

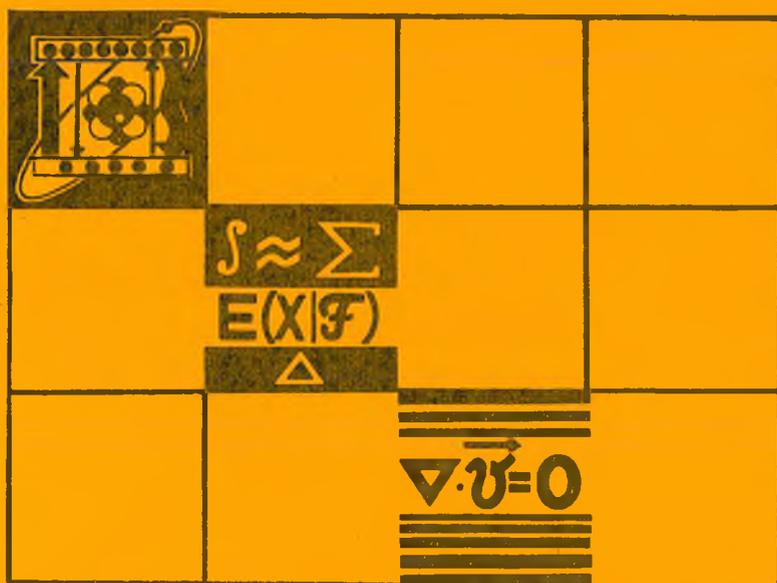
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

3 '92



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Ничипор И. В., Феранчук И. Д.</i> Операторный метод описания системы трех тел с кулоновским взаимодействием	3
<i>Онищенко Н. С.</i> Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии. Ч. II.	7
<i>Лавриненко А. В.</i> Оператор адмитанса в граничных задачах электродинамики движущихся сред	11
<i>Семченко И. В., Сердюков А. Н., Хахомов С. А.</i> Прохождение акустических волн через слой сегнетокерамики с нестационарной анизотропией, индуцированной вращающимся электрическим полем	16
<i>Шепелевич Вик. В.</i> Зависимость эффективности четырехволнового взаимодействия в $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ от ориентации кристалла	21
<i>Горбацевич С. К., Гулис И. М.</i> Фотондуцированный Штарк-эффект в молекулярных ансамблях	23
<i>Макутин Г. В., Сухвало С. В., Власов В. В., Конюшко Л. И., Хохолков Д. Л.</i> Зависимость электрических свойств сплавов на основе никеля от температуры	27
<i>Шпаковский Г. И., Мулярчик С. Г., Юнес М. Ф.</i> (Сирия). Алгоритм СИНТАЛ для измерения параллелизма программ в САПР микроэлектроники	31
<i>Хациревич В. Г., Якушев А. К.</i> Фазо-импульсный селектор для устройства графического ввода планшетного типа	34
<i>Бакиновская Л. Н., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. П.</i> Преобразователь двоично-десятичного кода в двоичный на основе D -триггеров	38

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Фахми М. Х. (АРЕ)</i> Об инвариантных отношениях и конгруэнциях на алгебрах автоматных отображений	44
<i>Перельгина С. А.</i> Предельные периодические пространства	46
<i>Моценский В. А., Дворцовой Д. В.</i> Контекстно-свободные и аксиоматические грамматики	51
<i>Липницкий С. Ф.</i> Компьютерный практикум: математическая модель и алгоритмы автоматизированного обучения решению задач	54
<i>Батурина Л. Н., Лепешинский П. А.</i> Задача о максимальном потоке на простых путях	56
<i>Бобков В. В., Бобкова Н. А.</i> К вопросу о построении методов численного решения жестких систем	60
<i>Корзюк В. И.</i> об операторах осреднения с переменным шагом. II	63
<i>Хаткевич Л. А.</i> Статистические свойства модифицированной оценки ковариационной функции	65

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Данилькевич М. И., Д.Аль-Шарр</i> (Сирия). Осциллографические исследования диэлектрического гистерезиса соединений $\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$	71
<i>Бельский А. М.</i> Недифрагирующие пучки и эффект Тальбота	73
<i>Сетько Е. А.</i> Задача о вдавливании гладкого штампа и системы гладких штампов в упругую полосу	76

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

3 '92

СЕНТЯБРЬ



МИНСК
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ“

Главный редактор В. Г. РУДЬ

Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора), В. Г.
БАРЫШЕВСКИЙ, А. М. БЕЛЬСКИЙ (ответственный секре-
тарь), В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редакто-
ра), Е. С. ВОРОНАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО,
В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. Н. КИВАЧ,
Н. И. КОЗЛОВСКИЙ, В. И. КОРЗЮК, П. Д. КУХАРЧИК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕНКО,
С. Г. МУЛЯРЧИК, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,
Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия I: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3

Редактор А. И. Гуророва

Младший редактор Г. М. Добыш

Художественный редактор Д. Е. Дивин

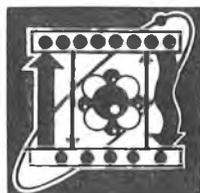
Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Набор и верстка журнала выполнены на редакционно-издательской системе «Союз».

Сдано в набор 08.07.92. Подписано в печати 22.10.92. Формат 70×108¹/₁₆. Бумага тип.
№ 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отг. 7,52. Уч.-изд. л. 7,36. Тираж 920 экз.
Заказ 1186. Цена 1р. 50 к.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11. Адрес
редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати».
220041. Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 530.145

И. В. НИЧИПОР, И. Д. ФЕРАНЧУК

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Особый интерес представляет разработка таких аналитических методов, которые позволяют без потери наиболее существенных особенностей задачи свести решение точного уравнения Шредингера (УШ), формально известного для сколь угодно сложной физической системы, к более простым уравнениям, доступным непосредственному численному или аналитическому исследованию. В работе [1] был предложен операторный метод (ОМ), нулевое приближение которого дает достаточно простой и универсальный алгоритм получения аппроксимации точного решения УШ, оказывающейся равномерно пригодной во всем диапазоне изменения параметров гамильтониана. Последующие приближения ОМ образуют равномерно сходящуюся последовательность и позволяют находить решение с любой необходимой точностью.

В работе [2] рассмотрено обобщение ОМ для описания систем с достаточно сложным энергетическим спектром в одномерном случае. В настоящей работе исследуются возможности ОМ при описании многомерных систем на примере квантовой системы трех тел с кулоновским взаимодействием.

Стационарное уравнение Шредингера для системы трех частиц с массами M_1, M_2, M_3 и зарядами $Z_1, Z_2, (-Z)$ после отделения координат центра инерции системы имеет вид

$$\hat{H}\Psi(r, R) = \left[-\frac{1}{2M_0}\Delta_R + \frac{Z_1 Z_2}{R} - \frac{1}{2m_0}\Delta_r - \frac{Z_1 Z}{r_1} - \frac{Z_2 Z}{r_2} \right] \Psi(r, R) = \quad (1)$$

$$= E\Psi(r, R),$$

где r_1 и r_2 — расстояния от частицы с зарядом $(-Z)$ до частиц Z_1 и Z_2 соответственно, а R — расстояние между последними. Это уравнение записано в одной из систем координат Якоби, для которой

$$\frac{1}{M_0} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}; \quad \frac{1}{m_0} = \frac{1}{M_3} + \frac{1}{M_1 + M_2}. \quad (2)$$

В качестве базисной функции для применения ОМ к уравнению (1) выберем функцию

$$\Psi_0(r, R) = \Phi_{00}(r, R)U(R), \quad (3)$$

где $U(R)$ — произвольная пока функция R , а $\Phi_{00}(r, R)$ определяется формулой

$$\Phi_{00}(r, R) = C \operatorname{ch}(\mu\nu) e^{-\rho r} \quad (4)$$

с неопределенными пока параметрами ν и ρ . Здесь μ и λ — сфероидальные координаты, определяемые следующим образом [3]:

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{R}; \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{R}; \quad 1 \leq \lambda < \infty; \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (5)$$

В соответствии с рецептом ОМ выделим диагональную по электронным переменным часть гамильтониана \hat{H} , т. е. выполним следующее усреднение:

$$\begin{aligned} \hat{H}_R = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle = & -\frac{1}{2M_0} \Delta_R - \frac{4tc-1}{R} + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{c}{2M_0} \left[t \left(\frac{3}{4\rho} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \rho \right) + y + h \left(\frac{1}{4} - \rho \right) + \nu^2 \left(h \left(\frac{R_r}{\rho} - 1 \right) - \frac{4}{3} \frac{R\rho}{\rho} + \frac{8}{15} \right) \right] + \frac{T}{2m_0} \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$R_r = 1 + \frac{1}{2\rho},$$

где все параметры y , t , h , c и T определены формулами:

$$x_{\pm} = \frac{\operatorname{sh}(2\nu)}{2\nu} \pm 1; \quad x_+ = x; \quad y = \operatorname{ch}(2\nu) - \frac{\operatorname{sh}(2\nu)}{2\nu}; \quad (7)$$

$$t_{\pm} = x_{\pm} \left(1 + \frac{1}{2\rho} \right); \quad K = y \left(1 + \frac{1}{2\rho} \right);$$

$$h_{\pm} = \frac{y}{2\nu^2} \pm \frac{2}{3}; \quad h_+ = h.$$

$$T = 4c \left\{ t\rho + \nu^2 \left(h - \frac{4}{3} \right) \right\}; \quad c = \left[\frac{1}{\rho} + h \right]^{-1}. \quad (8)$$

Как видим, полученный гамильтониан, определяющий относительное движение ядер, имеет очень простую структуру, так что его собственные функции и собственные значения могут быть найдены точно при решении соответствующего уравнения Шредингера

$$\hat{H}_R U_{vlm}(R) = E_{vl} U_{vlm}(R), \quad (9)$$

допускающего разделение переменных

$$U_{vlm}(R) = \Psi_{vl}(R) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (10)$$

где Y_{lm} — сферические гармоники. Квантовые числа v и l определяют соответственно колебательное и вращательное движение ядер в основном электронном состоянии, а функция $\Psi_{vl}(R)$ удовлетворяет следующему уравнению, сходному с уравнением Шредингера для электрона, движущегося в поле потенциала $\frac{S_1}{R} + \frac{S_2}{R^2}$ ($S_2 < 0$):

$$\frac{\partial^2 \Psi_{vl}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi_{vl}}{\partial R} + \left[\frac{S_1}{R} + \frac{S_2}{R^2} - \frac{l(l+1)}{R^2} \right] \Psi_{vl} + 2M_0 E \Psi_{vl} = 0. \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S_1 = 2M_0 (4tc - 1), \quad (12)$$

$$S_2 = -c \left\{ t \left(\frac{3}{4\rho} + \rho \right) + y + h \left(\frac{1}{4} - \rho \right) + \right. \\ \left. + \nu^2 \left[h \left(\frac{R_\rho}{\rho} - 1 \right) - \frac{4}{3} \frac{R_\rho}{\rho} + \frac{8}{15} \right] \right\} - \frac{M_0}{m_0} T.$$

Точное решение уравнения (11) хорошо известно [4]. В частности, собственные значения определяются формулой:

$$E_{v1} = - \frac{Z_{\text{эф}}^2}{2M_0 (v + l' + 1)^2}; \quad Z_{\text{эф}} = \frac{S_1}{2}; \quad (13)$$

$$l' = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - S_2 + 1(1+1) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где v и $l = 0, 1, 2, \dots$. Приведем также волновую функцию, описывающую относительное движение ядер для основного состояния с $v = l = 0$:

$$U_0(R) = F_0 R^s e^{-qR}, \quad (14)$$

$$S = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - S_2}, \quad q = \frac{S_1}{2S}.$$

Используя эти волновые функции, можно, например, найти среднее значение межъядерного расстояния для нижнего колебательно-вращательного уровня

$$R_{00} = \frac{(3 + 2S)}{2q}. \quad (15)$$

Следует ожидать, что уравнение (13) равномерно пригодно для любых значений M_0 . Рассмотрим, насколько хорошо оно учитывает различные неадиабатические эффекты для исследуемой молекулы H^+_2 , которой соответствует случай $\frac{M_0}{m_0} \gg 1$. В этом пределе получаем следующее разложение:

$$E^{(0)} = - \frac{m_0}{2T} (4tc - 1)^2 \left\{ 1 - \frac{2v+1}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{m_0}{M_0}} - \left[P - \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3v(v+1) - 1(1+1) \right) \right] \frac{m_0}{M_0} \right\}; \quad P = - \frac{S_2}{T} - \frac{M_0}{m_0}. \quad (16)$$

В соответствии с общими свойствами ОМ, разложение функции (13) нулевого приближения восстанавливает функциональную структуру асимптотического ряда адиабатического приближения. Здесь слагаемое, пропорциональное $\sqrt{\frac{m_0}{M_0}}$, учитывает колебательное движение ядер вдоль соединяющей их оси, а слагаемое, пропорциональное m_0/M_0 , — вращательное движение вокруг центра инерции. Последующие члены разложения функции

(13) нулевого приближения ОМ по степеням $\sqrt{\frac{m_0}{M_0}}$ естественным образом приводят к возникновению слагаемых, которым в адиабатическом подходе соответствует учет электронно-колебательного и колебательно-вращательного взаимодействия.

Используя условия независимости функции (13) от параметров ν и ρ , находим значения ν_0 и ρ_0 с помощью уравнений:

$$\begin{aligned}
& 4M_0 \frac{x}{\rho^2} \left[\text{ct} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \right] \sqrt{1 - 4S_2} \left(1 + \sqrt{1 - 4S_2} \right) - \\
& - S_1 \left\{ x \left[\frac{S_2}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + 1 - \frac{3}{4\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] - h + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\nu^2}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{4}{3} - h \right) + \frac{4M_0}{m_0} x \right\} = 0; \\
& 4M_0 (K - \text{tc}x_1) \sqrt{1 - 4S_2} \left(1 + \sqrt{1 - 4S_2} \right) + S_1 \{ S_2 \nu x_1 - \\
& - K \left(\frac{3}{4\rho} + \rho \right) - x \left[2y_1 + \frac{1}{2} - 2\rho \right] + h \left[\frac{1}{4} - \rho + y_1 \right] + \\
& + \frac{8}{3} \nu^2 \left(\frac{R_s}{\rho} + \frac{3}{5} \right) + \frac{M_0}{m_0} [T x_1 - 4 (K \rho + \nu^2 (2x - \frac{8}{3} - h))] \} = 0; \\
& x_1 = \frac{K}{\rho} + 2x - 3h; \quad y_1 = \nu^2 \left(\frac{R\rho}{\rho} + 1 \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Результаты вычислений энергии низшего колебательно-вращательного уровня по формулам нулевого приближения ОМ для различных молекул приведены в таблице, где они сравниваются с данными неадиабатического расчета в приближении Борна-Оппенгеймера [5].

Сравнение результатов нулевого приближения ОМ с данными неадиабатического расчета [5]

Молекулы	$E^{(0)}_0$, а. е.	E_0 , а. е.	$\bar{R}_{00} 10^{10}$, м	$\langle R_{00} \rangle_M 10^{10}$,
H^+_2	- 0,59348	- 0,59714	1,09814	1,09218
MuD^+	- 0,58389	- 0,59026	1,14685	1,13537
DT^+	- 0,59664	- 0,59913	1,08341	1,07949

Формула (13) нулевого порядка ОМ может быть использована при любых значениях M_0 и качественно правильно передает зависимость энергии от этого параметра. Однако абсолютная ошибка полученной оценки в области малых M_0 может быть значительной и, конечно, не может сравниваться с вариационными расчетами, более аккуратно учитывающими движение электронов в области малых M_0 . Так, например, для $Z_{1,2} = 2$, $M_0 = \frac{1}{2} m_e$, $m_0 = 2m_e$, соответствующим в наших обозначениях атому He, формула (13) дает оценку $E_{\text{He}} \approx 2$, 2 а. е. . По этой же причине относительная точность в расчетах колебательных уровней молекулы составляет величину $\sim 20\%$, хотя абсолютная точность расчета энергетических уровней в соответствии с таблицей $\leq 0,3\%$. Учет поправок к нулевому приближению позволяет существенно улучшить точность.

Для вычисления поправки к нулевому приближению алгебраического метода следует учесть матричные элементы точного гамильтониана (1), соответствующие переходам в возбужденные состояния рассматриваемой системы. Первая, отличная от нуля, поправка имеет вид:

$$E_0^{(2)} = - \frac{|\langle n | \hat{H} | 0 \rangle|^2}{E_n - E_0}. \quad (18)$$

Здесь вектор состояния $|0\rangle$ для рассматриваемой системы определяется формулой (3), вектор состояния $|n\rangle$ соответствует ближайшему возбужденному состоянию, для которого матричный элемент $\langle n | \hat{H} | 0 \rangle$ отличен от 0.

Для конкретной молекулы H^+ , которой соответствует случай $\frac{M_0}{m_0} \gg 1$,

с точностью до слагаемых $\sim \left(\frac{M_0}{m_0}\right)^{-1}$ необходимо учитывать только такие

переходы, которые соответствуют изменению электронного состояния молекулы, чему отвечает изменение функции $\Phi_{00}(r, R)$ в формуле (3). Отметим, что эти возбужденные состояния должны рассматриваться при значениях параметров ν_0 и ρ_0 , соответствующих основному состоянию системы. Волновые функции $\Phi_{n_1, n_2}(r, R)$, описывающие такие состояния, могут быть найдены на основе базисных функций $\Phi_{00}(r, R)$ по следующему алгоритму:

$$|n_1, n_2\rangle = \Phi_{n_1, n_2} = P_{n_1}(\lambda) e^{-\lambda} P_{n_2}(\mu) \text{ch}(\mu\nu) e^{i\varphi}, \quad (19)$$

где φ — угол поворота относительно оси, соединяющей Z_1 и Z_2 , а $P_n(x)$ — полином степени n , причем коэффициенты соответствующих полиномов определяются с помощью условий ортонормировки

$$\langle n'_1, n'_2 | n_1, n_2 \rangle = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2}. \quad (20)$$

Список литературы

1. Feranchuk I. D., Komarov L. I. // Journ. Phys. A: Math. Gen. 1984. V. 17. № 16. P. 3111.
2. Feranchuk I. D., Komarov L. I., Nichipor I. V. // Journ. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. № 12. P. 3849.
3. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Смирнов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М., 1976.
4. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., 1973.
5. McKenna D., Webster B. // Journ. Chem. Soc., Faraday Trans. 2. 1985. V. 81. P. 225.

Поступила в редакцию 25. 03. 91.

УДК 535.35

Н. С. ОНИЩЕНКО

НЕМАРКОВСТЬ ДЕФАЗИРОВКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В КОГЕРЕНТНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ. Ч. II

В первой части статьи сформулированы основные положения и дан теоретический анализ немарковости дефазировки квантовых систем. Этот подход позволил объяснить результаты ряда новых экспериментов когерентной спектроскопии [1–3]. В них использовались низкотемпературные ($T \sim 2^\circ\text{K}$) разбавленные (0,0034 вес. % Cr_2O_3) образцы рубина, помещенного в постоянное магнитное поле напряженностью $\sim 3,5$ кГс, направленное вдоль s -оси. Излучением ультраузкополосного (ширина линии ~ 1 кГц) лазера на красителе возбуждался переход ${}^4A_2(-1/2) \rightarrow E(-1/2)$ иона Cr^{3+} . Неоднородная ширина перехода была порядка 1 ГГц. Однородная же ширина его в полях $\sim 3,5$ кГс определялась по затуханию эхо-сигнала в [4], где на основе использования блоховских уравнений было получено значение $T_2 = 15$ мкс. Вследствие отнесения кристалла $\text{Cr}^{3+} : \text{Al}_2\text{O}_3$ к системам γ -типа, для описания которых уравнения Блоха не применимы даже при отсутствии излучения, нам потребовалось переосмыслить информацию, извлеченную в экспериментах по затуханию эхо-сигнала. Как известно, интенсивность возникающего в момент времени $2T$ эхо-сигнала при его возбуждении двумя импульсами, действующими в моменты времени 0 и T , пропорциональна характеристическому функционалу $\Psi(\epsilon_T) = \langle \exp \left\{ -i \int_0^T d\tau \tilde{\epsilon}, + i \int_0^{2T} d\tau \tilde{\epsilon} \right\} \rangle$

дефазирующих возмущений $\bar{\epsilon}$. В случае телеграфного процесса $\bar{\epsilon}$, этот функционал удается вычислить точно, и для эхо-сигнала получаем

$$A_{\text{эхо}}^{2T} = A_0 e^{-\sigma T} \left[\left(\frac{2\sigma}{\eta} \right)^2 - \frac{\nu}{\eta} (\text{sh}(\eta T) + \frac{\nu}{\eta} \text{ch}(\eta T)) \right], \quad (5)$$

где $\eta = (\nu^2 - 4\sigma^2)^{1/2}$. В блоховском пределе ($\lim_{\sigma, \nu \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\nu} = K_0$) выражение (5) дает обычный результат: $A_{\text{эхо}}^{2T} = A_0 \exp(-2K_0 T)$. Если же $\sigma^2/\nu^2 = K \geq 1/4$ (для рассматриваемых образцов $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$, $\sigma^2/\nu^2 = 20$, см. ниже), то члены $\exp(\pm \eta T)$ становятся осциллирующими (что приводит к модуляции сигнала эха [4]), а затухание происходит с константой $\nu/2$.

Вторым примером, демонстрирующим специфику процессов дефазировки для систем γ -типа, является распад поляризации σ_{21}^t после выключения излучения. Расчеты показывают, что для модели ТП

$$\sigma_{21}^t = \sigma_{21}^0 e^{-\sigma t/2} \left[\text{ch}(\eta t/2) + \frac{\nu}{\eta} \text{sh}(\eta t/2) \right]. \quad (6)$$

Для блоховского предела отсюда снова имеем обычный результат $\sigma_{21}^t = \sigma_{21}^0 \exp(-K_0 t)$, тогда как при $K \geq 1/4$ затухание характеризуется постоянной $\nu/2$. Таким образом, в случае систем γ -типа роль времени $T_2 (= K_0^{-1})$ в рамках модели ТП выполняет удвоенное время корреляции $2\tau_c = (\frac{\nu}{2})^{-1}$. Поэтому при анализе экспериментов [1-3] в соответствии с полученным в [4] значением $T_2 = 15$ мкс мы приняли $\tau_c = 7,5$ мкс. Вторым параметр ТП, его дисперсия σ , остается неизвестным и подлежит определению посредством варьирования и подгонки теоретических зависимостей к экспериментальным данным.

Нестационарное выжигание провалов [3]. Форма провала, нестационарно выжигаемого излучением в неоднородно уширенном контуре перехода $2 \rightarrow 1$, определяется зависимостью от расстройки ϵ заселенности возбужденного состояния $\sigma_{T_{22}}$, возникающей к моменту времени T за счет вынужденных переходов $1 \rightarrow 2$. В случае телеграфной модуляции частоты резонансного перехода ω_{21} соответственно двум ее значениям $\omega_{21} \pm \sigma$ контур провала при $2V \ll \sigma$ и $\nu \ll \sigma$, очевидно, является двугорбым. По мере роста интенсивности излучения эти две спектральные компоненты испытывают полевое уширение и при $2V \sim \sigma$ начинают перекрываться. Эти общие соображения подтверждаются результатами численного расчета контура провалов $\sigma_{T_{22}}(\epsilon)$ по формулам (1) — (4). На рис. 1 представлена зависимость полуширины провала Γ (на уровне полумаксимума) от частоты Раби $2V$, рассчитанная при $T = 400$ мкс, $\nu^{-1} = \tau_c = 7,5$ мкс и соответствующая выбору $K = 20$. Видно, что в области больших V такое значение отношения $K = \sigma^2/\nu^2$ дает удов-

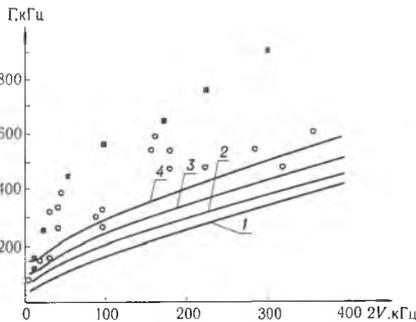


Рис. 1. Зависимость полуширины спектрального провала Γ от частоты Раби. Теоретические кривые получены в рамках телеграфной модели при $\nu \times (7,5 \text{ мкс}) = 1$ и $K = 2(1); 5(2); 10(3); 20(4)$. Экспериментальные точки взяты из работы [3]

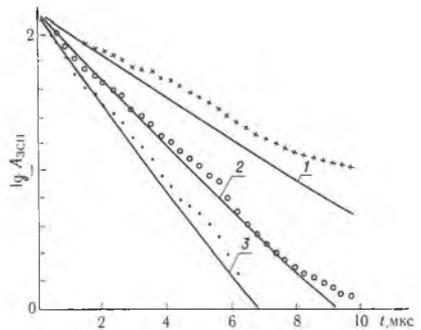


Рис. 2. Зависимость интенсивности сигнала затухания свободной поляризации $(A_{\text{эсп}}(t))^2$ от времени, где $A_{\text{эсп}}$ рассчитана по формуле (8) для следующих значений частоты Раби: 20 кГц(1); 50,2 кГц(2); 79,6 кГц(3) при $(\nu/2)^{-1} = 15$ мкс, $K = 20$. Экспериментальные точки из [2]

летворительное совпадение с экспериментальными данными работы [3]. Отметим асимптотику $\Gamma \sim 2V$ при больших V . В области малых V , однако, имеют место расхождения с экспериментом. Эти расхождения, по-видимому, связаны с «бедностью» модели ТП, не учитывающей реального сложного спектра дефазированных взаимодействий в рубине. Действительно, ион Cr^{3+} в рубине связан суперсверхтонким (ССТ) взаимодействием с окружающими ядрами Al, благодаря чему его резонансные уровни приобретают вид полос [5] с плотным распределением подуровней k , характеризующихся энергиями $E_1 + \epsilon_k^{(1)}$ и $E_2 + \epsilon_k^{(2)}$. Переходы между этими подуровнями, аналогичные скачкам в ТП, могут происходить за счет недиагональной по состояниям спинов ядер Al части гамильтониана ССТ взаимодействия ближайших к Cr^{3+} ядер Al, образующих его «замороженное ядро», с ядрами Al в объеме кристалла Al_2O_3 . Анализ выжигания провалов, выполненный на основе двухполосной модели [5] в предположении отсутствия перескоков в пределах полос, дает

$$\sigma_{22}^I(\epsilon) = 4V^2 \sum_k W_k (1 - \cos \Omega_k T) / \Omega_k^2, \quad (7)$$

где $\Omega_k = [(\epsilon + \epsilon_k)^2 + 4V^2]^{1/2}$, $\epsilon_k = \epsilon_k^{(2)} - \epsilon_k^{(1)}$, W_k — распределение энергий ϵ_k в полосах. Переходя в (7) от суммирования к интегрированию и считая распределение W_k лоренцевским $W_k = (\Gamma_0 / \pi) d\epsilon_k / (\Gamma_0^2 + \epsilon_k^2)$, можно показать, что приближенно форма провала имеет вид

$$\sigma_{22}^T(\epsilon) \sim 2V(\Gamma_0 + 2V) / [\epsilon^2 + (\Gamma_0 + 2V)^2],$$

т. е. является лоренцевской с шириной $\Gamma_0 + 2V$. Наличие перескоков в пределах распределения W_k , очевидно, приведет к уменьшению ширины провала вследствие эффекта «сужения за счет движения». Таким образом, из сказанного следует, что при малых значениях частоты Раби ширина провала определяется шириной Γ_0 распределения W_k и поэтому отступления от предсказаний модели ТП могут иметь место. При больших же значениях V , когда уширение провала обусловлено в основном эффектом насыщения, конкретная структура спектра дефазированных взаимодействий в рубине становится несущественной и модель ТП предсказывает правильные результаты при надлежащем выборе параметров σ и ν .

В эксперименте [2] затухание свободной поляризации (СП), наведенной в образце $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ импульсами лазерного излучения длительностью $T = 200$ мкс, изучалось посредством наблюдения затухающего сигнала биений поля СП и поля лазерного излучения после штарковского переключения его частоты на нерезонансную. Теоретический анализ временного спада сигнала биений при $t > T$ проводился следующим образом. Нестационарная поляризация σ_{21}^I для моментов времени $t > T$ рассчитывалась на основе соотношений (1) — (4) при ступенчатом поле V , отличном от нуля, для времен $0 - T$. Это позволило, в отличие от проведенного в [2] рассмотрения, корректно учесть существенные для γ -систем эффекты «памяти» о предыдущем воздействии на него уже выключенного излучения. Полученное решение для σ_{21}^I усреднялось по ϵ (гауссовскому контуру неоднородного уширения частоты перехода ω_{21}) и интегрировалось по V от нуля до V_0 с целью учета гауссовского пространственного профиля пучка лазерного излучения, фокусируемого в кристалле рубина [1].

Анализ полученного аналитически общего выражения для амплитуды сигнала затухания СП показал, что при $\sigma^2 \gg \nu^2$ оно принимает простой вид:

$$A_{\text{зсп}}(t) = \frac{e^{-\sigma t/2}}{t^2 A_{\text{зсп}}(0)} [e^{-\nu t/2} (1 + \frac{\nu t}{2}) - e^{-\sigma t} (1 + \mu t)], \quad (8)$$

где

$$\mu = \{ 4V_0^2 + \nu^2 [1 + 4V_0^2 / (\sigma^2 + 4V_0^2)] / 4 \}^{1/2} \approx (4V_0^2 + \nu^2 / 4)^{1/2},$$

$$A_{\text{зсп}}^{(0)} = (\mu^2 - \nu^2 / 4) / 2.$$

Кроме того, в общем выражении для $A_{\text{зсп}}(t)$ имеются малые осциллирующие слагаемые, описывающие слабую медленную модуляцию сигнала ЗСП,

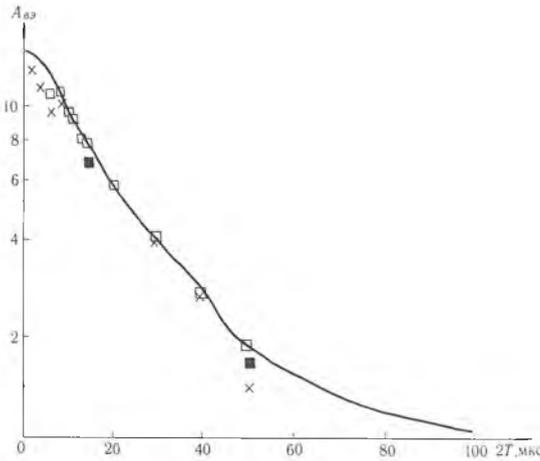


Рис. 3. Затухание амплитуды вращающегося светового эха $A_{вз}(t)$ при увеличении времени задержки. Теоретическая кривая получена при $(\nu/2)^{-1} = 15$ мкс. Экспериментальные точки получены в [1] для различных значений частоты Раби

между их подуровнями. На рис. 2 приведены результаты расчета по (8) временного поведения сигнала ЗСП для трех значений частоты Раби, выполненных при $\tau_c = 7,5$ мкс ($\nu = 21,2$ кГц) и $K = \sigma^2/\nu^2 = 20$. Видно, что соотношение (8) вполне удовлетворительно описывает экспериментальные данные. Особенно хорошее совпадение имеет место в случае больших частот Раби.

Вращательное эхо [1]. В отличие от рассмотренных выше выжигания провалов и затухания свободной поляризации сигнал вращательного эха, возникающий при $t \approx 2T$ в результате изменения в момент времени T фазы сильного поля на π , описывается корнями p_1, p_2 характеристического уравнения (4), причем $p_{1-} \approx i\Omega - \nu/2 - G\nu$, $G = (1/4 + x_0/\nu^2 - 4c^2K)^{1/2}$, где $c = \epsilon/\Omega$, а x_0 определяется приближенным соотношением, приведенным после (4). Амплитуда вращательного эха в пределе сильного поля ($\Omega \gg \nu, \sigma$) имеет вид:

$$A_{вз}(t) = \int d\epsilon \sin[\Omega(t - 2T)] \bar{A}_{вз}(\epsilon, V, t, T), \quad (9)$$

где $\bar{A}_{вз}(\epsilon, V, t, T)$ — «спектр» сигнала вращательного эха:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{вз}(\epsilon, V, t, T) = & -4i(V/\Omega)^3/G^2 \{ [(1+G)^2 + 4c^2K] e^{Gt} + \\ & + [(1-G)^2 + 4c^2K] e^{-Gt} - \\ & - 2(1-G^2 + 4c^2K) \text{sh}[G(t-2T)] \} e^{-\nu t/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что в зависимости от знака $g = 1/4 + x_0/\nu^2 - 4c^2K$ скорость затухания $A_{вз}(t)$ различна: при $g < 0$ ($\epsilon > \epsilon_{гп} \approx V\nu/\sigma$) она равна $\nu/2$, а при $g > 0$ изменяется от $\nu/2$ при $\epsilon = \epsilon_{гп}$ до $-2x_0/\nu \approx 2\nu(2V\sigma/(4V^2 + \sigma^2))^2$ при $\epsilon = 0$. Следовательно, сигнал $A_{вз}(t)$ будет иметь биэкспоненциальный характер и характеризоваться константами затухания $\gamma_1 = \nu/2$ и $\gamma_2 \approx \sigma^2\nu/2V^2$. Вес первой экспоненты будет преобладающим, так как область интегрирования по ϵ в (9), дающая вклад во вторую экспоненту, при $\sigma^2 \gg \nu^2$ много меньше области, соответствующей первой экспоненте, что подтверждается численными расчетами. Из сказанного следует, что затухание вращательного эха в случае систем γ -типа будет слабо зависеть от частоты Раби, что и наблюдалось в работе [1] (рис. 3).

даваемого (8). Отметим, что в соответствии с (8) при заданном значении частоты Раби $2V_0$ временное поведение сигнала ЗСП в основном определяется частотой скачков ν и практически не зависит от σ . Последнее связано с тем, что при $\sigma^2 \gg \nu^2$ дефазировка становится квазиобратимой, т. е. связанной с квазиинегативным распределением квантовой системы по частотам $\omega_{21 \pm \sigma}$, которое не проявляется в сигнале ЗСП вследствие усреднения по широкому неоднородному распределению частот ω_{21} в кристалле рубина. Аналогичная независимость сигнала ЗСП от значений частот ϵ_k и распределения W_k получается и в рамках модели двух полос при отсутствии скачков

Заключение

Показано, что процесс дефазировки состояний квантовых систем при медленной стохастической модуляции частоты их оптических переходов, близкий по характеру к обратимой дефазировке в неоднородно-уширенных системах, имеет ряд характерных особенностей, проявляющихся в когерентной спектроскопии: 1) ширина выжигаемых провалов в таких системах определяется шириной разброса возможных значений (подуровней) частоты резонансного оптического перехода при стохастических флуктуациях и частотой Раби; 2) зависимость затухания сигнала свободной поляризации носит универсальный характер, не связанный с расположением данных подуровней и определяющийся частотой Раби и частотой скачков; 3) затухание сигнала вращательного эха не зависит от частоты Раби и определяется только частотой скачков между подуровнями. Эти выводы позволяют сделать заключение, что особенности, наблюдаемые в экспериментах [1—5] по исследованию нестационарных когерентных оптических явлений в рубине, могут быть объяснены согласованным образом на основе представления о $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ как о системе с медленной и сильной модуляцией частоты перехода.

Автор выражает благодарность П. А. Апанасевичу, С. Я. Килину и А. П. Низовцеву за большую помощь в работе.

Список литературы

1. Muramoto T., Szabo A. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. № 11. P. 5928.
2. Szabo A., Muramoto T. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. № 8. P. 3992.
3. Szabo A., Muramoto T., Kaarli R. // Coherence and Quantum Optics VI/edited by J. H. Eberly, L. Mandel, E. Wolf. Plenum. New York, 1990. P. 1131.
4. Szabo A. // Journ. Opt. Soc. Am. B. 1986. V. 3. P. 514.
5. Endo T., Muramoto T., Hashi T. // Opt. Comm. 1984. V. 51. P. 163.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 530.12; 535

А. И. ЛАВРИНЕНКО

ОПЕРАТОР АДМИТАНСА В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Решение граничных задач оптики и электродинамики в случае равномерно движущихся сред представляет актуальную область исследования. Несмотря на значительное число работ по этой тематике [1—4], ряд вопросов остается до сих пор не рассмотренным. Например, в литературе отсутствуют общие соотношения для коэффициентов отражения и пропускания световых волн при произвольных состояниях волнового вектора падающей волны, при произвольных направлениях скоростей движения обеих граничащих сред и границы раздела. В указанных случаях, как отмечалось в [3], рационально проводить все вычисления в лабораторной системе отсчета. Это позволяет избегать многократных преобразований полевых и волновых векторов при переходах из одной системы в другую, например, из системы покоя среды в систему покоя границы раздела. При таком способе решения граничных задач в оптике движущихся сред легко прослеживается аналогия с оптикой покоящихся анизотропных гиротропных сред [5]. Естественно поэтому обобщить бескоординатный импедансный метод кристаллооптики [5—7] на движущиеся среды, что позволяет дать общее решение граничных задач в компактной аналитической форме. При этом вводятся операторы (тензоры 2-го ранга) поверхностных адмитансов (адмитанс-волновая проводимость — величина, обратная импедансу [8]) и френелевские операторы отражения и пропускания, связывающие полевые векторы падающих, отраженных и преломленных волн [9].

В настоящей работе мы следуем подходам и терминологии, изложенным в [5]. Введем тензор поверхностных адмитансов. Предположим, что среда и плоская граница раздела, отделяющая ее от другой среды, движутся с различными скоростями v и u относительно лабораторной системы отсчета,

в которой мы и проводим все расчеты. Примеры подобных ситуаций приводятся в [2, 3]. Материальные уравнения для движущейся среды, обладающей в своей системе покоя естественной или наведенной анизотропией и гиротропией, имеют вид [10]:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \delta \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \chi \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{V}, \quad (1)$$

где \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{V} , \mathbf{H} — обычные обозначения полевых векторов, а тензоры ϵ , δ , χ , μ^{-1} выражаются в общем случае через вектор скорости \mathbf{v} , тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей и псевдотензоры гирации среды [4, 11, 12]. Граничные условия для движущейся границы раздела при отсутствии на ней поверхностных токов и свободных зарядов можно записать в виде непрерывности векторов \mathbf{Q} и \mathbf{J} [2, 3]:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q}^x \mathbf{E} - u_q / c \mathbf{V}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{q}^x \mathbf{H} + u_q / c \mathbf{D}, \quad (2)$$

где \mathbf{q}^x — тензор, дуальный вектору \mathbf{q} , $\mathbf{q}^x \mathbf{E} = [\mathbf{q} \mathbf{E}]$; \mathbf{q} — единичный вектор нормали к границе раздела; квадратные скобки обозначают векторное произведение; $u_q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}$ — проекция скорости границы раздела на вектор \mathbf{q} ; точка обозначает скалярное произведение; $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{I} \mathbf{B}$, $\mathbf{D}_\perp = \mathbf{I} \mathbf{D}$ — тангенциальные составляющие векторов \mathbf{V} и \mathbf{D} ; $\mathbf{I} = \mathbf{1} - \mathbf{q} \oplus \mathbf{q}$ — проективный оператор на плоскость границы раздела; $\mathbf{1}$ — единичный оператор в трехмерном пространстве; $\mathbf{q} \oplus \mathbf{q}$ — кронекеровское произведение векторов (диада); c — скорость света в вакууме.

Уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн имеют вид:

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathbf{H}], \quad \mathbf{V} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathbf{E}], \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3)$$

и после скалярного умножения их на вектор \mathbf{q} дают

$$\frac{c}{\omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{V}, \quad \frac{c}{\omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{D}, \quad (4)$$

где $\mathbf{a} = [\mathbf{k} \mathbf{q}] = [\mathbf{k}, \mathbf{q}]$, $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{I} \mathbf{k}$, \mathbf{k} — волновой вектор; ω — частота. Использование материальных соотношений (1) и уравнений (4) позволяет выразить полные векторы \mathbf{E} и \mathbf{V} через их тангенциальные составляющие \mathbf{E}_\perp , \mathbf{V}_\perp с помощью восстанавливающей блочной матрицы \mathbf{V} :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V} \end{vmatrix} = \mathbf{V} \begin{vmatrix} \mathbf{E}_\perp \\ \mathbf{V}_\perp \end{vmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где ее тензорные блоки имеют следующий вид:

$$V_{11} = \mathbf{I} + (\mathbf{q} \epsilon \mathbf{q} - \frac{c}{\omega} \mathbf{a} \chi \mathbf{q})^{-1} \mathbf{q} \oplus [\frac{c}{\omega} (-\frac{c}{\omega} \mathbf{a} \mu^{-1} \mathbf{q} + \mathbf{q} \delta \mathbf{q}) \mathbf{a} + \frac{c}{\omega} \mathbf{a} \chi - \mathbf{q} \epsilon], \quad (6)$$

$$V_{12} = \mathbf{q} \oplus (\frac{c}{\omega} \mathbf{a} \mu^{-1} - \mathbf{q} \delta) (\mathbf{q} \epsilon \mathbf{q} - \frac{c}{\omega} \mathbf{a} \chi \mathbf{q})^{-1}, \quad V_{21} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{q} \oplus \mathbf{a}, \quad V_{22} = \mathbf{I}.$$

Векторы \mathbf{J} и \mathbf{Q} (2), в свою очередь, можно выразить через составляющие \mathbf{E}_\perp и \mathbf{V}_\perp , используя матрицу \mathbf{V} :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{J} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}^x & -\frac{u_q}{c} \mathbf{I} \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{E}_\perp \\ \mathbf{V}_\perp \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$j_1 = \mathbf{q}^x \mu^{-1} V_{21} \mathbf{I} + \frac{u_q}{c} \mathbf{I} \delta V_{21} \mathbf{I} + \mathbf{q}^x \chi V_{11} \mathbf{I} + \frac{u_q}{c} \mathbf{I} \epsilon V_{11} \mathbf{I}, \quad (8)$$

$$j_2 = \mathbf{q}^x \mu^{-1} V_{22} \mathbf{I} + \frac{u_q}{c} \mathbf{I} \delta V_{22} \mathbf{I} + \mathbf{q}^x \chi V_{12} \mathbf{I} + \frac{u_q}{c} \mathbf{I} \epsilon V_{12} \mathbf{I}.$$

Введем тензор поверхностных адмитансов Γ по аналогии с электродинамикой неподвижных сред как оператор, связывающий векторы \mathbf{Q} и \mathbf{J} на границе раздела

$$\mathbf{J} = \Gamma \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Из соотношений (7), (9) и равенства

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{I} - \mathbf{I} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{12} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{11} \mathbf{E}_1, \quad (10)$$

следующего из второго уравнения Максвелла (3), получаем

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{I} - \mathbf{I} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{12} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{11} \mathbf{I}] \times \quad (11)$$

$$\times \left[\mathbf{q}^* - \frac{u \mathbf{q}}{c} \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{I} - \mathbf{I} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{12} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{k}^* \mathbf{V}_{11} \mathbf{I} \right]^{-1}.$$

Показатель степени «—» обозначает операцию обращения в двумерном пространстве, связанном с границей раздела (см. [5]), т. е. операцию псевдообращения в обычном трехмерном пространстве.

Формула (11) позволяет находить тензор обобщенных адмитансов для движущейся границы раздела, отделяющей движущуюся анизотропную гиротронную среду от некоторой другой. В общем случае не имеет смысла подставлять (6), (8) и выражения для тензоров ϵ , δ , χ , μ^{-1} в (11) ввиду громоздкости конечных выражений. Удобнее последовательно использовать блочную структуру этих формул для численного анализа. Для некоторых важных частных случаев указанные выражения могут заметно упрощаться. Например, для изотропной движущейся среды с параметрами ϵ_0 , μ_0 в системе покоя [4, 11, 12]

$$\epsilon = \epsilon_0 \mathbf{v}_0 \oplus \mathbf{v}_0 + \gamma^2 / \mu_0 (\epsilon_0 \mu_0 - \beta^2) \mathbf{I}_v, \quad \mu^{-1} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{v}_0 \oplus \mathbf{v}_0 - \quad (12)$$

$$- \gamma^2 / \mu_0 (\beta^2 \epsilon_0 \mu_0 - 1) \mathbf{I}_v, \quad \delta = \chi = 1 / \mu_0 \beta \gamma^2 \kappa \mathbf{v}_0^*$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$, $\mathbf{I}_v = 1 - \mathbf{v}_0 \oplus \mathbf{v}_0$ — проективный оператор на плоскость, ортогональную вектору скорости \mathbf{v} , $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$, $\beta = v/c$, $\kappa = \epsilon_0 \mu_0 - 1$. Если скорость движения среды \mathbf{v} и скорость движения границы раздела \mathbf{u} направлены одинаковым образом вдоль нормали \mathbf{q} , но различаются между собой по величине, то после несложных, но громоздких преобразований с учетом (6), (8), (11), (12) получаем

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\mu_0} \frac{\epsilon_0 \mu_0 (\beta_u - \beta) \left(1 - \frac{c}{\omega} \beta \eta \right) + (1 - \beta \beta_u) \left(\beta - \frac{c}{\omega} \eta \right)}{1 - \beta_u \eta \frac{c}{\omega}} \mathbf{a}_0 \oplus \mathbf{b}_0 + \quad (13)$$

$$+ \frac{(1 - \beta^2) \epsilon_0 \left(1 - \frac{c}{\omega} \beta_u \eta \right)}{\epsilon_0 \mu_0 (\beta - \beta_u) \left(1 - \frac{c}{\omega} \beta \eta \right) + (1 - \beta \beta_u) \left(\frac{c}{\omega} \eta - \beta \right)} \mathbf{b}_0 \oplus \mathbf{a}_0,$$

где $\beta_u = u/c$, $\eta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{k}_\perp / |\mathbf{k}_\perp|$, $\mathbf{a}_0 = [\mathbf{b}_0 \mathbf{q}]$. Второй важный случай, встречающийся на практике, — так называемое тангенциальное движение среды и границы раздела, когда векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} лежат в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{q} . При этом, например, если среда движется вместе со своей границей ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$) и вектор скорости лежит в плоскости падения ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{b}_0$), то для тензора $\mathbf{\Gamma}$ из (11) получается выражение

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega}{c \eta} \mathbf{b}_0 \oplus \mathbf{a}_0 - \frac{c \eta}{\omega} \mathbf{a}_0 \oplus \mathbf{b}_0. \quad (14)$$

При выводе соотношений (13)—(14) было использовано дисперсионное уравнение для изотропного движущегося диэлектрика [3]

$$\mathbf{k}^2 = (\omega/c)^2 + \kappa \gamma^2 (\omega/c - \beta \kappa \mathbf{v}_0)^2.$$

Перейдем к амплитудным соотношениям для граничных задач. Пусть на границу раздела двух движущихся с различными скоростями сред наклонно падает плоская произвольная поляризованная волна, причем скорость перемещения границы не совпадает ни с одной из скоростей движения сред, т. е. $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{u}$. Каждая среда в своей системе покоя является изотропной и характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_i , μ_i , $i = 1, 2$. В отличие от покоящихся сред в данной задаче необходимо различать досветовой и сверхсветовой случаи [2, 3]. Если проекция скорости переме-

щения границы раздела вдоль вектора меньше величины проекции групповой скорости отраженной волны на это же направление, то существует, как обычно, одна отраженная и одна преломленная волны. Возможен случай, когда нормальная составляющая скорости границы раздела больше нормальной составляющей групповой скорости отраженной волны. При этом граница раздела как бы обгоняет отраженную волну. Тогда нужно рассматривать две преломленные волны вместо одной отраженной и одной преломленной. Будем считать, что частоты ω , ω^r , $\omega^d(\omega_i)$ и волновые векторы k , k^r , $k^d(k_i)$ падающей, отраженной и преломленной (преломленных) волн известны. Эта задача исследовалась подробно во многих работах (см., напр., [2-4]).

1. Досветовой случай. Используя непрерывность векторов Q и J (2) на границе раздела, запишем:

$$Q_i + Q_r = Q_d, \quad J_i + J_r = J_d, \quad (15)$$

где индексы i , r , d отмечают соответственно падающую, отраженную и преломленную волну. Используя тензоры поверхностных адмитансов (9) Γ_i , Γ_r , Γ_d , получаем:

$$Q_i + Q_r = Q_d, \quad \Gamma_i Q_i + \Gamma_r Q_r = \Gamma_d Q_d. \quad (16)$$

Введем, как это делается для покоящихся сред [5], френелевские операторы R и D , связывающие векторные амплитуды волн на границе раздела:

$$Q_d = D Q_i, \quad Q_r = R Q_i. \quad (17)$$

Подставляя (17) в систему уравнений (16), нетрудно получить выражения для операторов отражения R и пропускания D :

$$R = (\Gamma_r - \Gamma_d)^{-1} (\Gamma_d - \Gamma_i), \quad D = (\Gamma_r - \Gamma_d)^{-1} (\Gamma_r - \Gamma_i). \quad (18)$$

2. Сверхсветовой случай. Вместо системы (16) теперь имеем систему

$$Q_i = Q_+ + Q_-, \quad \Gamma_i Q_i = \Gamma_+ Q_+ + \Gamma_- Q_-. \quad (19)$$

Френелевские операторы D_+ и D_- , связывающие амплитуды преломленных волн с амплитудой падающей волны $Q_+ = D_+ Q_i$, $Q_- = D_- Q_i$, находятся аналогично случаю 1:

$$D_+ = (\Gamma_- - \Gamma_+)^{-1} (\Gamma_- - \Gamma_i), \quad D_- = (\Gamma_- - \Gamma_+)^{-1} (\Gamma_+ - \Gamma_i). \quad (20)$$

Векторные амплитуды E и B полей отраженных и преломленных волн вычисляются с помощью матрицы восстановления V (5) по тангенциальным составляющим E и B , которые, в свою очередь, можно получить из (7), решая относительно этих векторов систему уравнений:

$$\begin{vmatrix} E_r \\ B_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W j_2 & \frac{u_q}{c} W \\ q^x W j_1 q^x & q^x W \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q \\ J \end{vmatrix}, \quad W = (j_2 q^x + \frac{u_q}{c} j_1)^{-1}. \quad (21)$$

Таким образом, схема решения задачи отражения и пропускания электромагнитных волн, наклонно падающих на движущуюся границу раздела движущихся сред, состоит из следующих этапов:

1. Решая соответствующее дисперсионное уравнение для каждой из сред, определить частоты и волновые векторы отраженных и преломленных волн.

2. Найти тангенциальные составляющие векторов поля падающей волны E_i и B_i , рассчитать матрицу восстановления (5) и тензоры j_1 и j_2 (8) для обеих сред.

3. Построить тензоры адмитансов Γ_i , Γ_r , Γ_d , (Γ_i) (11).

4. Рассчитать операторы отражения и пропускания R , D (D_i) (18), (20) для всех волн и вычислить с их помощью векторы Q_r , Q_d (Q_i) и J_r , J_d (J_i).

5. По соотношениям (21) найти тангенциальные составляющие полевых векторов для каждой из преломленных и отраженных волн и восстановить полные векторы E и B .

Отметим, что при решении поставленной задачи ориентация векторов скоростей сред и границы раздела относительно вектора нормали q может быть любой, также любыми могут быть углы падения и состояние поляризации электромагнитных волн. Поэтому полученные операторные выраже-

ния могут быть использованы в любых подобных задачах, допускающих четкое разделение на досветовой или сврхсветовой случай. Этот метод допускает обобщение для сложных многослойных движущихся сред, поскольку все действия выполняются в лабораторной системе отсчета и повторяют один и тот же алгоритм.

Таким образом, многообразные эффекты поляризационной оптики изотропных движущихся сред могут быть проанализированы на основе общих операторных соотношений (9), (11), (18), (20), полученных на основе формализма тензоров адмитансов. Эти соотношения включают в себя частные случаи, имеющиеся в литературе.

В качестве примера, иллюстрирующего данный метод решения, рассмотрим частный случай досветового отражения и преломления волн, когда обе среды и граница между ними движутся с одинаковой скоростью v , параллельной вектору q . Считаем нормальные составляющие волновых векторов η , η^r , η^d и частоты ω , ω^r , ω^d известными. Тензоры поверхностных адмитансов запишем, используя выражение (13):

$$\Gamma_i = \frac{A_i}{\mu_1} a_0 \oplus b_0 - \epsilon_1 A_i b_0 \oplus a_0, \quad \Gamma_r = \frac{A_r}{\mu_1} a_0 \oplus b_0 - \epsilon_1 A_r b_0 \oplus a_0, \quad (22)$$

$$\Gamma_d = \frac{A_d}{\mu_2} a_0 \oplus b_0 - \epsilon_2 A_d b_0 \oplus a_0,$$

$$A_i = \frac{\beta - \frac{c}{\omega} \eta}{1 - \frac{c}{\omega} \beta \eta}, \quad A_r = \frac{\beta + \frac{c}{\omega^r} \eta^r}{1 + \frac{c}{\omega^r \beta \eta^r}}, \quad A_d = \frac{\beta - \frac{c}{\omega^d} \eta^d}{1 - \frac{c}{\omega^d} \beta \eta^d},$$

где $k^r = k - \eta^r q$, $k^d = k + \eta^d q$. Френелевские операторы отражения и пропускания имеют вид:

$$R = \frac{\mu_1 A_d - \mu_2 A_i}{\mu_2 A_r - \mu_1 A_d} \tau_a - \frac{\epsilon_1 / A_i - \epsilon_2 / A_d}{\epsilon_1 / A_r - \epsilon_2 / A_d} \tau_b, \quad (23)$$

$$D = \frac{\mu_2 (A_r - A_i)}{\mu_2 A_r - \mu_1 A_d} \tau_b + \frac{\epsilon_1 \left(\frac{1}{A_r} - \frac{1}{A_i} \right) \tau_a}{\epsilon_1 / A_r - \epsilon_2 / A_d},$$

$$\tau_a = a_0 \oplus a_0, \quad \tau_b = b_0 \oplus b_0.$$

Пусть падающая волна имеет ТЕ поляризацию, т. е. $E_i = E a_0$.

Тогда

$$B_i = \frac{c}{\omega} E (\eta b_0 - k, q), \quad E_{ir} = E_i, \quad B_{ir} = \frac{c}{\omega} E \eta b_0, \quad Q_i = E \left(1 - \frac{c}{\omega} \beta \eta \right) b_0.$$

Вычисляя векторы $Q_r = R Q_i$, $Q_d = D Q_i$, $J_r = \Gamma_r Q_r$, $J_d = \Gamma_d Q_d$ и восстанавливая вектор напряженности электрического поля по формуле (21), получаем:

$$E_r = \frac{\omega^r}{\omega} \frac{\mu_2 \eta - \mu_1 \eta^d + \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\mu_2 - \mu_1) \text{In}v}{\mu_1 \eta^d + \mu_2 \eta^r - \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\mu_2 - \mu_1) \text{In}v} E a_0, \quad (24)$$

$$E_d = \frac{\omega^d}{\omega} \frac{\mu_2 (\eta + \eta^r) E a_0}{\mu_1 \eta^d + \mu_2 \eta^r - \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\mu_2 - \mu_1) \text{In}v},$$

где $\text{In}v = k \cdot v - \omega = k^r \cdot v - \omega^r = k^d \cdot v - \omega^d$ — один из кинематических инвариантов, введенный в [2] для удобства расчетов. Для ТМ волны

$$H_i = H a_0 = H_{ir}, \quad D_i = \frac{c}{\omega} H (k, q - \eta b_0),$$

$$B_i = B_{ir} = \frac{1}{\epsilon_1} \left(1 + \kappa \gamma^2 \left(1 - \frac{c}{\omega} \beta \eta \right) \right) H a_0,$$

$$E_i = \frac{c}{\omega} \frac{H k_r}{\epsilon_1} q - \frac{\gamma^2 H}{\epsilon_1} \left(\beta \kappa + \frac{c \gamma}{\omega} \left(1 - \epsilon_1 \mu_1 \right) \beta^2 \right) b_0, \quad Q_i = \frac{H}{\epsilon_1} \left(\frac{c}{\omega} \eta - \beta \right) a_0,$$

и, опуская дальнейшие несложные вычисления, окончательно имеем:

$$H_r = \frac{\omega^r}{\omega} \cdot \frac{\epsilon_2 \eta - \epsilon_1 \eta^d + \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \text{Inv}}{\epsilon_1 \eta^d + \epsilon_2 \eta^r + \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \text{Inv}} N a_0,$$

$$H_d = \frac{\omega^d}{\omega} \cdot \frac{\epsilon_2 (\eta - \eta^r) N a_0}{\epsilon_2 \eta^r + \epsilon_1 \eta^d + \gamma^2 \frac{\beta}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \text{Inv}}.$$

Формулы (24), (25) полностью совпадают с соответствующими выражениями для амплитуд отраженной и прошедшей волн из работы [13].

Автор выражает благодарность Л. М. Барковскому за постановку задачи и сделанные замечания.

Список литературы

1. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. //Эйнштейновский сб. 1974. М., 1976.
2. Столяров С. Н. //Там же. 1975—1976. М., 1978.
3. Болотовский Б. М., Столяров С. П. //УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 155.
4. Kunz K. Z. //Journ. Appl. Phys. 1980. V. 51. № 2. P. 873.
5. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. //Journ. Phys. A. 1987. V. 20. № 5. P. 1095.
6. Барковский Л. М., Борздов Г. П. //Опт. и спектр. 1975. Т. 39. № 1. С. 150.
7. Борздов Г. П., Барковский Л. М., Лаврукович В. И. //Ж. прикл. спектр. 1976. Т. 25. № 3. С. 526.
8. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М. 1958. Т. 1.
9. Лавриненко А. В. //Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1988.
10. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
11. Сягло И. С. //Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3. С. 14.
12. Шолох В. Ф. //Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1981. № 1. С. 123.
13. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4. № 6. С. 1171.

Поступила в редакцию 16.03.92.

УДК 534.231.2

И. В. СЕМЧЕНКО, А. П. СЕРДЮКОВ, С. А. ХАХОМОВ

ПРОХОЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СЛОЙ СЕГНЕТОКЕРАМИКИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию взаимодействия акустических волн с переменными электрическими полями в кристаллах [1—5]. В работе [1], например, акустоэлектромагнитные взаимодействия в сегнетоэлектрических резонаторах из танталата калия положены в основу возбуждения ультразвука. В статье [2] нелинейное электроакустическое взаимодействие в кристалле ниобата лития рассматривается как метод фазового сопряжения акустических волн. В работе [6] показана возможность формирования вращающейся акустической анизотропии в кристаллах с сильной деформационной зависимостью диэлектрической проницаемости под действием внешнего электрического поля. Рассмотрены эффекты преобразования частоты ультразвука, усиления и генерации обращенной акустической волны, возникновения электроакустической памяти кристалла, а также обосновываются преимущества использования пространственно-однородного вращающегося электрического поля. Подробное рассмотрение влияния вязкости среды на акустические свойства кристалла с вращающейся анизотропией проведено в работе [7]. В данной статье, без учета отражения ультразвука от границ кристалла, определены волновые числа и эллиптичности собственных акустических волн, интенсивности прошедшей и обращенной волн, исследованы гиротропные свойства кристалла с вращающейся анизотропией. Исследовано распространение акустических волн через слой кристалла с нестационарной анизотропией, индуцированной вращающимся электрическим полем, с учетом отражения ультразвука от границ слоя. Получены выражения для комплексных амплитуд обращенной, отраженной и прошедших акустических волн, при этом ультразвук, отраженный от границ слоя, считается слабым. Изучена зависимость интенсивностей обра-

щенной и прошедшей волн от толщины области с вращающейся анизотропией. Получены условия, определяющие толщины слоя с вращающейся анизотропией, при которых интенсивности этих волн принимают максимальные и минимальные значения.

Рассмотрим кристалл с сильной деформационной зависимостью диэлектрической проницаемости (например, центросимметричную сегнетокерамику на основе титаната бария), центральная область которого помещена во вращающееся электрическое поле. Такое поле может быть создано, например, путем подачи электрического потенциала со сдвигом фазы на систему параллельных металлических электродов, нанесенных на боковую поверхность сегнетокерамического цилиндра в центральной области [6]. Пусть на границу области, испытывающей воздействие вращающегося электрического поля, при $z = 0$ падает циркулярно-поляризованная акустическая волна

$$u_e = u_0^- n_- \exp [-i\omega_0 t + ik_0 z], \quad (1)$$

вектор упругого смещения которой имеет такое же направление вращения во времени, как и внешнее электрическое поле.

В результате взаимодействия распространяющегося в кристалле ультразвука с вращающимся электрическим полем может произойти усиление прошедшей волны на частоте ω_0 :

$$u_+ = u_+^- n_- \exp [-i\omega_0 t + ik_0 z] \quad (2)$$

и генерация обращенной волны на частоте $2\Omega - \omega_0$:

$$u_c = u_c^+ n_+ \exp [-i(\omega_0 - 2\Omega)t + ik_0^c z]. \quad (3)$$

Вследствие отражения ультразвука от границ слоя с вращающейся анизотропией могут возникнуть также отраженная волна на частоте ω_0 :

$$u_r = u_r^- n_- \exp [-i\omega_0 t - ik_0 z] \quad (4)$$

и прошедшая волна на частоте $2\Omega - \omega_0$:

$$u_{cr} = u_{cr}^+ n_+ \exp [-i(\omega_0 - 2\Omega)t - ik_0^c z]. \quad (5)$$

Представляя согласно [7] акустическое поле в слое с вращающейся анизотропией в виде суперпозиции четырех собственных мод с амплитудами A_m , из условий непрерывности векторов упругого смещения волн (1—5) и непрерывности компонент тензора напряжений σ на границах слоя [8] получаем систему из восьми уравнений:

$$\sum_{m=1}^4 A_m = u_r^- + u_0^-, \quad (6)$$

$$\sum_{m=1}^4 A_m \zeta_m^{-1} (\omega_0 - \Omega) = u_c^+,$$

$$\sum_{m=1}^4 A_m \exp [ik_m (\omega_0 - \Omega) L] = u_+^- \exp [ik_0 L],$$

$$\sum_{m=1}^4 A_m \zeta_m^{-1} (\omega_0 - \Omega) \exp [ik_m (\omega_0 - \Omega) L] = u_{cr}^+ \exp [-ik_0^c L],$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^4 \{ [i\bar{\Lambda} + \bar{B}\omega_0] + [i\delta + \kappa (\omega_0 - 2\Omega)] \zeta_m^{-1} (\omega_0 - \Omega) \} k_m (\omega_0 - \Omega) A_m = \\ = k_0 (ic_{55} + \eta_{55}\omega_0) (u_0^- - u_2^-), \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^4 \{ [i\bar{\Lambda} + \bar{B}(\omega_0 - 2\Omega)] \zeta_m^{-1}(\omega_0 - \Omega) + [i\delta + \kappa\omega_0] \} k_m(\omega_0 - \Omega) A_m = \\ = k_0^c (ic_{55} + \eta_{55}(\omega_0 - 2\Omega)) u_c^+,$$

$$\sum_{m=1}^4 \{ [i\bar{\Lambda} + \bar{B}\omega_0] + [i\delta + \kappa(\omega_0 - 2\Omega)] \zeta_m^{-1}(\omega_0 - \Omega) \} k_m(\omega_0 - \Omega) A_m \times \\ \times \exp[ik_m(\omega_0 - \Omega)L] = k_0(ic_{55} + \eta_{55}\omega_0) u_c^- \exp[ik_0L],$$

$$\sum_{m=1}^4 \{ [i\bar{\Lambda} + \bar{B}(\omega_0 - 2\Omega)] \zeta_m^{-1}(\omega_0 - \Omega) + [i\delta + \kappa\omega_0] \} k_m(\omega_0 - \Omega) A_m \times \\ \times \exp[ik_m(\omega_0 - \Omega)L] = -k_0^c \text{Lic}_{55} + \eta_{55}(\omega_0 - 2\Omega) u_c^+ \exp[-ik_0^c L].$$

Здесь

$$k_0 = \omega_0 \left[\frac{\rho}{c_{55} - i\eta_{55}\omega_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ k_0^c = (2\Omega - \omega_0) \left[\frac{\rho}{c_{55} - i\eta_{55}(2\Omega - \omega_0)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

волновые числа, зависящие от частот волн и невозмущенных параметров плотности ρ , упругости c_{55} и вязкости η_{55} слоев кристалла, граничащих при $z=0$ и $z=L$ со слоем, помещенным во вращающееся электрическое поле;

$$k_{1,2}(\omega) = -k_{4,3}(\omega) = \\ = \sqrt{\rho} \left[\frac{\Lambda_1' \omega_2^2 + \Lambda_2' \omega_1^2 \pm [(\Lambda_1' \omega_2^2 - \Lambda_2' \omega_1^2) + 4X_1 X_2 \omega_1^2 \omega_2^2]^{\frac{1}{2}}}{2(\Lambda_1' \Lambda_2' - X_1 X_2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \zeta_{1,2}(\omega) = \zeta_{3,4}(\omega) = \frac{\rho \omega_2^2 - k_{1,2}^2(\omega) \Lambda_2'}{k_{1,2}^2(\omega) X_1} \quad (8)$$

волновые числа и эллиптичности собственных мод акустического поля [7]. В выражениях (1—8) также использованы обозначения:

$$\Lambda_1' = \bar{\Lambda} - i\bar{B}\omega_1, \quad \Lambda_2' = \bar{\Lambda} - i\bar{B}\omega_2, \quad X_1 = \delta - i\kappa\omega_1, \quad X_2 = \delta - i\kappa\omega_2, \quad \omega_1 = \omega + \Omega, \quad \omega_2 = \omega - \\ - \Omega, \quad \bar{\Lambda} = c_{44} + (\alpha_{155} + \alpha_{144}) E_0^2/2, \quad \delta = (\alpha_{155} - \alpha_{144}) E_0^2/2, \quad \bar{B} = \eta_{44} + (\beta_{155} + \\ + \beta_{144}) E_0^2/2, \quad \kappa = (\beta_{155} - \beta_{144}) E_0^2/2;$$

E_0 и Ω — амплитуда и частота вращения внешнего электрического поля, α и β — тензоры, учитывающие электрострикционное воздействие этого поля на упругие постоянные c и вязкость η кристалла, ρ — плотность кристалла, $p_{\pm} = (a + ib)/\sqrt{2}$ — векторы циркулярной поляризации, a и b — орты лабораторной декартовой системы координат.

Учитывая, что относительное изменение параметров кристалла под действием электрического поля составляет $\sim 10^{-2}$ [9—11], можно предположить, что отраженная u_r , прошедшая u_c волны и собственные моды A_3 , A_4 являются слабыми.

Рассмотрим случай резонансного взаимодействия, когда частота ультразвука ω_0 совпадает с частотой электрического поля Ω . Преобразовав систему (6) и используя указанное приближение, находим:

$$A_1 = 2\zeta_1 G_2 u_0^- \{ \zeta_1 F_1 G_2 - \zeta_2 \exp [i (k_1 - k_2) L] G_1 F_2 \}^{-1},$$

$$A_2 = -A_1 \zeta_2 \zeta_1^{-1} \exp [i (k_1 - k_2) L] G_1 G_2^{-1},$$

$$u_r^- = \frac{1}{2} A_1 \exp [i (k_1 - k_0) L] F_1 + \frac{1}{2} A_2 \exp [i (k_2 - k_0) L] F_2,$$

$$u_c^+ = \frac{1}{2} \zeta_1^{-1} A_1 G_1 + \frac{1}{2} \zeta_2^{-1} A_2 G_2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \{ \exp [-ik_2 L] - \zeta_1 \zeta_2^{-1} \exp [-ik_1 L] \}^{-1} \times \\ \times \{ A_1 [\exp [ik_1 L] (2 - F_1) - \exp [-ik_1 L] (2 - G_1)] + \\ + A_2 [\exp [ik_2 L] (2 - F_2) - \zeta_1 \zeta_2^{-1} \exp [-ik_1 L] (2 - G_2)] \},$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \zeta_1 \{ \zeta_1^{-1} A_1 (2 - G_1) + \zeta_2^{-1} A_2 (2 - G_2) + 2\zeta_2^{-1} A_3 \},$$

$$u_{\sigma}^+ = \frac{1}{2} \{ \zeta_1^{-1} A_1 \exp [ik_1 L] (2 - G_1) + \zeta_2^{-1} A_2 \exp [ik_2 L] (2 - G_2) + \\ + 2\zeta_2^{-1} A_3 \exp [-ik_2 L] + 2\zeta_1^{-1} A_4 \exp [-ik_1 L] \} \exp [ik_0 L],$$

$$u_r^- = \frac{1}{2} [A_1 (2 - F_1) + A_2 (2 - F_2)] + A_3 + A_4.$$

Здесь

$$F_1 = 1 + k_1 [(i\bar{\Lambda} + \bar{B}\Omega) + \zeta_1^{-1} (i\delta - \kappa\Omega)] \{ k_0 (ic_{55} + \eta_{55}\Omega) \}^{-1},$$

$$F_2 = 1 + k_2 [(i\bar{\Lambda} + \bar{B}\Omega) + \zeta_2^{-1} (i\delta - \kappa\Omega)] \{ k_0 (ic_{55} + \eta_{55}\Omega) \}^{-1},$$

$$G_1 = 1 + k_1 [(i\bar{\Lambda} - \bar{B}\Omega) + \zeta_1 (i\delta + \kappa\Omega)] \{ k_0 (ic_{55} - \eta_{55}\Omega) \}^{-1},$$

$$G_2 = 1 + k_2 [(i\bar{\Lambda} - \bar{B}\Omega) + \zeta_2 (i\delta + \kappa\Omega)] \{ k_0 (ic_{55} - \eta_{55}\Omega) \}^{-1},$$

$$k_1 = k_1 (\omega_0 - \Omega) \quad k_2 = k_2 (\omega_0 - \Omega),$$

$$\zeta_1 = \zeta_1 (\omega_0 - \Omega) \quad \zeta_2 = \zeta_2 (\omega_0 - \Omega).$$

Таким образом, считая отражение от границ слоя слабым, мы получили выражения для комплексных амплитуд обращенной, отраженной и прошед-

шей волн. Амплитуды всех волн могут быть определены также в результате численного решения системы (6). Вычисления производились при следующих значениях параметров [9—11]: $\Lambda = 10^{11}$ Н/м², $\delta = -4,465 \cdot 10^9$ Н/м², $\bar{B} = 100$ ед. СИ, $\kappa = 5$ ед. СИ, $\Omega = 10^7$ Гц, $\rho = 5,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_0 = 400$ кВ/м, $c_{55} = 9,38 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\eta_{55} = 93,8$ ед. СИ, $\omega_0 = 10^7$ Гц.

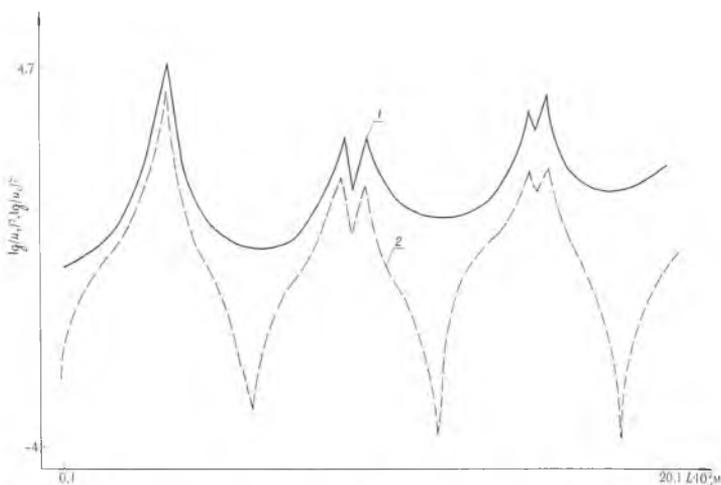


Рис. 1. Зависимость интенсивностей прошедшей на частоте ω_0 и отраженной волн от толщины слоя с вращающейся анизотропией: 1 — $\lg |u_r|^2$; 2 — $\lg |u_t|^2$

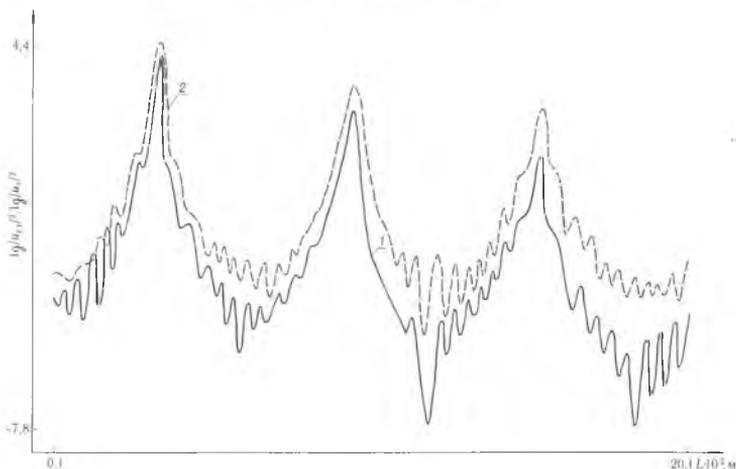


Рис. 2. Зависимость интенсивностей прошедшей на частоте $2\Omega - \omega_0$ и отраженной волн от толщины слоя с вращающейся анизотропией: 1 — $\lg |u_r|^2$; 2 — $\lg |u_t|^2$

На рис. 1 и 2 представлены в логарифмическом масштабе графики зависимости интенсивностей всех волн от толщины слоя с вращающейся анизотропией, полученные в результате численного решения системы (6).

Анализ графиков позволяет сделать заключение о характере зависимости коэффициентов отражения, прохождения и усиления от толщины области с индуцированной анизотропией. Все графики имеют периодически повторяющиеся резонансы при условии

$$[k_1(\omega_0 - \Omega) - k_2(\omega_0 - \Omega)]L_s = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi s, \quad (9)$$

где φ_1 и φ_2 — аргументы комплексных эллиптичности $\zeta_1(\omega_0 - \Omega)$ и $\zeta_2(\omega_0 - \Omega)$ (8), параметр s принимает значения из множества целых чисел. При

выполнении условия (9) нормированные интенсивности прошедшей и обращенной волн могут принимать гигантские значения порядка 10^5 . В то же время генерация и усиление ультразвука в критических точках являются нестабильными, поскольку коэффициенты усиления, прохождения и отражения очень быстро уменьшаются при небольшом нарушении условия (9). При толщинах слоя, удовлетворяющих соотношению

$$[k_1(\omega_0 - \Omega) - k_2(\omega_0 - \Omega)]L_s = 2\pi s, \quad (10)$$

интенсивность обращенной волны принимает минимальные значения.

Из сравнения графиков, полученных различными способами, можно сделать вывод о том, что приближенные выражения достаточно точно описывают поведение интенсивностей обращенной, отраженной и прошедших волн в областях стабильного взаимодействия, вдали от толщин слоя, удовлетворяющих соотношению (9). В критических точках слабое отражение ультразвука от границ слоя с вращающейся анизотропией не имеет места, и приближенный метод не может быть использован. При выполнении условия (9) приближенные вычисления дают бесконечно большие значения для интенсивностей всех волн.

Список литературы

1. Белокопытов Г. В., Иванов А. В., Чистяев В. П. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 2. С. 218.
2. Ohno Masahiro // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 54. № 20. P. 1979.
3. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Семенов В. П. и др. // Журн. техн. физ. 1989. Т. 59. № 4. С. 182.
4. Ohno Masahiro // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 55. № 9. P. 832.
5. Bajak Ivan L. // Wiss. Beitr. M., Luther-Univ., Halle-Wittenberg. O. 1989. № 26. P. 83.
6. Белый В. Н., Севрук Б. Б. // Журн. техн. физ. 1987. Т. 57. № 2. С. 336.
7. Семченко И. В., Сердюков А. Н., Хахомов С. А. // Кристаллография. 1991. Т. 36. № 2. С. 298.
8. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М., 1979.
9. Пекар С. И., Демиденко А. А., Здебский А. П. и др. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. С. 1089.
10. Жабитенко П. К., Кучеров И. Я. // Укр. физич. журнал. 1978. Т. 23. № 2. С. 263.
11. Рыбнянец А. П., Турик Д. В., Дорохова П. В. и др. // Журн. техн. физики. 1986. Т. 56. № 12. С. 2371.

Поступила в редакцию 14.01.92.

УДК 535.34

Вик. В. ШЕПЕЛЕВИЧ

ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ОТ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛА

Большой диапазон практических применений четырехволнового взаимодействия (обращение волнового фронта, интерферометрия в реальном времени [1], выполнение логических операций, параллельная обработка оптической информации и др. [2].) способствует интенсивному развитию исследований этого явления с использованием различных рабочих сред. В стандартных схемах обращения волнового фронта при четырехволновом смешении в высокочувствительных фоторефрактивных кристаллах $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) и $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) кристаллическая пластинка среза (110) устанавливается таким образом, чтобы кристаллографическое направление [001] было перпендикулярно или параллельно плоскости падения лучей (вектор записываемой голографической решетки $\mathbf{K} \perp [001]$ и $\mathbf{K} \parallel [001]$) [3]. Эти геометрии, как показано ниже, не являются оптимальными.

Известно [4], что кристаллы BSO, BGO и BTO являются пьезоэлектриками. В [5] показано, что учет пьезоэлектрического эффекта и фотоупругости приводит к значительному изменению свойств формирующихся в этих средах голографических решеток, что необходимо учитывать

и в процессе оптимизации условий четырехволнового смешения. Следует отметить, что пьезоэлектрический эффект не проявляется при $K \parallel [001]$ и слабо сказывается при $K \parallel [110]$ [6], что, видимо являлось причиной пренебрежения им в подавляющем большинстве работ по голографии в фоторефрактивных кристаллах.

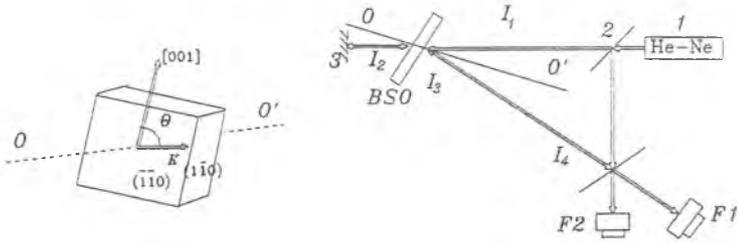


Рис. 1. Схема эксперимента и ориентация кристалла

Цель настоящего сообщения — изучение влияния ориентации вектора решетки K относительно направления $[001]$ на энергетическую эффективность обращения волнового фронта при вырожденном четырехволновом смешении в кристалле BSO с применением модели голографической решетки [5].

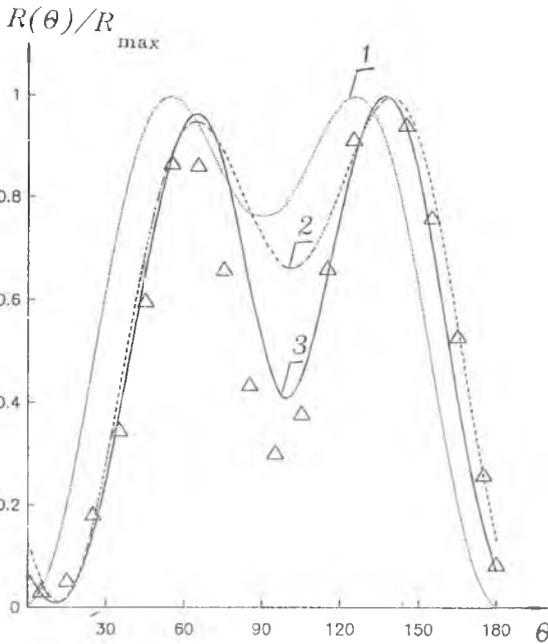


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения обращенной волны от угла ориентации кристалла BSO: Δ — экспериментальные точки; 1 — теоретическая зависимость, полученная без учета оптической активности и пьезоэффекта; 2 — с учетом оптической активности; 3 — с учетом оптической активности и пьезоэффекта

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. В качестве обращающего элемента использовалась кристаллическая пластинка среза (110) толщиной 2,19 мм. Световой пучок He — Ne лазера 1 разделялся на два пучка полупрозрачным зеркалом 2. Пучок накачки I_1 направлялся на кристалл, где интерферировал с сигнальным пучком I_3 . Поскольку в кристалле рассматриваемого среза отражательные решетки практически не регистрируются, можно считать, что пучок I_2 , отраженный от зеркала 3, считается пропускающей решетку, записанную световыми пучками I_1 и I_3 . При этом дифрагированный на решетке пучок I_4 является обращенным по отношению к I_3 . Интенсивность обращенного пучка измерялась фотоприемником $\Phi 1$, а фотоприемник $\Phi 2$ использовался для контроля стабильности интенсивности лазерного излучения. Пучки I_1 , I_3 являлись линейно поляри-

зованными в плоскости схождения. Угол поворота плоскости поляризации в результате однократного прохождения света через кристалл составлял 44° . Ориентация кристалла относительно вектора K показана на рис. 1.

Проведенные измерения интенсивности обращенного пучка I_4 в зависимости от угла поворота кристалла показали, что максимум коэффициента отражения достигается при углах ориентации кристалла 50° и 140° (рис. 2).

Для получения теоретической зависимости коэффициента обращения от угла Θ , вообще говоря, необходим учет взаимодействия всех четырех пучков. Однако, как отмечалось выше, в первом приближении можно считать голографическую решетку в стационарном режиме заданной, рассматривая дифракцию пучка I_2 на этой решетке с азимутом, измененным из-за

вращения плоскости поляризации света в кристалле. Задача такого типа решалась в работе [5]. Теоретические зависимости, построенные с использованием результатов модели [5], приведены на рис. 2. При их расчете использовались следующие параметры (напр., [5]): фотоупругие постоянные $P_{11} = -0,16$, $P_{12} = -0,13$, $P_{13} = -0,12$, $P_{44} = -0,015$; электрооптический коэффициент $R_{41} = -5,0 \cdot 10^{-12}$ м/В; модули упругости $C_{11} = 12,96 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = 2,99 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44} = 2,45 \cdot 10^{10}$ Н/м² и пьезоэлектрический коэффициент $e_{14} = 1,12$ Кл/м². Феноменологическое значение величины электрического поля решетки $E_0 = 0,5$ кВ/см было выбрано исходя из наилучшего согласия с экспериментальными данными. Кривая 1, полученная без учета оптической активности и пьезоэффекта, является симметричной относительно угла $\Theta = 90^\circ$. Кривая 2, построенная с учетом оптической активности, уже не симметрична и по расположению максимумов удовлетворительно согласуется с экспериментом. Однако в области провала (при угле Θ , близком к 100°) наблюдается значительное расхождение в значениях коэффициента отражения с экспериментальными данными (почти в два раза). Наилучшее согласие с экспериментом дает одновременный учет оптической активности и пьезоэффекта (кривая 3).

Таким образом, показано, что эффективность обращения волнового фронта сильно зависит от угла Θ , определяющего ориентацию кристалла, а максимальное значение коэффициента отражения достигается при угле Θ , отличном от углов 0° и 90° , характеризующих традиционные геометрии четырехволнового смешения. Учет оптической активности позволяет приближенно рассчитать угол поворота кристалла, при котором коэффициент обращения максимален. Учет пьезоэффекта позволяет получить лучшее согласие теоретических и экспериментальных значений. Дальнейшая оптимизация условий обращения волнового фронта может быть достигнута за счет вариации отношения интенсивностей пучков, изменения их поляризации и приложения к кристаллу внешнего электрического поля.

Автор благодарит Толстика А. Л. и Чалея А. В. за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

1. Петров М. П., Степанов С. И., Хоменко А. В. Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации. Л., 1983.
2. Yeh P. // Opt. Lett. 1987. V. 12. № 2. P. 138.
3. Erdmann A., Kovarschik R., Wenke L. // Journ. Modern. Opt. 1988. V. 35. № 10. P. 1727.
4. Акустические кристаллы / Под ред. М. П. Шасколькой. М., 1982.
5. Shepelevich V. V., Shandarov S. M., Mandel A. E. // Ferroelectrics. 1990. V. 110. P. 235.
6. Шандаров С. М., Шепелевич В. В., Хатьков Н. Д. // Оптика и спектр. 1991. Т. 70. № 5. С. 1068.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 535.37

С. К. ГОРБАЦЕВИЧ, И. М. ГУЛИС

ФОТОИНДУЦИРОВАННЫЙ ШТАРК—ЭФФЕКТ В МОЛЕКУЛЯРНЫХ АНСАМБЛЯХ

Многообразие фотофизических процессов, реализующихся в электронно-возбужденных молекулярных ансамблях, позволяет рассматривать молекулярные системы как перспективные среды для создания устройств оптической обработки информации, характеризующихся сложной динамикой отклика на световые воздействия. Имющиеся в литературе примеры анализа возможностей использования молекулярных сред в устройствах преобразования оптических сигналов основываются чаще всего на достаточно тривиальных эффектах типа насыщения поглощения [1]. Тем не менее даже в рамках таких простейших подходов перспективы использования молекулярных систем оказываются многообещающими, в первую очередь в связи с высокими сечениями поглощения, характерными для электронных переходов в сложных молекулах. Принципиально новые возможности могут открывать-

ся при использовании коллективных свойств молекулярных систем. В настоящей работе анализируются статические и динамические характеристики ансамбля сложных органических молекул, поведение которого определяется электростатическим взаимодействием дипольных моментов молекул в возбужденном и электронном состояниях.

Как известно, в условиях, когда электронные полосы поглощения сложных молекул (типа красителей) формируются за счет электрон-фононного взаимодействия и неоднородного уширения, типичные значения сечения поглощения имеют величины порядка 10^{-16} см². При низких температурах, в условиях, когда электрон-фононное взаимодействие существенно ослабевает, в бесфононных линиях сечения поглощения могут быть выше на 3—4 порядка [2]. Это обстоятельство обеспечивает возможность существенного снижения требуемых для оптического управления плотностей энергии (мощности).

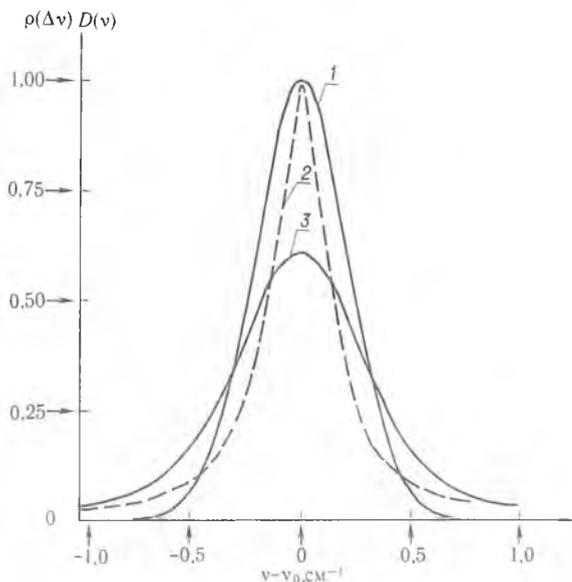


Рис. 1. Спектры поглощения однородного контура (1) и уширенного за счет фотоиндуцированного Штарк-эффекта (2). Функция распределения по частотам 0 — 0-перехода

ся поле, создаваемое данной молекулой (будем называть ее условно индуктором), может находиться значительное число других молекул (вообще говоря, это могут быть молекулы другого соединения). За счет изменения энергии взаимодействия произойдут сдвиги частот переходов в окружающих молекулах («фотоиндуцированный Штарк-эффект»), в результате чего изменится контур неоднородно уширенного спектра. При условии, что однородные контуры представляют собой узкие бесфононные линии, небольшие сдвиги частот в слабых полях должны привести к значительному изменению контура, т. е., можно ожидать, что влияние «индуктора» будет достаточно далекодействующим, и в его сфере воздействия окажется много молекул.

Итак, полагаем, что все молекулы, включая молекулы индуктора, в основном состоянии имеют нулевой дипольный момент, а при переводе в возбужденное состояние дипольный момент индуктора и остальных молекул возрастает до величин μ_u и μ соответственно. В такой системе при переводе индуктора в возбужденное состояние будет наблюдаться уширение контура поглощения (от однородной ширины до контура, представляющего собой свертку однородного контура с функцией неоднородного уширения). Для численного расчета функции неоднородного уширения опишем вокруг пробной молекулы куб с ребром 20 нм, который заполним молекулами индуктора, находящимися в возбужденном состоянии (т. е., с дипольным моментом μ_u). Число этих молекул определяется в соответствии с распределением Пуассона для среднего числа, отвечающим данной концентрации возбужденных молекул индуктора, которая, в свою очередь, определяется услови-

Проанализируем возможности реализации нового подхода, позволяющего при использовании молекулярных систем с узкими (бесфононными) линиями достигать резкого снижения энергии управления. Идею подхода можно пояснить следующим образом. В обычных вариантах оптического управления поглощение рабочей средой одного кванта света приводит к изменению оптических характеристик одной молекулы. Явного усиления эффекта можно было бы достичь, если бы поглощение одного кванта молекулой оказывало бы воздействие на некоторый ансамбль молекул. Пусть в результате перевода некоторой молекулы в возбужденное состояние существенно меняются ее электрические характеристики (например, возрастает дипольный момент). В изменившемся

ями возбуждения. Координаты этих молекул и направления дипольных моментов выбираются случайным образом. Ограничимся рассмотрением только диполь-дипольных взаимодействий, так как индукционные и дисперсионные взаимодействия в данном случае не окажут заметного влияния на результаты расчета. Вычисляя энергию взаимодействия пробной молекулы с молекулами индуктора и многократно повторяя эту операцию для новых случайных конфигураций, построим функцию неоднородного уширения. Свертка ее с однородным контуром дает уширенный спектр.

На рис. 1 приведены результаты такого расчета для следующих вполне реалистичных параметров: концентрация возбужденных молекул индуктора $C_x = 10^{-3}$ моль/л, $\mu_u = 10D$, $\mu = 2D$, однородная ширина контура принималась $0,5 \text{ см}^{-1}$. Как следует из рисунка, за счет уширения пиковая интенсивность в максимуме полосы поглощения падает вдвое, что вполне достаточно для управления пропусканием. При общей концентрации индуктора C_0

величина C_x достигается при плотности энергии $E = \frac{C_x n \nu}{C_0 \sigma_u}$. Для $C_x = 10^{-3}$ моль/л, $C_0 = 1$ моль/л, $\sigma_u = 10^{-13} \text{ см}^2$ расчет дает $E = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/см}^2 = 4 \cdot 10^{-17} \text{ Дж/мкм}^2$ — величина заведомо превосходящая как все достигнутое, так и, по-видимому, требующийся практический уровень. Еще меньшие энергии управляющих сигналов можно получить, если рассмотреть ориентированный ансамбль молекул, что в принципе может быть достигнуто путем внедрения молекул в кристалл (матрицы Шпольского).

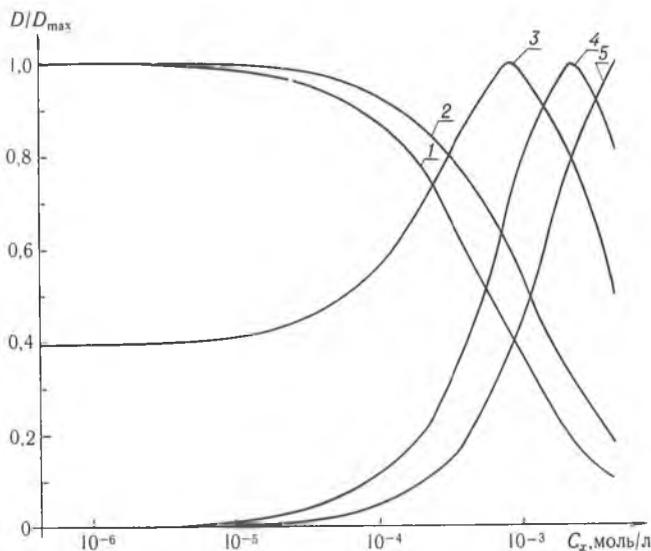


Рис. 2. Зависимость оптической плотности от концентрации молекул индуктора в возбужденном состоянии. Отстройка частоты: $\nu - \nu_0 = 0(1), 0.5(2), 1(3), 2(4), 4 \text{ см}^{-1}(5)$.

Если ансамбль состоит из молекул одного типа, то в зависимости от частоты возбуждающего света с ростом концентрации молекул в возбужденном состоянии может наблюдаться как убыль поглощения на частоте возбуждения (рис. 2, кривые 1, 2), так и его возрастание (см. рис. 2, кривые 3—5); оптические плотности пронормированы на максимальное значение D_{\max} в диапазоне анализируемых концентраций C_x ; расчеты проведены для системы ориентированных молекул $\mu = 4,5D$, ширина однородного контура 1 см^{-1} .

Рассмотрим динамику накопления молекул в возбужденном состоянии после включения возбуждающего света. Для доли молекул в возбужденном состоянии $X = \frac{C_x}{C_0}$ (C_0 — концентрация молекул активатора) можно записать:

$$\frac{dX}{dt} = (1 - X) \langle \sigma_u(x) \rangle I - XK_f. \quad (1)$$

Здесь K_f — константа флуоресценции.

В выражении (1) среднее сечение поглощения $\langle \sigma_u(X) \rangle$ зависит от концентрации молекул активатора в возбужденном состоянии и определяется сверткой функции распределения молекул по частотам 0—0-перехода с однородным контуром:

$$\langle \sigma_u(X) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^*(\nu_b - \Delta\nu) \rho(\Delta\nu, C_x) d(\Delta\nu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\Delta\nu, C_x) d(\Delta\nu)}. \quad (2)$$

Здесь $\rho(\Delta\nu, C_x)$ — функция распределения молекул по частотам 0—0-перехода, которая рассчитывалась по описанной методике (в расчете рассматривался пространственно неупорядоченный ансамбль ориентированных молекул, имеющих дипольный момент в возбужденном состоянии $\mu = 4,5 \text{ D}$, $\sigma^*(\nu_b)$ — сечение поглощения однородного контура на частоте возбуждения).

На рис. 3 а представлено зависимость доли молекул активатора в возбужденном состоянии от времени после ступенчатого включения возбуждающего света для различных его интенсивностей (время приведено в единицах τ_f). В расчете принималось, что концентрация молекул активатора $C_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ моль/л, отстройка частоты возбуждения от максимума полосы поглощения однородного контура $\nu_0 - \nu_b = 2 \text{ см}^{-1}$, ширина однородного контура равнялась 1 см^{-1} . Из рисунка видно, что приведенные динамики носят нетривиальный характер. Система как бы находится в режиме ожидания, после чего происходит переход к значению стационарных заселенностей. Причем «время ожидания» тем больше, чем меньше интенсивность возбуждения (ср. кривые 1—3, рис. 3 а).

Такое поведение рассматриваемой системы объясняется следующими причинами. В силу низкого сечения поглощения на частоте возбуждения в возбужденное состояние переходит малая доля молекул активатора. Однако после перехода в возбужденное состояние молекула своим электрическим полем (в возбужденном состоянии ее дипольный момент отличен от нуля) воздействует на молекулы окружения и их спектр поглощения сдвигается на некоторую величину $\Delta\nu$. В результате этого сдвига сечение поглощения некоторых из них может возрасти и существенно повысится вероятность поглощения этими молекулами. Как только новые молекулы перейдут в возбужденное состояние, в результате фотоиндуциро-

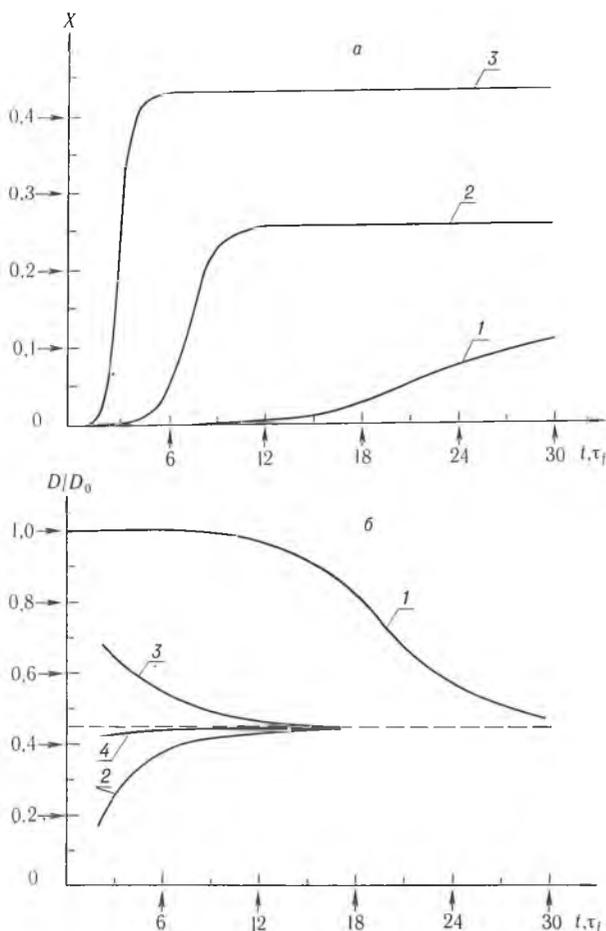


Рис. 3. Зависимости доли молекул в возбужденном состоянии X (а) и оптической плотности D/D_0 (б) в максимуме полосы поглощения однородного контура после ступенчатого включения возбуждающего света; D_0 — оптическая плотность при $X = 0$. $C_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ моль/л, $\nu_0 - \nu_b = 2 \text{ см}^{-1}$. Интенсивность возбуждения (а) $I = 3 \cdot 10^{-6}$ (1), $5 \cdot 10^{-6}$ (2), 10^{-5} вт/мкм². В момент времени $t = 2$ в возбужденное состояние переведена доля молекул (б) $X = 0$ (1), 0,30 (2), 0,05 (3), 0,12 (4)

в возбужденное состояние переходит малая доля молекул активатора. Однако после перехода в возбужденное состояние молекула своим электрическим полем (в возбужденном состоянии ее дипольный момент отличен от нуля) воздействует на молекулы окружения и их спектр поглощения сдвигается на некоторую величину $\Delta\nu$. В результате этого сдвига сечение поглощения некоторых из них может возрасти и существенно повысится вероятность поглощения этими молекулами. Как только новые молекулы перейдут в возбужденное состояние, в результате фотоиндуциро-

ванного Штарк-эффекта они воздействуют на свое окружение и, таким образом, процесс возбуждения будет развиваться в ансамбле молекул лавинообразно с некоторой скоростью, зависящей от интенсивности возбуждения. В результате через некоторое время весь ансамбль молекул будет охвачен процессом фотоиндуцированного самовоздействия и система может находиться в таком устойчивом состоянии сколь угодно долго до выключения возбуждающего излучения. Наличие в данном молекулярном ансамбле «времени ожидания», в течение которого развивается лавинообразный процесс, позволяет использовать рассмотренные ансамбли молекул в качестве динамических запоминающих устройств. На рис. 3, б приведены зависимости оптической плотности на максимуме полосы поглощения однородного контура от времени после ступенчатого включения возбуждающего света (кривая 1). Как видно из рисунка, «время ожидания» составляет порядка $12\tau_f$. Если в течение этого времени на систему воздействовать коротким импульсом света с частотой, соответствующей максимуму поглощения однородного контура, то в результате фотоиндуцированного Штарк-эффекта резко возрастет поглощение излучения на отстроенной частоте (условно «питающего» излучения), что приведет к более раннему по времени выходу оптической плотности на стационарный уровень (см. кривые 2, 3). Если энергия управляющего излучения создает заселенность возбужденного состояния, соответствующую стационарному уровню, то переход в стационарное состояние происходит практически ступенчато, без растянутого во времени переходного режима (кривая 4). В этом случае роль «питающего» излучения заключается в поддержании баланса между возбуждением и стационарным распадом возбужденных состояний; при этом нахождение некоторой доли молекул в возбужденном состоянии поддерживает стационарный уровень поглощения на отстроенной частоте (более высокий, чем в невозбужденной системе). Для «стирания информации» достаточно выключить световой поток на время, равное нескольким τ_f , и система готова к восприятию следующего управляющего сигнала.

В рамках анализируемого подхода в качестве «рабочего» параметра, управляемого световым воздействием, может использоваться не только изменение полосы поглощения, но и интенсивность флуоресценции. Можно также предложить варианты реализации, в которых осуществляется воздействие со стороны молекул индуктора не только на узкую полосу поглощения, но и на узкую выжженную щель в уширенной неоднородно полосе, а также на узкополосную флуоресценцию при селективном лазерном возбуждении.

Список литературы

1. Speiser S., Orenstein M. // Appl. Optics. 1988. V. 27. № 14. P. 2944.
2. Персонов Р. И. // Спектроскопия и динамика возбуждений в конденсированных молекулярных системах. М., 1987.

Поступила в редакцию 14.01.92.

УДК 669.018.5:669.24

Г. В. МАКУТИН, С. В. СУХВАЛО, В. В. ВЛАСОВ,
Л. И. КОПЮШКО, Д. Л. ХОХОЛКОВ

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ НИКЕЛЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрены особенности температурных изменений электрических свойств пермаллоевых и перминварных сплавов 300÷1000 К. Обнаружены особенности поведения $\rho = f(T)$ в критических областях температур. На основании рентгенографических, магнитных и термографических исследований при $T < T_c$ показано, что эти особенности объясняются температурными превращениями, имеющими признаки фазовых переходов первого рода. Природа таких переходов связывается с перестройкой спиновой системы сплавов.

Для выяснения природы магнетизма сплавов, в том числе высоконикелевых, важное значение имеет понимание закономерностей температурного

поведения их свойств. В группу высоконикелевых сплавов входят широко используемые в технике материалы, например, пермаллой, перминвар и др. Знание температурной зависимости их свойств может также способствовать полноценному решению проблемы термообработки материалов.

Отдельные аспекты магнетизма материалов могут быть раскрыты путем учета поведения их немагнитных свойств, в особенности кинетических. Температурная зависимость таких кинетических характеристик, как удельное электросопротивление ρ , в переходных металлах и их сплавах отличается спецификой, связанной с наличием d-зоны, образованной электронами незаполненной d-оболочки атомов. Плотность состояний этой зоны в зависимости от энергии электронов имеет сложный характер, что затрудняет теоретическое нахождение зависимости $\rho = f(T)$ и определяет потребность в экспериментальных сведениях о такой зависимости.

С учетом сказанного в настоящем сообщении рассмотрены особенности температурных изменений электрических свойств пермаллоевых и перминварных сплавов с целью выяснения взаимосвязи подобных изменений с магнитным состоянием материала. Для более комплексной оценки температурного поведения этих сплавов были изучены изменения их отдельных магнитных характеристик. В качестве контрольного материала рассмотрен также никель марки Н—О.

Образцы и методика эксперимента

Измерения удельного сопротивления проводили в интервале температур 300–1000 К. Образцы изготавливали в основном из сплавов, содержащих (вес. %) 80Ni20Fe и 30Co14Fe55,8Ni0,2Zr. Сплавы выплавляли в индукционной высоковакуумной печи. Для выплавки сплавов использовали карбонильное железо марки ПС, кобальт марки К—1—А и никель марки Н—О. Цирконий использовался как раскислитель. После многократной переплавки и перемешивания полученные сплавы подвергали вакуумному гомогенизирующему отжигу при $T = 1400$ К в течение 72 ч. Компонентный состав определяли рентгеноспектральным анализом.

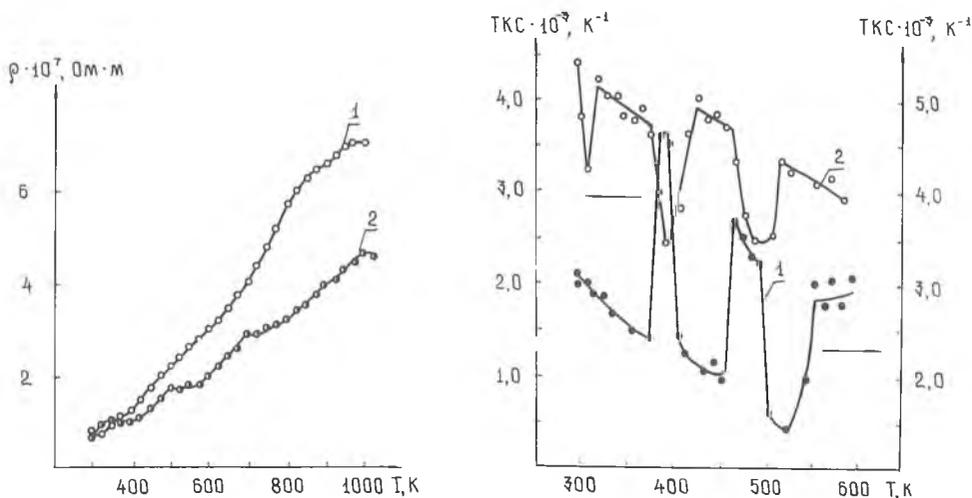


Рис. 1. Зависимость удельной электропроводности сплавов составов (вес. %) 80Ni20Fe(1), 30Co14Fe55,8Ni0,2Zr(2) от температуры

Рис. 2. Зависимость температурного коэффициента сопротивления (TKC) сплавов состава (вес. %) 80Ni20Fe(1) и 30Co14Fe55,8Ni0,2Zr(2) от температуры

Методом электроискровой резки изготавливали образцы размером $1,5 \times 3 \times 10$ мм, к которым контактной сваркой приваривали проводники. Непосредственно перед измерениями образцы выдерживали в вакуумной печи при $T = 700$ К в течение 5 ч, затем охлаждали вместе с печью. Электросопротивление измеряли 4-зондовым потенциометрическим методом с погрешностью 1%. Шаг изменения температуры составлял 5 ± 16 К, точность стабилизации температуры в каждой точке 0,5 К, время выдержки при

заданной температуре 0,4 ч. Измерения магнитных свойств осуществляли на магнитометре с погрешностью 5%.

Выплавку, термообработку и измерения свойств проводили в условиях вакуумизации при давлении не более $1,3 \cdot 10^{-4}$ Па.

Результаты измерений и их обсуждение

В соответствии с известными экспериментальными сведениями [1], отличительные особенности зависимостей $\rho = f(T)$ для переходных металлов состоят в том, что при $T < T_c$ они имеют аномальный нелинейный ход, в то время как при $T > T_c$ изменение величины линейно. В точке Кюри (или Нееля T_N) наблюдаются резкие минимумы или максимумы температурного коэффициента электросопротивления. Предполагается, что температурный ход электросопротивления сплавов аналогичен рассмотренному для металлов, однако экспериментальных сведений по этому вопросу мало [2].

Нами выявлена следующая картина зависимости $\rho = f(T)$ для пермалловых и перминварных сплавов. Во всем температурном интервале 300÷1000 К зависимость $\rho = f(T)$ не является монотонной кривой. Как видно из рис. 1, в указанном диапазоне температур имеется последовательность температурных областей, где зависимость $\rho(T)$ изменяется по закону $\Delta\rho = \alpha T$ (α — коэффициент). Такие линейные участки разделены температурными интервалами, в которых на зависимости $\rho(T)$ наблюдаются изломы или скачки. Скачки $\rho(T)$ часто сопровождаются одновременным изменением наклона прямолинейных участков температурной зависимости. При этом области нарушения линейности $\rho(T)$ в отдельных случаях оказываются достаточно широкими. На рис. 1 основные области с аномалиями ρ указаны стрелками.

Наличие последовательности критических диапазонов температур с аномальным изменением ρ проявляется для всех исследованных материалов. Различия в их расположении на шкале температур в зависимости от состава материала не являются резкими. Характерно, что аномалии электросопротивления в области T_c обладают качественным сходством с аномалиями ρ в других выявленных критических диапазонах, расположенных при $T < T_c$.

Температурным областям с аномальным изменением ρ соответствуют ярко выраженные аномалии на зависимостях $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = f(T)$. Фрагмент температурного поведения $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ показан на рис. 2.

Как видим, аномалии $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ в пермаллое и перминваре имеют разные тенденции проявления. Общим, однако, является наличие температурных точек с экстремальным изменением $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$, которые могут отражать существование критических температур.

При многократных повторных нагревах и охлаждениях образцов отмеченные аномалии и температурные области их проявления в общих чертах сохраняются. Не всегда воспроизводится лишь характер самих аномалий. В связи с этим аналитическая аппроксимация температурного хода ρ в подобных областях температур становится нецелесообразной.

Во многих областях с аномалиями ρ наблюдается эффект температурного гистерезиса электрических свойств образцов. Установлено также, что по аналогии с температурными аномалиями свойств реализуются также отжиговые аномалии. Значения энергии активации электросопротивления, определенные нами по результатам температурно-временных изменений ρ при отжиге, находятся в интервале 0,025÷0,07 эВ. В рассмотренном интервале температур имеет место ступенчатая зависимость E_a от температуры. Величина E_a постоянна в тех диапазонах T , в которых наблюдается линейность зависимости $\rho(T)$. В пределах температурных областей с аномалиями электрических свойств E_a изменяется.

Изложенные факты указывают на то, что температурные эффекты в выделенных областях температур вызваны спонтанно протекающими процессами типа фазовых превращений. Характерным является аномальное изменение постоянной Холла R_{H1} в областях с нелинейным ходом. Обнаружена, в частности, скачкообразная смена знака R_{H1} при определенных температурах (рис. 3), что может отражать резкое изменение магнитного

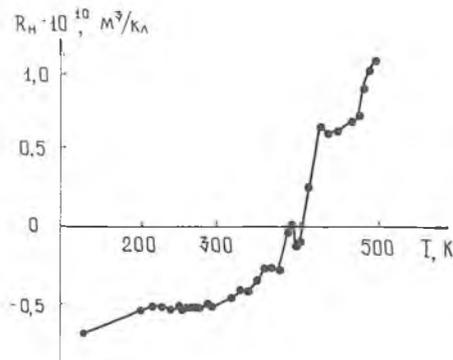
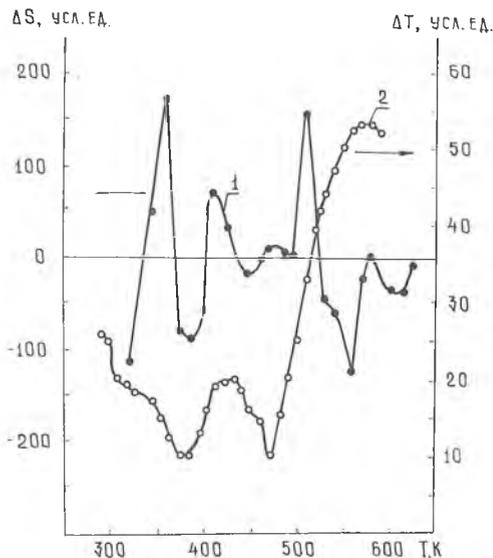


Рис. 3. Зависимость постоянной Холла R_H сплавов состава (вес. %) 80Ni20Fe от температуры

Рис. 4. Зависимость ДТА сигнала (1) и потерь на вращательный гистерезис (2) сплава состава (вес. %) 80Ni20Fe от температуры



состояния. Нами выполнен стандартный комплекс экспериментов, позволяющих провести первичную идентификацию таких превращений. Так, рентгеноструктурный и рентгенофазовый анализы показали, что во всех случаях выявленные превращения протекают без изменения типа кристаллической структуры и фазового состава, но сопровождаются аномальным изменением параметра постоянной решетки (т. е. удельного объема образца) в критических областях температур. Термографически установлено, что такие превращения сопровождаются также эффектом скрытой теплоты (пример на рис. 4, кривая 2).

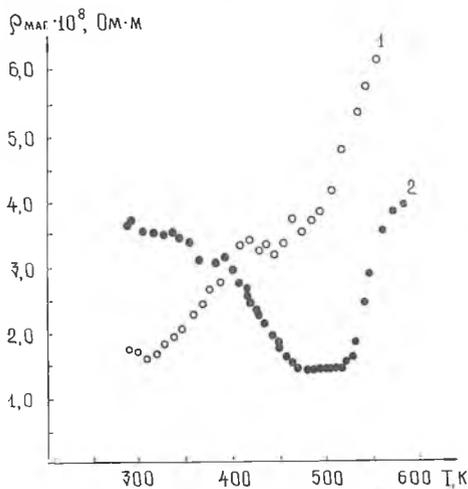


Рис. 5. Зависимость магнитной составляющей электросопротивления сплавов состава (вес. %) 80Ni20Fe (1) и 30Co14Fe-55.8Ni0.2Zr (2) от температуры

Однако параметр атомного порядка может быть и не основным параметром реализующегося при этом превращения. Ведущий параметр фазового превращения в известной мере может быть распознан по интенсивности изменений макросвойств материала в переходной области температур. Изучение температурного изменения магнитных свойств рассмотренных материалов показало, что при $T < T_c$ наиболее интенсивные аномалии наблюдаются в отношении тех характеристик, которые отражают магнитную анизотропию или ориентацию спинов. Одной из характеристик магнитного материала, отражающих связь с ориентацией спинов, являются потери на вращательный гистерезис ΔS . Пример температурного поведения величины

С учетом отмеченного следует констатировать, что, во всяком случае, при $T < T_c$ для всех материалов обнаруженные температурные превращения проявляют признаки фазовых переходов первого рода. Естественно, что первопричиной обнаруженных превращений является изменение энергетического состояния электронной системы. Поэтому такие превращения могут возникать как при $T < T_c$, так и при $T > T_c$. Важным, однако, является вопрос, какие макрохарактеристики материала непосредственно отражают эти изменения и являются ведущими параметрами фазового превращения.

В пермаллоевом сплаве превращение в области 700-900 К во многом может быть связано с развитием дальнего атомного порядка, поскольку эта область близка к температуре Курнакова ($T_k = 778$ К) подобных матери-

ΔS показан на рис. 4, кривая 1. Видно, что в области превращений наблюдается весьма интенсивное возрастание величины ΔS .

Еще одним из доказательств того, что при реализации выявленных фазовых превращений в области $T < T_c$ изменяются параметры спиновой структуры, могут служить данные по оценке составляющих электросопротивления рассмотренных материалов.

Для чистых металлов суммарная величина ρ представляется в виде [3]:

$$\rho_{\text{пол}} = \rho_{\text{ост}} + AT^2 + B \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 Y_3 \left(\frac{\Theta}{T} \right) + C \left(\frac{T}{\Theta} \right)^5 Y_5 \left(\frac{\Theta}{T} \right),$$

где A, B, C — константы, $\rho_{\text{ост}}$ — остаточное сопротивление, определяемое рассеянием на примесях, Θ и $Y \left(\frac{\Theta}{T} \right)$ — температура и интеграл Дебая. Слагаемое, пропорциональное T^2 , связано с электрон-электронным взаимодействием и дает вклад в электросопротивление лишь при $T < 10$ К. Слагаемое, пропорциональное T^3 , обусловлено моттовским $s-d$ -рассеянием, и слагаемое, пропорциональное T^5 , — $s-s$ -рассеянием электронов на фононах.

В случае сплавов и примесных металлов $\rho_{ss} \sim T^3$. При этом невозможно разделить вклады в общее сопротивление рассеянием электронов проводимости на фононах s - или d -зоны. В результате $\rho_{\text{пол}} = \rho_{\text{ост}} + aT^2 + c \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 Y_3 \left(\frac{\Theta}{T} \right)$, где a, c — коэффициенты, аналогичные A, B, C . Величина $\rho_{\text{ост}}$ определяется экстраполяцией $\rho_{\text{пол}}$ к $T = 0$ К. Слагаемое $\rho_{\text{фон}}$ для области промежуточных температур, пренебрегая членом aT^2 , можно определить из соотношения $\rho_{\text{фон}} = C \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 Y_3 \left(\frac{\Theta}{T} \right)$, где параметр C может быть найден по методике, предложенной в работе [4]. Магнитную составляющую электросопротивления находили из уравнения [1]: $\rho_{\text{маг}} = \rho_{\text{пол}} - \rho_{\text{фон}} - \rho_{\text{ост}}$. Как можно видеть из температурной зависимости $\rho_{\text{маг}}$ (рис. 5), всем переходным областям температур соответствует возрастание $\rho_{\text{маг}}$, которое обусловлено рассеянием электронов проводимости на неоднородностях спиновой системы.

Таким образом, имеются основания считать, что последовательно реализующиеся при изменении температуры фазовые превращения протекают с перестройкой спиновой системы за счет возбуждений электронов в d -зоне.

Список литературы

1. Вонсовский С. В. Магнетизм. М., 1971. С. 1031.
2. Шматко О. А., Усов Ю. В. Структура и свойства металлов и сплавов. Киев, 1987. С. 206.
3. Мерисов Б. А., Ермолаев А. М., Краснокумский А. В., Хоткевич В. И. // ФИТ. 1982. Т. 8. Вып. 5. С. 546.
4. Лобода В. Б., Проценко И. Е., Смолин М. Д., Яременко А. В. // УФЖ. 1985. Т. 30. № 3. С. 435.

Поступила в редакцию 15.07.91.

УДК 681.3.06

Г. И. ШПАКОВСКИЙ, С. Г. МУЛЯРЧИК, М. Ф. ЮНЕС (Сирия)

АЛГОРИТМ СИНТАЛ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛИЗМА ПРОГРАММ В САПР МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

При переводе САПР микроэлектроники на параллельные ЭВМ возникает сложная задача разработки пакета параллельных алгоритмов, поскольку существующие алгоритмы имеют итерационный, сугубо последовательный характер исполнения [1]. В параллельных персональных ЭВМ (ПП ЭВМ) все алгоритмы оформляются в виде программ на последовательных ЯВУ [2], поэтому оценить количество параллелизма в таких программах можно только с помощью специальных автоматических измерителей, один из которых — СИНТАЛ (синтезирующий алгоритм) — предлагается ниже.

Этапы вычислительного процесса в ПП ЭВМ включают распараллеливание программы и ее параллельное исполнение.

Параллелизм исходной программы может выражаться в разных формах

(ФП): последовательные участки (ПСЛ), конвейерный (КНВ), векторный (ВК) параллелизм, параллелизм независимых ветвей (ВТ), локальный параллелизм (ЛП) и некоторые другие ФП [3]. Этот совокупный параллелизм определяет потенциальное ускорение программы R , которое определяется отношением T_1/T , где T_1 — время выполнения программы на одном процессоре, а T — минимально возможное время выполнения программы, когда число процессоров выбрано настолько большим, чтобы не задерживать процесс выполнения программы.

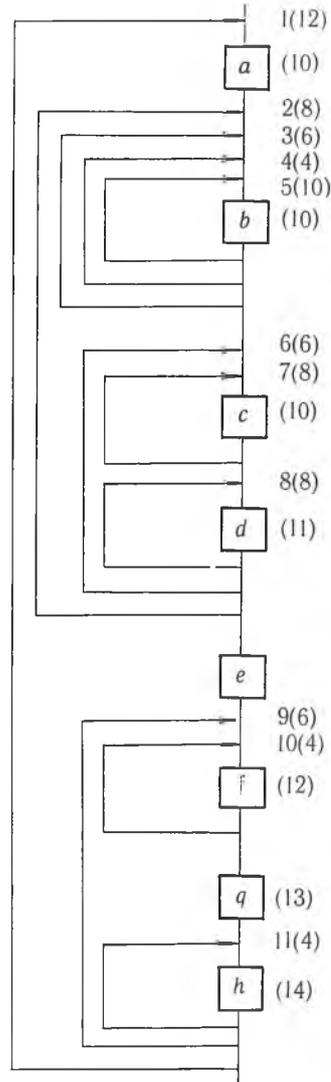
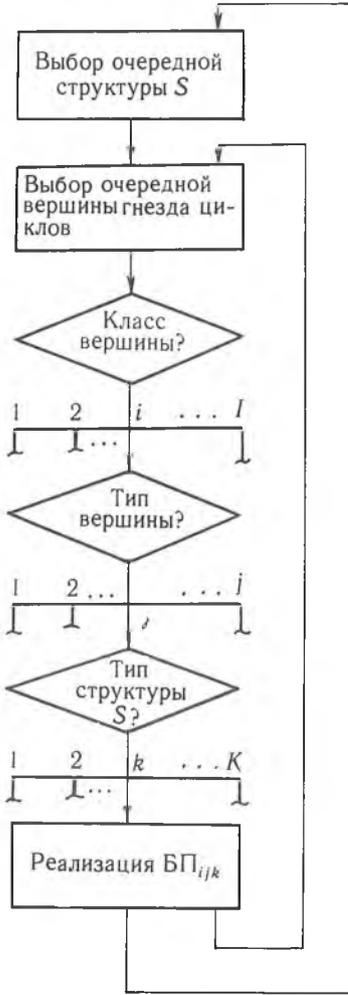


Рис. 1. Блок-схема алгоритма СИПТАЛ

Рис. 2. Пример гнезда циклов

Реальные автоматические распараллеливатели (АРП) могут использовать различные методы распараллеливания (гиперплоскостей, координат, параллелепипедов, старшинства операций для выражений и др.), но все они специализированы для содержащегося в программе параллелизма. Такой же избирательностью отличаются и структуры S аппаратуры: структуры с одиночными и множественными потоками команд и данных ОКОД, ОКМД, МКМД [3], структуры VLIW с очень широким командным словом [4]. Следовательно, АРП и аппаратуру можно представить в виде фильтров с пропускной способностью $n \leq 1$ (различной на разных ФП), тогда реальное ускорение r ПП ЭВМ на некоторой программе будет: $r = R \cdot Z_{АРП} \cdot Z_s$.

Для целей измерения исходная программа, АРП и структура S представляются в виде некоторых моделей (аналитических или имитационных) — в зависимости от требуемой точности измерения), а процесс измерения состоит в подборе такой комбинации алгоритмов АРП и структуры S, чтобы получить максимальное значение $Z_{АРП}$ и Z_S , а значит, и γ . Другими словами, процесс измерения основан на синтезе оптимальной для данной программы структуры ПП ЭВМ.

Блок-схема алгоритма СИНТАЛ дана на рис. 1.

Объектом распараллеливания обычно являются гнезда циклов, так как в них сосредоточен основной объем вычислений.

Под вершиной гнезда циклов понимается вершина дерева вложенности циклов, с помощью которого гнездо циклов представляется в памяти ЭВМ. Класс вершины определяет, является ли вершина телом, внутренним или внешним циклом. Тип вершины определяет реализуемую вершиной ФП: ПСЛ, КНВ, ВК, ВТ и т. д.

Основным элементом СИНТАЛа является базовое правило (БП). БП_{i,j,k} есть алгоритм вычисления времени выполнения вершины класса i с формой параллелизма j на структуре k с заданным числом процессоров p. Общее число БП равно $I \cdot J \cdot K$ и может составлять несколько десятков. Таким образом, алгоритм СИНТАЛ, продвигаясь от внутренних вершин к внешним, на каждом этапе накапливает время выполнения пройденных вершин (циклов). При достижении последней вершины вычисляется γ_k , затем выбирается структура S_k с наибольшим ускорением.

В качестве примера обрисуеть весьма упрощенную модель ЭВМ, положенную в основу соответствующего БП. Суть функционирования VLIW ЭВМ состоит в том, что программа каждого цикла разбивается на линейные участки, называемые базовыми блоками (ББ). Из ББ строится главная трасса (наиболее вероятный путь исполнения цикла) и подчиненные трассы. В главной трассе все ББ упаковываются как единый ББ. За счет такого увеличения длины ББ возрастает количество извлекаемого параллелизма. Дополнительное ускорение достигается за счет развертки циклов. Таким образом, основой модели VLIW ЭВМ является зависимость $\gamma = a + b \cdot w$, где a и b — коэффициенты, определяемые на основе статистических измерений, а W — число операций в ББ. Общее время выполнения цикла будет:

$$t = \mu \cdot t_{ГТ} + \sum_{m=1}^M \mu_m \cdot t_{ПТ,m}$$

где μ и μ_m — вероятности выполнения главной и подчиненных трасс; $t_{ГТ}$ и $t_{ПТ,m}$ — времена выполнения этих же трасс, а M — число подчиненных трасс. Трудность построения БП состоит не только в том, что необходим предварительный сбор статистики для установки ряда коэффициентов, но и в необходимости учитывать влияние ряда дополнительных факторов, например, затраты на выполнение компенсационных кодов, коммутацию, на проверку правильности обращения к памяти. Учет этих факторов в значительной мере определяет точность базовых правил.

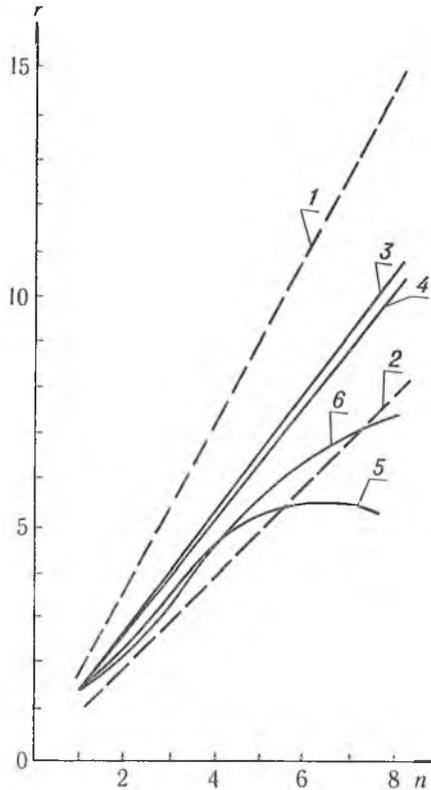


Рис. 3. Ускорение, вычисленное алгоритмом СИНТАЛ для разных условий измерения: L — величина развертки цикла; VLIW, L = 4(1); ОКМД, L = 4(2); VLIW, L = 1(3); VLIW, L = 1, вершина 1 типа ПСЛ (4); VLIW, L = 1, вершины 1, 3, 5, 6 типа ПСЛ (5); VLIW, L = 1, включена коммутация (6)

В качестве базового правила для внешних циклов в СИНТАЛе используется модифицированный алгоритм OPTAL [5].

Определение характеристик программы (состав и количественные характеристики ФП) может производиться как вручную, так и автоматически с помощью программного комплекса, описанного в [6].

Продемонстрируем некоторые особенности алгоритма СИНТАЛ на примере гнезда циклов из работы [5] (рис. 2). В скобках указано число итераций цикла или число операций для тела цикла. В исходном состоянии все циклы считаются параллельными. Результаты измерений на СИНТАЛе приведены на рис. 3.

В исследуемом примере использовались только 3 типа структур для внутренних циклов (ОКОД, ОКМД, VLIW) и один тип структуры для внешних циклов (МКМД). Ускорение измерялось относительно точки: структура-ОКОД, число процессоров равно 1. Число процессоров во всех базовых правилах изменялось от 1 до 8. Затраты на коммутацию учтены только в случае кривой 6. Пунктирные кривые соответствуют развертке $L=4$. Ускорение растет здесь линейно, поскольку запас параллелизма в гнезде циклов намного превосходит 8 (число процессоров). Все остальные кривые соответствуют структуре VLIW при $L=1$. Кривые 3, 4, 5 соответствуют постепенному уменьшению параллелизма программы. В случае кривой 4, когда только самый внешний цикл сделан последовательным, параллелизма все еще достаточно много для 8 процессоров, поэтому кривые 3 и 4 мало отличаются, зато в кривой 5 недостаток параллелизма уже выражен явно.

Кривая 6 (присутствуют затраты на коммутацию) дает падение ускорения по отношению к кривой 3 примерно на 30%.

Опыт использования алгоритма СИНТАЛ показывает, что он может быть использован как для измерения максимального параллелизма программ, так и для выбора структуры на ранних этапах проектирования.

Список литературы

1. Мулярчик С. Г. Численное моделирование микросистемных структур. Мн., 1989.
2. Шпаковский Г. И. // УСИМ. 1991. № 6. С. 3.
3. Шпаковский Г. И., Липницкий А. С., Черников Г. Н. и др. Параллельная обработка структур данных / Под ред. В. А. Мищенко. Мн., 1988.
4. Шпаковский Г. И. // ЗРЭ. 1991. № 11. С. 3.
5. Polichronopoulos C. P., Kuck D. J., Padua R. A. // IEEE Trans. Comput. 1989. V. 38. № 9. P. 1285.
6. Змачинский С. С., Шпаковский Г. И., Серикова Н. В. // Программирование. 1991. № 10. С. 12.

Поступила в редакцию 14.01.92.

УДК 681.327.12(088.8)

В. Г. ХАЦИРЕВИЧ, А. Г. ЯКУШЕВ

ФАЗО—ИМПУЛЬСНЫЙ СЕЛЕКТОР ДЛЯ УСТРОЙСТВА ГРАФИЧЕСКОГО ВВОДА ПЛАНШЕТНОГО ТИПА

Проблема ввода в ЭВМ почерковой графической информации в режиме реального времени (РРВ) [1, 2] стимулировала разработку планшетных устройств графического ввода (УГВ) с фазо-амплитудным методом формирования кода координат (ФА-метод ФКК) [3—5].

К достоинствам УГВ с ФА-методом ФКК относятся: высокая точность считывания координат, технологичность электромагнитной системы устройства, простота и низкая стоимость схем коммутации координатных шин планшета, высокие эргонометрические показатели пишущего узла — графического индукционного пера (ГИП) [1, 2].

Усилительно-преобразовательный блок в таких УГВ не содержит аналоговых запоминающих устройств для преобразования информационного сигнала (ИС) наносекундной длительности в цифровой код. Это обстоятельство значительно улучшает эксплуатационные характеристики устройства, так как электронная схема этого блока и самого устройства в целом практически выполняется в этом случае на элементной базе вычислительной техники.

Важным функциональным узлом УГВ с ФА-методом ФКК является фазо-импульсный селектор (ФИС) [2—5]. Он предназначен для кодирования фазы ИС бинарным кодом. Выходной импульсный сигнал ФИС переключает работу устройства с цикла формирования кода грубого отсчета на цикл формирования кода точного отсчета.

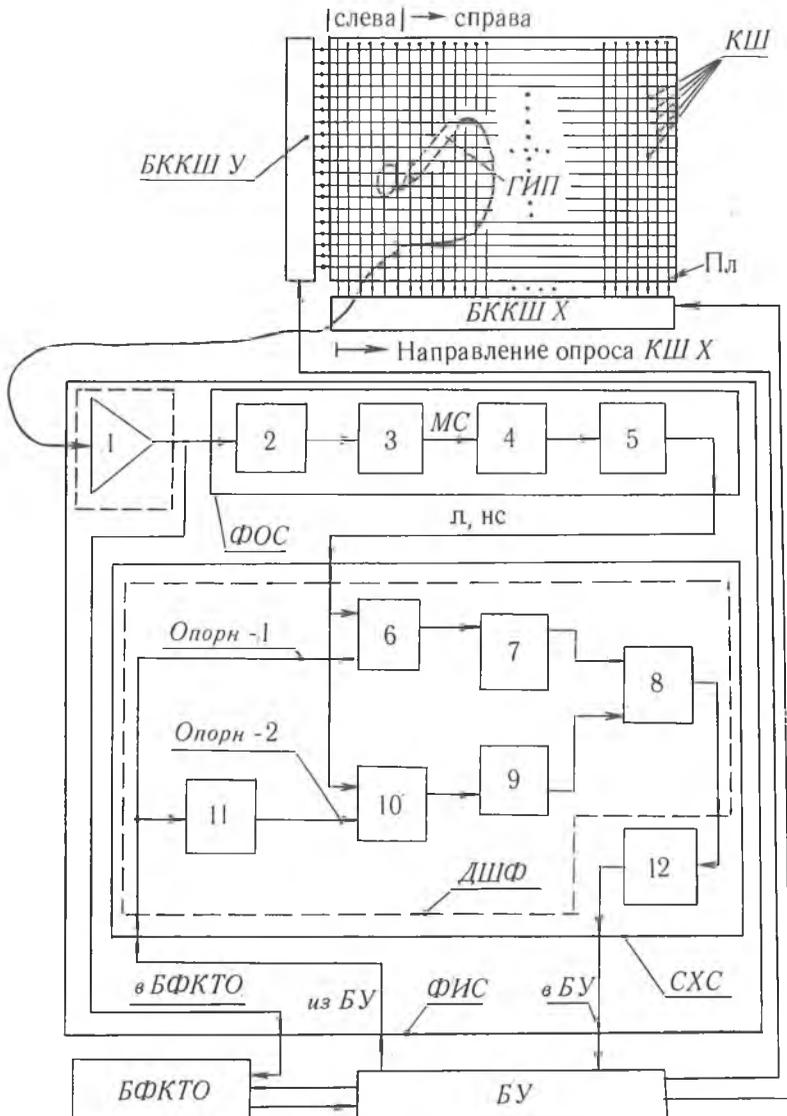


Рис. 1. Структурная схема фазо-импульсного селектора (ФИС) в составе устройства графического ввода планшетного типа:

Пл — планшет; КШ — координатные шины; БККШ У, БККШ Х — блок коммутации координатных шин по координатной оси У и Х соответственно; ГИП — графическое индукционное перо; БФКТО — блок формирования кода точного отсчета; БУ — блок управления

Структурная схема ФИС представлена на рис. 1. Он состоит из двух основных узлов: формирователя строба (ФОС) и схемы селекции (СХС). В свою очередь, формирователь строба включает в себя две ступени формирования. Первая ступень собрана на усилителе формирователя 2 и порогового элемента 3, в качестве которого может быть применен триггер Шмитта. Вторая ступень ФОС состоит из двух последовательно включенных одновибраторов 4 и 5. На выходе первой ступени во время работы ФИС появляется модулированный по длительности строб (МС). Благодаря наличию второй ступени на выходе ФОС генерируется уже не модулированный по длительности, а с фиксированной длительностью строб (НС). Двухступенчатая структура ФОС обеспечивает устойчивую работу схемы селекции.

Последняя содержит дешифратор фазы (ДШФ) и формирователь 12 одиночного импульса, выполняемый на базе одновибратора, выход которого является выходом ФИС.

ДШФ включает в себя элемент И 8, триггер 7 первого канала, триггер 9 второго канала, двухвходовый элемент И-НЕ 6 первого канала, двухвходовый элемент И-НЕ 10 второго канала, элемент НЕ 11. Второй элемент И-НЕ 6 и вход элемента НЕ 11 объединены и подключены к синхронизирующему входу управления, из которого подается первый опорный сигнал «ОПОРН-1». Второй опорный сигнал «ОПОРН-2» формируется путем инвертирования первого опорного сигнала и подается с выхода инвертора 11 на второй вход И-НЕ 10. Первые входы элементов И-НЕ 6 и И-НЕ 10 объединены и подключены к выходу одновибратора ОВ 5.

Измерительная катушка (ИК) ГИП находится в корпусе пера и подключена к входу предварительного усилителя, который с целью повышения отношения сигнал/шум усилительного тракта располагается также в корпусе пера в непосредственной близости от ИК. Выход предварительного усилителя через экранированный провод подключен к входу оконечного усилителя 1, который, как правило, располагается на плате ФИС. ИК совместно с предварительным усилителем, соединительным кабелем и оконечным усилителем представляет собой магнитоэлектрический преобразователь (МЭП) устройства. Он преобразует импульсное магнитное поле координатной шины в информационный электрический сигнал.

Рассмотрим работу ФИС на примере селекции положительного фронтального импульса информационного сигнала. По мере приближения опрашиваемой шины из числа шин, находящихся, например, слева от ИК, выходной информационный сигнал оконечного усилителя 1 МЭП будет изменяться по амплитуде в соответствии с функцией преобразования преобразовательного звена; координатная шина с током опроса — приемная измерительная катушка ГИП [2]. Усилитель-формирователь обеспечивает усиление по мощности лишь положительных импульсов информационного сигнала и подает отрицательные. Поэтому на выходе усилителя-формирователя 2 по мере опроса координатных шин, расположенных слева от ИК, будут вырабатываться периодические положительные регенерационные импульсы (ПРИ) (рис. 2, а), т. е. импульсы, появление которых обязано фронту спада импульса тока опроса.

Отформированные импульсы с выхода усилителя-формирователя поступают далее на вход амплитудного дискриминатора. Когда при опросе некоторой k -й шины, находящейся слева от измерительной катушки ГИП, положительный регенерационный импульс превысит некоторый пороговый уровень $U_{пу}$ (см. рис. 2, а), соответственно появляется положительный импульс с выхода усилителя-формирователя 2, уровень которого превышает уровень $U_{пф}$ (рис. 2, б) срабатывания амплитудного дискриминатора 3. В этом случае на выходе амплитудного дискриминатора появляется отформированный положительный прямоугольный импульс (рис. 2, в). Длительность этого импульса (модулированного строба — МС) зависит от того, где в пределах диапазона точного отсчета находится проекция геометрического центра ИК. По фронту включения амплитудного дискриминатора срабатывает одновибратор 4 (рис. 2, г). Соответственно от фронта отключения одновибратора 4 срабатывает второй одновибратор 5 (рис. 2, г). В результате этого на выходе одновибратора 5 появляется выходной положительный прямоугольный импульс (немодулированный строб — НС) (рис. 2, д). Наличие одновибраторов 4 и 5 вызвано тем обстоятельством, что операция фазовой селекции информационного сигнала по положительному фронтальному импульсу (ПФИ) происходила с некоторой задержкой t_1 относительно момента окончания первого опорного импульса с длительностью $t_{оп1}$ (рис. 2, е). Это повышает надежность операции селекции, так, последняя происходит не по фронтам $t_{а2}$ (рис. 2, ж) и $t_{в1}$ (рис. 2, е') соответственно первого и второго опорных сигналов.

Поскольку в момент появления выходного импульса одновибратора 5 на втором входе элемента И-НЕ 10 присутствует высокий потенциал «ОПОРН-2» (рис. 2, ж), то этот импульс проходит на выход элемента И-НЕ 10 в инвертированном виде (рис. 2, и). А так как на втором входе элемента И-НЕ 6 в момент появления выходного сигнала с одновибратора 5 присутствует отрицательный сигнал «ОПОРН-1», то на выходе этого элемента сигнал отсутствует (рис. 2, з).

Итак, когда опрашиваемая координатная шина находится слева от ИК, выходной импульс с одновибратора 5 проходит на выход элемента И-НЕ 10. Выходной импульс элемента И-НЕ 10 поступает на единственный установочный вход триггера 9 и устанавливает его в единичное состояние. Таким образом, при опросе координатных шин, находящихся слева от ИК, работает второй канал ФИС, осуществляющий предварительную селекцию, факт которой характеризуется установкой триггера 9 в единичное состояние.

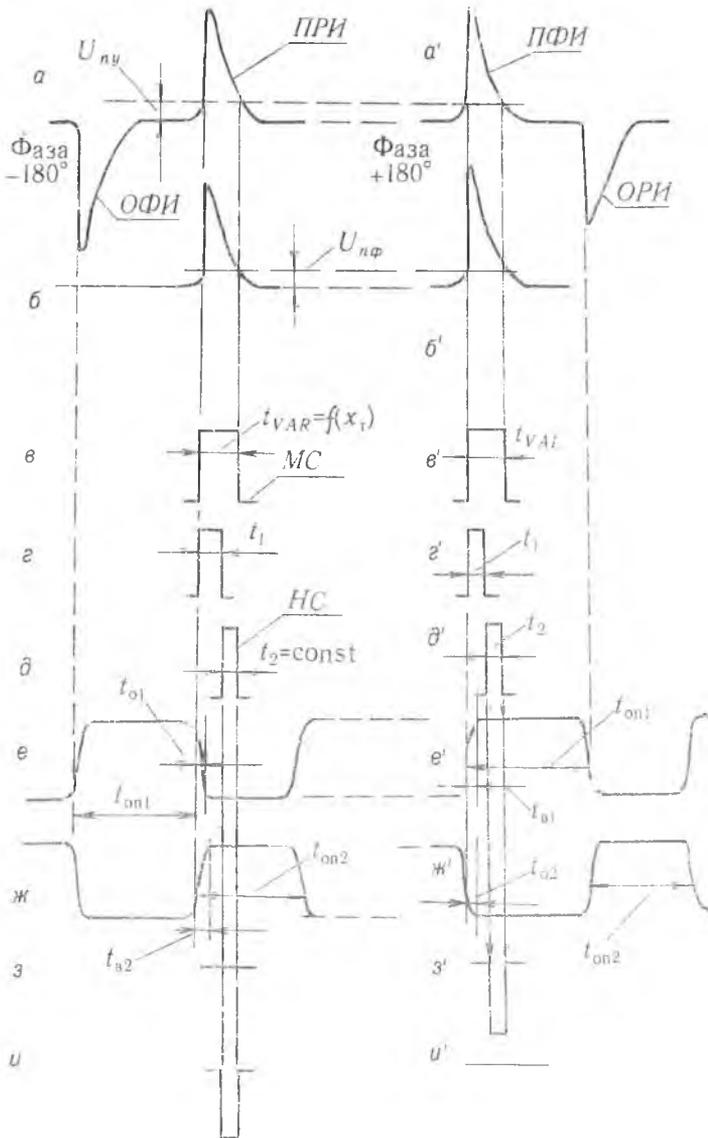


Рис. 2. Эпюры напряжений временной диаграммы работы ФИС:
 ПРИ — положительный регенерационный импульс; ОФИ — отрицательный фронтальный импульс; ПФИ — положительный фронтальный импульс; ОРН — отрицательный регенерационный импульс

С приходом первого импульса на единственный установочный вход триггера 9 процесс опроса координатных шин, находящихся слева от ИК, не прекращается. При этом с каждым опросом очередной координатной шины, находящейся слева от ИК, будет поступать соответствующий импульс с выхода одновибратора 5 и далее на установочный вход триггера 9.

Импульсы, следующие за первым установочным импульсом, подтверждают состояние триггера 9. В общем случае количество установочных импульсов зависит от чувствительности МЭП, усилителя-формирователя 2, величины тока опроса координатных шин, а также от того, какое количество шин находится слева от ИК.

С переходом триггера 9 в единичное состояние и с последующим многократным подтверждением этого состояния путем подачи нескольких импульсов на его единичный установочный вход ФИС становится подготовленным для селекции ПФИ, наводимого током шины, находящейся справа от ИК.

Как только опрашиваемая шина окажется справа от ИК, информационный сигнал МЭП меняет фазу с -180° на $+180^\circ$ (рис. 2, a'). Теперь ПФИ возникает от фронта включения импульса тока опроса коммутирующего ключа (рис. 2, a'). Этот фронт практически совпадает с фронтом включения $t_{в1}$ первого опорного сигнала (рис. 2, e'), поступающего на второй вход элемента И-НЕ 6.

Благодаря временной задержке t_1 , обеспечиваемой одновибратором 4, временная селекция немодулированного строба происходит с задержкой относительно фронта включения $t_{в1}$ первого опорного сигнала.

Теперь выходной импульс одновибратора 6 (рис. 2, d'), возникший от тока опроса переключающей координатной шины, проходит не на выход элемента И-НЕ 10 подготовленного канала ФИС, а на выход элемента И-НЕ 6 основного канала. Это происходит благодаря тому, что в момент возникновения выходного импульса одновибратора 5 на втором входе элемента И-НЕ 6 присутствует высокий потенциал «ОПОРН-1».

На втором входе элемента И-НЕ 10 подготовительного канала в момент возникновения выходного импульса одновибратора 5 присутствует отрицательный потенциал «ОПОРН-2» длительностью $t_{он2}$ (рис. 2, $ж'$). Поэтому импульсный сигнал на выходе элемента И-НЕ 10 в данном случае отсутствует (рис. 2, $и'$).

Импульс с выхода И-НЕ 6 основного канала поступает на единичный установочный вход триггера 7 и устанавливает его в единичное состояние. Наличие двух высоких потенциалов с единичных выходов триггеров 7 и 9 на входах элемента И 8 обуславливает появление высокого потенциала на его выходе.

Перепад выходного напряжения элемента И 8 с низкого уровня на высокий запускает одновибратор 12. Выходной импульс одновибратора 12 свидетельствует о том, что опрашиваемая шина находится справа от ИК. Этот импульс поступает в блок управления и инициирует в нем переход устройства на очередную операцию.

В соответствии с блок-схемой, представленной на рис. 1, была разработана принципиальная схема ФИС, обеспечивающая точность позиционирования пера не хуже чем 0,08 мм при шаге укладки координатных шин планшета, равного одному миллиметру.

Список литературы

1. Хациревич В. Г., Кукель И. П., Якушев А. К. // Автометрия. 1987. № 3. С. 26.
2. Хациревич В. Г., Мухарский А. М., Якушев А. К. // Там же. 1991. № 3. С. 41.
3. Хациревич В. Г., Мухарский А. М., Якушев А. К. Устройство для считывания графической информации: А. с. 1372343 АИ СССР//БИ. 1988. № 5.
4. То же: А. с. 1506460 АИ СССР//БИ. 1989. № 33.
5. То же: А. с. 1529264 АИ СССР//БИ. 1989. № 46.

Поступила в редакцию 14.01.92.

УДК 681.325.53(075.8)

*Л. Н. БАКИНОВСКАЯ, Б. Н. КРАСНОГОЛОВЫЙ,
В. П. СУПРУН, Б. И. ШПИЛЕВОЙ*

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДВОИЧНО—ДЕСЯТИЧНОГО КОДА В ДВОИЧНЫЙ НА ОСНОВЕ D—ТРИГГЕРОВ

В преобразователях двоичного, или бинарного, кода (БК) в двоично-десятичный (БДК) последовательного типа со сдвигом и коррекцией могут успешно использоваться D-триггеры. Возможностям и перспективам применения D-триггеров в преобразователях БК → БДК 8421 посвящена работа [1].

В данной статье этот вопрос рассматривается применительно к преобразователям БДК 8421 → БК, у которых входным является двоично-десятичный регистр Pr1 со схемой коррекции СК, а выходным — регистр сдвига Pr2 (рис. 1) [2].

Принцип последовательного преобразования БДК → БК заключается в следующем. С поступлением синхримпульса (СИ) в результате сдвига «вправо» (в сторону младших разрядов) содержимое тетрады уменьшается вдвое и если после деления получается остаток, то при $p = 0$ формируется сигнал переноса p_- , а при $p = 1$, кроме того, производится коррекция — к содержимому тетрады добавляется пять. Этим принципом соответствует приведенный в табл. 1 алгоритм одношагового (сдвиг и коррекция выполняются под действием одного СИ) преобразования БДК → БК [3].

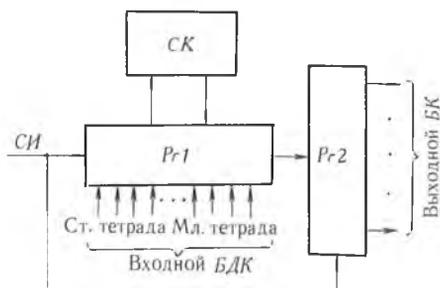


Рис. 1. Структурная схема последовательного преобразования БДК → БК

Таблица 1

X	F_i^t	p = 0		p = 1	
		F_i^{t+1}	p_-	F_i^{t+1}	p_-
0	F_0	F_0	0	F_5	0
1	F_1	F_0	1	F_5	1
2	F_2	F_1	0	F_6	0
3	F_3	F_1	1	F_6	1
4	F_4	F_2	0	F_7	0
5	F_5	F_2	1	F_7	1
6	F_6	F_3	0	F_8	0
7	F_7	F_3	1	F_8	1
8	F_8	F_4	0	F_9	0
9	F_9	F_4	1	F_9	1

Примечания: X — десятичная цифра; F_i^t — текущее состояние, двоичные 4-разрядные кодовые слова, отображающие десятичные цифры 0—9 в заданном БДК; F_i^{t+1} — следующее состояние триггеров тетрады; p_- — сигнал переноса от последующей тетрады; p_- — сигнал переноса в предыдущую тетраду (в Pr2 — для младшей тетрады).

Функционально-логический синтез Pr1 со СК удобнее начинать с младшей тетрады, для чего на основании алгоритма преобразования (см. табл. 1) и матрицы переходов D-триггера (табл. 2) составляют сводную таблицу переходов состояний (табл. 3), в которой $Q_1—Q_4$ — состояния триггеров тетрады.

По данным табл. 3 могут быть составлены логические уравнения для D-входов всех триггеров младшей тетрады и сигнала переноса p_- в Pr2, представляющие собой системы недоопределенных булевых функций пяти переменных ($Q_1—Q_4, p$). Минимизацию этих функций «вручную» проще всего выполнять с помощью карт Вейча—Карно (рис. 2).

Минимизированные и приведенные к элементному базису И-НЕ уравнения получатся в виде:

Таблица 2

$Q^t \rightarrow Q^{t+1}$		D^t
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

X	F_i^1	F_i^{1+1}		D_1	D_2	D_3	D_4	p_-					
		$p=0$	$p=1$	p									
	$Q_4Q_3Q_2Q_1$	$Q_4Q_3Q_2Q_1$	$Q_4Q_3Q_2Q_1$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0 0 0 1	0 0 0 0	0 1 0 1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
2	0 0 1 0	0 0 0 1	0 1 1 0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0 0 1 1	0 0 0 1	0 1 1 0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
4	0 1 0 0	0 0 1 0	0 1 1 1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
5	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 1 1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
6	0 1 1 0	0 0 1 1	1 0 0 0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	0 1 1 1	0 0 1 1	1 0 0 0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
8	1 0 0 0	0 1 0 0	1 0 0 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
9	1 0 0 1	0 1 0 0	1 0 0 1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1

$$D_1 = \bar{p}Q_2 \vee p\bar{Q}_2 = \overline{\bar{p}Q_2 \wedge pQ_2}$$

$$D_2 = \bar{p}Q_3 \vee \bar{Q}_2Q_3 \vee pQ_2\bar{Q}_3 = \overline{\bar{p}Q_3 \wedge Q_2Q_3 \wedge pQ_2Q_3};$$

$$D_3 = \bar{p}Q_4 \vee p\bar{Q}_2\bar{Q}_4 \vee pQ_2\bar{Q}_3 = \overline{\bar{p}Q_4 \wedge p\bar{Q}_2\bar{Q}_4 \wedge pQ_2Q_3};$$

$$D_4 = pQ_4 \vee pQ_2Q_3 = \overline{p\bar{Q}_4 \wedge p\bar{Q}_2Q_3}; \quad p_- = Q_1.$$

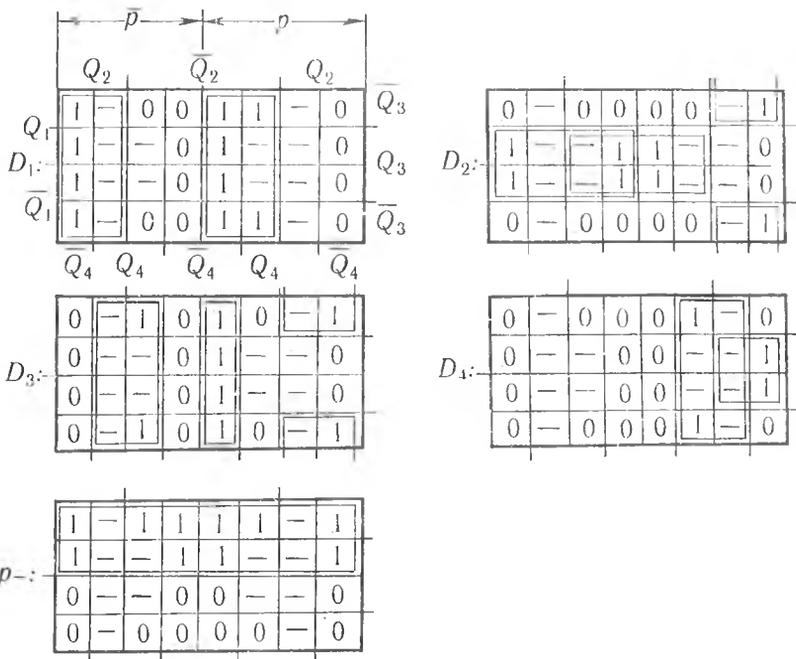


Рис. 2. Карты Вейча — Карно для младшей тетрады преобразователя БДК 8421 \rightarrow БК

В соответствии с приведенными уравнениями построена структурная логическая схема младшей тетрады (рис. 3), содержащая 13 логических элементов и 4 триггера. Применительно к микросхемам серии К 155,

например, аппаратные затраты будут следующими: К 155ЛА3 (2И-НЕ) — 2 шт., К 155ЛА4 (3И-НЕ) — 2 шт. (при одном лишнем элементе), D-триггеры К 155ТМ2 — 2 шт. Следовательно, младшая тетрада с элементами коррекции может быть выполнена на шести микросхемах.

Логические уравнения для информационных входов первого и второго триггеров могут быть записаны как:

$$D_1 = \bar{p}Q_2 \vee p\bar{Q}_2 = p \oplus Q_2;$$

$$D_2 = \bar{p}Q_3 \vee \bar{Q}_2Q_3 \vee pQ_2\bar{Q}_3 = \overline{pQ_2} \cdot Q_3 \vee pQ_2 \cdot \bar{Q}_3 = (pQ_2) \oplus Q_3.$$

Таким образом, для формирования сигналов D_1 и D_2 в этом случае потребуются всего два логических элемента «Исключающее ИЛИ» и два элемента 2И—НЕ (рис. 4), т. е. всего четыре логических элемента против семи в схеме на рис. 3.

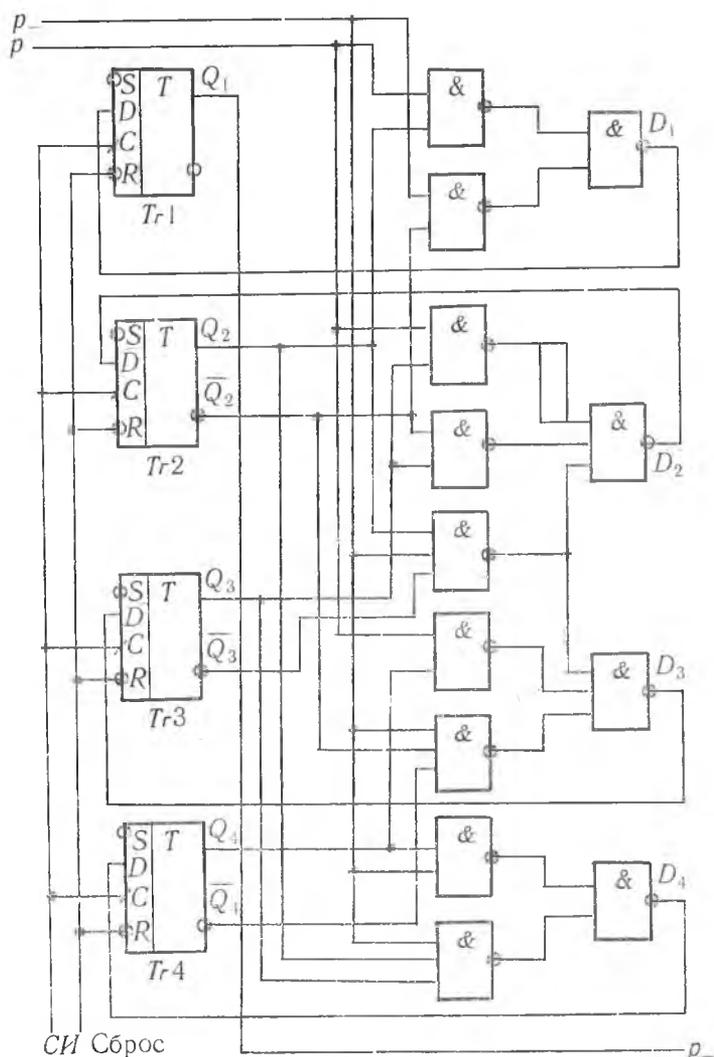


Рис. 3. Младшая тетрада Рг1 с элементами коррекции

Такие же логические уравнения будут и для промежуточных тетрад, при синтезе которых под p следует понимать сигнал переноса из последующей, более старшей, тетрады, а p_- — есть сигнал переноса в предыдущую тетраду.

Отличительной особенностью преобразования БДК → БК является существенное упрощение старшей тетрады, логические уравнения для которой получаются при подстановке $p = 0$ в уравнения для младшей тетрады — нет еще более старшей тетрады и сигнала переноса из нее.

В рассматриваемом случае (для БДК 8421) имеем:

$$D_1 = Q_2; D_2 = Q_3 \vee \bar{Q}_2 Q_3 = Q_3; D_3 = Q_4; D_4 = 0; p_- = Q_1,$$

что приводит к очень простой схеме старшей тетрады без логических элементов коррекции (рис. 5).

Трудоемкий процесс минимизации системы недоопределенных булевых функций «вручную» может быть автоматизирован. Результатом машинной минимизации по одному из методов являются следующие уравнения для младшей тетрады:

$$D_1 = \bar{p}Q_2 \vee pQ_4 \vee p\bar{Q}_2\bar{Q}_4; D_2 = \bar{p}Q_3 \vee \bar{Q}_2Q_3 \vee pQ_2\bar{Q}_3;$$

$$D_3 = \bar{p}Q_4 \vee p\bar{Q}_2\bar{Q}_4 \vee pQ_2\bar{Q}_3; D_4 = pQ_4 \vee pQ_2Q_3; p_- = Q_1.$$

Сравнивая уравнения, полученные при минимизации по картам Вейча — Карно, с «машинными», нетрудно заметить, что в последнем случае за счет усложнения выражения для D_1 достигнуто увеличение числа повторяющихся конъюнкций (три против одной). Благодаря этому схема младшей тетрады может быть несколько упрощена — для ее построения потребуется на один логический элемент меньше, чем в схеме на рис. 3. Это небольшое преимущество может сказаться на аппаратных затратах только при преобразовании кодов многоразрядных чисел, т. е. при значительном количестве тетрад в $Pr1$.

При $p=0$ получим логические уравнения для старшей тетрады, совпадающие с приведенными выше и относящиеся к минимизации «вручную».

Изложенная процедура функционально-логического синтеза тетрад на D-триггерах с элементами коррекции может быть распространена и на преобразователи БДК → БК с другими весовыми коэффициентами во входном коде.

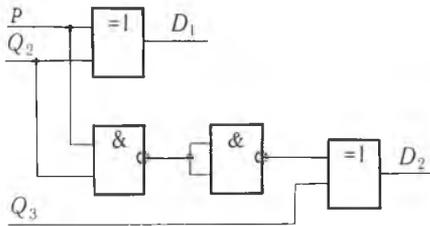


Рис. 4. Структурная схема формирования сигналов D_1 и D_2 с использованием элементов «Исключающее ИЛИ»

нести и более простую процедуру функционально-логического синтеза двоично-десятичного регистра с элементами коррекции. Синтез этих устройств на ИК-триггерах требует минимизации системы девяти (вместо пяти) недоопределенных булевых функций.

Сравнительный анализ показал, что преобразователи БК → БДК 8421, двоично-десятичные регистры которых выполнены на ИК-триггерах с входной логикой ЗИ, не имеют преимуществ перед преобразователями на основе D-триггеров в отношении аппаратных затрат. Мало того, в преобразователях БК → БДК 8421 они несколько больше (на одну-две микросхемы в тетраде).

К достоинствам D-триггеров, перечисленных в работе [1], следует от-

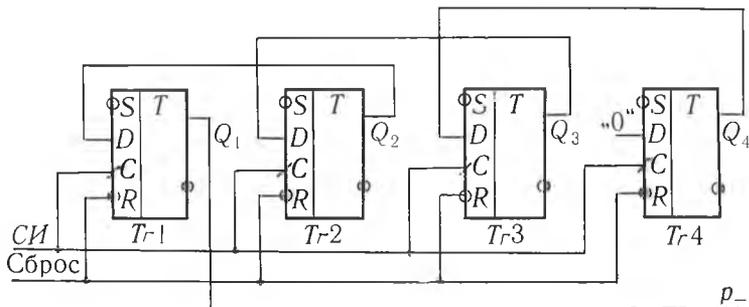


Рис. 5. Старшая тетрада преобразователя БДК 8421 → БК

Преобразователи БДК → БК на основе D-триггеров могут быть выполнены частично или полностью и на программируемых логических матрицах (ПЛМ), что приведет к существенному сокращению аппаратных затрат. Таким образом, использование в преобразователях кодов D-триггеров рас-

ширяет возможности их схемотехнической реализации и можно ожидать, что преобразователи со сдвигом и коррекцией на D-триггерах найдут широкое применение наряду с преобразователями кодов на специализированных микросхемах.

Список литературы

1. Бакиновская Л. П., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3. С. 30.
2. Красноголовый Б. Н., Шпилевой Б. Н. Преобразователи кодов. Мн., 1983.
3. Rhyne V. T. // IEEE Trans. Comput. 1970. V. 19. № 9. P. 808.

Поступила в редакцию 16.03.92.

Математика и механика



УДК 519.95

М. Х. ФАХМИ (АРЕ)

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОШЕНИЯХ И КОНГРУЭНЦИЯХ НА АЛГЕБРАХ АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Введение. В статье рассматривается алгебра P_k автоматных отображений (или последовательностных функций), описанная в [1, 2]. Решетка конгруэнций и гомоморфизмы этой алгебры исследовались в работах [2, 4].

В данной работе получено описание конгруэнций на P_k (в терминах инвариантных отношений), использующее конструкцию, введенную в [5]. Краткое изложение результатов статьи имеется в [6].

Основные определения и обозначения. В статье используются понятия, определения и обозначения из [1]. Последовательность $\alpha = x(1) \dots x(n)$ символов из $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ называется словом в E_k . Число n называется длиной слова α и обозначается через $|\alpha|$. Множество всех слов в алфавите E_k обозначим E_k^* . Множество всех слов в этом же алфавите, имеющих длину n , обозначим E_k^n . Бесконечные последовательности символов алфавита E_k называются сверхсловами в алфавите E_k . Множество всех сверхслов в алфавите E_k обозначим E_k^∞ .

Определение 1. Отображение $f: E_k^* \rightarrow E_k^*$, удовлетворяющее следующим двум условиям, называется детерминированным (д.функцией):

1) если $\alpha \in E_k^*$ и длина слова α равна l , то длина слова $f(\alpha)$ также равна l ;

2) если $\alpha_1 = x(1) \dots x(s)$, $f(\alpha_1) = y(1) \dots y(s)$; $\alpha_2 = x'(1) \dots x'(s)$, $f(\alpha_2) = y'(1) \dots y'(s)$, причем $x(1) = x'(1)$, ..., $x(r) = x'(r)$ при некотором $1 \leq r \leq s$, то $y(1) = y'(1)$, ..., $y(r) = y'(r)$ (здесь $x(i)$, $x'(i)$, $y(j)$, $y'(j)$ — символы алфавита E_k).

Следуя [3], можно ввести понятия остаточной функции и ограничено-детерминированной функции (о.-д.функции).

Каждая д.функция f естественным образом определяет некоторое отображение f^∞ множества E_k^∞ в E_k^∞ .

Обозначим через P_k^n множество всех д.функций местности n , входной и выходной алфавит которых есть E_k . Пусть $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n$.

Из определения (1) д.функции от n переменных следует, что каждая такая функция задается последовательностью функций k -значной логики.

Операции ξ , τ , Δ , ∇ , $*$ над функциями из P_k определяем тождествами (1, 2):

$$(\xi f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$$(\forall f) (x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}),$$

$$(f^*g) (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}), \quad (2)$$

где f, g — произвольные n -местная и m -местная функции из P_k . Если функция f одноместная, то по определению $\xi f = \tau f = \Delta f = f$.

Алгебру $P_k = \langle P_k; \xi, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ будем далее называть алгеброй автоматных отображений.

Пусть E_c — множество всех неотрицательных действительных чисел и E_k^∞ — множество сверхслов над алфавитом E_k .

Обозначим через $(E_k^\infty)^{E_c}$ совокупность всех отображений E_c в E_k^∞ , т. е. $(E_k^\infty)^{E_c} = \{ \delta \mid \delta : E_c \rightarrow E_k^\infty \}$.

Определение 2. Инвариантным отношением называется любое подмножество множества $(E_k^\infty)^{E_c}$.

Определение 3. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ сохраняет отношение $R \subset (E_k^\infty)^{E_c}$, если для любых $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in R$, $i = 1, \dots, n$ отображение $\delta, \delta : E_c \rightarrow E_k^\infty$, $\delta(a) = f(\delta_1(a), \dots, \delta_n(a))$, $a \in E_c$, также принадлежит R .

Основные результаты. Обозначим через $F(R)$ ($F_{o.-d.}(R)$) множество всех д.-функций (о.-д. функций), сохраняющих отношение R . Имеет место

Лемма 1. Для любого отношения R , $R \subset (E_k^\infty)^{E_c}$, $F(R)$ и $F_{o.-d.}(R)$ не пусты.

Доказательство леммы 1 следует из очевидного включения, $F_{o.-d.}(R) \subset F(R)$ и того, что о.-д. функция $S_k^{ni}, S_k^{ni}(x_1, \dots, x_n) = x_i$ сохраняет любое отношение R , $1 \leq i \leq n$.

Перейдем к описанию конгруэнций на P_k . На P_k имеются конгруэнции χ_0 (отношение равенства), χ_1 (тождественно-истинное отношение) и χ_a (сравнимы все функции одинаковой местности и только они).

Для любого m , $m = 1, 2, \dots$, отношение κ_m определяется следующим образом: $f(x_1, \dots, x_n) \kappa_m g(x_1, \dots, x_p) \iff p = n$ и $\varphi_i^f = \varphi_i^g$ для любых i , $1 \leq i \leq m$, где φ_i^f (φ_i^g) — i -я функция в последовательности функций k -значной логики, задающей о.-д. функцию f (g).

В [2] доказано, что на алгебре P_k автоматных отображений имеются только конгруэнции вида $\chi_0, \chi_a, \chi_1, \kappa_m$, $m = 1, 2, \dots$.

В работе [4] показано, что каждая (за исключением χ_0) из перечисленных выше конгруэнций является ядерной конгруэнцией некоторого гомоморфизма алгебры P_k в R_1 , где $l = 1$ (для конгруэнций χ_a и χ_1 или $l = k^m$ (для конгруэнций κ_m), R_1 — итеративная алгебра l -значной логики (1).

По аналогии с [5] ниже будет описана конструкция, позволяющая описывать конгруэнции через инвариантные отношения.

Заметим, что из условия 2 определения 1 следует

Лемма 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ произвольная д.-(о.-д.) функция, R — инвариантное отношение, $f \in F(R)$ и $\delta_i, \sigma_i \in R$, причем найдется $a \in E_c$ так, что для любых i $\delta_i(a), \sigma_i(a)$ имеют одинаковое начало длины m . Тогда $\delta(a) = f(\delta_1(a), \dots, \delta_n(a))$ и $\sigma(a) = f(\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a))$ также имеют одинаковое начало длины m .

Определение 4. Пусть $R \subset (E_k^\infty)^{E_c}$. Отношение эквивалентности ρ на отображениях из R называется согласованным относительно функций из $F(R)$ (с.о.э. $F(R)$), если для любой д.-(о.-д.) функции $f \in F(R)$ и любых $\delta_1, \dots, \delta_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \delta_i, \sigma_i \in R$ из $\delta_i \rho \sigma_i$, $1 \leq i \leq n$, следует, что $f(\delta_1, \dots, \delta_n) = \delta \rho \sigma = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Пусть ρ — с.о.э. $F(R)$, зададим на $F(R)$ следующее отношение $\langle R, \rho; F(R) \rangle$: для любых f, g из $F(R)$ $f \langle R, \rho; F(R) \rangle g \iff$ f и g равны, для любых $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n$, где $\delta_i, \sigma_i \in R$ $i = 1, \dots, n$ (n -арность f и g), из $\delta_i \rho \sigma_i$ следует, что $f(\delta_1, \dots, \delta_n) = \delta \rho \sigma = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Имеет место следующая

Лемма 3. Пусть $k \geq 2$, R — произвольное отношение и ρ — с.о.э. на R . Тогда отношение $\langle R, \rho; F(R) \rangle$ является конгруэнцией на $F(R)$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству соответствующей леммы из [5].

Зададим на R следующие отношения эквивалентности:

1. i_{∞} — отношение равенства отображений: для любых $\delta, \sigma \in R$, $\delta i_{\infty} \sigma < = >$ для любого $a \in E_c \delta(a) = \sigma(a)$;

2. i_0 — тождественно-истинное отношение: для любых $\delta, \sigma \in R$, $\delta i_0 \sigma$;

3. i_m — отношение m -префиксного равенства: $\delta, \sigma \in R$, $\delta i_m \sigma < = > < = >$ для любого $a \in E_c \delta(a)$ и $\sigma(a)$ имеют равные префиксы длины m , ($m = 1, 2, \dots$).

Лемма 4. При любом $k \geq 2$ и любых $R, R \subset (E_k)^{E_c}$, отношения $i_0, i_{\infty}, i_m, m \geq 1$ являются согласованными отношениями эквивалентности.

Утверждение леммы 4 является очевидным для i_0 и i_{∞} . Для отношений $i_m, m \geq 1$ утверждение леммы 4 следует, в частности, из леммы 2.

Имеет место следующая

Теорема. Для любого $k \geq 2$ и любых $R, R \subset (E_k)^{E_c}$, $F(R) = P_k$, $\chi_a = < R, i_0; P_k >$, $\chi_0 = < R, i_{\infty}; P_k >$, $\kappa_m = < R, i_m; P_k >$, $m = 1, 2, \dots$

Доказательство равенств $< R, i_0; P_k > = \chi_a$ и $< R, i_{\infty}; P_k > = \chi_0$ следует из определений 3—5 и описания i_0, i_{∞} . Для отношений i_m равенство $< R, i_m; P_k > = \kappa_m, m \geq 1$ следует из определений конгруэнции κ_m , с.о.э. i_m и леммы 2.

Список литературы

1. Мальцев А. И. // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 2. С. 5.
2. Dassow J. // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1979. V. 28. P. 161.
3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М., 1985.
4. Фахми М. Х. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 58.
5. Горлов В. В. // Математические заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 756.
6. Горлов В. В., Фахми М. Х. // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. 1991. Т. 4. С. 133.

Поступила в редакцию 25.09.91.

УДК.516.72

С. А. ПЕРЕЛЫГИНА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Идея предельного пространства была известна уже Лобачевскому: устремляя кривизну пространства Лобачевского к нулю, в пределе получаем евклидово пространство. Аналогично, устремляя радиус сферы к бесконечности, в пределе получаем евклидову плоскость. В физике эта идея была воспринята после создания Эйнштейном теории относительности. Релятивистская механика Эйнштейна при стремлении скорости света к бесконечности переходит в классическую механику Ньютона.

В 50-х гг. XX в. возобновился интерес к предельным переходам в геометрии и физике. В 1953 г. Инену и Вигнер [1] описали предельный переход группы Лоренца к группе Галилея на языке алгебр Ли: пусть g — вещественная конечномерная алгебра Ли и X_1, X_2, \dots, X_r — некоторый ее базис. Проведем замену базиса по формулам:

$$X_i = U_i^j X_j, \quad (1)$$

где

$$U_i^j = u_i^j + \epsilon w_i^j, \quad (2)$$

$$u = \begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0_{r-s} \end{vmatrix}, \quad \omega = \begin{vmatrix} V & 0 \\ 0 & E_{r-s} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где V — нильпотентная матрица индекса 1. Исследованы условия осуще-

ствимости такого предельного перехода, дано применение к переходу от группы Лоренца к группе Галилея.

В работе Салетана [2] описывается предельный переход Иненю — Вигнера с матрицей V , имеющей произвольный индекс нильпотентности и даны физические приложения.

Предельный переход в геометрии изложен в работе [3], посвященной исследованию неприводимых симметрических (псевдо)римановых пространств. Рассмотрим произвольное симметрическое пространство с основной группой G и стационарной подгруппой H .

Структурные формулы для соответствующих алгебр Ли имеют вид:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= C_{ij}^k X_k, \\ [X_p, X_i] &= C_{pi}^q X_q, \\ [X_p, X_q] &= C_{pq}^i X_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_r$ — базис алгебры Ли группы G , причем X_1, \dots, X_n образуют базис алгебры Ли группы H . Векторы X_{n+1}, \dots, X_r разделим на две группы: X_a, X_r . То же самое сделаем с векторами $X_1, \dots, X_n; X_i$ и X_p . Произведем замену базиса в алгебре g :

$$X'_a = X_a, \quad X'_i = E^2 X_i, \quad X'_i = E X_i, \quad X'_p = E^3 X_p, \quad (5)$$

где E — параметр, который устремляется к нулю. Изучаются условия выполнимости указанного предельного перехода, даются применения к разысканию симметрических пространств с неполупростыми основными группами.

Предельный переход, рассмотренный в [1], [2], будем называть предельным переходом первой степени, а в [3] — третьей, так как в первом случае используется E в первой степени, а во втором — в третьей. В настоящей работе исследуем предельные пространства для однородных периодических пространств с простыми основными группами, классифицированных в [4]. Для решения этой задачи мы рассматриваем предельный переход k -й степени.

Пусть G — произвольная группа Ли с алгеброй Ли g и X_1, \dots, X_r — некоторый базис алгебры g . Векторы базиса разобьем на несколько групп: $X_{i_0}, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}; i_0 = 1, \dots, r_0; i_1 = r_0 + 1, \dots, r_1; \dots; i_k = r_{k-1} + 1, \dots, r$.

Будем предполагать, что векторы X_{i_0}, X_{i_2} порождают подалгебру h_0 алгебры g . Следовательно, мы рассматриваем однородное пространство G/H . Сделаем замену базиса:

$$X'_{i_0} = X_{i_0}, \quad X'_{i_1} = E X_{i_1}, \quad X'_{i_2} = E^2 X_{i_2}, \quad \dots, \quad X'_{i_k} = E^k X_{i_k}. \quad (6)$$

Формулы (4) примут вид:

$$\begin{aligned} [X'_{i_0}, X'_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{l_0} X'_{l_0} + \frac{1}{E^2} C_{i_0 j_0}^{l_2} X'_{l_2}, \\ [X'_{i_0}, X'_{i_2}] &= E^2 C_{i_0 i_2}^{l_0} X'_{l_0} + C_{i_0 i_2}^{l_2} X'_{l_2}, \\ [X'_{i_2}, X'_{j_2}] &= E C_{i_2 j_2}^{l_0} X'_{l_0} + E^2 C_{i_2 j_2}^{l_2} X'_{l_2}, \\ [X'_{i_0}, X'_{j_1}] &= E C_{i_0 j_1}^{l_0} X'_{l_0} + C_{i_0 j_1}^{l_1} X'_{l_1} + \frac{1}{E} C_{i_0 j_1}^{l_2} X'_{l_2} + \dots + \frac{1}{E^{k-1}} C_{i_0 j_1}^{l_k} X'_{l_k}, \\ &\dots \dots \dots \\ [X'_{i_0}, X'_{i_k}] &= E^k C_{i_0 i_k}^{l_0} X'_{l_0} + E^{k-1} C_{i_0 i_k}^{l_1} X'_{l_1} + \dots + C_{i_0 i_k}^{l_k} X'_{l_k}, \end{aligned}$$

$$[X'_{i_1}, X'_{i_2}] = E^3 C_{i_1 i_2}^{i_0} X'_{i_0} + E^2 C_{i_1 i_2}^{i_1} X'_{i_1} + \dots + E^{\frac{1}{k-3}} C_{i_1 i_2}^{i_k} X_{i_k}, \quad (7)$$

$$[X'_{i_{k-1}}, X'_{i_k}] = E^{k^2 - k} C_{i_{k-1} i_k}^{i_0} X'_{i_0} + \\ + E^{k^2 - k - 1} C_{i_{k-1} i_k}^{i_1} X'_{i_1} + \dots + E^{k^2 - 2k} C_{i_{k-1} i_k}^{i_k} X'_{i_k},$$

$$[X'_{i_k}, X'_{j_k}] = E^{2k} C_{i_k j_k}^{i_0} X'_{i_0} + E^{2k-1} C_{i_k j_k}^{i_1} X'_{i_1} + \dots + E^k C_{i_k j_k}^{i_k} X'_{i_k}.$$

Для того чтобы предельный переход $E \rightarrow 0$ был возможен, необходимо и достаточно, чтобы подчеркнутые члены были равны нулю. Отсутствие слагаемого $\frac{1}{E^2} C_{i_0 j_0}^{i_2} X'_{i_2}$ означает, что векторы X'_{i_0} порождают подалгебру h_0 алгебры g . Отсутствие всех подчеркнутых слагаемых приводит к цепочке вложенных друг в друга подпространств пространства g ,

$$h_0 \subset h \subset h_1 \subset \dots \subset h_{k-1}.$$

Предполагая, что эти условия выполнены, положим $E = 0$. Получаются следующие структурные формулы для алгебры Ли предельного однородного пространства:

$$[X_{i_0}, X_{j_0}] = C_{i_0 j_0}^{i_0} X_{i_0}, \quad [X_{i_0}, X_{i_2}] = C_{i_0 i_2}^{i_2} X_{i_2}, \quad [X_{i_2}, X_{j_2}] = 0,$$

$$[X_{i_0}, X_{i_1}] = C_{i_0 i_1}^{i_1} X_{i_1}, \quad \dots, \quad [X_{i_0}, X_{i_k}] = C_{i_0 i_k}^{i_k} X_{i_k},$$

$$[X_{i_1}, X_{i_2}] = C_{i_1 i_2}^{i_2} X_{i_2}, \quad \dots, \quad [X_{i_1}, X_{i_k}] = 0, \quad \dots,$$

$$[X_{i_2}, X_{i_3}] = C_{i_2 i_3}^{i_3} X_{i_3}, \quad \dots, \quad [X_{i_1}, X_{i_k}] = 0, \quad \dots,$$

$$[X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] = 0, \quad [X_{i_k}, X_{j_k}] = 0.$$

Проиллюстрируем указанный метод предельного перехода на конкретном примере. Рассмотрим простую группу $SO(5)$ вещественных ортогональных матриц пятого порядка с определителем 1. Ее алгебра Ли $SO(5)$ состоит из всех вещественных кососимметрических матриц порядка 5. Известно [4], что любой автоморфизм группы Ли $G = SO(5)$ имеет вид: $\Phi: SO(5) \rightarrow SO(5)$, $A \rightarrow TAT^{-1}$, где $T \in SO(5)$; $T = (1, T_1, T_2)$,

$$T_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Множество всех Φ -неподвижных элементов группы G образует подгруппу H . Однородное пространство G/H является периодическим пространством порядка 3. Как показано в [4], базис алгебры Ли группы g можно взять в виде:

$$X_1 = l_{23} - l_{32}, \quad X_2 = l_{45} - l_{54}, \quad X_3 = l_{12} - l_{21}, \quad X_4 = l_{13} - l_{31}, \quad X_5 = l_{14} - l_{41}, \quad X_6 =$$

$$= l_{15} - l_{51}, \quad X_7 = l_{24} - l_{42}, \quad X_8 = l_{25} - l_{52}, \quad X_9 = l_{34} - l_{43}, \quad X_{10} = l_{35} - l_{53}.$$

Структурные формулы алгебры g имеют вид:

$$[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = -X_4, [X_1, X_4] = X_3,$$

$$[X_1, X_5] = 0, [X_1, X_6] = 0, [X_1, X_7] = -X_9,$$

$$[X_1, X_8] = -X_{10}, [X_1, X_9] = X_7, [X_1, X_{10}] = X_8,$$

$$[X_2, X_3] = 0, [X_2, X_4] = 0, [X_2, X_5] = -X_6,$$

$$[X_2, X_6] = X_5, [X_2, X_7] = -X_8, [X_2, X_8] = X_7,$$

$$[X_2, X_9] = -X_{10}, [X_2, X_{10}] = X_9, [X_3, X_4] = -X_1,$$

$$[X_3, X_5] = -X_7, [X_3, X_6] = -X_8, [X_3, X_7] = X_5,$$

$$[X_3, X_8] = X_6, [X_3, X_9] = 0, [X_3, X_{10}] = 0, [X_4, X_5] = -X_9,$$

$$[X_4, X_6] = -X_{10}, [X_4, X_7] = 0, [X_4, X_8] = 0, [X_4, X_9] = X_5,$$

$$[X_4, X_{10}] = X_6, [X_5, X_6] = -X_2, [X_5, X_7] = -X_3, [X_5, X_8] = 0,$$

$$[X_5, X_9] = -X_4, [X_5, X_{10}] = 0, [X_6, X_7] = 0, [X_6, X_8] = -X_3,$$

$$[X_6, X_9] = 0, [X_6, X_{10}] = -X_4, [X_7, X_8] = -X_2, [X_7, X_9] = -X_1,$$

$$[X_7, X_{10}] = 0, [X_8, X_9] = 0, [X_8, X_{10}] = -X_1, [X_9, X_{10}] = -X_2.$$

Делаем замену базиса:

$$X'_1 = X_1, X'_2 = E^2X_2, X'_3 = EX_3, X'_4 = EX_4, X'_5 = EX_5, X'_6 = EX_6,$$

$$X'_7 = E^2X_7, X'_8 = E^2X_8, X'_9 = E^2X_9, X'_{10} = E^2X_{10}.$$

Структурные формулы примут вид:

$$[X'_1, X'_2] = 0, [X'_1, X'_3] = -X'_4, [X'_1, X'_4] = X_3, [X'_1, X'_5] = 0, [X'_1, X'_6] = 0,$$

$$[X'_1, X'_7] = -X'_9, [X'_1, X'_8] = -X'_{10}, [X'_1, X'_9] = X'_7, [X'_1, X'_{10}] = X'_8,$$

$$[X'_2, X'_3] = 0, [X'_2, X'_4] = 0, [X'_2, X'_5] = -X_6, [X'_2, X'_6] = X'_5,$$

$$[X'_2, X'_7] = -E^2X_8, [X'_2, X'_8] = E^2X'_7, [X'_2, X'_9] =$$

$$= -E^2X'_{10}, [X'_2, X'_{10}] = E^2X'_9,$$

$$[X'_3, X'_4] = -E^2X'_1, [X'_3, X'_5] = -X'_7, [X'_3, X'_6] = \\ = -X'_8, [X'_3, X'_7] = E^2X'_5,$$

$$[X'_3, X'_8] = E^2X'_6, [X'_3, X'_9] = 0, [X'_3, X'_{10}] = 0, [X'_4, X'_5] = -X'_9,$$

$$[X'_4, X'_6] = -X'_{10}, [X'_4, X'_7] = 0, [X'_4, X'_8] = 0, [X'_4, X'_9] = E^2X'_5,$$

$$[X'_4, X'_{10}] = E^2X'_6, [X'_5, X'_6] = -X'_2, [X'_5, X'_7] = \\ = -E^2X'_3, [X'_5, X'_8] = 0,$$

$$[X'_5, X'_9] = -E^2X'_4, [X'_5, X'_{10}] = 0, [X'_6, X'_8] = -E^2X'_3, [X'_6, X'_7] = 0,$$

$$[X'_6, X'_9] = 0, [X'_6, X'_{10}] = -E^2X'_4, [X'_7, X'_8] = \\ = -E^2X'_2, [X'_7, X'_9] = -E^4X'_1,$$

$$[X'_7, X'_{10}] = 0, [X'_8, X'_9] = 0, [X'_8, X'_{10}] = \\ = -E^4X'_1, [X'_9, X'_{10}] = -E^2X'_2,$$

Полагая $E = 0$, получаем следующие структурные формулы для алгебры Ли \bar{g} предельного однородного пространства:

$$[X'_1, X'_2] = 0, [X'_1, X'_3] = -X'_4, [X'_1, X'_4] = X'_3, [X'_1, X'_5] = 0,$$

$$[X'_1, X'_6] = 0, [X'_1, X'_7] = -X'_9, [X'_1, X'_8] = -X'_{10}, [X'_1, X'_9] = X'_7,$$

$$[X'_1, X'_{10}] = X'_8, [X'_2, X'_3] = 0, [X'_2, X'_4] = 0, [X'_2, X'_5] = -X'_6,$$

$$[X'_2, X'_6] = X'_5, [X'_2, X'_7] = 0, [X'_2, X'_8] = 0, [X'_2, X'_9] = 0,$$

$$[X'_2, X'_{10}] = 0, [X'_3, X'_4] = 0, [X'_3, X'_5] = -X'_7, [X'_3, X'_6] = -X'_8,$$

$$[X'_3, X'_7] = 0, [X'_3, X'_8] = 0, [X'_3, X'_9] = 0, [X'_3, X'_{10}] = 0,$$

$$[X'_4, X'_5] = -X'_9, [X'_4, X'_6] = -X'_{10}, [X'_4, X'_7] = 0, [X'_4, X'_8] = 0,$$

$$[X'_4, X'_9] = 0, [X'_4, X'_{10}] = 0, [X'_5, X'_7] = 0, [X'_5, X'_6] = -X'_2,$$

$$[X'_5, X'_8] = 0, [X'_5, X'_9] = 0, [X'_5, X'_{10}] = 0, [X'_6, X'_7] = 0,$$

$$[X'_6, X'_8] = 0, [X'_6, X'_9] = 0, [X'_6, X'_{10}] = 0, [X'_7, X'_8] = 0,$$

$$[X'_7, X'_9] = 0, [X'_7, X'_{10}] = 0, [X'_8, X'_9] = 0, [X'_8, X'_{10}] = 0,$$

$$[X'_9, X'_{10}] = 0.$$

Из этих формул видно, что алгебра Ли \bar{g} не является простой. Рассмотрим линейную подстановку ψ в алгебре Ли \bar{g} :

$$X'_1 = \bar{X}_1, X'_2 = \bar{X}_2,$$

$$X'_3 = -\frac{1}{2}\bar{X}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{X}_4, X'_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{X}_3 - \frac{1}{2}\bar{X}_4,$$

$$X'_5 = -\frac{1}{2}\bar{X}_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{X}_6, X'_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{X}_5 - \frac{1}{2}\bar{X}_6,$$

$$X'_7 = -\frac{1}{4}\bar{X}_7 + \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_8 + \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_9 - \frac{3}{4}\bar{X}_{10},$$

$$X'_8 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_7 - \frac{1}{4}\bar{X}_8 + \frac{3}{4}\bar{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_{10},$$

$$X'_9 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_7 + \frac{3}{4}\bar{X}_8 - \frac{1}{4}\bar{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_{10},$$

$$X'_{10} = -\frac{3}{4}\bar{X}_7 - \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_8 - \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{X}_9 - \frac{1}{4}\bar{X}_{10}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (7), убеждаемся, что ψ является автоморфизмом 3-го порядка алгебры \bar{g} . Таким образом, мы получаем предельное однородное периодическое пространство порядка 3 с непростой основной группой.

Применяя указанный предельный переход к периодическим пространствам с простыми основными группами, классифицированными в [4], можно получить целый ряд новых периодических пространств с непростыми основными группами.

Список литературы

1. Уолпу Е., Wigner E. // Proc. Nat. Acad. Sci(USA). 1953. V. 39. P. 510.
2. Saletan E. // Journ. Math. Phys. 1961. V. 2. № 1.
3. Феденко А. С. // УМН. 1957. Т. 12. № 3.
4. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 11.09.91.

УДК 681.3.06:51

В. А. МОЩЕНСКИЙ, Д. В. ДВОРЦОВОЙ

КОНТЕКСТНО—СВОБОДНЫЕ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ГРАММАТИКИ

При грамматическом разборе требуется установить, принадлежит ли данная цепочка языку, порождаемому данной грамматикой; причем в нисходящем разборе [1] пытаются эту цепочку получить из начального символа. Эта проблема весьма важна для класса КС-грамматик из-за их роли в порождении языков программирования [1—3]. Мы опишем еще один класс грамматик, впервые упомянутый в [4], с помощью которого в будущем предполагается облегчить проблему грамматического разбора для КС-грамматик благодаря возможности выводить слова не только из начального символа.

Определение 1. Аксиоматическая грамматика (кратко АК-грамматика)—это упорядоченная тройка $G = \langle V, A, R \rangle$, где V —конечное непустое

множество (называемое алфавитом), A —конечное (возможно, пустое) множество слов в алфавите V (называемых аксиомами) и R —конечное (возможно, пустое) множество выражений вида $x \rightarrow y$ (называемых правилами вывода), в которых x и y —различные слова в алфавите V , а символ \rightarrow не принадлежит V .

Определение 2. Скажем, что слово b непосредственно выводимо в АК-грамматике G из слова a (символически $a \models b$), если $a = d_1 x d_2$; $b = d_1 y d_2$ (d_1 и d_2 —возможно, пустые слова) и G имеет правило $x \rightarrow y$. Слово a порождается G , если существует последовательность слов x_1, x_2, \dots, x_m такая, что $x_m = a$ и каждое x_i есть или аксиома из G , или $x_j \models x_i$ при $j < i$ (будем говорить, что x_m выводимо из x_1 и писать $x_1 \vdash x_m$).

Множество всех слов, порождаемых АК-грамматикой G , называется АК-языком (или просто языком), порождаемым G .

Замечание 1. Каждое конечное множество A слов в алфавите V является АК-языком, ибо за аксиомы можно взять это множество A при пустом множестве правил. Это же множество порождается и автоматными грамматиками (A -грамматиками) [5]. Но, с другой стороны, существует АК-язык, который не является A -языком. Действительно, известно, что язык $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ не порождается ни одной A -грамматикой [1. 6. 152], но этот язык L_1 порождается следующей АК-грамматикой $G_1 = \langle \{a, b\}, \{ab\}, \{ab \rightarrow a^2 b^2\} \rangle$.

Условимся через $|x|$ обозначать длину слова x , пустое слово будем обозначать Λ . В дальнейшем нам понадобится одно утверждение о КС-языках, которое имеется во многих источниках, но мы приведем его в том виде, в котором оно сформулировано в [1. С. 223].

Теорема 1 [1]. Пусть L — КС-язык. Тогда существует такое натуральное число n , что если $z \in L$ и $|z| \geq n$, то z может быть записано в виде $z = uvwxu$, где $vx \neq \Lambda$, $|vwx| \leq n$ и для любого $i \geq 1$ выполнено условие $u^i v^i w^i x^i y \in L$.

Основываясь на этой теореме, введем

Определение 3. Наименьшее число n из теоремы 1 назовем индексом КС-языка L . Две цепочки z_1 и z_2 из данного КС-языка индекса n длины не менее чем n назовем словами одного и того же типа, если существуют такие цепочки u, v, w, x, y , что $z_1 = uv^m w x^m y$, а $z_2 = uv^k w x^k y$; в противном случае о таких цепочках будем говорить, что они различного типа*.

Замечание 2. Не следует думать, что каждая цепочка z из данного КС-языка индекса n при $|z| \geq n$ представима единственным образом в виде $z = uvwxu$ из теоремы 1. Например, КС-язык $L_2 = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \geq 1\}$ имеет индекс 4 и цепочка $z = abab$, для которой $|z| = 4$, может быть представлена следующими двумя способами:

- 1) $z = u_1 v_1 w_1 x_1 y_1$ при $u_1 = x_1 = a$, $w_1 \Lambda$, $v_1 = y_1 = b$ и $u_1 v_1^i w_1 x_1^i \in L_2$ для всех $i \geq 1$;
- 2) $z = u_2 v_2 w_2 x_2 y_2$ при $u_2 = y_2 = \Lambda$, $v_2 = a$, $x_2 = b$, $w = ba$ и $u_2 v_2^i w_2 x_2^i y_2 \in L_2$ для всех $i \geq 1$.

Поэтому одна и та же цепочка с разными по структуре цепочками может быть одного и того же типа. Но ясно, что одна и та же цепочка каждого КС-языка обладает только конечным числом различных типов. Еще заметим, что L_2 является АК-языком, так как порождается АК-грамматикой $G_2 = \langle \{a, b\}, \{abab\}, \{abab \rightarrow a^2 b a b^2, ba \rightarrow b^2 a^2\} \rangle$. Аналогично доказывается, что любой КС-язык вида:

$$\{a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \dots a_{i_k}^{m_k} b_{i_k}^{m_k} \dots b_{i_2}^{m_2} b_{i_1}^{m_1} \mid \forall m_i \geq 1, 1 \leq i \leq k\},$$

где все буквы $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$ попарно различны, есть АК-язык; но следующий КС-язык $L_3 = \{a^n b^m a^k b^k a^m b^n \mid m, n, k \geq 1\}$ не является АК-языком (см. далее).

Лемма 1. Число попарно различных типов слов конечно в каждом КС-языке.

Доказательство. Возьмем некоторый КС-язык L . Пусть его индекс равен n . Тогда найдется КС-грамматика G , которая порождает этот язык L . Если L является конечным, то лемма доказана. Если же язык L есть бесконечный, то грамматика G является рекурсивной [6] и, согласно доказательству теоремы 1 из [1] или [6], будет выполнено условие: из A

* Часто вместо термина *слово* будем употреблять *цепочка*.

будет выводима цепочка vAx , т. е. символически $A \vdash vAx$, где $v \neq \Lambda$, $|vw| \leq n$ и, значит, $|vx| < n$, а A — некоторый вспомогательный символ. Тогда цепочки uv^iwx^iy ($i \geq 1$) из L , являющиеся цепочками одного и того же вида, будут определяться свойством $A \vdash vAx$ при $|vx| < n$ для данного индекса p . Так как каждая КС-грамматика содержит конечное число основных и вспомогательных символов и конечное число правил, то такая грамматика обладает только конечным числом свойств вида $A \vdash vAx$ при $|vx| < n$ для фиксированного p . Следовательно, каждая КС-грамматика задает КС-язык, содержащий слова только конечного числа различных типов. Лемма доказана.

Итак, каждый КС-язык индекса p содержит только конечное число различных типов слов длины не менее чем p :

$$u_1 v_1^i w_1 x_1^i y_1, u_2 v_2^i w_2 x_2^i y_2, \dots, u_k v_k^i w_k x_k^i y_k, \quad (1)$$

причем некоторые слова могут быть представлены разными типами.

Определение 4. КС-язык индекса p назовем языком типа 1 (кратко КС-1-языком), если в последовательности (1) никакое из слов $v_m^n w_m x_m^n$ ($1 \leq m \leq k$) не является подсловом слов $v_j^n w_j x_j^n$ ($1 \leq j \leq k, j \neq m$) и во всяком представлении z при $|z| \geq n$ в виде $z = uv^iwx^iy$ ($i \geq n$) подслово $v^n w x^n$ имеет единственное вхождение в z и не имеет ни одного вхождения в слова из языка других типов.

Замечание 3. Не каждый КС-язык является КС-1-языком. Рассмотрим КС-язык $L_4 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^{2n} b^n \mid n \geq 1\}$ индекса 3, порождаемый КС-грамматикой G_4 с правилами

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2, S_1 \rightarrow aS_1b \mid ab, S_2 \rightarrow a^2S_2b \mid a^2b.$$

Так как слово a^3b^3 есть подслово слова a^6b^3 , то L_4 не КС-1-язык. К тому же можно «прямо в лоб» доказать, что язык L_4 не порождается ни одной АК-грамматикой. КС-язык L_3 из замечания 2 не является КС-1-языком, так как для цепочки $z = ababab$, представимой в виде $z = uvwxu$ при $u = y = ab$, $v = a, w = \Lambda, x = b$ (причем $uv^iwx^iy \in L_3$ при любом $i \geq 1$) подслово $v^6wx^6 = a^6b^6$ является также подсловом слова $a^7b^7a^6b^7$ из L_3 .

Теорема 2. Для каждого КС-1-языка найдется АК-грамматика, порождающая этот язык.

Доказательство. Возьмем некоторый КС-1-язык L . Если язык L является конечным (а эта проблема разрешима, согласно теореме 4.1.2. из [3]), то за аксиомы искомой АК-грамматики возьмем множество L при пустом множестве правил. Если же L является бесконечным и его индекс равен p , то для цепочек из L длины не менее чем p , согласно лемме 1, все различные типы слов задаются последовательностью (1). В этом случае за аксиомы АК-грамматики G возьмем все слова из L длины строго меньшей чем p , и еще все слова, задаваемые последовательностью (1), в которых показатель степени i удовлетворяет неравенству $i \leq n$ (их конечное число, потому что, как замечено в доказательстве леммы 1, выполнено неравенство $|v_m w_m x_m| \leq n$, $1 \leq m \leq k$). Правила вывода определяются по последовательности (1) и полагаются следующими:

$$v_m^n w_m x_m^n \rightarrow v_m^{n+1} w_m x_m^{n+1}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad (2)$$

где для любого m ($1 \leq m \leq k$) выполнено $|v_m w_m x_m| \leq n$.

Теперь убедимся, что язык L порождается АК-грамматикой G . Согласно определению множества аксиом G , все слова из L длины не более чем p порождаются грамматикой G как аксиомы; причем таким же образом порождаются и слова из L длины больше чем p всех типов, в которых показатель степени не превосходит p . Остальные слова этих типов получаются применением правил (2).

Наконец, докажем, что G не порождает ни одного слова, не принадлежащего L . Во-первых, ни одно из правил (2) не применимо к словам длины не более чем p , ибо не бывает вхождений слов большей длины в слова меньшей длины. Во-вторых, к словам длины не более чем p выписанные правила применяются, согласно определению КС-1-языка или однозначно

(порождая все соответствующие слова одного типа), или вообще не применяются (из-за отсутствия вхождений левых частей правил). Теорема доказана.

Список литературы

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, М., 1978. Т. 1.
2. Братчиков И. Л. Синтаксис языков программирования. М., 1975.
3. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М., 1970.
4. Мощенский В. А. // V респ. коф. математиков Белоруссии: Тез. докл. Гродно, 1980. Ч. 1. С.18.
5. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973.
6. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М., 1990.

Поступила в редакцию 11.04.91.

УДК 519.71

С. Ф. ЛИПНИЦКИЙ

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Эффективность автоматизированных обучающих систем (АОС) существенным образом зависит от степени их интеллектуальности [1—3]. Однако отсутствие надежного математического фундамента является серьезным сдерживающим фактором интеллектуализации АОС. В данной статье предлагается математическая модель интеллектуальной системы обучения решению задач. На уровне математического моделирования исследованы условия построения эффективных процедур обучения и разработаны алгоритмы генерации маршрутов решения задач.

Основные понятия и определения. Пусть имеется некоторое конечное множество, элементы которого будем называть задачами, а для каждой задачи— i -й вариант ее решения ($i = 1, n$) т. е. конечное множество R_i , состоящее из терминальных элементов—шагов решения задачи—и двух нетерминальных—начального и конечного шагов. На множестве R_i определен строгий порядок σ_i (транзитивное и антирефлексивное отношение). Считаем, что строго упорядоченное множество $\langle R_i, \sigma_i \rangle$ (будем называть его маршрутом решения задачи) имеет наибольший (начальный шаг решения задачи) и наименьший (конечный шаг) элементы, причем у двух вариантов начальные и соответственно конечные шаги разные. Пусть также $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$ —множество всех шагов всех вариантов решения задачи, а 2^R —

множество всех подмножеств множества R . Заметим, что отношение $\sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$ —строгий порядок на R .

Определение 1. Всякое конечное бинарное отношение ρ на множестве 2^R назовем продукционным. Элементы отношения ρ будем называть правилами продукции, причем если $(A, B) \in \rho$, то множество A назовем левой, а B —правой частями правила (A, B) .

Определение 2. Шаг решения задачи $b \in R$ назовем непосредственно выводимым из множества шагов $S \subseteq R$, если $b \notin S$ и существует правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $A \subseteq S$ и $b \in B$.

Определение 3. Шаг решения задачи $b \in R$ назовем выводимым из множества шагов $S \subseteq R$, если $b \notin S$ и существует кортеж $\langle S_1 = S, S_2, \dots, S_l \rangle$ ($l \geq 2$) подмножеств множества R такой, что для любых $i, j = 1, l$ ($i \neq j$) $S_i \neq S_j$ и всякий шаг каждого последующего множества кортежа непосредственно выводим из предыдущего или является его элементом, а $b \in S_l$.

Определение 4. Множество $S \subseteq R$ шагов решения задачи назовем одновариантным, если существует вариант $R_i \subseteq R$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) такой, что $S \subseteq R_i$.

Определение 5. Одновариантное множество $S \subseteq R_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) шагов

решения задачи назовем насыщенным, если для любых шагов $a \in R_i, b \in S$, удовлетворяющих соотношению $(a, b) \in \sigma_i$, справедливо $a \in S$.

Пусть $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ и $SU\{b\}$, где $b \in R_i, b \notin S$ — насыщенные множества. Тогда будем говорить, что шаг b непосредственно следует за множеством шагов S , или S непосредственно предшествует b .

Определение 6. Продукционное отношение назовем представительным, если для любых насыщенного множества S и шага решения задачи b любого варианта $R_i (i = \overline{1, n})$ таких, что b непосредственно следует за S , шаг b непосредственно выводим из S .

Определение 7. Продукционное отношение назовем корректным, если для любого насыщенного множества S и любого шага b любого варианта $R_i (i = \overline{1, n})$ таких, что b непосредственно не следует за S , шаг b не является непосредственно выводимым из S .

Определение 8. Продукционное отношение назовем непротиворечивым, если для всех $i = \overline{1, n}$ любой шаг $a \in R_i \setminus R_i$ не является выводимым из начального шага $r(i) \in R_i$.

Прямая консультация. Построение всякого маршрута решения задачи связано с нахождением после каждого выполненного шага совокупности шагов, каждый из которых может следовать за этим шагом. Эту совокупность определим как прямую консультацию.

Определение 9. Непустое множество $L \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ всех шагов решения задачи, непосредственно следующих за произвольным насыщенным множеством $S \subseteq R_i$, назовем прямой консультацией, соответствующей S .

Теорема 1. Если продукционное отношение представительно, корректно и непротиворечиво, то прямая консультация, соответствующая любому насыщенному множеству шагов, есть одновариантная совокупность всех шагов, непосредственно выводимых из этого множества.

Доказательство. Пусть $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ — любое насыщенное множество шагов решения задачи. В силу корректности ρ любой шаг a , непосредственно выводимый из S , непосредственно следует за S . Тот факт, что $a \in R_i$, вытекает из непротиворечивости ρ . Таким образом, a является элементом консультации, соответствующей S . С другой стороны, любой шаг консультации, соответствующей S , непосредственно выводим из S в силу представительности продукционного отношения.

Пользуясь теоремой 1, построим следующий алгоритм получения прямой консультации.

Алгоритм 1. На входе алгоритма — насыщенное множество $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, число вариантов n и представительное, корректное и непротиворечивое продукционное отношение. На выходе — все прямые консультации, соответствующие S , для всех $i = \overline{1, n}$. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Найти правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $A \subseteq S$ и $B \setminus S \neq \emptyset$. Если такое правило найдено, то перейти к п. 2, иначе — к п. 3.

2. Выдать консультацию $B \setminus S$; $\rho := \rho \setminus \{(A, B)\}$. Перейти к п. 1.

3. $i := 1$.

4. Если $B_i \setminus S \neq \emptyset$, где B_i — правая часть правила продукции с левой частью $r(i)$, то выдать консультацию $B_i \setminus S$, иначе — $i := i + 1$.

5. Если $i \leq n$, то перейти к п. 4, иначе — КОНЕЦ.

Алгоритм 1 заканчивает работу не более чем за $|\rho|$ — кратное повторение шагов 1, 2 и не более чем за n проходов шагов 3—5.

Обратная консультация. **Определение 10.** Непустое множество M всех шагов варианта $R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, непосредственно предшествующих шагу $b \in R_i$ относительно σ_i , назовем обратной консультацией, соответствующей шагу b .

Теорема 2. Пусть отношение ρ корректно и для него выполнены следующие условия:

1) для любого шага b , кроме начального любого варианта $R_i (i = \overline{1, n})$, существует правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $b \in B$, а $A \subseteq R_i$;

2) $(A, B) \in \rho$ только тогда, когда для любого варианта $R_i (i = \overline{1, n})$ такого, что $A \subseteq R_i$, для всех $a \in A, b \in B$ справедливо $(a, b) \in \sigma_i$.

Тогда обратная консультация, соответствующая шагу $b \in R_i (i \in \{1, 2, \dots,$

$n\}$), есть множество $A \setminus H$, где $A \subseteq R_i$ — левая часть правила продукции, правая часть которого содержит шаг b , а H — множество всех шагов варианта R_i , для каждого шага h из которых существует кортеж правил продукции $\langle (C_1, D_1), (C_2, D_2), \dots, (C_l, D_l) \rangle$ ($l \geq 2$) такой, что $h \in C_1$, $b \in D_l$ и $D_j \cap C_{j+1} \neq \emptyset$ для всех $j = 1, l-1$.

Доказательство. Пусть b — любой шаг любого варианта R_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), а $(A, B) \in \rho$ — произвольное правило продукции такое, что $b \in B$, а $A \subseteq R_i$, которое существует в силу п. 1 условия теоремы 2. Докажем, что любой шаг $h \in A \cap R_i$, для которого существует указанный в условии теоремы 2 кортеж правил продукции, не предшествует непосредственно шагу b относительно σ_i . Действительно, согласно п. 2, условия теоремы 2 для любых $c \in C_j$, $d \in D_j$ ($j = \overline{1, l}$) $(c, d) \in \sigma_i$, а поскольку $l \geq 2$, то в силу транзитивности и антирефлексивности $\sigma_i(h, b) \in \sigma_i$ и h не предшествует непосредственно шагу b . Докажем теперь, что для любого шага $h \in A$, не предшествующего непосредственно шагу b , существует указанный выше кортеж. Поскольку $(h, b) \in \sigma_i$, то из строгой упорядоченности варианта R_i следует существование кортежа шагов $\langle h = h_1, h_2, \dots, h_m = b \rangle$ ($m > 2$) варианта R_i , где h_k непосредственно предшествует h_{k+1} относительно σ_i для всех $k = \overline{1, m-1}$. Далее, согласно п. 1, условия теоремы 2 и корректности ρ , для шагов h_k и h_{k+1} найдется правило продукции $(C_k, D_{k+1}) \in \rho$ такое, что $h_k \in C_k$, $h_{k+1} \in D_{k+1}$ для любого $k = \overline{1, m-1}$, т. е. искомый кортеж правил продукции существует.

Используя теорему 2, построим следующий алгоритм нахождения обратной консультации.

Алгоритм 2. На входе алгоритма — шаг b варианта R_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) и корректное продукционное отношение, для которого выполнены условия теоремы 2. На выходе — обратная консультация, соответствующая шагу b . Алгоритм включает следующие шаги.

1. $H := \emptyset$. Найти правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $b \in B$, а $A \subseteq R_i$.
 2. Выбрать произвольный шаг $h \in A$.
 3. Искать кортеж правил продукции $\langle (C_1, D_1), (C_2, D_2), \dots, (C_l, D_l) \rangle$, $l \geq 2$, такой что $h \in C_1$, $b \in D_l$, $D_j \cap C_{j+1} \neq \emptyset$ для всех $j = \overline{1, l-1}$. Если кортеж найден, то $A := A \setminus \{h\}$, $H := H \cup \{h\}$; перейти к п. 2. Иначе — $A := A \setminus \{h\}$; перейти к п. 4.
 4. Если $A \neq \emptyset$, то перейти к п. 2. Иначе — КОНЕЦ (восстановить множество A и выдать обратную консультацию $A \setminus H$, соответствующую шагу b).
- Алгоритм 2 заканчивает работу не более чем за $|A|$ — кратное повторение шагов 2—4.

Путем многократного использования алгоритма 1 или 2 можно построить весь маршрут решения задачи.

Список литературы

1. Ефимов Е. И. Решатели интеллектуальных задач. М., 1982.
2. Молокова О. С. // Информатика и обучение. Владивосток, 1989.
3. Витол Л. А. // Методы и средства кибернетики и управления учебным процессом высшей школы. Рига, 1989. Вып. 5.

Поступила в редакцию 04.09.91.

УДК 519.17

Л. Н. БАТУРИНА, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ НА ПРОСТЫХ ПУТЯХ

Пусть $G = (X, A, c)$ — неориентированная сеть с множеством узлов X , множеством ребер $(x_i, x_j) \in A$ и целочисленной положительной функцией пропускных способностей c . В сети требуется найти целочисленный максимальный поток из источника s в сток t , реализуемый на простых (ациклических) путях длины (по числу ребер) не более K .

Введенное ограничение на множество путей, на котором реализуется поток, не позволяет непосредственно использовать для решения задачи известные (напр. приведенные в [1]) эффективные алгоритмы определения

максимального потока. В работе [2] предложен метод решения этой задачи, основанный на пошаговом построении дерева простых путей заданной длины и определения потока по каждому из этих путей. На каждом шаге в дерево либо включается новый путь, либо модернизируются потоки на ранее найденных путях с целью обхода дуг, насыщенных потоком. Эффективность алгоритма (по числу обобщенных операций) оценивается величиной $O(m l^2 V(\varphi(G)))$, где m —число дуг сети, l —число простых путей, на которых реализуется максимальный поток, и $V(\varphi(G))$ —величина максимального потока как функция пропускных способностей дуг.

Предлагаем иной подход к решению задачи, основанный на предварительном построении дерева простых путей заданной длины и нахождении максимального потока на этом дереве из корня во все висячие узлы. В этом случае можно построить алгоритм с оценкой, линейной по отношению к числу путей в максимальном потоке. Эффективность этого алгоритма во многом определяется эффективностью перечисления простых путей.

Сведения о простых путях можно представить (как было показано в [3]) в виде таблицы P размерности $(n-1) \times K$, где n —число узлов сети, K —максимальная (или заданная) длина простого пути из s в t . В каждую клетку $[i, l]$ таблицы помещен список P_{il} таких узлов $x_p \in \Gamma(s)$ (где $\Gamma(x_i) = \{x_q | (x_i, x_q) \in A\}$), что дуга (x_i, x_p) является l -й дугой хотя бы одного простого пути из s в t . Для любого узла $x_p \in P_{il}$ определена метка-список M_{il}^p , составленная из номеров узлов $x_j \in \Gamma(s)$, через которые проходит хотя бы один простой путь из s в t , включающий дугу (x_i, x_p) в качестве l -й дуги этого пути.

Проход по клеткам таблицы P позволяет восстановить узлы, по которым проходит любой простой путь из s в t . Процедура этого восстановления, основанная на определенном порядке просмотра меток и узлов в каждой метке, обеспечивает построение специального дерева $T = T(G)$, которое представляет собой «пучок» наборов узлов всех простых путей из s в t сети G , собранный так, что любой общий для некоторых путей подпуть, начинающийся в s , входит в T только один раз. В дереве T естественно выделяются поддеревья T_j с корнями $x_j \in \Gamma(s)$.

Назовем на сети G простой путь из s в t длины k , восстановленный по таблице P , k -путем. Все дуги этого пути можно считать ориентированными от s к t .

Поток, реализуемый на k -путях ($k = 1, 2, \dots, K$), назовем k -потоком.

Множество дуг, удаление которых прерывает все k -пути ($k = 1, 2, \dots, K$) из s в t , назовем k -разрезом.

В работе [3] доказано, что любому k -потоку на дереве T в висячие узлы соответствует поток на простых путях в сети G . При этом на некоторых ребрах (x_i, x_j) могут быть ненулевые потоки f_{ij} и f_{ji} в обоих направлениях. Известно [2], что сокращение их на величину $\min(f_{ij}, f_{ji})$ не допускается, потому что оно может привести к нарушению требования, что поток реализуется на простых путях заданной длины.

Если на сети G (и соответственно на дереве T) определен ненулевой k -поток, то k -путем увеличения потока (ПУВ) (или k -путем уменьшения потока (ПУМ)) назовем k -путь, на всех дугах которого дуговые потоки можно увеличить (или соответственно уменьшить) на некоторое положительное значение.

Определим по заданному k -потоку f множество узлов сети, используя правило А:

1) $s \in X_1$.

2) Пусть узел $x_p \in P_{rl}$ входит в множество X_1 .

а) Каждый узел $x_q \in P_{rl+1}$ включаем в множество X_1 , если выполняются условия $f_{pq} < c_{pq}$ при $M_{rl}^p \cap M_{rl+1}^q \neq \emptyset$ и $x_q \notin X_1$.

б) Каждый узел $x_q \notin X_1$ и такой, что $x_q \in P_{rl+1}$, включаем в множество X_1 , если выполняется условие $f_{qp} > 0$.

Повторяем п. 2 до тех пор, пока множество X_1 нельзя будет более расширять за счет включения новых узлов.

Определим множество $X_1 = X \setminus \bar{X}_1$. Нетрудно видеть, что если $t \in \bar{X}_1$, то множество дуг $(x_p, x_q) \in (X_1, \bar{X}_1)$, для которых выполняется условие $M_{rl}^p \cap M_{rl+1}^q \neq \emptyset$, образуют k -разрез, отделяющий s и t . Пропускная способность k -разреза равна

$$C(X_1, \bar{X}_1) = \sum_{x_p \in X_1} \sum_{x_q \in \bar{X}_1} c_{pq}$$

где для всех узлов $x_p \in X_1$ и $x_q \in \bar{X}_1$ справедливо условие $M_{ij}^p \cap M_{p+1}^q \neq \emptyset$.

Назовем дугу прямой, если для нее выполняется условие а), и обратной, если выполняется условие б) правила А.

Для нахождения максимального k -потока на дереве T (и соответственно на сети G) предлагается алгоритм, суть которого в следующем.

Сначала находится некоторый ненулевой k -поток, реализуемый на каждом поддереве $T_j (x_j \in \Gamma(s))$. Производится проверка на максимальность этого потока. Если найденный k -поток не является максимальным, то осуществляется перераспределение ранее построенного потока по дугам k -путей с целью выделения на некотором поддереве T_j дерева T нового k -пути увеличения потока. Исходной информацией для работы алгоритма является заранее построенная таблица P .

Алгоритм определения максимального k -потока (ОМКП).

Считаем вначале, что на дугах дерева T задан нулевой поток и все поддерева T_j дерева T не просмотрены.

Шаг 0. Выбираем любое непросмотренное поддерево, пусть это T_{j_0} . Если таких поддеревьев нет, то переходим к шагу 2.

Шаг 1. Нахождение ПУВ на поддереве T_{j_0} .

1.1. Узлу x_{j_0} присваиваем метку $(+s, c_{sj_0} - f_{sj_0}^j)$. Пусть узел $x_p \in T_{j_0}$ помечен из узла $x_t \in T_{j_0}$, принадлежащего некоторой клетке P_{rt} . Тогда, если для непомеченного узла $x_q \in P_{rt+1}$ выполняется условие $f_{pq}^j < c_{pq}$ при $j_0 \in M_{p+1}^q$, то ему присваиваем метку $[+x_p, \epsilon_q = \min(\epsilon_p, c_{pq} - f_{pq}^j)]$.

Процесс расстановки меток заканчивается, если 1) узел t помечен, 2) узел t не помечен и других меток расставить нельзя.

В первом случае переходим к п. 1.2, во втором считаем поддерево T_{j_0} просмотренным, удаляем старые метки и переходим к шагу 0.

1.2. Увеличение потока на найденном ПУВ поддерева T_{j_0} .

Изменяем поток на всех дугах найденного ПУВ, начиная с узла t , по правилу:

Если узел x_p помечен из узла x_t , то для дуги (x_t, x_p) , принадлежащей ПУВ, полагаем

$$f_{tp}^{j_0} = f_{tp}^{j_0} + \epsilon_t, \quad (1)$$

$$f_{tp} = \sum_{x_j \in \Gamma(s)} f_{tp}^j, \quad (2)$$

где f_{tp}^j — дуговой поток, принадлежащий k -пути поддерева T_j , f_{tp} — суммарный поток по дуге (x_t, x_p) и $\epsilon_t = \min_{\substack{\text{по всем} \\ \text{узлам ПУВ}}} \epsilon_p$ — значение, полученное при пометке узла t .

Процесс изменения потока заканчивается, если увеличен поток по дуге (s, x_{j_0}) . Удаляем старые метки и повторяем шаг 1.

Шаг 2. Полагам $V = \sum_{x_j \in \Gamma(s)} f_{sj}$, где V — величина найденного k -потока

в сети.

Строим, используя правило А, множество X_1 . Если $t \in X_1$, то k -поток величины V является максимальным и алгоритм заканчивает работу. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. На пути из s в t , выделенном при построении множества X_1 , найдем последнюю обратную дугу и, начиная с нее, выполним последовательно для всех обратных дуг пути следующие действия.

3.1. Пусть (x_q, x_p) — обратная дуга выделенного пути, принадлежащая поддереву T_{j_1} . (Принадлежность дуги (x_q, x_p) некоторому поддереву T_{j_1} определяется по значению $j_1 \in M_{p+1}^q$, при котором узел x_q вошел в X_1 по условию б) правила А.)

3.2. Найдем на T_{j_1} ПУМ из x_q в t , содержащий дугу (x_q, x_p) и значение $\delta_1 > 0$, на которое можно уменьшить поток по нему.

Найдем на T_{j_1} ПУВ из x_q в t и значение $\delta_2 > 0$, на которое можно увеличить поток по нему. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Уменьшим на ПУМ поток на δ и на ПУВ увеличим на δ , изменив по формулам (1) и (2) соответствующие значения дуговых потоков.

3.3 Переходим к п. 3.1 для следующей обратной дуги пути. Если просмотрены все обратные дуги пути, то повторяем алгоритм для непросмотренного дерева при найденных значениях дуговых потоков.

Алгоритм ОМКП заканчивает работу, если на шаге 2 построено множество X_1 , не содержащее узел t .

Покажем, что в этом случае найденный с помощью алгоритма k -поток величины V является максимальным.

Предположим, что найден максимальный поток и при этом $t \in X_1$. Из правила А следует, что в этом случае выделен некоторый путь Π из s в t . Если все дуги этого пути прямые, то найден ПУВ из s в t , и, следовательно, шаг 1 алгоритма не завершен.

Пусть для определенности выделенный путь $\Pi = (s, x_{j_s}, \dots, x_p, x_q, x_t, \dots, t)$ содержит одну обратную дугу (x_q, x_p) . Разложим путь Π на следующие подпути: $\Pi_s = (s, x_{j_s}, \dots, x_p)$ — ПУВ со значением $\epsilon_p > 0$, принадлежащий поддереву T_{j_s} ; (x_q, x_p) — дуга некоторого поддерева T_{j_t} , для которой $f_{qp} > 0$; $\Pi_q = (x_q, x_t, \dots, t)$ — ПУВ со значением $\epsilon_t > 0$, принадлежащий T_{j_t} .

Не уменьшая общности, будем считать, что $j_t \neq j_s$. Из условия сохранения потока [4] следует, что на поддереве T_{j_t} есть хотя бы один ПУМ со значением $\delta_t > 0$ из x_q в t , содержащий дугу (x_q, x_p) . Найдем $\epsilon_q = \min(\delta_t, \epsilon_t)$. Уменьшим поток на ПУМ на ϵ_q и увеличим на эту же величину на Π_q . Покажем, что в результате этих действий обязательно будет выделен на поддереве T_{j_s} ПУВ из s в t . Предположим, что такой ПУВ не найден. Это возможно лишь в том случае, когда ни один простой путь из x_p в t поддерева T_{j_t} не принадлежит T_{j_s} . Тогда из условия, что узел x_p является одновременно l -узлом в простом пути из x_{j_s} в t и из x_{j_0} в t (иначе узел x_q нельзя было бы пометить из x_p по условию б) правила А) следует, что путь $\Pi_p = (x_p, x_{i_1}, \dots, t)$ поддерева T_{j_t} не принадлежит T_{j_s} только в том случае, если он содержит узел x_r , из которого на T_{j_s} есть путь в x_p . Следовательно, x_r является $(l-i)$ -ым ($i \geq 1$) узлом пути из x_{j_s} в t и $(l+j)$ -м ($j \geq 1$) узлом в пути из x_{j_t} в t . Отсюда следует, что путь из x_r в t принадлежит одновременно поддеревьям T_{j_t} и T_{j_s} , и, значит, уменьшение потока на ПУМ приведет к выделению ПУВ на поддереве T_{j_s} .

Эти рассуждения нетрудно обобщить на случай нескольких обратных дуг в пути Π . Тогда, применив описанные действия к каждой паре поддерева T_{j_k} и T_{j_t} , можно выделить ПУВ из s в t , на котором можно увеличить поток. Это противоречит условию максимальности величины V , следовательно, $t \in X_1$.

Из проведенных рассуждений вытекает

Теорема. Величина максимального целочисленного k -потока в сети G равна минимальной пропускной способности k -разреза, отделяющего s и t .

Сформулированное утверждение по структуре аналогично известной теореме Форда—Фалкерсона [4]. Однако для ее доказательства потребовалось ввести понятие k -разреза, построенного по правилу А.

Оценим трудоемкость алгоритма ОМКП. Построение таблицы и поиск по ней k -пути требует [3] не более n^4 действий. Тогда трудоемкость шага 1 алгоритма не превосходит $O(l_1 n^4)$, где l_1 — число k -путей в потоке, определенном на шаге 1. На шаге 3 для перераспределения потока просматривается не более $l_2 = 2\Gamma(s)l$ k -путей. Следовательно, трудоемкость алгоритма ОМКП в лучшем случае оценивается величиной $O(l_1 n^4)$, а в худшем — $O(Ln^4)$, где $L = l_1 + l_2$.

Список литературы

1. Ловецкий Е. Е., Меламед И. И. // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 3.
2. Koubek V. Riha A. // Lect. Notes in Comput. Sci. 1981. V. 118. P. 389.
3. Багурина Л. Н., Лепешинский Н. А. Представление простых путей для потоковых задач. Деп. в ВИНТИ 26.06.87 № 4546—В87.
4. Форд Ф., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М., 1966.

Поступила в редакцию 26.11.91.

В. В. БОБКОВ, И. А. БОБКОВА

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Основное внимание нами будет уделено задаче с начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $u_i = u_i(t)$, $f_i = f_i(t, u)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Однако многое из изложенного ниже может быть использовано при конструировании разностных схем и в случае других эволюционных задач с дифференциальными операторами более сложной структуры, а также при разработке итерационных процессов для стационарных задач, привязанных к соответствующей системе вида (1) через идею установления решения во времени.

При построении вычислительных алгоритмов для решения исходной дифференциальной задачи обычно обязательным этапом является переход к аппроксимирующей ее разностной задаче, многие свойства которой (напр., устойчивость) часто рассматривают [1] как внутренние свойства разностной схемы. Очевидно, что замена дифференциальной модели разностной, не претерпевающей конструктивных изменений во времени, значительно снижает возможности так организованного численного моделирования. И если адекватность дифференциальной модели исследуемому процессу может сохраняться при этом на всем рассматриваемом промежутке, то для разностной модели (особенно в случае явных схем) такой адекватности часто удается достичь лишь при значениях шагов сетки, значительно меньших, чем те, которые являются естественными для наблюдения данной стадии процесса. Это особенно актуально в том случае, когда мы сталкиваемся с явлением жесткости [2] и вынуждены численно анализировать медленно изменяющуюся стадию процесса при наличии быстро затухающих возмущений. Существенная разномасштабность составляющих процесса обычно заставляет при выборе шага сетки ориентироваться на более «быстрые» составляющие и в той стадии процесса, когда их вкладом в пределах точности наблюдения уже можно было бы пренебречь. Более экономичным мог бы быть такой вычислительный алгоритм, в основе которого лежит требование хорошей аппроксимации только тех составляющих решения, которые наблюдаемы в пределах заданной точности, а для других составляющих обеспечен лишь некоторый уровень их качественного поведения. При построении такого типа разностных схем, привязанных к интересующему нас решению, следует обеспечить выполнение ряда новых условий, на часть из которых было, например, обращено внимание в [3]. В качестве системы дифференциальных уравнений, на которую естественно ориентироваться при постановке такого рода дополнительных требований к конструируемым методам (в том числе и универсального назначения), может быть взята система

$$u' = Au + b \quad (2)$$

с постоянными матрицей A и вектором b . Такой выбор обусловлен не только тем, что проблема численного решения систем вида (2) представляет значительный самостоятельный интерес, а основные задачи линейной алгебры, построение итерационных процессов для которых может быть непосредственно связано с (2), наиболее часто встречаются в вычислительной практике, но и тем, что в общем случае системы (1) часто бывает оправданной предварительная аппроксимация на каждом шаге сетки исходной задачи последовательностью линейных задач (в сочетании с известным приемом «замораживания» коэффициентов, а также с оценкой области адекватности решений таких задач). Конструктивное обеспечение таких дополнительных требований согласованности дифференциальной и соответствующей разностной задач удобно проводить, скажем, с использованием идеи построения результирующего разностного оператора на вспомогательной сетке узлов [4] либо посредством корректировки спектральных свойств

разностного оператора [5]. В последнем случае удастся избежать трудоемкой операции умножения матриц, что особенно существенно в случае систем большой размерности. Данная работа выполнена в развитие [5].

Опираясь на прием пошагового выделения и точного обращения главной части исходного дифференциального оператора [6], применительно к (2) запишем интегральное соотношение:

$$u(t+\tau) = u(t) + \tau \rho(\mu\tau) [\mu u(t+\tau) + a] \exp(-\mu\tau) + \int_t^{t+\tau} [Au(x) + b - \mu u(x) - a] \exp[\mu(t-x)] dx, \quad (3)$$

где $\rho(z) = (\exp z - 1)/z$, а правила выбора значений скалярного μ и векторного a параметров будут предопределяться соображениями, излагаемыми ниже. Точное соотношение (3), в отличие от используемого в [5], ориентировано на неявные методы.

Заменив в (3) интеграл простейшей квадратурной суммой с экспоненциальным весом и вводя корректирующий множитель σ (типа $\sigma = 1/(1 + \alpha\tau)$) из [5] с числовым параметром $\alpha \geq 0$, приходим к приближенному равенству:

$$\hat{u} \approx u + \tau \rho(\mu\tau) \exp(-\mu\tau) [\mu \hat{u} + a + (Au + b - \mu u - a)\sigma], \quad (4)$$

где для компактности записи использованы обозначения $u = u(t)$, $\hat{u} = u(t+\tau)$. С (4) сопряжем метод вида:

$$\hat{y} = y + \tau \rho(\mu\tau) \exp(-\mu\tau) [\mu \hat{y} + a + (Ay + b - \mu y - a)\sigma], \quad (5)$$

зависящий от параметров μ , a и корректора σ . Здесь $u \approx \hat{u}$, $\hat{y} \approx \hat{u}$, $\tau > 0$.

Учитывая скалярную неявность метода (5), его легко записать в форме

$$\hat{y} = Sy + g = y + Qy + g, \quad (6)$$

где

$$S = I + Q = \exp(\mu\tau)I + \tau \rho(\mu\tau) (A - \mu I)\sigma, \quad (7)$$

$$g = \tau \rho(\mu\tau) [a + (b - a)\sigma]. \quad (8)$$

Подчиним выбор σ требованию спектральной согласованности матриц S и $\exp(A\tau)$, при этом будем исходить, например, из следующих соображений.

Если в рассматриваемом n -мерном векторном пространстве решений системы (2) из собственных векторов матрицы A можно выбрать, например, ортонормированный базис $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, отвечающий собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно, то любая траектория системы (2) с неособенной матрицей A может быть записана в виде:

$$u(t) = -A^{-1}b + \sum_{i=1}^n c_i \xi^i \exp(\lambda_i t) \quad (9)$$

со своими значениями коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n , определяемыми ее начальным состоянием. Применив метод (6), (7), (8) к системе (2) при $y = u(t)$ из (9), придем к равенству:

$$\hat{y} = g - SA^{-1}b + \sum_{i=1}^n c_i \xi^i \exp(\lambda_i t) s_i, \quad (10)$$

где

$$s_i = \exp(\mu\tau) + \tau \rho(\mu\tau) (\lambda_i - \mu)\sigma. \quad (11)$$

Обычно для явного типа методов применительно к (2) обременительные ограничения на шаг τ , связанные с обеспечением согласованности в качественном поведении решений дифференциальной и соответствующей разностной задач, возникают в случае $\text{Re} \lambda_i < 0$, особенно при большом разбросе собственных значений λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим для простоты лишь случай вещественного спектра. Тогда выбор множителей s_i , $i = 1, 2, \dots, n$,

вида (11), как и в [5], естественно подчинить ограничениям $0 < s_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, или очевидным более строгим требованиям $\exp(-\tau\|A\|) \leq s_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Легко проверить непосредственно, что при $-\|A\| \leq \mu < 0$ выполнение, например, последних условий может быть обеспечено для любого $\tau > 0$, если корректор σ выбрать по правилу:

$$\sigma = \exp(\mu\tau) \rho[-\tau(\|A\| + \mu)] / \rho(\mu\tau). \quad (12)$$

В силу (12), если $\tau \rightarrow 0$, то $\sigma \rightarrow 1$, при этом (см. (11)) и $s_i \rightarrow 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. И аналогично, $\sigma \rightarrow 0$ и $s_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), когда $\tau \rightarrow \infty$. При этом, очевидно $0 < \sigma < 1$ для любого фиксированного $\tau > 0$. Заметим далее, что в (10) вектор $g = SA^{-1}b$ отличается от истинного положения равновесия системы (2) слагаемым $\tau\rho(\mu\tau)(1-\sigma)(a - \mu A^{-1}b)$, которое зануляется при $\sigma = 1$ для любых μ и a , а при $\sigma \neq 1$ — лишь в случае

$$Aa = \mu b. \quad (13)$$

Для однородной системы ($b = 0$) выполнение условия (13) может быть обеспечено без обращения матрицы A выбором $a = 0$ (при любом μ). Вычисляя в этом случае, как и в [7], значения μ через отношение Релея на приближенном решении, мы не только обеспечим свойство точности метода на гармониках системы, но и гарантируем для случая симметричной матрицы A монотонное поведение этого решения вдоль разностных траекторий, приближающихся, согласно данному методу, отличные от гармоник нетривиальные решения. Последнее легко проверить непосредственно, если учесть, что выбор σ по правилу (12) гарантирует выполнение естественного условия $s_j < s_k$ для $\lambda_j < \lambda_k$.

Так как в общем случае неоднородной системы (2) производная $u'(t)$ является решением соответствующей (2) однородной системы, а для однородного случая выбор значений всех параметров был выше обсужден, то тем самым принципиально описан вычислительный алгоритм для приближенного нахождения значений $u'(t)$, которые могут быть уже использованы при конструировании соответствующих (5) численных методов для случая исходной неоднородной системы.

Как мы уже отмечали, $s_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому в случае $b \neq 0$ при выборе способа задания a ориентироваться на выполнение условия (13) естественно лишь в тех случаях, когда построенный метод будет точным, например, на решениях типа

$$u(t) = u^i(t) = -A^{-1}b + C_i \xi^i \exp(\lambda_i t).$$

Поскольку для решений такого вида справедливо соотношение

$$u(t) - u'(t) / \lambda_i = -A^{-1}b,$$

то выбор в качестве a вместо $\mu A^{-1}b$ вектора, близкого к $u' - \lambda_i u$, становится естественным, по крайней мере, для систем, моделирующих процессы с наличием регулярного режима [1]. Учитывая простую по координатную связь посредством (5) векторов a и \hat{y} , выбор a можно связать и с неизвестным значением \hat{y} . Это в сочетании с описанным выше алгоритмом для приближенного нахождения значений производной $u'(t)$ делает вполне понятным, например, следующий выбор вычислительной процедуры:

$$v^0 = Ay^0 + b, \quad \bar{v} = v + \tau\rho(\mu\tau) [(1-\sigma)\mu I + \sigma A]v,$$

$$\hat{y} = y + \tau\rho(\mu\tau) [(1-\sigma)\bar{v} + \sigma(Ay + b)] / [\exp(\mu\tau) - \tau\rho(\mu\tau)\mu\sigma],$$

$$\mu = \mu_0(v), \quad \mu_0(x) = (Ax, x) / (x, x), \quad \rho(z) = (\exp z - 1) / z,$$

$$\sigma = \exp(\mu\tau) \rho[-\tau(\|A\| + \mu)] / \rho(\mu\tau).$$

Здесь через y^0 обозначено начальное состояние u^0 наблюдаемой траектории системы (2).

В заключение отметим, что предлагаемые расчетные формулы можно интерпретировать по аналогии с классическими разностными схемами с весами (см., напр., [1]), однако весовые коэффициенты здесь, в отличие

от классического случая, не фиксированы, а изменяются во времени, адаптируясь к численно наблюдаемой траектории.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1988.
3. Бобков В. В., Мандрик П. А. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1171.
4. Бобков В. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 72.
5. Бобков В. В., Бобкова Н. А. // Там же. 1991. № 1. С. 57.
6. Бобков В. В. // Дифференц. уравнения 1983. Т. 19. № 7. С. 1115.
7. Бобков В. В. // Там же. 1985. Т. 21. № 7. С. 1117.

Поступила в редакцию 02.12.91.

УДК 517.518

В. И. КОРЗИЮК

ОБ ОПЕРАТОРАХ ОСРЕДНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ. II

Работа посвящена дальнейшему изучению свойств операторов осреднения В. И. Буренкова [1, 2] с целью последующего их использования при доказательстве разрешимости граничных задач дифференциальных уравнений. Будем пользоваться обозначениями и понятиями [3] без предварительного объяснения, а также продолжим нумерацию формул, свойств и лемм. Поэтому при ссылках на меньшую нумерацию необходимо смотреть работу [3].

Обобщим утверждение J-6 на случай производных любого конечного порядка α . Пусть функция $a(x) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$. Для $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$

$$F_1^\alpha u(x) = D^\alpha [a J_k u - J_k(a u)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \alpha} \sum_{\gamma \alpha - \beta} \sum_{\eta \alpha - \beta - \gamma} a_\beta a_\gamma a_\eta D^\beta \psi_m(x) \times \quad (13)$$

$$\times (-1)^{|\alpha - \beta - \gamma - \eta|} \frac{1}{\delta_{mk}^{\alpha}} \{ D_y^{\alpha - \beta - \gamma - \eta} \left\{ \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) D_x^\gamma D_y^\eta [a(x) - a(y)] \right\} u(y) dy,$$

где $a_\beta, a_\gamma, a_\eta$ — коэффициенты формулы Лейбница производной произведения двух функций, $D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, $D_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right)$. Аналогично,

$$F_\alpha^{(2)} u(x) = D^\alpha [a J_k^* u - J_k^*(a u)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\gamma \alpha} \sum_{\beta \alpha - \beta} \sum_{\eta \alpha} a_\beta a_\gamma a_\eta (-1)^{|\alpha - \beta - \eta|} \frac{1}{\delta_{mk}^{\alpha}} \times$$

$$\times \{ D_y^{\alpha - \beta - \eta} \left\{ \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) D^{\beta - \eta} \psi_m(y) D_x^\gamma [a(x) - a(y)] \right\} u(y) dy.$$

Отметим, что в (13) и (14) $D_x^\gamma D_y^\eta [a(x) - a(y)] = 0$ при $\gamma \neq 0$ и $\eta \neq 0$. В силу симметрии при $\eta = 0$ и некотором $\gamma \leq \alpha$ найдется слагаемое, которое вместо множителя в подынтегральном выражении $D_x^\gamma [a(x) - a(y)]$ будет содержать $D_y^\eta [a(x) - a(y)]$. Поэтому (13) и (14) представляют собой сумму слагаемых, в подынтегральное выражение которых будут входить коэффициенты $D_x^\gamma a(x) - D_y^\eta a(y)$ для всех $\gamma \leq \alpha$. На основании сказанного, используя схему доказательства J-6, примененного к выражениям (13) и (14), получим следующее утверждение

J-7. Для любых $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$, $a \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать так числа $\delta_{mk} = \delta_{nk}(u)$, что

$$\| F_\alpha^{(i)} u \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \| u \|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

J-8. Для любых $u \in L_2(\Omega)$ можно выбрать так числа $\delta_{mk} = \delta_{nk}(u)$, что

$$\|J_k u - u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad (16)$$

$$\|J_k^* u - u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{L_2(\Omega)}. \quad (17)$$

Доказательство. Так как $\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) = 1$ для $x \in \Omega$ и $\frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) dy = 1$ для $x \in \text{supp } \psi_m$, то

$$\|J_k u - u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [u(y) - u(x)] dy \right)^{1/2}.$$

Отсюда на основании неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и леммы 4 при соответствующем выборе δ_{mk} получим (16). Неравенство (17) доказывается аналогично, используя еще непрерывность $\psi_m(x)$.

Из J-3 и J-8 вытекает следующее утверждение.

J-9. Для любых $u \in L_2(\Omega)$ можно выбрать так числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|J_k u, J_k^* u\|_{L_2(\Omega)}, \quad (18)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от u , запись $\|J_k u, J_k^* u\|_{L_2(\Omega)}$ означает $\|J_k u\|_{L_2(\Omega)}$ или $\|J_k^* u\|_{L_2(\Omega)}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_a^{(3)} u(x) &= [D^a, J_k] u(x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta \in a \\ \beta \neq 0}} D^\beta \psi_m(x) (-1)^{|\alpha-\beta|} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} D_y^{\alpha-\beta} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) u(y) dy \end{aligned} \quad (19)$$

(см. (4)) и

$$\begin{aligned} F_a^{(4)} u(x) &= [D^a, J_k^*] u(x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta \in a \\ \beta \neq 0}} (-1)^{|\alpha-\beta|} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} D_y^{\alpha-\beta} \left[\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) D^\beta \psi_m(y) \right] u(y) dy. \end{aligned} \quad (20)$$

Из J-5 (см. также замечание в конце [3]) и J-7 в силу J-9 вытекает следующее утверждение.

J-10. Для любых $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$, $a \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in \mathbb{N}$ можно так выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|F_a^{(i)} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|J_k u, J_k^* u\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}, \quad (21)$$

$i = 1, 2, 3, 4$.

Операторы $F_a^{(i)}$ будем рассматривать как операторы из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(F_a^{(i)}) = H^{|\alpha|}(\Omega)$.

Лемма 5. Операторы $F_a^{(i)}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ допускают замыкание, $i = 1, \dots, 4$.

Доказательство проводится стандартным образом. Пусть $u_s \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$, где $u_s \in H^{|\alpha|}(\Omega)$, и $F_a^{(i)} u_s \rightarrow f$ в $L_2(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} (f, v)_{L_2(\Omega)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} (F_a^{(i)} u_s, v)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (u_s, (F_a^{(i)})^* v)_{L_2(\Omega)} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

для любого $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $C_0^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω , $(F_a^{(i)})^*$ — сопряженное к $F_a^{(i)}$ выражение относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то из (22) следует $f = 0$. Лемма 5 доказана. \equiv

Замыкание операторов $F_a^{(i)}$ будем обозначать теми же символами. Из формул (13), (14), (19) и (20) следует, что значения $F_a^{(i)}$ и операторов $F_a^{(i)}$ определяются для каждого $u \in L_2(\Omega)$ этими же формулами. Таким образом, $F_a^{(i)}$ определены на всем пространстве $L_2(\Omega)$, понимая под $F_a^{(i)}$ замыкание исходных операторов. Путем предельного перехода неравенство (21) можно распространить на любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, т. е. справедливо следующее утверждение.

J—11. Для любых $u \in L_2(\Omega)$, $a \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in \mathbb{N}$ можно так выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|F_a^{(i)} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|J_k u, J_k^* u\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (21')$$

Здесь в (21') производные от $J_k u$ и $J_k^* u$ для $u \in L_2(\Omega)$ понимаются как значения замкнутых операторов, получаемых в результате замыкания соответствующих операторов с областью определения $H^{|\alpha|}(\Omega)$.

Обозначим через $P_r(x, D)$ дифференциальный полином $P_r(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq r} b_\alpha(x) D^\alpha$ порядка r , $r \geq 1$.

Рассмотрим по аналогии с $F_a^{(i)}$ коммутаторы

$$[P_r, J_k] = P_r J_k - J_k P_r, \quad [P_r, J_k^*] = P_r J_k^* - J_k^* P_r$$

оператора P_r с операторами осреднения J_k и J_k^* . На основании неравенства (21') можно сделать следующее утверждение.

J—12. Для любых $u \in L_2(\Omega)$, $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать так числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|[P_r, J_k] u, [P_r, J_k^*] u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|J_k u, J_k^* u\|_{H^{r-1}(\Omega)}.$$

Список литературы

1. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 39.
2. Вигелков В. И. // Nonlinear analysis, function spaces and applications. Leipzig, 1982. V. 2. P. 5. (Teubner—Texte Math., Bd. 49).
3. Корзюк В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2. С. 49.

Поступила в редакцию 14.04.92.

УДК 519.24

Л. А. ХАТКЕВИЧ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{1, 2, \dots\}$. Пусть $MX(t) = 0$, $R(\tau) = M\{X(t)X(t+\tau)\}$, $t, \tau \in Z$ —неизвестная ковариационная функция, $X(1), X(2), \dots, X(T)$ —наблюдения над случайным процессом $X(t)$, $t \in Z$.

Введем функцию $h(u)$ —окно просмотра данных, удовлетворяющую условию А). $h(u)$, $u \in \mathbb{R}$ ограничена, имсет ограниченную вариацию, $h(u) = 0$ при $u \in (0, 1]$.

Пусть

$$H_k^{(T)} = \sum_{t=1}^T h^k\left(\frac{t}{T}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

В качестве оценки ковариационной функции $R(\tau)$ рассмотрим статистику:

$$\hat{R}_h^{(T)}(\tau) = \frac{1}{H_2^{(T)}} \sum_{t=1}^{T-\tau} h\left(\frac{t}{T}\right) h\left(\frac{t+\tau}{T}\right) X(t)X(t+\tau). \quad (2)$$

В частном случае, когда

$$h(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < u \leq 1, \\ 0 & \text{при остальных } u, \end{cases}$$

(3)
свойства оценки (2) исследовались во многих работах, например, в [1].
Нами получены асимптотические выражения для совместных кумулянтов
оценок $\hat{R}_h^{(T)}(\tau)$ и доказана асимптотическая нормальность этих оценок при
некоторых дополнительных условиях на кумулянты случайного процесса
 $X(t)$.

Для упрощения дальнейшего изложения введем в рассмотрение функцию

$$h^{(T)}(t) = h\left(\frac{t}{T}\right), \quad (4)$$

вместо $\hat{R}_h^{(T)}(\tau)$ будем использовать обозначение $\hat{R}^{(T)}(\tau)$.

Лемма 1. Если функция $h(u)$ удовлетворяет условию А), то

$$\left| \sum_1 h^{(T)}(t+u_1) \dots h^{(T)}(t+u_{k-1}) h^{(T)}(t) - H_k^{(T)} \right| \leq K(|u_1| + \dots + |u_{k-1}|)$$

при некотором конечном K .

Рассматриваемое утверждение—частный случай леммы из работы [3. С. 432].

Теорема 1. Пусть выполняется условие А) и $H^{(T)}(\tau) = \sum_{t=1}^{T-\tau} h\left(\frac{t}{T}\right) h\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$. Тогда для оценки (2) справедливы соотношения

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau) = \frac{H^{(T)}(\tau)}{H^{(T)}(0)} R(\tau),$$

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau) = R(\tau) + o(T^{-1}).$$

Доказательство. Учитывая (2), используем свойства математического ожидания и определение ковариационной функции

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau) = \frac{1}{M_2^{(T)}} \sum_{t=1}^{T-\tau} h\left(\frac{t}{T}\right) h\left(\frac{t+\tau}{T}\right) R(\tau) = \frac{H^{(T)}(\tau)}{H^{(T)}(0)} R(\tau).$$

Запишем смещение оценки $\hat{R}^{(T)}(\tau)$:

$$b^{(T)}(\tau) = M(\hat{R}^{(T)}(\tau) - R(\tau)) = \frac{H^{(T)}(\tau) - H^{(T)}(0)}{H^{(T)}(0)} R(\tau).$$

По лемме 1, принимая во внимание (4),

$$|H^{(T)}(\tau) - H^{(T)}(0)| = \sum_1 h^{(T)}(\tau) h^{(T)}(t+\tau) - H^{(T)}(0) \leq K(\tau).$$

Так как при выполнении условия А) $H^{(T)}(0) \sim T \int_0^1 h^2(u) du$, то

$$|b^{(T)}(\tau)| \sim \frac{|H^{(T)}(\tau) - H^{(T)}(0)|}{T \int_0^1 h^2(u) du} |R(\tau)|.$$

Но выражение в правой части не превосходит $\frac{K|\tau||R(\tau)|}{T \int_0^1 h^2(u) du}$, откуда следует

второе утверждение теоремы.

Введем необходимые в дальнейшем определения. Составим из множества пар чисел $\nu = \{(i, j), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq 2\}$ таблицу

$$(1, 1) \quad (1, 2) \quad (5)$$

$$(k, 1) \quad (k, 2).$$

Назовем разбиение $\nu = \nu' \cup \nu''$ построчным, если для каждой строки таблицы (5) все ее элементы попадут либо в ν' , либо в ν'' . Набор непересекающихся множеств $\{\nu_1, \dots, \nu_p\}$, $\nu_l \subseteq \nu$, $l = 1, \dots, p$, $1 \leq p \leq 2k-1$ назовем неразложимым, если не существует построчного разбиения $\nu = \nu' \cup \nu''$ такого, что для любого $1 \leq l \leq p$ $\nu_l \subseteq \nu'$ либо $\nu_l \subseteq \nu''$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие А) и для любого неразложимого разбиения $\nu = \nu_1 \cup \dots \cup \nu_p$ таблицы (5):

$$\sum_{u_1 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{k-1} = -\infty}^{\infty} | \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \\ \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_p \} | < \infty, \quad (6)$$

где $\text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_l \}$ — совместный кумулянт наблюдений случайного процесса $X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i)$ с индексами $(i, j) \in \nu_l$, $l = 1, \dots, p$, $u_k = 0$, $[z]$ — целая часть z . Тогда

$$\begin{aligned} & T^{k-1} \text{cum} \{ \hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k) \} = \\ & = \int_0^1 h^{2k}(u) du \left(\int_0^1 h^2(u) du \right)^{-k} \sum_{u_1=1}^{T-1} \dots \\ & \dots \sum_{u_{k-1}=1}^{T-1} \sum_{\nu} \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \\ & \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_p \} + \epsilon_T, \quad (7) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям таблицы (5), $\epsilon_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ равномерно по τ_1, \dots, τ_k .

Доказательство. На основании известных свойств кумулянтов

$$\begin{aligned} \text{cum} \{ \hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k) \} &= \frac{1}{(H_2^{(T)})^{k_{t_1=1}}} \sum_{t_1=1}^{T-\tau_1} \dots \\ & \dots \sum_{t_k=1}^{T-\tau_k} h^{(T)}(t_1) h^{(T)}(t_1 + \tau_1) \dots \end{aligned}$$

$$h^{(T)}(t_k) h^{(T)}(t_k + \tau_k) \text{cum} \{ X(t_1) X(t_1 + \tau_1), \dots, X(t_k) X(t_k + \tau_k) \}.$$

Для преобразования выражения введем новые индексы суммирования: $t := t_k$, $u_j = t_j - t_k$, $j = 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} & \text{cum} \{ \hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k) \} = \\ & = \frac{1}{(H_2^{(T)})^k} \sum_{u_1=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_1-1} \dots \sum_{u_{k-1}=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_{k-1}-1} \sum_t \\ & \quad h^{(T)}(u_1 + t) h^{(T)}(u_1 + t + \tau_1) \dots \\ & \quad \dots h^{(T)}(u_{k-1} + t) h^{(T)}(u_{k-1} + t + \tau_{k-1}) h^{(T)}(t) h^{(T)}(t + \tau_k), \\ & \quad \text{cum} \{ X(u_1) X(u_1 + \tau_1), \dots, X(u_{k-1}) X(u_{k-1} + \tau_{k-1}), X(0) X(\tau_k) \}. \end{aligned}$$

Применив лемму 1, получим:

$$\begin{aligned} & \text{cum} \{ \hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k) \} = \\ & = \frac{H_{2k}^{(T)}}{(H_2^{(T)})^k} \sum_{u_1=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_1-1} \dots \sum_{u_{k-1}=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_{k-1}-1} \\ & \text{cum} \{ X(u_1)X(u_1+\tau_1), \dots, X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}), X(0)X(\tau_k) \} + \\ & \quad + \frac{\epsilon_T}{T^{k-1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_T}{T^{k-1}} & \leq \frac{T^{k-1}}{(H_2^{(T)})^k} \sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty} K(|u_1| + \dots + |u_{k-1}|) \times \\ & \times |\text{cum} \{ X(u_1)X(u_1+\tau_1), \dots, X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}), X(0)X(\tau_k) \}|. \end{aligned} \quad (9)$$

Кумулянты попарных произведений наблюдений процесса $X(t)$, согласно [3], можно представить в виде сумм произведений совместных кумулянтов

$$\begin{aligned} & \text{cum} \{ X(u_1)X(u_1+\tau_1), \dots, X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}), X(0)X(\tau_k) \} = \\ & = \sum_{\nu} \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}\tau_i]), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}\tau_i]), (i, j) \in \nu_p \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где суммирование производится по всем неразложимым разбиениям $\nu = \nu_1 \cup \dots \cup \nu_p$ таблицы (5). Подставив (10) в (8) и заменив $H_2^{(T)}$ и $H_{2k}^{(T)}$ на эквивалентные величины

$$H_2^{(T)} \sim T \int_0^1 h^2(u) du, \quad H_{2k}^{(T)} \sim T \int_0^1 h^{2k}(u) du,$$

получим (6). Остаточный член ϵ_T с учетом (9) и (10) не превосходит величины, эквивалентной

$$\begin{aligned} & T^{-1} \sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty} (|u_1| + \dots + |u_{k-1}|) \times \\ & \times |\text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}\tau_i]), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}\tau_i]), (i, j) \in \nu_p \}|. \end{aligned}$$

Так как $T^{-1}(|u_1| + \dots + |u_{k-1}|) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ и имеет место условие (6), то $\epsilon_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. $T^{k-1} \text{cum} \{ \hat{R}_h^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}_h^{(T)}(\tau_k) \}$ достигает минимума по $h(\cdot)$ в асимптотике при условии

$$\int_0^1 h^{2k}(u) du = \left(\int_0^1 h^2(u) du \right)^k.$$

Доказательство получаем, применив интегральное неравенство Гельдера:

$$\int_0^1 h^2(u) du \leq \left(\int_0^1 h^{2k}(u) du \right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_0^1 1 \cdot du \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Отметим, что знак равенства имеет место, в частности, при $h(u)$, определяемом формулой (3).

Теорема 3. Пусть выполняется условие А) и для любого неразложимого разбиения $\nu = \nu_1 \cup \dots \cup \nu_p$ таблицы (4):

$$\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_{i1}| \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \\ \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_p \} | < \infty$$

при любых $l = 1, \dots, k-1, u_k = 0$. Тогда

$$T^{k-1} \text{cum} \{ \hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k) \} = \frac{\int_0^1 h^{2k}(u) du}{\left(\int_0^1 h^2(u) du \right)^k} \times \\ \times \sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} \sum_p \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_1 \} \dots \\ \dots \text{cum} \{ X(u_i + [\frac{1}{2}] \tau_i), (i, j) \in \nu_p \} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

где суммирование производится по всем неразложимым разбиениям $\nu = \nu_1 \cup \dots \cup \nu_p$ таблицы (5). Оценка порядка остаточного члена равномерна по τ_1, \dots, τ_k .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. В условиях теоремы 2 случайные величины

$\sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau_1) - R(\tau_1)), \dots, \sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau_k) - R(\tau_k))$ имеют в асимптотике нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij}(\tau_i, \tau_j))$ с элементами, определяемыми формулой

$$\sigma_{ij}(\tau_i, \tau_j) = \frac{\int_0^1 h^4(u) du}{\left(\int_0^1 h^2(u) du \right)^2} \times \\ \times \sum_u [R(u)R(u + \tau_i - \tau_j) + R(u - \tau_j) + R(u + \tau_i) + \\ + \text{cum} \{ X(u), X(u + \tau_i), X(0), X(\tau_j) \}].$$

Доказательство. Согласно теореме 2, кумулянты случайных величин $\sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau_1) - R(\tau_1)), \dots, \sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau_k) - R(\tau_k))$ сходятся к кумулянтам нормального распределения: все кумулянты порядка выше двух равны нулю. По теореме 1 математические ожидания случайных величин равны нулю при $T \rightarrow \infty$. Выражения для ковариаций получены по формуле (7) с использованием формулы (10), которая при $k=2$ имеет вид:

$$\text{cum} \{ X(u)X(u + \tau_i), X(0), X(\tau_j) \} = \\ = \text{cum} \{ X(u), X(u + \tau_i), X(0), X(\tau_j) \} + \\ + \text{cum} \{ X(u), X(0) \} \text{cum} \{ X(u + \tau_i), X(\tau_j) \} + \text{cum} \{ X(u), X(\tau_j) \} \times \\ \times \text{cum} \{ X(u + \tau_i), X(0) \}.$$

Заключение теоремы следует из леммы работы [2. С. 434].

Следствие. Пусть выполняется условие А) и

$$\sum_u |R^2(u) + R(u - \tau)R(u + \tau) + \\ + \text{cum} \{ X(u), X(u + \tau), X(0), X(\tau) \}| < \infty.$$

Тогда случайная величина $\sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau) - R(\tau))$ распределена асимптотически нормально $N(0, \sigma^2(\tau))$, где

$$\sigma^2(\tau) = \frac{\int_0^1 h^4(u) du}{\left(\int_0^1 h^2(u) du\right)^2} \sum_u [R^2(u) + R(u-\tau)R(u+\tau)] +$$

$$+ \text{cov} \{ X(u), X(u+\tau), X(0), X(\tau) \}.$$

Следствие. Дисперсия оценки $\hat{R}_h^{(T)}(\tau)$ минимальна по $h(\cdot)$ в асимптотике при условии, что окно просмотра данных $h(u)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 h^4(u) du = \left(\int_0^1 h^2(u) du\right)^2.$$

Утверждение—частный случай следствия теоремы 2.

Список литературы

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория. М., 1980.
3. Леонов В. П., Ширяев А. И. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. Вып. 3. С. 342.

Поступила в редакцию 11.10.91



УДК 538.245:538.21

М. И. ДАНИЛЬКЕВИЧ, Д. АЛЬ-ШАРР (Сирия)

ОСЦИЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСА СОЕДИНЕНИЙ $Fe_{3-x}Cr_xO_4$

В хромозамещенных ферритах железа $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ при $1 \leq x \leq 2$ обнаружены [1, 2] особенности температурной зависимости диэлектрической проницаемости ϵ' λ -типа, свойственные сегнетоэлектрикам. В образцах, спеченных на воздухе [2], в отличие от синтезированных в смеси $CO_2 + H_2$ [1], переход в параэлектрическую фазу более размытый и наблюдается сложный гистерезис $\epsilon'(T)$, характерный для структур с несоизмеримыми фазами. Наличие максимума на температурной зависимости ϵ' является, как известно, необходимым, но не достаточным признаком сегнетоэлектрического состояния. В то же время наблюдение этого явления в исследуемых объектах осложнено значительной проводимостью, а также изменением характера импеданса из емкостного на индуктивный при повышении температуры [2]. Поэтому представляет интерес получить дополнительные сведения, подтверждающие существование сегнетоэлектричества в исследуемых шпинелях методом осциллографирования диэлектрического гистерезиса.

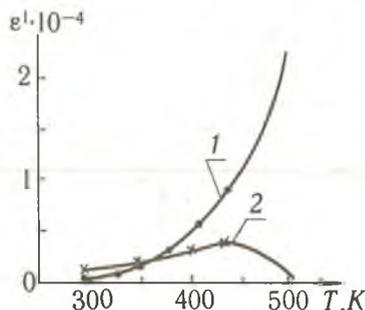
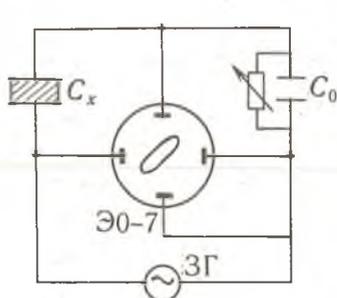


Рис. 1 Схема осциллографирования петли гистерезиса:

ЗГ—звуковой генератор; ЭО-7— осциллограф электронный; C_x —исследуемый конденсатор; C_0 —дополнительный конденсатор в 1 мф.

Рис. 2 Температурная зависимость диэлектрической проницаемости шпинели $Fe_{1.6}Cr_{1.4}O_4$, измеренная осциллографическим (1) и мостовым (2) методами

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Экспериментальные данные — на рис. 2 и 3. На горизонтальные пластины осциллографа подается напряжение, пропорциональное действующему на исследуемом конденсаторе C_x . Снимаемое с дополнительного конденсатора C_0 напряжение U_0 подается на вертикальные пластины. Поскольку в каждый момент времени заряды на C_0 и C_x равны, то

$$U_0 = \frac{u_x C_x}{C_0} = \frac{Q_x}{C_0} = \frac{D_x S_x}{C_0} \quad (1)$$

Следовательно, отклонение луча по вертикальной оси осциллографа пропорционально величине электрического смещения D , а наблюдаемая петля гистерезиса с точностью до постоянного множителя описывает зависимость D от напряженности поляризирующего поля E . Получив петлю гистерезиса в координатах $U_0(u_x)$, пересчитывали ее в зависимость $D(E)$ и определяли мгновенное значение диэлектрической проницаемости

$$\epsilon'_{\text{мгн}} = \frac{D_{\text{мгн.м}}}{\epsilon_0 E_m} = \frac{D_0}{\epsilon_0 E_c} = \frac{U_0 C_0 d_x}{2\epsilon_0 U_x S_x}, \quad (2)$$

где d_x и $2S_x$ —толщина образца и площадь его поляризующих электродов. Величины напряжений U_0 и $U_{\text{св}}$, соответствующие остаточному смещению D_0 и коэрцитивному полю E_c , отсчитывали с экрана осциллографа, предварительно определив масштабные коэффициенты по вертикальной и горизонтальной оси.

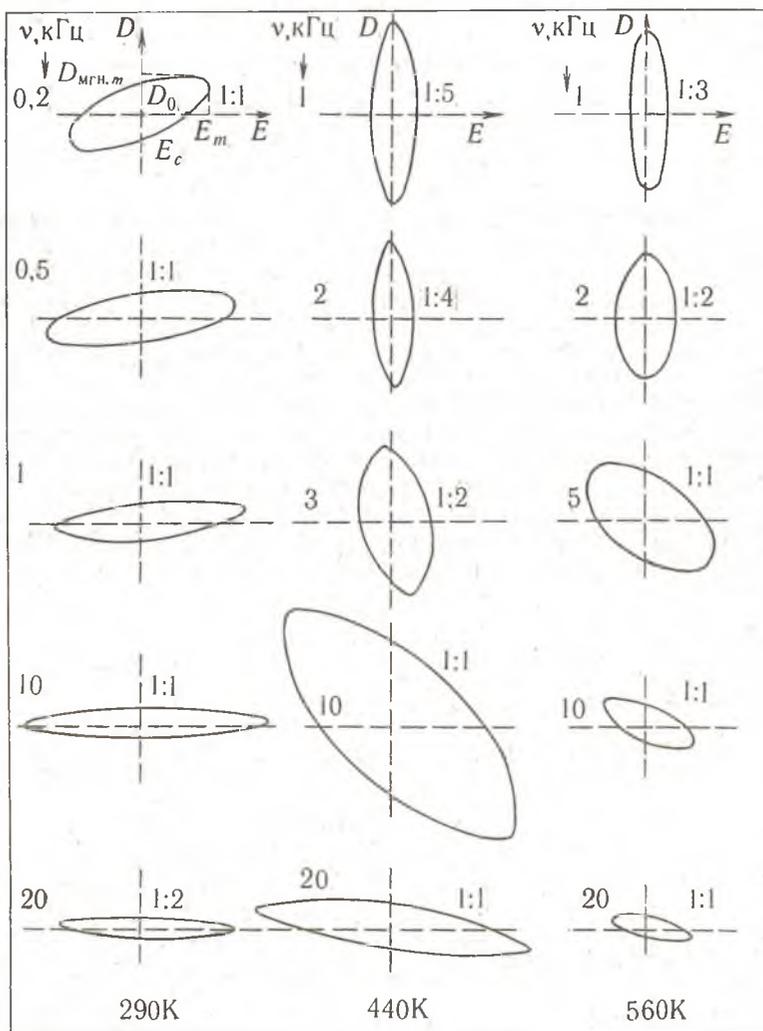


Рис. 3 Петля диэлектрического гистерезиса шпинели $\text{Fe}_{16}\text{Cr}_{14}\text{O}_3$, измеренная осциллографическим методом при постоянной величине максимального поляризирующего поля $E = 5 \text{ кВ/м}$ в зависимости от частоты ν (растет сверху вниз) и температуры T (растет слева направо).

Наблюдаемое поведение $\epsilon'_{\text{мгн}}(T)$ и петли $D(E)$ в зависимости от температуры, амплитуды и частоты поляризирующего поля E свидетельствуют скорее в пользу ее происхождения от нелинейности сегнетоэлектрической поляризации, нежели релаксационного характера, хотя последний, как показали измерения частотной зависимости ϵ' [3], также сильно выражен.

Явление вязкости усложняет температурные деформации петли и приводит к ее частотной зависимости. Известно, что в случае гистерезиса, обусловленного сегнетоэлектричеством, наклон эллипса поляризации слабо зависит от амплитуды и при сколь угодно малой частоте эллиптичность кривой поляризации не вырождается в прямую линию. Изменения напряженности поля в пределах от 0,2 до 5 кВ/м, приложенного к образцам $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ с $x = 1,4$ и $1,6$ как при комнатной температуре, так и при 360 К, где ϵ' принимает максимальное значение, не влияют на наклон эллипса поляризации. Вторым признаком сегнетоэлектричества — сохранение эллиптичности кривой при низких частотах — также имеется в исследуемых образцах. Зависимость $\epsilon'_{\text{мпн}}(T)$, полученная из параметров петли гистерезиса (2), на начальном участке роста проницаемости с точностью до постоянного множителя примерно повторяет ход $\epsilon'(T)$, установленный из мостовых измерений, фиксирующих только емкостную составляющую импеданса. Отсутствие максимума на кривой $\epsilon'_{\text{мпн}}(T)$ связано с тем, что осциллографический метод реагирует и на индуктивную часть импеданса, которая особенно велика в области $T \geq 450$ К [2].

Описанные свойства поляризации феррохромовых шпинелей характерны для невысоких частот порядка 1 кГц и менее. При увеличении частоты выше этого предела в поведении эллипса поляризации в зависимости от частоты и температуры начинают сказываться индуктивные свойства образцов. Наклон эллипса приобретает обратный знак, т. е. максимальное значение D оказывается во втором квадранте. Поворот эллипса поляризации против часовой стрелки характерен для схемы с большой индуктивностью, подключенной вместо исследуемого образца. Обращение знака импеданса исследуемых образцов, полученное мостовыми методами на частоте измерения 1 кГц при нагревании выше 500 К, из емкостного на индуктивный [2] свидетельствует в пользу предположения о том, что деформации петли диэлектрического гистерезиса при нагревании вызваны сначала преимущественно зависимостью от температуры сегнетоэлектрической составляющей диэлектрической поляризации, а затем на фазовый угол и величину амплитуды начинает влиять индуктивность L исследуемых образцов. Наличие L порядка нескольких миллигенри в образцах, лишенных каких-либо обмоток, может быть или результатом резонансного поведения диэлектрической проницаемости с переходом ϵ' в область отрицательных значений, или же связано с особенностями движения носителей тока в спиралевидных магнитных структурах, образуемых за счет ионов хрома. Ответ на эти вопросы требует тщательных исследований магнитной и кристаллической структур изучаемых объектов.

Список литературы

1. Белов К. П., Горяга А. М., Шереметьев В. Н. // ФТТ. 1986. Т. 30. Вып. 1. С. 314.
2. Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр, П. Сана си // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1991. № 4. С. 65.
3. Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 28.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 535.42

А. М. БЕЛЬСКИЙ

НЕДИФРАГИРУЮЩИЕ ПУЧКИ И ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА

Работы [1—2] привлекли внимание к любопытным решениям уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (1)$$

недифрагирующим пучкам, т. е. волновым полям, удовлетворяющим условию:

$$|U(x, y, z)| = |U(x, y, 0)|. \quad (2)$$

Ось z называют осью пучка. Пучки, удовлетворяющие условию (2),

имеют одинаковое распределение интенсивности в любом поперечном сечении $z = \text{const}$.

В данном сообщении показано, что можно ввести более широкий класс решений уравнения (1), также обладающих в некотором смысле «бездифракционным» характером, так что пучки, удовлетворяющие условию (2), будут представлять частный случай таких решений.

Общее решение уравнения (1) при условии (2) легко получить, используя представление любого волнового пучка в виде углового спектра плоских волн:

$$U(x, y, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p, q) e^{ik(px+qy+mz)} dpdq, \quad (3)$$

где (p, q, m) — проекции вектора волновой нормали ($p^2 + q^2 + m^2 = 1$); $F(p, q)$ — функция углового спектра, имеющая смысл фурье-образа поля $U(x, y, 0)$.

Для того чтобы (3) удовлетворяло (2), необходимо, чтобы величина m сохраняла постоянное значение при изменении p и q , т. е., чтобы угловой спектр пучка (3) состоял только из плоских волн, имеющих одинаковые проекции волновой нормали на ось пучка (ось z) [3]. Этому условию можно удовлетворить, положив

$$F(p, q) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 F_\rho(\beta) \delta(\rho - \rho_0), \quad (4)$$

где $p = \rho \cos \beta$, $q = \rho \sin \beta$; $F_\rho(\beta)$ — произвольная функция.

Подставляя (4) в (3), для поля произвольного недифрагирующего пучка в цилиндрической системе координат получим:

$$U_\rho(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} e^{ikmz} \int_0^{2\pi} F_\rho(\beta) e^{ikr\rho \cos(\beta - \varphi)} d\beta. \quad (5)$$

В частности, если $F_\rho(\beta) = \sum_{s=i}^N A_s \delta(\beta - \beta_s)$, то недифрагирующий пучок (5)

представляет собой суперпозицию N плоских волн, волновые нормали которых образуют угол $\theta = \arccos(m)$ с осью z . Если же положить $F_\rho(\beta) \equiv 1$, из (5) получим так называемый бесселев пучок

$$U_\rho(r, z) = J_0(kr\rho) e^{ikmz}, \quad (6)$$

свойства которого хорошо изучены [1—2].

Ослабим несколько условие (2), заменив его условием

$$|U(x, y, z_0)| = |U(x, y, 0)|, \quad (7)$$

т. е. потребуем, чтобы исходное распределение интенсивности воспроизводилось в плоскости $z = z_0$, не накладывая никаких требований на распределение интенсивности в промежуточных поперечных сечениях $0 < z < z_0$.

Для нахождения решений уравнения (1), удовлетворяющего условию (7), воспользуемся недифрагирующими пучками (5) и положим, что искомое решение можно представить суперпозицией

$$U(r, \varphi, z) = \int_0^1 U_\rho(r, \varphi, z) d\rho. \quad (8)$$

Из (5), (7) и (8) получаем, что

$$F_\rho(\beta) = \sum_s F_s(\beta) \delta(\rho - \rho_s), \quad (9)$$

где ρ_s — корни уравнения

$$kz_0(1 - \rho_s^2)^{1/2} = km_0 z_0 + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \dots \quad (10)$$

$0 \leq m_0 \leq 1$ — произвольная действительная постоянная.

Окончательно, используя (9) и (5), получаем:

$$U(r, \varphi, z) = e^{ikm_0 z} \sum_s e^{i2\pi s \frac{z}{z_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_s(\beta) e^{ikr\rho_s \cos(\beta - \varphi)} d\beta. \quad (11)$$

По условию, $0 \leq \rho_s \leq 1$ и $(1 - \rho_s^2)^{1/2} \geq 0$; следовательно, уравнение (10) имеет конечное число решений:

$$\rho_s = [1 - (m_0 + s \frac{\lambda}{z_0})^2]^{1/2}, \quad (12)$$

где целое число s может изменяться в пределах

$$-m_0 \frac{z_0}{\lambda} \leq s \leq (1 - m_0) \frac{z_0}{\lambda}. \quad (13)$$

Таким образом, любой пучок, удовлетворяющий условию (7) (такие пучки мы будем называть самовоспроизводящимися или пучками с продольной периодичностью), можно представить в виде суперпозиции конечного числа недифрагирующих пучков. Максимальное число S слагаемых в такой суперпозиции не зависит от постоянной m_0 и равно $S = [z_0/\lambda]$, где $[x]$ —целая часть числа x .

Из (11) следует, что $U(r, \varphi, nz_0) = U(r, \varphi, 0)$, $n = 0, 1, 2 \dots$, т. е. если пучок воспроизводится в плоскости $z = z_0$, он будет самовоспроизводиться периодически с продольным периодом z_0 . Если $m_0 \neq 0$, восстановление поля осуществляется с точностью до фазового множителя $\exp(ikm_0nz_0)$. Таким пучкам также присуще своего рода свойство «бездифракционности», поскольку начальное распределение интенсивности периодически восстанавливается.

Следовательно, если в плоскости $z = 0$ создано распределение поля

$$U(r, \varphi, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_0^{2\pi} F_s(\beta) I^{ikr\rho_s \cos(\beta-\varphi)} d\beta, \quad (14)$$

оно будет саморепродуцироваться; структура этих распределений определяется S произвольными функциями $F_s(\beta)$. В частности, если все F_s , за исключением одной, тождественно равны нулю, мы получаем бездифракционные пучки, которые самовоспроизводятся в любой плоскости $z = \text{const}$. Если же положить

$$F_s(\beta) = \pi A_s [\delta(\beta) + \delta(\beta - \pi)],$$

из (14) получим:

$$U(x, y, 0) = \sum_s A_s \cos(k\rho_s x), \quad (15)$$

т. е. одномерные, симметричные относительно x структуры.

Пучки с продольной периодичностью тесно связаны с известным в оптике эффектом Тальбота (см. напр., [4—5])—саморепродуцированием дифракционных решеток при их когерентном освещении.

Действительно, если ограничиться параксиальным приближением, из (12) для $m_0 = 0$, $z_0 \gg \lambda$ приближенно получим $\rho_s \approx (-2\lambda s/z_0)^{1/2}$. Полагая, что $A_s \neq 0$, только если $s = -q^2$, из (15) получим:

$$U(x, y, 0) = \sum_q A_q \cos[kqx (\frac{2\lambda}{z_0})^{1/2}]. \quad (16)$$

Формула (16) представляет собой разложение в ряд Фурье периодической четной функции с периодом $d = (\lambda z_0/2)^{1/2}$. Другими словами, любая одномерная решетка с периодом d будет в параксиальном приближении саморепродуцироваться на расстоянии $z_0 = 2d^2/\lambda$, что совпадает с формулой Релея для эффекта Тальбота.

Список литературы

1. Durnin J., Miceli J. J., Eberly J. H. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. № 15. P. 1499.
2. Durnin J. // Journ. Opt. Soc. Am. 1987. V. 4 A. № 4. P. 651.
3. Ананьев Ю. А. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 64. № 6. С. 1211.
4. Montgomery W. D. // Journ. Opt. Soc. Am. 1967. V. 57. № 6. P. 772.
5. Lohmann A. W., Ojeda-Castaneda J., Sircibl N. // Optika Acta. 1983. V. 30. № 9. P. 1259.

ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ГЛАДКОГО ШТАМПА И СИСТЕМЫ ГЛАДКИХ ШТАМПОВ В УПРУГУЮ ПОЛОСУ

Рассмотрим задачу о вдавливании в полосу одного штампа. Известно, что напряженное состояние в плоской задаче теории упругости описывается с помощью комплексного потенциала $\Phi(z)$ формулами Колосова—Мусхелишвили:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}), \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфная функция, определенная в областях $S^- = \{z \in \mathbb{C} | -h < \text{Im}z < 0\}$ и $S^+ = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \text{Im}z < h\}$; μ и κ — известные постоянные; σ_x , τ_y и τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; u и v — компоненты вектора смещений.

Рассмотрим полосу $-h \leq \text{Im}z \leq 0$, лежащую на жестком основании. Пусть на участке $-a \leq \text{Re}z \leq a$, $\text{Im}z = 0$ в полосу вдавлен штамп с плоской подошвой (рис. 1, а), и пусть трение на участке контакта отсутствует. Внешняя нагрузка на остальной части полосы также отсутствует.

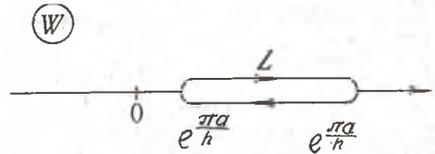
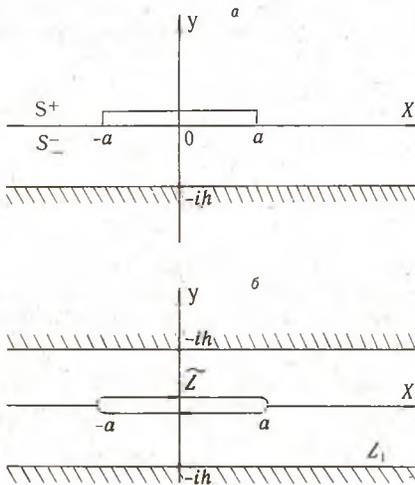


Рис. 1, а, б,

Рис. 2

На основании формулы (2), учитывая условие задачи $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $|x| > a$ и $\tau_{xy} = 0$, $v = \text{const}$ при $|x| < a$, получаем, что функция $\Phi(z)$ должна удовлетворять условиям:

$$\Phi^-(x) - \Phi^+(x) = 0, |x| > a,$$

$$\text{Im}(\Phi^-(x) - \Phi^+(x)) = 0, |x| < a, \quad (3)$$

$$\text{Im}(\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)) = 0, |x| < a.$$

Рассмотрим полосу шириной $2h$ (рис. 1, б). Тогда первое из уравнений (3) означает, что функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ являются аналитическим продолжением друг друга. Из двух других уравнений (3) следует, что

$$\text{Im} \Phi(t) = 0, t \in \bar{L}, \quad (4)$$

где \bar{L} — замкнутая кривая, изображенная на рис. 1, б. Будем считать, что функция Φ ограничена на бесконечности и имеет интегрируемые особенно-

сти в точках $\pm a$. Граничные условия на краю полосы не заданы. Потребуем, чтобы там функция Φ удовлетворяла условию периодичности:

$$\Phi(t) = \Phi(t + 2ih), \quad t \in L_1. \quad (5)$$

Приступим к решению красной задачи (4), (5). Сведем задачу для полосы с разрезом к задаче для плоскости с разрезом (рис. 2). Для этого отображим

полосу на плоскость с помощью функции $w = e^{\frac{\pi z}{h}}$. Для плоскости w с разрезом будем решать задачу $\text{Im}F'(w) = 0$, $w \in L$, где функция $F(w)$ ограничена на

бесконечности и имеет интегрируемые особенности в точках $e^{\pm \frac{\pi a}{h}}$. Наиболее общий вид функций, которые удовлетворяют всем указанным условиям, будет следующим:

$$F(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - w \right) \left(w - e^{-\frac{\pi a}{h}} \right)}},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные константы. Решением же исходной задачи (4), (5) будет функция $\Phi(z) = F(w)$, т. е.

$$\Phi(z) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi z}{h}} + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi z}{h}} - e^{-\frac{\pi a}{h}} \right)}}. \quad (6)$$

В более общем случае, когда вдавливание происходит на отрезке $[a, b]$, общее решение задачи будет иметь вид:

$$\Phi(z) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi z}{h}} + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi b}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right)}}. \quad (7)$$

И, наконец, наиболее общий случай вдавливания в полосу системы n гладких штампов. Пусть $[a_k, b_k]$, $k = 1, n$ — отрезки, определяющие области контакта штампов с полосой, причем $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n < +\infty$. Аналогично рассмотренному выше задаче для полосы с разрезами сводится к задаче для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси. Общее решение задачи дается формулой:

$$F(w) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(w - e^{\frac{\pi a_k}{n}} \right) \left(e^{\frac{\pi b_k}{n}} - w \right)}},$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, n$ — произвольные постоянные. Решение исходной задачи для полосы с разрезами будет следующим:

$$\Phi(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\frac{\pi z}{h} k}}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(e^{\frac{\pi a_k}{n}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi b_k}{n}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right)}}. \quad (8)$$

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.145

Ничипор И. В., Феранчук И. Д. Операторный метод описания системы трех тел с кулоновским взаимодействием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Рассмотрено обобщение операторного метода для описания многомерных систем на примере квантовой системы трех тел с кулоновским взаимодействием. Получено нулевое приближение для энергии низшего колебательно-вращательного уровня для различных молекул.

Библиогр. 5 назв., табл. 1.

УДК 535.35

Онищенко Н. С. Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии Ч. II. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Описана немарковская дефазировка квантовых систем на основе обобщенных квантово-кинетических уравнений. Моделью стохастических флуктуаций, вызывающих дефазировку, выбран телеграфный процесс. В качестве приложений рассмотрен ряд нестационарных нелинейно-оптических когерентных явлений.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 530.12; 535

Лавриненко А. В. Оператор адмитапса в граничных задачах электродинамики движущихся сред // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Проведено обобщение операторного метода кристаллооптики на равномерно движущиеся среды. Получены тензорные соотношения, устанавливающие связь между полевыми векторами падающих, преломленных и отраженных волн в общем случае произвольных поляризацій падающих волн и произвольных направлений движения обеих сред и границы раздела.

Библиогр. 13 назв.

УДК 534.231.2

Семченко И. В., Сердюков А. Н., Хахомов С. А. Прохождение акустических волн через слой сегнетокерамики с нестационарной анизотропией, индуцированной вращающимся электрическим полем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Исследовано распространение циркулярно-поляризованной акустической волны в кристалле с аномально-высокой диэлектрической проницаемостью, некоторый слой которого испытывает воздействия вращающегося электрического поля. Разработан приближенный метод, позволяющий определять амплитуды и фазы прошедших, отраженной и отраженной от границ слоя акустических волн, не прибегая к численному решению системы из восьми уравнений. Изучена зависимость интенсивностей отраженной и прошедшей волн от толщины слоя с вращающейся анизотропией. Определены условия, при которых интенсивности отраженной и прошедшей волн достигают экстремальных значений.

Библиогр. 11 назв., ил. 2.

УДК 535.34

Шепелевич Вик. В. Зависимость эффективности четырехволнового взаимодействия в $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ от ориентации кристалла // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Проведены исследования зависимости коэффициента обращения при четырехволновом смещении от угла поворота кристалла BSO вокруг оси [110]. При этом изменялся угол между вектором решетки и кристаллографическим направлением [001]. Показана необходимость учета оптической активности и пьезоэффекта. Получено хорошее согласие теоретических расчетов с экспериментом.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 535.37

Горбацевич С. К., Гулис И. М. Фотоиндуцированный Штарк-эффект в молекулярных ансамблях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Проведен теоретический анализ эволюции спектральных характеристик ансамбля молекул с узкополосными электронно-колебательными спектрами, неоднородное уширение которых индуцируется взаимодействием дипольных моментов в возбужденных состояниях. Показано, что в этих системах возможны режимы, при которых световое воздействие вызывает рост сечения поглощения. Изменение поглощения системы после ступенчатого включения света начинается

через некоторый интервал времени, длительностью которого можно управлять. Продемонстрирована возможность ступенчатого изменения состояния системы (переключения) путем воздействия короткого слабого сигнального импульса.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 669.018.5:669.24

Макутин Г. В., Сухвало С. В., Власов В. В., Конюшко Л. И., Хохолков Д. Л. Зависимость электрических свойств сплавов на основе никеля от температуры // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Рассмотрены особенности температурных изменений электрических свойств пермаллоевых и перминварных сплавов в диапазоне температур 300+1000 К. Обнаружены особенности поведения $\rho = f(T)$ в критических областях температур. На основании рентгенографических, магнитных и термографических исследований при $T < T_c$ показано, что эти особенности объясняются температурными превращениями, имеющими признаки фазовых переходов первого рода. Природа таких переходов связывается с перестройкой спиновой системы сплавов.

Библиогр. 4 назв., ил. 4.

УДК 681.3.06

Шпаковский Г. И., Мулярчик С. Г., Юнес М. Ф. (Сирия). Алгоритм СИНТАЛ для измерения параллелизма программ в САПР микроэлектроники // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

В статье предлагается алгоритм синтеза структуры параллельной персональной ЭВМ СИНТАЛ и библиотэка базовых правил. В процессе синтеза строится комплексное правило, которое позволяет определить время выполнения некоторой задачи на заданной структуре. Приводится пример синтеза структуры.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 681.327.12(088.8)

Хациревич В. Г., Якушев А. К. Фазо-импульсный селектор для устройства графического ввода планшетного типа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Разработана блок-схема фазо-импульсного дискриминатора для устройства ввода в реальном времени почерковой графической информации. Описан принцип действия схемы и приведены диаграммы электрических параметров, определяющих ее работоспособность.

Библиогр. 5 назв. ил. 2.

УДК 681.325.53(075.8)

Бакиновская Л. Н., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. Н. Преобразователь двоично-десятичного кода в двоичный на основе D-триггеров // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Описаны возможности использования D-триггеров в преобразователях двоично-десятичного кода в двоичный последовательного типа со сдвигом и коррекцией. Изложена методика логического проектирования тетрад двоично-десятичного регистра на D-триггерах со схемой коррекции.

Библиогр. 3 назв., ил. 5, табл. 3.

УДК 519.95

Факхи М. Х. (ЛРЕ) Об инвариантных отношениях и конгруэнциях на алгебрах автоматных отображений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Вводятся понятия инвариантного и согласованного отношений эквивалентности в алгебре автоматных отображений. В терминах этих отношений дается описание всех конгруэнций алгебры.

Библиогр. 6 назв.

УДК.516.72

Перельгина С. А. Предельные периодические пространства // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Описан предельный переход к-й степени для произвольного однородного пространства. Указанный метод применяется для получения новых периодических однородных пространств из пространств с простыми основными группами.

Библиогр. 4 назв.

УДК 681.3.06:51

Мощенский В. А., Дворцовой Д. В. Контекстно-свободные и аксиоматические грамматики // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Описывается класс аксиоматических грамматик без вспомогательных символов, в которых порождаемые цепочки языка выводятся из других таких цепочек. Доказывается, что порождаемые ими языки имеют непустое пересечение с классом КС-языков.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.71

Липницкий С. Ф. Компьютерный практикум: математическая модель и алгоритмы автоматизированного обучения решению задач // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Предлагается математическая модель интеллектуальной системы автоматизированного обучения решению задач. В рамках математической модели исследованы условия построения эффективных процедур обучения и разработаны алгоритмы генерации маршрутов решения задач.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.17

Батурина Л. П., Лепешинский Н. А. Задача о максимальном потоке на простых путях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Исследуется задача определения в неориентированной сети максимального стационарного потока, реализуемого на простых путях заданной длины. Предложен метод решения задачи, основанный на предварительном представлении сведений о простых путях в виде специальной таблицы. Оценка эффективности соответствующего алгоритма линейна относительно числа простых путей в максимальном потоке.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.62

Бобков В. В., Бобкова Н. А. К вопросу о построении методов численного решения жестких систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

На примере задачи с начальными условиями для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, предлагаются новые явные методы модульного типа, ориентированные на случай асимптотической устойчивости. Отличительной чертой рассматриваемых вычислительных алгоритмов является их адаптивность к наблюдаемой траектории.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.518

Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. II // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Рассматриваются операторы осреднения с переменным шагом, сохраняющие на границе области условия осредняемых функций, если последние имеют смысл на границе. Для указанных операторов изучаются свойства, необходимые для доказательства теорем о существовании и единственности решений граничных задач для дифференциальных уравнений.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.24

Хаткевич Л. А. Статистические свойства модифицированной оценки ковариационной функции // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Найдены асимптотические выражения для совместных кумулянтов модифицированной оценки ковариационной функции стационарного случайного процесса. Доказана асимптотическая нормальность оценки при некоторых дополнительных условиях на кумулянты.

Библиогр. 3 назв.

УДК 538.245:538.21

Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр (Сирия). Осциллографические исследования диэлектрического гистерезиса соединений $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Впервые получены петли диэлектрического гистерезиса $D(E)$ феррохромовых шпинелей

$\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$ ($x = 1, 2, \dots, 1, 6$) и показано, что они обладают всеми признаками сегнетоэлектричества. Установлено влияние индуктивной части импеданса на частотные и температурные изменения параметров петли.

Библиогр. 3 назв., ил. 3.

УДК 535.42

Бельский А. М. Недифрагирующие пучки и эффект Тальбота // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Получены общие выражения для поля скалярного волнового пучка с продольной периодичностью. Показано, что пучок с продольной периодичностью можно представить конечной суммой недифрагирующих пучков. Установлена связь между продольной периодичностью и эффектом Тальбота.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Сет'ко Е. А. Задача о вдавливании гладкого штампа и системы гладких штампов в упругую полосу // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 3.

Получено общее решение задачи о вдавливании гладкого штампа и системы гладких штампов в упругую полосу, которое является периодическим аналогом известных формул Кельдыша—Седова. Метод решения заключается в сведении поставленной задачи к задаче для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси.

Ил. 3.