велись для  $T = 300 \text{ К}$ .

### Список литературы

1. Поликристаллические полупроводники. Физические свойства и применение / Под ред. Г. Харбеке. М., 1989.
2. М а т а р е Г. Электроника дефектов в полупроводниках. М., 1974.
3. Fedotov A. K., Evtody B. N., Katz E. A., Ilyashuk Ju. M. // Phys. Stat. Solidi (a). 1990. V. 119. P. 523.
4. M a t a r e H. F. // Journ. Appl. Phys. 1986. V. 59. P. 97.
5. B l a t t e r G., B a c r i s w y l D. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. P. 6446.
6. P i k e G. E. // Grain Boundaries in Semiconductors / Ed. H. J. Leamy et al. 1982. P. 369.
7. B l a t t e r G., G r e u t e r F. // Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 8555.
8. P i k e G. E. // Phys. Rev. B. 1984. V. 30. P. 3274.
9. T a y l o r W. E., O d e l l N. H. // Phys. Rev. 1952. V. 38.
10. M u e l l e r R. K. // Journ. Appl. Phys. 1961. V. 32. P. 635.

Поступила в редакцию 08.09.92.

## СПЕКТРОСКОПИЯ ТВЕРДОФАЗНЫХ РЕАКЦИЙ С УЧАСТИЕМ СОЛЕЙ УРАНИЛА И ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Электронная и колебательная спектроскопия внесла значительный вклад в изучение строения и разнообразных свойств ураниловых соединений. Пионерские работы в этом направлении были выполнены С. И. Вавиловым и его учеником А. Н. Севченко\* [1, 2], которые инициировали широкое и более глубокое изучение спектральных характеристик ураниловой группы и возможного ее окружения.

С развитием ИК спектроскопии (50-е годы) в практику был введен метод взвесей в КВг, который в дальнейшем получил очень широкое распространение во многих лабораториях мира из-за своей простоты и доступности. Однако на первых порах применения этого метода некоторыми исследователями [3] было замечено аномальное поведение ИК спектров изучаемых объектов в КВг – таблетках.

Во многих работах [4–7] авторы пытались выяснить влияние различных внешних факторов на структуру спектров. Так, Гейтхауз и Коминз [5] при изучении ИК спектров нитратных соединений уранила в таблетках КВг основной причиной изменчивости спектров считали анионный обмен между исследуемым веществом и галогенидом щелочного металла. В дальнейшем, чтобы исключить различные процессы обмена, авторы [6, 7] прибегали к защите окошек NaCl и КВг полимерной пленкой или предпочитали работать с мелкими порошками в качестве взвесей в парафиновом масле.

Из указанных выше оригинальных работ следует, что специального исследования анионного обмена между нитратными (сульфатными, ацетатными, оксалатными, карбонатными) соединениями уранила и щелочно-галлоидными солями не проводилось. Это и послужило основной причиной для более полного изучения характера анионного обмена в условиях прямого контакта соли уранила с галоидами металлов щелочной группы. Перейдем к более полному изучению характера анионного обмена комплексов уранила со щелочно-галлоидными солями.

При исследовании спектров поликристаллических веществ, содержащих несколько компонент, приготавливались пресованные таблетки. Каждая компонента дробилась отдельно в вибромельнице до размеров частиц 50 мкм. Затем для уменьшения количества воды вещества просушивались в термостате. Спектры ИК поглощения образцов в средней инфракрасной области ( $4000 - 400 \text{ см}^{-1}$ ) регистрировались на спектрометре Specord IR-75, а спектры люминесценции при 77 К – на спектрометре, созданном на базе ДФС-12.

Остановимся на одной из систем. Рассмотрим смесь порошков  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{NH}_4\text{F}$  (отношение 1:6), подвергнутую механохимической активации. На дебаеграмме этого образца присутствует ряд пиков, которые можно отнести к фазе  $\text{NH}_4\text{NO}_3$ , но в то же время отсутствуют пики, соответствующие  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , и очень слабо проявляются пики фазы  $\text{NH}_4\text{F}$ . Последнее дает возможность высказать предположения о природе продуктов трибопроцессов. При этом желательно провести дополнительные исследования.

Для установления природы продуктов трибохимических превращений между рядом солей уранила и фторидами щелочных металлов или аммония проанализируем спектры люминесценции ( $T = 77\text{K}$ ) системы  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot x\text{H}_2\text{O} + 5\text{NH}_4\text{F}$  (рис. 1). Из сравнения спектров продуктов реакции (см. рис. 1, б) со спектром исходной соли уранила  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  (см. рис. 1, а) видно, что нижний спектр совершенно не похож на спектр в верхней части рисунка как по положению частоты чисто электронного перехода ( $\nu_0 = 20013$  и  $\nu_0 = 20605 \text{ см}^{-1}$ ), так и по колебательной структуре (частоты колебаний иона уранила  $\nu_1 = 871$ ,  $\nu_2 = 824$  и  $\nu_3 = 890 \text{ см}^{-1}$ ). Это свидетельствует о том, что за время механохимической активации произошли про-

\* 22 февраля 1993 г. исполнилось 90 лет со дня рождения бывшего ректора БГУ А. Н. Севченко, светлой памяти которого авторы и посвящают настоящую работу.

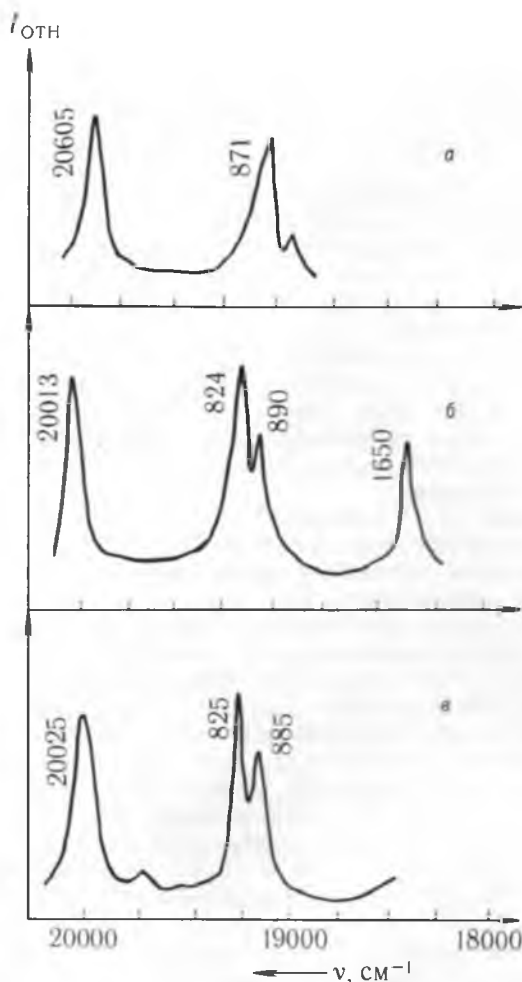


Рис. 1. Спектры люминесценции:  
 $\text{UO}_2(\text{NO}_3) \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  (а);  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + 5\text{NH}_4\text{F}$  (б)  
 и  $(\text{NH}_4)_3\text{UO}_2\text{F}_5$  (в) при 77 К

цессы анионного обмена – ионы  $\text{F}^-$  вытеснили нитратные группы  $\text{NO}_3^-$  – : получился продукт  $(\text{NH}_4)_3\text{UO}_2\text{F}_5$ , спектр которого представлен на рис. 1, в. Сравнение спектра (см. рис. 1, б) со спектром (см. рис. 1, в) показывает практически полную их идентичность. Спектр (см. рис. 1, в) принадлежит модельной соли уранила  $(\text{NH}_4)_3\text{UO}_2\text{F}_5$ . Аналогичное рассмотрение можно провести и для других солей (напр. ураниловая соль + хлорид, бромид и иодид щелочного металла).

Подобные реакции обмена можно проследить при анализе ИК спектров исследованных систем, подвергнутых трибохимической активации. В качестве примера на рис. 2 приведены ИК спектры системы  $\text{KUO}_2(\text{NO}_3)_3 + \text{KJ}$  при различных временах механохимической активации.

Таким образом, можно сделать вывод, что в системе  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  с  $\text{NH}_4\text{F}$  при мольном соотношении реагентов 1:≥5 конечным продуктом реакции является комплексный анион  $[\text{UO}_2\text{F}_5]^{3-}$ .

Аналогичные процессы происходят и в системах ураниловая соль + хлорид, бромид или иодид щелочного металла. В спектре 2 установлено наряду с полосами поглощения координированных нитратных групп (800, 1015, 1260, 1545  $\text{см}^{-1}$ ) наличие колебаний  $\nu_3$  (1380  $\text{см}^{-1}$ ) и  $\nu_6$  (830  $\text{см}^{-1}$ ), принадлежащих иону  $\text{NO}_3^-$  симметрии  $D_{3h}$ . По изменению интенсивности последних полос можно судить о количестве замещенных в ураниловой соли  $\text{NO}_3^-$ -групп. Проявление в ИК спектрах указанных частот (830  $\text{см}^{-1}$ ) свидетельствует о появлении в образцах нитратов щелочных металлов.



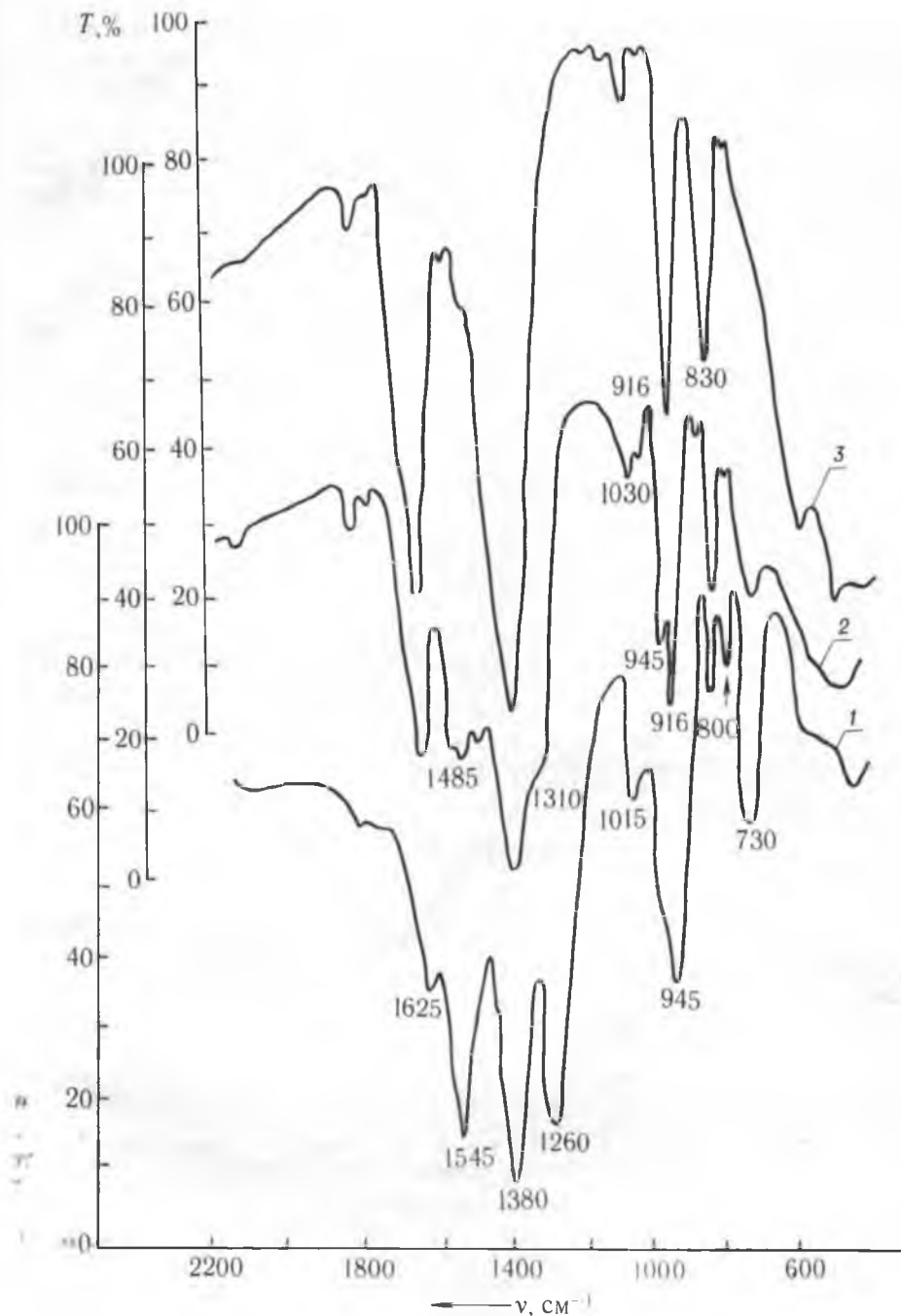


Рис. 2. Инфракрасный спектр смеси  $\text{K}_2\text{O}_2(\text{NO}_3)_3 + \text{KJ}$ , подвергнутой механической активации в течение времени

Заметим сразу, что нитраты щелочных металлов в системе  $\text{K}_2\text{O}_2(\text{NO}_3)_3 + \text{KJ}$  начинают образовываться уже при простом контакте реагентов (без механохимической активации). В спектре образца, подвергнутого трибохимическому воздействию в течение времени  $t = 0$  мин (см. рис. 2), присутствуют полосы поглощения 830 и 1380  $\text{см}^{-1}$ . Рост времени трибохимической активации  $t$  смеси  $\text{K}_2\text{O}_2(\text{NO}_3)_3 + \text{KJ}$  приводит к повышению содержания нитратов щелочных металлов среди продуктов реакции и, как следствие этого, к увеличению интенсивности упомянутых выше полос инфракрасного поглощения. Одной из характерных особенностей ИК спектров исследуемой системы является появление в области антисимметричных колебаний иона

уранила низкочастотной полосы ( $\nu_3 = 916 \text{ см}^{-1}$ ), характерной для галогенидных комплексов  $\text{UO}_2^{2+}$ , которая при больших временах активации становится единственной, т. е. можно считать, что при больших временах активации происходит полный анионный обмен в координационной сфере уранила [8].

Следует ожидать, что при синтезе галоидных соединений уранила трибохимическая реакция в системе уранилнитрат-щелочно-галоидная соль должна проходить через этап образования разнолигандной координационной сферы  $\text{UO}_2^{3+}$ , которая содержит как группы  $\text{NO}_3^-$ , так и соответствующие галогены. Учитывая транс-эффект в реакциях замещения на галогены, геометрический анализ устойчивости комплексных соединений уранила, а также работы [8–10], можно предположить, что наиболее устойчивым промежуточным продуктом с разнолигандной координационной сферой уранила будет  $[\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2\text{X}_2]^{2-}$  либо  $[\text{UO}_2\text{X}_3\text{NO}_3]^{2-}$  [10] (X – анион галоида), где группа  $\text{NO}_3^-$  способна поменять тип своей координации к комплексообразующему иону на унидентатный при к. ч.  $\text{UO}_2^{3+} = 4$ . Нитратные группы в указанных комплексах со смешанной координационной сферой  $\text{UO}_2^{3+}$  координированы к урану унидентатно, о чем свидетельствует их поглощение на частотах 1485, 1310, 1030 и 815  $\text{см}^{-1}$ .

Аналогичное рассмотрение спектров можно провести и при использовании других реагентов в трибохимической реакции, имеющей место в смесях нитратов уранила со щелочно-галоидными солями  $\text{MX}$  (X = Cl, Br, J; M = Na, K, Rb, Cs).

Таким образом, экспериментальные результаты свидетельствуют о том, что при непосредственном контактировании соединений уранила со щелочно-галоидными солями происходят сложные процессы замещения ионов, ведущие к изменению координационной сферы иона уранила. Рассмотренные реакции можно с успехом использовать при экстракционном извлечении урана из малоэффективного рудного сырья.

#### Список литературы

1. Вавилов С. И. // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. С. 344.
2. Севченко А. Н. // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. С. 349.
3. Jones L. H., Chamberlain M. M. // Journ. Chem. Phys. 1956. V. 25. № 2. P. 365.
4. Meloche V. W., Kalbus G. E. // Journ. Inorg. Nucl. Chem. 1958. V. 6. № 1. P. 104.
5. Gathehouse B. M., Comyns A. S. // Journ. Chem. Soc. 1958. № 11. P. 3965.
6. Coldow G. L., Van Cleave A. B., Eager R. L. // Can. Journ. Chem. 1960. V. 38. P. 772.
7. Allpress J. G., Hambly A. N. // Austr. Journ. Chem. 1959. V. 12. № 3. P. 569.
8. Комяк А. И., Серафимович А. И., Шашков С. Н. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 4. С. 102.
9. Комплексные соединения урана /Под ред. И. И. Черняева. М., Наука. 1975.
10. Суглобов Д. Н. Исследования в области химии неводных растворов солей уранила. Л., 1970.

Поступила в редакцию 09.11.92.



УДК 519.4

Д. А. МАЛИНИН

## О ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В настоящей работе рассматриваются некоторые условия диагонализруемости конечной нильпотентной группы матриц, вытекающее из них описание  $p$ -групп матриц с коэффициентами в кольцах целых величин круговых полей, а также некоторые результаты о представлениях  $p$ -групп над дедекиндовыми кольцами.

**Предложение 1.** Пусть  $A$  – целостное коммутативное кольцо, а группа  $G$  с центром  $Z$ , принадлежащая полной линейной группе  $GL_n(A)$ , конечна и нильпотентна, причем каждая матрица  $g \in G$  сопряжена в  $GL_n(A)$  с диагональной матрицей. Пусть  $g_0$  – любой нецентральный элемент из  $G$ , образ которого в факторматрице  $G/Z$  принадлежит центру  $G/Z$ ,  $M$  – подходящая матрица, преобразующая  $g_0$  к диагональному виду. Тогда любое из следующих условий:

1) каждая матрица из неразложимой компоненты  $[M^{-1}GM]$ , не содержащей проекцию  $M^{-1}g_0M$  в центре, имеет хотя бы один ненулевой диагональный элемент;

2)  $[M^{-1}GM]$  не содержит  $-E$  ( $E$  – единичная матрица) и для всякой матрицы  $g = [g_{ij}]$  из  $[M^{-1}GM]$  найдется пара индексов  $i, j$ , для которой  $g_{ij} \neq 0$  и  $g_{ji} \neq 0$ ,  
влечет диагонализруемость в  $GL_n(A)$  всей группы  $G$ .

**Доказательство предложения 1.**

**Лемма 1.** Если в центре конечной группы  $G \subset GL_n(A)$  содержится не скалярная диагональная матрица, то  $G$  разложима, иными словами,  $G$  есть прямая сумма нетривиальных представлений  $G_1$  и  $G_2$  над  $A$  степеней  $n_1$  и  $n_2$ ,  $n_1 + n_2 = n$ .

Доказательство леммы очевидно.

Обозначим  $\Lambda$  подгруппу всех скалярных матриц из  $G$ .

Если центр  $G$  не совпадает с  $\Lambda$ , то используем лемму 1 и индукцию по  $n$ . Пусть центр  $G$  совпадает с  $\Lambda$  и его экспонента равна  $t$ . Рассмотрим группу  $G_0 = M^{-1}GM$  и гомоморфизм  $\psi: G_0 \rightarrow \psi(G_0)$ ,  $\psi(g) = g^x \dots \times g$  ( $t$  сомножителей). Образ  $\psi(G_0)$  изоморфен  $G/\Lambda$ . Обозначим  $h = M^{-1}g_0M = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Тогда  $\psi(h)$  – не скалярная диагональная матрица из центра  $\psi(G_0)$ ,  $h$  – также не скалярная матрица и для  $g \in G_0$   $hg = gh\xi$ , где  $\xi = \xi(g)$  – корень из 1. Рассматривая поэлементно полученное соотношение, находим:  $\xi_j = \xi_i \xi$ ,  $\xi_i = \xi_j \xi$  для ненулевых  $g_{ij}, g_{ji}$ , следовательно,  $\xi = 1$  и  $h$  принадлежит центру  $G_0$ . Это противоречие завершает доказательство предложения 1.

**Лемма 2.** Пусть  $J$  – идеал дедекиндова кольца  $S$  характеристики  $\chi$ ,  $\{0\} \neq J \neq S$ ,  $g$  –  $n \times n$  – матрица конечного порядка, сравнимая с  $E \pmod{J}$ .

(а) Если  $\chi = p > 0$ , то  $g^{p^j} = E$  при некотором целом  $j$ . Если  $\chi = 0$ , то  $J$  содержит простое число  $p$  и  $g^{p^i} = E$ ,  $i$  – целое. В частности, конечная группа матриц, сравнимых с  $E \pmod{J}$ , есть  $p$ -группа.

(b) Пусть  $\chi = 0$ ,  $J = \Phi$  – простой идеал с индексом ветвления  $e$  относительно  $p$ ,  $g = E \pmod{\Phi^t}$  и  $\lambda p^{i-1} (p-1) \leq \frac{e}{r} < p^i (p-1)$ ,  $i \geq 0$ ,  $\lambda = \min\{1, i\}$ .

Тогда  $g^{p^i} = E$ . В частности, конечная группа матриц, сравнимых с  $E \pmod{\Phi^t}$ , тривиальна, если  $e < t(p-1)$ .

Идея изучения свойств матриц конечного порядка, сравнимых с единичной, восходит к Минковскому [1–3].

*Предложение 2.* Пусть  $K = Q(\xi_p)$  – поле, полученное присоединением к полю рациональных чисел примитивного корня  $\xi_p$  простой степени  $p$  из 1;  $\Phi$  – простой идеал кольца целых величин  $O_K$  поля  $K$ ;  $G$  – конечная подгруппа  $GL_n(O_K)$ , состоящая из матриц, сравнимых с  $E \pmod{\Phi}$ . Тогда  $G$  сопряжена в  $GL_n(O_K)$  с абелевой группой экспоненты  $p$ , состоящей из диагональных матриц.

Доказательство получается при помощи леммы 2, проверки выполнения условий предложения 1 для локализации в  $\Phi$  кольца  $O_K$  и утверждения (81.20) из [4].

*Замечание 1.* Пусть  $G$  – абелева  $p$ -подгруппа  $GL_n(O)$  экспоненты  $t$ , где  $O$  – дедекиндово кольцо главных идеалов, содержащее примитивный корень  $\xi_t$  степени  $t$  из 1. Сопряжением в  $GL_n(O)$  матрицы из  $G$  одновременно приводятся к треугольному виду. Дальнейшее сопряжение матриц из  $G$  при помощи  $D = \text{diag}(1, p, \dots, p^{n-1})$  делает их сравнимыми с  $E \pmod{(\xi_t - 1)O}$ , и это позволяет сопрячь полученную группу матриц в  $GL_n(O)$  с группой диагональных матриц.

*Замечание 2.* Б. Бюргиссер показал [5, лемма 3.1], что ядро редукции  $GL_n(O)$  по модулю идеала  $J$  дедекиндова кольца  $O$  в числовом поле  $L$  степени  $d = [L:Q]$ , норма которого  $N_{L/Q}(J) > 2^d$ , не имеет кручения. Из леммы 2(b) следует, что это утверждение справедливо при

$$N_{L/Q}(J) > p^{d(p-1)^{-1}},$$

причем полученная оценка не улучшаема, как показывает пример  $L = Q(\xi_n)$  и группы диагональных матриц.

Пусть  $G = G_1 \supset G_{i-1} \supset \dots \supset G_0 = \{E\}$  – нижний центральный ряд  $p$ -группы матриц  $G$ ,  $G_i = [G, G_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$  и матрицы, составляющие группу  $G$ , сравнимы с  $E \pmod{\Phi^w}$ , где  $\Phi$  – простой идеал кольца  $O_p$  целых величин конечного расширения  $K/Q_p$  поля рациональных  $p$ -адиических чисел. Из тождества

$$\begin{aligned} (E+A)(E+B)(E+A)^{-1}(E+B)^{-1} &= \\ &= E + (AB-BA)(E+A)^{-1}(E+B)^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

следует, что все матрицы из  $G_{i-1}$  сравнимы с  $E \pmod{\Phi^w}$ . Пусть  $\pi$  – униформизирующий элемент кольца  $O_p$ ,  $e$  – индекс ветвления  $K$  над  $Q_p$ , так что  $\Phi = (\pi)$ ,  $(p) = \Phi^e$  как идеалы  $O_p$ . Если  $G$  – конечная группа матриц, сравнимых с  $E \pmod{\Phi^w}$ , то из леммы 2 следует, что при  $ew^{-1} < p-1$  группа  $G_1$  тривиальна, при  $ew^{-1} < 2(p-1)$  группа  $G_{i-1}$  тривиальна, при  $ew^{-1} < i(p-1)$  тривиальна группа  $G_{i-1+j}$ ,  $i = 3, 4, 5, \dots$ . Оказывается, эти неравенства нельзя усилить. Для  $l=2$  это доказано в [6]. Рассмотрим нильпотентную класса  $l$  группу  $G$ , порожденную элементами  $a, b_1, \dots, b_l$  и соотношениями

$$\begin{aligned} b_i^p &= 1, b_i b_j = b_j b_i, i, j = 1, 2, \dots, l; ab_1 = b_1 a, b_{i-1} = b_i a b_i^{-1} a^{-1}, \\ & i = 2, 3, \dots, l; a^n = 1, \end{aligned}$$

где  $n = p \geq l > p^{-1}$ . Характер  $\Delta(b_i) = \xi_p$ ,  $\Delta(b_i) = 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, l$  абелевой подгруппы  $H$ , порожденной  $b_1, b_2, \dots, b_l$ , и разложение  $G = 1H + a^{n-1}H + \dots + aH$  определяют индуцированное представление  $R = \text{Ind}_H^G \Delta$  группы  $G$ . Обозначим  $e_{ij}$   $n \times n$ -матрицу с единственным ненулевым элементом 1 в позиции  $(i, j)$ ;

$$C = \sum_{n \geq b \geq j \geq 1} (-1)^{i-j} C_{n-j}^{i-j} e_{ij}; D_* = \text{diag}(1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^{n-1}).$$

Пусть  $K_0$  – расширение  $Q_p$ , получающееся присоединением к  $Q_p$  всех корней из 1 степеней  $p^m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $O$  – кольцо целых элементов поля  $K_0$  и пусть  $e > e_0 = e_0(1)$ ,  $K \subset K_0$ .

Конструктивные комбинаторные рассуждения, использующие метод работы [6], позволяют доказать следующее утверждение:

**Теорема.** Представление  $R_\alpha = D_\alpha^{-1}C^{-1}RCD_\alpha$  группы  $G$  есть точное абсолютно неприводимое представление  $G \rightarrow GL_n(O_\Phi)$  матрицами, сравнимыми с  $E \pmod{\Phi}$ , и при различных  $\Phi$  эти представления попарно целочисленно (в кольце  $O$ ) неэквивалентны.

**Замечание 3.** Пусть  $G \subset GL_n(O)$  – конечная подгруппа, содержащая матрицы, сравнимые с  $E$  по модулю какого-либо ненулевого идеала  $I$  дедекиндова кольца  $O \neq I$ , и  $\Gamma$  – группа, действующая на  $G$ . Тогда из тождества (1) следует, что  $G$  содержит нетривиальную абелеву подгруппу  $H$ , допускающую  $\Gamma$  как группу автоморфизмов. В качестве  $H$  можно выбрать подгруппу  $G$ , порожденную матрицей  $g \in G$ , сравнимой с  $E$  по модулю минимального идеала  $J(g) \neq O$  кольца  $O$  из множества  $\{J(g) \mid g \in E \pmod{J(g)}, E \neq g \in G\}$ , и всеми сопряженными с ней относительно действия  $\Gamma$ ; если выбрать  $g$  порядка  $p$ , то  $H$  – группа экспоненты  $p$ , где  $p$  – простое число, и мы получаем представление  $\Gamma \rightarrow GL_m(F_p)$  над полем  $F_p$  из  $p$  элементов, естественным образом рассматривая  $H$  как  $F_p \Gamma$  – модуль.

### Список литературы

1. Minkowski H. // Journ. reine angew. Math. 1887. Bd. 100. H. 4. S. 449.
2. Ibid. Bd. 101. H. 3. S. 196.
3. Minkowski H. // Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1910. S. 186.
4. Кэртис Ч., Райнер И. // Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969. С. 534.
5. Burgisser B. // Math. Ann. 1981. Bd. 256. H. 1. S. 121.
6. Малинин Д. А. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1060.

Поступила в редакцию 13.06.91.

УДК 514.74

О. Е. АРСЕНЬЕВА

## СПИНОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ КВАТЕРНИОНОВ

В настоящей работе показано, что спинорное пространство естественно соотносится с 4-мерным (псевдо)евклидовым пространством  $V$  на базе алгебры кватернионов, которая, как известно, естественно порождается пространством автодуальных форм на  $V$ .

1. Алгебра  $\alpha$  – кватернионов. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $F$ ,  $\text{char } F \neq 2$ , с единицей  $1$  и инволюцией  $a \rightarrow \bar{a} (a \in A)$ , причем  $a + \bar{a} \in F$ ,  $a\bar{a} \in F$ . Напомним, что процедура удвоения Кэли – Диксона позволяет по каждому ненулевому элементу  $\alpha \in F$  построить новую алгебру  $(A, \alpha)$ , представляющую собой  $F$ -модуль  $F^2 = F \oplus F$ , с операцией умножения  $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + \alpha b_2\bar{a}_2, \bar{a}_1b_2 + b_1a_2)$ . При этом  $A$  вкладывается в  $(A, \alpha)$  как подалгебра пар вида  $\{(a, 0) \mid a \in A\}$ . Если обозначить  $i = (0, 1) \in (A, \alpha)$ , то  $i^2 = \alpha$  и с учетом сделанного отождествления  $(A, \alpha) = A \oplus iA$ . Заметим, что  $(A, \alpha)$  – также алгебра над  $F$  с инволюцией: если  $x = a_1 \oplus ia_2 \in (A, \alpha)$ , то  $\bar{x} = a_1 - ia_2$ . Эта инволюция обладает аналогичными свойствами:  $x + \bar{x} \in F$ ,  $x\bar{x} \in F$ .

Если  $A = F = \mathbb{R}$ , то  $(\mathbb{R}, \alpha) = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$  с точностью до умножения  $i$  на постоянный множитель  $\sqrt{|\alpha|}$  есть либо поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел ( $\alpha = -1$ ), либо кольцо  $\mathbb{D}$  двойных чисел ( $\alpha = 1$ ). Обозначим  $(\mathbb{R}, \alpha)$  символом  $R_\alpha$ .

Применяя к  $R_\alpha$  процедуру Кэли – Диксона, получим алгебру  $((\mathbb{R}, \alpha), \beta) = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$  (где  $j = (0, 1) \in (R_\alpha, \beta)$ ,  $k = ij$ ), которая называется алгеброй обобщенных кватернионов. Эта алгебра с точностью до умножения  $i$  и  $j$  на константы  $\sqrt{|\alpha|}$  и  $\sqrt{|\beta|}$  соответственно (которое назовем калибровкой) есть либо тело  $\mathbb{H}$  кватернионов ( $\alpha = \beta = -1$ ), либо кольцо  $\mathbb{H}'$  антикватернионов ( $\alpha = \beta = 1$ ) (случай  $\alpha\beta < 0$  соответствует алгебре антикватернионов). Поскольку калибровка не вносит существенных изменений в свойства алгебры обобщенных кватернионов, будем считать эту алгебру откалиброванной, обозначать  $H_\alpha = ((\mathbb{R}, \alpha), \alpha)$ ;  $\alpha = \pm 1$  и называть алгеброй  $\alpha$ -кватернионов.

Из сказанного следует, что всякий  $\alpha$ -кватернион  $q \in H_\alpha$  допускает представление в виде  $q = z_1 + jz_2$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_\alpha$ ,  $j^2 = \alpha$ , что позволяет естественным образом построить представление алгебры  $H_\alpha$  в алгебру  $\text{End}(S)$  эндомор-

физмов алгебры  $H_n$ , рассматриваемой как  $R_n$ -модуль  $S = R_n \oplus R_n$ , который мы будем называть  $\alpha$ -спинвекторным пространством. Именно, пусть

$$q = z_1 + jz_2 \in H_n, \quad X = (X_1, X_2) \in S.$$

Положим  $[q]X = q(X_1 + jX_2) = (z_1X_1 + \alpha\bar{z}_2X_2) + j(z_2X_1 + \bar{z}_1X_2)$ . Очевидно, матрица эндоморфизма  $[q]$  в базисе  $\{1, j\}$  имеет вид:

$$(q) = \begin{bmatrix} z_1 & \alpha\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Заметим, что  $\alpha$ -спинвекторное пространство  $S$  внутренним образом наделено инволюцией  $\tau: X \rightarrow \bar{X}$ , порожденной оператором сопряжения  $\alpha$ -кватернионов и которую мы назовем операцией сопряжения  $\alpha$ -спинвекторов. Кроме того,  $S$  внутренним образом наделено эрмитовой метрикой «. , .». Именно, пусть  $X = (z_1, z_2) \in S$ . Обозначим  $z_1 = \operatorname{Re}X$ ,  $z_2 = \operatorname{Im}X$ . Поскольку  $\bar{X} = (\bar{z}_1, -z_2)$ ,  $\operatorname{Re}\bar{X} = \operatorname{Re}X$ ,  $\operatorname{Im}\bar{X} = -\operatorname{Im}X$ . Пусть далее  $Y = (u_1, u_2)$  — другой  $\alpha$ -спинвектор. Положим

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re}(\bar{X}Y) = \bar{z}_1u_1 - \alpha z_2u_2.$$

Очевидно, это — невырожденная эрмитова форма, причем

$$\langle qX, qY \rangle = \operatorname{Re}(\overline{qX} qY) = \operatorname{Re}(\bar{X}q qY) = |q|^2 \langle X, Y \rangle.$$

Таким образом, получено

*Предложение 1.* Естественное представление неизотропных вещественно нормированных  $\alpha$ -кватернионов в спинвекторном пространстве  $S$  реализуется конформными эндоморфизмами модуля  $S$ .

Заметим, что

$$|q|^2 = q\bar{q} = (z_1 + jz_2)(\bar{z}_1 - jz_2) = z_1\bar{z}_1 - \alpha z_2\bar{z}_2 = \det(q) = \det[q].$$

В частности, единичные  $\alpha$ -кватернионы, которые в силу композиционности алгебры  $H_n$  образуют мультипликативную подгруппу кольца  $\operatorname{End}(S)$ , при этом представлении реализуются как унитарные унимодулярные эндоморфизмы модуля  $S$ . Таким образом, получаем

*Предложение 2.* Мультипликативная подгруппа единичных  $\alpha$ -кватернионов в естественном представлении отождествляется с группой Ли  $SU(2, R_n) = SP_n(1)$ .

*Замечание.* При  $\alpha = 1$  группа Ли  $SU(2, R_1)$  естественно изоморфна группе Ли  $SL(2, R)$ . Этот изоморфизм, позволяющий отождествить данные группы, сопоставляет матрице

$$\begin{bmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 - iy_2 \\ x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{bmatrix} \in SU(2, R_n)$$

матрицу

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 & x_1 - y_1 \end{bmatrix} \in SL(2, R).$$

В частности, алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2, R_n)$  полупросты.

Группа Ли  $SU(2, R_n)$  — это трехмерная группа Ли, которая действует на своей алгебре Ли  $\mathfrak{su}(2, R_n)$  посредством присоединенного представления

$$\operatorname{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in SU(2, R_n), X \in \mathfrak{su}(2, R_n)),$$

ортогонального относительно формы Киллинга этой алгебры Ли. В силу этого, а также в силу связности группы Ли  $SU(2, R_n)$  образ отображения  $\operatorname{Ad}$  лежит в группе Ли  $SO(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$ . Тем самым внутренним образом определен гомоморфизм  $w = \operatorname{Ad}: SU(2, R_n) \rightarrow SO(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$ . В силу полупростоты группы Ли  $SU(2, R_n)$  отображение  $w$ , являющееся присоединенным представлением ее алгебры Ли, невырождено, и, поскольку  $\dim \mathfrak{su}(2, R_n) = \dim \mathfrak{so}(2 - \alpha, 1 + \alpha; R) = 3$ , оно является изоморфизмом алгебр Ли, а следовательно, отображение  $w$  — (двулистное) накрывающее отображение. (Двузначное) отображение  $w^{-1}: SO(3, R) \rightarrow SU(2, C)$  в

случае  $\alpha = -1$  есть классическое спинорное представление ортогональной группы. В случае произвольной алгебры  $\mathbb{H}_\alpha$  мы сохраним эту терминологию.

Заметим, что пространство  $\text{IQ} \subset \mathbb{H}_\alpha$  чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов канонически отождествляется с пространством алгебры Ли  $\text{su}(2, \mathbb{R}_\alpha)$ , которая, в свою очередь, с помощью отображения  $w. = \text{ad}:\text{su}(2, \mathbb{R}_\alpha) \rightarrow \text{so}(2-\alpha, 1+\alpha; \mathbb{R})$  допускает каноническое отождествление с алгеброй Ли  $\text{so}(2-\alpha, 1+\alpha; \mathbb{R})$ . При этих отождествлениях чисто мнимому  $\alpha$ -кватерниону  $q = ia + jb + kc$ , согласно (1), отвечает матрица

$$(q) = \begin{bmatrix} ia & \alpha(b+ic) \\ b-ic & -ia \end{bmatrix},$$

которая является элементом алгебры Ли  $\text{su}(2, \mathbb{R}_\alpha)$ . При этом  $[(q_1), (q_2)] = (q_1)(q_2) - (q_2)(q_1)$ , и в силу сделанного отождествления пространство  $\text{IQ}$  приобретает структуру алгебры Ли, изоморфной  $\text{su}(2, \mathbb{R}_\alpha)$ , с операцией  $[q_1, q_2] = q_1q_2 - q_2q_1$ . Кроме того,  $w.(q)X = \text{ad}(q)X = (q)X - X(q)$ , откуда в базисе  $\{(i), (j), (k)\}$  имеем:

$$w.(q) = \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha c & -2\alpha b \\ -2\alpha c & 0 & 2\alpha a \\ -2b & 2a & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого легко подсчитать, что  $-\text{tr}(w.(q)w.(q)) = -4\text{tr}((q)(q)) = 8q\bar{q}$  т. е. справедливо

*Предложение 3.* Норма чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов как элементов алгебр Ли  $\text{su}(2, \mathbb{R}_\alpha)$  или  $\text{so}(2-\alpha, 1+\alpha; \mathbb{R})$  в метрике Киллинга лишь постоянным множителем ( $-2$ ) или ( $-8$ ) соответственно отличается от их норм как элементов алгебры  $\mathbb{H}_\alpha$ .

**2. Спинбазисы.** Норма  $|q|^2 = \bar{q}q$   $\alpha$ -кватернионов позволяет рассматривать алгебру  $\mathbb{H}_\alpha$  как вещественное евклидово пространство, скалярное произведение в котором восстанавливается поляризацией:

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{2} (\bar{q}_1q_2 + \bar{q}_2q_1); \quad q_1, q_2 \in \mathbb{H}_\alpha. \quad (2)$$

Заметим, что

$$\text{Im}(\bar{q}_1q_2) = \text{Im}(\overline{\bar{q}_2q_1}) = -\text{Im}(\bar{q}_2q_1),$$

в силу чего  $\langle q_1, q_2 \rangle = 1/2 \{ \text{Re}(\bar{q}_1q_2) + \text{Re}(\bar{q}_2q_1) \}$ . Вспоминая определение формы «...», получаем:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle \}; \quad X, Y \in \mathbb{S}. \quad (3)$$

Более того, очевидно, что

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle + i \langle X, i^3 Y \rangle; \quad X, Y \in \mathbb{S}. \quad (4)$$

Вернемся к рассмотрению (2). Пусть, в частности,  $q_1, q_2 \in \text{IQ}$ . Тогда  $\bar{q}_1 = -q_1, \bar{q}_2 = -q_2$ , и (2) принимает вид:

$$q_1q_2 + q_2q_1 = -2\langle q_1, q_2 \rangle; \quad q_1, q_2 \in \text{IQ}. \quad (5)$$

В качестве следствия получаем

*Предложение 4.* Система  $\{j_1, j_2, j_3\} \subset \text{IQ}$  образует ортонормированный базис пространства  $\text{IQ}$  тогда и только тогда, когда

$$j_k j_m + j_m j_k = \begin{cases} \pm 2 & (k = m) \\ 0 & (k \neq m). \end{cases}$$

Например, система  $\{i, j, k\}$  образует ортонормированный базис в  $\text{IQ}$ . Напомним, что матрицы, которые имеют эти элементы как эндоморфизмы  $\mathbb{R}_\alpha$ -модуля  $S$ , согласно (1), имеют вид:

$$\sigma_1 = (i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = (j) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = (k) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Мы видим, что в случае  $\alpha = -1$  эти матрицы лишь множителем отличаются от классических матриц Паули. Назовем их обобщенными матрицами Паули.

**Теорема 1.** Для любого ортонормированного базиса  $\{j_1, j_2, j_3\}$  пространства  $IQ$  существует ортонормированный базис  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$   $R_\alpha$ -модуля  $S$ , в котором  $(j_1) = \sigma_1$ ,  $(j_2) = \sigma_2$ ,  $(j_3) = \pm\sigma_3$ . Этот базис определен с точностью до действия группы  $U(1, R_\alpha)$ , вложенной в  $U(2, R_\alpha)$  диагональными матрицами.

**Доказательство.** Рассмотрим векторы

$$\epsilon'_1 = \frac{X + i[j_1]^3 X}{|X + i[j_1]^3 X|} \quad \text{и} \quad \epsilon'_2 = \frac{X - i[j_1]^3 X}{|X - i[j_1]^3 X|},$$

где  $X \in S$  – любой вектор, не являющийся собственным вектором оператора  $[j_1]$ ,  $i$  – мнимая единица кольца  $R_\alpha$ . Очевидно, это единичные собственные векторы оператора  $[j_1]$  с собственными значениями  $i$  и  $(-i)$  соответственно. В силу одномерности собственных подпространств этого оператора каждый из данных векторов определен с точностью до умножения на элемент  $z \in R_\alpha$ ,  $|z| = 1$ . Легко видеть, что в базисе

$$\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}; (j_2) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a \\ a & 0 \end{bmatrix}; a \in R_\alpha, |a|^2 = 1.$$

Полагая  $\epsilon_1 = x\epsilon'_1$ ,  $\epsilon_2 = y\epsilon'_2$ , где  $x, y$  – единичные элементы кольца  $R_\alpha$ , удовлетворяющие условию  $xy^{-1} = \alpha a^{-1}$ , легко убедиться, что в базисе  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ , определенном с точностью до умножения его элементов на  $z \in R_\alpha$ ,  $|z| = 1$ ,  $(j_2) = \sigma_2$ ,  $(j_3) = \pm\sigma_3$ .

**Определение 1.** Ортонормированный базис  $R_\alpha$ -модуля  $S$ , отвечающий ортонормированному базису вещественного пространства чисто мнимых  $\alpha$ -кватернионов, назовем спинбазисом.

Нетрудно доказать

**Предложение 5.** Ортонормированный базис  $\{j_1, j_2, j_3\}$  пространства  $IQ$  имеет ту же ориентацию, что и базис  $\{i, j, k\}$  этого пространства тогда и только тогда, когда в спинбазисе, отвечающем базису  $\{j_1, j_2, j_3\}$ ,  $(j_k) = \sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

**3. Орбиты линейных представлений алгебры  $\alpha$ -кватернионов.** Пусть фиксировано точное линейное представление алгебры  $H_\alpha$ . Тогда эта алгебра реализуется как подалгебра алгебры  $\text{End}(V)$  эндоморфизмов (вещественного) линейного пространства  $V$ . Рассмотрим орбиту  $\text{Orb } X = \{Y \in VI, Y = q(X); q \in H_\alpha\}$  ненулевого элемента  $X \in V$ . Ее можно рассматривать как образ гомоморфизма  $X: H_\alpha \rightarrow V$ ;  $X(q) = q(X)$ . Очевидно, если  $X \in V$  не принадлежит ядру изотропного  $\alpha$ -кватерниона, то  $\ker X = \{0\}$  и, значит,  $\dim \text{Orb } X = 4$ .

Чтобы изучить случай, когда  $X$  принадлежит ядру изотропного  $\alpha$ -кватерниона, произведем следующее построение. Рассмотрим  $R_\alpha$ -модуль

$$V^{R_\alpha} = V_R \times R_\alpha$$

и естественно индуцированное линейное представление алгебры  $H_\alpha$  на  $V^{R_\alpha}$ , которое назовем расширенным представлением этой алгебры. Пусть  $\{id, I, J, K\}$  – ортонормированный базис пространства  $H_\alpha$ . Очевидно,

$$V^{R_\alpha} = D_1^i \times D_1^{-i},$$

где  $D_1^i$  – собственный подмодуль оператора  $I$  с собственным значением  $\lambda$ ,  $i$  – мнимая единица кольца  $R_\alpha$ ;  $i^2 = \alpha$ . При этом  $\sigma = \frac{1}{2}(id + iI^3)$  – проектор на  $D_1^i$ ;  $JID_1^i: D_1^i \rightarrow D_1^{-i}$  – изоморфизм  $R_\alpha$ -модулей. Пусть

$$X \in D_1^i, q = a id + bI + cJ + dK \in H_\alpha.$$

Тогда

$$q(X) = (a + bi)X + (c - di)JX; q(JX) = \alpha(c + di)X + (a - bi)JX.$$

Таким образом  $\text{Orb } X = L(X, JX)$ . В частности,  $\dim \text{Orb } X = 2$ , причем

$$(q | \text{Orb } X) = \begin{bmatrix} a + bi & \alpha(c + di) \\ c - di & a - bi \end{bmatrix}.$$

Получено



**Предложение 6.** Орбиты собственных векторов  $\alpha$ -кватернионов с чисто мнимыми собственными значениями двумерны и имеют естественную структуру  $\alpha$ -спинвекторного пространства.

Пусть теперь  $X \in V^{R_\alpha}$  – произвольный элемент. Тогда

$$X = a + u, \quad a \in D_1^i, \quad u \in D_1^{-i}.$$

Значит,  $\text{Orb} X = L(a, Ja, u, Ju) = L(a, Ju) \oplus L(Ja, u)$ . В самом деле,

$$L(a, Ju) \subset D_1^i, \quad L(Ja, u) \subset D_1^{-i},$$

и поскольку

$$D_1^i \cap D_1^{-i} = \{0\}, \quad L(a, Ju) \cap L(Ja, u) = \{0\}.$$

Таким образом, либо  $\dim \text{Orb} X = 2$ , либо  $\dim \text{Orb} X = 4$ , причем  $\dim \text{Orb} X = 2$  тогда и только тогда, когда векторы  $\{a, Ju\}$  линейно зависимы. Поэтому в первом случае  $\text{Orb} X$  есть орбита собственного вектора  $a$  (или  $u$ ), имеющая, как мы видели, естественную структуру  $\alpha$ -спинвекторного пространства, а во втором случае  $\text{Orb} X$  есть прямая сумма двух таких сопряженных пространств. В связи с этим введем

**Определение 2.** Двумерные орбиты расширенного линейного представления алгебры  $\alpha$ -кватернионов назовем спинорными подпространствами, а его четырехмерные орбиты – биспинорными подпространствами пространства  $V^{R_\alpha}$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $X \in V$ . Тогда  $X = a + \tau a$ ,  $a = \sigma X$ , где  $\tau: V^{R_\alpha} \rightarrow V^{R_\alpha}$  – оператор естественного сопряжения. Значит,

$$\text{Orb} X = L(a, Ja, \tau a, J\tau a) = L(a, J\tau a) \oplus L(Ja, \tau a).$$

В этом случае  $\dim \text{Orb} X = 2$  тогда и только тогда, когда векторы  $\{Ja, \tau a\}$  линейно зависимы. Пусть  $Ja = \lambda \tau a$ ,  $\lambda \in R_\alpha$ . В этом случае

$$J^2 a = \lambda J\tau a = \lambda \tau(\lambda \tau a) = \lambda \bar{\lambda} a, \quad \lambda \in R_\alpha.$$

С другой стороны,  $J^2 a = \alpha a$ . Значит,  $|\lambda|^2 = \alpha$ . Если  $R_\alpha = \mathbb{C}$ , то  $\alpha = -1$  и, значит, этот случай невозможен. Следовательно,  $R_\alpha = \mathbb{D}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $|\lambda| = 1$ . Кроме того,  $\tau Ja = \lambda a$ . Но

$$\tau Ja = \frac{1}{2} \tau (JX + iJIX) = \frac{1}{2} (JX - iJIX) = \frac{1}{2} (JX + iJX) = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (X + iIX),$$

откуда  $JX = \bar{\lambda} X$  и, значит,  $\lambda = \pm 1$ , т. е.  $X \in D_1^{\pm 1}$ . Обратно, если  $X \in D_1^{\pm 1}$ , то

$$q(X) = (a \pm b)X + (c \mp d)JX, \quad q(JX) = (c \pm d)X + (a \mp b)JX.$$

В частности,  $\dim \text{Orb} X = 2$ ,

$$(q) = \begin{bmatrix} a \pm b & c \pm d \\ c \mp d & a \mp b \end{bmatrix}.$$

Таким образом, орбита элемента  $X \in V$  двумерна тогда и только тогда, когда  $X$  – собственный вектор чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона  $I$ . В этом случае  $X \in \ker(\text{id} + I)$  либо  $X \in \ker(\text{id} - I)$ , т. е.  $X \in \ker q$ ,  $|q| = 0$ . Обратно, пусть  $X \in \ker q$ ,  $|q| = 0$ . Имеем:  $q = a + b\bar{q}$ ;  $a, b \in R$ ,  $\bar{q}$  – чисто мнимый  $\alpha$ -кватернион. Тогда  $q(X) = 0$ , т. е.  $\bar{q}(X) = -\frac{a}{b}X$ ;  $-\frac{a}{b} = \pm 1$ , и, значит,  $X$  – собственный вектор чисто мнимого  $\alpha$ -кватерниона  $\bar{q}$ . Доказана

**Теорема 2.** Размерность орбиты линейного представления алгебры  $\alpha$ -кватернионов равна 2 либо 4. При этом она равна 2 тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое пересечение с ядром изотропного  $\alpha$ -кватерниона.

По аналогии с эрмитовой геометрией четырехмерные орбиты линейного представления алгебры  $\alpha$ -кватернионов следует назвать голоморфными подпространствами. Из сказанного видно, что двумерные орбиты этого представления естественно назвать (вещественными) спинорными подпространствами, или спинорными плоскостями.

Поступила в редакцию 03.12.91.

## КРИТЕРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

1. Постановка задачи. Пусть оптимизируемая система на отрезке  $T = [t_*, t^*]$  описывается нелинейным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + a f(x), \quad t \in T, \\ x(t_*) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = x(t)$  –  $n$ -вектор состояния,  $A_0$  –  $n \times n$ -матрица,  $x_0$ ,  $a$  –  $n$ -векторы,  $f(x)$  – достаточно гладкая скалярная функция.

Управляющие воздействия, с помощью которых оптимизируется поведение системы (1), зададим совокупностью

$$v(\cdot) = (t_k, u_k, k \in K), \quad K = \{1, 2, \dots, k^* < \infty\},$$

где  $t_k$  – момент приложения воздействия к системе,  $u_k$  – интенсивность прилагаемого воздействия.

Будем считать, что на управляющие воздействия наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} 0 < h_* \leq t_{k+1} - t_k \leq h^*, \quad k \in K^0 = \{0, 1, \dots, k^* - 1\}, \quad t_0 = t_*, \quad 0 \leq t^* - t_{k^*} < h^*; \\ u_* \leq u_k \leq u^*, \quad k \in K. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $h_*$ ,  $h^*$ ,  $u_*$ ,  $u^*$  – заданные числа.

Движение  $x(t)$ ,  $t \in T$ , системы (1) под действием управления  $v(\cdot)$  происходит следующим образом. На каждом промежутке  $T_k = [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k \in K$ , функция  $x(t)$ ,  $t \in T$  непрерывна и удовлетворяет уравнению (1). В точке  $t_k$ ,  $k \in K$ , функция  $x(t)$ ,  $t \in T$ , испытывает скачок:

$$x(t_k) = x(t_k + 0) = x(t_k - 0) + b(x(t_k - 0)) u_k. \quad (3)$$

Здесь  $b(x)$  – достаточно гладкая  $n$ -вектор-функция, характеризующая параметры входного устройства, через которое передается воздействие управления на оптимизируемую систему.

Из описанной модели системы управления следует, что каждому управлению  $v(\cdot)$  соответствует единственная кусочно-непрерывная траектория  $x(t)$ ,  $t \in T$ , оптимизируемой системы.

Управление  $v(\cdot)$  будем называть допустимым, если оно, удовлетворяя ограничениям (2), порождает такую траекторию  $x(t)$ ,  $t \in T$ , на которой выполняется терминальное ограничение

$$H_0 x(t^*) + h_0 h_1(x(t^*)) = q. \quad (4)$$

Здесь  $H_0$  –  $m \times n$ -матрица,  $\text{rank } H_0 = m < n$ ,  $h_0$ ,  $g$  –  $m$ -векторы,  $h_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , – достаточно гладкая скалярная функция.

Оценивая качество допустимых управлений по критерию

$$J(v(\cdot)) = c^T x(t^*), \quad (5)$$

оптимальными будем называть те  $v^0$  из них, на которых этот критерий качества достигает максимума:

$$J(v^0(\cdot)) = \max J(v(\cdot)). \quad (6)$$

2. Аппроксимация задачи. Принцип максимума. Пусть  $v(\cdot)$ ,  $x(t)$ ,  $t \in T$ , – допустимые управление и траектория задачи (1) – (6). Зададим такое приращение управления  $\Delta v(\cdot) = (\omega_k, s_k, k \in K)$ :

$$\tilde{u}_k = u_k + \omega_k, \quad \tilde{t}_k = t_k + s_k, \quad k \in K.$$

Обозначим:  $\Delta x(t)$ ,  $t \in T$ , – соответствующее приращение траектории:  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in T$ ,  $\tilde{v}(\cdot)$  – новые траектория и управление. На участках гладкости траектории  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in T$ , имеем:

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t) \Delta x(t) + R(t), \quad (7)$$

где

$$A(t) = A_0 + a \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x}, \quad R(t) = 0(\|\Delta x(t)\|).$$

Линеаризацией системы (1) вдоль  $x(t)$ ,  $t \in T$ ,  $v(\cdot)$  (на участках гладкости траекторий  $x(t)$ ,  $\bar{x}(t)$ ,  $t \in T$ ) назовем систему:

$$\dot{z}(t) = A(t) z(t), \quad t \in T, \quad (8)$$

$$z(t_0) = \Delta x(t_0) = 0.$$

Определим  $z(t)$  в моменты скачков траекторий  $x(t)$ ,  $\bar{x}(t)$ ,  $t \in T$ , так, чтобы выполнялось условие

$$\Delta x(t^*) = z(t^*) + o(\|(\omega, s)\|). \quad (9)$$

Для удобства вместо  $o(\|(\omega, s)\|)$  будем писать просто  $o(\cdot)$ . Обозначим  $t_k^* = \min(t_k, t_k + s_k)$ ,  $t_k = \max(t_k, t_k + s_k)$ ,  $F(t, \tau)$ ,  $t \geq \tau$ , — фундаментальная матрица решений системы (8).

Положим:

$$z(t_k^*) =$$

$$\begin{cases} F(t_k, t_{k-1}) z(t_{k-1}^*) - b(t_k) u_k & \text{при } s_k \geq 0, \\ F(t_k, t_{k-1}) z(t_{k-1}^*) + b(t_k) (u_k + \omega_k) + b(t_k) u_k s_k & \text{при } s_k < 0, \end{cases}$$

$$z(t_k^*) = \sum_{l=1}^k F(t_k, t_l) \{ b(t_k) \omega_k + [b(t_k) u_k - A_0 b(t_k) u_k + a(f(x(t_k-0)) - f(x(t_k+0)))] s_k \}, \quad k \in K.$$

Здесь

$$b(t_k) = b(x(t_k-0)), \quad \bar{b}(t_k) = \frac{\partial b(x(t_k-0))}{\partial x} \bar{x}(t_k-0), \quad k \in K.$$

Можно доказать, что имеет место равенство (9), а именно:

$$z(t^*) = \sum_{k \in K} f_k \omega_k + \sum_{k \in K} g_k s_k,$$

$$\Delta x(t^*) = \sum_{k \in K} f_k \omega_k + \sum_{k \in K} g_k s_k + o(\cdot). \quad (10)$$

Здесь  $f_k = F(t^*, t_k) b(t_k)$ ,

$$g_k = F(t^*, t_k) [b(t_k) u_k - A_0 b(t_k) u_k + a(f(x(t_k-0)) - f(x(t_k+0)))] .$$

Если  $v(\cdot)$  — допустимое управление, то имеем:

$$H_0 \Delta x(t^*) + h_0 [h_1(x(t^*) + \Delta x(t^*)) - h_1(x(t^*))] = 0. \quad (11)$$

Поскольку  $\Delta x(t^*) = O(\|(\omega, s)\|)$ , то (11) может быть переписано в виде:

$$H \Delta x(t^*) + o(\cdot) = 0, \quad (12)$$

где  $H = H_0 + h_0 \frac{\partial h_1(x(t^*))}{\partial x}$ .

Теперь, как и в [2], определим понятие опоры задачи (1) — (6). Выделим из  $K$  подмножество  $K_{оп}^u$  и непересекающиеся подмножества  $K_{оп}^1$ ,  $K_{оп}^2$ ,  $K_H^2$  со свойством

$$m = |K_{оп}^u| + |K_{оп}^1| + |K_{оп}^2|.$$

Обозначим  $K^2 = K_{оп}^2 \cup K_H^2$ . Каждому элементу  $k \in K^2$  поставим в соответствие два числа  $p(k) \leq q(k)$ ,  $p(k) \leq k \leq q(k) + 1$ . Построим множества:



$$\Delta J(\bar{v}(\cdot)) = J(\bar{v}(\cdot)) - J(v(\cdot)) = \sum_{k \in K} \Delta t_k \omega_k + \sum_{k \in K} \Delta s_k s_k$$

Перепишем уравнение (12):

$$\sum_{k \in K} H f_k \omega_k + \sum_{k \in K} H g_k s_k + o(\cdot) = 0. \quad (20)$$

Умножим (20) на вектор  $-\nu$  и сложим результат с (19):

$$\Delta J(\bar{v}(\cdot)) = \sum_{k \in K} (c' - \nu' H) f_k \omega_k + \sum_{k \in K} (c' - \nu' H) g_k s_k + o(\cdot).$$

Из (13), (14) следуют равенства:

$$(c' - \nu' H) g_k = 0, \quad k \in K_{\text{оп}}^1;$$

$$\sum_{l=p(k)}^{q(k)+1} (c' - \nu' H) g_l = 0, \quad k \in K_{\text{оп}}^2. \quad (21)$$

Учитывая равенства (16) и (21), перепишем  $\Delta J(\bar{v}(\cdot))$ :

$$\begin{aligned} \Delta J(\bar{v}(\cdot)) = & - \sum_{k \in K_{\text{оп}}^u} \Delta(t_k) \omega_k + \sum_{k \in K_{\text{оп}}^2} \sum_{l=p(k)}^{q(k)+1} (c' - \nu' H) g_l s_l + \\ & + \sum_{k \in K_{\text{н}}^2} \sum_{l=p(k)}^{q(k)+1} (c' - \nu' H) g_l s_l + \sum_{k \in K_{\text{н}}^1} (c' - \nu' H) g_k s_k + o(\cdot). \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь определим понятие локальной оптимальности опорного управления задачи (1) – (6):

Опорное управление  $\{v(\cdot), S_{\text{оп}}\}$  называется неособым, если существует либо такой индекс  $l \in L_{\text{оп}}$ , что  $\xi_l^0 \neq 0$ , либо такой индекс  $k^0 \in K_{\text{н}}^u$ , что  $\Delta(t_k^0) \neq 0$ .

Неособое опорное управление  $\{v(\cdot), S_{\text{оп}}\}$  называется локально оптимальным, если для любых достаточно малых приращений  $\omega_k, s_k, k \in K$ , удовлетворяющих условию либо

$$\xi_l^0 (s_{l^0+1} - s_{l^0}) \neq 0, \quad \text{либо} \quad \Delta(t_k^0) \omega_k \neq 0, \quad (23)$$

выполняется неравенство  $J(\bar{v}(\cdot)) \leq J(v(\cdot))$ .

Следуя схеме доказательства теоремы 2[2], можно доказать следующий критерий локальной оптимальности опорного управления задачи (1) – (6):

**Теорема.** Соотношения

$$1. \xi_l \Delta t_l = \max_{h \in \Delta t_k h^*} \xi_l \Delta t, \quad l \in L_{\text{оп}}; \quad (24)$$

$$2. \Delta(t_k) u_k = \min_{u \in \Delta t_k u^*} \Delta(t_k u), \quad k \in K_{\text{н}}^u; \quad (25)$$

$$3. \check{\Delta}_k = 0, \quad k \in K \setminus \{1, k^*\},$$

$$\check{\Delta}_1 \geq 0 \quad \text{при} \quad \Delta t_0 = h, \quad \check{\Delta}_1 \leq 0 \quad \text{при} \quad \Delta t_0 = h^*,$$

$$\check{\Delta}_1 = 0 \quad \text{при} \quad h \cdot < \Delta t_0 < h^*, \quad \text{если} \quad 1 \in K_{\text{н}};$$

$$\check{\Delta}_k \geq 0 \quad \text{при} \quad t_k \cdot = t^*, \quad \check{\Delta}_k \cdot = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t^* - t_k \cdot < h^*, \quad \text{если} \quad k^* \in K_{\text{н}}, \quad (26)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для локальной оптимальности опорного управления  $\{v(\cdot), S_{\text{оп}}\}$ .

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1980. Ч. 3. Специальные задачи.
2. Нгуен Ба Тхи. Об одной задаче импульсного управления движением/Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.». Мн., 1990. 28. с. Деп. в ВИНТИ 25.12.90. № 6421—В90.

Поступила в редакцию 27.12.91.

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА**

**Постановка задачи. Основные определения.** Пусть  $K = \{1, \dots, l\}$ ,  $J = \{1, \dots, p\}$ ,  $R = \{1, \dots, r\}$  – заданные конечные множества индексов;  $D_k = D'_k \geq 0$ ,  $k \in K_0 \cup \{0\}$ ,  $-p \times p$  – матрицы;  $a_k$ ,  $k \in K_0$ ,  $-p$  – векторы;  $b_k$ ,  $k \in K_0$ , – скаляры;  $f_k(x) = x'D_k x / 2 + a'_k x + b_k$ ,  $k \in K_0$ .

В классе кусочно-непрерывных  $r$ -вектор-функций  $u = u(\cdot) = (u_r(t) \ r \in R)$ ,  $t \in T = [t, t^*]$ , рассмотрим задачу

$$J(u, \xi) = f_0(x(t^*)) + \sum_{k \in K} \xi_k f_k(x(t^*)) \rightarrow \min_u \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T, \tag{3}$$

$$\xi \in \Xi = \{ \xi = (\xi_k, k \in K) : \xi_* \leq \xi_k \leq \xi^*, k \in K \}. \tag{4}$$

Здесь  $x(t)$  –  $n$ -вектор состояния системы управления в момент времени  $t$ ;  $x_0$  – начальное состояние;  $u(t)$ ,  $t \in T$ , –  $r$ -мерное управляющее воздействие;  $\xi$  –  $k$ -вектор неконтролируемых возмущений;  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $t \in T$ , – непрерывные  $p \times p$ -,  $p \times r$  – матричные функции;  $u_*$ ,  $u^*$  –  $r$ -векторы ограниченных на управляющие воздействия.

Понятия траектории динамической системы, допустимых управления и траектории определяются так же, как в [1]. Качество каждого допустимого управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , будем оценивать по гарантированному значению критерия качества.

**Определение 1.** Число  $J_0 = J_0(u) = f(x(t^*))$ :

$$J_0 = \max_{\xi \in \Xi} f(x(t^*), \xi)$$

назовем гарантированным значением критерия качества на допустимом управлении  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

**Определение 2.** Допустимое управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующая ему траектория  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , называются оптимальными, если

$$J_0(u^0) = f(x^0(t^*)) = \min_u \max_{\xi \in \Xi} f(x(t^*), \xi).$$

Сведение задачи (1) – (4) к негладкой задаче оптимального управления. Пусть  $u(t)$ ,  $t \in T$ , – допустимое управление. С помощью формулы Коши [2] подсчитаем на нем числа  $\alpha_k = \alpha_k(x(t^*)) = f_k(x(t^*))$ ,  $k \in K$ .

Рассмотрим задачу

$$\varphi(\xi) = \sum_{k \in K} \xi_k \alpha_k \rightarrow \max_{\xi} \tag{5}$$

$$\xi_* \leq \xi_k \leq \xi^*, \quad k \in K.$$

Построим множества

$$K^+ = K^+(x(t^*)) = \{k \in K: \alpha_k > 0\};$$

$$K^- = K^-(x(t^*)) = \{k \in K: \alpha_k < 0\};$$

$$K^0 = K^0(x(t^*)) = \{k \in K; \alpha_k = 0\}.$$

Множество  $K^0$  разобьем на непересекающиеся подмножества

$$K^{0+}, K^{0-}: K^{0+} \cup K^{0-} = K^0, \quad K^{0+} \cap K^{0-} = \emptyset.$$

Обозначим:  $\bar{K}^+ = K^+ \cup K^{0+}$ ,  $\bar{K}^- = K^- \cup K^{0-}$ .

Множество всевозможных разбиений вида  $p = \{K^{0+}; K^{0-}\}$  обозначим через  $P$ . Очевидно, что вектор  $\xi^0 = (\xi_k^0, k \in K)$  с компонентами

$$\xi_k^0 = \xi_k^0(x(t^*)) = \begin{cases} \xi_k^+, & \text{если } k \in \bar{K}^+; \\ \xi_k^-, & \text{если } k \in \bar{K}^-, \end{cases}$$

является решением задачи (5). С помощью этого вектора запишем задачу (1) - (4) в виде:

$$J_0(u) = f_0(x(t^*)) + \sum_{k \in K} \xi_k^0(x(t^*)) f_k(x(t^*)) \rightarrow \min_u,$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

$$u_0 \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T.$$

Сглаживание задачи. Следуя [3], набору  $p \in P$  поставим в соответствие множество:

$$X(p) = \{x \in R^n: \alpha_k(x) \geq 0, k \in \bar{K}^+; \alpha_k(x) \leq 0, k \in \bar{K}^-\}.$$

Это множество в аналитической форме определяется системой нелинейных (квадратичных) неравенств:

$$f_k(x) \geq 0, k \in \bar{K}^+; \quad f_k(x) \leq 0, k \in \bar{K}^-.$$

Пусть  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$ , - произвольное допустимое управление,  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$ , - соответствующая ему траектория.

Обозначим:

$$D = D_0 + \sum_{k \in K} \xi_k^0 D_k; \quad a = a_0 + \sum_{k \in K} \xi_k^0 a_k;$$

$$c = a + Dx(t^*), \quad c_k = a_k + D_k x(t^*), \quad k \in K.$$

В области  $X(p)$ , соответствующей фиксированному элементу  $p \in P$ , сформируем задачу

$$\Delta x'(t^*) D \Delta x(t^*) / 2 + c' \Delta x(t^*) \rightarrow \min_{\Delta u}$$

$$\Delta \dot{x} = A(t) \Delta x(t) + B(t) \Delta u(t), \quad \Delta x(t_0) = 0,$$

$$u_0 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq u^* - u(t), \quad t \in T,$$

$$\Delta x'(t^*) D_k \Delta x(t^*) / 2 + c_k' \Delta x(t^*) \geq -\alpha_k, \quad k \in \bar{K}^+;$$

$$\Delta x'(t^*) D_k \Delta x(t^*) / 2 + c_k' \Delta x(t^*) \leq -\alpha_k, \quad k \in \bar{K}^-. \quad (7)$$

Гладкую задачу оптимального управления (7) будем называть  $(u(\cdot), p)$ -квадратизацией задачи (6). Совокупность гладких задач оптимального управления (7), соответствующих всевозможным наборам  $p \in P$ , назовем сглаживанием задачи (6).

Задача (7) имеет, по крайней мере, одно допустимое управление  $\Delta u(t) \equiv 0, t \in T$ . Очевидно, что если  $u^0(t), t \in T$ , - оптимальное управление задачи (6), то  $\Delta u^0(t) \equiv 0, t \in T$ , является оптимальным управлением в задаче (7).

Линеаризация задачи. Пусть  $\Delta u(t), t \in T$ , - допустимое управление задачи (7). Линеаризовав вдоль управления  $\Delta u(t) \equiv 0, t \in T$ , (в окрестности точки  $\Delta x(t^*) = 0$ ) критерий качества и функции ограничений (7), получим задачу:

$$c'z(t^*) \rightarrow \min_w$$

$$\dot{z} = A(t)z(t) + B(t)w(t), \quad z(t_0) = 0,$$

$$c_k' z(t^*) \geq -\alpha_k, k \in \bar{K}^+; \quad c_k' z(t^*) \leq -\alpha_k, k \in \bar{K}^-; \quad (8)$$

$$u_0 - u(t) \leq w(t) \leq u^* - u(t), \quad t \in T.$$

Задачу (8) назовем  $(u(\cdot), p)$ -линеаризацией задачи (6). Если  $u^0(t)$ ,

$t \in T$ , — оптимальное управление задачи (6), то функция  $w^0(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$ , является оптимальным управлением в задаче (8).

**Опора. Опорное управление.** Пусть  $K_{оп}$  — произвольное подмножество множества  $K$ ;

$$K_{оп} = \bar{K}_{оп}^+ \cup \bar{K}_{оп}^-, \quad \bar{K}_{оп}^+ \subset \bar{K}^+, \quad \bar{K}_{оп}^- \subset \bar{K}^-.$$

На отрезке  $T$  выберем конечное множество моментов

$$T_{оп} = \{t_j, j \in J_{оп}\}, \quad t_j < t_{j+1}, \quad J_{оп} \subset J, \quad |J_{оп}| \leq |K_{оп}|.$$

Каждому моменту  $t_j$  поставим в соответствие такой набор индексов

$$R_{оп}(t_j) = R_{оп}^j \subset R, \quad |K_{оп}| = |R_{оп}^j|, \quad R_{оп} = \{R_{оп}^j, j \in J_{оп}\}.$$

Введя обозначение  $S_{оп} = \{T_{оп}, R_{оп}\}$ , составим матрицу

$$\Phi_{оп} = \Phi(K_{оп}, S_{оп}) = (c_k(l)t_j), \quad (k \in K_{оп}, l \in R_{оп}),$$

где

$$c_k(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a_k + D_k x(t^*)), \quad k \in K.$$

**Определение 3.** Совокупность  $M_{оп}(p) = \{K_{оп}, S_{оп}\}$  назовем (локальной) опорой основных ограничений на допустимом управлении  $u(\cdot)$ , матрицу  $\Phi_{оп} = \Phi(M_{оп}(p))$  — (локальной) опорной матрицей, если  $\det \Phi_{оп} \neq 0$ .

**Определение 4.** При фиксированном  $p \in P$  пару  $\{u(\cdot), M_{оп}(p)\}$  из допустимого управления и опоры ограничений назовем опорным управлением задачи (6). Опорное управление будем называть невырожденным, если значения опорных компонент управления в опорные моменты не критические:

$$u_{\cdot 1} < u_1(t) < u_1^{\cdot}, \quad l \in R_{оп}(t), \quad t \in T_{оп},$$

и выполняются неравенства

$$\alpha_k > 0, \quad k \in \bar{K}_н^+ = \bar{K}^+ \setminus \bar{K}_{оп}^+; \quad \alpha_k < 0, \quad k \in \bar{K}_н^- = \bar{K}^- \setminus \bar{K}_{оп}^-.$$

**Необходимые условия оптимальности.** Опорному управлению поставим в соответствие (локальный) вектор потенциалов:

$$\nu_{оп}^{\cdot} = \nu'(K_{оп}|u(\cdot), p) = c_{оп}^{\cdot} Q, \quad (9)$$

где

$$c_{оп} = (c_l(t_j), j \in J_{(1)}, l \in R),$$

$$c(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a + D x(t^*)); \quad Q = \Phi_{оп}^{-1}.$$

Функцию

$$\Delta(t) = \Delta(t, u(\cdot)|p) = H^{оп'}(t)\nu_{оп} - c(t), \quad t \in T, \quad (10)$$

назовем (локальным) коуправлением, сопровождающим опору  $M_{оп}|p$ . Здесь  $H^{оп}(t) = H^{оп}(K_{оп}, R/t) = (c_k(R/t), k \in K_{оп})$ .

Пусть  $\{u^0(\cdot), M_{оп}^0(p)\}$ , — невырожденное опорное управление. При  $w(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$ , из  $(u, p)$  — линеаризации (8) получаем: для локальной оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , в задаче (8) необходимо выполнение соотношений:

$$\nu_k^0 \geq 0 \text{ при } \alpha_k = 0; \quad \nu_k^0 = 0 \text{ при } \alpha_k > 0, \quad k \in \bar{K}_{оп}^+; \quad (11)$$

$$\nu_k^0 \leq 0 \text{ при } \alpha_k = 0; \quad \nu_k^0 = 0 \text{ при } \alpha_k < 0, \quad k \in \bar{K}_{оп}^-;$$

$$\Delta_1^0(t) \geq 0 \text{ при } u_1^0(t) = u_1^{\cdot},$$

$$\Delta_1^0 \leq 0 \text{ при } u_1^0(t) = u_{\cdot 1}. \quad (12)$$

$$\Delta_1^0(t) = 0 \text{ при } u_{\cdot 1} < u_1^0(t) < u_1^{\cdot}, \quad (t \in T, l \in R).$$

Сформулируем приведенные условия оптимальности в виде принципа максимума. Пусть  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решение (котраектория) сопряженной системы



$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad \psi(t^*) = H^{on} \nu_{on} - c, \quad (13)$$

где

$$H^{on} = (c_{jki}, \quad k \in K_{on}).$$

Положим

$$H(\psi, u, t) = \psi' B(t)u,$$

$$H(\psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u^* < u < u^*} H(\psi^0(t), u, t), \quad t \in T, \quad (14)$$

$$\nu_k^0 \alpha_k = 0, \quad k \in K_{on}. \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что соотношения (11) – (12) эквивалентны условиям (14) – (15) соответственно.

Таким образом, получен

**Опорный принцип максимума.** Пусть  $\{u^0(\cdot), M_{on}^0(p)\}$  – невырожденное опорное управление. Для локальной оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , в задаче (6) необходимо, чтобы вдоль опорного управления и соответствующих ему траекторий  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , сопряженной системы (15) и вектора  $\nu^0$ , (9) выполнялись два условия: 1) максимума (16) и 2) дополняющей нежесткости (17).

Соотношения (9) – (15) получены для фиксированного набора  $p$  и опоры  $M_{on}$ . Обозначим через  $P(M_{on})$  совокупность наборов  $p \in P$ , для которых соотношения (11), (12), (14), (15) выполняются с опорой  $M_{on}$ . Справедливо следующее пакетное необходимое условие оптимальности [4].

Для оптимальности в задаче (6) допустимого управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , необходимо существование такого пакета опор  $M_{on}^s$ ,  $s = \overline{1, \tau}$ , что:

$$1) \cup_{s=\overline{1, \tau}} P(M_{on}^s) = P, \quad P(M_{on}^i) \cap P(M_{on}^d) = \emptyset, \quad i, d = \overline{1, \tau}, \quad i \neq d;$$

2) для сопровождающих его векторов  $\nu^0(M_{on}^s/p)$  и коуправлений

$$\Delta^0(M_{on}^s/p), \quad p \in P(M_{on}^s), \quad s = \overline{1, \tau},$$

выполняются соотношения (11), (12).

Экстремальную форму этого результата назовем пакетным опорным принципом максимума: для оптимальности в задаче (6) допустимого управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , необходимо существование такого пакета опор  $M_{on}^s$ ,  $s = \overline{1, \tau}$ , что: 1)  $\cup_{s=\overline{1, \tau}} P(M_{on}^s) = P$ ,  $P(M_{on}^i) \cap P(M_{on}^d) = \emptyset$ ,  $i, d = \overline{1, \tau}$ ,  $i \neq d$ ; 2) вдоль опорных управлений  $\{u^0(\cdot), u_{on}^s\}$ ,  $s = \overline{1, \tau}$ , и соответствующих им траекторий

$$\psi^0(t, M_{on}^s/p), \quad t \in T, \quad p \in P(M_{on}^s), \quad s = \overline{1, \tau},$$

сопряженной системы (13) и векторов

$$\nu^0(M_{on}^s/p), \quad p \in P(M_{on}^s), \quad s = \overline{1, \tau},$$

выполняются условия: максимума (14) и дополняющей нежесткости (15).

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
3. Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратичных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 67.
4. Абдурахимов А. О. Линейно-квадратичная задача оптимального управления с неопределенностью в критерии качества / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1991. 37 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.91. № 1369-В91.

Поступила в редакцию 22.11.91.

## ОБ ОЦЕНКЕ СТАРШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА С НЕЧЕТНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В связи с исследованием периодических дифференциальных систем методом отражающей функции [1] особенный интерес представляют свойства решений уравнения Хилла

$$\ddot{y} = a(t)y, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в том случае, когда непрерывный или кусочно-непрерывный коэффициент  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является  $T$ -периодическим ( $T > 0$ ) и нечетным. Задача изучения таких уравнений была поставлена Ю. С. Богдановым в 1987 г. на руководимом им семинаре по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Если в (1) функция  $a(t) \equiv \text{const}$ , то для старшего характеристического показателя  $\lambda$  уравнения (1) (понимаемого в смысле [2]) при любом  $T > 0$  имеет место оценка

$$\lambda \leq \frac{1}{T} G(a), \quad G(a) \equiv \int_0^T \sqrt{a_+(t)} dt, \quad (2)$$

$$a_+(t) \equiv \max \{ 0, a(t) \},$$

верная также и для некоторых непостоянных нечетных  $T$ -периодических функций  $a(t)$ , в частности для  $a(t) = A^2 \times \text{sgn} \sin \pi A^{-1}t$ ,  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $T = 2A$ . Естественным образом отсюда возникает вопрос о справедливости оценки (2) для всех уравнений рассматриваемого типа. В настоящей статье этот вопрос решается отрицательно.

**Теорема.** Для любых положительных чисел  $D$  и  $T$  найдется кусочно-постоянная нечетная  $T$ -периодическая функция  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условию

$$\pi \leq G(a) \leq 5\pi/4, \quad (3)$$

и такая, что для старшего показателя  $\lambda$  уравнения (1) выполняется неравенство

$$\lambda > \frac{1}{T} (D + G(a)). \quad (4)$$

**Доказательство.** Требуемую функцию укажем вначале для какого-то одного значения  $T > 0$ , выбор которого осуществим непосредственно в процессе ее построения. При этом нам понадобятся две следующие леммы.

**Лемма 1.** Траектории системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad (5)$$

представляют собой эллипсы вида  $a^2 x_1^2 + x_2^2 = c^2$ , где  $c$  – произвольная постоянная, проходящие в отрицательном направлении, притом так, что каждая связанная часть траектории, заключенная между какой-либо координатной осью и одной из прямых, задаваемых уравнением  $x_2 = \pm ax_1$ , проходится за одно и то же время, равное  $\pi/4a$ .

**Доказательство леммы 1.** Линейное преобразование с постоянными коэффициентами

$$z_1 = ax_1, \quad z_2 = x_2 \quad (6)$$

переводит систему (5) в систему  $\dot{z}_1 = az_2$ ,  $\dot{z}_2 = -az_1$ , которая в полярных координатах  $z_1 = r \cos \varphi$ ,  $z_2 = r \sin \varphi$  имеет вид  $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = -a$ , в силу чего ее траектории представляют собой окружности с центром в нуле, проходящие в отрицательном направлении с постоянной угловой скоростью. При том же преобразовании прямые  $x_2 = \pm ax_1$  отображаются в прямые  $z_2 = \pm z_1$ , а координатные оси – в себя. Любая окружность с центром в нуле делится этими четырьмя линиями на восемь одинаковых дуг с угловой величиной  $\pi/4$ , так что изображающая точка, благодаря равенству  $\dot{\varphi} = -a \equiv \text{const}$ , минует их за

одно и то же время, равное  $\pi/4a$ . Доказательство леммы завершается применением обратного преобразования, которое переводит окружности  $z_1^2 + z_2^2 = c^2$  в указанные эллипсы с сохранением направления движения в силу положительности своего определителя.

Пусть  $f(t) = a^2$  при  $t \in [t_0, t_0 + \theta[$ ,  $f(t) = -a^2$  при  $t \in [t_0 + \theta, t_0 + 2\theta[$ , где  $a > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $t_0$  – некоторые числа. Тогда справедлива

**Лемма 2.** Для любых  $a$  и  $k > a$  найдется такое  $\theta = \theta(a, k) \in [\pi/4a, \pi/2a]$ , что решение системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(t) & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

с произвольным начальным вектором  $x(t_0)$ , лежащим на луче  $x_2 = kx_1$ ,  $x_1 > 0$ , достигнет координатной оси  $Ox_1$  в момент  $t_0 + 2\theta$ .

**Доказательство леммы 2.** Применив к системе (7) преобразование (6), а затем произведя замену времени  $t = t_0 + a^{-1}\tau$ , получим снова систему вида (7) с  $a = 1$ . После этого остается лишь указать такое  $\sigma = a\theta(a, k)$ , что решение, начинающееся при  $\tau = 0$  на луче  $z_2 = ka^{-1}z_1$ ,  $z_1 > 0$ , имеет в момент  $\tau = \sigma$  угловую координату  $\varphi(\sigma) = \sigma$ .

При  $f(t) = 1$  для  $\varphi$  имеем уравнение  $\dot{\varphi} = \cos 2\varphi$  с начальным условием  $\pi/4 < \varphi(0) = \arctg ka^{-1} < \pi/2$ , откуда можно заключить, что  $\varphi(\tau)$  монотонно убывает от значения  $\varphi(0)$  и с ростом  $\tau$  стремится к  $\pi/4$ . Таким образом, имеем неравенства  $\varphi(\sigma) > \pi/4 > \sigma$  при  $\sigma = 0$  и  $\varphi(\sigma) < \pi/2 < \sigma$  при  $\sigma > \pi/2$ . Утверждение леммы следует теперь из непрерывности  $\varphi$ .

Возьмем любое  $D > 0$  и некоторые числа  $a_2 > a_1 > 1$ . Определим функцию  $a_0(t)$  на половине периода, полагая

$$a_0(t) = a_2^2, \quad t \in [0, T_2[; \quad a_0(t) = a_1^2, \quad t \in [T_2, T_2 + T_1[,$$

где  $T_1 = \theta(a_1, a_2)$ ,  $T_2 = 3\pi/4a_2$ , а затем продолжим на все  $\mathbb{R}$  как нечетную и периодическую с периодом  $T_0 = 2(T_1 + T_2)$ . Каковы бы ни были числа  $a_1$  и  $a_2$ , условие (3) при этом всегда будет выполнено, так как в силу леммы 2 имеют место соотношения  $\pi \leq G(a_0) = a_1 T_1 + a_2 T_2 = 3\pi/4 + a_1 \theta(a_1, a_2) \leq 5\pi/4$ . Покажем, что при надлежащем выборе  $a_1$  и  $a_2$  функция указанного вида является искомой. Для этого рассмотрим решение  $x(t)$  системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_0(t) & 1 \\ a_0(t) & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

эквивалентной уравнению (1), с начальным вектором  $x(0) = (1, a_2)$ .

1. При  $t \in [0, T_2[$  решение  $x(t)$  имеет вид  $x(t) = x(0) \exp a_2 t$  и все время остается на луче  $x_2 = a_2 x_1$ ,  $x_1 > 0$ . Его норма задается равенством  $\|x(t)\| = \|x(0)\| \exp a_2 t$ .

2. При  $t \in [T_2, T_1 + T_2[$  для  $\rho(t) = \ln \|x(t)\|$  имеем уравнение  $\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{2} (1 + a_1^2) \sin 2\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – полярный угол вектора  $x(t)$ . Убеждаясь, как и в доказательстве леммы 2, что  $\varphi(t)$  монотонно убывает от значения  $\varphi(T_2) = \arctg a_2 < \pi/2$ , не становясь, однако, менее  $\arctg a_1 > \pi/4$ , и учитывая монотонность  $\sin 2\varphi$  на этом отрезке, получаем оценки

$$\sin 2\varphi(t) \geq \sin 2\arctg a_2 = 2a_2 (1 + a_2^2)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \rho(T_1 + T_2) - \rho(T_2) &= \frac{1}{2} (1 + a_1^2) \int_{T_2}^{T_1 + T_2} \sin 2\varphi(t) dt \geq \\ &\geq a_2 T_2 (1 + a_1^2) (1 + a_2^2)^{-1}. \end{aligned}$$

3. Если  $t \in [T_1 + T_2, 2T_1 + T_2[$ , то функция  $a_0(t)$  принимает значение  $-a_1^2$ , и по лемме 1 движение происходит по эллипсу с уравнением  $a_1^2 x_1^2 + x_2^2 = c^2$ , где  $c$  определяется вектором  $x(T_1 + T_2)$ , причем в момент  $t = 2T_1 + T_2$ , благодаря выбору  $T_2 = \theta(a_1, a_2)$  из леммы 2, решение  $x(t)$  достигает оси  $Ox_1$ , вдоль которой лежит меньшая полуось траектории. Оценивая длину вектора  $x(T_1 + T_2)$  сверху через большую полуось траектории, получаем неравенство  $\|x(2T_1 + T_2)\| > a_1^{-1} \|x(T_1 + T_2)\|$ .

4. Наконец, если

$$t \in [2T_1 + T_2, T_0], \text{ то } a_0(t) = -a_2^2$$

и движение происходит по эллипсу с уравнением

$$a_2^2 x_1^2 + x_2^2 = b^2,$$

где  $b$  определяется вектором  $x(2T_1 + T_2)$ . Так как этот вектор лежит на оси  $Ox_1$ , то, во-первых, по лемме 1 за время  $T_2 = 3\pi/4a_2$  решение  $x(t)$  достигает луча  $x_2 = a_2 x_1$ ,  $x_1 < 0$ , пересекая его в точке с координатами

$$\left( -b/a_2\sqrt{2}, -b/\sqrt{2} \right),$$

и, во-вторых, для  $b$  имеет место представление

$$b = a_2 x_1 (2T_1 + T_2) = a_2 \|x(2T_1 + T_2)\|.$$

Таким образом, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|x(T_0)\|^2 &= \|x(2T_1 + T_2)\|^2 (1 + a_2^2) / 2, \quad x(T_0) = \\ &= -\|x(T_0)\| \|x(0)\|^{-1} x(0), \end{aligned}$$

последнее из которых означает, что вектор  $x(0) = (1, a_2)$  является собственным для матрицы Коши  $X(E_0, 0)$  системы (8) с собственным значением  $-\|x(T_0)\| \|x(0)\|^{-1}$ , а величина  $\lambda = T_0^{-1} \ln (\|x(T_0)\| \|x(0)\|^{-1})$  есть характеристический показатель этой же системы.

Объединяя равенства и неравенства, полученные в пунктах 1 – 4, а также используя оценку  $T_1 = \theta(a_1, a_2) < \pi/2a_1$  из леммы 2, имеем соотношения:

$$\lambda T_0 > a_2 T_2 + a_2 T_1 (1 + a_1^2) (1 + a_2^2)^{-1} + \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left[ (1 + a_2^2) / 2a_1^2 \right] = G(a_0) + \Delta,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2a_1^2} + \frac{\alpha^2}{2} \right) - (\alpha - 1) \frac{\pi}{2} \frac{\alpha a_1^2 - 1}{1 + \alpha^2 a_1^2}, \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1}.$$

Если устремить  $a_1 \rightarrow +\infty$ , оставляя  $\alpha$  постоянным, то  $\Delta$  будет стремиться к

$$\ln \alpha / \sqrt{2} - (1 - \alpha)^{-1} \pi / 2.$$

Поэтому при  $\alpha > \sqrt{2} \exp(\pi/2 + D)$  и всех достаточно больших  $a_1$  будет выполняться неравенство  $\Delta > \ln \alpha / \sqrt{2} - \pi/2 > D$ . Тогда, зафиксировав некоторые такие  $a_1$  и  $\alpha$ , мы получим требуемую функцию  $a(t) = a_0(t)$  при  $T = T_0$  и любом  $D > 0$ . Для того чтобы получить ее при любом наперед заданном  $0 < T \neq T_0$ , сделаем в только что построенном уравнении (1) с коэффициентом замену времени  $t = \mu\tau$ ,  $\mu = T_0/T$ , в результате чего будем иметь уравнение:

$$\ddot{y}_\tau = \mu^2 a_0(\mu\tau) y, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

с нечетными  $T$ -периодическим коэффициентом, эквивалентное системе

$$\dot{x}_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 a_0(\mu\tau) & 0 \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Система (11) связана с системой (8) посредством замены времени  $t = \mu\tau$  и ляпуновского преобразования с матрицей  $\text{diag}[\mu, 1]$ , в силу чего ее старший показатель равен  $\mu\lambda$ . Отсюда и из равенства

$$G(a) = \int_0^T (\max\{0, \mu^2 a_0(\mu\tau)\})^{1/2} d\tau = G(a_0) \quad (12)$$

вытекает, что функция  $a(t) = \mu^2 a_0(\mu t)$  удовлетворяет условиям (3) и (4) с заданными  $D$  и  $T$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Благодаря непрерывной (на конечном отрезке времени  $T$ )

зависимости решений уравнения (1) от коэффициента можно, не нарушая справедливости (3) и (4), изменить  $a(t)$  так, чтобы она стала непрерывной, конечно- или даже бесконечно гладкой (класса  $C^\infty$ ).

Авторы выражают благодарность Н. А. Изобову и С. А. Мазанику за постановку задачи и внимание к работе.

### Список литературы

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. С.17.

Поступила в редакцию 03.12.91.

УДК 517.925

Н. Ф. НАУМОВИЧ

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, СОХРАНЯЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

в предположении, что функция  $X(t, x)$  непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и  $X(t+2\omega, x) \equiv X(t, x)$ . Введем обозначения

$$X_n(t, x) = 0,5(X(t, x) - X(-t, x)), \quad (2)$$

$$X_r(t, x) = 0,5(X(t, x) + X(-t, x))$$

и построим систему

$$\dot{z} = X_n(t, z). \quad (3)$$

Будем считать, что все решения этой системы продолжимы на  $\mathbb{R}$ . Пусть  $z = z(t, y)$  есть то решение (3), для которого  $z(-\omega, y) = y$ . Поскольку функция  $X_n(t, z)$  непрерывно дифференцируема и нечетна по  $t$ , то решение, обладающее таким свойством, обязательно существует [1. С. 13]. Известно также [1. С. 27], что это решение четно и  $2\omega$ -периодично по  $t$  при любом  $y$ . Осуществим в системе (1) замену, полагая  $x = z(t, y)$ . Эта замена сводит (1) к некоторой системе

$$\dot{y} = \left[ \frac{\partial z}{\partial y}(t, y) \right]^{-1} (X(t, z(t, y)) - \frac{\partial z}{\partial t}(t, y)) =: Y(t, y). \quad (4)$$

Система (4)  $2\omega$ -периодическая и имеет такое же отображение за период, как и система (1) [1. С. 27]. Поэтому количество и устойчивость, а также начальные данные  $2\omega$ -периодических решений (1) и (4) совпадают. Имеет место

**Теорема 1.** Для того чтобы преобразование  $x = z(t, y)$  переводило систему (1) с  $2\omega$ -периодичной по  $t$  и непрерывно дифференцируемой правой частью в некоторую автономную систему  $\dot{y} = Y(y)$ , необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\frac{\partial X_r(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial X_r(t, z)}{\partial z} X_n(t, z) = \frac{\partial X_n(t, z)}{\partial z} X_r(t, z). \quad (5)$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $x = z(t, y)$  преобразует систему (1) в некоторую автономную систему  $\dot{y} = Y(y)$ . Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t} = X_n(t, z), \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} Y(y) = X(t, z). \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} Y(y) = X(t, z) - X_n(t, z) = X_r(t, z). \quad (8)$$

Продифференцируем (6) по  $y$ :  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = \frac{\partial X_n}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$  и умножим обе части этого ра-

венства справа на  $Y(y)$ . Получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_n(t, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot Y(y).$$

На основании (8) это равенство запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_n(t, z)}{\partial z} \cdot X_r(t, z). \quad (9)$$

Продифференцируем равенство (8) частным образом по  $t$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_r(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial X_r(t, z)}{\partial z} \cdot X_n(t, z). \quad (10)$$

Учитывая равенство смешанных производных ( $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}$ ), из (9) и (10) заключаем, что

$$\frac{\partial X_n(t, z)}{\partial z} X_r(t, z) = \frac{\partial X_r(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial X_r(t, z)}{\partial z} X_n(t, z).$$

А это и есть равенство (5).

*Достаточность.* Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = X_n(t, z) \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} = Y(y) = X(t, z). \end{cases} \quad (11)$$

Подставим в (11) решение  $z = z(t, y)$  системы (3). По схеме, предложенной при доказательстве необходимости, приходим к тождеству (5). Следовательно,  $z = z(t, y)$  является и решением (11). Из [1. С. 27] следует, что это решение  $2\omega$ -периодично и четно по  $t$ . Сопоставляя соотношение (4) и второе равенство системы (11), заключаем, что  $Y(t, y) = Y(y)$ , т. е. система является автономной. А это и доказывает достаточность. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть для  $2\omega$ -периодичной по  $t$  и непрерывно дифференцируемой функции  $X(t, x)$  выполнено тождество (5), а все решения системы (3) продолжимы на отрезок  $[-\omega; \omega]$ . Тогда система (1) с решениями  $\varphi(t; t_0; x_0)$  имеет такое же отображение за период  $x \rightarrow \varphi(\omega; -\omega; x)$ , как и автономная система

$$\dot{y} = Y(y), \quad (12)$$

где

$$Y(y) ::= \left[ \frac{\partial z}{\partial y}(t, y) \right]^{-1} X_r(t, z(t, y)).$$

**Доказательство.** Из доказательства теоремы 1 следует, что преобразование  $x = z(t, y)$  переводит систему (1) в некоторую автономную систему (12). Так как функция  $t \rightarrow z(t, y)$  удовлетворяет системе (3), то она сохраняет отображение за период [1. С. 12], и система (12) совпадает с системой (4), правая часть которой

$$Y(y) = \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right]^{-1} \left( X - \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right]^{-1} X_r.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = P(t)x. \quad (13)$$

Соотношение (2) для нее запишется в форме  $P_n(t) ::= 0,5(P(t) - P(-t)), P_r(t) ::= 0,5(P(t) + P(-t))$ . Тождество (5) для системы (13) принимает вид:

$$\frac{dP_r(t)}{dt} + P_r(t)P_n(t) = P_n(t)P_r(t). \quad (14)$$

Это приводит к такому следствию.

*Следствие.* Пусть для  $2\omega$ -периодической системы (13) выполнено тождество (14). Тогда  $2\omega$ -периодическое преобразование  $x = s(t)y$ ,  $\dot{s} = P_n s$ , переводит систему (13) в стационарную систему  $y = s^{-1}(t)P_r(t)s(t)y ::= Ay$ .

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \sin t + \cos t + 8\cos^2 t) x_1 + (3 - \sin t + 9\cos t + 8\cos^2 t) x_2, \\ \dot{x}_2 = (-2 + \sin t + 7\cos t - 8\cos^2 t) x_1 + (4 + \sin t - \cos t - 8\cos^2 t) x_2. \end{cases}$$

Здесь

$$P_r(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos t + 8\cos^2 t & 3 + 9\cos t + 8\cos^2 t \\ -2 + 7\cos t - 8\cos^2 t & 4 - \cos t - 8\cos^2 t \end{bmatrix},$$

$$P_n(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \sin t & \sin t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие (14), то отображение за период для рассматриваемой системы совпадает с отображением для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Заметим также, что если для системы  $\dot{x} = [A + S(t)]x$  с постоянной матрицей  $A$  и нечетной  $S(t)$  выполняется тождество  $AS(t) = S(t)A$ , то отображение Пуанкаре этой системы такое же, как и у стационарной системы  $\dot{y} = Ay$ . Действительно, в этом случае тождество (14) принимает вид  $P_r(t) = 0$ , поскольку  $P_r P_n = P_n P_r = SA$  и работает следствие.

### Список литературы

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

Поступила в редакцию 17.12.91.

УДК 519.1

А. А. ЗАПОРОЖЕЦ

## ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ФИЛЬТРОВ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

При оптимальном проектировании секционированных встречно-штыревых преобразователей фильтра на поверхностных акустических волнах (ПАВ) возникает задача построения на промежутке  $[0, 2\pi]$  тригонометрического многочлена  $P_N(x, a)$  с минимально возможным числом слагаемых  $N$ , удовлетворяющего условиям:

$$|\beta_k P_N(x^*, a)| \leq |P_N(x, a)| \leq \alpha_k |P_N(x^*, a)|, \quad x \in [u_k, v_k], \quad k = \overline{1, m},$$

где  $x^*$  — несущая точка,  $[u_k, v_k]$  — непересекающиеся интервалы, покрывающие  $[0, 2\pi]$  [1]. В силу технологических ограничений полином  $P_N(x, a)$  ищется в форме:

$$\sum_{i=1}^N a_i (\sin(ix) + \cos(ix)), \quad \text{где } a_i \in B_3 = \{-1, 0, 1\},$$

при этом за каждым ненулевым коэффициентом  $a_i$  следующий ненулевой коэффициент должен иметь противоположный знак [2]. Множество векторов  $a \in B_3^N$ , удовлетворяющих изложенным требованиям, обозначим через  $D$ .

Задачу рассматривают также в следующей дискретной постановке. Пусть  $C = C(M, N)$  — матрица с элементами  $c_{ji} = \sin(ix_j) + \cos(ix_j)$ ,  $d = d(N)$  — вектор с координатами

$$d_i = \sin(ix^*) + \cos(ix^*), \quad i = \overline{1, N},$$

где  $x_j$  — точки интервала  $[0, 2\pi]$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Очевидно, что

$$P_N(x_j, a) = (c^j, a), \quad \text{а } P_N(x^*, a) = (d, a),$$

где  $c^j$  —  $j$ -я строка матрицы  $c$ . Необходимо найти при минимальном значении  $N$  вектор  $a \in D$ , удовлетворяющий следующей системе неравенств:

$$\beta_k |(d, a)| \leq |(c^j, a)| \leq \alpha_k |(d, a)|, \quad j \in I_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где  $I_k = \{j : x_j \in [u_k, v_k]\}$ .

Обозначим через  $D_{-1}$  множество таких векторов из  $D$ , у которых первая ненулевая компонента равна  $-1$ , а через  $D_1$  множество всех остальных векторов из  $D$ . Подход к решению поставленной задачи базируется на теореме 1.

**Теорема 1.** Для того чтобы точка  $a$  являлась вершиной многогранника  $P$ , заданного системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} -1 &\leq a_1 && \leq 0 \\ -1 &\leq a_1 + a_2 && \leq 0 \\ &\dots && \dots \\ -1 &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_N && \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы  $a \in D_{-1}$ .

**Доказательство.** Существует  $2^N$  способов выбора  $N$  гиперплоскостей с линейно-независимыми образующими векторами из  $2 \times N$  гиперплоскостей, задающих грани многогранника  $P$ . Следовательно, многогранник  $P$  имеет  $2^N$  вершин. Очевидно, что любая точка  $a$  из  $D_{-1}$  принадлежит  $N$  гиперплоскостям, задающим линейно-независимые грани  $P$ . Следовательно, любая точка  $a$  из  $D_{-1}$  есть вершина  $P$ . Так как  $|D_{-1}| = 2^N$ , то существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами многогранника  $P$  и точками множества  $D_{-1}$ , что и требовалось доказать.

**Следствие.** Для того чтобы точка  $a$  являлась вершиной многогранника  $P$ , заданного следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 && \leq 1 \\ 0 &\leq a_1 + a_2 && \leq 1 \\ &\dots && \dots \\ 0 &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_N && \leq 1, \end{aligned} \quad (2')$$

необходимо и достаточно, чтобы  $a \in D_1$ .

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что целочисленное решение системы

$$\begin{aligned} 0 &\leq a'_1 && \leq 1 \\ 1 &\leq a'_1 + a'_2 && \leq 2 \\ &\dots && \dots \\ N - 1 &\leq a'_1 + a'_2 + \dots + a'_N && \leq N, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\beta_k |(d, a - 1)| \leq |(c^j, a' - 1)| \leq \alpha_k |(d, a' - 1)|, \quad j \in I_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3)$$

является решением исходной задачи, сдвинутым на вектор  $1$ , т. е.  $a' = a + 1$ .

Для линеаризации ограничений (3) раскроем модули. Число различных вариантов раскрытия модулей в (3) приведено ниже. Для каждого варианта решим задачу ЦЛП с соответствующими ограничениями и целевой функцией  $\sum_{i=1}^N (1000 - i) \times a'_i \rightarrow \max$ . Если после перебора всех вариантов решение

не найдено, то рассмотрим множество  $D_1$  и, опираясь на следствие из теоремы 1, повторим в этом множестве процесс поиска решения. Если и в этом случае решение не найдено, то можно увеличить число  $N$  и полностью повторить поиск решения.

Пусть  $r$  — число интервалов  $[u_k, v_k)$ , для которых  $\beta_k \neq 0$ , а

$$R = \begin{cases} r, & \text{если } x^* \in [u_k, v_k), \text{ такому, что, } \beta_k \neq 0 \\ r + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что число вариантов раскрытия модулей в (3) равно  $2^R$ . Так как



функция  $P_N(x, a-1)$ , в силу своей непрерывности, не меняет знак в точках  $x_j$  из одного интервала  $I_k = \{j: x_j \in [u_k, v_k), \beta_k \neq 0\}$ , а в неравенствах, отвечающих точкам  $x_j \in I_k = \{j: x_j \in [u_k, v_k), \beta_k = 0\}$ , на раскрытие модулей влияет лишь знак  $P_N(x^*, a-1)$ , то при поиске решения в множестве  $D_{-1}(D_1)$  в худшем случае потребуются решить  $2^R$  задач ЦЛП.

Процедуру синтеза вариантов раскрытия модулей в (3) удобно организовать так, чтобы предыдущий вариант минимально отличался от последующего. С этой целью определим  $R$ -разрядное двоичное число  $B_R$  так, что его  $s$ -й разряд, соответствующий интервалу  $[u_s, v_s)$  с  $\beta_s \neq 0$ , должен быть равен 0, если  $P_N(x_j, a-1) \geq 0$ ,  $x_j \in [u_s, v_s)$ , и 1 в противном случае,  $s = 1, R$ .

Будем считать, что  $B_R[R]$  соответствует интервалу, содержащему точку  $x^*$ .

	$\beta_k = 0$		$\beta_k \neq 0$
	$P_N(x_j, a-1) \geq 0$ ( $B_R[s] = 0$ )	$P_N(x_j, a-1) \leq 0$ ( $B_R[s] = 1$ )	
$P_N(x^*, a-1) \geq 0$	$(c^j - \beta_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (4)	$(c^j + \beta_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j + \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (5)	$(c^j + \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (6)
$P_N(x^*, a-1) \leq 0$	$(c^j + \beta_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j + \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (7)	$(c^j - \beta_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (8)	$(c^j + \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (9)

Варианты раскрытия модуля в  $j$ -м неравенстве системы (3) представлены в таблице. Отметим, что коэффициенты и правые части неравенств систем (4) и (5) (и соответственно (7) и (8)) отличаются друг от друга константами, а знаки соответствующих неравенств в этих системах противоположны.

Процедура перебора вариантов раскрытия модулей в (3) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. В неравенствах, отвечающих точкам из интервалов, которые соответствуют младшим  $R-1$  разрядам двоичного числа  $B_R$ , раскрыть модуль, как в (4).

Шаг 2. Если  $R = r$ , то в неравенствах, отвечающих точкам из интервала, который соответствует  $B_R[R]$ , раскрыть модуль, как в (4). Иначе раскрыть модуль в этих неравенствах, как в (6).

Шаг 3. В остальных неравенствах раскрыть модуль, как в (6).

Шаг 4. Добавить к системе неравенство  $P_N(x^*, a-1) \geq 0$  и поставить ей в соответствие  $B_R = 00 \dots 0$ .

Шаг 5.  $L := 1$ .

Шаг 6.  $B_R := B_R + 1$ .

Шаг 7. Для  $s$  от 1 до  $R$  выполнять

Шаг 7.1.  $\gamma_s := L^*(B_R[s] - B_R[s])$ .

Шаг 7.2. Произвести модификацию всех неравенств, отвечающих точкам интервалов, для которых  $\gamma_s \neq 0$ , добавив к  $i$ -му коэффициенту величину  $2^* \gamma_s \beta_k d_i$ , либо  $2^* \gamma_s \alpha_k d_i$ , а к правым частям  $2^* \gamma_s \beta_k \sum_{i=1}^N d_i$ , либо  $2^* \gamma_s \alpha_k \sum_{i=1}^N d_i$  и поменяв знак на противоположный.

$\sum_{i=1}^N d_i$  и поменяв знак на противоположный.

Шаг 7.3. Конец цикла по  $s$ .

Шаг 8.  $B_R := B_R$ .

Шаг 9. Если  $B_R = 11 \dots 1$ , то перейти к шагу 14.

Шаг 10. Если  $B_R \neq 011 \dots 1$ , то перейти к шагу 6.

Шаг 11. Если  $R = r$ , то в неравенствах, отвечающих точкам из интервала, который соответствует  $B_R[R]$ , перейти от случая (4) к случаю (5), модифицировав их по вышеуказанной схеме. Иначе, поменять в этих неравенствах знак на противоположный.

Шаг 12. В остальных неравенствах поменять знак на противоположны

Шаг 13.  $B_R := 100 \dots 0$ ,  $L := -1$  и перейти к шагу 6.

Шаг 14. Конец процедуры.

Рассмотренный подход был реализован в комплексе программ для автоматизации проектирования фильтров на ПАВ. Численные эксперимент показали его высокую эффективность.

Выражаю благодарность заведующему кафедрой МО САПР Михаил Михайловичу Ковалеву за предоставление темы исследования и консультативную помощь при его проведении.

### Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. 1978. С. 157.

2. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М., 1981. С. 81.

Поступила в редакцию 06.12.91.

УДК 517.948.32:517.544

Т. А. ШЕВИЛА

### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ E

1. Пусть  $D$  – конечная односвязная область, ограниченная контуром Ляпунова  $\Gamma$ . Предполагаем, что начало координат принадлежит области  $D$ . На контуре  $\Gamma$  заданы непрерывные функции  $G(t) \neq 0$  и  $g(t)$ . Задан гомеоморфизм  $\alpha(t)$ , переводящий контур  $\Gamma$  на себя с изменением ориентации и удовлетворяющий условиям: 1)  $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ , 2)  $\alpha'(t)$  удовлетворяет условию Гельдера. На контуре  $\Gamma$  пусть выполнены тождества:

$$G[\alpha(t)]G(t) \equiv 1, \quad (1)$$

$$G(t)g[\alpha(t)] + g(t) \equiv 0. \quad (2)$$

Решим следующую краевую задачу.

Найти все функции  $\Phi(z)$ , аналитические в  $D$ , имеющие почти всюду на  $\Gamma$  угловые предельные значения, удовлетворяющие равенству:

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (3)$$

В окрестности точки  $t_0 \in \Gamma$ , где не существует конечных угловых предельных значений, искомая функция предполагается почти ограниченной, т. е. такой, что для любого  $\epsilon > 0$  выполняется равенство:

$$\lim_{z \rightarrow t_0} (z - t_0)^\epsilon \Phi(z) = 0. \quad (4)$$

Пространство функций, обладающих свойствами искомой функции задачи (3), обозначим через  $E(D)$ .

Для решения используем метод конформного склеивания. Склеивание осуществим с помощью функции  $\xi = \omega(z)$ , свойства которой изучены в [1. С. 152].

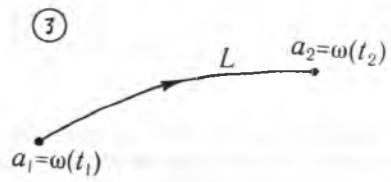
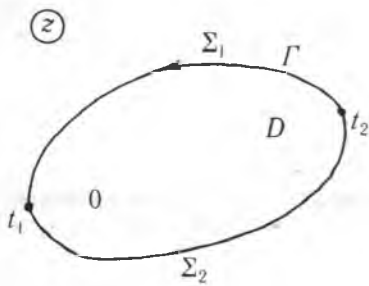
Будем считать, что на контуре  $\Gamma$  задана стандартная ориентация. Неподвижные точки  $t_1$  и  $t_2$  функции  $\alpha(t)$  делят контур  $\Gamma$  на две дуги  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Условимся, учитывая порядок обхода контура, что  $\Sigma_1 = [t_2, t_1]$ , а  $\Sigma_2 = [t_1, t_2]$ . Функция  $\omega(z)$  отобразит область  $D$  на плоскость с разрезом  $L$ , который имеет своими концами образы неподвижных точек (рисунок). Полагая  $t \in \Sigma_1$ , получим  $\alpha(t) \in \Sigma_2$ . Будем считать, что ориентация контура  $L$  индуцируется гомеоморфизмом  $\omega: \Sigma_2 \rightarrow L$ , т. е. ведет от  $a_1 = \omega(t_1)$  к  $a_2 = \omega(t_2)$ . После склеивания точек  $t$  и  $\alpha(t)$  в краевом условии (3) исчезает гомеоморфизм  $\alpha(t)$ , и задача Карлемана сводится к равносильной ей задаче Римана на разомкнутом контуре  $L$ :

$$F^+(\xi) = H(\xi)F^-(\xi) + h(\xi), \quad \xi \in L \quad (5)$$

где обозначено

$$F(\xi) = \Phi[\rho(\xi)], \quad H(\xi) = G[\rho^-(\xi)], \quad h(\xi) = g[\rho^-(\xi)],$$

$z = \rho(\xi)$  – функция обратная к  $\xi = \omega(z)$ .



Отображение области D на плоскость с разрезом L

Можно показать, что если  $\Phi(z)$  принадлежит пространству  $E(D)$ , то  $F(\xi)$  принадлежит пространству  $E[\omega(D)]$  и, наоборот, если  $F(\xi)$  принадлежит пространству  $E[\omega(D)]$ , то  $\Phi(z)$  из пространства  $E(D)$ . Задачи (3) и (5) эквивалентны.

Вычислим индекс коэффициента задачи (5). Обозначим

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_r.$$

Тогда из условия (1) следует, что

$$\arg H(\xi)|_L = -\arg G(t)|_{\Sigma_1} = -\kappa\pi.$$

Из того же равенства (1) видно, что  $H(\xi)$  может принимать в точках  $a_k$ ,  $k = 1, 2$ , лишь значения  $\pm 1$ . Выделим на контуре L однозначную ветвь  $\ln H(\xi)$ . Для этого определим ветвь  $\arg H(\xi)$  в начальной точке контура, полагая

$$\frac{1}{2\pi} \arg H(a_1) = 0, \text{ если } H(a_1) = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \arg H(a_1) = -\frac{1}{2}, \text{ если } H(a_1) = -1.$$

Тогда индекс  $\frac{1}{2\pi} \arg H(\xi)|_L$  будет равен

$$-\frac{\kappa}{2}, \text{ если } H(a_1) = H(a_2) = 1,$$

$$-\frac{\kappa+1}{2}, \text{ если } H(a_1) = -H(a_2) = 1,$$

$$-\frac{\kappa+2}{2}, \text{ если } H(a_1) = H(a_2) = -1.$$

Для общего случая можно записать:

$$\frac{1}{2\pi} \arg H(\xi)|_L = -\frac{\kappa + m_-}{2},$$

где через  $m_-$  обозначено число неподвижных точек  $t_k$ , в которых  $G(t_k) = -1$ .

3. Решим сначала однородную задачу Римана:

$$F_0^+(\xi) = H(\xi) F_0^-(\xi), \xi \in L. \tag{6}$$

Следуя [2], решение ищем в виде:

$$F_0(\xi) = \varphi(\xi) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\tau) d\tau}{\tau - \xi} \right\}, \tag{7}$$

где  $\varphi(\xi)$  – рациональная функция, которая подбирается так, чтобы  $F_0(\xi)$  стала почти ограниченной. Обозначим

$$\Gamma(\xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\tau) d\tau}{\tau - \xi} \right\}.$$

Используя [1. С. 67], опишем поведение функции  $\Gamma(\xi)$  в точках  $a_k$  формулой

$$\Gamma(\xi) = \begin{cases} (\xi - a_1)^{-\frac{1}{2\pi} \operatorname{argH}(a_1)}, & \xi \rightarrow a_1 \\ (\xi - a_2)^{-\frac{1}{2\pi} \operatorname{argH}(a_2)}, & \xi \rightarrow a_2 \end{cases}$$

с точностью до почти ограниченного множителя.

Учитывая выбор однозначной ветви логарифма  $\ln H(\xi)$ , заключаем, что  $\Gamma(\xi)$  в точке  $a_1$  особенностей не имеет. Если  $\kappa + m_- \leq 0$ , то точка  $a_2$  является нулем порядка

$$\left| \frac{\kappa + m_-}{2} \right|$$

функции  $\Gamma(\xi)$ . Из этих рассуждений следует, что  $\varphi(\xi)$  имеет вид:

$$\varphi(\xi) = \frac{P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}(\xi)}{(\xi - a_2)^{-\frac{\kappa+m_-}{2}}}, \quad \text{если } \kappa + m_- \leq 0.$$

$$\varphi(\xi) \equiv 0, \quad \text{если } \kappa + m_- > 0,$$

$P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}$  — многочлен степени  $(-\frac{\kappa+m_-}{2})$  с произвольными коэффициентами. Таким образом, решение задачи (6) имеет вид:

$$F_0(\xi) = \frac{P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}(\xi)}{(\xi - a_2)^{-\frac{\kappa+m_-}{2}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\tau) d\tau}{\tau - \xi} \right\}. \quad (8)$$

Число решений однородной задачи (6)

$$l = 1 - \frac{\kappa + m_-}{2}.$$

Найдем теперь частное решение неоднородной задачи (5). Как известно из [2], для разрешимости краевой задачи (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\int_L h(\xi) d\Psi^+(\xi) = 0, \quad (9)$$

где  $d\Psi^+(\xi)^L$  — предельное значение слева на  $L$  общего решения однородной союзной задачи для дифференциалов, которая формулируется следующим образом.

Найти все дифференциалы  $d\Psi(\xi)$ , аналитические в  $\omega(D)$ , имеющие почти всюду на  $L$  конечные угловые предельные значения, удовлетворяющие равенству:

$$d\Psi^-(\xi) = H(\xi) d\Psi^+(\xi), \quad \xi \in L. \quad (10)$$

Совершенно очевидно, что краевая задача (10) эквивалентна следующей краевой задаче для функций:

$$\psi^-(\xi) = H(\xi) \psi^+(\xi), \quad \xi \in L, \quad (11)$$

где обозначено  $\psi(\xi) = \Psi'(\xi)$ .

На концах контура  $L$  решение задачи (11) допускает бесконечность интегрируемого порядка и  $\psi(\xi) = O(1/\xi^2)$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

Рассуждая так же, как в пункте 3, получим решение задачи (11) в следующем виде: если  $\kappa + m_- > 0$ , то

$$\psi(\xi) = \frac{Q_{\frac{\kappa+m_-}{2}-1}(\xi)}{(\xi - a_2)^{\frac{\kappa+m_-}{2}-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\tau) d\tau}{\tau - \xi} \right\}, \quad (12)$$

если  $\kappa + m_- \leq 0$ , то задача (11) имеет лишь тривиальное решение.

Выполнение условия (9) в случае, когда  $\kappa + m_- \leq 0$ , очевидно.

Рассмотрим случай, когда  $\kappa + m_- > 0$ . Возвращаясь на D, можно равенству (10) придать вид:

$$d\tilde{\Psi}(t) = G(t) d\tilde{\Psi}[\alpha(t)], \quad t \in \Gamma, \quad (13)$$

где

$$d\tilde{\Psi}(t) = d\tilde{\Psi}[\rho(\xi)] = d\Psi(\zeta).$$

Равенство (13) перепишем в виде:

$$\tilde{\psi}(t) = G(t) \alpha'(t) \tilde{\psi}[\alpha(t)], \quad (14)$$

где обозначено  $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\Psi}'(t)$ . Тогда в терминах исходной области D критерий разрешимости задачи имеет вид:

$$\int_{z_2} g[\alpha(t)] \tilde{\psi}_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad (15)$$

где  $\tilde{\psi}_j(t)$  – полная система решений однородной союзной задачи (14).

Предположим, что выполнены условия разрешимости (9). Найдем частное решение неоднородной задачи (5). В качестве канонической рассмотрим функцию

$$X(\xi) = (\xi - a_2)^{\frac{\kappa + m_-}{2}} \Gamma(\xi). \quad (16)$$

Тогда, следуя [1], частное решение задачи (5) имеет вид:

$$F_1(\xi) = \frac{X(\xi)}{2\pi i} \int_L \frac{h(\tau) d\tau}{X^+(\tau) (\tau - \xi)}.$$

Учитывая, что при  $\kappa + m_- \leq 0$  условия разрешимости (15) выполняются всегда, а при  $\kappa + m_- > 0$  для выполнения (15) должны выполняться  $l$  условий, можно сформулировать следующий вывод.

**Т е о р е м а 1.** Индекс краевой задачи (3) равен

$$l - l' = 1 - \frac{\kappa + m_-}{2}.$$

2. Число линейно-независимых решений однородной задачи определяется формулой

$$l = \max \left\{ 0, 1 - \frac{\kappa + m_-}{2} \right\}.$$

3. Общее решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{P - \frac{\kappa + m_-}{2} [\omega(z)]}{(\omega(z) - t_2)^{\frac{\kappa + m_-}{2}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{z_2} \frac{\ln G[\omega(\tau)] \omega'(\tau) d\tau}{\omega(\tau) - \omega(z)} \right\} + \\ & + \frac{\chi[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{z_2} \frac{g[\omega(\tau)] \omega'(\tau) d\tau}{\chi^+[\omega(z)] (\omega(\tau) - \omega(z))}. \end{aligned}$$

4. Критерием разрешимости неоднородной задачи (3) являются следующие равенства:

$$\int_{z_2} g[\alpha(t)] \tilde{\psi}_j(t) dt = 0,$$

где  $\tilde{\psi}_j(t)$  – полная система решений однородной союзной задачи (14).

### Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Зверович Э. И. // УМН. 1971. Т. 26. № 1 (157).

Поступила в редакцию 04.12.91.

## СТРОЕНИЕ АНТИЦЕПЕЙ В НЕКОТОРЫХ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Несколько классических задач дискретной математики связаны с распределением точек целочисленной решетки в выпуклом полиэдре [1]. То обстоятельство, что это пересечение наделено структурой частично упорядоченного множества, оказывается весьма полезным [2]. Одним из вопросов, возникающих при изучении любого класса частично упорядоченных множеств, является вопрос о его цепном и антицепном строении. В этой заметке завершается решение одной задачи, начатое в работе [3]. Полученный результат имеет естественную теоретико-числовую и геометрическую интерпретации.

Пусть  $A = (a_{ij})$  – целочисленная невырожденная матрица с неотрицательными элементами,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – ее столбцы,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha_i < 1, i = \overline{1, n} \right\}$$

– соответствующий  $n$ -мерный параллелепипед. Рассмотрим его пересечение с целочисленной решеткой  $P \cap \mathbb{Z}^n = P_z$ . Мы хотим продолжить изучение вопроса о неприводимости множества  $P_z$ , т. е. когда никакой его элемент не равен сумме других его элементов. Последнее условие эквивалентно тому, что множество  $P_z$  является антицепью в частичном порядке, заданном конусом, порожденным векторами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Ранее рассматривался случай  $\det A = p$  – простое [3]. Было показано, что в этом случае достаточным условием неприводимости является любое из следующих условий:  $a + b = p$ ;  $a = 1$ ;  $b = 1$ , где  $a, b$  – какие-либо элементы последнего столбца канонической матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & b \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix},$$

полученной из матрицы  $A$  домножением слева на некоторую унимодулярную матрицу.

Естественным образом возникает вопрос о необходимости этих условий. Ответ на этот вопрос положителен при  $n = 2$ , отрицателен при  $n \geq 4$  и был открыт при  $n = 3$ . Следующая теорема дает утвердительный ответ в случае  $n = 3$ .

**Теорема.** Множество  $P_z$  при  $n = 3$  является антицепью тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1)  $a + b = p$ ; 2)  $a = 1$ ; 3)  $b = 1$ .

**Доказательство.** Воспользуясь явным описанием множества  $P_z$  [3], легко получить следующую переформулировку доказываемого.

Пусть  $S_p = (\overline{ij})$  – таблица умножения мультипликативной группы конечного простого поля  $F_p$ , т. е.  $1 \leq i, j \leq p-1$ , а черта означает взятие вычета по модулю  $p$ .

Отметим попутно, что  $S_p^T = S_p$  и  $s_{ij} + s_{ip-j} = p$ . Тогда достаточно показать, что подматрица  $S_p(a, b)$  матрицы  $S_p$ , составленная из двух ее столбцов с номерами  $a$  и  $b$ , обладает следующими свойствами. При  $a + b \neq p$  и  $a \neq 1, b \neq p-1, a < b$ , для любых двух строк с номерами  $i, j, i < j$ , матрицы  $S_p(a, b)$  не выполняется неравенство  $(\overline{ia}, \overline{ib}) < (\overline{ja}, \overline{jb})$ . Это утверждение при  $p > 11$  вытекает из следующего более сильного утверждения.

Рассмотрим подматрицу  $S_p^0$  матрицы  $S_p (p \geq 11)$ , составленную из элементов первых  $p' = \frac{p-1}{2}$  строк и столбцов с номерами  $2, \dots, p'$ .

Заменим теперь элементы этой матрицы знаками  $\pm$  в зависимости от того, больше или меньше этот элемент  $\frac{p}{2}$ . Полученную матрицу обозначим через  $S_p^0(\pm)$ . Например,

$$S_{11}^0(+)=\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix}.$$

Тогда достаточно доказать, что у любой подматрицы, составленной из двух столбцов матрицы  $S_p^0(\pm)$ , найдутся строки вида  $(+, +)$ ,  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(-, -)$ .

В свою очередь, пользуясь элементарными теоретико-числовыми соображениями, это утверждение можно переформулировать следующим образом.

Рассмотрим интервал  $(0, \frac{p}{2})$  и два натуральных числа  $a, b \in (0, \frac{p}{2})$ ,  $1 < a < b$ . Разделим этот интервал на  $a$ , а затем на  $b$  частей. Скажем, что сигнатура числа  $k$  равна  $(-, -)$ , если оно лежит на нечетных, считая от начала, интервалах деления. Это условие равносильно тому, что  $\overline{ka}, \overline{kb} < \frac{p}{2}$ . Аналогично определяются сигнатуры  $(-, +)$ ,  $(+, -)$ ,  $(+, +)$ . С учетом всего сказанного ранее, остается доказать, что при  $p > 11$  для любых двух натуральных  $a, b \in (0, \frac{p}{2})$ ,  $1 < a < b$  найдутся четыре натуральных значения  $k \in (0, \frac{p}{2})$  с попарно различными сигнатурами.

Рассмотрим сначала случай  $b = a + 1$ . Поскольку  $a < \frac{p}{2}$  и  $b < \frac{p}{2}$ , то сигнатура числа  $k = 1$  равна  $(-, -)$ , а так как числа отрезков деления отличаются на единицу, то сигнатура числа  $k = \frac{p-1}{2}$  равна либо  $(-, +)$ , либо  $(+, -)$ . Теперь рассмотрим пересечение вторых от начала интервалов деления. Это пересечение – интервал  $(\frac{p}{2a}, \frac{p}{b})$ . Его длина равна  $\Delta = p \frac{2a-b}{2ab}$ . Докажем, что он содержит целую точку. Последнее означает, что реализуется возможность, противоположная исходной, т. е. возможность  $(+, +)$ . Заметим, что замкнутая  $\delta$ -окрестность рациональной точки  $\frac{m}{n}$  при  $\delta = \frac{n-1}{n}$  содержит два целых числа. Пусть теперь

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{b} = \frac{p}{a+1}.$$

Достаточно показать, что

$$\Delta = \frac{p}{a+1} - \frac{p}{2a} \geq \delta = \frac{a}{a+1},$$

что эквивалентно неравенству  $p > \frac{2a^2}{a-1}$ . Воспользуясь тем, что  $b \leq \frac{p-1}{2}$ , имеем  $a \leq \frac{p-1}{2} - 1$ , т. е.  $p \geq 2a + 3$ . Таким образом, достаточно показать,  $2a + 3 \geq \frac{2a^2}{a-1}$ , что справедливо при  $a > 3$ . Осталось рассмотреть два случая:  $a = 2$ ,  $a = 3$ . Если  $a = 2$  или  $a = 3$ , то  $\Delta = \frac{p}{12}$ . Так как для  $p \leq 11$  утверждение проверяется непосредственно, то можно считать, что  $\Delta > 1$ .

Далее рассмотрим пересечение вторых от конца интервалов деления. В этом случае также

$$\Delta = p \frac{2ab-b}{2ab} = \frac{p}{2} \frac{a-1}{a(a+1)}.$$

Достаточно показать, что  $\Delta \geq \frac{2a-1}{2a}$ , что, как нетрудно убедиться, заведомо верно при  $b = p' = \frac{p-1}{2}$ . Случай  $b = p'$  рассмотрим отдельно. Тогда

$a = p' - 1$ . В последнем столбце матрицы  $S_p^0(\pm)$  знаки чередуются, а в предпоследнем рядом стоят два одинаковых знака лишь один раз. Если эта пара знаков расположена не в начале и не в конце, то элементарным перебором убеждаемся в наличии всех четырех возможностей. Покажем теперь, что два одинаковых знака в предпоследнем столбце не могут стоять рядом в начале и в конце столбца. Если бы они стояли в начале, то должно было бы выполняться условие  $\frac{p}{2} \frac{1}{p'-1} > 2$ , что эквивалентно  $p < 6$ . Если же одинаковые знаки стояли бы в конце, то

$$\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \frac{1}{p'-1} < \frac{p-1}{2} - 1,$$

что эквивалентно  $p < 9$ .

Далее рассмотрим случай  $b > a + 1$ . Вернемся к матрице  $S_p^0(\pm)$ . Опишем расположение знаков в ее столбцах. Возьмем произвольный столбец с номером  $a$  и разделим интервал  $(0, \frac{p}{2})$  на  $a$  частей. Заметим, что все точки деления, в силу простоты  $p$ , будут нецелыми. Тогда на  $k$ -м месте в  $a$ -м столбце будет стоять  $+$  или  $-$ , в зависимости от того, какому интервалу, нечетному или четному, считая от начала, принадлежит  $k$ . Поэтому число подряд идущих плюсов или минусов равно  $[\frac{p}{2a}]$

или  $[\frac{p}{2a}] + 1$ , так как число целых точек на интервале длины  $\alpha$  равно

$[\alpha]$  или  $[\alpha] + 1$ . Положим  $[\frac{p}{2a}] = a'$ . Поскольку  $b \geq a + 2$ , то число участков знакопостоянства в  $a$ -м столбце, по крайней мере, на 2 больше, чем в  $b$ -м столбце. Будем также говорить, что точек перемен знака в  $b$ -м столбце, по крайней мере, на две больше. Если две из этих дополнительных точек расположены напротив соседних участков знакопостоянства  $a$ -го столбца, то такой случай назовем каноническим. В каноническом случае, очевидно, встречаются все четыре возможности  $(\pm, \pm)$ . Заметим, что если  $b' < a' - 2$ , то напротив каждого участка знакопостоянства в  $a$ -м столбце есть точка перемены знака  $b$ -го столбца, и, следовательно, этот случай канонический. Поэтому рассмотрим случай  $b' = a' - 1$ ,  $b' = a'$ . Напомним, что в  $a$ -м столбце, априори, участки знакопостоянства могут быть длины  $a'$  и  $a' + 1$  либо только  $a'$ , либо только  $a' + 1$ . Аналогично устроены участки знакопостоянства в  $b$ -м столбце. А в совокупности в обоих этих столбцах, с учетом того, что  $b \geq a + 2$   $a' - 1 \leq b' \leq a'$ , возможны лишь следующие случаи:

$$1) \left( \frac{a', a'+1}{a', a'+1} \right), 2) \left( \frac{a', a'+1}{a'} \right), 3) \left( \frac{a'+1}{a'} \right), 4) \left( \frac{a'+1}{a', a'+1} \right),$$

$$5) \left( \frac{a', a'+1}{a'-1, a'} \right), 6) \left( \frac{a', a'+1}{a'-1} \right), 7) \left( \frac{a'+1}{a'-1, a'} \right), 8) \left( \frac{a'+1}{a'-1} \right),$$

где в числителе указаны возможные длины участков знакопостоянства в  $a$ -м столбце, а в знаменателе — в  $b$ -м столбце.

Случаи 3, 6, 7, 8 допускают единообразное рассмотрение. Рассмотрим первый из них. Если имеет место ситуация  $\left( \frac{a'+1}{a'} \right)$ , то на каждом участке знакопостоянства длины  $a' + 1$  есть точка перемены знака участков знакопостоянства длины  $a'$ , т. е. это — канонический случай.

Перейдем к случаю  $\left( \frac{a', a'+1}{a', a'+1} \right)$ . Очевидно, что участков знакопостоянства длины  $a' + 1$  в  $a$ -м столбце должно быть больше, чем участков длины  $a' + 1$  в  $b$ -м столбце. Значит, на одном из этих участков есть точка перемены знака, соответствующая двум участкам длины  $a'$ . Следовательно, либо это канонический случай, либо  $2a' = a' + 1$ . Поэтому  $a' = 1$ , т. е. 1, 2, 4, 5 сводятся к случаям  $\left( \frac{1,2}{1,2} \right)$ ,  $\left( \frac{1,2}{1} \right)$ ,  $\left( \frac{2}{1,2} \right)$ ,  $\left( \frac{2,3}{1,2} \right)$ . Рассмотрим подробнее, как наиболее сложный, последний из них. С учетом того, что



первый участок знакопостоянства всегда самый короткий, находим, что знаки в этих столбцах в начале могут быть расположены лишь следующим образом:  $(- - + + - - + +)^T$ , либо  $(- - + + - - + +)^T$ . Положим,  $\frac{p}{2b} = 1 + \epsilon$ . Тогда из первой возможности вытекает, что с одной стороны  $2 < 2 + 2\epsilon < 3$ , а с другой  $-6 < 4 + 4\epsilon < 7$ . Из первого неравенства находим, что  $\epsilon < \frac{1}{2}$ , а из второго, что  $\epsilon > \frac{1}{2}$ . Противоречие. Аналогично рассматривается вторая возможность. Здесь, с одной стороны,  $4 < 3 + 3\epsilon < 5$ , а с другой,  $7 < 6 + 6\epsilon < 8$ . В частности, первое неравенство дает  $\epsilon > \frac{1}{3}$ , а второе  $-\epsilon < \frac{1}{3}$ .

Доказанный результат имеет несколько арифметических и геометрических следствий, представляющих и самостоятельный интерес.

*Следствие 1.* При простом  $p \geq 11$  и при любых натуральных  $1 < a, b < \frac{p}{2}$  можно подобрать четыре натуральных значения  $x, 1 < x < \frac{p}{2}$ , таких, что числа  $[\frac{2ax}{p}]$ ,  $[\frac{2bx}{p}]$  будут иметь любую наперед заданную четность.

*Следствие 2.* Множество  $P_2$  при  $\det A = p$ , где  $p$  – простое, а  $n = 3$ , является неприводимым тогда и только тогда, когда все его точки образуют плоскую антицепь.

Авторы благодарят В. М. Шириева за полезное обсуждение работы.

### Список литературы

1. Е мел и ч е в В. А., К о в а л е в М. М., К р а в ц о в М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
2. С т е н л и Р. Перечислительная комбинаторика. М., 1990.
3. П е т р о в а Г. Л. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 4. С. 24.

Поступила в редакцию 28.12.91.

УДК 517.977

Н. В. БАЛАШЕВИЧ

### СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ВХОДАМИ

1. В классе кусочно-непрерывных  $r$ -вектор-функций  $u(t), t \in T = [0, t^*]$ , рассмотрим задачу оптимального управления:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \quad (1)$$

$$d \cdot \leq u(t) \leq d', t \in T,$$

$$(A \in R^{n \times n}, B = (b_1, \dots, b_r) \in R^{n \times r}, c, x \in R^n, u, d, d' \in R^r,$$

$$g \in R^m, H \in R^{m \times n}, \text{rank } H = m \leq n).$$

Будем считать, что из-за возмущений, действующих в реальных условиях, поведение системы описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + w(t), x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $w(t), t \in T^0 = [0, t^0], 0 < t^0 < t^*, w(t) \equiv 0, t \in [t^0, t^*]$ , – неизвестная заранее непрерывная  $n$ -вектор-функция.

Использование программных решений задачи (1) в этих условиях невозможно. Для построения оптимальных управлений типа обратной связи погрузим задачу (1) в семейство задач:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(\tau) = z, \quad (4)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad (5)$$

$$d \leq u(t) \leq d', \quad t \in T, \quad T = [\tau, t^*], \quad (6)$$

зависящее от скаляра  $\tau$  и вектора  $z \in R^n$ .

Кусочно-непрерывную  $r$ -вектор-функцию  $u(t|\tau, z)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющую прямому ограничению (6), назовем допустимым программным управлением, если порожденная ею траектория  $x(t|\tau, z)$ ,  $t \in T$ , уравнения (4) удовлетворяет терминальному ограничению (5).

Допустимое управление  $u^o(t|\tau, z)$ ,  $t \in T$ , называется оптимальным программным управлением, если на соответствующей ему оптимальной траектории  $x^o(t|\tau, z)$ ,  $t \in T$ , критерий качества (3) достигает максимального значения.

Кусочно-непрерывную  $r$ -вектор-функцию  $u^o(\tau, z)$ ,  $\tau \in T$ ,  $z \in R^n$ , будем называть оптимальным управлением типа обратной связи, если на траектории  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in T$ , уравнения  $\dot{x} = Ax + Bu^o(t, x)$ ,  $x(\tau) = z$ , выполняется равенство  $\tilde{x}(t) = x^o(t|\tau, z)$ ,  $t \in T$ , при всех  $\{\tau, z\}$  из области управляемости системы (3) - (6).

Обозначим через  $w^*(t)$ ,  $t \in T^o$ , возмущение, реализовавшееся в некотором конкретном процессе. Замкнем систему (2) оптимальной обратной связью  $u^o(t, x)$  и обозначим через  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ , траекторию замкнутой системы. Функция  $u^*(t) = u^o(t, x^*(t))$ ,  $t \in T$ , представляет управление, циркулирующее в замкнутой системе в рассматриваемом конкретном процессе.

Устройство, которое в каждом конкретном процессе вырабатывает в режиме реального времени управление  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , назовем оптимальным регулятором.

2. Согласно [1], компоненты оптимального программного управления  $u_i^o(t) = u^o(t|\tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in T$ , задачи (3) - (6) имеют вид:

$$u_{i\bar{r}}^o(t) = \frac{d_i + d_{*i}}{2} + \frac{d_i - d_{*i}}{2} \text{sign} \Delta_{i\bar{r}}^o(t), \quad t \in T, \quad i = \overline{1, r},$$

где

$$\Delta_{i\bar{r}}^o(t) = \Delta_i^o(t|\tau, x^*(\tau)) = \psi'(t) b_i, \quad \psi = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - H'y(\tau),$$

$y(\tau) = y(\tau, x^*(\tau))$  - оптимальный вектор потенциалов задачи (3) - (6).

Таким образом, оптимальное программное управление полностью определяется совокупностью

$$t_i^j(\tau), \quad i \in P_j = \{1, 2, \dots, p_j\}, \quad j = \overline{1, r}; \quad y(\tau), \quad (7)$$

состоящей из нулей

$$t_1^j(\tau) < \dots < t_{p_j}^j(\tau), \quad j = \overline{1, r},$$

коуправления  $\Delta_{i\bar{r}}^o(t)$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $t \in T$ , и вектора потенциалов. Элементы (7) удовлетворяют системе уравнений:

$$f(\tau; t_i^j(\tau), i \in P_j, j = \overline{1, r}; x^*(\tau)) = 0,$$

$$q_l(t_i^j(\tau), i \in P_j, j = \overline{1, r}; y(\tau)) = 0, \quad l = \sum_{k=1}^{j-1} p_k + i, \quad (8)$$

где

$$f(\tau; t_i^j, i \in P_j, j = \overline{1, r}; x) = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^{p_j} k_i^j \int_{t_i^j}^{t_{i+1}^j} H^j(t) dt +$$

$$+ HF(t^* - \tau)x - g, \quad t_0^j = \tau, \quad t_{p_j+1}^j = t^*, \quad j = \overline{1, r}; \quad H^j(t) = HF(t^* - t)b_j;$$

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = E, \quad k_i^j = \frac{d_j + d_{*j}}{2} + \frac{d_j - d_{*j}}{2} \text{sign} \Delta_{i\bar{r}}^o(t_i^j + 0);$$

$$q_1(t_i^j, i \in P_j, j = \overline{1, r}; y) = (c' - y'N)F(t^* - t_i^j) b_j, l = \sum_{k=1}^{j-1} p_k + i.$$

Систему уравнений (8) назовем определяющими уравнениями оптимального регулятора.

Численный метод решения определяющих уравнений в режиме реального времени аналогичен методу решения определяющих уравнений оптимального регулятора для системы управления с одним входом [2].

3. Зададим параметр  $\nu > 0$ , характеризующий предельную частоту переключения управлений, вырабатываемых регулятором. Регулятор начинает работу в момент  $t = 0$  со значения  $u^*(0) = u^o(0|0, x_0)$ , где  $u^o(t|0, x_0)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное программное управление задачи (1), которое вычисляется до включения регулятора [1]. Пусть регулятор проработал на промежутке  $[0, \tau[$ . Обозначим через  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, \tau[$ , управление, выработанное регулятором к моменту  $\tau, \tau_j, j = \overline{1, r}$ , — ближайшие слева к  $\tau$  точки разрыва компонент управления  $u_j^*(t)$ ,  $t \in [0, \tau[, j = \overline{1, r}$ . При  $\tau = 0$  считаем

$$\tau_j = -\infty, j = \overline{1, r}.$$

В момент  $\tau$  регулятор выработает управление

$$\begin{cases} u_j^*(\tau_j + 0), & \tau - \tau_j < \nu, \\ u_j^o(\tau|\tau, x^*(\tau)), & \tau - \tau_j \geq \nu, \quad j = \overline{1, r}, \end{cases}$$

где  $u^o(\tau|\tau, x^*(\tau))$  — значение управления, построенного в результате численного решения определяющих уравнений (8).

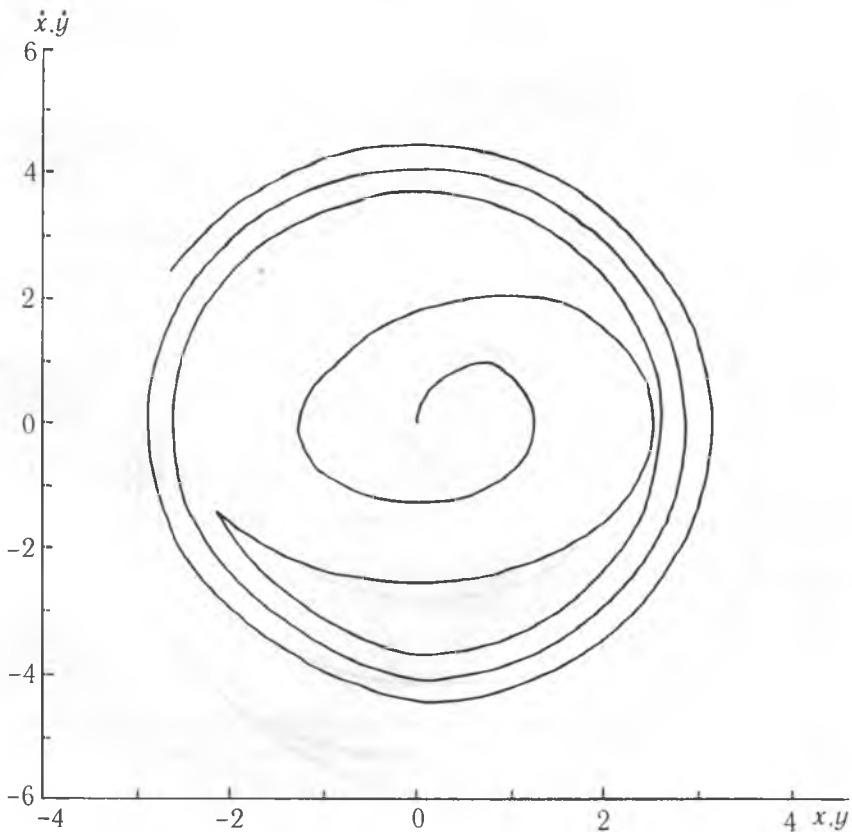


Рис. 1

Действуя таким образом, регулятор в каждом конкретном процессе функционирования системы (2) будет вырабатывать релейное управле-

ние  $u^*(\tau)$ ,  $\tau \in T$ , расстояние между точками переключения компонент которого не меньше чем  $\nu$ .

4. Пример. Рассмотрим задачу об оптимальной встрече двух колебательных систем:

$$\int_0^{t^*} (u(t) + v(t)) dt \rightarrow \min, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{20}, \quad \ddot{y} + 2y = v,$$

$$y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{20}, \quad x(t^*) = y(t^*), \quad \dot{x}(t^*) = \dot{y}(t^*), \quad 0 \leq u(t) \leq 1,$$

$$0 \leq v(t) \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*].$$

В качестве исходных данных возьмем  $t^* = 4\pi$ ,  $x_{10} = x_{20} = 0$ ,  $y_{10} = -264324$ ,  $y_{20} = 2.423175$ . Совокупность точек переключения оптимальных программных управлений:  $t_u^0 = \{1.448149, 2.827007, 7.731335, 9.110192\}$ ,  $t_v^0 = \{2.890995, 3.285176, 7.333878, 7.728058, 11.776761, 12.170942\}$ . Значения управлений на первом интервале:  $u^0(+0) = v^0(+0) = 0$ . Терминальные состояния систем (точка их встречи):  $x^0(t^*) = y^0(t^*) = -2.14653$ ,  $\dot{x}^0(t^*) = \dot{y}^0(t^*) = -1.36613$ . Значение критерия качества:  $J^0 = 3.94026$ . Фазовые траектории невозмущенных систем изображены на рис. 1.

Пусть из-за действия возмущений системы движутся согласно уравнениям  $\ddot{x} + x = u + w_u^*(t)$ ,  $\ddot{y} + 2y = v + w_v^*(t)$ . Зададим

$$w_u^*(t) = 0.5 \sin 0.5t, \quad w_v^*(t) = 0.2 \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq t^0 = 7.5,$$

$$w_u(t) = w_v(t) \equiv 0, \quad 7.5 < t \leq 4\pi.$$

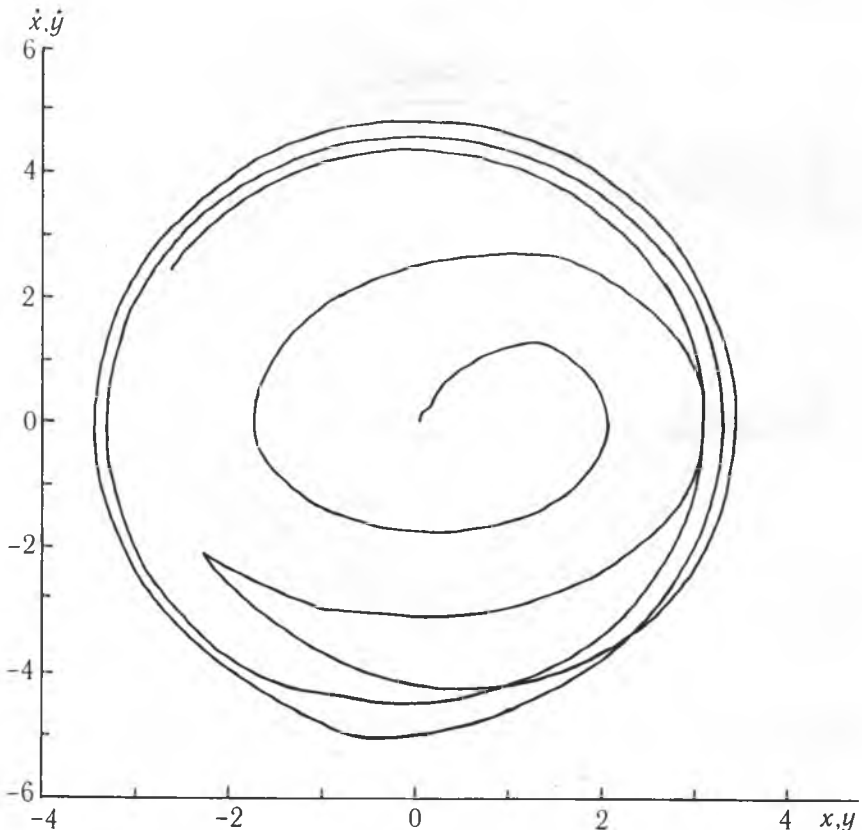


Рис. 2.

Регулятор, построенный по приведенным выше правилам ( $\nu = 0,1$ ), работал управления  $u^*(t), v^*, t \in T$  точками переключения:  $t_u^* = \{1.6, 2.89, 7.3, 9.110673\}$ ,  $t_v^* = \{3.09, 3.36, 7.11, 7.789931, 11.077541, 12.232814\}$ , причем  $u^*(+0) = v^*(+0) = 0$ .

Фазовые траектории возмущенных систем представлены на рис. 2. Системы встретились в точке  $x^*(t^*) = y^*(t^*) = -2.29199$ ,  $\dot{x}^*(t^*) = \dot{y}^*(t^*) = -2.07766$ .

Значение критерия качества оказалось равным  $J^0 = 5.205877$ .

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984. Ч. 2.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991, Т. 320. № 6.

Поступила в редакцию 10.01.91.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ, А. П. СКРИПКО

## ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МНОГОМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим  $q$ -мерное однородное действительное случайное поле

$$X(\bar{t}) = \{X_1(\bar{t}), \dots, X_q(\bar{t})\}, \text{ где } \bar{t} = (t_1, \dots, t_n);$$

$$t_i \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; i = \overline{1, n}.$$

Будем предполагать, что  $MX(\bar{t}) = 0$ .

Смешанный момент  $k$ -го порядка компонент рассматриваемого случайного поля  $X(\bar{t}), t \in Z^n$ , определим следующим образом:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = MX_{a_1}(\bar{t}_1) \dots X_{a_k}(\bar{t}_k), \bar{t}_j \in Z^n, a_j = \overline{1, q}, j = \overline{1, k}. \quad (1)$$

Для определения смешанного семиинварианта  $k$ -го порядка, согласно [3], воспользуемся соотношением:

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_p = k} \prod_{r=1}^p (-1)^{i_r} (i_r - 1)! m_{a_{i_1} \dots a_{i_r}}(\bar{t}_{i_1}, \dots, \bar{t}_{i_r}),$$

где

$$I = \{1, 2, \dots, k\}, I_r \subseteq I, I_r = \{i_1, \dots, i_{i_r}\}, a_{i_j} = \overline{1, q}, j = \overline{1, i_r}, 1 \leq r \leq p,$$

$i_r$  принимает целочисленные значения, а  $\sum_{i_1 + \dots + i_p = k}$  означает суммирование

по всем упорядоченным непересекающимся разбиениям  $I_r$  множества  $I$ . В тех же обозначениях существует и обратное соотношение:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_p = k} \prod_{r=1}^p c_{a_{i_1} \dots a_{i_r}}(\bar{t}_{i_1}, \dots, \bar{t}_{i_r}). \quad (2)$$

Для однородных случайных полей как смешанные моменты, так и смешанные семиинварианты инвариантны по сдвигам:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1 + \bar{u}, \dots, \bar{t}_k + \bar{u}) = m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k),$$

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1 + \bar{u}, \dots, \bar{t}_k + \bar{u}) = c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k),$$

для любых

$$\bar{u} \in R^n, \bar{t}_j \in Z^n, a_j = \overline{1, q}, j = \overline{1, k}.$$

Пусть существует неотрицательная, непрерывная функция

$$f_{a_1 \dots a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k),$$

$$\bar{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}), \lambda_{ji} \in \Pi = [-\pi, \pi], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k},$$

для которой смешанный семиинвариант  $k$ -го порядка имеет следующее представление:

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \int_{\Pi^{kn}} \dots \int f_{a_1 \dots a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^k (\bar{\lambda}_j, \bar{t}_j) \right\} \times \\ \times \delta^* \left( \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \right) d\bar{\lambda}_1 \dots d\bar{\lambda}_k, \quad (3)$$

где

$$(\bar{\lambda}_j, \bar{t}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} t_{ji}, \lambda_{ji} \in \Pi, t_{ji} \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}.$$

Тогда эту функцию будем называть семиинвариантной спектральной плотностью  $k$ -го порядка.

В выражении (3)

$$\delta^*(\bar{\lambda}) = \sum_{\Gamma} \delta(\bar{\lambda} - 2\pi\Gamma), \bar{\lambda} \in \Pi^n, \Gamma \in \mathbb{Z}^n, \quad (4)$$

где  $\delta(\bar{\lambda})$  – дельта-функция Дирака, а  $\sum_{\Gamma}$  означает суммирование по всем

$\Gamma_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = \overline{1, n}$ . Причем  $n$ -мерная  $\delta$ -функция Дирака определяется как произведение одномерных  $\delta$ -функций Дирака.

**Лемма.** Пусть функция  $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ ,  $\bar{x}_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = \overline{1, k}$  –  $2\pi$ -периодична по каждому из аргументов и интегрируема. Тогда справедливо следующее тождество:

$$\int_{\Pi^{kn}} \dots \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \delta^*(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k = \\ = \int_{\Pi^{(k-1)n}} \dots \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1}) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Перепишем левую часть соотношения (5) в следующем виде:

$$\int_{\Pi^{(k-1)n}} \dots \int \left( \int_{\Pi^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \delta^*(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k) d\bar{x}_k \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}.$$

С учетом соотношения (4) интеграл в скобках запишем в виде:

$$\int_{\Pi^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \sum_{\Gamma} \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k - 2\pi\Gamma) d\bar{x}_k.$$

Вынося сумму за знак интеграла и делая замену переменных интегрирования  $\bar{x}_{ki} - 2\pi\Gamma_i = \bar{z}_{ki}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получим:

$$\sum_{\Gamma} \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k + 2\pi\Gamma) \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1} + \bar{z}_k) d(\bar{z}_k + 2\pi\Gamma),$$

$$\prod_{i=1}^n \Pi_{i1}$$

где  $\Pi_{i1} = [-\pi - 2\pi\Gamma_i, \pi - 2\pi\Gamma_i]$ . В силу  $2\pi$ -периодичности функции  $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$  имеем:

$$\sum_{\Gamma} \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k) \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1} + \bar{z}_k) d\bar{z}_k =$$

$$\prod_{i=1}^n \Pi_{i1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k) \delta(\bar{z}_k - (-\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1})) d\bar{z}_k. \quad (6)$$

Используя свойства  $\delta$ -функций, получим, что правая часть равенства (6) равна  $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1})$ . Лемма доказана.

Далее для каждой из компонент случайного поля  $X(\bar{t})$ ,  $\bar{t} \in \mathbb{Z}^n$ , будем рассматривать выборки наблюдений  $X_{a_j}(\bar{t})$ , где

$$t_i = 0, T_{a_j} - 1, i = \overline{1, n},$$

$T_{a_j}$  – число наблюдений,  $a_j = \overline{1, q}$ .

Введем в рассмотрение статистику, которую назовем модифицированным конечным преобразованием Фурье наблюдений случайного поля  $X(\bar{t})$ :

$$d_X(\bar{\lambda}) = \{d_1(\bar{\lambda}), \dots, d_q(\bar{\lambda})\},$$

где

$$d_a(\bar{\lambda}) = \left[ (2\pi)^n \sum_{\bar{t}} h_a^2\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \sum_{\bar{t}} h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \exp\{-i(\bar{\lambda}, \bar{t})\} X_a(\bar{t}), \quad (7)$$

$\bar{\lambda} \in \prod \mathbb{R}^n$ ,  $h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right)$  – окно просмотра данных,  $\frac{\bar{t}}{K_{T_a}} = \left(\frac{t_1}{K_{T_a}}, \dots, \frac{t_n}{K_{T_a}}\right)$ ,  $K_{T_a}$  – неотрицательное целое число, зависящее от числа наблюдений  $T_a$ , а  $\sum_{\bar{t}}$  везде далее (если не указано другое) будет означать суммирование по всем

$$t_i = \overline{0, K_{T_a} - 1}, i = \overline{1, n}, a = \overline{1, q}.$$

Далее будем пользоваться обозначением:

$$\varphi_a(\bar{\lambda}) = \sum_{\bar{t}} h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \exp\{-i(\bar{\lambda}, \bar{t})\}, \text{ где } \bar{\lambda} \in \prod \mathbb{R}^n, a = \overline{1, q}, \quad (8)$$

и будем записывать  $T_j = T_{a_j}$ ,  $a_j = \overline{1, q}$ .

**Теорема.** Справедливо следующее тождество:

$$\text{cum}\{d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k)\} = \int_{\prod^{(k-1)n}} \dots \{f_{a_1} \dots f_{a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})\} \times \\ \times \Phi_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} - \bar{\lambda}_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1},$$

где

$$\Phi_{a_1 \dots a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) = \left[ (2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2\left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}}\right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2\left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}}\right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \prod_{j=1}^{k-1} \varphi_{a_j}(\bar{\lambda}_j) \times \overline{\varphi_{a_k}(\bar{\lambda}_k)},$$

$d_{a_j}(\bar{\lambda}_j)$  и  $\varphi_{a_j}(\bar{\lambda}_j)$  задаются соотношениями (7) и (8) соответственно,

$$\bar{\lambda}_j \in \prod \mathbb{R}^n, t_{ji} = \overline{0, K_{T_j} - 1}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}.$$

**Доказательство.** Подставим развернутые выражения для модифицированного конечного преобразования Фурье, согласно (7), и воспользуемся одним из свойств кумулянтов, приведенных в работе [1]:

$$\text{cum}(k_1 X_1, \dots, k_r X_r) = k_1 \dots k_r \times \text{cum}(X_1, \dots, X_r),$$

где  $k_j, j = \overline{1, r}$  – постоянные, тогда

$$\begin{aligned} & \text{cum} \{ d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k) \} = \\ & = [ (2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) ]^{-1/2} \times \\ & \times \text{cum} \left\{ \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots \right. \\ & \left. \dots, \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} X_{a_k}(\bar{t}_k) \right\}. \end{aligned}$$

Из свойств кумулянтов:

$$\text{cum}(X_1 + Y, X_2, \dots, X_r) = \text{cum}(X_1, X_2, \dots, X_r) + \text{cum}(Y, X_2, \dots, X_r),$$

поэтому далее запишем:

$$\begin{aligned} & [ (2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) ]^{-1/2} \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} \times \dots \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} \times \text{cum} \{ X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots, X_{a_k}(\bar{t}_k) \}, \end{aligned}$$

но

$$\text{cum} \{ X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots, X_{a_k}(\bar{t}_k) \} = c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k).$$

Воспользуемся представлением (3) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, запишем:

$$\begin{aligned} & [ (2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) ]^{-1/2} \times \\ & \times \int \dots \int_{\Pi^{kn}} f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ i(\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} \times \\ & \dots \times \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ i(\bar{x}_k - \bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} \times \delta^* \left( \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k. \end{aligned}$$

Перепишем выражение, используя обозначение (8):

$$\begin{aligned} & [ (2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left( \frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) ]^{-1/2} \times \\ & \times \int \dots \int_{\Pi^{kn}} f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \times \\ & \times \delta^* \left( \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \right) \prod_{j=1}^k \varphi_{a_j}(\bar{x}_j - \bar{\lambda}_j) \times d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k. \end{aligned}$$

Применяя лемму и обозначение

$$f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1}) = f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}),$$

получим

$$\text{cum} \{ d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k) \} =$$



$$\begin{aligned}
&= \left[ (2\pi)^{kn} \sum_{t_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{t_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{t_k} h_{a_k}^2 \left( \frac{t_k}{K_{T_k}} \right) \right]^{-1/2} \times \\
&\times \int_{\prod^{(k-1)n}} \dots \int f_{a_1} \dots a_k (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} \varphi_{a_j} (\bar{x}_j - \bar{\lambda}_j) \times \\
&\times \varphi_{a_k} \left( \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1} = \int_{\prod^{(k-1)n}} \dots \int f_{a_1} \dots a_k (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \times \\
&\times \Phi_{a_1} \dots a_k (\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} - \bar{\lambda}_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

*Следствие 1.* Для модифицированного конечного преобразования Фурье, заданного соотношением (7), выполняется:

$$\text{cov} \{ d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), d_{a_2}(\bar{\lambda}_2) \} = \int_{\Pi^n} f_{a_1 a_2}(\bar{x}) \Phi_{a_1 a_2}(\bar{x} - \bar{\lambda}_1, \bar{x} - \bar{\lambda}_2) d\bar{x},$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{a_1 a_2}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) &= \left[ (2\pi)^{2n} \sum_{t_1} h_{a_1}^2 \left( \frac{t_1}{K_{T_1}} \right) \sum_{t_2} h_{a_2}^2 \left( \frac{t_2}{K_{T_2}} \right) \right]^{-1/2} \times \\
&\times \varphi_{a_1}(\bar{\lambda}_1) \overline{\varphi_{a_2}(\bar{\lambda}_2)},
\end{aligned}$$

где

$$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \in \Pi^n, t_{1i} = \overline{0, K_{T_1} - 1}, t_{2i} = \overline{0, K_{T_2} - 1}, i = \overline{1, n},$$

функции  $\varphi_{a_1}(\cdot)$ ,  $\varphi_{a_2}(\cdot)$  задаются соотношением (8),  $a_1, a_2 = \overline{1, q}$ .

*Следствие 2.* Для модифицированного конечного преобразования Фурье  $d_a(\bar{\lambda})$  выполняется:

$$Dd_a(\bar{\lambda}) = \int_{\Pi^n} f_{aa}(\bar{x}) \Phi_a(\bar{x} - \bar{\lambda}) d\bar{x}, \text{ где } \bar{\lambda} \in \Pi^n,$$

$$\Phi_a(\bar{\lambda}) = \left[ (2\pi)^n \sum_t h_a^2 \left( \frac{t}{K_T} \right) \right]^{-1} \times |\varphi_a(\bar{\lambda})|^2.$$

$$t_i = \overline{0, K_T - 1}, i = \overline{1, n}, \varphi_a(\bar{\lambda})$$

определяется соотношением (8).

### Список литературы

1. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория. М., 1980.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. К. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
3. Журбенко И. Г., Труш Н. Н. // Лит. мат. сб. 1979. Т. 19. № 1. С. 65.
4. Леонов В. П., Ширяев А. Н. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. № 3. С. 342.

Поступила в редакцию 13.01.92.



УДК 517.948

В. В. КАШЕВСКИЙ

## ИНТЕГРАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В тезисах автора [1] получено интегральное представление

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \ln|x-t|}{x-t} dx = -\frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \ln|1-t| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dx}{x-t} -$$

$$- \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-t} \int_{-1}^x \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x} dy + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|}{x-t} dx. \quad (1)$$

Из (1) нетрудно получить

$$(S_{\ln} \varphi)(t) = -\frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \ln(1-t) \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{x-t} -$$

$$- \int_0^1 \frac{(R\varphi)(x)}{x-t} dx + \int_0^1 \ln \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-t} dx, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$(S_{\ln} \varphi)(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) \ln|x-t|}{x-t} dx, \quad (3)$$

$$(R\varphi)(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{x-t} dx, \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Чтобы узнать свойства сингулярного оператора (2), нужно изучить оператор  $R$ .

*Определение* [2. С. 24]. Функция  $f$ , заданная на  $[0,1]$ , принадлежит классу  $H^{k,n}([0,1]) = H^{k,n}$ , если найдется  $A > 0$ , что

$$|f(x+h) - f(x)| \leq A |h|^k (\ln|h|^{-1})^n, \quad |h| < \frac{1}{2}$$

для всех  $x, x+h \in [0,1]$ . Здесь  $0 < k \leq 1, n \geq 0$ .

*Замечание 1.* [2. С. 24] Если ввести в  $H^{k,n}$  норму

$$\|f\|_{k,n} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x, x+h \in [0,1]} |f(x+h) - f(x)| \cdot |h|^{-k} (\ln|h|^{-1})^{-n},$$

то  $H^{k,n}$  будет банаховым пространством ( $H^{k,0} = H^k$ ).

**Теорема.** Оператор  $R$ , задаваемый формулой (4), ограничен из пространства  $H^k$  в пространство  $H^{k,1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $0 < h < \frac{1}{2}; x, x+h \in [0,1]$ . Тогда

$$(R\varphi)(x+h) - (R\varphi)(x) = \int_x^{x+h} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(\tau)}{x+h-\tau} d\tau + \int_0^x \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{x+h-\tau} d\tau +$$

$$+ \int_0^x (\varphi(x) - \varphi(\tau)) \left( \frac{1}{x+h-\tau} - \frac{1}{x-\tau} \right) d\tau \leq I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим  $I_1, I_2, I_3$ .

$$|I_1| \leq \|\varphi\|_k \int_x^{x+h} (x+h-\tau)^{k-1} d\tau \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

$$|I_2| \leq \|\varphi\|_k h^k \int_0^x \frac{d\tau}{x+h-\tau} \leq C \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

$$|I_3| \leq \|\varphi\|_k h^k \int_0^x \frac{(x-\tau)^{k-1}}{x+h-\tau} d\tau \leq h^k \|\varphi\|_k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{t+1} dt \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

Из этих оценок следует, что

$$|(R\varphi)(x+h) - (R\varphi)(x)| \leq C_1 \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

Теорема доказана.

*Замечание 2.* Можно показать, что оператор  $R$  не ограничен в пространстве  $H^k$ .

*Замечание 3.* Свойства особого интеграла типа Коши в гильбертовых пространствах хорошо изучены. Поэтому из формулы (2) можно, учитывая доказанную выше теорему, выяснить действие оператора (3) в пространствах  $H^k$ .

### Список литературы

1. Кашевский В. В. Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989. С. 79.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 18. 06.91.

УДК 539.375

В. В. МИТЮШЁВ

## УЧЕТ РАЗНОСТИ ДЛИН БЕРЕГОВ ТРЕЩИН В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В математической теории трещин плоские трещины рассматриваются как разрезы на плоскости с берегами одинаковой длины (см. напр. [1,2]). Об измерении берегов трещины говорилось в [2. С. 34, 117]. Если рассматривать нормальный отрыв, то, естественно, малую разность длин берегов трещины можно положить равной нулю. Однако в случае поперечного сдвига даже незначительная разность длин берегов трещины может сыграть решающую роль в механизме разрушения.

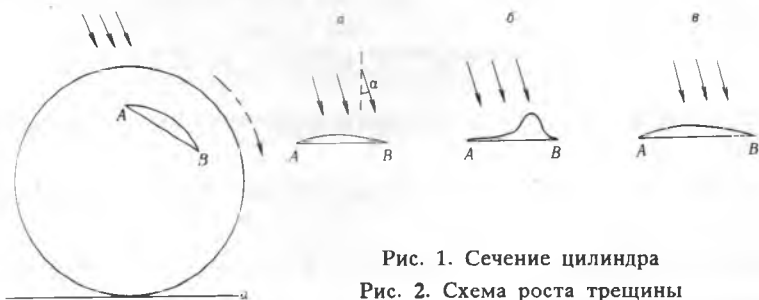


Рис. 1. Сечение цилиндра

Рис. 2. Схема роста трещины

Рассмотрим длинный цилиндр с трещиной (сечение изображено на рис. 1), который катится по поверхности  $a$  под действием сил, приложенных сверху цилиндра. Если верхний берег трещины длиннее нижнего, то разрушение будет происходить по схеме, изображенной на рис. 2.

Для математического моделирования описанной ситуации применим

теорию краевых задач аналитических функций [3]. Рассматриваем плоскую стационарную задачу в рамках линейной теории упругости. Пусть на комплексной плоскости  $w$  имеется контур  $L_w$ , изображенный на рис. 2, б. Нижний берег является отрезком  $[-1; +1]$  действительной оси, описание верхнего берега будет дано через отображающую функцию. Конформное отображение единичного круга  $|z| < 1$  на область  $D$ , внешность контура  $L_w$  строится по схеме [4]:

$$w = w(z) = \frac{1}{2} \left[ e^{\epsilon} z \left( 1 - \frac{\gamma}{2} - \gamma z \right) + \frac{e^{-\epsilon}}{z \left( 1 - \frac{\gamma}{2} - \gamma z \right)} \right],$$

где  $\epsilon = \frac{\pi}{5}$ ,  $\gamma = 0,12$ .

Пусть область  $D$  заполнена упругим материалом. Для упрощения математической модели задачи считаем, что напряжения на контуре  $L_w$  равны нулю, т. е. не учитываем взаимодействие между берегами трещины. На бесконечности заданы сжимающие напряжения  $(N_1, N_2)$ , направленные под углом  $\alpha$  к оси  $OX$ . В соответствии с [3] требуется найти функции  $\varphi(w)$  и  $\psi(w)$ , аналитические в области  $D$ , по краевому условию

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\varphi(t)} = 0, \quad t \in L_w. \quad (1)$$

Функции  $\varphi'(w)$  и  $\psi(w)$  непрерывны в замыкании области  $D$ , за исключением точек  $w = \pm 1$ , где возможны интегрируемые особенности. На бесконечности имеем следующие условия [3. С. 124]:

$$\varphi(w) = \frac{w}{4} (N_1 + iN_2) + \varphi_0(w),$$

$$\psi(w) = -\frac{w}{2} (N_1 - iN_2) e^{-2\epsilon} + \psi_0(w), \quad w \rightarrow \infty.$$

Функции  $\varphi_0(w)$  и  $\psi_0(w)$  аналитичны в точке  $w = \infty$  и обращаются там в нуль. После конформного отображения области  $D$  на круг  $|z| < 1$  задача (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)} + \frac{\overline{w\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}{w'\left(\zeta\right)} \varphi_1'(\zeta) + \psi_1(\zeta) &= \\ &= \frac{1}{2} (N_1 - iN_2) e^{-2\epsilon} w(\zeta) - \frac{1}{2} N_1 \overline{w\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad |\zeta| = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_1(z) = \varphi_0(w)$ ,  $\psi_1(z) = \psi_0(w)$ . Коэффициент при  $\varphi_1'(\zeta)$  в краевом условии (2) является рациональной функцией, поэтому применима схема [3] к задаче (2). После решения этой задачи коэффициенты интенсивности  $K_I$  и  $K_{II}$  вычисляются по формуле [6. С. 33]:

$$K_I^{(1,2)} - iK_{II}^{(1,2)} = \frac{2\sqrt{\pi} \varphi_1'(\zeta_{1,2})}{\sqrt{w''(\zeta_{1,2})}},$$

где

$$\zeta_1 = e^{-\epsilon} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) + \gamma e^{2\epsilon}, \quad \zeta_2 = -e^{-\epsilon} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) + \gamma e^{2\epsilon}$$

— образы точек  $w = +1$  и  $w = -1$  соответственно при конформном отображении,

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{2\epsilon + \epsilon}}{2 - \gamma} + \zeta e^{\epsilon} (2 - \gamma - 2\gamma\zeta) + \frac{\gamma^2 \zeta e^{-\epsilon}}{2 - \gamma - 2\gamma\zeta} \right\} + \frac{q\zeta}{1 - \zeta_0\zeta},$$

постоянная  $q$  определяется по схеме [3],  $\zeta_0 = \gamma \left( -\frac{\gamma}{2} \right)^{-1}$ . Нарис. 3 приведены графики функций

$$p_{1,2}(\alpha) = \frac{K_{Ic}}{K_I^{(1,2)}(\alpha) \sqrt{1}} \cdot \left[ f_0 \left( \frac{K_{II}^{(1,2)}(\alpha)}{K_I^{(1,2)}(\alpha)} \right) \right]^{-1},$$

где

$$f_0(\lambda) = 4\sqrt{2} \lambda^3 \frac{1 + 3\sqrt{1 + 8\lambda^2}}{(12\lambda^2 + 1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2})^{3/2}},$$

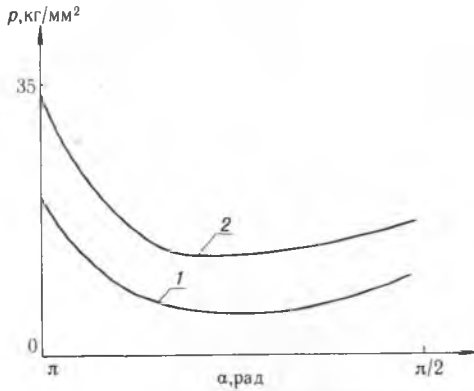


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от направления сжимающей силы (1—в точке В, 2—в точке А)

$K_{1c} = 273 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^{3/2}}$  — вязкость разрушения стали [1. С. 607];  $l = 1\text{мм}$  — половина длины трещины;  $(N_1, N_2) = (-p_{1,2}(\alpha), 0)$ ,  $p_{1,2}(\alpha)$  — критическая нагрузка на бесконечности, при которой происходит хрупкое разрушение [1. С. 151] в точках В и А соответственно. Графики показывают, что разрушение происходит в точке В.

#### Список литературы

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., 1974.
2. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособ. Киев, 1988. Т. 1.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
5. Черепанов Г. П. // ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 82.
6. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособ. Киев, 1988. Т. 2.

Поступила в редакцию 30.09.91.

УДК 517.538.3

И. Н. БРУЙ

### О КЛАССАХ НАСЫЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФАБЕРА

Пусть метод суммирования  $\mu$  определен последовательностью  $\mu_m(\xi)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_0$ , функций, заданных на некотором множестве  $\Xi$  изменения параметра  $\xi$  с точкой сгущения  $\omega$ . Например, для метода Фейера  $\mu_m(\xi) = \max(0; 1 - m(\xi + 1)^{-1})$ , где параметр  $\xi$  пробегает множество  $\Xi = \mathbb{Z}_0$  с точкой сгущения  $\omega = +\infty$ , а для метода Абеля — Пуассона  $\mu_m(\xi) = \xi^m$ , где множество  $\Xi = [0; 1[$  и точка сгущения  $\omega = 1$ .

И пусть функции  $\mu_m(\xi)$  удовлетворяют условию

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad 1 - \mu_m(\xi) = \left( \sum_{l=0}^m b_l(\mu) \cdot m^l \right) \cdot \epsilon_m(\xi) + o(\epsilon_m(\xi)), \quad \xi \rightarrow \omega, \quad (1)$$

где число  $l \in \mathbb{N}$ , коэффициент  $b_l(\mu) \neq 0$  и положительная функция  $\epsilon_m(\xi)$  монотонно стремится к нулю при  $\xi \rightarrow \omega$ .

**Теорема.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — жорданова область со спрямляемой границей. И пусть метод суммирования  $\mu$  рядов Фабера

$$f \sim \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(f; \bar{G}) p_m(\bar{G}; z) \quad (2)$$

(определение последних см. в [1. С. 366] или [2. С. 107]) удовлетворяет условию (1). Тогда:

# Нашы юбіляры



## АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ КОМЯК



Исполнилось 60 лет со дня рождения одного из крупнейших специалистов в области спектроскопии комплексных соединений урана, заведующего кафедрой лазерной физики и спектроскопии, доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Ивановича Комяка.

Анатолий Иванович Комяк родился 20 ноября 1932 г. в д. Живоглодовичи Старобинского района Минской области в крестьянской семье. После окончания в 1956 г. физико-математического факультета Белгосуниверситета некоторое время работал учителем, а потом директором школы в Старобинском районе.

На физическом факультете Белгосуниверситета Анатолий Иванович начал работать в 1966 г. в должности старшего преподавателя кафедры спектрального анализа. В 1968 г. он избирается доцентом этой же кафедры. В 1970 г. А. И. Комяк возглавил кафедру физики, которая в декабре 1973 г. была преобразована в кафедру биофизики. В январе 1977 г. решением ВАК СССР А. И. Комяку присуждается ученое звание профессора.

С ноября 1979 г. Анатолий Иванович — заведующий кафедрой спектрального анализа, которая в 1989 г. была переименована в кафедру лазерной физики и спектроскопии.

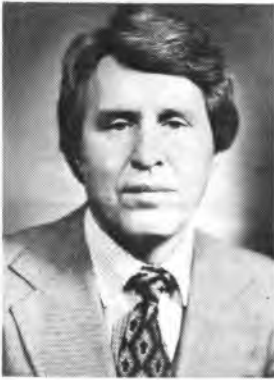
Научная деятельность А. И. Комяка началась в 1959 г. в Институте математики и вычислительной техники АН БССР. После перехода в проблемную лабораторию Белгосуниверситета А. И. Комяк под руководством профессора Л. В. Володько приступил к исследованиям спектроскопии комплексных соединений урана. В 1967 г. Анатолий Иванович успешно защитил кандидатскую диссертацию, а в 1975 г. — докторскую диссертацию по этой тематике.

Круг научных интересов профессора А. И. Комяка достаточно широк. Под его руководством ведутся работы в области тонкоструктурной спектроскопии сложных органических молекул в сверхзвуковой струе; лазерной спектроскопии сложных органических молекул и их комплексов с высоким временным разрешением, колебательной спектроскопии пьезо- и сегнетоэлектриков. А. И. Комяк является автором более ста научных работ. Его монография «Ураниловые соединения» является настольной книгой всех ученых, научная деятельность которых связана со спектральными исследованиями комплексных соединений урана. Более двадцати аспирантов Анатолия Ивановича успешно защитили кандидатские диссертации.

Многолетняя плодотворная работа А. И. Комяка в области науки и высшего образования высоко оценена правительством республики и руководством университета, он неоднократно награждался грамотами ректората и Министерства образования республики. В течение многих лет А. И. Комяк является ответственным редактором журнала «Вестник БГУ», сер. 1.

С годами не ослабевает творческая и общественная активность Анатолия Ивановича. Глубокое уважение вызывает его высокая восприимчивость к новым идеям. Свой юбилей Анатолий Иванович встречает в расцвете творческих сил, полный новых планов и замыслов. Друзья, коллеги и многочисленные ученики сердечно поздравляют Анатолия Ивановича с шестидесятилетием и желают ему крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих успехов.

## СТЕПАН ГРИГОРЬЕВИЧ МУЛЯРЧИК



8 января 1993 г. исполнилось 50 лет со дня рождения декана факультета радиофизики и электроники, доктора технических наук, профессора Степана Григорьевича Мулярчика.

Вся деятельность С. Г. Мулярчика связана с Белгосуниверситетом, которому он отдает свой талант и опыт педагога, целеустремленность ученого и исследователя. Преданность науке, исключительная требовательность к себе, большая внутренняя культура позволили ему пройти путь от студента до профессора, блестящего ученого — создателя научной школы.

Окончив в 1966 г. Белгосуниверситет, С. Г. Мулярчик работал ассистентом кафедры электронных математических машин физического факультета. В декабре 1967 г. направляется в целевую аспирантуру МВТУ им. Н. Баумана, которую успешно оканчивает в 1970 г., защитив кандидатскую диссертацию на тему «Разработка и исследование методов и алгоритмов расчета интегральных схем на ЦВМ».

В 1971 г. С. Г. Мулярчик возвращается в Белгосуниверситет, где работает младшим научным, затем старшим научным сотрудником, старшим преподавателем, доцентом кафедры радиофизики; с 1984 г. — заведующий кафедрой электронных математических машин, а с 1990 г. — декан факультета радиофизики и электроники.

Педагогическую деятельность С. Г. Мулярчик успешно сочетает с плодотворной научной работой в области математического моделирования полупроводниковых структур и интегральных схем. Предложенные им методы и алгоритмы численного моделирования микроэлектронных структур, расчета параметров полупроводниковых элементов, автоматизированного схемотехнического проектирования БИС нашли отражение более чем в 100 печатных работах, в том числе в четырех монографиях: «Экстремальные задачи при схемотехническом проектировании в электронике», «Интегральная схемотехника», «Система автоматизации анализа и расчета схем электронной аппаратуры», «Численное моделирование микроэлектронных структур». Возглавляемый С. Г. Мулярчиком коллектив за короткий срок вырос в научную школу, получившую признание в ведущих научных центрах бывшего СССР и за рубежом. Созданные учеными этой школы программные комплексы для систем автоматизированного проектирования микроэлектронных структур успешно используются на предприятиях электронной и радиотехнической промышленности. На базе его научной группы создана госбюджетная научно-исследовательская лаборатория вычислительных систем.

Логическим завершением интенсивной научной деятельности явилась защита С. Г. Мулярчиком в 1988 г. докторской диссертации на тему «Теория, методы, программные средства автоматизированного проектирования элементов микроэлектронных структур». В этом же году ему было присвоено ученое звание профессора кафедры электронных математических машин.

Большое внимание профессор С. Г. Мулярчик уделяет совершенствованию учебного процесса на кафедре и факультете. По его инициативе и при непосредственном участии коренному пересмотру подверглись учебные программы и планы подготовки специалистов в области информатики, ставится ряд современных учебных курсов, начинается подготовка студентов по специализации «Микропроцессоры и микропроцессорные системы».

Став деканом факультета в нелегкое для науки и образования время, С. Г. Мулярчик прилагает плодотворные усилия по определению стратегии развития факультета, укреплению его материальной базы, переходу на двухуровневую систему образования, координации научных направлений.

Степан Григорьевич Мулярчик был членом комиссии «Радиоэлектронная и вычислительная техника» Координационного совета Госкомобразования СССР по проблеме САПР. С 1991 г. является председателем специализированного Совета по защите кандидатских диссертаций, членом редколлегии журнала «Вестник БГУ», сер. 2, входит в состав ряда координационных советов по республиканским научным программам.

Коллектив факультета радиофизики и электроники сердечно поздравляет Степана Григорьевича с юбилеем, желает крепкого здоровья, большого личного счастья, успехов в многогранной деятельности.

# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

<i>Абакумов Е. Г., Ушаков Е. А.</i> Метод движений, ассоциированных с циклом, как теория возмущений . . . . .	3
<i>Буров Л. И., Жвалевский А. В., Клищенко А. П., Козлов И. Н., Листопад А. П.</i> Особенности околопороговой генерации растворов красителей при поляризованной накачке . . . . .	6
<i>Аддаси Джихад (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В.</i> Запись ОВФ-голограмм на переходах в возбужденном канале красителя родамин 6Ж . . . . .	9
<i>Ермаков В. В., Сташкевич И. В.</i> Учет анизотропии при расчете оптических систем по формулам Фелера . . . . .	12
<i>Бринкевич Д. И., Петров В. В., Тужик Ю. Т.</i> Влияние преципитатов кислорода на процессы генерации термодонов в кремнии . . . . .	16
<i>Дроздовский А. В., Тралле И. Е., Федотов А. К.</i> Бистабильность барьера на границе зерен в полупроводнике . . . . .	18
<i>Комяк А. И., Серафимович А. И., Шашков С. Н.</i> Спектроскопия твердофазных реакций с участием солей уранила и щелочно-галогидных соединений . . . . .	23

## МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Малинин Д. А.</i> О целочисленных представлениях конечных нильпотентных групп	27
<i>Арсеньева О. Е.</i> Спинорная геометрия алгебры обобщенных кватернионов . . . . .	29
<i>Пеуен Ба Тхи (СРВ), Габасов Р.</i> Критерий локальной оптимальности в терминальной задаче импульсного управления нелинейной динамической системой . . . . .	34
<i>Абдурахимов А. О.</i> Оптимальное управление непрерывной системой с неопределенностью в критерии качества . . . . .	38
<i>Макаров Е. К., Мироненко С. В.</i> Об оценке старшего характеристического показателя уравнения Хилла с нечетным периодическим коэффициентом . . . . .	42
<i>Наумович Н. Ф.</i> Преобразование, сохраняющее отображение за период . . . . .	45
<i>Запорожец А. А.</i> Применение целочисленного линейного программирования при проектировании фильтров на поверхностных акустических волнах . . . . .	47
<i>Шевила Т. А.</i> Краевая задача Карлемана в пространстве $E$ . . . . .	50
<i>Матвеев Г. В., Петрова Г. Л.</i> Строение антицепей в некоторых полиэдральных множествах . . . . .	54
<i>Балашевич Н. В.</i> Синтез оптимальных систем со многими входами . . . . .	57
<i>Труш Н. Н., Скрипко А. П.</i> Вычисление моментов модифицированного конечного преобразования Фурье многомерных однородных полей . . . . .	61

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Кашевский В. В.</i> Интегрально-разностный оператор в гильбертовских пространствах . . . . .	66
<i>Митюшёв В. В.</i> Учет разности длин берегов трещин в механике разрушения . . . . .	67
<i>Бруй И. Н.</i> О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера . . . . .	69

## НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Анатолий Иванович Комяк . . . . .	71
Степан Григорьевич Муляричк . . . . .	72



## УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1992 г. в «Вестнике Белорусского  
государственного университета», серия 1  
(физика, математика, механика)

### ФИЗИКА

- Андреев А. Д., Борздов В. М., Дитковский В. М.* Устройство для измерения концентрации примесей в МОП-ПТ . . . . . 1 27
- Бакановская Л. Н., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. Н.* Преобразователь двоично-десятичного кода в двоичный на основе D-триггеров . . . . . 3 38
- Борщевский В. В., Бринкевич Д. И., Мераши Ф. (САР), Петров В. В.* Взаимодействие золота и кислорода в монокристаллическом кремнии . . . . . 2 41
- Войтович Д. А., Машко В. В.* О характеристиках интерферометра Фабри-Перо с изменяющейся базой . . . . . 1 13
- Горбацевич С. К., Гулис И. М., Рамма Яшвантрао (Маврикий).* Влияние безызлучательного индуктивно-резонансного переноса энергии электронного возбуждения на спектрально-кинетические характеристики замедленной флуоресценции твердых растворов профлавина . . . . . 2 28
- Горбацевич С. К., Гулис И. М.* Фотоиндуцированный Штарк-эффект в молекулярных ансамблях . . . . . 3 23
- Джихад Абдаси (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В.* Фазовый отклик растворов красителей, индуцируемый переходами между возбужденными электронными состояниями . . . . . 2 11
- Ермаков В. В., Сташкевич И. В.* Аберрации кристаллических линз . . . . . 1 18
- Зятков И. П., Княжевич Н. Д., Гоголинский В. И., Пицевич Г. А.* Квантово-химические расчеты структуры и конформаций кремнийорганических пероксидов . . . . . 2 33
- Лавриненко А. В.* Оператор адмитанса в граничных задачах электродинамики движущихся сред . . . . . 3 11
- Макутин Г. В., Сухвало С. В., Власов В. В., Коношко Л. И., Хохолков Д. Л.* Зависимость электрических свойств сплавов на основе никеля от температуры . . . . . 3 27
- Ничипор И. В., Феранчук И. Д.* Операторный метод описания системы трех тел с кулоновским взаимодействием . . . . . 3 3
- Новиков А. П., Урбанович А. И., Нгуен Ван Конг (СРВ), Хабарина О. С.* Локальные тепловые и акустические процессы при торможении быстрых заряженных частиц в кристаллах . . . . . 1 10
- Олендский О. З.* Прохождение частиц через систему потенциальных барьеров с периодически меняющейся высотой . . . . . 1 6
- Онищенко Н. С.* Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии. Ч. I . . . . . 2 16
- Онищенко Н. С.* Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии. Ч. II . . . . . 3 7
- Полозов М. Н., Шэе Х. (Германия).* Электрореологический эффект в ОТО . . . . . 2 3
- Семченко И. В., Сердюков А. Н., Хахомов С. А.* Прохождение акустических волн через слой сегнетокерамики с нестационарной анизотропией, индуцированной вращающимся электрическим полем . . . . . 3 16
- Сухвало С. В., Коношко Л. И.* Свойства интерметаллических соединений  $GdFe_2$  и  $ErFe_2$  . . . . . 2 37
- Титов А. Д.* Поляризационные свойства прямоугольного световозвращателя. 1. Металлизация отражающих граней несколькими металлами . . . . . 1 23
- Титов А. Д.* Поляризационные свойства прямоугольного световозвращателя. 2. Металлизация части отражающих граней . . . . . 2 24
- Толстик А. Л., Феранчук И. Д.* Операторный метод описания коллективного излучения пучка релятивистских частиц в среде . . . . . 1 3
- Урбанович А. И., Новиков А. П., Нгуен Ван Конг (СРВ).* Термоупругая генерация продольных акустических колебаний при торможении быстрых заряженных частиц в кристаллах . . . . . 2 7
- Хапалюк А. П.* Обобщенные решения уравнений Эйлера . . . . . 2 20
- Хащиревич В. Г.* Численный анализ параметров планшетного устройства графического ввода . . . . . 1 29
- Хащиревич В. Г., Якушев А. К.* Фазо-импульсный селектор для устройства графического ввода планшетного типа . . . . . 3 34
- Шпаковский Г. И., Мулярчик С. Г., Юнес М. Ф. (Сирия).* Алгоритм СИНТАЛ для измерения параллелизма программ в САПР микроэлектроники . . . . . 3 31
- Шепелевич В. В.* Зависимость эффективности четырехволнового взаимодействия в  $Bi_{12}SiO_{20}$  от ориентации кристалла . . . . . 3 21

### МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

- Аль Отман Ахмад (Иордания).* Аффинорная модель плоскости Лобачевского и теория сетей . . . . . 1 53
- Абдурахимов А. О.* Квадратичная оптимизация линейной системы управления с неопределенными терминальными ограничениями . . . . . 1 60
- Батурина Л. Н., Лепешинский Н. А.* Задача о максимальном потоке на простых путях . . . . . 3 56

Бобков В. В., Бобкова Н. А. К вопросу о построении методов численного решения жестких систем . . . . .	3 60
Буза М. К., Кан Сен Чер (КНДР). О нормализованной безранговой системе в коде вычетов . . . . .	1 64
Видякин В. В., Харразова И. Р. К решению стационарных задач фильтрации вязкопластической жидкости с переменным начальным градиентом . . . . .	2 53
Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных эстиматоров для линейных динамических систем . . . . .	2 45
Забелло Л. Е., Рачок В. М. Одно решение вырожденной задачи для систем с распределенным запаздыванием . . . . .	2 69
Каррум Р. (САР). О существовании множителей Клиффорда . . . . .	1 50
Кныш Б. А. Пакетный критерий оптимальности в задаче управления дискретной системой двумя противниками . . . . .	1 57
Конюх А. В. Равномерные нижние показатели решений линейных диагональных дифференциальных систем . . . . .	1 44
Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. I . . . . .	2 49
Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. II . . . . .	3 63
Липницкий С. Ф. Компьютерный практикум: математическая модель и алгоритмы автоматизированного обучения решению задач . . . . .	3 54
Мазаник С. А., Сыроид И. Ю. Об экспонентном представлении решений систем стационарных линейных дифференциальных уравнений . . . . .	1 41
Мататов В. И., Сабынич Л. В. К вопросу о подвижных особенностях системы Гамильтона второго порядка . . . . .	1 48
Медведев В. Г. Численный эксперимент по решению линейных полубесконечных экстремальных задач . . . . .	2 66
Мироненко В. И. Дифференциальные системы с распадающимися отображениями за период . . . . .	1 36
Мохамад Гхазал (Египет), Труш Н. Н. Одно неравенство для окон просмотра данных . . . . .	1 55
Мощенский В. А., Янцев В. А. О непротиворечивости выводов в специальных экспертных системах . . . . .	1 62
Мощенский В. А., Дворцовой Д. В. Контекстно-свободные и аксиоматические грамматики . . . . .	3 51
Перельгина С. А. Предельные периодические пространства . . . . .	3 46
Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов случайных характеристик однородной марковской цепи для полиномиальной схемы . . . . .	2 73
Тагайназаров С. Опорный критерий оптимальности в линейной задаче оптимального управления . . . . .	1 33
Фахми М. Х. (АРЕ). Об инвариантных отношениях и конгруэнциях на алгебрах автоматных отображений . . . . .	3 44
Хаткевич Л. А. Статистические свойства модифицированной оценки ковариационной функции . . . . .	3 65
Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными частями . . . . .	2 62
Шевила Т. А. Краевая задача Карлемана в пространствах $E_p$ . . . . .	2 59
Штин С. Л. Явное решение одной однородной задачи Римана для пятимерного вектора . . . . .	2 56

#### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Бельский А. М. Недифрагирующие пучки и эффект Тальбота . . . . .	3 73
Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр (Сирия). Осциллографические исследования диэлектрического гистерезиса соединений $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ . . . . .	3 71
Сетько Е. А. Задача о вдавливании гладкого штампа и системы гладких штампов в упругую полосу . . . . .	3 76

#### ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<b>Леонид Иванович Киселевский</b> . . . . .	1 67
<b>Мина Минович Чепинога</b> . . . . .	1 68
Аннотации депонированных статей . . . . .	1 69
Аннотации программных продуктов Республиканского фонда алгоритмов и программы Министерства народного образования Беларуси . . . . .	1 70

Бобков В. В., Бобкова Н. А. К вопросу о построении методов численного решения жестких систем . . . . .	3 60
Буза М. К., Кан Сен Чер (КНДР). О нормализованной безранговой системе в коде вычетов . . . . .	1 64
Видякин В. В., Харразова И. Р. К решению стационарных задач фильтрации вязкопластической жидкости с переменным начальным градиентом . . . . .	2 53
Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных эстиматоров для линейных динамических систем . . . . .	2 45
Забелло Л. Е., Рачок В. М. Одно решение вырожденной задачи для систем с распределенным запаздыванием . . . . .	2 69
Каррум Р. (САР). О существовании множителей Клиффорда . . . . .	1 50
Кныш Б. А. Пакетный критерий оптимальности в задаче управления дискретной системой двумя противниками . . . . .	1 57
Конюх А. В. Равномерные нижние показатели решений линейных диагональных дифференциальных систем . . . . .	1 44
Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. I . . . . .	2 49
Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. II . . . . .	3 63
Липницкий С. Ф. Компьютерный практикум: математическая модель и алгоритмы автоматизированного обучения решению задач . . . . .	3 54
Мазаник С. А., Сыроид И. Ю. Об экспонентном представлении решений систем стационарных линейных дифференциальных уравнений . . . . .	1 41
Мататов В. И., Сабынич Л. В. К вопросу о подвижных особенностях системы Гамильтона второго порядка . . . . .	1 48
Медведев В. Г. Численный эксперимент по решению линейных полубесконечных экстремальных задач . . . . .	2 66
Мироненко В. И. Дифференциальные системы с распадающимися отображениями за период . . . . .	1 36
Мохамед Гхазал (Египет), Труш Н. Н. Одно неравенство для окон просмотра данных . . . . .	1 55
Моценский В. А., Янцев В. А. О непротиворечивости выводов в специальных экспертных системах . . . . .	1 62
Моценский В. А., Дворцовой Д. В. Контекстно-свободные и аксиоматические грамматики . . . . .	3 51
Перелыгина С. А. Предельные периодические пространства . . . . .	3 46
Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов случайных характеристик однородной марковской цепи для полиномиальной схемы . . . . .	2 73
Тагайназаров С. Опорный критерий оптимальности в линейной задаче оптимального управления . . . . .	1 33
Фахми М. Х. (АРЕ). Об инвариантных отношениях и конгруэнциях на алгебрах автоматных отображений . . . . .	3 44
Хаткевич Л. А. Статистические свойства модифицированной оценки ковариационной функции . . . . .	3 65
Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями . . . . .	2 62
Шевила Т. А. Краевая задача Карлемана в пространствах $E_p$ . . . . .	2 59
Штин С. Л. Явное решение одной однородной задачи Римана для пятимерного вектора . . . . .	2 56

#### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Бельский А. М. Недифрагирующие пучки и эффект Тальбота . . . . .	3 73
Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр (Сирия). Осциллографические исследования диэлектрического гистерезиса соединений $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ . . . . .	3 71
Сетько Е. А. Задача о вдавливании гладкого штампа и системы гладких штампов в упругую полосу . . . . .	3 76

#### ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<b>Леонид Иванович Киселевский</b> . . . . .	1 67
<b>Миша Минович Чепинога</b> . . . . .	1 68
Аннотации депонированных статей . . . . .	1 69
Аннотации программных продуктов Республиканского фонда алгоритмов и программы Министерства народного образования Беларуси . . . . .	1 70

УДК 530.12:531.51

Абакумов Е. Г., Ушаков Е. А. Метод движений, ассоциированных с циклом, как теория возмущений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

На примере расчета геодезической прецессии в поле Шварцшильда дается интерпретация метода движений, ассоциированных с циклом, как теории возмущений.

Библиогр. 5 назв.

УДК 621.373

Буров Л. И., Жвалевский А. В., Клищенко А. П., Козлов И. Н., Листопад А. П. Особенности околопороговой генерации растворов красителей при поляризованной накачке // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Теоретически и экспериментально исследовано влияние поляризации излучения накачки на мощность и поляризацию излучения генерации лазера на растворе родамина 6Г. Показано, что в околопороговой области эффективность линейной поляризации гораздо выше, чем круговой, что хорошо согласуется с данными по поляризации излучения генерации.

Библиогр. 5 назв., ил. 4.

УДК 535.34

Аддаси Джихад (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В. Запись ОВФ-голограмм на переходах в возбужденном канале красителя родамин 6Ж // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Реализовано обращение волнового фронта (ОВФ) излучения лазера на алюмоиттриевом гранате при четырехволновом взаимодействии в этанольном растворе красителя родамин 6Ж. Показано, что оптическая подкачка в основную полосу поглощения (вторая гармоника лазера), приводя к заселению возбужденного синглетного уровня  $S_1$ , повышает эффективность четырехволнового взаимодействия за счет включения переходов в возбужденном канале  $S_1-S_2$ .

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 535.8

Ермаков В. В., Сташкевич И. В. Учет анизотропии при расчете оптических систем по формулам Федера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Предложен метод учета анизотропии оптических элементов при расчете оптических систем по формулам Федера.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 621.315.592

Бринкевич Д. И., Петров В. В., Тужик Ю. Т. Влияние преципитатов кислорода на процессы генерации термодоноров в кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Методами измерения спектров ИК поглощения, эффекта Холла и проводимости исследованы процессы преципитации кислорода и генерации термодоноров в кислородсодержащем кремнии. Показано, что преципитаты кислорода, образующиеся в ходе высокотемпературной обработки, подавляют генерацию термодоноров, вводимых при  $450^\circ\text{C}$ . Обсуждены возможные механизмы указанного явления.

Библиогр. 8 назв., табл. 1.

УДК 548.55

Дроздовский А. В., Тралле И. Е., Федотов А. К. Бистабильность барьера на границе зерен в полупроводнике // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Проведено исследование зависимости высоты потенциального барьера  $\Phi_B$  от полного заряда на границах зерен  $Q_1 = Q^e - Q^h$ . Установлено появление двух устойчивых состояний барьера при учете «разогрева» носителей заряда внешним и «встроенным» электрическими полями. Расчет производился на примере кремния.

Библиогр. 10 назв., ил. 2, табл. 1.

Комяк А. И., Серафимович А. И., Шашков С. Н. Спектроскопия твердофазных реакций с участием солей уранила и щелочно-галлоидных соединений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Приведены экспериментальные результаты, свидетельствующие о том, что при непосредственном контактировании соединений уранила со щелочно-галлоидными солями происходят сложные процессы замещения ионов, ведущие к изменению координационной сферы иона уранила.

Библиогр. 10 назв., ил. 2.

## УДК 519.4

Малинин Д. А. О целочисленных представлениях конечных нильпотентных групп // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Рассматриваются достаточные условия диагоналируемости конечной нильпотентной группы матриц с коэффициентами в целостном коммутативном кольце, описываются конечные группы матриц, сравнимых с единичной в кольце целых величин кругового поля с точностью до сопряженности над этим кольцом, приводятся близкие результаты о представлениях р-групп над дедскиндовыми кольцами.

Библиогр. 6 назв.

## УДК 514.74

Арсеньева О. Е. Спиновая геометрия алгебры обобщенных кватернионов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Получена геометрическая интерпретация важнейших понятий теории спиноров на базе структуры спинвекторного пространства, естественно возникающей в пространстве алгебры кватернионов. Найдено обобщение соответствующих конструкций для случая алгебры обобщенных кватернионов, естественно возникающей в процедуре удвоения Кэли—Диксона. Получена полная классификация орбит произвольного линейного представления алгебры обобщенных кватернионов.

## УДК 517.977

Нгуен Ба Тхи (СРВ), Габасов Р. Критерий локальной оптимальности в терминальной задаче импульсного управления нелинейной динамической системой // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Формулируется критерий локальной оптимальности в терминальной задаче импульсного управления нелинейной системой. Исследуемая задача обладает, кроме разрывных траекторий, еще одной особенностью, связанной с ограничениями на моменты приложения импульсов.

Библиогр. 2 назв.

## УДК 517.977

Абдурахимов А. О. Оптимальное управление непрерывной системой с неопределенностью в критерии качества // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Терминальный критерий качества, представляющий сумму с неопределенными коэффициентами квадратичных функционалов, минимизируется по принципу получения гарантированного результата на траекториях линейной системы. Приводится пакетный принцип максимума.

Библиогр. 4 назв.

## УДК 517.925.4.

Макаров Е. К., Мироненко С. В. Об оценке старшего характеристического показателя уравнения Хилла с нечетным периодическим коэффициентом // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Для любых положительных чисел  $D$  и  $T$  построено уравнение Хилла  $\ddot{y} = a(t)y$  с нечетным  $T$ -периодическим коэффициентом  $a(t)$ , удовлетворяющим неравенству  $\pi \leq G(a) \leq 5\pi/4$ ,

$$G(a) = \int_0^T \sqrt{a_+(t)} dt, \quad a_+(t) \equiv \max\{0, a(t)\},$$

такое, что для его старшего показателя  $\lambda$  справедлива оценка  $\lambda > (D + G(a))/T$ , чем, в частности, опровергнуто предположение о выполнении для таких уравнений соотношения  $\lambda \leq G(a)T^{-1}$ .

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.925

Н а у м о в и ч Н. Ф. Преобразование, сохраняющее отображение за период // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Построено преобразование, которое при выполнении определенных условий переводит векторное дифференциальное уравнение с непрерывной и периодической правой частью в некоторое стационарное уравнение, имеющее то же отображение за период (отображение Пуанкаре), что и исходное уравнение. Результаты уточняются для линейных уравнений.

Библиогр. 1 назв.

УДК 519.1

З а п о р о ж е ц А. А. Применение целочисленного линейного программирования при проектировании фильтров на поверхностных акустических волнах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Рассмотрена в дискретной постановке задача нахождения коэффициентов

$$a_i \text{ функции } P_N(x, a) = \sum_{i=1}^N a_i (\sin(ix) + \cos(ix)) \text{ таких, что } a_i \in B_3 = \{0, 1, -1\},$$

за каждым ненулевым коэффициентом следующий ненулевой имеет противоположный знак и выполняются интервальные ограничения на функцию  $P_N(x, a)$ . Указана линейная оболочка векторов,  $a \in B_3^N$ , удовлетворяющих изложенным требованиям. Приведена процедура, сводящая решение исходной задачи к решению последовательности задач целочисленного линейного программирования.

Библиогр. 2 назв., табл. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Ш е в и л а Т. А. Краевая задача Карлемана в пространстве  $E$  // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Рассматривается краевая задача Карлемана для односвязной области. Решение ищется в пространстве  $E$ . Построено решение в явном виде, вычислен индекс задачи, найден критерий разрешимости и число линейно-независимых решений.

Библиогр. 2 назв., ил. 1.

УДК 519.1

М а т в е с е в Г. В., П е т р о в а Г. Л. Строение антицепей в некоторых полиэдральных множествах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Изучается строение антицепей в полиэдральных множествах. В частности, получено необходимое и достаточное условие, когда все точки дискретного трехмерного полиэдра образуют антицепь.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977

Б а л а ш е в и ч Н. В. Синтез оптимальных систем со многими входами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Исследуется задача синтеза оптимальных управлений для линейных систем со многими входами. Описывается алгоритм построения оптимального регулятора. Приводится пример работы регулятора.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 519.24

Т р у ш Н. Н., С к р и п к о А. П. Вычисление моментов модифицированного конечного преобразования Фурье многомерных однородных полей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Вычисляются первые два момента и семиинвариант  $k$ -го порядка модифицированного конечного преобразования Фурье многомерных однородных случайных полей.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.948

К а ш е в с к и й В. В. Интегрально-разностный оператор в гильбертовских пространствах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Доказана ограниченность оператора

$$(\mathcal{R}\varphi)(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{x-t} dx$$

из пространства  $H^k([0, 1])$  в пространство  $H^{k-1}([0, 1])$ .

Библиогр. 2 назв.

*УДК 539.376*

М и т ю ш ё в В. В. Учет разности длин берегов трещин в механике разрушения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Рассмотрен продольный сдвиг тела с трещиной в рамках стационарной плоской задачи линейной теории упругости. Исследована роль разности длин берегов трещины в механике хрупкого разрушения.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

*УДК 517.538.3*

Б р у й И. Н. О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1.

Описываются классы насыщения (в равномерной метрике) одной совокупности методов суммирования рядов Фабера для случая, когда замкнутая жорданова область со спрямляемой границей, породившая систему многочленов Фабера, является так называемым обратным множеством Фабера.

Библиогр. 6 назв.