

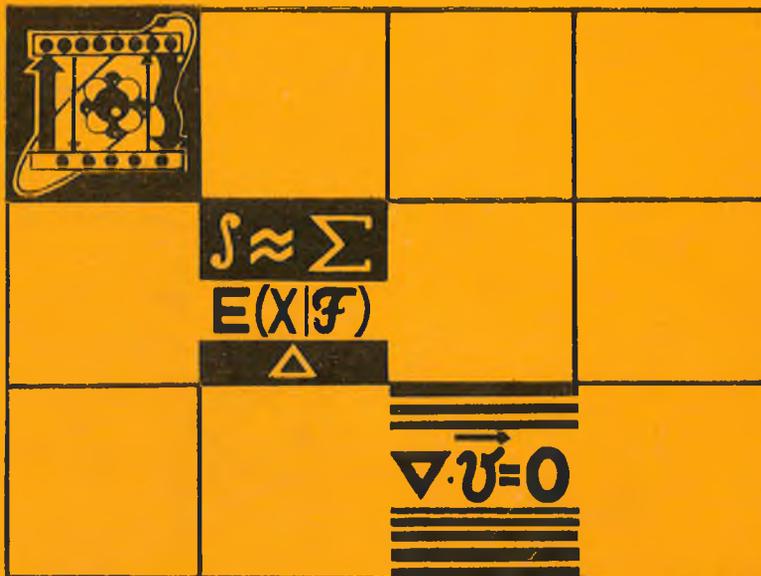
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

2 '92



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

14	Полозов М. Н., Шэбе Х. (Германия). Электрореологический эффект в ОТО	3
23	Урбанович А. И., Новиков А. П., Нгуен Ван Конг (СРВ). Термоупругая генерация продольных акустических колебаний при торможении быстрых заряженных частиц в кристаллах	7
4	Джихад Аддаси (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В. Фазовый отклик растворов красителей, индуцируемый переходами между возбужденными электронными состояниями	11
15	Онищенко Н. С. Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии. Ч. I	16
24	Хапалюк А. П. Обобщенные решения уравнений Эйлера	20
21	Титов А. Д. Поляризационные свойства прямоугольного световозвращателя. 2. Металлизация части отражающих граней	24
7	Горбачевич С. К., Гулис И. М., Рамла Яшвантрао (Маврикий). Влияние безызлучательного индуктивно-резонансного переноса энергии электронного возбуждения на спектрально-кинетические характеристики замедленной флуоресценции твердых растворов профлавина	28
9	Зятков И. П., Княжевич Н. Д., Гоголинский В. И., Пицевич Г. А. Квантово-химические расчеты структуры и конформаций кремнийорганических пероксидов	33
19	Сухвало С. В., Конюшко Л. И. Свойства интерметаллических соединений $GdFe_2$ и $ErFe_2$	37
3	Борицкий В. В., Бринкевич Д. И., Мерааи Ф. (САР), Петров В. В. Взаимодействие золота и кислорода в монокристаллическом кремнии	41

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

24	Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных эсimators для линейных динамических систем	45
12	Корзюк В. И. Об операторах осреднения с переменным шагом. I	49
6	Видякин В. В., Харразова И. Р. К решению стационарных задач фильтрации вязкопластической жидкости с переменным начальным градиентом	53
29	Штин С. Л. Явное решение одной однородной задачи Римана для пятимерного вектора	56
23	Шевила Т. А. Краевая задача Карлемана в пространствах E_p	59
37	Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями	62
17	Медведев В. Г. Численный эксперимент по решению линейных полубесконечных экстремальных задач	66
8	Забелло Л. Е., Рачок В. М. Одно решение вырожденной задачи для систем с распределенным запаздыванием	69
22	Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов случайных характеристик однородной марковской цепи для полиномиальной схемы	73

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

2'92

МАЙ



МИНСК
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ“

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), **А. М. БЕЛЬСКИЙ** (ответственный секретарь), **Е. С. ВОРОПАЙ**, **Р. Ф. ГАБАСОВ**, **В. А. ГАЙСЕНОК**, **В. В. ГРУЗИНСКИЙ**, **Э. И. ЗВЕРОВИЧ**, **В. И. КОРЗЮК**, **Л. Н. КИВАЧ**, **Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ**, **Н. А. ЛУКАШЕВИЧ**, **Г. А. МЕДВЕДЕВ**, **В. И. МИРОНЕНКО**, **И. А. ПРУСОВ**, **В. Ф. СТЕЛЬМАХ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **А. М. ШИРОКОВ**, **Н. И. ЮРЧУК**

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

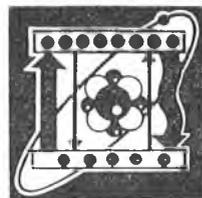
Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2

Редактор *А. И. Гугорова*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *Д. Е. Дивин*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 24.03.92. Подписано в печать 27.05.92. Формат 70×108^{1/16}.
Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52.
Уч.-изд. л. 7,33. Тираж 930 экз. Заказ 934. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Типография издательства «Белорусский Дом печати».
220041, Минск, пр. Ф. Скорины, 79.



УДК 530.12

М. Н. ПОЛОЗОВ, Х. ШЭБЕ (Германия)

ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ОТО

Электрореологический эффект (ЭРЭ) проявляется в изменении вязкости некоторых жидкостей под действием внешнего электрического поля. Поскольку гравитационное поле также приводит к изменению свойств жидкостей, представляет интерес исследование совместного влияния гравитационного и электромагнитного полей на вязкие свойства жидкостей. Естественно, что такое рассмотрение должно проводиться в рамках общерелятивистской теории гравитации. В данной работе к анализу ЭРЭ привлекается развитая авторами в [1, 2] теория эволюции материальных параметров. Найдены первые поправочные члены, обязанные движению среды во внешнем гравитационном поле. Полученные результаты применяются к системе, движущейся по круговой орбите в поле Шварцшильда.

1. Общерелятивистский подход к ЭРЭ.

Рассмотрим жидкость, движущуюся в 4-мерном псевдоримановом многообразии V^4 сигнатуры $+2$ с метрическим тензором g_{ab} (индексы a, b, c, \dots, h пробегают значения от 0 до 3, индексы i, k, \dots — от 1 до 3). Сплошная среда выделяет сопутствующую систему отсчета, с помощью которой могут быть как введены собственные характеристики среды, так и проведено пространственно-временное расщепление всех исследуемых тензоров. Последнее осуществляется [3] с помощью 4-скорости среды u^a ($u^a u_a = -1$) и оператора $P_b^a \equiv \delta_b^a + u^a u_b$, проектирующего в собственное пространство среды. Величины, спроектированные с помощью P_b^a , отмечаем символом $(\dots)_\perp$, например, $(s^a)_\perp \equiv P_b^a s^b$. Среди кинематических характеристик среды отметим 4-ускорение $a^b \equiv Du^b$, где $D \equiv u^b \nabla_b$ — оператор абсолютной производной по собственному времени, а ∇_b — оператор ковариантной производной, а также $e_{ab} \equiv (\nabla_b u_a)_\perp$ — релятивистский пространственный градиент скорости. Из e_{ab} могут быть получены тензор скорости деформации $d_{ab} \equiv e_{(ab)}$ и тензор угловой скорости $\omega_{ab} \equiv e_{[ab]}$ (пространственно-спроектированные).

Исходным соотношением общерелятивистской теории сплошных сред служит неравенство Клаузиуса — Дюгема (напр., [3, 4]):

$$-\rho (D\Psi + \eta D\Theta) + E t^{ba} e_{ab} - P^a DE_a - M_a DB^a - \Theta^{-1} \Theta_a Q^a + \\ + D t^{ba} e_{ab} + g^a E_a \geq 0, \quad (1)$$

где ρ — собственная плотность массы; Ψ — термодинамический потенциал — свободная энергия единицы массы; η — энтропия единицы собственной массы; Θ — собственная температура; $E t^{ba}$ — тензор упругих напряжений; $D t^{ba}$ — тензор вязких напряжений; P^a, M^a — 4-векторы по-

ляризации и намагничения; E_a и B^a — силовые векторы электрического и магнитного полей; g^a — плотность тока проводимости; Q^a — вектор плотности потока тепла и $\bar{\Theta}_a$ — релятивистский градиент температуры. Все величины в (1) подвергнуты 3+1-расщеплению.

Эффекты, связанные с вязкостью жидкости, содержатся в слагаемом $D^t{}^{ba}e_{ab}$, причем в пренебрежении квантовыми эффектами [5] тензор вязких напряжений симметричен, т. е. $D^t{}^{ba} = D^t{}^{ab}$. Следовательно, в (1) входит d_{ab} вместо e_{ab} . Вязкий тензор напряжений (термодинамический поток) может быть выражен через тензор скорости деформации (термодинамическую силу) посредством соотношения

$$D^t{}^{ba} = d^{baef}d_{ef}, \quad d^{baef} = d^{abef} = d^{bafe} \quad (2)$$

с помощью материального параметра — пространственного тензора d^{baef} , специфического для каждой жидкости и учитывающего ее вязкость. Зависимость d^{baef} от электрического поля и приводит к электрореологическому эффекту.

В отсутствие гравитационного поля тензор d^{baef} для жидкостей может быть построен только из скаляров и единичного пространственного тензора P^{ab} , а именно, в виде [6]:

$$d^{baef} = k_1 P^{(b|e|} P^{a)j} + k_2 P^{ba} P^{ej}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) показывает, что второе слагаемое в (3) учитывает деформацию всестороннего сжатия, т. е. k_2 соответствует второй вязкости, которая в дальнейшем рассматриваться не будет. В свою очередь, скалярный коэффициент вязкости k_1 для электрореологических жидкостей должен зависеть от напряженности электрического поля E_a . Из соображений тензорной размерности и изотропии жидкости в отсутствие гравитационного поля очевидно, что k_1 может быть функцией только от скаляров, образованных из E_a и P_b^a . Если внешнее электрическое поле слабое, то главным является скаляр $E^2 \equiv P^{ab}E_aE_b$, т. е. $k_1 = k_1(P^{ab}E_aE_b)$. Разлагая k_1 в ряд по E^2 и ограничиваясь первым существенным членом, находим:

$$k_1 = a_0 + a_1 P^{cd}E_cE_d, \quad (4)$$

скалярные коэффициенты a_0, a_1 зависят от плотности и температуры.

В соответствии с [1], при движении среды в гравитационном поле ее материальные параметры изменяются определенным образом, описываемым так называемым законом эволюции (ЗЭ). В дальнейшем ЗЭ для материального параметра d^{baef} постулируется в виде:

$$(\mathbf{L}d^{baef})_{\perp} = 0, \quad (5)$$

где \mathbf{L}_R — дифференциальный оператор специального вида [2]:

$$(\mathbf{L}_R A_{.b}^{.a})_{\perp} \equiv (DA_{.b}^{.a})_{\perp} - \omega_c^a A_{.b}^{.c} + \omega_b^c A_{.c}^{.a} - d_c^a A_{.b}^{.c} + d_b^c A_{.c}^{.a}, \quad (6)$$

а d_b^c обозначает релятивистскую часть тензора деформации. Закон эволюции (5) позволяет учесть прямое влияние релятивистской деформации среды и гравитационного поля на вязкие свойства жидкости. Решая при заданном движении среды уравнение (5), можно получить значения d^{baef} в любой точке среды в любой момент времени, если они известны на некоторой начальной пространственно-подобной гиперповерхности H . Для определенности положим, что H является пространственной гиперплоскостью вне гравитационного поля.

В соответствии с [2], тензор d^{baef} должен быть построен только из скаляров и вспомогательного тензора $C^{ab} = C^{ba}$, обладающего следующими свойствами:

$$(\mathbf{L}_R C^{ab})_{\perp} = 0, \quad C^{ab}|_H = P^{ab}. \quad (7)$$

Решение 3Э (5) сводится тогда просто к замене P^{ab} на C^{ab} в соотношениях для материальных параметров жидкости, находящейся вне гравитационного поля. Сопоставление (3), (4) и (7) дает для искомого материального параметра следующее выражение:

$$d^{abcd} = \frac{\rho}{\rho_0} [a_2 + a_3 C^{ef} E_e E_f] C^{(b|c|} C^{a)d}, \quad (8)$$

а значения постоянных ρ_0 , a_2 и a_3 заданы на H . Коэффициент

$$\frac{\rho}{\rho_0} a_3 C^{ef} E_e E_f \quad (9)$$

определяет искомый ЭРЭ. Для оценки влияния гравитационного поля на ЭРЭ необходимо вычислить разницу между (9) и соответствующим выражением вне гравитационного поля, т. е. $a_3 P^{ef} E_e E_f$.

Выражение (9) включает две части:

- 1) изотропное изменение ЭРЭ вследствие отличия ρ от ρ_0 ,
- 2) анизотропное изменение ЭРЭ вследствие отличия C^{ab} от P^{ab} .

Для того чтобы избежать координатных эффектов, сопоставление обоих выражений должно проводиться в некоторой подходящей системе тетрад.

2. Предварительные соотношения для поля Шварцшильда.

Применим полученные результаты к жидкости, которая покоится в системе отсчета (напр., на спутнике), вращающейся в поле Шварцшильда по круговой орбите. Предполагая, что спутник движется по геодезической, найдем тетрадные компоненты тензора C^{ab} и собственную плотность массы ρ .

Поле Шварцшильда задается линейным элементом

$$ds^2 = -(1 - 2M/R) dt^2 + dR^2 / (1 - 2MR) + R^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2), \quad (10)$$

где M — масса тяготеющего центра. Перейдем к вращающейся координатной системе с помощью преобразования $\varphi = \omega t + \chi$, где ω обозначает угловую скорость. Тогда (10) примет вид:

$$ds^2 = [-(1 - 2M/R) + R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta] dt^2 + dR^2 / (1 - 2M/R) + R^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\chi^2) + 2R^2 \omega \sin^2 \Theta dt d\chi. \quad (11)$$

4-скорость среды, покоящейся в системе (11), имеет компоненты

$$u_a = (-[(1 - 2M/R) - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta]^{1/2}; 0; 0; 2R^2 \omega \sin^2 \Theta [1 - 2M/R - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta]^{-1/2}).$$

Отличны от нуля следующие компоненты проектирующего оператора P_b^a :

$$P_{11} = (1 - 2M/R)^{-1}, \quad P_{22} = R^2, \quad P_{03} = -2R^2 \omega \sin^2 \Theta, \\ P_{33} = \frac{4R^4 \omega^2 \sin^4 \Theta}{1 - 2M/R - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta} + R^2 \sin^2 \Theta. \quad (12)$$

Чтобы найти тензор C_{ab} , «выключим» [7] гравитационное поле, устремляя M к нулю, т. е. $C_{ab} = \lim_{M \rightarrow 0} P_{ab}$. Различие между C_{ab} и P_{ab} обязано только релятивистской деформации, а тензор C_{ab} должен быть решением уравнения (5) с начальным условием (7) (см. [2]). Тогда

$$C_{11} = 1, \quad C_{22} = R^2, \quad C_{03} = -2R^2 \omega \sin^2 \Theta, \quad C_{33} = R^2 \sin^2 \Theta \frac{1 + 3R^2 \omega^2 \sin^4 \Theta}{1 - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta}.$$

Для вычисления тетрадных компонент тензора C_{ab} введем натуральные тетрады $L_{(b)}^a$. Полагая $L_{(0)}^a \equiv u^a$, получим после выкладок:

$$L_{(1)}^a = (0, (1 - 2M/R)^{1/2}, 0, 0), \quad L_{(2)}^a = (0, 0, 1/R, 0), \\ L_{(3)}^a = \left(\frac{-2\omega}{1 - 2M/R + 3R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta} \left[\frac{4R^4 \omega^2 \sin^4 \Theta}{1 - 2M/R - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta} + R^2 \sin^2 \Theta \right]^{1/2}, 0, 0, \right. \\ \left. \frac{1 - 2M/R - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta}{R^2 \sin^2 \Theta [1 - 2M/R + 3R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta]} \left[\frac{4R^4 \omega^2 \sin^4 \Theta}{1 - 2M/R - R^2 \omega^2 \sin^2 \Theta} + R^2 \sin^2 \Theta \right]^{1/2} \right).$$

Тогда тетрадные компоненты C_{ab} суть:

$$\begin{aligned} C_{(1)(1)} &= 1 - 2M/R, \quad C_{(2)(2)} = 1, \\ C_{(3)(3)} &= \frac{(1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta) (1 + 3\omega^2 R^2 \sin^2 \Theta)}{(1 - 2M/R + 3R^2\omega^2 \sin^2 \Theta) (1 - \omega^2 R^2 \sin^2 \Theta)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя сферическую симметрию поля Шварцшильда, положим $\Theta = \pi/2$. Тогда (14) упрощается до

$$C_{(3)(3)} = \frac{(1 - 2M/R - R^2\omega^2) (1 + 3R^2\omega^2)}{(1 - 2M/R + 3R^2\omega^2) (1 - R^2\omega^2)}. \quad (15)$$

Поскольку изучаемая система движется по круговой орбите, то существует соотношение, связывающее ее угловую скорость ω с радиусом орбиты R . Это соотношение может быть найдено из уравнения геодезической $a^b \equiv Du^b = 0$.

Вычисляя скобки Кристоффеля и находя абсолютную производную от 4-ускорения, получаем для 4-ускорения

$$a^b = \left(0, \frac{(1 - 2M/R) (2R\omega^2 \sin \Theta - 2M/R^2)}{1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta}, \frac{\omega^2 \sin 2\Theta}{1 - 2M/R - R^2\omega^2 \sin^2 \Theta}, 0 \right).$$

Подставляя снова $\Theta = \pi/2$ и приравнявая a^b к нулю, приходим к соотношению $2R\omega^2 - 2M/R^2 = 0$, откуда

$$\omega R = (M/R)^{1/2}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), находим

$$C_{(3)(3)} = [1 - (3M/R)^2]/[1 - (M/R)^2]. \quad (17)$$

Используя [4], для собственной плотности массы находим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = [\det C_{(i)(k)}]^{-1/2} = 1 + 2M/R + 0(2M/R), \quad (18)$$

где $0(2M/R)$ обозначает члены более высокого порядка по $2M/R$, чем линейный.

3. Обсуждение примеров.

Вернемся к соотношению (9), которое в тетрадных компонентах имеет вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0} a_3 C^{(i)(k)} E_{(i)} E_{(k)}. \quad (19)$$

Изотропный эффект. Из (18) непосредственно видно, что изотропный вклад имеет порядок $2M/R$. Следовательно, гравитационное поле усиливает ЭРЭ.

Анизотропный эффект. При рассмотрении анизотропного вклада, вызванного отличием $C^{(i)(k)}$ от $P^{(i)(k)}$, представляют интерес 3 возможных ориентации электрического поля:

а) радиальное направление (к центру поля Шварцшильда). Поскольку $C^{(1)(1)} = 1 - 2M/R$, то ЭРЭ ослабляется. Изотропный и анизотропный эффекты компенсируют друг друга в первом порядке по $2M/R$.

б) направление движения. Формула (17) показывает, что $C^{(3)(3)}$ дает эффект только 2-го порядка. Следовательно, остается изотропный вклад.

в) поперечное направление. Если электрическое поле перпендикулярно как радиусу, так и направлению движения, то никакого анизотропного вклада не появляется даже в более высоких порядках.

Таким образом, ЭРЭ увеличивается в первом порядке относительно главного члена, если электрическое поле перпендикулярно к радиальному направлению.

Оценим порядок поправочного члена $2M/R$ для различных небесных тел.

Пример 1. Искусственный спутник Земли. Обычная орбита спутника лежит примерно на высоте 300 км от поверхности Земли. Тогда $R = 6,7 \cdot 10^3$ км от поверхности Земли и поскольку для Земли [8] $2M_3 = 0,8876$ см, то $2M/R = 1,32 \cdot 10^{-9}$. Столь малая величина не позволяет обнаружить его современными средствами.

Пример 2. Пусть космический корабль движется по круговой орбите вокруг Солнца в пределах орбиты Меркурия. Тогда $R = 57,9 \cdot 10^6$ км, $2M_c = 2,9533 \cdot 10^5$ см, $2M/R = 5,1 \cdot 10^{-5}$. Такой эффект все еще достаточно мал, чтобы повлиять, например, на работу технических конструкций, но уже может быть измерен с помощью высокочувствительной аппаратуры.

Отметим в заключение, что полученные выводы являются следствием выбранного закона эволюции (5) для материального параметра d^{baef} (т. е. выбранной модели среды) и могут не иметь места для другого закона эволюции, например, для ЗЭ вида $(Dd^{baef})_{\perp} = 0$.

Список литературы

1. Polozov M. N., Schäbe H. // Exp. Techn. Phys. 1984. V. 32. P. 387.
2. Ibid. 1987. V. 35. P. 161.
3. Maugin G. A. // Journ. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1198.
4. Schäbe H. // Exp. Techn. Phys. 1985. V. 33. P. 217.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986.
7. Salje N. // Wiss. Zs. FSU Jena, math.-nat. Reihe. 1976. V. 25. P. 439.
8. Stephani H. Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin, 1977.

Поступила в редакцию 15.10.91.

УДК 621.315.592:546.28

А. И. УРБАНОВИЧ, А. П. НОВИКОВ, НГУЕН ВАН КОНГ (СРВ)

ТЕРМОУПРУГАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ

В настоящее время в литературе, посвященной вопросам ионно-лучевой обработки материалов широко обсуждается проблема «дальнодействия». Суть ее заключается в регистрации изменений дефектно-примесной системы кристалла на расстояниях, в сотни и тысячи раз превышающих средний проективный пробег внедренных ионов. В качестве одной из причин может рассматриваться генерация акустических волн заряженными частицами. Следует заметить, что в настоящее время отсутствует последовательная теоретическая модель возникновения акустических волн, учитывающая поперечные размеры трека и особенности термализации выделяемой в кристалле энергии.

В работе [1] рассмотрено возбуждение акустических колебаний пучками заряженных частиц малой плотности и проведен расчет акустического сигнала от перегретой области вблизи трека заряженной частицы в предположении, что трек представляет собой бесконечно тонкую нить, вдоль которой происходит непрерывное выделение энергии с постоянной интенсивностью. Такая модель применима для сфокусированных ионных пучков или даже для отдельных частиц при условии, что скорость передачи энергии, выделенной в треке в приграничную область, постоянна. Естественно, представляет интерес выйти за рамки этих приближений и учесть как поперечный размер трека, так и временную зависимость мощности энерговыделения.

Рассмотрим прохождение заряженной частицы через тонкую пластину вещества толщиной $h \leq h_p$, где h_p — радиационная длина вещества мишени. В этом случае трек можно представить в виде цилиндра, радиусом R^0 , в котором происходит выделение энергии с мощностью $S(t)h$, где $S(t)$ — мощность, приходящаяся на единицу длины. Будем также считать, что величина S экспоненциально зависит от времени t и проведем расчет акустического сигнала от перегретой области для коротких промежутков времени, следующих за моментом прохождения частицы. В этих условиях

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \approx S_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} + \frac{t^2}{2t_0^2} - \dots\right), \quad (1)$$

где t_0 — характерное время изменения мощности.

При учете аксиальной симметрии уравнение, описывающее температурное поле $T(r, t)$ вокруг трека, будет иметь вид:

$$\rho c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где ρ , c_T , λ — соответственно плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности среды; r — поперечная координата.

Изменение амплитуды возникающей расходящейся звуковой волны $u(r, t)$ можно найти из уравнения [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = -ak \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3)$$

где a — коэффициент объемного расширения; k — модуль всестороннего сжатия; c — скорость продольного звука в веществе мишени. Уравнения (2), (3) будем решать методом преобразования Лапласа при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$-2\pi\lambda \lim_{r \rightarrow R_0} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = S(t), \quad (4a)$$

$$\lim_{r \rightarrow R_0} \left[(1 - \mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} - (1 + \mu) \alpha T \right] = 0, \quad (4б)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, t) < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) < \infty, \quad (4в)$$

где μ — параметр Пуассона.

Физически условие (4б) означает, что на границе $r = R_0$ радиальные напряжения в веществе трека равны нулю.

В случае, когда радиус трека мал ($R_0 \rightarrow 0$), приближенное решение системы (2—4) имеет вид:

$$u(r, t) = u_1(r, t) + \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{r}{c} \\ u_2(r, t) & \text{при } t \geq \frac{r}{c} \end{cases}, \quad (5)$$

где $u_1(r, t) = u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)}$, $u_2(r, t) = u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$,

$$u_1^{(0)} = \frac{\gamma c^2 r t}{8a} \left[\left(1 + \frac{4at}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \left(2 + \frac{r^2}{4at} \right) \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right],$$

$$u_1^{(1)} = -\frac{\gamma c^2 r t}{8a} \left[\frac{(20ar^2 t + 32a^2 t^2 + r^4)}{24ar^2 t_0} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \frac{1}{t_0} \left(t + \frac{r^2}{4a} + \frac{r^4}{96a^2 t} \right) \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right],$$

$$u_1^{(2)} = \frac{c^2 \gamma}{144 r t_0^2} \left\{ \left(-42t^3 + \frac{13}{2} \frac{r^2 t^2}{a} + \frac{11r^4 t}{16a^2} + \frac{r^6}{64a^3} \right) t \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) + \left(24t^3 + \frac{9r^2 t^2}{a} + \frac{3r^4 t}{4a^2} + \frac{r^6}{64a^3} \right) \frac{r^2}{4a} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \right\},$$

$$u_2^{(0)} = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{ct}{r} \sqrt{c^2 t^2 - r^2} + r \ln r - r \ln(ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2}) \right],$$

$$u_2^{(1)} = \frac{\gamma}{2r t_0} \left[\frac{c^2 t^2 + 2r^2}{3c} \sqrt{c^2 t^2 - r^2} + r^2 t |\ln r - \ln(ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2})| \right],$$

$$u_2^{(2)} = -\frac{\gamma}{16t_0^2 r c} \left[\frac{1}{3} (2c^2 t^3 + 13r^2 t) \sqrt{c^2 t^2 - r^2} + \frac{4c^2 r^2 t^2 + r^4}{c} \ln \frac{r}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2} + ct} \right],$$

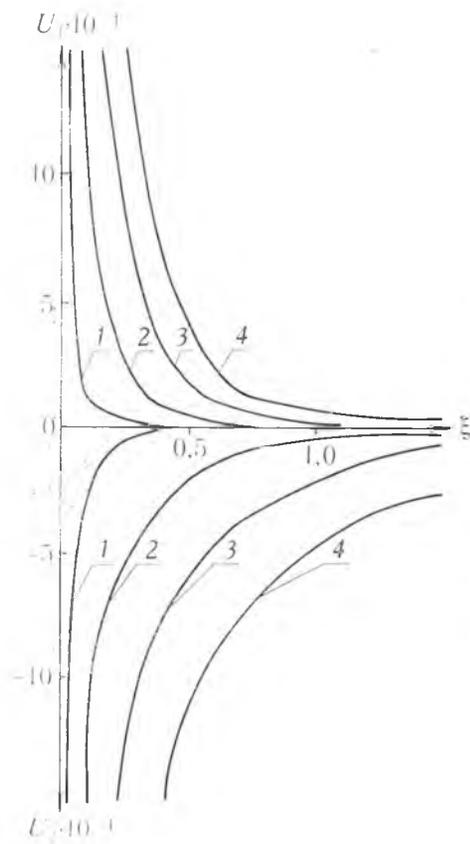


Рис. 1. Зависимость смещений u_1 и u_2 от ξ в различные моменты времени τ :
 1 - $\tau = 0.1$; 2 - $\tau = 0.3$; 3 - $\tau = 0.5$; 4 - $\tau = 0.7$

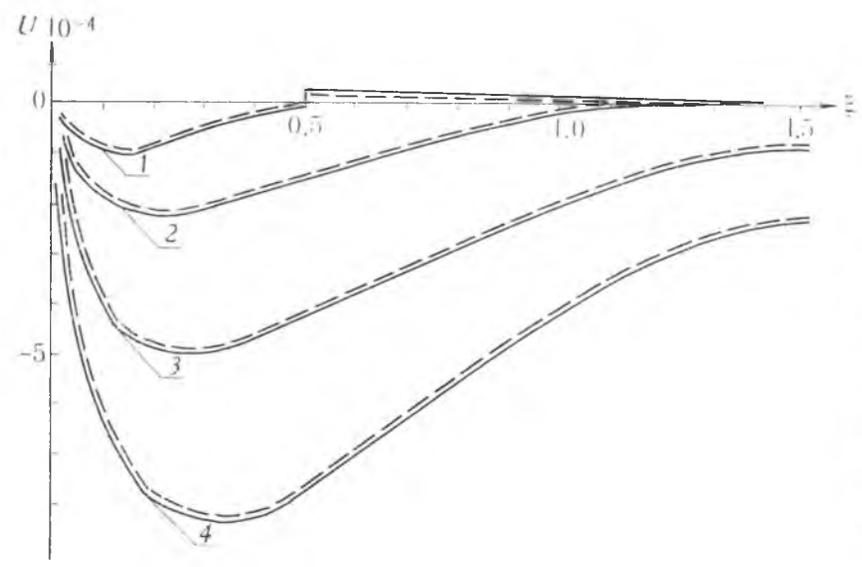


Рис. 2. Зависимость смещения u от ξ в различные моменты времени τ .
 (Обозначения те же, что и на рис. 1. Масштаб кривой 1 увеличен в 3 раза)

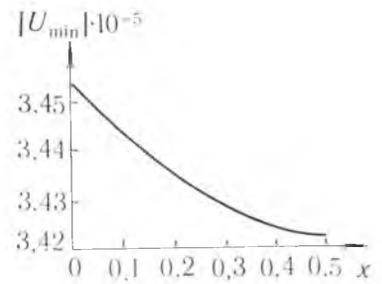


Рис. 3. Зависимость $|u_{\min}|$ от x при $\tau = 0.1$

$$\gamma = \frac{\alpha k S_0}{2\pi \lambda \rho c^2}, \quad a = \lambda / \rho c.$$

$Ei(x)$ — интегральная показательная функция. Первое слагаемое $u_1(r, t)$ описывает перемещения, возникающие одновременно во всех точках рассматриваемой области, связанные с бесконечной скоростью распространения тепловой энергии. Слагаемое $u_2(r, t)$ представляет собой упругую продольную волну, фронт которой движется со скоростью c .

На рис. 1, 2 представлены зависимости $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ и $u(\xi)$ при фиксированных τ , где $\xi = r/r_0$, $\tau = t/t_x$, $t_x = r_0^2/4a$, $r_0 = 10^{-4}$. В этом случае для значений $\xi \leq \xi_0 = s\tau$ ($\tau \leq ct$), где $s = cr_0/4a$, происходит суммирование u_1 и u_2 . В область $\xi > \xi_0$ волна u_2 еще не пришла и в ней $u(\xi) = u_1(\xi)$. Это иллюстрируется кривой 1 рис. 2, для которой $\xi = 0,5$. Для кривых 2, 3, 4 соответствующие значения ξ_0 равны 1,5; 2,5; 3,5.

Учет временной зависимости $S(t)$ приводит к уменьшению абсолютных значений u (штриховые линии на рис. 2). Рис. 3 иллюстрирует зависимость абсолютной величины смещения $|u_{\min}|$ от $x = t_x/t_0$ при $\tau = 0,1$.

В случае, когда $R_0 \neq 0$, приближенное решение системы (2) — (4) имеет вид:

$$u(r, t) = u_1(r, t) + \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{r-R_0}{c} \\ u_2(r, t) & \text{при } t \geq \frac{r-R_0}{c} \end{cases},$$

где $u_1(r, t) = u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)}$, $u_2(r, t) = u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$,

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= \frac{c^2 \gamma (r-R_0)}{6 \sqrt{\pi} a R_0 r} \left\{ -\sqrt{t} \left[5t + \frac{(r-R_0)^2}{2a} \right] \exp\left(-\frac{(r-R_0)^2}{4at}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \sqrt{\pi} a}{(r-R_0)} \left[t^2 + \frac{(r-R_0)^2}{a} t + \frac{(r-R_0)^4}{12a^2} \right] \operatorname{Erfi}\left(\frac{r-r_0}{2 \sqrt{at}}\right) \right\}, \\ u_1^{(1)} &= \frac{c^2 \gamma (r-R_0)}{6 \sqrt{\pi} a R_0 r} \left\{ \frac{\sqrt{t}}{15t_0} \left[33t^2 + \frac{7(r-R_0)^2 t}{a} + \frac{(r-R_0)^4}{4a^2} \right] \exp\left(-\frac{(r-R_0)^2}{4at}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi} a}{(r-R_0)t_0} \left[t^3 + \frac{3(r-R_0)^2 t^2}{2a} + \frac{(r-R_0)^4 t}{4a^2} + \frac{(r-R_0)^6}{120a^3} \right] \operatorname{Erfi}\left(\frac{r-R_0}{2 \sqrt{at}}\right) \right\}, \\ u_1^{(2)} &= \frac{c^2 \gamma (r-R_0)}{48 \sqrt{\pi} a R_0 r} \left\{ -\frac{2 \sqrt{t}}{105 t_0^2} \left[279t^3 + \frac{185(r-R_0)^2 t^2}{2a} + \frac{27(r-R_0)^4 t}{4a^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(r-R_0)^6}{8a^3} \right] \exp\left(-\frac{(r-R_0)^2}{4at}\right) + \frac{2 \sqrt{\pi} a}{(r-R_0)t_0^2} \left[t^4 + \frac{2t^3 (r-R_0)^2}{a} + \frac{(r-R_0)^4 t^2}{2a^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(r-R_0)^6}{30a^3} t + \frac{(r-R_0)^8}{1680a^4} \right] \operatorname{Erfi}\left(\frac{r-R_0}{2 \sqrt{at}}\right) \right\}, \\ u_2^{(0)} &= -\frac{2c(1+\mu)\alpha S_0 \sqrt{a}}{3\pi\lambda(1-\mu)\sqrt{\pi} R_0 r} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{3/2} - \frac{8c^3 \gamma}{15 \sqrt{\pi} a r R_0} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{5/2}, \\ u_2^{(1)} &= \frac{4c(1+\mu)\alpha S_0 \sqrt{a}}{15\pi\lambda t_0(1-\mu)\sqrt{\pi} r R_0} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{5/2} + \frac{16c^3 \gamma}{105 t_0 \sqrt{\pi} a r R_0} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{7/2}; \\ &\quad t \geq \frac{r-R_0}{c}, \\ u_2^{(2)} &= -\frac{c^2}{\sqrt{\pi} r R_0} \left\{ \frac{8(1+\mu)\alpha S_0 \sqrt{a}}{105 \pi \lambda c t_0^2 (1-\mu)} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{7/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{32\gamma c}{945 t_0^2 \sqrt{a}} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{9/2} \right\}; \quad t \geq \frac{r-R_0}{c}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Анализ полученных соотношений показывает, что пространственная зависимость $u(\tau, \xi)$ качественно носит такой же характер, как и в случае $R_0 = 0$.

Список литературы

1. Калининченко А. И., Лазурник-Эльцуфни В. Т. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 6 (12). С. 2364.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., 1963. С. 252.

Поступила в редакцию 15.07.91.

УДК 621.373.826

ДЖНХАД АДДАСИ (Иордания), А. Л. ГОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕН

ФАЗОВЫЙ ОТКЛИК РАСТВОРОВ КРАСИТЕЛЕЙ, ИНДУЦИРУЕМЫЙ ПЕРЕХОДАМИ МЕЖДУ ВОЗБУЖДЕННЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Перевод молекул в возбужденное состояние с помощью оптической подкачки и реализация нелинейных эффектов за счет переходов между возбужденными энергетическими уровнями представляют интерес в связи с развитием методов оптической обработки информации. Управление эффективностью нелинейных процессов при этом может осуществляться независимым световым пучком, от которого, в общем случае, не требуется высокая степень когерентности и монохроматичности. Так, в работе [1] была реализована самодифракция излучения в растворе красителя родамин 6Ж, обусловленная поглощением с возбужденного синглетного уровня молекул ($\lambda = 1,06$ мкм), и показана зависимость эффективности самодифракции от интенсивности оптической подкачки в основную полосу поглощения ($\lambda = 0,53$ мкм).

Нами исследовано светоиндуцированное изменение показателя преломления (фазовой отклик) растворов красителей, вызванное переходами между возбужденными уровнями молекул. Анализ проводился для красителей, моделируемых наиболее типичными трех- ($S_0 - S_1 - S_2$) и четырехуровневой ($S_0 - S_1 - T_1 - T_2$) схемами. Наряду с резонансным механизмом вследствие низкого квантового выхода люминесценции в возбужденном канале учитывалась тепловая нелинейность.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия: оптическая подкачка (интенсивность I_0 , частота ω_0) настроена в полосу поглощения основного синглет-синглетного перехода $S_0 - S_1$, а волны, участвующие в нелинейном процессе, (интенсивность I , частота ω) вызывают переходы молекул в возбужденном синглетном ($S_1 - S_2$) либо триплетном ($T_1 - T_2$) каналах. Решение системы кинетических уравнений для населенностей энергетических уровней N_i в стационарном режиме взаимодействия в этом случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= N(B_{21}I_0/vp_{21} + 1)(B_{32}I/vp_{32} + 1)/K, \\ N_2 &= N(B_{12}I_0/vp_{21})(B_{32}I/vp_{32} + 1)/K, \\ N_3 &= N(B_{12}B_{23}I_0I/v^2p_{21}p_{32})/K, \end{aligned} \quad (1)$$

где $N = N_1 + N_2 + N_3$, $K = 1 + (B_{12} + B_{21})I_0/vp_{21} + B_{32}I/vp_{32} + (B_{12}B_{23} + (B_{12} + B_{21})B_{32})I_0I/v^2p_{21}p_{32}$ для трехуровневой модели ($S_0 - S_1 - S_2$) и

$$\begin{aligned} N_1 &= N(B_{21}I_0/v(p_{21} + p_{23}) + 1)(B_{43}I/vp_{43} + 1)/K, \\ N_2 &= N(B_{12}I_0/v(p_{21} + p_{23}))(B_{43}I/vp_{43} + 1)/K, \\ N_3 &= N(B_{12}I_0/v(p_{21} + p_{23}))(B_{43}I/vp_{43} + 1)p_{23}/p_{31}K, \\ N_4 &= N(B_{12}B_{34}I_0I/v^2(p_{21} + p_{23})p_{43})p_{23}/p_{31}K, \end{aligned} \quad (2)$$

где $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$, $K = 1 + (B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21})I_0/v(p_{21} + p_{23}) + B_{43}I/vp_{43} + (B_{12}B_{34}p_{23}/p_{31} + (B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21})B_{43})I_0I/v^2(p_{21} +$

+ p_{23}) p_{43} для четырехуровневой модели красителя ($S_0 - S_1 - T_1 - T_2$). Здесь N — число молекул в единице объема, p_{ij} — суммарная вероятность спонтанных и безызлучательных переходов в канале $i - j$, $v = c/n$ — скорость света в среде. Коэффициенты Эйнштейна B_{12} и B_{21} определяются на частоте подкачки ω_0 , а $B_{23(34)}$ и $B_{32(43)}$ — на смещенной частоте ω .

При нахождении фазового отклика раствора красителя учтем, что комплексный показатель преломления среды $\widehat{n}_{ij} = n_{ij} + i\kappa_{ij}$, обусловленный резонансными переходами в канале $i - j$, определяется выражением [2]:

$$\widehat{n}_{ij}(\omega) = \frac{\hbar c}{2v} (N_i \widehat{\Theta}_{ij}(\omega) - N_j \widehat{\Theta}_{ji}(\omega)), \quad (3)$$

где $\widehat{\Theta}_{ij} = \Theta_{ij} + iB_{ij}$, $\Theta_{ij}(\omega)$ связаны дисперсионными соотношениями с коэффициентами Эйнштейна $B_{ij}(\omega)$. С учетом (1) — (3) имеем следующие выражения для комплексного показателя преломления среды, обусловленного переходами в каналах $S_1 - S_2$ и $T_1 - T_2$:

$$\widehat{n}_{23} = n_{23} + i\kappa_{23} = \kappa_0 I_0 (\widehat{\Theta}_{23} (B_{32} I / v p_{32} + 1) - \widehat{\Theta}_{32} B_{23} I / v p_{32}) / v p_{21} K, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \widehat{n}_{34} = n_{34} + i\kappa_{34} = \kappa_0 I_0 (\widehat{\Theta}_{34} (B_{43} I / v p_{43} + 1) - \\ - \widehat{\Theta}_{43} B_{34} I / v p_{43}) p_{23} / p_{31} v (p_{21} + p_{23}) K, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\kappa_0 = N \hbar c B_{12} / 2v$ — линейный коэффициент экстинкции. При интенсивностях $I = 0$ из (4), (5) имеем начальное значение показателя преломления, отвечающее наведенному поглощению с уровня $S_1(T_1)$:

$$\widehat{n}_{23}^0 = \kappa_0 \widehat{\Theta}_{23} I_0 / (v p_{21} + (B_{12} + B_{21}) I_0), \quad (6)$$

$$\widehat{n}_{34}^0 = \kappa_0 \widehat{\Theta}_{34} I_0 p_{23} / p_{31} (v (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} (1 + p_{23} / p_{31}) + B_{21}) I_0). \quad (7)$$

Соответственно изменение показателя преломления, связанное с переходами в возбужденном канале:

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{n}_{23} = \Delta n_{23} + i\Delta \kappa_{23} = -\kappa_0 B_{23} I_0 I (\widehat{\Theta}_{23} B_{12} I_0 + \\ + \widehat{\Theta}_{32} (v p_{21} + (B_{12} + B_{21}) I_0)) / v^2 p_{21} p_{32} (v p_{21} + (B_{12} + B_{21}) I_0) K, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{n}_{34} = \Delta n_{34} + i\Delta \kappa_{34} = -\kappa_0 B_{34} I_0 I (\widehat{\Theta}_{34} B_{12} I_0 p_{23} / p_{31} + \\ + \widehat{\Theta}_{43} (v (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} (1 + p_{23} / p_{31}) + B_{21}) I_0)) p_{23} / p_{31} v^2 (p_{21} + \\ + p_{23}) p_{43} (v (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} (1 + p_{23} / p_{31}) + B_{21}) I_0) K. \end{aligned} \quad (9)$$

Тепловое изменение показателя преломления, вызванное безызлучательными переходами в канале $i - j$, в условиях адиабатического нагрева среды можно определить выражением:

$$\Delta n_{ij}^T = N_j (1 - \mu_{ji}) p_{ji} \hbar \omega t (dn/dT) / C_p, \quad (10)$$

где μ_{ji} — квантовый выход люминесценции, C_p — теплоемкость единицы объема, t — время, dn/dT — термооптический коэффициент. При этом надо иметь в виду, что поглощение излучения в канале $S_1 - S_2$ ($T_1 - T_2$), меняя населенность нижнего уровня $S_1(T_1)$, изменяет также и тепловыделение в канале $S_0 - S_1$. В отличие от резонансного фазового отклика тепловое изменение показателя преломления вследствие его слабой спектральной селективности будет определяться тепловыделением в обоих спектральных каналах. С учетом (1), (2) и (10) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta n^T = \Delta n_{12}^T + \Delta n_{23}^T = -\kappa_0 B_{23} I_0 I (\sigma_0 (1 - \mu_{21}) B_{12} I_0 / v p_{32} - \\ - \sigma (1 - \mu_{32}) (1 + (B_{12} + B_{21}) I_0 / v p_{21})) / (v p_{21} + (B_{12} + B_{21}) I_0) K \end{aligned} \quad (11)$$

для трехуровневой и

$$\begin{aligned} \Delta n^T = \Delta n_{12}^T + \Delta n_{34}^T = & -\kappa_0 B_{34} I_0 J (\sigma_0 (1 - \mu_{21}) B_{12} I_0 / \nu p_{43} - \\ & - \sigma (1 - \mu_{43}) (1 + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) I_0 / \nu (p_{21} + p_{23}))) \cdot \\ & \times p_{23}/p_{31} (\nu (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) I_0) K \end{aligned} \quad (12)$$

для четырехуровневой модели красителя, где $\sigma_0 = 2\omega_0 (dn/dT) t / c C_0$, $\sigma = 2\omega (dn/dT) t / c C_0$. Причем в формулах (11), (12) при рассмотрении тепловыделения в основном канале Δn_{12}^T оставлена только та его часть, которая связана с переходами между возбужденными энергетическими уровнями.

Из анализа выражений (8), (9), (11), (12) для резонансного $\Delta n_{23(34)}^T$ и тепловых Δn_{12}^T , $\Delta n_{23(34)}^T$ изменений показателя преломления следует их насыщение при интенсивности излучения в возбужденном канале

$$I_{2-3}^{\text{нас}} = (\nu p_{21} + (B_{12} + B_{21}) I_0) \nu p_{32} / (B_{32} \nu p_{21} + (B_{12} B_{23} + (B_{12} + B_{21}) B_{32}) I_0), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I_{3-4}^{\text{нас}} = & (\nu (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) I_0) \nu p_{43} / (B_{43} \nu \times \\ & \times (p_{21} + p_{23}) + (B_{12} B_{34} p_{23}/p_{31} + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) B_{43}) I_0, \end{aligned} \quad (14)$$

при которой компоненты фазового отклика достигают половину от своего максимального значения. Из (13), (14) видно, что интенсивность насыщения возбужденного канала зависит от интенсивности оптической подкачки в основном канале. При небольших интенсивностях подкачки $I_0 \ll \nu p_{21} / B_{12(21)} (I_0 \ll \nu (p_{21} + p_{23}) p_{31} / p_{23} B_{12(21)})$ интенсивность насыщения канала $S_1 - S_2 (T_1 - T_2) I_{2-3(3-4)}^{\text{нас}} = \nu p_{32(43)} / B_{32(43)}$ определяется вынужденными переходами только с верхнего энергетического уровня $S_2 (T_2)$. Такая ситуация связана с тем, что при малых интенсивностях подкачки уровень $S_1 (T_1)$ слабо заселен по сравнению с основным энергетическим состоянием S_0 , и с ростом интенсивности излучения в канале $S_1 - S_2 (T_1 - T_2)$ происходит постоянный приток частиц с уровня S_0 на уровень $S_1 (T_1)$, населенность которого остается неизменной. С ростом интенсивности подкачки переход $S_0 - S_1$ начинает просветляться, приток частиц в систему уровней $S_1 - S_2 (T_1 - T_2)$ сокращается, и насыщение возбужденного канала будет определяться вынужденными переходами из обоих возбужденных состояний. При больших интенсивностях подкачки, когда канал $S_0 - S_1$ полностью просветляется, формулы (13), (14) дают соотношения

$$I_{2-3}^{\text{нас}} = (B_{12} + B_{21}) \nu p_{32} / (B_{12} B_{23} + (B_{12} + B_{21}) B_{32}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} I_{3-4}^{\text{нас}} = & (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) \nu p_{43} / (B_{12} B_{34} p_{23}/p_{31} + \\ & + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) B_{43}), \end{aligned} \quad (16)$$

которые при условии эффективного заселения уровня $S_1 (T_1) (B_{12} \gg B_{21}, p_{23} \gg p_{31})$ аналогичны выражению для двухуровневой модели среды $I_{\text{нас}} = \nu p_{21} / (B_{12} + B_{21})$.

Сказанное иллюстрируется на рис. 1, где представлены зависимости отдельных компонент фазового отклика раствора красителя от интенсивности излучения в возбужденном канале I , рассчитанные для трехуровневой модели среды при различных интенсивностях подкачки. Штрихами на кривых отмечены интенсивности насыщения $I_{2-3}^{\text{нас}}$ (13). В расчетах предполагалось, что возбуждение осуществляется в центр полос поглощения $S_0 - S_1$ и $S_1 - S_2$ для среды с гауссовой формой зеркально-симметричных полос поглощения и испускания при стоковом сдвиге в 1,6 полуширины контура, $(dn/dT) C_0^{-1} = -10^{-4} \text{ Дж}^{-1} \text{ см}^3$, $t = 10^{-8} \text{ с}$, $n = 1,36$, $p_{32}/p_{21} = 100$, $\mu_{21} = 0,5$, $\mu_{32} = 6,25 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_{23} = 2\lambda_{12} =$

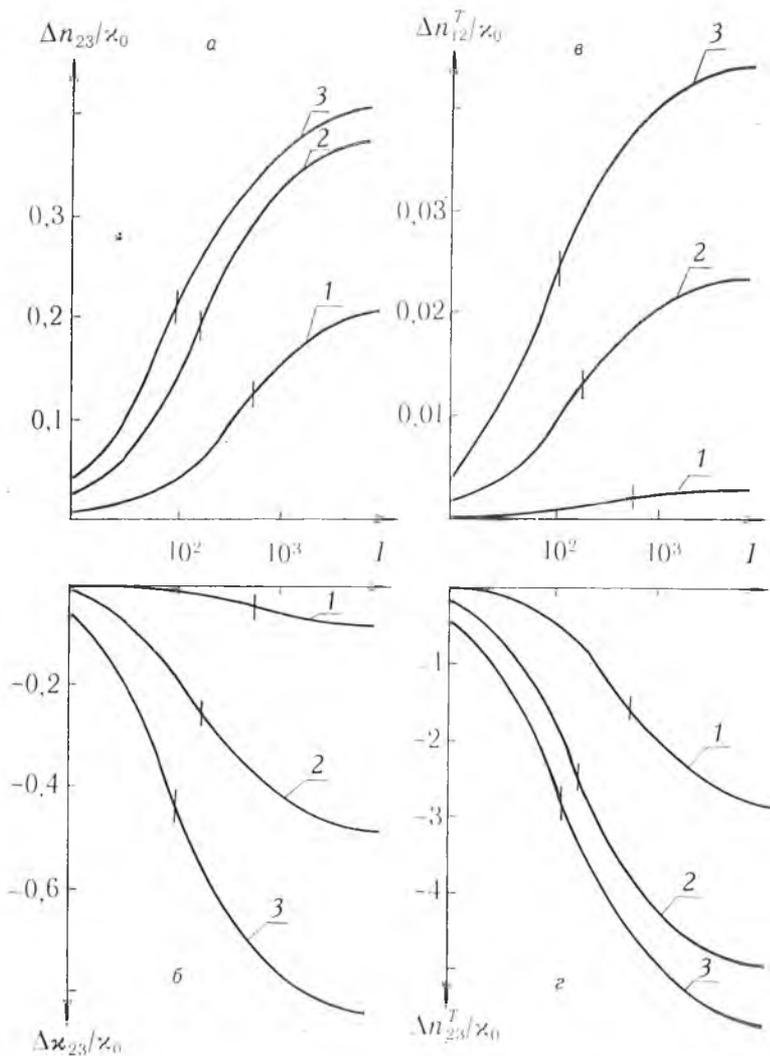


Рис. 1. Зависимости резонансного $Re\Delta n_{23}^T$ (а), $Im\Delta n_{23}^T$ (б) и теплового Δn_{12}^T (в), Δn_{23}^T (г) изменения показателя преломления от интенсивности излучения в возбужденном канале $S_1 - S_2$ при интенсивности подкачки $I_0 = 0,1$ (1), 1 (2), 10 (3). Интенсивности нормированы на величину $I_{нас} = \nu p_{21} / (B_{12} + B_{21})$

$= 1$ мкм, $\Delta\lambda_{23} = 4 \Delta\lambda_{12} = 100$ нм (λ_{ij} и $\Delta\lambda_{ij}$ — центр и полуширина полосы поглощения в канале $i - j$).

Теперь рассмотрим зависимость фазового отклика раствора красителя от интенсивности излучения в основном канале $S_0 - S_1$. Как следует из выражений (11), (12), тепловое изменение показателя преломления в основном Δn_{12}^T и возбужденном Δn_{23}^T (34) каналах монотонно меняется с ростом интенсивности подкачки, насыщаясь при интенсивностях, превышающих интенсивность насыщения основного перехода:

$$I_{1-2}^{нас} = (1 + B_{32}I/\nu p_{32}) \nu p_{21} / (B_{12} + B_{21} + (B_{12}B_{23} + (B_{12} + B_{21}) B_{32})I/\nu p_{32}) \quad (17)$$

для трехуровневой и

$$I_{1-2}^{нас} = (1 + B_{43}I/\nu p_{43}) \nu (p_{21} + p_{23}) / (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21} + (B_{12} B_{34} p_{23}/p_{31} + (B_{12} (1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) B_{43})I/\nu p_{43}) \quad (18)$$

четырёхуровневой схемы, при которых поглощение в основном канале κ_{12} уменьшается в два раза. В то же время характер поведения резонансного фазового отклика $\Delta n_{23(34)}$ зависит от интенсивности и отстройки частоты излучения в возбужденном канале относительно контуров поглощения и испускания. Так, для частоты излучения $\omega > \omega_{23(34)}$ или $\omega < \omega_{32(43)}$ имеет место монотонная зависимость фазового отклика. При выполнении условия

$$\Theta_{23} > |\Theta_{32}| \left((B_{12} + B_{21})/B_{12} \right) (1 + B_{32}I/vp_{32}) / (2 + (2B_{32} + B_{12}B_{23}/(B_{12} + B_{21}))I/vp_{32}), \quad (19)$$

$$\Theta_{34} > |\Theta_{43}| \left((B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21})/B_{12} \right) (1 + B_{43}I/vp_{43}) p_{31}/p_{23} (2 + (2B_{43} + B_{12}B_{34}p_{23}/p_{31} \times (B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}))I/vp_{43}) \quad (20)$$

(длина волны лежит между контурами полос поглощения и испускания) зависимость $\Delta n_{23(34)}(I_0)$ носит немонотонный характер. Причем, если $\Theta_{23} > |\Theta_{32}| (B_{12} + B_{21})/B_{12}$, $\Theta_{34} > |\Theta_{43}| (B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}) p_{31}/p_{23} B_{12}$, то фазовый отклик $\Delta n_{23(34)}$ обращается в нуль при интенсивности

$$I_0 = -\Theta_{32}vp_{21}/(B_{12}\Theta_{23} + (B_{12} + B_{21})\Theta_{32}), \quad (21)$$

$$I_0 = -\Theta_{43}v(p_{21} + p_{23})/(B_{12}\Theta_{34}p_{23}/p_{31} + (B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21})\Theta_{43}) \quad (22)$$

для трех- и четырехуровневой схемы соответственно. Указанные особенности зависимости резонансного отклика раствора красителя от интенсивности подкачки иллюстрируются на рис. 2. Там же отмечены значения интенсивности насыщения $I_{1-2}^{нас}$ (17). Уменьшение интенсивности насыщения в основном канале с ростом интенсивности в возбужденном объясняется уменьшением числа частиц в системе уровней $S_0 - S_1$ за счет их оттока на верхний энергетический уровень S_2 (T_2).

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что оптическая подкачка в канале $S_0 - S_1$ влияет на резонансные характеристики возбужденного синглетного, триплетного каналов и позволяет осуществить некогерентное управление нелинейно-оптическими свойствами растворов красителей, обусловленными поглощением с возбужденных уровней молекул.

Список литературы

1. Ивакин Е. В., Петров И. П., Рубанов А. С. // ЖПС. 1973. Т. 18. № 6. С. 1003.
2. Кабанов В. В., Рубанов А. С. // ЖПС. 1981. Т. 34. № 6. С. 975.

Поступила в редакцию 24.12.91.

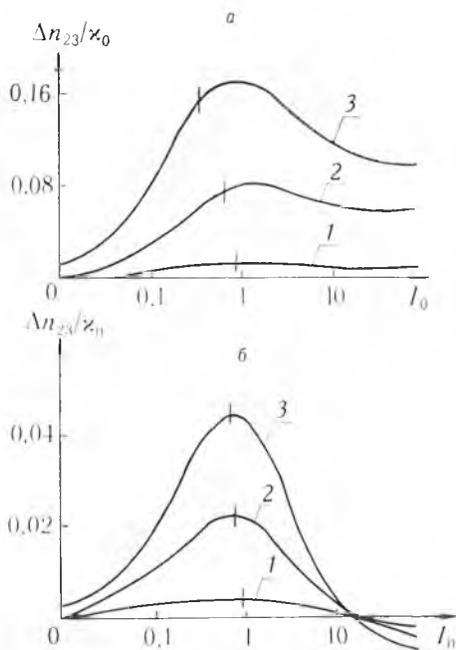


Рис. 2. Зависимости резонансного изменения показателя преломления $Re\Delta n_{23}$ от интенсивности подкачки при отстройке частоты излучения в канале $S_2 - S_3$ в длинноволновую область относительно полосы поглощения на половину (а) и одну (б) полуширину контура и интенсивности $I = 10$ (1), 10^2 (2), 10^3 (3)

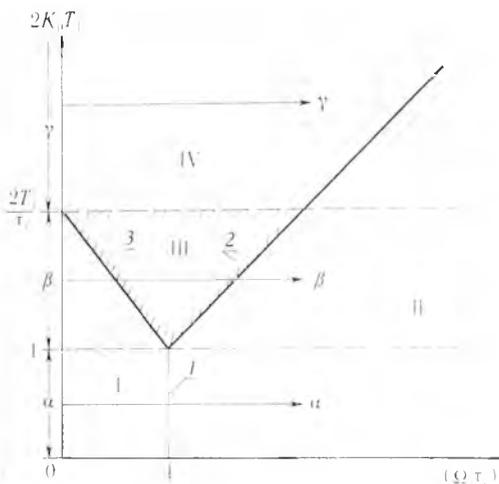
НЕМАРКОВСКОСТЬ ДЕФАЗИРОВКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В КОГЕРЕНТНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ. Ч. I

Дефазировка квантовых систем (разрушение когерентности фаз квантовых состояний объектов, составляющих ансамбль) под действием различных внешних факторов оказывает определяющее влияние на форму спектральных линий и на ход нестационарных когерентных нелинейно-оптических (НКНО) явлений. С другой стороны, дефазировка и фазовая самоорганизация систем составляют предмет исследований в рамках синергетического подхода, который в последние годы широко применяется при изучении самых различных классов объектов, представляющих собой ансамбли взаимодействующих подсистем. Это позволяет использовать как синергетический подход для изучения спектральных и НКНО явлений, так и наоборот — спектральные и нестационарные оптические методы для исследования общих синергетических аспектов.

Обычно процесс дефазировки описывается введением в оптические уравнения Блоха феноменологического параметра T_2 — времени дефазировки. Однако в последнее время использование методов высокого спектрального и временного разрешения, применение в оптических экспериментах мощных высокостабильных перестраиваемых лазеров и лазеров, генерирующих сверхкороткие световые импульсы, позволило получить ряд результатов, которые невозможно объяснить в рамках уравнений Блоха, основанных на марковской модели формирования дефазировки квантовых систем, находящихся в сильном лазерном поле.

Неприменимость блоховских уравнений для описания некоторых спектроскопических экспериментов связана прежде всего с нарушением лежащего в их основе марковского приближения, соответствующего пренебрежимой малости времени корреляции τ_c дефазирющих возмущений по сравнению с другими характерными временами квантовой системы. Из общих термодинамических соображений ясно, что учет немарковости процесса дефазировки (т. е. учет конечного времени корреляции τ_c реальных дефазирющих возмущений или, что то же — учет конечной ширины их спектра $\gamma_c = \tau_c^{-1}$) может быть существенным в двух случаях: когда состояние релаксирующей квантовой системы успевает изменяться на временах $\sim \tau_c$ либо в процессе самой дефазировки, или под действием внешних причин, например, электромагнитного излучения.

Первый случай реализуется при выполнении условия $\tau_c \geq T_2$, которое может иметь место для сильных, слабо стохастических дефазирющих возмущений, характеризующихся большим временем корреляции τ_c и высокой эффективностью воздействия на квантовую систему. Второй случай связан с выполнением соотношения $\tau_c \geq t_{int}$, где t_{int} — характерное время изменения квантовой системы под действием излучения, определяющееся в резонансных условиях обобщенной частотой Раби $\Omega = (\epsilon^2 + 4V^2)^{1/2}$ (ϵ — расстройка резонанса, $2V$ — обычная частота Раби): $t_{int} = \Omega^{-1}$. Очевидно, что при выполнении условия $\Omega\tau_c \geq 1$ де-



К классификации квантовых систем по свойствам дефазирющих возмущений и типам поведения при релаксации

фазирующие возмущения оказываются промодулированными рабиевскими осцилляциями, в результате чего процесс дефазировки становится зависящим от характеристик излучения. Особенно существенные изменения имеют место при $2V\tau_c \gg 1$, когда процесс дефазировки начинает зависеть от интенсивности излучения (нелинейность дефазировки). В предельном случае $\Omega\tau_c \gg 1$ дефазирющие возмущения эффективно усредняются до нуля и квантовая система вообще перестает чувствовать окружение.

Различные ситуации, возникающие при учете конечного времени памяти τ_c дефазирющих возмущений, можно проиллюстрировать схемой (см. рисунок). Здесь фигурируют следующие характерные времена: 1) время корреляции τ_c ; 2) время взаимодействия с излучением $t_{int} = \Omega^{-1}$; 3) время спонтанной релаксации $T_1 = A^{-1}$ (A — вероятность спонтанных переходов); 4) время дефазировки $T_2 = (K_0 + A/2)^{-1}$, где K_0 — блоховская скорость «чистой» дефазировки под действием окружения, которую приближенно можно оценить как интенсивность фурье-компоненты спектра энергии дефазирющих возмущений U^τ на нулевой частоте:

$K_0 = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle U^\tau U^0 \rangle$. По аналогии с K_0 можно ввести зависящую от интенсивности излучения величину K_Ω , имеющую смысл фурье-компоненты корреляционной функции $\langle U^\tau U^0 \rangle$ на частоте Ω .

В зависимости от соотношения этих времен различные механизмы дефазировки и системы можно классифицировать по свойствам дефазирющих возмущений и типам поведения при релаксации.

Прежде всего можно выделить области сильно и слабо стохастических возмущений, определяемые соотношениями $K_0\tau_c \ll 1$ и $K_0\tau_c \gg 1$ соответственно. На рисунке эти области разделены горизонтальной прямой $2K_0T_1 = 2T_1/\tau_c$. Прямая 1 ($\Omega\tau_c = 1$) разделяет плоскость на участки, в которых излучение существенно изменяет состояние системы за время τ_c ($\Omega\tau_c \gg 1$) или полевое воздействие за этот промежуток времени незначительно ($\Omega\tau_c \ll 1$). Линия 2 выделяет область параметров, где влияние дефазирющих возмущений U^τ незначительно ($2K_\Omega \ll A$). Она проведена для $K_\Omega = K_0/(\Omega\tau_c)^2$, что приближенно (при $\Omega\tau_c \gg 1$) соответствует лоренцовскому спектру дефазирющих возмущений $K_\Omega = K_0/(1 + \Omega^2\tau_c^2)$.

Соединяя точки (1; 1) и $(2T_1/\tau_c; 0)$ прямой 3, получаем, что плоскость изменения параметров условно разделяется на 4 области: (I) — область применимости уравнений Блоха ($\Omega\tau_c \ll 1$, $K_0\tau_c \ll 1$), (II) — область «подавления» дефазирющих возмущений ($\Omega\tau_c \gg 1$, $2K_0T_1 \ll (\Omega\tau_c)^2$). Существование такой области впервые было предсказано Редфильдом в 1953 г. [1] при термодинамическом рассмотрении релаксации спиновой системы в сильном радиочастотном поле. Поэтому ее можно назвать редфильдовской. (III, IV) — области, где наиболее существенны эффекты и зависимости, связанные с немарковостью и нелинейностью процессов дефазировки. Они соответствуют сильно и слабо стохастическим возмущениям.

По поведению при изменении интенсивности можно выделить три типа систем: (I) α — тип ($T_1 < T_2$) — при увеличении поля система переходит из блоховской области сразу в редфильдовскую; (II) β — тип ($T_1 > T_2 > \tau_c$) — при возрастании поля система проходит последовательно блоховскую, переходную и редфильдовскую области; (III) γ — тип ($T_2 < \tau_c$) — даже в случае слабых оптических полей ($\Omega\tau_c \ll 1$) система не описывается блоховскими уравнениями.

Идеи, схематически изложенные выше, уже неоднократно высказывались ранее. Их истоки в теоретической радиоспектроскопии, где было предсказано явление замедления фазовой релаксации в сильном радиочастотном поле [1], а также построены формально точные интегро-дифференциальные кинетические уравнения (КУ) для матрицы плотности спиновой подсистемы, учитывающие, в отличие от уравнений Блоха, не-

марковость и нелинейность процесса дефазировки [2]. В 60-е годы в связи с разработкой теории взаимодействия мощного когерентного лазерного излучения с веществом эти идеи проникли в оптику. В частности, в работах [3, 4] на основе обобщенных КУ были рассмотрены такие спектрально-оптические проявления нелинейности процессов дефазировки, как эффект полевого сужения линий поглощения мощного излучения, а также слабой пробной волны в присутствии сильного излучения. В 70-е годы наиболее активно исследовались различные аспекты модификации лазерным излучением столкновительного уширения, связанного с дефазирющими столкновениями [5]. Однако вследствие малости времен корреляции, имеющих в данном случае смысл средней длительности столкновения ($\tau_c \sim 10^{-12}$ с), условия проявления, например нелинейности процесса столкновительной дефазировки, были достаточно экзотическими и реализовывались лишь при интенсивностях порядка сотен МВт/см². Отметим, что в соответствии с предложенной классификацией рисунка дефазирющие столкновения в разреженных газах соответствуют случаю сильно стохастических дефазирющих возмущений, а поведение систем при увеличении поля можно отнести к α -типу.

Существенным вкладом в изучение немарковости и нелинейности процессов дефазировки стал эксперимент Де-Воя и Брюэра [6], в котором было обнаружено существенное отклонение полевой зависимости скорости затухания сигнала свободной поляризации в низкотемпературном кристалле $\text{Pr}^{3+} : \text{LaF}_3$ от блоховских предсказаний. Дефазировка оптического перехода иона Pr^{3+} в этом кристалле происходит вследствие стохастической модуляции его частоты из-за парных переворотов спинов ядер фтора, связанных с ядерным спином Pr^{3+} диполь-дипольным взаимодействием. Эксперимент [6] послужил пробным камнем для многочисленных теоретических работ, в которых применялись различные модели стохастических флуктуаций частоты перехода Pr^{3+} (модели гаусс-марковского, телеграфного, обобщенного телеграфного процессов). Использование известных статистических свойств этих процессов позволило построить обобщенные КУ для матрицы плотности примесного иона и аналитически рассчитать сигнал распада свободной поляризации. Подгонкой значения времени корреляции τ_c удалось в основном правильно объяснить экспериментальные данные [6] в рамках различных моделей. Найденные значения τ_c позволили отнести $\text{Pr}^{3+} : \text{LaF}_3$ к системам β -типа [7].

Нелинейность процессов дефазировки изучалась также в серии экспериментов [9—11] на разреженных образцах рубина, помещенных в постоянное магнитное поле при низких температурах. Существенные отклонения от блоховских предсказаний были зарегистрированы в опытах по изучению мощного уширения провалов, выжигаемых нестационарно (за времена $T \ll T_1$) в неоднородно-уширенном оптическом переходе ${}^4A_2(-1/2) - E(-1/2)$ ионов Cr^{3+} в рубине [9], а также при исследовании эффектов насыщения при распаде нестационарно возбуждаемой свободной поляризации для того же перехода в рубине [11]. Анализ последнего эксперимента на основе телеграфной и гаусс-марковской моделей флуктуации частоты оптического перехода Cr^{3+} показал [11], что сколь-нибудь удовлетворительное описание экспериментальных данных удастся получить при $\tau_c \approx T_2$. Этот вывод, однако, противоречил экспериментальным результатам по затуханию сигнала ротационного эха в рубине [10], согласно которым наблюдаемое затухание было экспоненциальным в широком диапазоне интенсивностей излучения, что соответствовало предсказаниям оптических уравнений Блоха, тогда как при $\tau_c \approx T_2$ ожидалась существенная неэкспоненциальность затухания эхо-сигнала. Таким образом, к настоящему времени удовлетворительное объяснение с единой точки зрения имеющихся экспериментальных данных по выжиганию провалов, распаду свободной поляризации и затуханию ротационного эха в рубине отсутствует. Попытка такого анализа указанных экспериментов [10—11] и делается в настоящем сообщении. Исходной идеей

является предположение о принадлежности $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ к системам γ -типа, поддерживаемое, во-первых, полученным в [11] предварительным условием $\tau_c \approx T_2$ и, во-вторых, тем фактом, что в отличие от иона Pr^{3+} в системе β -типа $\text{Pr}^{3+}:\text{LaF}_3$, имеющего только ядерный спиновый момент, у иона Cr^{3+} отличен от нуля спин электронной оболочки, благодаря чему он существенно сильнее взаимодействует с окружением. Для описания всех трех экспериментов используются полученные ранее [7] неавтономные обобщенные КУ стохастической теории релаксации. В качестве модели стохастических флуктуаций частоты резонансного оптического перехода иона Cr^{3+} выбран телеграфный процесс (ТП). Выбор такой простейшей модели обусловлен тем, что для нее построены КУ являются точными при произвольном соотношении параметров случайного процесса (времени корреляции τ_c и дисперсии σ), а также при произвольных интенсивности излучения и расстройке резонанса. Поэтому именно она позволяет исследовать эффекты нелинейности процессов дефазировки для γ -систем.

Перейдем к сравнительному анализу нестационарных когерентных оптических явлений. Исходным пунктом анализа являются стохастические уравнения Лиувилля, описывающие взаимодействие с мощным излучением квантовой системы, частота резонансного перехода ($2 \rightarrow 1$) которой флуктуирует под действием окружения: $\omega_{21}(t) = \omega_2 + \varepsilon_t$, где ε_t — телеграфный процесс, характеризующийся частотой скачков ν ($\tau_c = \nu^{-1}$) и дисперсией σ . После их усреднения по реализациям процесса ε_t для матрицы плотности σ_{ij}^t квантовой системы получаем [7]:

$$\dot{\sigma}_{22}^t = -\dot{\sigma}_{11}^t = iV\sigma_{21}^t - iV\sigma_{12}^t, \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{21}^t &= (\dot{\sigma}_{12}^t)^* = -i\varepsilon\sigma_{21}^t - iV(\sigma_{22}^t - \sigma_{11}^t) - \\ &- \int_0^t d\tau \gamma^{t-\tau} \sigma_{21}^{\tau} - \int_0^t d\tau \beta^{t-\tau} \sigma_{12}^{\tau}, \end{aligned} \quad (1b)$$

где

$$\gamma^{t-\tau} = \sigma^2 e^{-\nu(t-\tau)} [2s^2 + c_+^2 e^{-i\Omega(t-\tau)} + c_-^2 e^{i\Omega(t-\tau)}] / 4, \quad (2a)$$

$$\beta^{t-\tau} = \sigma^2 e^{-\nu(t-\tau)} s^2 [\cos \Omega(t_j - \tau) - 1] / 2 \quad (2b)$$

и $s = 2V/\Omega$, $c = \varepsilon/\Omega$, $c_{\pm} = 1 \pm c$. В уравнениях (1) не учитываются спонтанные переходы $2 \rightarrow 1$, поскольку все анализируемые эксперименты [9—11] выполнялись в нестационарных условиях $t \ll T_1$.

Нестационарное решение уравнений (1) имеет вид:

$$\sigma_{ij}^t = \sum_{\alpha} e^{p_{\alpha} t} \lim_{p \rightarrow p_{\alpha}} (p - p_{\alpha}) \sigma_{ij}^{[p]} \quad (3)$$

и выражается через лапласовские образы $\sigma_{ij}^{[p]}$ элементов матрицы плотности и корни характеристического уравнения системы (1), которое в данном случае сводится к

$$x^3 + 2(\Omega^2 + \sigma^2)x^2 + [(\Omega^2 + \sigma^2)^2 + \Omega^2\nu^2 - 4\varepsilon^2\sigma^2]x + 4V^2\nu^2\sigma^2 = 0, \quad (4)$$

где $x = p(p + \nu)$. Шесть корней p_{α} распадаются на пары $p_{\alpha\pm} = -\nu/2 \pm \pm\sqrt{x_{\alpha} + (\nu/2)^2}$ ($\alpha = 0, 1, 2$). Два действительных корня p_{0+} и $p_{0-} = -\nu - p_{0+}$ отрицательны и ограничены по величине $0 \leq |p_{0\pm}| \leq \nu$, а остальные попарно комплексно сопряжены $p_{1+} = (p_{2+})^*$, $p_{1-} = (p_{2-})^* = -\nu - p_{1+}$. В большинстве рассматриваемых случаев хорошим приближением для корня x_0 уравнения (4) является соотношение $x_0 \approx \approx -4V^2\nu^2\sigma^2 / [(\Omega^2 + \sigma^2)^2 + \Omega^2\nu^2 - 4\varepsilon^2\sigma^2]$, справедливое при $x_0 \ll \Omega^2 + \sigma^2$ или $x_0 \ll \nu^2$. Веса вкладов, связанных с различными корнями p_{α} , отличаются для разных нестационарных оптических явлений. Как показывают расчеты, вклад, обусловленный корнем p_{0+} , является определяющим при описании выжигания провалов и распада свободной поляризации, в то время как корни p_{1+} и p_{2+} определяют сигнал вращательного эха.

Список литературы

1. Redfield A. G. // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 1787.
2. Argures A. N., Kelley P. L. // Phys. Rev. 1964. V. 134. P. A98.
3. Апанасевич П. А., Низовцев А. П. // Квантовая электроника. 1975. Т. 2. С. 1654.
4. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. М., 1977. С. 189.
5. Яковленко С. И. Радиационно-столкновительные явления. М., 1984.
6. DeVoe R. G., Brewer R. G. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1269.
7. Апанасевич П. А., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // Opt. Commun. 1984. V. 52. P. 279.
8. Апанасевич П. А., Kilin S. Y., Nizovtsev A. P., Onishchenko N. S. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. V. 3. P. 587.
9. Endo T., Muramoto T., Hashi T. // Opt. Commun. 1984. V. 51. P. 163.
10. Muramoto T., Szabo A. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 5938.
11. Szabo A., Muramoto T. // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 3992.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 517.926

А. П. ХАПАЛЮК

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Классические решения линейного дифференциального уравнения Эйлера n -го порядка (a_k — постоянные числа)

$$\sum a_n x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) = 0 \quad (1)$$

хорошо известны. Их обычно ищут в виде $\varphi_1(x) = x^\lambda$ [1, 2] (или $|x|^\lambda$ [3]). После подстановки $\varphi_1(x)$ в (1) и сокращения на общий множитель x^λ получается алгебраическое уравнение n -го порядка относительно λ (характеристическое уравнение):

$$\prod_{j=1}^n (\lambda - \alpha_j) = 0, \quad (2)$$

простые корни которого α_j (характеристические числа) определяют на всей оси x n линейно независимых частных решений вида:

$$\varphi_{1j}(x) = x^{\alpha_j}. \quad (3)$$

Считается [1—3], что это фундаментальная система и любое другое решение должно быть линейной комбинацией решений (3). Однако оказывается, что это утверждение неверно. С помощью подстановки $\varphi_2(x) = x^\lambda \operatorname{sgn} x$, которая приводит к тому же уравнению (2), можно получить еще n других решений

$$\varphi_{2j}(x) = x^{\alpha_j} \operatorname{sgn} x. \quad (4)$$

В результате получается, что уравнение n -го порядка (1) имеет $2n$ линейно независимых решений.

Появление дополнительных решений можно пояснить следующим образом. Соответствующее нецелому характеристическому числу α классическое решение x^α является многозначной функцией с точкой ветвления $x = 0$ и поэтому недоопределено. При любом варианте выбора ветвей, число которых может быть велико, эта функция будет решением. Однако для любого α среди всех вариантов выбора ветвей только две функции линейно независимы, остальные являются их линейными комбинациями. Эти две базисные функции и будут двумя решениями уравнения Эйлера, соответствующими одному и тому же характеристическому числу. Они не определяются однозначно, и базис можно выбрать по-разному. Один из них построим следующим образом. На положительной части оси x возьмем арифметическое значение функции x^α . При пе-

реходе через точку ветвления на отрицательную ее часть можно попасть на любую ветвь, что запишется следующим образом (m — целое число):

$$x^\alpha = x_+^\alpha + (-1)^m x_-^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{i\alpha\pi(2m+1)}, \quad (5)$$

где [4, 5]

$$x_\pm = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad (6)$$

Любой вариант выбора ветвей x^α можно представить как линейную комбинацию базисных функций x_+^α и x_-^α . Этот базис, по-видимому, наиболее простой. Назовем его каноническим.

В некоторых случаях более удобным может оказаться другой базис, для функций которого используем специальные обозначения и определим их формулами [4]:

$$(x + i0)^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{i\alpha\pi}, \quad (x - i0)^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha e^{-i\alpha\pi}. \quad (7)$$

Этот базис назовем аналитическим, так как его базисные функции можно считать сужением (предельным значением) на действительную ось аналитической вне ее функции

$$\lim_{y \rightarrow +0} (x \pm iy)^\alpha = (x \pm i0)^\alpha. \quad (8)$$

Имеется еще один практически очень удобный базис, который назовем четно-нечетным; одна базисная функция его будет четной, другая — нечетной, и определяются они по формулам:

$$|x|^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha, \quad |x|^\alpha \operatorname{sgn} x = x_+^\alpha - x_-^\alpha. \quad (9)$$

Очевидно, что базисные функции любого из этих базисов можно считать линейно независимыми решениями уравнения (1). Оба эти решения можно рассматривать как результат уточнения классического решения, которое неоднозначно определено. В частности, решения (3)—(4) легко представить в виде линейной комбинации введенных выше базисных функций.

Такое уточнение классических решений может показаться несущественным и даже тривиальным. Тем не менее оно выводит нас за рамки классического анализа в область обобщенных функций. Базисные функции всех трех базисов (6) — (9) являются типичными обобщенными функциями [4, 5]. В соответствии с этой терминологией все $2n$ решений уравнения (1) следует считать обобщенными функциями.

Рассмотрим теперь случай кратных, но опять не целых, характеристических чисел. Предположим, что характеристическое число α m -кратно. Известно [1—3], что классические решения, соответствующие этому числу, имеют вид $x^\alpha \ln^k |x|$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$). Используя вышеизложенные соображения, легко показать, что еще m линейно независимых функций вида $x^\alpha \ln^k |x| \operatorname{sgn} x$ также будут решениями. Поэтому и для кратных характеристических чисел число обобщенных решений в два раза больше классических.

Переход к целым характеристическим числам приводит к нетривиальным осложнениям, что видно уже из определения функций аналитического базиса (7). Сущность возникающих здесь проблем можно изучить фактически без ограничения общности на примере решения уравнения Эйлера первого порядка:

$$x \frac{d\varphi}{dx} - \alpha\varphi = 0. \quad (10)$$

При нецелом α решениями будут функции x^α и $x^\alpha \operatorname{sgn} x$. Дело сводится к изучению этих решений как функций параметра α . Первое решение x^α как функция комплексного переменного α является аналитической функцией и поэтому остается решением при любом значении α , включая целые значения. Второе решение $x^\alpha \operatorname{sgn} x$ является мероморфной функцией комплексной переменной α [4]. Полюса ее расположены в точках целых

отрицательных значений α : ($\alpha = -s$, $s = 1, 2, \dots$), что является причиной упомянутого осложнения. Вне этих полюсов функция будет вторым решением уравнения (10). Осталось выяснить роль этих полюсов. Вблизи полюса ее можно разложить в ряд Лорана по переменной $\alpha + s$ [4]:

$$x^\alpha \operatorname{sgn} x = \frac{c_{-1}(x, s)}{\alpha + s} + F(x, s), \quad (11)$$

где первое слагаемое — главная, а второе — регулярная части ряда Лорана, $c_{-1}(x, s)$ — вычет функции в полюсе $\alpha = -s$.

Решение уравнения (1), как известно, определяется с точностью до множителя, который может быть функцией параметра α . Воспользуемся этим свойством и возьмем решение в виде $v(x, \alpha) = (\alpha + s)x^\alpha \operatorname{sgn} x$, которое уже в точке $\alpha = -s$ не имеет полюса и равно вычету, который как функция переменного x будет дополнительным решением уравнения (10). В явном виде это решение запишется [4] так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -s} (\alpha + s) x^\alpha \operatorname{sgn} x = c_{-1}(x, s) = 2(-1)^s \frac{\delta^{(s-1)}(x)}{(s-1)!} = 2 \frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \quad (12)$$

Каждому числу s уравнения Эйлера соответствуют два линейно независимых решения x^{-s} и $\delta^{(s-1)}(x)$, которые можно рассматривать как базисные функции четно-нечетного базиса.

Приведем еще один метод получения этих решений, который дает возможность взглянуть на них с другой стороны. Будем исходить из функций аналитического базиса (8). На первый взгляд может показаться, что при целом α ($\alpha = -s$) знаки \pm не играют роли. Во многих случаях так оно и есть. Однако в математическом анализе встречаются операции, при выполнении которых знаки в (8) будут существенными. Для конкретности возьмем случай $\alpha = -1$ и вычислим интеграл:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{-1} dx, \quad (13)$$

где функция $f(x)$ при $x = 0$ не равна нулю и бесконечности. Типичный метод вычисления следующий. Разобьем его на три слагаемых:

$$J = \int_{-\infty}^{-\tau} f(x) x^{-1} dx + \int_{-\tau}^{\tau} f(x) x^{-1} dx + \int_{\tau}^{\infty} f(x) x^{-1} dx. \quad (14)$$

Вычислим каждый из этих интегралов по отдельности при достаточно малом τ , а затем устремим τ к нулю. Сумма первых двух интегралов определяет главное значение по Коши интеграла (13). В третьем интеграле заменим прямолинейный отрезок интегрирования на полуокружность. Здесь уже проявляется неопределенность подынтегральной функции, так как полуокружность можно провести двояким образом в верхней или нижней полуплоскости. В обоих случаях интегралы вычисляются элементарно:

$$\int_{\tau}^{\tau} f(x) x^{-1} dx = \mp i\pi f(0) = \mp i\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx. \quad (15)$$

Верхний знак означает, что полуокружность проведена в верхней, нижний — в нижней полуплоскости. Отсюда видно, что обычная функция x^{-1} в (13) после уточнения порождает две разные обобщенные функции, которые и будут линейно независимыми решениями уравнения (10). Естественно, знаки в (15) однозначно связаны со знаком в равенстве (8). Поэтому имеем:

$$\lim_{y \rightarrow +0} (x \pm iy)^{-1} = (x \pm i0)^{-1} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi \delta(x), \quad (16)$$

где буква P обозначает главное значение по Коши функции x^{-1} . Сумма и разность функций аналитического базиса (16) дает прежнее значение функций четно-нечетного базиса.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести для любого s , и в результате получим функции аналитического базиса:

$$\lim_{y \rightarrow +0} (x \pm iy)^{-s} = (x \pm i0)^s \equiv P(x^{-s}) \mp i\pi \frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \quad (17)$$

Отсюда легко получаются функции четно-нечетного базиса решений

$$(x + i0)^{-s} + (x - i0)^{-s} = 2P(x^{-s}), \quad (x + i0)^{-s} - (x - i0)^{-s} = 2i\pi \frac{\delta(x)}{x^{s-1}}. \quad (18)$$

Буква P в (17)–(18) обозначает, что x^{-s} — обобщенная функция и понимается не в обычном (классическом) смысле. Если ее понимать в обычном смысле, то из вышеизложенного видно, что в интегралах типа (13) она оказывается недоопределенной. Как обобщенная функция она становится однозначной, но за счет того, что интеграл типа (13) вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) P(x^{-s}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \Big|_{x=0} \right] x^{-s} dx \quad (19)$$

и называется регуляризацией соответствующего обычного интеграла [4].

Осталось рассмотреть случай кратных отрицательных целых корней характеристического уравнения. Случай целых неотрицательных кратных корней существенно не выделяется, и соответствующие решения определяются по общим формулам. Предположим, что характеристическое уравнение (2) имеет множитель $(\lambda + s)^m$ (число s — m -кратный корень). Как известно, обычные m решений, соответствующие такому характеристическому числу, имеют вид $x^{-s} \ln^k |x|$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Дополнительные решения при $k \neq 0$ определяются стандартной формулой $x^{-s} \ln^k |x| \operatorname{sgn} x$. При $k = 0$ функция $x^{-s} \operatorname{sgn} x$ не является решением, недостающим решением будет $\delta^{(s-1)}(x)$. Например, легко проверить, что частными решениями уравнения второго порядка ($s = 1, m = 2$):

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 3x \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad (20)$$

будут четыре линейно независимые функции x^{-1} , $x^{-1} \ln |x|$, $\delta(x)$, $x^{-1} \ln |x| \operatorname{sgn} x$.

Заметим, что полученные здесь результаты, в частности, удвоения числа линейно независимых решений, не противоречат обычным теоремам теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Утверждение о том, что дифференциальное уравнение n -го порядка имеет n линейно независимых частных решений, доказывается для интервала, на котором нет особых точек. В нашем случае $x = 0$ является особой точкой, и это утверждение для интервала, включающего особую точку, уже недействительно.

Аналогичные ситуации имеют место для других дифференциальных уравнений, в частности для уравнения Бесселя [6].

Список литературы

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 2.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1955.
3. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Мн., 1977.
4. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959. Вып. 1.
5. Бремсман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.
6. Хапалюк А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1. С. 3.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СВЕТОВОЗВРАЩАТЕЛЯ. 2. МЕТАЛЛИЗАЦИЯ ЧАСТИ ОТРАЖАЮЩИХ ГРАНЕЙ

В работе [1] исследованы поляризационные свойства прямоугольных световозвращателей (ПСВ), все три боковые отражающие грани которых металлизированы двумя или тремя металлами. В данной работе анализируются ПСВ, имеющие одну или две отражающие грани, работающие в режиме полного внутреннего отражения (ПВО). Соответственно две или одна боковые грани металлизированы, причем рассмотрены случаи использования как одного, так и двух металлов.

Численный анализ матричным методом Джонса [2—5] с учетом симметрии ПСВ показал, что полное представление о поляризационных

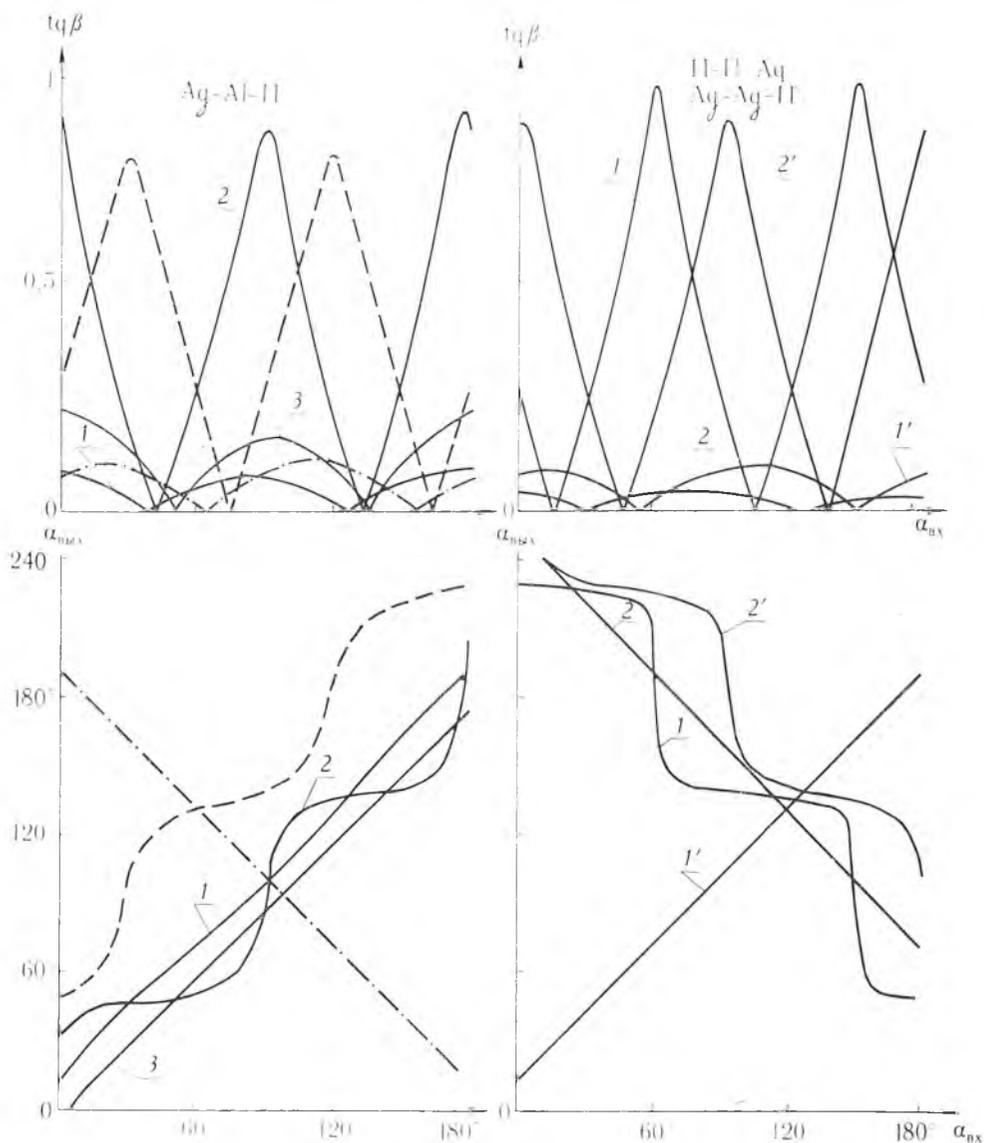


Рис. 1. Зависимости эллиптичности поляризации $tg\beta$ и азимута ориентации большой оси эллипса поляризации $\alpha_{вых}$ выходящего излучения от азимута поляризации $\alpha_{вх}$ входного линейно-поляризованного света для $\lambda=500$ нм и $n=1.5$. Цифры обозначают номера секторов фронтальной грани (штрихи относятся к нижним наборам металлов).

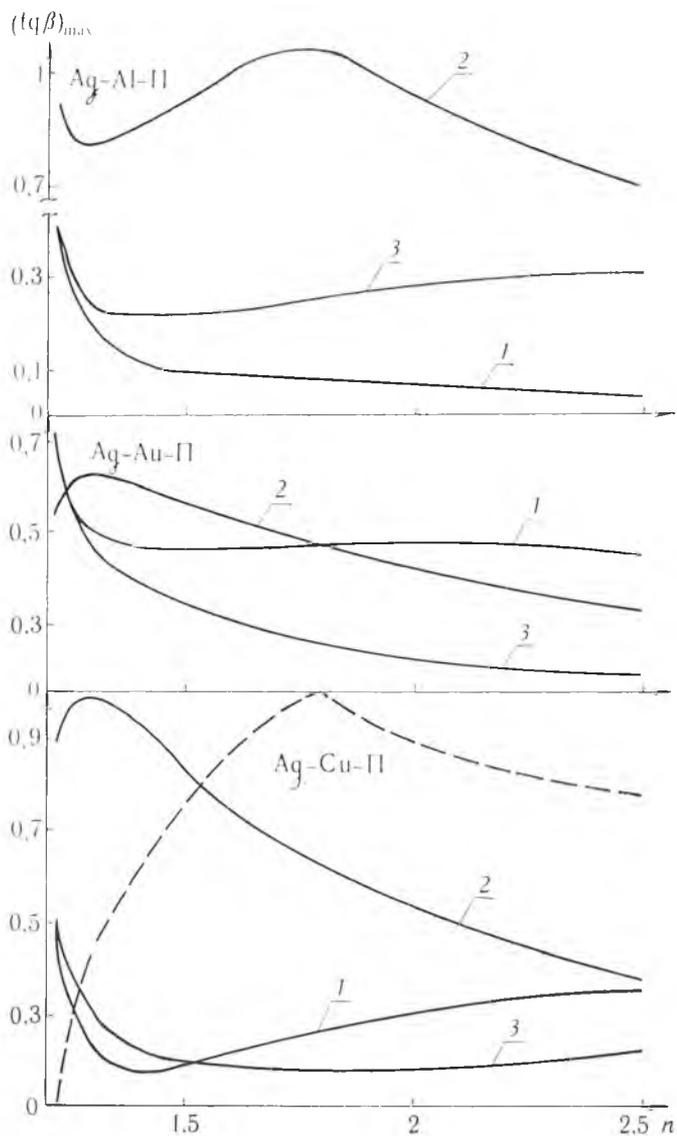


Рис. 2. Зависимости от показателя преломления максимальных значений эллиптичности поляризации пучков, выходящих из ПСВ типа $M_1M_2П$. Цифры обозначают номера секторов фронтальной грани

свойствах указанных световозвращателей можно получить, изучив структуры, обозначенные нами как ППМ (явление ПВО на 1-й и 2-й отражающих гранях, металлизация 3-й грани, рис. 1 [1]) и ММП в случае использования одного металла и $M_1M_2П$ — в случае использования двух металлов. Все иные возможные варианты металлизации и неметаллизации граней сводятся к простой перенумерации секторов фронтальной грани.

Линейно-поляризованный свет, падающий на ПСВ перпендикулярно его фронтальной грани, становится на выходе в общем случае эллиптически поляризованным (см. рис. 1). Причем каждый из шести секторов фронтальной грани формирует отраженный пучок со своим, отличным от других, состоянием поляризации. На рис. 1 для сравнения приведены поляризационные характеристики пучка, выходящего из 1-го сектора световозвращателя, все три боковые грани которого работают на эффекте

ПВО (штриховые кривые) и серебрёны (штрих-пунктирные кривые). Для зависимостей $\text{tg } \beta(a_{\text{вх}})$ характерны общие закономерности [2]: в интервале $a_{\text{вх}} = 0^\circ \dots 180^\circ$ имеют место по два минимума и максимума, в точках минимумов отраженный свет линейно-поляризован. Зависимости $a_{\text{вых}}(a_{\text{вх}})$ для некоторых секторов близки к линейным, причем с ростом $a_{\text{вх}}$ имеет место как увеличение, так и уменьшение $a_{\text{вых}}$. Очевидно, что часть секторов исследуемых ПСВ формирует отраженное излучение с поляризационными характеристиками, близкими характеристикам пучков, отраженных призмными световозвращателями ПВО, остальные секторы работают аналогично монометаллизированным ПСВ.

На рис. 2 приведены зависимости максимальных значений эллиптичности отраженных пучков $(\text{tg } \beta)_{\text{max}}$ от показателя преломления n при длине волны $\lambda = 500$ нм для ПСВ типа $M_1M_2П$. Здесь же штриховой кривой показана аналогичная зависимость для световозвращателя ПВО,

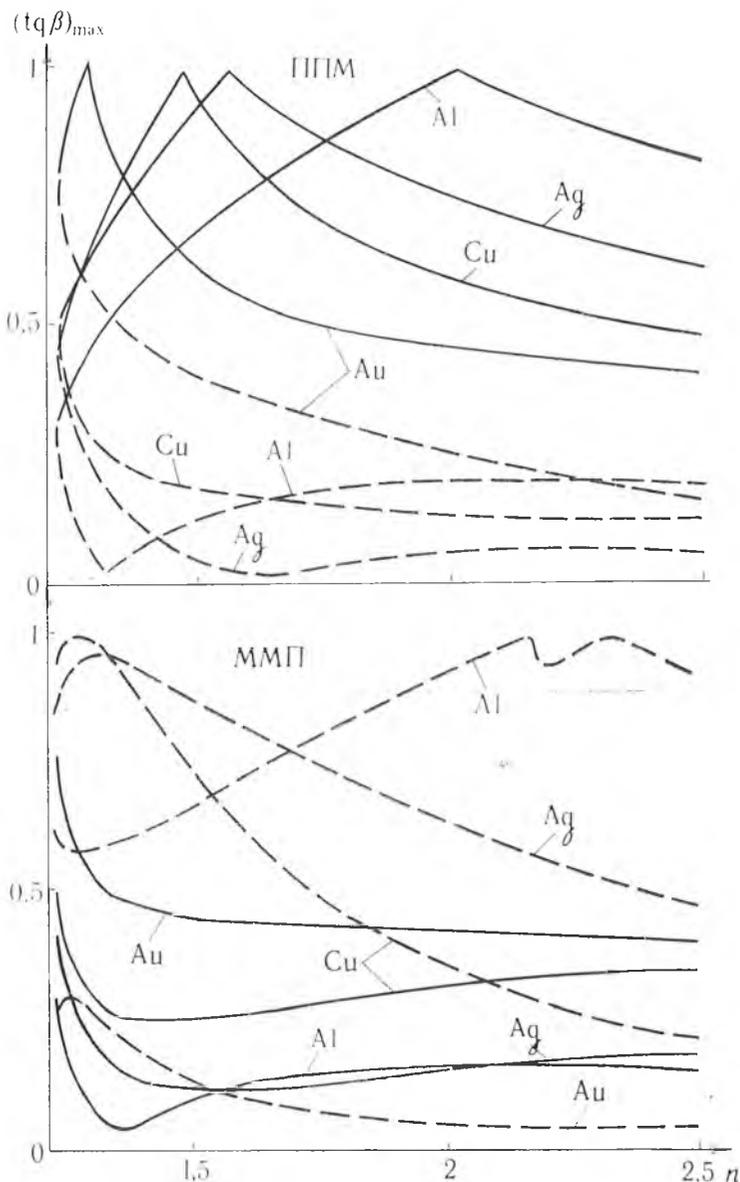


Рис. 3. Зависимости от показателя преломления максимальных значений эллиптичности поляризации пучков, выходящих из ПСВ типа ППМ и ММП. Сплошные кривые отвечают первым, а штриховые — вторым секторам фронтальной грани

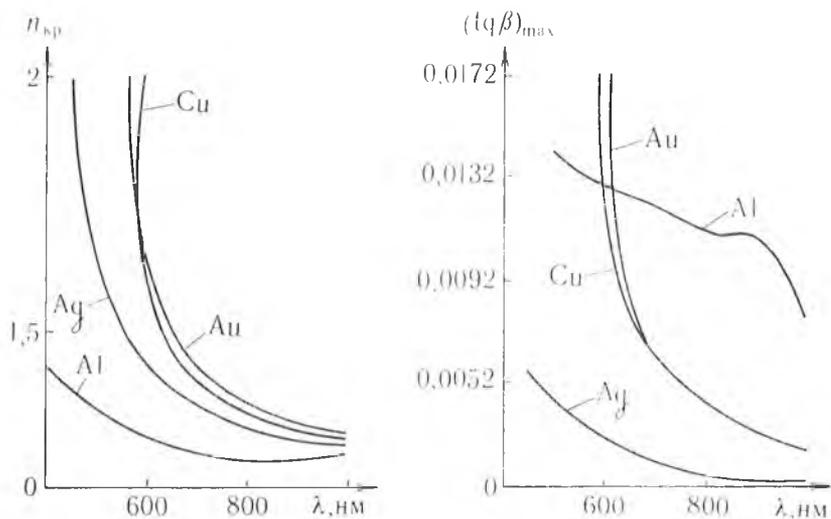


Рис. 4. Зависимости показателя преломления, соответствующего минимуму максимальной эллиптичности пучка, выходящего из второго сектора ПСВ типа ППМ, и самих значений максимальной эллиптичности от длины волны падающего света

одинаковая для всех шести отраженных пучков. Показатели преломления взяты из [6]. Рис. 3 иллюстрирует функциональную связь $(\text{tg } \beta)_{\text{max}}(n)$ для структур ППМ и ММП. Каждой точке кривых на рис. 2, 3 соответствует свое конкретное значение $\alpha_{\text{вх}}^{\text{max}}$. Так же, как и световозвращатель ПВО, исследуемые ПСВ позволяют преобразовать линейно-поляризованное падающее излучение в циркулярно-поляризованное отраженное. Это возможно не для одного единственного значения показателя преломления ($n = 1,7675$, $\alpha_{\text{вх}}$ различен для всех шести пучков [2]). Например, при $\lambda = 500$ нм для первых пучков ПСВ типа ППМ такими показателями преломления являются значения $n = 1,5602$; $2,0161$; $1,2633$; $1,4612$ соответственно для серебряной, алюминированной, золочёной и меднёной третьей грани. Отметим отсутствующее у известных призмных и монометаллизированных ПСВ свойство пучков, выходящих из некоторых секторов фронтальной грани, сохранять поляризацию близкой к линейной независимо от азимута поляризации падающего света. Это свойство характерно для точек $n_{\text{кр}}$ кривых рис. 3, наиболее близких к оси абсцисс. Рис. 4 иллюстрирует для пучков, выходящих из вторых секторов ПСВ типа ППМ, зависимости таких критических показателей преломления $n_{\text{кр}}$ от длины волны падающего света. Здесь же приведены соответствующие зависимости максимальной эллиптичности поляризации этих пучков. Видно, что данные ПСВ имеют существенно меньшую эллиптичность поляризации выходящего света, чем металлизированные световозвращатели [2]. Например, для $\lambda = 600$ нм критический показатель преломления равен $n_{\text{кр}} = 1,4288$; $1,2957$; $1,6149$; $1,5854$ при соответственно серебряной, алюминированной, золочёной и меднёной третьей грани. При этом максимальные значения эллиптичности равны: $(\text{tg } \beta)_{\text{max}} = 0,0029$; $0,0132$; $0,0167$; $0,0148$. Световозвращатель с тремя серебряными гранями при таких λ и $n_{\text{кр}}$ имеет значения $(\text{tg } \beta)_{\text{max}} = 0,0608$; $0,0485$; $0,0797$; $0,0766$.

Средние коэффициенты отражения (в процентах) ПСВ, не все боковые грани которых металлизированы, приведены в таблице. Усреднение проводилось по азимуту поляризации падающего излучения в каждом из шести вариантов отражения, затем определялся средний коэффициент [7]. Важно, что эти ПСВ имеют существенно большие коэффициенты отражения, чем отражатели, все боковые грани которых металлизированы [1, 7].

Металлизированные ПСВ, $n=1,5$

Длина волны, нм	П	П	П	П	Ag	Al	Au	Cu	Ag	Ag	Ag	Al	Al	Au
	П	П	П	П	Ag	Al	Au	Cu	Al	Au	Cu	Au	Cu	Cu
	Ag	Al	Au	Cu	П	П	П	П	П	П	П	П	П	П
400	94	89	33	52	88	78	10	27	83	30	49	29	46	17
500	97	87	50	58	95	76	25	33	85	49	56	44	50	29
600	98	86	90	91	96	74	80	82	84	88	89	77	78	81
700	98	83	95	95	96	69	91	90	81	93	93	79	79	91
800	98	80	96	96	96	64	92	92	79	94	94	77	77	92
900	98	81	97	96	97	66	93	93	80	95	95	78	78	93
1000	98	88	97	97	97	77	94	94	86	95	95	85	85	94

Выявленные в работе поляризационные свойства прямоугольных световозвращателей расширяют возможности их использования для оптимизации параметров оптических устройств.

Список литературы

1. Титов А. Д. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 1. С. 23.
2. Коротаев В. В., Панков Э. Д. // ОМП. 1981. № 1. С. 9.
3. Барковский Л. М., Борздов А. Н., Борздов Г. Н., Камач Ю. Э., Овчинников В. М. // Там же. 1985. № 6. С. 23.
4. Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. // Изв. вузов: Приборостроение. 1990. Т. 33. № 3. С. 71.
5. Титов А. Д. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1. С. 15.
6. Золотарев В. М., Морозов В. Н., Смирнова Е. В. Оптические постоянные природных и технических сред. Л., 1984.
7. Процко С. В., Титов А. Д. // ОМП. 1991. № 2. С. 13.

Поступила в редакцию 20.05.91.

УДК 535.37

С. К. ГОРБАЦЕВИЧ, И. М. ГУЛИС, РАММА ЯШВАНТРАО (Маврикий)

**ВЛИЯНИЕ БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОГО
ИНДУКТИВНО-РЕЗОНАНСНОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ
ЭЛЕКТРОННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ
НА СПЕКТРАЛЬНО-КИНЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ЗАМЕДЛЕННОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ
ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ПРОФЛАВИНА**

Вопрос о влиянии индуктивно-резонансного переноса энергии электронного возбуждения на спектральные, поляризационные и временные характеристики флуоресценции сложных молекул в условиях неоднородного уширения уровней энергии изучен достаточно подробно (см. напр., [1—4]). Однако его проявления (речь идет об S—S-переносе энергии) в спектральных и временных характеристиках фосфоресценции и замедленной флуоресценции (ЗФ) практически еще не изучались.

В качестве объектов исследования выберем раствор профлавина в пленках поливинилового спирта (ПВС), характеристики ЗФ которого достаточно хорошо изучены, а для исследования гетеропереноса энергии воспользуемся классической донорно-акцепторной парой профлавинов — родамин 6G (твердые растворы в ПВС).

На рис. 1 приведены спектр поглощения (кривая 1) и ЗФ (кривые 2, 3) профлавина в пленке поливинилового спирта при температуре 295 К для концентраций профлавина, равных $5 \cdot 10^{-5}$ и $4 \cdot 10^{-3}$ моль/л

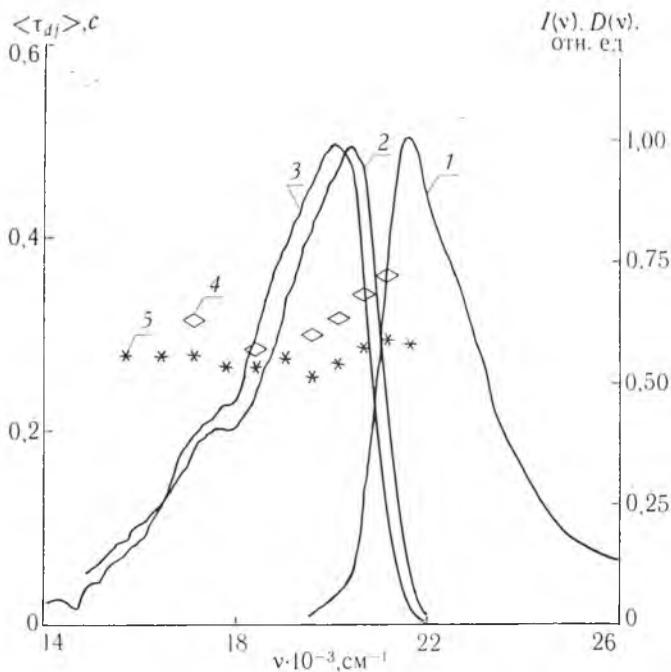


Рис. 1. Спектры поглощения (1) и замедленной флуоресценции (2, 3) профлавиона в матрице ПВС, $C = 5 \cdot 10^{-3}$ (2, 4) и $4 \cdot 10^{-3}$ моль/л (3, 5). Зависимости среднего времени жизни замедленной флуоресценции от частоты регистрации (4, 5)

соответственно. Слабый максимум в области 17500 см^{-1} соответствует фосфоресценции (при данной температуре вклад фосфоресценции в замедленное свечение мал). В результате направленности индуктивно-резонансного переноса энергии между синглетными уровнями профлавиона спектр ЗФ сдвигается в низкочастотную сторону по отношению к спектру ЗФ в отсутствие переноса энергии (см. рис 1, кривые 2, 3).

На рис. 1 (кривые 4, 5) приведены зависимости среднего времени жизни ЗФ профлавиона от частоты регистрации по спектру испускания для разных концентраций профлавиона. Как видим, при увеличении концентрации профлавиона до величины, при которой возможен перенос энергии, время жизни ЗФ сокращается. Вследствие того, что индуктивно-резонансный перенос энергии между синглетными состояниями сложных молекул протекает за времена, соизмеримые с временем жизни S_1 -состояния, а между триплетными состояниями — запрещен, влияние переноса энергии на кинетику ЗФ носит опосредованный характер и связано со спектральной гетерогенностью времени жизни ЗФ и направленностью переноса энергии электронного возбуждения. Действительно, как было показано в работах [5, 6], время жизни ЗФ с ростом частоты регистрации увеличивается. В результате $S - S$ -переноса энергии электронного возбуждения (в силу его направленности) повышается вклад в свечение низкочастотных центров, обладающих меньшим временем жизни ЗФ, поэтому суммарное время жизни ЗФ концентрированных растворов профлавиона в твердых матрицах ПВС оказывается более низким, чем для разбавленных. По мере уменьшения частоты регистрации это различие падает.

Если перенос энергии происходит между молекулами различного типа (гетероперенос), то наличие переноса энергии также приводит к снижению времени жизни ЗФ донора. Например, для твердых растворов профлавиона в матрице ПВС, когда в качестве акцептора использовался родамин 6G, при наличии $S - S$ -переноса энергии время жизни ЗФ донора сокращается с 0,31 до 0,28 с. Однако причины снижения времени

жизни при гетеропереносе и гомопереносе энергии различны. Действительно, как следует из выражения (1), для времени жизни замедленной флуоресценции [7] при увеличении константы K_n скорости безызлучательного перехода из S_1 -состояния время жизни ЗФ уменьшается:

$$\frac{1}{\tau_{df}} = K_{ph} + K_m + K_e \left(1 - \frac{K_g}{K_f + K_n + K_g} \right), \quad (1)$$

где τ_{df} — время жизни ЗФ; K_g , K_e — константы интеркомбинационной ($S_1 - T_1$) и обратной интеркомбинационной конверсии соответственно; K_m — константа интеркомбинационной конверсии в основное состояние; K_f , K_{ph} — излучательные константы флуоресценции и фосфоресценции соответственно.

Перенос энергии из S_1 -состояния молекулы профлавина на молекулу родамина 6G можно рассматривать как дополнительный канал безызлучательной дезактивации уровня S_1 и поэтому он должен приводить к снижению наблюдаемого времени затухания ЗФ профлавина.

Проведя анализ более подробно вопрос о тушении флуоресценции и ЗФ донора.

Вокруг молекулы донора опишем сферу радиуса $R > 2R_0$, где R_0 — критический радиус переноса. Нетрудно показать, что если в выделенном объеме находится N молекул акцептора, то для величин квантовых выходов флуоресценции и ЗФ донора (φ_f^D , φ_{df}^D) можно записать:

$$\varphi_f^D = \frac{K_f^D}{K_f^D + K_g + \sum_{i=1}^N K_{pi} + K_n^D},$$

$$\varphi_{df}^D = \varphi_f^D \frac{K_e K_g}{(K_m + K_e + K_{ph}) \left(K_f^D + K_g + K_n^D + \sum_{i=1}^N K_{pi} \right) - K_e K_g}. \quad (2)$$

Здесь $K_{pi} = \frac{1}{\tau_{0D}} \left(\frac{R_0}{r_{D, Ai}} \right)^6$ — вероятность безызлучательного переноса энергии.

Соответственно для сенсibilизированных флуоресценции и ЗФ акцептора имеем:

$$\varphi_{f(df)}^A = \varphi_{f(df)}^D \cdot \varphi_{fA}^{A_0} \frac{\sum_{i=1}^N K_{pi}}{K_f^D}. \quad (3)$$

В качестве одного из критериев эффективности переноса используется отношение квантового выхода сенсibilизированного свечения к квантовому выходу люминесценции донора. Если не принимать во внимание статистическое распределение по расстояниям между молекулами донора и акцептора, существующее в реальном растворе, то, как видно из (2, 3), соответствующее отношение для замедленного свечения $\varphi_{df}^A / \varphi_{df}^D$ равно $\varphi_f^A / \varphi_f^D$. С качественной стороны ясно, что пространственная неоднородность и сильная зависимость вероятности индуктивно-резонансного переноса от расстояния должны определенным образом повлиять на результат, полученный для ансамбля молекул. Действительно, в силу конкуренции процессов переноса энергии и интеркомбинационной конверсии в триплетное состояние будут переходить преимущественно молекулы донора, находящиеся в неблагоприятном для переноса энергии окружении. В результате в спектре ЗФ интенсивность полосы донора по отношению к полосе акцептора окажется большей, чем в спектре флуоресценции.

Для количественного решения задачи необходимо провести конфигурационное усреднение выражений (2, 3). Для простоты пренебрежем переносом энергии по донору, т. е. будем считать, что его концентрация достаточно мала. Задача о нахождении квантового выхода флуоресцен-

ции донора при наличии переноса энергии на акцептор в ансамблях молекул решена аналитически [8]. Однако процедура аналитического нахождения усредненного по ансамблю $\langle \varphi_{df}^D \rangle$ наталкивается на трудности. Поэтому мы ограничимся аналитическим решением для случая низких концентраций и параллельно проведем численный расчет для широкого диапазона концентраций.

Для аналитического вычисления усредненных по ансамблю значений квантовых выходов $\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle$ ограничимся областью концентраций, для которых вероятность попадания в выделенный объем двух и более молекул акцептора мала. Тогда для усредненных по ансамблю значений квантовых выходов $\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle$ справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{f(df)}^D \rangle &= P_0 \langle \varphi_{f(df)}^D \rangle_{N=0} + P_1 \langle \varphi_{f(df)}^D \rangle_{N=1}, \\ \langle \varphi_{f(df)}^A \rangle &= P_1 \langle \varphi_{f(df)}^A \rangle_{N=1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь P_0 и P_1 — определяемые распределением Пуассона вероятности отсутствия и попадания одной молекулы акцептора в выделенный объем соответственно; $\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle_{N=1}$ — усредненные по расстояниям между молекулами донора и акцептора значения квантовых выходов флуоресценции (замедленной флуоресценции) донора (акцептора) при условии, что в выделенном объеме находится одна молекула акцептора; $\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle_{N=0}$ — значения квантовых выходов при условии, что в выделенном объеме отсутствует молекула акцептора (определяется из выражений (2, 3), если положить константу переноса равной нулю). Усредненные значения величин квантовых выходов $\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle_{N=1}$ определяются следующим выражением:

$$\langle \varphi_{f(df)}^{D(A)} \rangle_{N=1} = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 \varphi_{f(df)}^{D(A)} dr. \quad (5)$$

Здесь $\varphi_{f(df)}^{D(A)}$ определяется из (2, 3) при $N = 1$.

Аналитический расчет по описанной процедуре дает для низких концентраций акцептора ($C \ll C_0 = \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3\right)^{-1}$) и в предположении $\varphi_e \varphi_t \ll 1$ (где $\varphi_e = \frac{K_c}{K_m + K_e + K_{ph}}$, $\varphi_t = \frac{K_g}{K_f + K_g + K_n}$) следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f^D \rangle &\approx \varphi_f^{D_0} \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{C}{C_0}\right), \\ \langle \varphi_f^A \rangle &\approx \varphi_f^{A_0} \frac{\pi}{2} \frac{C}{C_0}, \\ \langle \varphi_{df}^D \rangle &\approx \varphi_f^{D_0} \varphi_t \varphi_e \left(1 - \frac{3}{4} \pi \frac{C}{C_0}\right), \\ \langle \varphi_{df}^A \rangle &\approx \varphi_f^{A_0} \varphi_t \varphi_e \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varphi_f^{D_0}$, $\varphi_f^{A_0}$ — квантовые выходы флуоресценции донора и акцептора в отсутствие переноса энергии.

Из соотношения (6) получаем, что для малых C/C_0 отношение $\langle \varphi_{df}^A \rangle / \langle \varphi_{df}^D \rangle$ к $\langle \varphi_f^A \rangle / \langle \varphi_f^D \rangle$ (обозначим его β) приблизительно равно 0,5. (Напомним, что без учета статистического распределения расстояний между молекулами донора и акцептора $\beta = 1$).

Для области более высоких концентраций проведен численный расчет интенсивности флуоресценции и замедленной флуоресценции по следующей модели. Вокруг молекулы донора описали куб с ребром 20 нм, в центр которого поместили молекулу донора. Далес, исходя из выбранной средней концентрации акцептора, случайным образом (в соответствии с распределением Пуассона) определили число молекул акцептора, которые стохастически распределили в пределах выделенного кубиче-

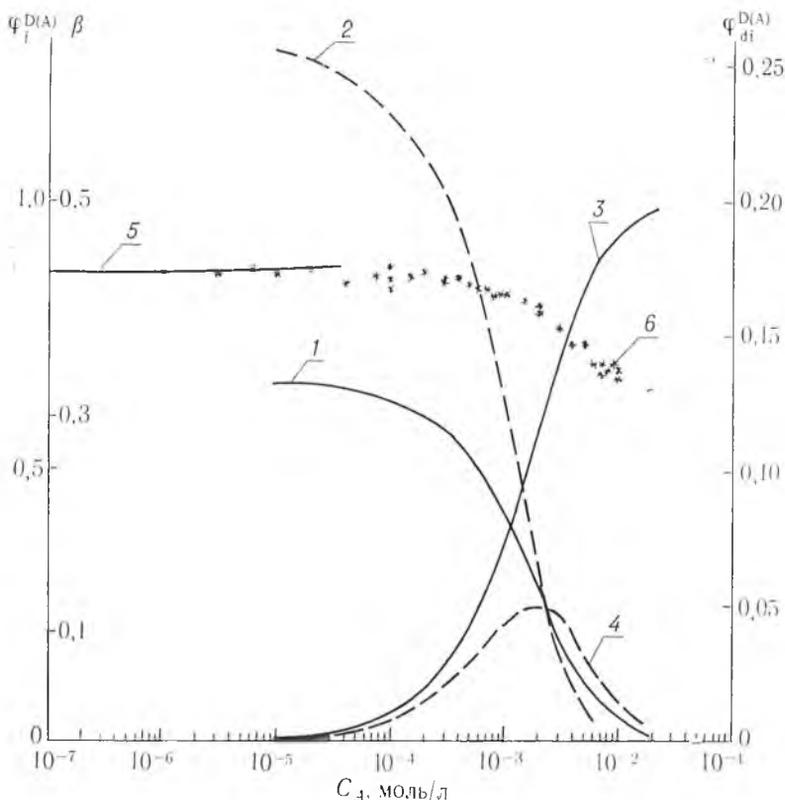


Рис. 2. Результаты расчета концентрационных зависимостей квантовых выходов флуоресценции (1, 3) и замедленной флуоресценции донора (1, 2) и акцептора (3, 4). Зависимости величины β от концентрации акцептора (5, 6); аналитический расчет для $C_D/C_0 \ll 1$ (5), численное моделирование (6)

ского объема. Для полученной таким образом группы молекул, используя выражения (2, 3), рассчитали значения квантовых выходов флуоресценции и ЗФ для донора и акцептора (критический радиус переноса был выбран 5 нм). Далее, проводя указанную процедуру многократно, мы получили усредненные по ансамблю значения квантовых выходов $\langle \phi_{i-dj}^{D(A)} \rangle$. Результаты такого расчета представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что тушение ЗФ донора с ростом концентрации акцептора описывается более крутой зависимостью, чем тушение быстрой флуоресценции (см. кривые 1, 2). Зависимость квантового выхода сенсibilизированной ЗФ акцептора является немонотонной (кривая 4). Полученная в численном расчете величина β близка к 0,5 в области низких концентраций. Небольшое отличие объяснимо, так как выражения (6) получены в предположении $\phi_{fi} \ll 1$, а кривая 5 является результатом аналитического расчета без этого допущения. С повышением концентрации акцептора величина β снижается (кривая 5). В эксперименте (в качестве донора был выбран профлавин, $C_D = 2 \cdot 10^{-3}$ моль/л, акцептора — родамин 6G, $C_A = 2 \cdot 10^{-4}$ моль/л) получена величина $\beta = 0,8$, т. е. величина $\beta < 1$, что свидетельствует о проявлении описанного эффекта. То обстоятельство, что полученная величина заметно выше расчетной, обусловлено миграцией энергии по молекулам донора, в результате которой происходит «перемешивание» конфигураций с различными расстояниями r_{DA} . Использование в эксперименте высокой концентрации донора было вызвано необходимостью исключения осложнений, связанных с непосредственным возбуждением акцептора.

Таким образом показано, что результатом синглет-синглетного индуктивно-резонансного переноса энергии является сокращение длительности ЗФ. Кроме того, соотношение интенсивностей флуоресценции донора и сенсибилизированной флуоресценции акцептора различны для быстрого и замедленного свечения.

Список литературы

1. Гулис И. М., Комяк А. И. // ЖПС. 1977. Т. 27. № 5. С. 841.
2. Гулис И. М., Комяк А. И., Гомин В. И. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 2. С. 307.
3. Бодунов Е. Н., Малышев В. А. // Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 46. № 3. С. 487.
4. Бодунов Е. Н., Малышев В. А. // ЖПС. 1980. Т. 32. № 5. С. 839.
5. Горбацевич С. К., Гулис И. М., Комяк А. И. // Там же. 1982. Т. 37. № 2. С. 309.
6. Горбацевич С. К., Гулис И. М., Комяк А. И. // Там же. № 1. С. 92.
7. Лоуэр С., Эль-Сайед М. // УФН. 1968. Т. 94. № 2. С. 289.
8. Ермолаев В. Л., Бодунов Е. М., Свешников Е. Б., Шахфердов Т. А. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения. Л., 1977.

Поступила в редакцию 27.09.91.

УДК 539.193/194:661.729

И. П. ЗЯТЬКОВ, И. Д. КНЯЖЕВИЧ,
В. И. ГОГОЛИНСКИЙ, Г. А. ПИЦЕВИЧ

КВАНТОВОХИМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СТРУКТУРЫ И КОНФОРМАЦИЙ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ ПЕРОКСИДОВ

Нами проведены квантовохимические расчеты геометрического строения и электронной структуры ряда органических и кремнийорганических пероксидов. Расчет проводился квантовохимическим полуэмпирическим методом МО ЛКАО в приближении *MNDO* с полной оптимизацией всех геометрических параметров. Была использована параметризация для кремния из работы [1]. Были изучены метилпероксид $\text{CH}_3\text{OOCCH}_3$ (I), *трет*-бутилпероксид $(\text{CH}_3)_3\text{COOC}(\text{CH}_3)_3$ (II), триметилсилил-*трет*-бутилпероксид $(\text{CH}_3)_3\text{SiOOC}(\text{CH}_3)_3$ (III), хлордиметилсилил-*трет*-бутилпероксид $(\text{CH}_3)_2\text{SiOOC}(\text{CH}_3)_3$ (IV), бис-(триметилсилил)пероксид $(\text{CH}_3)_3\text{SiOOSi}(\text{CH}_3)_3$ (V), 3-метил-3-триметилсилилперокси-1-бутилпероксид $\text{HC}\equiv\text{CC}(\text{CH}_3)_2\text{OOSi}(\text{CH}_3)_3$ (VI), 1,1-диметил-2-пропинил-*трет*-бутилпероксид $\text{HC}\equiv\text{CC}(\text{CH}_3)_2\text{OOC}(\text{CH}_3)_3$ (VII).

Для пероксидов I, II и V в литературе имеются данные рентгеноструктурного анализа и электронной дифракции в газовой фазе [2—4], результаты квантовохимического расчета в приближении *MINDO/3* [5], а для пероксида I — данные неэмпирического квантовохимического расчета с использованием базиса 4—21G [6]. Результаты наших расчетов в приближении *MNDO* и другие экспериментальные и расчетные данные приведены в табл. 1—4.

Для всех изученных пероксидов I—VII *MNDO* расчет указывает на наличие «*d*-эффекта», т. е. искажение симметрии C_{3v} *трет*-бутильного фрагмента, отмеченное в [3] для пероксида III по данным рентгеноструктурного анализа (углы CCO (Ф и X) и CSiO (Ф и X) в табл. 1—4).

Рассмотрим полученные результаты применительно к основным геометрическим параметрам молекул пероксидов.

1. **O—O связь.** Полуэмпирические квантовохимические расчеты, как известно, дают заниженное значение длины пероксидной связи, что видно из таблиц. Экспериментальные результаты указывают на увеличение длины пероксидной связи в ряду пероксидов I, II, V, в то время как расчеты методом *MNDO* и *MINDO/3* дают увеличение длины O—O связи при переходе от пероксида I к II (оба органические), но уменьшение ее

Таблица 1

Рассчитанные и экспериментальные
геометрические параметры молекулы пероксида I

Параметр (нм, град)	Расчет <i>MNDO</i>	Экспери- мент [2]	Расчет <i>MNDO/3</i> [5]	Расчет 4-21G [6]
O—O	0,1297	0,1457	0,1394	0,1411
C—O	0,1417	0,1420	0,1352	0,1422
COO	113,4	105,2	115,0	105,4
OCH(Ф)	105,6	—	—	105,8
OCH(X)	112,6	—	—	111,1
COOC	142,9	119(10)	109,6	115,5

Таблица 2

Рассчитанные и экспериментальные
геометрические параметры молекулы пероксида II

Параметр (нм, град)	Расчет <i>MNDO</i>	Экспери- мент [3]	Экспери- мент [4]	Расчет <i>MNDO/3</i> [5]
O—O	0,1299	0,1478	0,1480	0,1410
C—O	0,1437	0,1439	0,1460	0,1387
C—C	0,1564	0,1532	0,1523	—
COO	114,8	106,7	103,9	114,5
CCO(Ф)	103,1	100,7	—	—
CCO(X)	111,8	110,8	—	—
COOC	178,3	164,0(4)	165,8	174,4

Таблица 3

Рассчитанные и экспериментальные
геометрические параметры молекулы пероксида V

Параметр (нм, град)	Расчет <i>MNDO</i>	Эксперимент [4]	Расчет <i>MNDO/3</i> [5]
O—O	0,1275	0,1481	0,1393
Si—O	0,1769	0,1681	0,1683
Si—C	0,1856	0,1855	—
SiOO	112,1	106,6(1,4)	113,3
CSiO(Ф)	102,6	—	—
OSiO(X)	109,6	—	—
SiOOSi	179,5	143,5(6,0)	179,9

при переходе от II к V, когда в пероксидной цепочке углерод заменяется на кремний. Ближе всего к экспериментальной величине длины O—O связи оказался результат неэмпирического расчета в базисе 4—21 G для пероксида I.

2. Двугранный угол при O—O связи. Расчет предсказывает транс-идное строение пероксидной цепочки практически для всех изученных пероксидов, кроме пероксида I и хлорзамещенного пероксида IV. Тот же результат дает и расчет *MNDO/3*. Данные структурных исследований указывают на увеличение двугранного угла при O—O связи с ростом объема заместителей в пероксидной цепочке. Так, например, метолом

Таблица 4

Рассчитанные геометрические параметры
молекул пероксидов III, IV, VI, VII

Параметр (нм, град)	Номер пероксида			
	III	IV	VI	VII
O—O	0,1283	0,1283	0,1283	0,1298
C—O	0,1438	0,1440	0,1441	0,1441
C—C	0,1563	0,1563	0,1564	0,1565
Si—O	0,1770	0,1750	0,1475	0,1474
Si—C	0,1856	0,1855	0,1856	—
Si—Cl	—	0,2128	—	—
C≡C	—	—	0,1196	0,1196
COO	115,8	115,9	115,4	115,4
SiOO	111,7	113,1	111,5	—
CCO(Ф)	103,6	103,3	103,4	103,1
CCO(X)	111,6	111,5	112,0	111,8
CSiO(Ф)	102,1	104,4	102,1	—
CSiO(X)	109,5	113,9	109,5	—
τ_{0-0}^*	179,2	167,6	179,5	179,0

* τ_{0-0} обозначает двугранный угол при O—O связи.

рентгеноструктурного анализа для пероксида $(C_6H_5)_3SiOOSi(C_6H_5)_3$ [7] доказано трансондное строение.

3. Длина C—O и Si—O связи. Расчет в приближении *MNDO* хорошо воспроизводит длину C—O связи в сравнении с экспериментальными результатами для пероксидов I и II, в отличие от расчета *MNDO/3*, который занижает ее величину. В изученном ряду пероксидов длина C—O связи меняется незначительно. Рассчитанная длина Si—O связи для пероксида V завышена по сравнению с экспериментальной величиной, а также данными [7], где она составила 0,1668 нм.

4. Другие параметры. Длина связи C—C в изученном ряду пероксидов практически постоянна. Для пероксидов VI и VII наряду с обычной длиной C—C связи получено значение 0,1475 нм для C—C связи, примыкающей к тройной связи в третичном фрагменте (C—C≡C). Длина связи C≡C, согласно расчету, равна 0,1196 нм. Для сравнения, в молекуле ацетилена H—C≡C—CH₃ [8] длины этих связей составляют 0,1459 и 0,1202 нм соответственно. Наибольшую длину имеет связь Si—Cl, длина которой, согласно расчету, равна 0,2128 нм. Валентные углы SiOO в изученном ряду пероксидов несколько изменяются (максимальное значение для пероксида IV), но всегда меньше углов COO, что противоречит экспериментальным данным.

Таким образом, квантовохимические расчеты в приближении *MNDO* неадекватно отражают часть параметров геометрии молекул и тенденции их изменения в изученном ряду пероксидов.

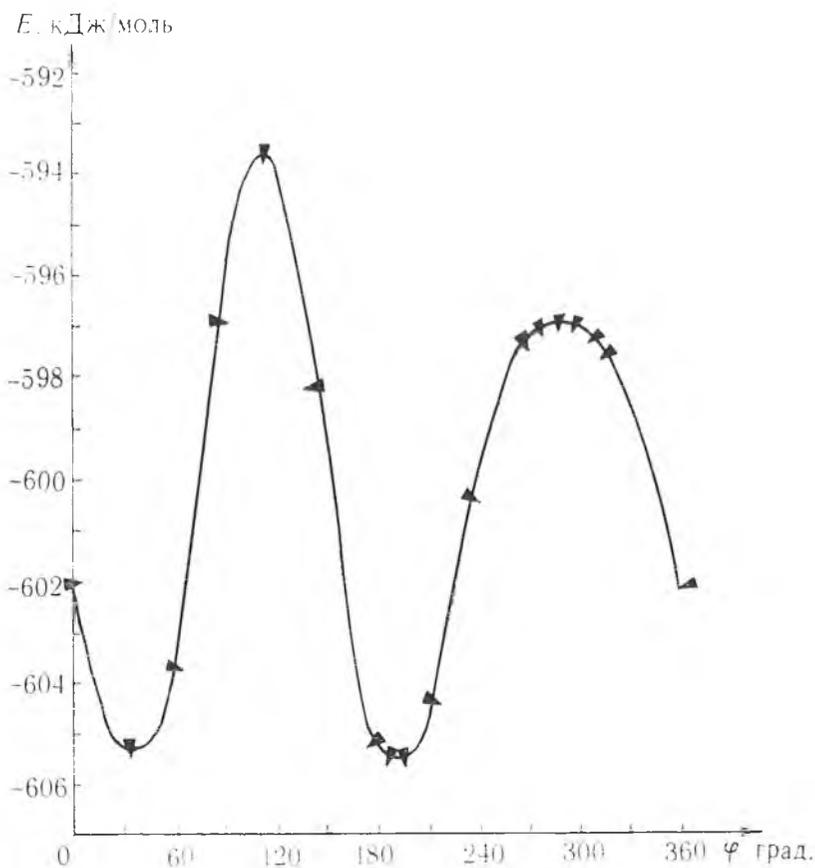
В табл. 5 представлены порядки связей по Вибергу валентносвязанных атомов изученного ряда и заряды на атомах кислорода.

Видно, что влияние окружения ощутимо для связей O—O и Si—O. Порядок O—O связи последовательно растет в ряду пероксидов при замещении углерода на кремний в пероксидной цепочке.

Наибольший из рассчитанных порядков O—O связи (0,9858) получен для пероксида V, у которого в пероксидной цепочке находятся только атомы кремния (Si—O—O—Si).

Рассчитанные порядки связей по Вибергу
и заряды на атомах кислорода

Тип связи	Номер пероксида						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
C—O	0,969	0,947	0,948	0,942	—	0,942	0,940
O—O	0,973	0,972	0,983	0,982	0,986	0,985	0,974
Si—O	—	—	0,770	0,805	0,788	0,768	—
Si—C	—	—	0,877	0,874	0,877	0,878	—
C—C	—	0,953	0,953	0,954	—	0,946	0,945
Si—Cl	—	—	—	0,755	—	0,961	0,962
C≡C	—	—	—	—	—	2,918	2,917
Заряды на атомах	$\times 1,6 \cdot 10^{-19}$ (Кл)						
O ₁	-0,195	-0,192	-0,185	-0,178	-0,396	-0,180	-0,187
O ₂	-0,195	-0,192	-0,404	-0,392	-0,396	-0,406	-0,194



Зависимость энергии связи молекулы пероксида IV от угла вращения группировки $(\text{CH}_3)_2\text{Cl}$ вокруг связи Si—O.

Несколько меньшие порядки пероксидной связи получены для пероксидов III, IV и VII, у которых в состав пероксидной цепочки входят как углерод, так и кремний (C—O—O—Si). Причем наименьший в этой группе порядок O—O связи наблюдается у хлорзамещенного пероксида IV.

Группа органических пероксидов I, II и VII обладает наименьшими порядками связей O—O.

Максимальный порядок Si—O связи наблюдается для хлорзамещенного пероксида IV (для него же длина Si—O связи минимальна). Для других пероксидов такой обратной зависимости не наблюдается.

Порядок связи C—C для изученного ряда пероксидов не меняется, за исключением пероксида VI. В этом случае для связи C—CH₃ он меньше обычной величины, а для связи C—C≡ несколько больше обычного. Порядок связи C≡C составил 2,918.

Из вышесказанного видно, что пероксид IV по ряду параметров выделяется в общем ряду. Для него возможно образование конформеров в зависимости от положения атома Cl по отношению к Si—O связи. Для уточнения строения возможных конформеров был проведен *MNDO* расчет для случая вращения группировки (CH₃)₂Cl вокруг связи Si—O. Расчет проводился при фиксированном угле при Si—O связи с шагом 30° (в области экстремумов проводились уточняющие расчеты с меньшим шагом) с оптимизацией остальных параметров. Кривая зависимости энергии связи молекулы от угла вращения представлена на рисунке. Наличие двух минимумов указывает на возможность образования двух конформеров (углы при Si—O связи 30° и 195°). Оба положения минимумов соответствуют гош-конформерам.

Как известно, порядок связи служит показателем прочности соответствующей связи. Таким образом, проведенные нами расчеты порядков пероксидных связей свидетельствуют об усилении прочности O—O связи при переходе от органических пероксидов к кремнийорганическим, т. е. подтверждают известную из практики более высокую стабильность кремнийорганических пероксидов.

Список литературы

1. Dewar M. J. S., McKee M. L., Rzepa H. S. // Journ. Amer. Chem. Soc. 1978. V. 100. № 11. P. 3607.
2. Haas B., Oberhammer H. // Ibid. 1984. V. 106. № 21. P. 6146.
3. Slovochkotov Y. L., Timofeeva T. V., Antipin M. Y., Struchkov Y. T. // Journ. Mol. Struct. 1984. V. 112. P. 127.
4. Haas D., Oberhammer H., Brandes D., Blaschette A. // Ibid. 1977. V. 40. P. 65.
5. Кокорев В. И., Вышнийский Н. Н., Масленников В. П. и др. // Журн. структ. химии. 1981. Т. 22. № 4. С. 9.
6. Gase W., Boggs J. E. // Journ. Mol. Struct. 1984. V. 116. P. 207.
7. Лебедев В. А., Дроздов Ю. Н., Кузьмин Э. А. и др. // Кристаллография. 1981. Т. 26. Вып. 1. С. 192.
8. Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. // Колебания молекул. М., 1972. С. 165.

Поступила в редакцию 17.10.91.

УДК 669.15:546.72

С. В. СУХВАЛО, Л. И. КОНЮШКО

СВОЙСТВА ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ GdFe₂ И ErFe₂

Интерметаллические соединения на основе редкоземельных и переходных металлов привлекают особое внимание как материалы с уникальными свойствами, представляющими интерес для широкого практического применения. Такие представители этого класса материалов, как соединения гадолиния и эрбия с железом, могут найти применение

в устройствах памяти в качестве носителя информации [1]. Однако полученные к настоящему времени сведения о соединениях подобного типа недостаточны для объяснения природы их свойств. В связи с этим их применение сталкивается с рядом проблем научного и практического характера.

В настоящей работе для объяснения особенностей свойств соединений $GdFe_2$ и $ErFe_2$ в аморфном и кристаллическом состояниях привлекается явление магнитных фазовых превращений. С этой целью проведен комплекс экспериментов по их выявлению в рассматриваемых материалах. Нами были изучены свойства поликристаллических массивных образцов $GdFe_2$ и аморфных пленок $GdFe_2$ и $ErFe_2$.

Массивные образцы выплавляли дуговым методом. Пленки толщиной 100 нм изготавливали высокочастотным ионно-плазменным распылением. В дополнение к стандартной методике очистки подложек применяли очистку в плазме в течение 15 мин. Предварительное разрежение в камере составляло $4 \cdot 10^{-5}$ Па, давление аргона высшей очистки во время осаждения пленок было $1,3 \cdot 10^{-1}$ Па. Пленки напыляли на охлаждаемые водой подложки. Смещающее напряжение при напылении не использовали. Состав пленок определяли с помощью химического анализа с относительной погрешностью $2 \div 4$ % для каждого компонента [2]. Наличие аморфного или поликристаллического состояния пленок выявляли электронографическим методом. Было найдено, что при нагреве пленок их аморфность сохранялась до 600 К. Температурных изменений структуры поликристаллических пленок обнаружено не было.

Удельное электросопротивление определяли потенциометрическим методом с погрешностью не более 1 %. Намагниченность пленок — с помощью магнитометра, константу эффективной магнитной анизотропии — на анизометре по методике, предложенной в работе [3]. Намагниченность массивных образцов измеряли на вибрационном магнитометре, теплофизические эффекты наблюдали термографическим методом. Погрешность измерений механических моментов на анизометре составляла $2 \div 3$ %, намагниченности на вибрационном магнитометре — не более 5 %. Определение константы эффективной анизотропии на анизометре может быть выполнено лишь с достаточно высокой погрешностью — около 40 %.

Обнаружение фазовых магнитных превращений в образцах соединений и исследование их особенностей проводили методом изучения зависимостей свойств от напряженности магнитного поля H в диапазоне $0 \div 6 \cdot 10^5$ А/М и температуры нагревания и охлаждения в области 150—500 К для аморфных и 100—800 К для кристаллических образцов.

Частой особенностью зависимости намагниченности массивных поликристаллических образцов $GdFe_2$ от напряженности возрастающего магнитного поля является наличие при определенных значениях H переходов от насыщения к изменению величины намагниченности. Как известно [4], такие аномалии могут иметь место при нарушении под влиянием магнитного поля коллинеарности антипараллельно ориентированных подрешеточных векторов намагниченности либо при реализации спин-переориентационных переходов, вызванных изменением H .

Характер температурной зависимости намагниченности (рис. 1, а) не соответствует бриллюэновскому: на кривой зависимости при определенных значениях T имеются участки немонотонного изменения намагниченности. Вблизи температурных точек с аномальным изменением намагниченности наблюдается температурный гистерезис. В этих же областях наблюдаются особенности температурной зависимости и других свойств $GdFe_2$, в частности электро- и магнитосопротивления. На основании данных об аномальном изменении намагниченности и других свойств в определенных интервалах температур можно сделать заключение о протекании в этих условиях фазовых превращений неструктурного типа. Такой вывод подтверждается термографическими и dilatометрическими измерениями. Полученные термограммы (рис. 1, б) показывают, что в темпе-

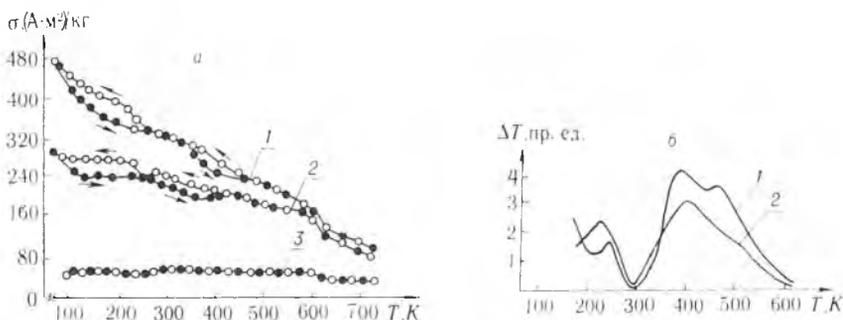


Рис. 1. Температурная зависимость удельной намагниченности (отнесенной к единице массы) и ДТА — сигнала поликристаллических массивных образцов $GdFe_2$ во внешнем магнитном поле:

а) $5,2 \cdot 10^6$ (1); $1,4 \cdot 10^6$ (2); $4 \cdot 10^6$ (3) А/м; б) 0 (1) и $1,2 \cdot 10^6$ (2) А/м

ратурных интервалах с аномальным изменением намагниченности и других свойств наблюдаются тепловые эффекты. В этой же области температур, как свидетельствуют dilatометрические исследования, имеет место также резкое изменение линейных размеров массивных образцов $GdFe_2$. Характерно, что эффекты, подобные указанным выше, развиваются в несколько этапов в достаточно широком температурном интервале. Их особенности и температурная область проявления зависят от напряженности магнитного поля. При отсутствии внешнего магнитного поля эти области расположены приблизительно в следующих интервалах температур: 110—120 и 360—480 К.

Аномальные изменения магнитных свойств аморфных и поликристаллических пленок $GdFe_2$ обнаружены приблизительно в тех же областях температур, которые были установлены для массивных образцов $GdFe_2$.

Как и в случае массивных образцов, в пленках происходят фазовые превращения, вызванные изменением напряженности магнитного поля (рис. 2). При низких температурах в области фазовых превращений магнитный гистерезис отсутствует. Начиная с температуры 270 К аномалии в виде резкого изменения намагниченности сопровождаются значительным гистерезисом по полю: форма гистерезисной петли близка к прямоугольной. В диапазоне 360÷400 К гистерезис по полю изменяет знак, причем имеет место возникновение двойной или более сложной петли гистерезиса.

Аномальное поведение температурной зависимости свойств, прежде всего магнитных, наблюдается в пленках $ErFe_2$. Как и в случае $GdFe_2$, оно вызвано развитием фазовых неструктурных превращений. Пример температурных зависимостей свойств, на которых ярко проявляется развитие подобных превращений, показан на рис. 3. Можно видеть, что температурные диапазоны с аномалиями $I_s = f(T)$ и $K_{эф} = f(T)$ в пленках $ErFe_2$ имеют другое местоположение на температурной шкале, чем в пленках $GdFe_2$. Так, при температурах $T < 300$ К какие-либо аномалии I_s и $K_{эф}$ в пленках $ErFe_2$ полностью отсутствуют. Первая аномалия параметра $K_{эф}$ возникает лишь при $T \approx 300$ К. Явно заметная аномалия лишь при $T > 400$ К. Затем происходит чередование диапазонов температур с аномалиями и без аномалии — I_s и $K_{эф}$. Выявленные температурные аномалии, как правило, имеют вид осцилляций величин I_s и $K_{эф}$.

Таким образом, несмотря на то, что аномалии свойств в образцах $GdFe_2$ и $ErFe_2$ проявляются в различных температурных диапазонах, в общем плане они схожи и часто имеют вид осцилляций. В диапазонах температуры с аномалиями свойств для обоих соединений наблюдается температурный гистерезис.

Сочетание в определенных диапазонах T резких аномалий свойств, температурного гистерезиса, термоэффектов свидетельствует о том, что как в массивных, так и в пленочных образцах обоих соединений реали-

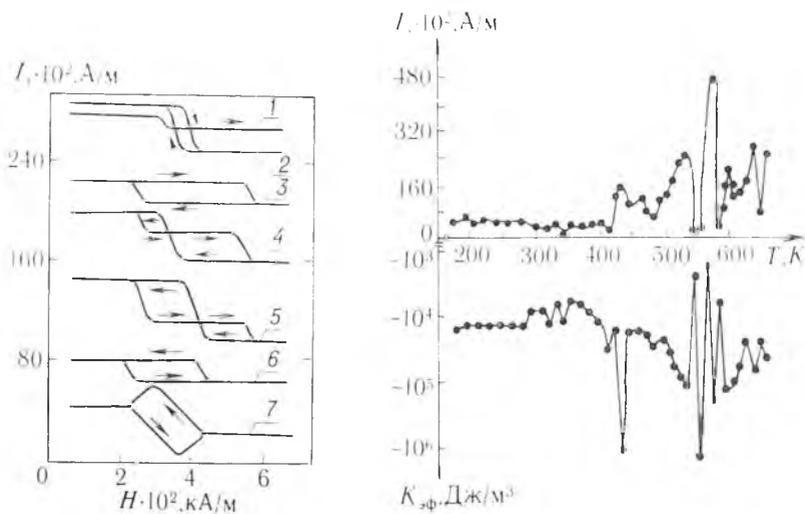


Рис. 2. Зависимость удельной намагниченности (отнесенной к единице объема) железо-гадолиниевых пленок от напряженности магнитного поля, измеренных при температурах 220 (1); 270 (2); 320 (3); 360 (4); 370 (5); 400 (6) и 440 (7) К

Рис. 3. Температурная зависимость намагниченности и константы эффективной анизотропии в пленках ErFe_2 при напряженности магнитного поля $4 \cdot 10^5 \text{ A/м}$

зуются температурные фазовые превращения с характерной спецификой протекания.

Поскольку, по данным эксперимента, проявление таких превращений в наибольшей степени отражается на магнитных свойствах, можно считать, что их механизм связан с измерениями в спиновой системе, обуславливающими изменение магнитного состояния материала, в частности ориентации спинов. Такое заключение подтверждается рассмотрением температурного поведения равновесной ориентации вектора намагниченности в пространственных координатах. В случае пленочных образцов равновесная ориентация вектора намагниченности (РОВН) была охарактеризована углом Θ между выбранным направлением в плоскости пленки, совмещенной с направлением магнитного поля, и пространственной равновесной ориентацией вектора намагниченности, реализующейся при последовательном изменении температуры. Экспериментальное определение РОВН и нахождение величины угла Θ осуществлялось с помощью одновременного измерения на вибрационном магнитометре трех равновесных проекций вектора намагниченности (J_s^X, J_s^Y, J). Величина Θ оценивалась также из анализа кривых механических вращающих моментов.

Оказалось, что в области температур, где отсутствуют аномалии магнитных свойств, величина Θ либо остается неизменной, либо плавно изменяется. В температурных областях с осцилляциями магнитных свойств зависимость $\Theta = f(T)$ также имеет вид осцилляций. Период и амплитуда колебаний величины $\Theta = f(T)$ в различных диапазонах температур различны. Начало колебаний Θ и их период в каждой серии осцилляций зависят от намагниченности насыщения, констант магнитной анизотропии и других фундаментальных свойств материала, технологической предистории образцов, скорости нарастания T .

Обнаруженные осцилляционные эффекты можно интерпретировать в рамках представлений о динамических нелинейных возбуждениях спиновой системы. Впервые полный теоретический анализ возбужденных состояний одномерного ферромагнетика выполнен в работе Бете [6], который показал, что они представляют собой неоднородности поля на-

магнитности, вызванные взаимодействием спиновых волн. Представления Бете получили затем дальнейшее развитие в теории спиновых волн (напр., [7]). Прямое экспериментальное обнаружение эффекта динамических нелинейных возбуждений в магнитных материалах до настоящего времени не проводилось.

Экспериментальное изучение явления температурной спиновой переориентации, смыкающейся с явлением спиновых осцилляций, впервые было проведено в работах [8, 9] на примере пленок интерметаллических соединений системы Gd—Co. В работе [10] приведены экспериментальные данные о температурной осцилляции равновесного направления вектора намагнитности в сплавах системы Fe—Ni—Co.

Список литературы

1. Глазер А. А., Тагиров Р. И. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 8. С. 1600.
2. Аллиповская Л. А., Ганаго Л. И., Фоменко Р. С., Демченко А. И. // Электронная техника. Сер. материалы. 1979. Т. 1. С. 97.
3. Chikazumi S. // Journ. Appl. Phys. 1961. V. 32. S. 81.
4. Белов К. П. Ферриты в сильных магнитных полях. М., 1972.
5. Брюхатов Н. Л., Киреевский Л. В. // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 198.
6. Bethe H. I. // Z. Phys. 1931. V. 71. № 2. 4. S. 205.
7. Ахнезер И. А., Боровин А. Е. // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. Вып. 2. С. 508.
8. Сухвало С. В., Демченко А. И., Шифрин А. Б. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1979. С. 131.
9. Сухвало С. В., Демченко А. И., Шифрин А. Б., Пашковский О. И. // Новые магнитные материалы для микроэлектроники. VII Всесоюз. школа-семинар. Ашхабад, 1982. С. 44.
10. Сухвало С. В., Макутин Г. В., Козич П. Н., Макутина Л. И. // XVIII Всесоюз. конф. по физике магнитных явлений. Калинин, 1988. Т. 3. С. 645.

Поступила в редакцию 15.07.91.

УДК 546.28:621.315.592

В. В. БОРЩЕПСКИЙ, Д. И. БРНИКЕВИЧ,
Ф. МЕРАЛИ (САР), В. В. ПЕТРОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗОЛОТА И КИСЛОРОДА В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ КРЕМНИИ

Обычно легирование золотом используется для снижения времени жизни носителей заряда в монокристаллическом кремнии. Это обстоятельство определяет необходимость исследования влияния Au на процессы дефектообразования в Si. Учитывая, что базовым материалом современной электроники является кремний, полученный по методу Чохральского [1], следует отметить, что особенности поведения примеси золота в Si: О практически не изучались, в частности, остается открытым вопрос о влиянии кислорода на диффузию Au в кремнии.

В экспериментах использовались пластины бездислокационного *n*-кремния с удельным сопротивлением (ρ) 20 Ом · см, легированного фосфором в процессе выращивания по методу Чохральского. Данные о концентрации кислорода (N_O) в междоузельном положении, измеренные методом ИК поглощения [2] на спектрофотометре «Specord-75 IR», приведены в табл. 1. Содержание Au (N_{Au}) определялось методом нейтронно-активационного анализа (НАА). Измерения эффекта Холла и проводимости выполнялись в температурном интервале 78—300 К по стандартной методике в режиме постоянного электрического и магнитного полей [3].

Диффузия Au осуществлялась из пленки, полученной химическим осаждением из раствора на основе дицианаурата калия, в атмосфере водорода при 1150—1250 К в течение 5—24 ч. После ее проведения нарушенный приповерхностный слой толщиной ~ 100 мкм, обогащенный золотом, сошлифовывался. С целью исследования влияния преципитатов

Параметры материалов Si : Au, 0

Номер образца	Положение образца на пластине	$N_0 \cdot 10^{-17}, \text{см}^{-3}$		$N_{\text{Au}} \cdot 10^{-14}, \text{см}^{-3}$
		исходная	после диффузии	
1	Ц	9,29	9,82	1,1
	К	5,75	5,85	1,2
2	Ц	12,00	8,46	5,7
	К	5,87	5,96	5,5
3	Ц	12,90	4,8	7,0
	К	9,15	9,99	7,1
4	Ц	13,50	3,30	9,9
	К	8,19	9,40	9,1

* Здесь Ц — центр пластины, К — край пластины. Диффузия проводилась при 1200 К длительностью 5 ч.

кислорода на процесс диффузии Au часть образцов подвергали предварительной термообработке (ПТО) при 1275—1475 К длительностью до 70 ч.

Кривые радиального распределения удельного сопротивления диффузионно-легированных пластин КЭФ-20 с различным содержанием кислорода приведены на рис. 1. Отметим основные особенности:

1. В центральной части пластин с $N_0 > 1 \cdot 10^{17} \text{см}^{-3}$ компенсации проводимости не происходило и удельное сопротивление было близко к его значению в исходном материале. Характерно, что с увеличением

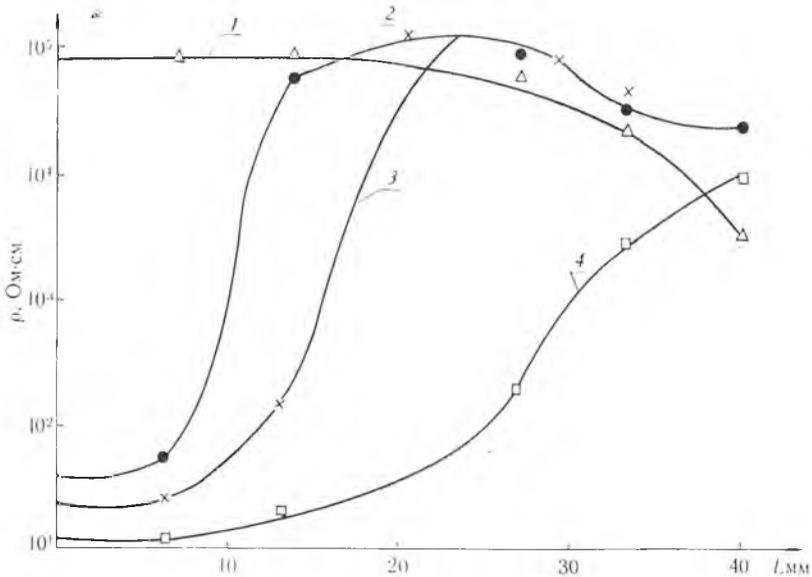


Рис. 1. Радиальное распределение удельного сопротивления по пластинам Si : (Au, O) с различной концентрацией кислорода. Номера кривых соответствуют номерам образцов в табл. 1

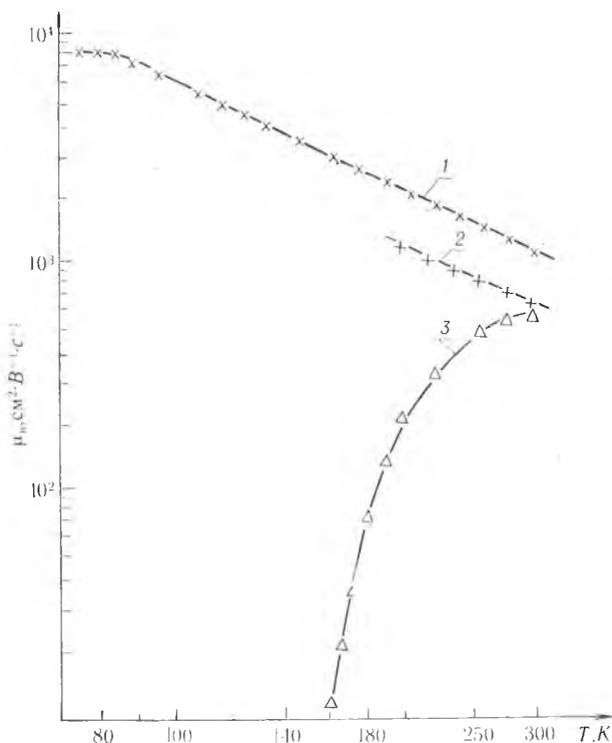


Рис. 2. Температурные зависимости холловской подвижности носителей заряда:
 1 — исходный КЭФ-20; 2 — образец № 1 (табл. 2); 3 — образец № 2 (табл. 2)

содержания кислорода в междоузельном положении снижалась степень компенсации. Это свидетельствует об уменьшении концентрации Au в электрически активном положении замещения. С другой стороны, диффузионная разгонка золота при 1200 К сопровождалась удалением кислорода из междоузельного положения. В данном случае имел место процесс преципитации кислорода, причем наиболее интенсивно он протекал в образцах, в которых компенсация проводимости Au была минимальной (см. табл. 1).

2. В периферийной краевой области пластин, имеющих вследствие испарения в процессе роста слитка пониженную концентрацию кислорода, наблюдалась компенсация p.

3. В пластинах с $N_O = 9,3 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$ компенсация проводимости происходила по всему объему пластины, причем заметного удаления кислорода из междоузельного положения не наблюдалось.

4. Согласно данным НАА, полная концентрация Au не проявляла зависимости от места локали-

Таблица 2

Параметры диффузионно-легированных образцов Si: (Au, O), прошедших предварительную высокотемпературную обработку

Номер образца	Вид обработки	$\frac{N_{\text{Au}}}{\text{см}^{-3}} \times 10^{-14}$	ρ , Ом·см
1	1150 К, 20 ч (Au)	4,2	4800
2	1375 К, 70 ч + 1150 К, 20 ч (Au)	3800	4980
3	1225 К, 20 ч (Au)	5,0	840
4	1275 К, 60 ч + 1225 К, 5 ч (Au)	2500	930
5	1475 К, 70 ч + 1150 К, 20 ч (Au)	2100	3010

Примечания: Исходная концентрация кислорода во всех образцах составляла $1,1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

зации образца в пластине, но она увеличивалась с ростом содержания кислорода (см. табл. 1).

Приведенные экспериментальные результаты позволяют сделать заключение, что в материале с высоким содержанием кислорода часть примесных атомов Au находится в электрически пассивном состоянии. Доля последних возрастала при увеличении N_o . Известно [4], что присутствие термического окисла на поверхности кремния приводит к увеличению концентрации Au у границы раздела Si—SiO₂. С другой стороны, при преципитации кислорода имеет место удаление его из междоузельного положения и образование частиц SiO₂ [5]. Не исключено, что захват последними диффундирующих атомов Au и приводит к «потере» ими электрической активности.

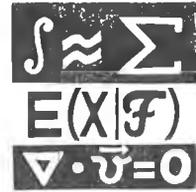
Для проверки этого предположения проводился эксперимент по диффузионному введению Au в кремний, подвергнутый ПТО. Установлено, что полная концентрация Au в таких пластинках была выше, чем в образцах, не прошедших ПТО, но ρ обоих материалов после диффузии Au были близки (табл. 2). Этот факт свидетельствует о том, что в образцах после ПТО возрастает концентрация золота в электрически пассивном положении. Анализ температурных зависимостей холловской подвижности носителей заряда (рис. 2) позволяет заключить, что концентрация макродефектов, окруженных областями пространственного заряда в кремнии, легированном Au, после ПТО значительно выше, чем в контрольных нелегированных пластинках, подвергнутых аналогичному нагреву, и в образцах Si : Au, не прошедших ПТО. Данный факт свидетельствует о том, что атомы Au преимущественно локализуются вблизи преципитатов кислорода.

Таким образом, в кислородсодержащем кремнии золото может эффективно взаимодействовать с преципитатами кислорода, что приводит к уменьшению степени компенсации проводимости материала.

Список литературы

1. Мильвидский М. Г. Полупроводниковые материалы в современной электронике. М., 1986.
2. Ильин М. А., Коварский В. Я., Орлов А. Ф. //Заводская лаборатория. 1984. Т. 50. № 1. С. 24.
3. Кучис Е. В. Методы исследования эффекта Холла. М., 1974.
4. Болотов В. В., Спиридонов В. Н., Эмексузян В. М. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1990. № 2. С. 113.
5. Капатогі А., Капатогі М. // Journ. Appl. Phys. 1979. V. 50. № 12. P. 8095.

Поступила в редакцию 15.07.91.



УДК 517.976

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, О. И. КОСТЮКОВА

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭСТИМАТОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Наблюдение с целью повышения эффективности управления используется при оптимизации динамических систем в условиях неопределенности. Эта проблема систематически исследовалась в рамках стохастических моделей [1]. С появлением современной теории оптимального управления [2, 3] стали разрабатываться другие модели неопределенности в задачах как управления [4], так и наблюдения [5]. С результатами, полученными в этой области, можно ознакомиться по [6, 7].

Изложим новый подход к проблеме построения эстиматоров (наблюдателей), которые способны в режиме реального времени вычислять оценки, необходимые регулятору для оптимизации в том же режиме линейных динамических систем. По постановке исследуемых задач и методам их решения статья примыкает к работе [8] и представляет развитие последней на ситуации позиционного наблюдения.

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой на промежутке $T(t^*) = [0, t^*]$ описывается уравнением:

$$\dot{x} = Ax \quad (x \in R^n). \quad (1)$$

Предположим, что начальное состояние $x(0) = x_0$ системы не известно. Априорная информация о нем имеет вид:

$$x_0 \in \overset{\vee}{X}_0 = \{x \in R^n : d_* \leq x \leq d^*\}.$$

С целью уменьшения указанной неопределенности будем вести наблюдение за поведением системы (1), записывая выходные сигналы измерительного устройства:

$$g = k'x + \xi, \quad (\xi \in R), \quad (2)$$

которое в каждый момент $t \in T(t^*)$ с ошибкой $\xi(t)$ измеряет проекцию состояния $x(t)$ системы (1) на направление $k \in R^n$. При этом в качестве ошибок измерения $\xi(t)$, $t \in T(t^*)$, могут реализоваться любые непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам:

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T(t^*). \quad (3)$$

Пусть устройство (2) записало сигнал $g(t)$, $t \in T(t^*)$. Содержащаяся в нем информация о начальном состоянии x_0 позволяет уменьшить исходную неопределенность и вместо априорного распределения начального состояния $\overset{\vee}{X}_0$ рассматривать апостериорное распределение $\overset{\vee}{X}_0(t^*)$, которое включает те и только те элементы $z \in \overset{\vee}{X}_0$, которые способны вместе с некоторыми допустимыми ошибками измерений $\xi(t)$, $t \in T(t)$, породить наблюдаемый сигнал $g(t)$, $t \in T(t^*)$.

При получении гарантированного результата в условиях неопределенности в линейных задачах оптимального управления используются линейные оценки множеств $\overset{\vee}{X}_0, \hat{X}_0(t^*)$:

$$\overset{\vee}{\alpha} = \max p'x, x \in \overset{\vee}{X}_0; \overset{\wedge}{\alpha}(t^*) = \max p'x, x \in \hat{X}_0(t^*). \quad (4)$$

Вычисление таких оценок назовем линейными задачами оптимального априорного и апостериорного наблюдения. Конечные алгоритмы решения задач (4) описаны в [9].

Оценки (4) получены или до начала переходного процесса в системе (1), или после его окончания. Поэтому их (и соответствующие им задачи (4)) можно назвать программными. Они пригодны для построения программных оптимальных управлений. В приложениях предпочтение отдается управлению в режиме реального времени. Управления такого типа в задачах оптимизации в условиях неопределенности требуют оценок, соответствующих имеющейся информации в каждый текущий момент. Подобные оценки и задачи оптимального наблюдения по их вычислению назовем позиционными. Устройства, решающие в режиме реального времени позиционные задачи оптимального наблюдения, называют оптимальными эстиматорами (наблюдателями).

Допустим, что эстиматор построен и проработал на промежутке $T(\tau) = [0, \tau]$. Используя записанный сигнал $g(t), t \in T(\tau)$, он в момент τ знает решение задачи

$$\overset{\wedge}{\alpha}(\tau) = p' \hat{x}(\tau) = \max p'x, x \in \hat{X}_0(\tau), \quad (5)$$

где $p = (p_j, j = \overline{1, n})$ — n -вектор; $\hat{x}(\tau)$ — апостериорная оценка начального состояния x_0 ; $\hat{X}_0(\tau)$ — апостериорное распределение начального состояния системы (1), соответствующее наблюдению $g(t), t \in T(\tau)$. (Правила построения решения задачи (5) при $\tau = 0$ приведены ниже).

В подробной записи задача (5) имеет вид:

$$p'x \rightarrow \max, \alpha_*(t) \leq a'(t)x \leq \alpha^*(t), t \in T(\tau), d_* \leq x \leq d^*, \quad (6)$$

где $\alpha_*(t) = \xi_* - g(t)$, $\alpha^*(t) = \xi^* - g(t)$, $a'(t) = (a_j(t), j \in J) = -k'F(t)$; $F(t), t \in T$, — фундаментальная матрица решений уравнения (1) ($F = AF, F(0) = E, J = \{1, 2, \dots, n\}$).

Опишем решение задачи (6) в предположении, что ее ограничения при любом $\tau \in [0, t^*]$ удовлетворяют условию Слейтера.

Обозначим

$$T_a(\tau) = T_a^+(\tau) \cup T_a^-(\tau), T_a^+(\tau) = \{t \in T(\tau): a'(t) \hat{x}(\tau) = \alpha^*(t)\}, T_a^-(\tau) = \{t \in T(\tau): a'(t) \hat{x}(\tau) = \alpha_*(t)\}, \quad (7)$$

$$J^+(\tau) = \{j \in J: \hat{x}_j(\tau) = d_j^*\}, J^-(\tau) = \{j \in J: \hat{x}_j(\tau) = d_{*j}\}.$$

Согласно [9], существуют такие числа $y(t) = y(t, \tau), t \in T_a(\tau); y(t) \geq 0, t \in T_a^+(\tau); y(t) \leq 0, t \in T_a^-(\tau)$, что для $\hat{x}(\tau)$ и оценок $\Delta_j(\tau) = \sum_{t \in T_a(\tau)} \times$

$\times a_j(t) y(t) - p_j, j \in J$, выполняются соотношения:

$$\Delta_j(\tau) \geq 0 \text{ при } j \in J^-(\tau); \Delta_j(\tau) \leq 0 \text{ при } j \in J^+(\tau)E; \quad (8)$$

$$\Delta_j(\tau) = 0, j \in J \setminus (J^+(\tau) \cup J^-(\tau)).$$

Вектор $y_\tau = (y(t), t \in T_a(\tau))$ назовем оптимальным двойственным планом задачи (6). Пару $\{\hat{x}(\tau), y_\tau\}$ из оптимальных прямого и двойственного планов будем называть решением задачи (6). Решение задачи (6) называется невырожденным, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_j(t), t \in T_a(\tau); \dot{a}_j(t), t \in T_a(\tau) \setminus \{0, \tau\} \\ j \in J_0(\tau) \end{pmatrix} = |J_0(\tau)|,$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_j(t), t \in T_a(\tau) \\ j \in J_0(\tau) \end{pmatrix} = |T_a(\tau)|; y(t) \neq 0, t \in T_a(\tau);$$

$$d_{*j} < x_j(\tau) < d_j^*, j \in J_0(\tau).$$

Здесь $J_0(\tau) = \{j \in J : \Delta_j(\tau) = 0\}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\{0\} \in T_a(\tau)$ при $\tau > 0$.

Пусть $\{\hat{x}(\tau_0), y_{\tau_0}\}$, $y_{\tau_0} = \{y(t), t \in T_a(\tau_0)\}$ — невырожденное решение задачи (6) при $\tau = \tau_0$. Укажем алгоритм работы эстиматора, который в режиме реального времени строит решение $\{\hat{x}(\tau), y_\tau\}$ задачи (6) для $\tau \in]\tau_0, t^*]$ в предположении, что функция $\hat{x}(\tau)$ непрерывна на отрезке $[\tau_0, t^*]$.

Возможны случаи: I. $\tau_0 \in T_a(\tau_0)$; II. $\tau_0 \in T_a(\tau_0)$. Рассмотрим случай I. Пусть для определенности $a'(\tau_0)\hat{x}(\tau_0) = \alpha_{*}(\tau_0)$. Предположим, что $\dot{a}'(\tau_0)\hat{x}(\tau_0) \neq \dot{\alpha}_{*}(\tau_0)$. Положим $q = |T_a(\tau_0)|$, $J_0 = J_0(\tau_0)$, $T_a(\tau_0) = \{t_i(\tau_0), i \in I_0\}$,

$$I_0 = \{1, \dots, q\}, I_0^+ = \{i \in I_0 : t_i(\tau_0) \in T_a^+(\tau_0)\},$$

$$I_0^- = I_0 \setminus I_0^+; J^+ = (J \setminus J_0) \cap J^+(\tau_0), J^- = (J \setminus J_0) \cap J^-(\tau_0).$$

Из (7), (8) следует, что при $\tau \in T^+(\tau_0)$ совокупность элементов

$$\hat{x}(\tau), y_\tau = (y(t), t \in T_a(\tau)), T_a(\tau) = \{t_i(\tau), i \in I_0\}, \quad (9)$$

состоящая из решения задачи (6) и активных моментов, находится из уравнений:

$$\hat{x}_j(\tau) = d_j^*, j \in J^-; \hat{x}_j(\tau) = d_{*j}, j \in J^+;$$

$$a'(t_i(\tau))\hat{x}(\tau) = \alpha_i(t_i(\tau)), i = \overline{1, q};$$

$$a'(t_i(\tau))\hat{x}(\tau) = \dot{\alpha}_i(t_i(\tau)), i = \overline{1, q-1}; t_q(\tau) = \tau; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^q a_j(t_i(\tau)) y(t_i(\tau)) - p_j = 0, j \in J_0.$$

Здесь $T^+(\tau)$ — правосторонняя окрестность точки τ , $\alpha_i(t) = \alpha^*(t)$ при $i \in I_0^+$; $\alpha_i(t) = \alpha_*(t)$ при $i \in I_0^-$. Ясно, что уравнения (10) полностью определяются совокупностью $q, J_0, J^+, J^-, I_0^+, I_0^-$, которую назовем структурой уравнений (10).

При решении уравнений (10) отрезок $[\tau_0, t^*]$ разбивается на части с постоянной структурой.

Момент $\bar{\tau}$ изменения структуры уравнений (10) характеризуется одним из следующих свойств: 1) при некотором $t_0 \in [0, \bar{\tau}] \setminus \{t_i(\bar{\tau}), i = \overline{1, q}\}$ имеет место равенство $a'(t_0)\hat{x}(\bar{\tau}) = \alpha_{*}(t_0)$ (либо $a'(t_0)\hat{x}(\bar{\tau}) = \alpha^*(t_0)$); 2) при некотором $j_0 \in J_0$ имеет место равенство $\hat{x}_{j_0}(\bar{\tau}) = d_{*j_0}$ (либо $\hat{x}_{j_0}(\bar{\tau}) = d_{j_0}^*$); 3) при некотором $i_0 \in I_0 \setminus \{q\}$ имеет место равенство $y(t_{i_0}(\bar{\tau})) = 0$; 4) при некотором $j_0 \in J \setminus J_0$ имеет место равенство $\Delta_{j_0}(\bar{\tau}) = 0$; 5) имеет место равенство $\dot{a}'(\bar{\tau})\hat{x}(\bar{\tau}) = \dot{\alpha}_q(\bar{\tau})$.

Исследуется общий случай и поэтому как исключительные не рассматриваются ситуации, когда а) одновременно реализуются два и более из указанных выше свойств 1)–4); б) какое-то из свойств 1)–4) реализуется на нескольких индексах $j \in J$ или нескольких моментах $t \in [0, \bar{\tau}]$; в) при некотором $t \in [0, \bar{\tau}]$ имеют место равенства $a^{(\nu)}(t)\hat{x}(\tau) = \alpha_{*}^{(\nu)}(t)$ (либо $a^{(\nu)}(t)\hat{x}(\tau) = \alpha^*(t)$), $\nu = \overline{0, 2}$ (к этой ситуации сводится и случай, когда имеет место слипание двух активных моментов, т. е. $t_i(\bar{\tau}) = t_j(\bar{\tau}), i \neq j, i, j \in I_0$).

Следуя [10], можно сформулировать правила изменения структуры в ситуациях 1) — 4).

Рассмотрим случай II. Для $\tau \in T^+(\tau_0)$ элементы (9) имеют вид:

$$\bar{x}(\tau) = \bar{x}(\tau_0), y_\tau = y_{\tau_0} = (y(t), t \in T_a(\tau_0)), T_a(\tau) = T_a(\tau_0). \quad (11)$$

Решение задачи (6) строим по правилу (11) до тех пор, пока при некотором $\bar{\tau} \in [\tau_0, t^*]$ не выполняются соотношения $a'(\bar{\tau})\dot{x}(\bar{\tau}) = a_*(\bar{\tau})$, $\dot{a}'(\bar{\tau})\dot{x}(\bar{\tau}) \neq \dot{a}_*(\bar{\tau})$, либо $a'(\bar{\tau})\dot{x}(\bar{\tau}) = a^*(\bar{\tau})$, $\dot{a}'(\bar{\tau})\dot{x}(\bar{\tau}) \neq \dot{a}^*(\bar{\tau})$. Для $\tau \in T^+(\bar{\tau})$ решение задачи (6) строим по правилам случая I.

Вернемся к уравнениям (10). Можно предложить следующий численный метод их решения на участках постоянства структуры. Для уравнений (10) матрица Якоби имеет вид: $G(\dot{x}(\tau), t_i(\tau), y(t_i(\tau)))$, $i = \overline{1, q}$, где

$$G(x, t_i, y_i, i = \overline{1, q}) = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & 0 \\ A_2 & D_2 & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 & A_1' \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a_j(t_i), & j \in J_0 \\ i = \overline{1, q} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \dot{a}_j(t_i), & j \in J_0 \\ i = \overline{1, q-1} \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} \text{diag}(\dot{f}(t_i, x), & i = \overline{1, q-1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in R^{q \times (q-1)},$$

$$D_2 = \text{diag}(\dot{f}(t_i, x), i = \overline{1, q-1}), \bar{A}_2 = A_2' \text{diag}(y_i, i = \overline{1, q-1}),$$

$$\dot{f}(t, x) = a'(t)x - a_i(t); \dot{f}'(t, x) = \partial f(t, x)/\partial t, \ddot{f}(t, x) = \partial^2 f(t, x)/\partial t^2.$$

Легко показать, что $\det G(\bar{x}(\tau_0), t_i(\tau_0), y(t_i(\tau_0)))$, $i = \overline{1, q}) \neq 0$. Следовательно, для $\tau \in T^+(\bar{\tau})$ существует единственное непрерывное решение (9) системы (10). Опишем численный метод построения этого решения.

Пусть известно решение (9) в узлах сетки $\tau = \tau_0 + sh$, $s = 0, \nu - 1$, где $h > 0$ — шаг сетки (параметр метода). Для вычисления элементов (9)

в узле $\tau = \tau_0 + \nu h$ построим векторы: $z^l = (x^l, t_i^l, y_i^l, i = \overline{1, q})$, $l = \overline{1, m}$;

$$t_q^l = \tau, x_j^l = d_j^*, j \in J^+; x_j^l = d_{*j}, j \in J^-, l = \overline{1, m};$$

$$t_i^l = t_i(\tau - h), i = \overline{1, q-1}; y_i^l = y(t_i(\tau - h)), i = \overline{1, q};$$

$$x_j^l = \hat{x}_j(\tau - h), j \in J_0;$$

$$(x_j^{l+1}, j \in J_0; t_i^{l+1}, i = \overline{1, q-1}; y_i^{l+1}, i = \overline{1, q}) = (x_j^l, j \in J_0; t_i^l,$$

$$i = \overline{1, q-1}; y_i^l, i = \overline{1, q}) - G^{-1}(x^l, t_i^l, y_i^l, i = \overline{1, q})(f(t_i^l, x^l), i = \overline{1, q};$$

$$\dot{f}(t_i^l, x^l), i = \overline{1, q-1}, \sum_{i=1}^q a_j(t_i^l) y_i^l - p_j)'$$

Положим

$$\hat{x}(\tau) = (x_j^m, j \in J), y_\tau = (y(t_i(\tau)) - y_i^m, i = \overline{1, q}),$$

$$T_a(\tau) = \{t_i(\tau) = t_i^m, i = \overline{1, q}\}.$$

Опишем правила построения решения задачи (6) (т. е. элементов (9)) для $\tau = 0$.

Построим вектор $x^0 = (x_j^0, j \in J)$; $x_j^0 = d_{*j}$, если $p_j < 0$, $x_j^0 = d_j^*$, если $p_j \geq 0$, $j \in J$. Если $g(0) - k'x^0 \in [\xi_*, \xi^*]$, то при $\tau = 0$ элементы (9) имеют вид $\hat{x}(0) = x^0$, $T_a(0) = \emptyset$ ($q = 0$). Предположим, что $g(0) - k'x^0 \notin [\xi_*, \xi^*]$. Положим $\nu = 1$, если $g(0) - k'(x^0) > \xi^*$; $\nu = -1$, если $g(0) - k'x^0 < \xi_*$; $\sigma_j = -p_j/\nu k_j$, если $p_j \nu k_j < 0$ либо $p_j = 0$, $\nu k_j < 0$; $\sigma_j = \infty$ в остальных случаях, $j \in J$. Числа $\sigma_j < \infty$, $j \in J$, упорядочим по возрастанию: $\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2} \leq \dots \leq \sigma_{j_s}$ ($s \leq n$). Найдем числа α_i , $i = \overline{1, s}$, из рекуррентных соотношений:

$$\alpha_0 = |g(0) - k'x^0 - \bar{\xi}|, \alpha_i = \alpha_{i-1} - |k_{j_i}|(d_{j_i}^* - d_{*j_i}), i = \overline{1, s},$$

где $\bar{\xi} = \xi^*$ при $v = 1$, $\bar{\xi} = \xi_*$ при $v = -1$. Пусть $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ — такой индекс, что $\alpha_{i_0-1} > 0$, $\alpha_{i_0} \leq 0$. Положим $\hat{x}_j(0) = x_j^0$, $j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_{i_0}\}$;

$$\hat{x}_j(0) = x_j^0 + (d_j^* - d_{*j}) \text{sign } k_j v, j \in \{j_1, \dots, j_{i_0-1}\},$$

$$\hat{x}_{j_{i_0}}(0) = \left(g(0) - \bar{\xi} - \sum_{j \in J \setminus j_{i_0}} k_j \hat{x}_j(0) \right) / k_{j_{i_0}}.$$

Элементы (9) при $\tau = 0$ имеют вид $\hat{x}(0)$, $T_a(0) = \{0\}$, $y_0 = (y(0) = v \sigma_{j_{i_0}})$.

Список литературы

1. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. М., 1980. С. 407.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
3. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
4. Witsenhausen H. S. // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1.
5. Schverre F. C. // Ibid.
6. Черноусько Ф. Л. Оценка фазовых состояний динамических систем. М., 1988. С. 320.
7. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 777.
9. Костюкова О. И. Исследование линейных экстремальных задач с непрерывным ограничением. Мн., 1988 / Препринт АН БССР. Ин-т математики. № 26336. 24 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.

Поступила в редакцию 11.11.91.

УДК 517.518

В. И. КОРЗЮК

ОБ ОПЕРАТОРАХ ОСРЕДНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ. I

Операция осреднения функций играет важную роль в различных вопросах. Операторы осреднения позволяют строить последовательность гладких функций, стремящихся в определенном смысле к заданной функции (см. [1—13] и др.), для разбиения единицы [13, 14], для интегрального представления [1, 15], для продолжения функций [13, 16—28]. В данной работе рассматриваются операторы осреднения с переменным шагом [6, 29]. Здесь для коммутаторов указанных операторов с дифференциальными операторами получены оценки, а также доказываются другие свойства осреднений с целью дальнейшего использования их при доказательстве разрешимости граничных задач.

Пусть R^n — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, Ω — открытое ограниченное связное множество в R^n с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, представляющее собой достаточно простую геометрическую структуру. Область Ω разобьем на подобласти G_m ($m = -1, 0, 1, \dots$), как это сделано в работе [6]. Из [6] или [30] будем использовать лемму о разбиении единицы с помощью функций $\psi_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) в следующем варианте.

Лемма 1. Существует последовательность неотрицательных функций $\psi_m(x) \in C^\infty(R^n)$, $m = 0, 1, \dots$, таких, что:

$$1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega; \end{cases}$$

- 2) $\Omega = \bigcup_{m=0}^{\infty} \text{supp } \psi_m$, причем кратность покрытия множествами $\text{supp } \psi_m$ не превышает двух;
 3) $\text{supp } \psi_m \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}$, $m = 0, 1, \dots$;
 4) для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c_\alpha 2^{2m|\alpha|},$$

c_α зависит только от α .

Здесь $C^\infty(R^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых в R^n функций, $\text{supp } \psi_m$ — носитель функций ψ_m и $\text{supp } \psi_m = \overline{\{x \mid \psi_m(x) \neq 0\}}$ (замыкание), α_k ($k = 1, \dots, n$) — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$.

Основным здесь гильбертовым пространством будет пространство квадратично суммируемых функций $L_2(\Omega)$ с соответствующими обозначениями значений скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$ и нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Относительно $L_2(\Omega)$ сформулируем леммы о непрерывности [13, С. 45].

Лемма 2. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции $u \in L_2(\Omega)$ существует такое число $\delta(u)$, что $\|u(x+y) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$ для любых $|y| \leq \delta(u)$. Здесь $u \in L_2(\Omega)$ считаем определенной на всем R^n , полагая $u = 0$ при $x \notin \Omega$.

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in L_2(\Omega)$ можно указать $\delta(u) > 0$, что для произвольного измеримого множества $E \subset \Omega$, для которого $\text{mes } E < \delta(u)$, имеет место неравенство $\left| \int_E u(x) dx \right| < \varepsilon$.

Лемма 4. Для любого $u \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(u)$, что

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)} \quad (1)$$

для любых $|y| \leq \delta(u)$.

Доказательство. Как только $u \in L_2(\Omega)$, то либо $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 0$, либо $\|u\|_{L_2(\Omega)} \neq 0$. Если $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 0$, то и $u = 0$ и неравенство (1) очевидно. В случае $\|u\|_{L_2(\Omega)} \neq 0$ для числа $\varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)}$ утверждение леммы 4 вытекает из леммы 2.

Рассмотрим осреднения В. И. Буренкова [6, 29], сохраняющие граничные условия,

$$J_k u(x) = J_k(\psi, \omega) u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) J_{\delta_{mk}} u(x), \quad (2)$$

$$J_k^* u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{\delta_{mk}}(\psi_m u)(x), \quad (3)$$

где $J_{\delta_{mk}} u(x) = \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) u(y) dy$ — операторы осреднения Соболева [1]; $\omega(x) \in C^\infty(R^n)$, носитель $\text{supp } \omega(x) \subset \{x \mid |x| \leq 1\}$, $\omega(x) \geq 0$, $\omega(x)$ — четная функция по каждому независимому переменному x_j ($j = 1, \dots, n$), $\int_{R^n} \omega(x) dx = 1$; $\delta_{mk} \leq 2^{-m-4}$, $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$ выбираются в зависимости

от функции u (см. лемму 2), $\delta_{mk} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Характерная особенность операторов осреднения (2) и (3) та, что они сохраняют граничные условия осредняющих функций, если последние имели смысл на границе. Кроме того, для (2) и (3) характерны свойства операторов осреднения, которые будут кратко сформулированы в виде свойств. Доказательство основано на неравенстве Коши — Буняковского [31, С. 41] и других свойствах интеграла Лебега.

J-1. Для $u, v \in L_2(\Omega)$ справедливо равенство

$$(J_k u, v)_{L_2(\Omega)} = (u, J_k^* v)_{L_2(\Omega)}.$$

J-2. Для любого $u \in L_2(\Omega)$ $J_k u, J_k^* u \in C^\infty(\Omega)$.

J-3. Справедливы неравенства

$$\|J_k u\|_{L_2(\Omega)} < c \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|J_k^* u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

где $c > 0$ не зависит от $u, u \in L_2(\Omega)$.

J-4. Для $u \in L_2(\Omega)$ $\|J_k u - u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Обозначим через $H^l(\Omega)$ пространство Соболева квадратично суммируемых вместе со всеми до порядка l включительно квадратично суммируемыми обобщенными производными. Для $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$ рассмотрим коммутатор J_k с оператором дифференцирования $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ (α — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$), т. е.

$$\begin{aligned} [D^\alpha, J_k] u &= D^\alpha J_k(\psi, \omega) u - J_k(\psi, \omega) D^\alpha u = \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \neq 0}} \alpha_\beta J_k(D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u, \quad (4) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) D^{\alpha-\beta} u(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь под неравенством $\beta \leq \alpha$ мультииндексов β и α понимаются неравенства $\beta_j \leq \alpha_j$ для всех $j = 1, \dots, n$; α_β — коэффициенты формулы Лейбница частной производной D^α произведения двух функций.

Отметим, что последнее выражение в (4) имеет смысл для $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$. В дальнейшем под коммутатором $[D^\alpha, J_k]u$ будем понимать это выражение. Обозначим через N множество натуральных чисел.

J-5. Для любого $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$ и любого $k \in N$ можно так выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|[D^\alpha, J_k]u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}. \quad (5)$$

Для доказательства данного утверждения достаточно провести оценку в $L_2(\Omega)$ для $J_k(D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u$. В силу того, что при $\beta \neq 0$

$\sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) = 0$, выражение это можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} &J_k(D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u(x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D^\beta \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)] dy. \quad (6) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|J_k(D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|D^\beta \psi_m\|_{L_\infty} \times \\ &\times \left\| \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)] dy \right\|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})}. \quad (7) \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует оценка

$$\|D^\beta \psi_m\|_{L_\infty} \leq c_\beta 2^{2m|\beta|}. \quad (8)$$

В силу леммы 4

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [D^{\alpha-\beta} u(y) - D^{\alpha-\beta} u(x)] dy \right\|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})} \leq \\ &\leq \varepsilon_{mk} \|D^{\alpha-\beta} u\|_{L_2(G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1})}. \end{aligned}$$

Таким образом, при соответствующем выборе δ_{mk} в силу (8) — (9) и неравенства Коши — Буняковского (7) можно сделать сколь угодно малым через оценки в $H^{|\alpha|-1}(\Omega)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\|J_h(D^\beta \psi, \omega) D^{\alpha-\beta} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{k} \|u\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}. \quad (10)$$

Следовательно, соотношение (6) и неравенства (10) дают оценку коммутатора вида (5).

Л-6. (Лемма Фридрикса). Для любых $u \in L_2(\Omega)$, $a \in C^1(\bar{\Omega})$ и $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} [a J_h u - J_h (a u)] \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{L_2(\Omega)}. \quad (11)$$

Доказательство. Распишем подынтегральное выражение левой части (11) в удобном виде для проведения оценок в $L_2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} [a J_h u - J_h (a u)](x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) [a(x) - a(y)] u(y) dx + \right. \\ &+ \Psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) \left[\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial a(y)}{\partial y_i} \right] u(y) dy + \\ &+ \Psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) (a(y) - a(x)) \right] u(y) dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь было использовано также и равенство:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) (a(y) - a(x)) \right] dy = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Используя условие $a \in C^1(\bar{\Omega})$, неравенство Коши — Буняковского и лемму 4 для оценки в $L_2(\Omega)$ выражения (12), получим доказываемое неравенство (11) при соответствующем выборе $\delta_{mk}(u)$.

Утверждения **Л-2 — Л-6** справедливы и для оператора J_h^* .

Список литературы

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950; Новосибирск, 1962.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
3. Ильин В. П. // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 64. С. 61.
4. Gagliardo E. // Ricerche mat. 1958. V. 7. № 1. Рус. пер.: Сб. переводов. Математика. 1961. Т. 5. № 4. С. 87.
5. Казарян Г. Г. // Мат. заметки. 1967. Т. 2. № 1. С. 45.
6. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 39.
7. Буренков В. И. // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. 1974. Т. 131. С. 51.
8. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 1. С. 12.
9. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 117. С. 62.
10. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 2. С. 259.
11. Burenkov V. I. // Nonlinear analysis, function spaces and applications. Leipzig, 1982. V. 2. P. 5. (Teubner — Texte Math., Bd. 49).
12. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1987. Т. 180. С. 68.
13. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
14. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 24.
15. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
16. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 140. С. 27.
17. Никольский С. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 3. С. 409.
18. Бабич В. М. // УМН. 1953. Т. 8. № 2. С. 111.
19. Calderon A. P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 368.
20. Бесов О. В. // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 89. С. 517.
21. Ильин В. П. // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 7. С. 573.
22. Бесов О. В., Ильин В. П. // Мат. сб. 1968. Т. 75 (117). Вып. 4. С. 483.
23. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, 1970. Рус. пер.: Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.
24. Буренков В. И. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 269.
25. Буренков В. И., Файн Б. Л. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 52.
26. Буренков В. И. // Там же. 1976. Т. 140. С. 27.

27. Успенский С. В. // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7. № 2. С. 409.
 28. Буренков В. И., Гольдман М. Л. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 31.
 29. Deny J., Lions J. L. // Ann. Inst. Fourier. 1953—54. V. 5. P. 305.
 30. Буренков В. И. // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 24.
 31. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 10.12.91.

УДК 532.546

В. В. ВИДЯКИН, И. Р. ХАРРАЗОВА

К РЕШЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Рассматривается плоская задача стационарной фильтрации вязкопластической жидкости в однородном недеформируемом пористом пласте по следующему закону с начальным градиентом [1]:

$$\mathbf{u} = 0, \quad |\nabla p| < G; \quad \mathbf{u} = -(k/\mu)\nabla p, \quad |\nabla p| \geq G. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — скорость фильтрации; ∇p — градиент давления; k — коэффициент проницаемости; μ — вязкость; G — начальный градиент. Исследуемое течение обладает рядом качественных особенностей, в частности, в областях, где $|\nabla p| < G$, образуются застойные зоны. Предположим, что пласт вскрыт системой m нагнетательных и l добывающих скважин, расположенных таким образом, что существует только одна застойная зона, занимающая внешность некоторого замкнутого кусочно-гладкого контура $\partial\Omega$.

Расчет предельно-равновесной конфигурации границы застойной зоны сводится к следующей краевой задаче для отыскания давления p и формы контура $\partial\Omega$ [2]:

$$\Delta p = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\partial p / \partial n = 0, \quad |\partial p / \partial s| = G \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$\lim_{\gamma_i \rightarrow 0} \int_{\gamma_i} (k/\mu) (\partial p / \partial n_i) d\sigma = Q_i, \quad (4)$$

где n, s — внутренняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; γ_i — контур, охватывающий i -ю скважину с дебитом Q_i , расположенную в точке (x_i, y_i) ($i = 1, m + l$); n_i — внутренняя нормаль к γ_i , x, y — декартовы координаты в плоскости течения. Заметим, что сформулированная краевая задача допускает другую физическую интерпретацию, соответствующую задаче об определении предельно-равновесных конфигураций целиков остаточной вязкопластической нефти, возникающих при вытеснении ее водой. Ее решение в точной постановке вызывает большие трудности и может быть получено только в частных случаях для специальных законов изменения начального градиента [1]. В настоящей работе приводится метод, позволяющий численно исследовать (2) — (4) для широкого класса зависимостей $G(x, y)$.

По аналогии с [3] распределение давления будем искать в виде суперпозиции потенциала внешнего поля $\varphi(x, y)$ и потенциала простого слоя с плотностью $\nu(\sigma)$, сосредоточенного на контуре $\partial\Omega$:

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + \int_{\partial\Omega} \nu(\sigma) \ln R^{-1} d\sigma,$$

где

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m+l} \frac{Q_i \mu}{4\pi k} \ln [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

σ — дуговая абсцисса точки $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$.

Граничные условия (3), (4) приводят к следующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений для отыскания плотности $v(\sigma)$ и формы контура $\partial\Omega$:

$$-\pi v(\vartheta) + \int_0^{2\pi} v(\alpha) N[g(\alpha), g(\vartheta)] L(\alpha) d\alpha + \Phi[g(\vartheta)] = 0, \quad (5)$$

$$\left| \int_0^{2\pi} v(\alpha) K[g(\alpha), g(\vartheta)] L(\alpha) d\alpha + \Psi[g(\alpha)] \right| = G[g(\vartheta), \vartheta] L(\vartheta), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} N[g(\alpha), g(\vartheta)] &= [g^2(\vartheta) - g(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) - g'(\vartheta)c_2(\alpha, \vartheta)]\kappa^{-1}[g(\alpha), g(\vartheta)], \\ K[g(\alpha), g(\vartheta)] &= [g(\vartheta)g'(\vartheta) - g'(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) + g(\vartheta)c_2(\alpha, \vartheta)]\kappa^{-1}[g(\alpha), g(\vartheta)], \\ c_1(\alpha, \vartheta) &= g(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha), \quad c_2(\alpha, \vartheta) = g(\alpha)\sin(\vartheta - \alpha), \\ \kappa[g(\alpha), g(\vartheta)] &= g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)c_1(\alpha, \vartheta) + g^2(\alpha), \quad L^2(\vartheta) = [g^2(\vartheta) + g'^2(\vartheta)], \\ \Phi[g(\vartheta)] &= \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g^2(\vartheta) - g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) - g'(\vartheta)g_i \sin(\vartheta - \alpha_i)}{g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g_i^2}, \\ \Psi[g(\vartheta)] &= \frac{\mu}{2\pi k} \sum_{i=1}^{m+l} Q_i \frac{g(\vartheta)g'(\vartheta) - g'(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g(\vartheta)g_i \sin(\vartheta - \alpha_i)}{g^2(\vartheta) - 2g(\vartheta)g_i \cos(\vartheta - \alpha_i) + g_i^2}, \\ x_i &= g_i \cos \alpha_i, \quad y_i = g_i \sin \alpha_i, \quad \partial\Omega = \{r = g(\vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}, \end{aligned}$$

r, ϑ — полярные координаты в плоскости течения.

В качестве примера рассмотрим решение задачи о границе застойной зоны для течения, создаваемого источником и стоком равной интенсивности Q , расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга в безграничном пласте. Система (5), (6) решалась численно. Возникающие системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $g(\vartheta)$ и $v(\vartheta)$ в узлах разностной сетки рассчитывались обобщенным методом Стеффенсена [4]. На рис. 1 в безразмерных координатах $X = x/L, Y = y/L$ ($L^2 = Q\mu a/G_0\pi k$) изображены границы застойных зон

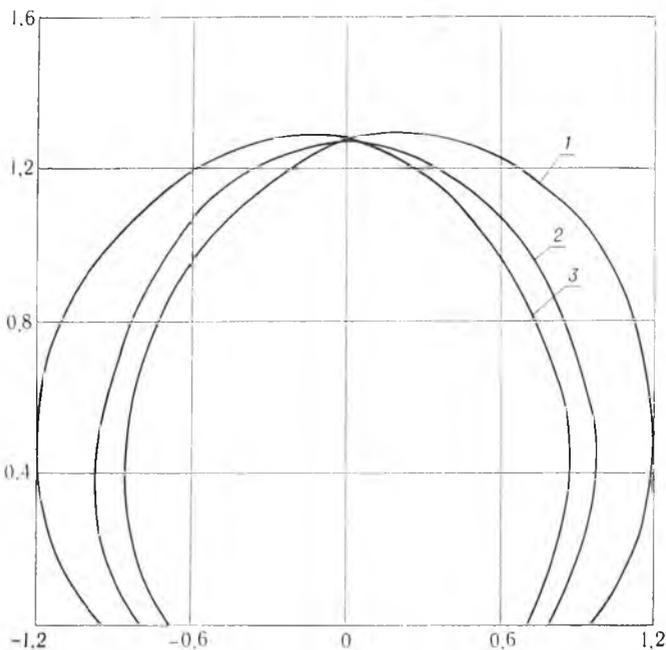


Рис. 1

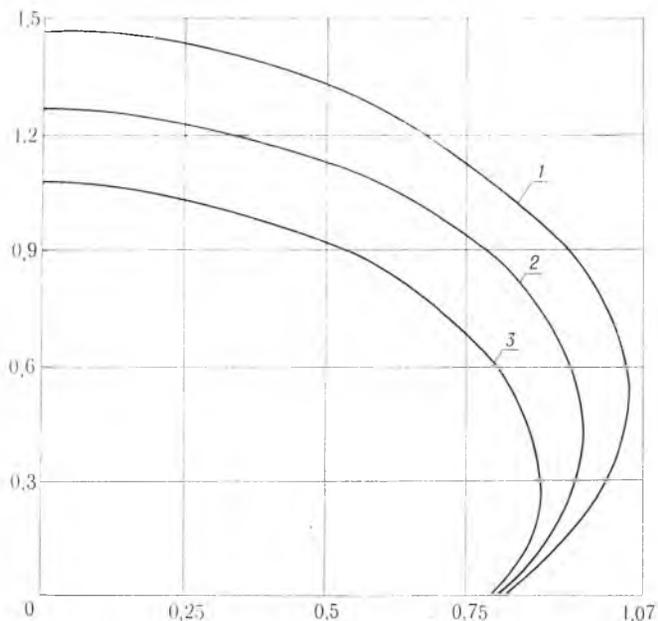


Рис. 2

для случая $G = G_0(1 + \gamma x)$, $aG_0\sigma k / (Q\mu) = 0,1$. Кривые 1—3 соответствуют значениям $\gamma L = -0,4; 0; 0,4$. На рис. 2 представлены аналогичные кривые для зависимости $G = G_0(1 + \gamma|y|)$, $G_0 = \text{const}$.

Полученные численные решения системы (5), (6) тестировались на известных аналитических. На рис. 3 построены границы застойных зон для закона $G = G_0 \exp(\gamma x)$. Сплошные линии отвечают точному решению задачи [1] при $aG_0\sigma k / (Q\mu) = 0,1$; $\gamma L = -0,5; 0; 0,5$ (кривые 1—3). Пунктирные линии (1'—3') иллюстрируют соответствующие численные решения системы (5), (6). Сопоставление результатов показывает их хорошее совпадение.

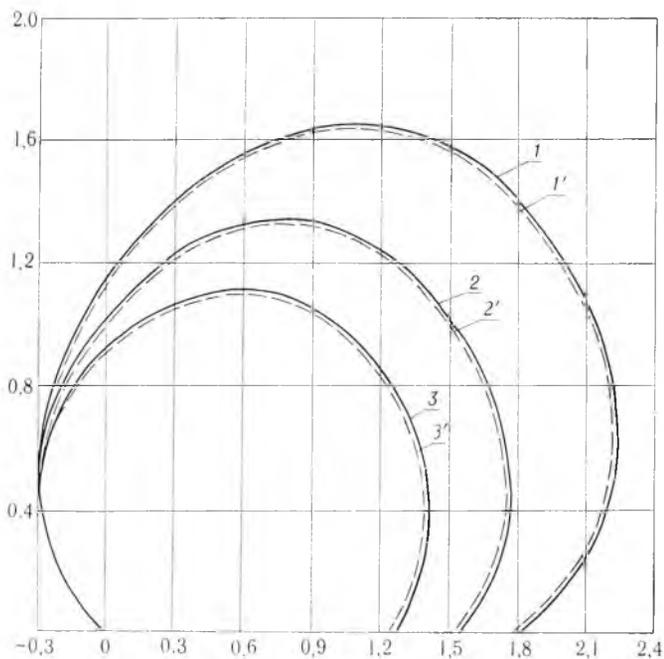


Рис. 3

И заключение отметим возможность обобщения по аналогии с [5] изложенной методики получения численных решений задач с переменным начальным градиентом на случай неоднородной пористой среды.

Список литературы

1. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань, 1978.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., 1976.
3. Видякин В. В., Ентов В. М., Таранчук В. Б. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 182.
4. Ортега Дж., Рейнтболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
5. Видякин В. В., Таранчук В. Б. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 12. С. 1072.

Поступила в редакцию 11.11.90.

УДК 517.948.32:517.544

С. Л. ШТИН

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ПЯТИМЕРНОГО ВЕКТОРА

Рассмотрим векторную задачу сопряжения: найти кусочно-голоморфный вектор $F(z) = (F_1(z), \dots, F_5(z))^t$ (здесь t означает транспонирование) с линией скачков $L = L_1 \cup L_2$, где $L_1 = [-1, 0]$, $L_2 = [0, 1]$, ориентированной в направлении от начала координат, который ограничен в окрестности узлов $z = -1, 0, 1$ и имеет на бесконечности полюс порядка $\leq s$ при условии сопряжения $F^+(t) = G(t)F^-(t)$, где $G(t)$ — кусочно-постоянная матрица

$$G(t) = \begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_1, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Общая теория подобных задач приводится в [3]. В настоящей работе рассматривается задача частного вида с кусочно-подстановочной матрицей в качестве коэффициента Римана.

Необходимые для дальнейшего свойства таких матриц рассмотрены в [1]. Для матриц σ_1 и σ_2 существует такое преобразование подобия, которое разлагает их в прямую сумму мономатриц порядков 1 и 4. Это преобразование осуществляется посредством матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^3 & \lambda & \lambda^4 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \lambda & \lambda^3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \exp(2\pi i/5).$$

Перейдем к новому неизвестному вектору $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_5(z))^t$ с помощью линейной замены неизвестных $\Phi(z) = S^{-1}F(z)$.

Граничное условие запишется в виде:

$$\Phi^+(t) = S^{-1}F^+(t) = [S^{-1}G(t)S]S^{-1}F^-(t) = G_1(t)\Phi^-(t),$$

где $G_1(t) = S^{-1}G(t)S$.

Выполнив умножение матриц, получим:

$$G_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}, & t \in L_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим риманову поверхность $W^4 = z(1-z)^3$, состоящую из четырех сфер Римана с разрезом по отрезку L_2 и склеенных между собой согласно подстановке (2, 4, 5, 3), представляемой матрицей, заданной на L_2 . На этой поверхности возникает скалярная задача сопряжения, эквивалентная данной векторной задаче: найти кусочно-голоморфную функцию $\Psi(z, W)$ на римановой поверхности, ограниченную в окрестности точек с проекциями $z = -1, 0, 1$, имеющую над точкой ∞ полюсы порядка $\leq s$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_k^+(t) &= \lambda^k \Psi_k^-(t) \quad \text{при } t \in (-1, 0), \\ k &= 1, 2, 3, 4 \\ \begin{cases} \Psi_1^-(t) &= \lambda^3 \Psi_3^-(t) \\ \Psi_2^+(t) &= \lambda \Psi_1^-(t) \\ \Psi_3^-(t) &= \lambda^4 \Psi_4^-(t) \\ \Psi_4^+(t) &= \lambda^2 \Psi_2^-(t) \end{cases} \quad \text{при } t \in (0, 1). \end{aligned}$$

Здесь через $\Psi_i(z) = \Phi_i(z)$ обозначены ограничения $\Psi(z, W)$ на i -м листе поверхности, $i = 1, 2, 3, 4$. Нумерация листов поверхности выбирается так, что при $t \in (0, 1)$

$$(*) \quad \begin{aligned} W_1^+(t) &= \sqrt[4]{t(1-t)^3} \in \mathbb{R} > 0, \\ W_2^+(t) &= iW_1^+(t), \\ W_3^+(t) &= -iW_1^+(t), \\ W_4^+(t) &= -W_1^+(t). \end{aligned}$$

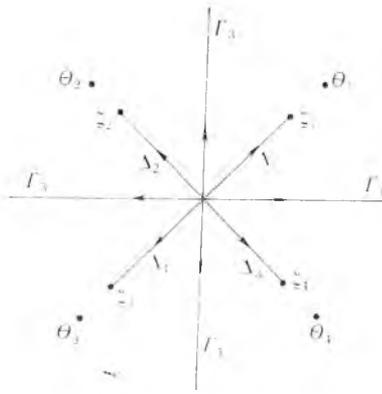
Риманова поверхность $W^4 = z(1-z)^3$ допускает рациональную параметризацию

$$\begin{cases} z = \frac{\zeta^4}{\zeta^4 + 1}, \\ W = \frac{\zeta}{\zeta^4 + 1}, \end{cases}$$

с помощью которой эту поверхность можно конформно отобразить на плоскость ζ .

Найдем образ контура $L = L_1 \cup L_2$ в плоскости ζ :

$$\begin{aligned} z = 0 &\mapsto \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0, \\ z = 1 &\mapsto \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \infty, \\ z = -1 &\mapsto \zeta_k = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi k}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ z = \infty &\mapsto \theta_k = \exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi k}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$



При такой параметризации задача сопряжения на римановой поверхности переходит в скалярную задачу сопряжения на плоскости ζ с контуром скачков $K = (\bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i) \cup (\bigcup_{i=1}^4 \Delta_i)$, показанным на рисунке.

Точнее, требуется определить кусочно-голоморфную функцию $\chi(\zeta) = \Psi\left(\frac{\zeta^4}{1+\zeta^4}, \frac{\zeta}{1+\zeta^4}\right)$, ограниченную везде, кроме окрестностей точек Θ_k , где она имеет полюсы порядка s и удовлетворяет следующим условиям сопряжения:

$$\begin{cases} \chi^+(t) = \lambda^i \chi^-(t), & t \in \Delta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \chi^+(t) = \lambda^3 \chi^-(t), & t \in \Gamma_1, \\ \chi^+(t) = \lambda \chi^-(t), & t \in \Gamma_2, \\ \chi^+(t) = \lambda^4 \chi^-(t), & t \in \Gamma_3, \\ \chi^+(t) = \lambda^2 \chi^-(t), & t \in \Gamma_4. \end{cases}$$

Если ввести обозначение

$$H(t) = \begin{cases} \lambda^3, & t \in \Gamma_1; \lambda, & t \in \Delta_1 \\ \lambda, & t \in \Gamma_2; \lambda^2, & t \in \Delta_2 \\ \lambda^4, & t \in \Gamma_3; \lambda^3, & t \in \Delta_3 \\ \lambda^2, & t \in \Gamma_4; \lambda^4, & t \in \Delta_4, \end{cases}$$

где $\lambda = \exp(2\pi i/5)$, то общее решение последней задачи сопряжения записывается в виде [2]:

$$\chi(\zeta) = R(\zeta) \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^4 \int_{\Delta_i} \frac{\ln H(t)}{t-\zeta} dt + \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \ln H(t) \left[\frac{1}{t-\zeta} - \frac{t^3}{t^4+1} \right] dt \right) \right],$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, в которую входят в подходящих степенях m_k множители $(\zeta - c_k)^{m_k}$ для всех узлов $c_k \in K$ и которая, кроме того, имеет полюсы порядка s в точках $\Theta_k, k = 1, \dots, 4$ и ограничена на бесконечности [2]. В силу того, что мы требуем ограниченности в окрестности точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, множители $(\zeta - \zeta_i)$ войдут в $R(\zeta)$ в нулевой степени.

Для узла 0 имеем:

$$m_0 = -\frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{t \rightarrow 0 \text{ по } \Gamma_1} \ln H(t) + \dots + \lim_{t \rightarrow 0 \text{ по } \Gamma_4} \ln H(t) + \lim_{t \rightarrow 0 \text{ по } \Delta_1} \ln H(t) + \dots + \lim_{t \rightarrow 0 \text{ по } \Delta_4} \ln H(t) \right] = -4.$$

Для узла ∞ получаем:

$$m_\infty = \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{t \rightarrow \infty \text{ по } \Gamma_1} \ln H(t) + \dots + \lim_{t \rightarrow \infty \text{ по } \Gamma_4} \ln H(t) \right] = 2.$$

Таким образом, в $R(\zeta)$ входит сомножитель

$$\zeta^4 \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{-2} \frac{1}{(\zeta^4 + 1)^s} = \frac{\zeta^6}{(\zeta^4 + 1)^s}.$$

Для того, чтобы функция $R(\zeta)$ была ограничена в окрестности ∞ , она должна иметь вид:

$$R(\zeta) = \frac{P_{4s-6}(\zeta) \zeta^6}{(\zeta^4 + 1)^s},$$

где $P_{4s-6}(\zeta)$ — некоторый многочлен степени $4s - 6$, не имеющий корней

в точках Θ_i (при $s = 1$ $P_{4s-6}(\zeta) = 1/(a\zeta^2 + b\zeta + c)$). Возвращаясь на риманову поверхность $W^4 = z(1-z)^3$ и учитывая, что $\zeta^4 = \frac{z}{1-z}$, т. е. $\zeta = \sqrt[4]{\frac{z(1-z)^3}{(1-z)(1-z)^3}} = \frac{W}{1-z}$, получаем для общего решения формулу:

$$\Psi(z, W) = \frac{P_{4s-6}\left(\frac{W}{1-z}\right)\left(\frac{W}{1-z}\right)^6}{\left[\left(\frac{W}{1-z}\right)^4 + 1\right]^s} X\left(\frac{W}{1-z}\right),$$

где

$$X(\zeta) = \exp \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{i=1}^4 \int_{\Delta_i} \frac{\ln H(t)}{t-\zeta} dt + \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \ln H(t) \left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{t^3}{t^3+1} \right) dt \right].$$

Отсюда получаем решение векторной задачи $(\Phi_1(z), \dots, \Phi_5(z))^t$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= Q_s(z), \\ \Phi_i(z) &= \Psi_i(z) = \frac{P_{4s-6}\left(\frac{W_i}{1-z}\right)\left(\frac{W_i}{1-z}\right)^6}{\left[\left(\frac{W_i}{1-z}\right)^4 + 1\right]^s} X\left(\frac{W_i}{1-z}\right), \quad i = 2, \dots, 5, \end{aligned}$$

где $W_i(z)$ выбираются в соответствии с (*), а $Q_s(z)$ — произвольный многочлен степени s .

Окончательно получаем для компонент вектора $F(z)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z) + \Phi_4(z) + \Phi_5(z), \\ F_2(z) &= \Phi_1(z) + \lambda^4\Phi_2(z) + \lambda^3\Phi_3(z) + \lambda^2\Phi_4(z) + \lambda\Phi_5(z), \\ F_3(z) &= \Phi_1(z) + \lambda^3\Phi_2(z) + \lambda\Phi_3(z) + \lambda^4\Phi_4(z) + \lambda^2\Phi_5(z), \\ F_4(z) &= \Phi_1(z) + \lambda^2\Phi_2(z) + \lambda^4\Phi_3(z) + \lambda\Phi_4(z) + \lambda^3\Phi_5(z), \\ F_5(z) &= \Phi_1(z) + \lambda\Phi_2(z) + \lambda^2\Phi_3(z) + \lambda^3\Phi_4(z) + \lambda^4\Phi_5(z), \quad \lambda = \exp(2\pi i/5). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Штин С. Л. Мономпальная разложимость разрешимых групп подстановок. Мн., 1990. 27 с. Деп. в ВИНТИ 08.01.90. № 956-B90.
2. Зверович Э. И. // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 24.12.90.

УДК 517.948.32:517:544

Т. А. ШЕВИЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ E_p

1. Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная контуром Ляпунова Γ . Предполагаем, что начало координат принадлежит области D . На контуре Γ заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, $G(t)$ — непрерывная функция, $g(t) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$.

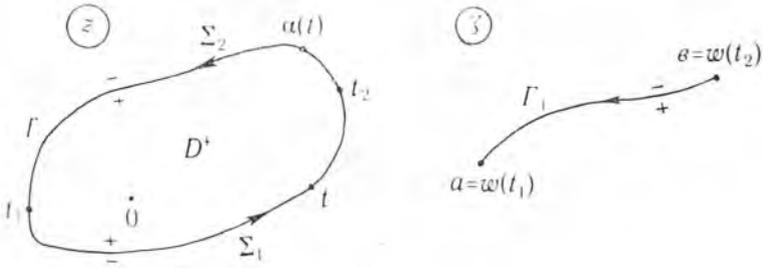
Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z)$, принадлежащие пространству $E_p(D)$ и удовлетворяющие следующему краевому условию:

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t) \quad (1)$$

почти для всех $t \in \Gamma$.

Здесь $\alpha(t)$ переводит контур Γ на себя с изменением ориентации и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$; 2) $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.



На контуре Γ пусть выполнены тождества:

$$G[a(t)]G(t) \equiv 1, \quad (2)$$

$$G(t)g[a(t)] + g(t) \equiv 0. \quad (3)$$

2. Для решения задачи используем метод конформного склеивания. В [1] доказано, что существует функция $\zeta = \omega(z)$ аналитическая и однолистная в D , производная которой H -непрерывно продолжима на контур Γ , имеющая в точке $z = 0$ простой полюс и удовлетворяющая краевому условию

$$\omega[a(t)] = \omega(t), \quad t \in \Gamma. \quad (4)$$

Эта функция осуществляет конформное склеивание. Будем считать, что на контуре Γ задана стандартная ориентация. Неподвижные точки t_1 и t_2 функции $a(t)$ делят контур Γ на две непересекающиеся дуги $\Sigma_1 = [t_1, t_2]$ и $\Sigma_2 = [t_2, t_1]$. Функция $\omega(z)$, являющаяся решением задачи (4), отображает область D на плоскость с разрезом Γ_1 , который задается уравнением $\omega = \omega(t)$, $t \in \Gamma$ и имеет своими концами образы неподвижных точек (см. рисунок). Полагая, что $t \in \Sigma_1$, получим $a(t) \in \Sigma_2$.

В силу тождеств (2), (3) и тождества $a[a(t)] \equiv t$ краевое условие (1) достаточно задать лишь на одном из множеств Σ_1 или Σ_2 . Пусть оно задано на Σ_2 . Будем считать, что ориентация контура Γ_1 индуцируется гомеоморфизмом $\omega: \Sigma_2 \rightarrow \Gamma_1$. На контуре Γ_1 положительным направлением будет то, которое ведет от $b = \omega(t_2)$ к $a = \omega(t_1)$. В силу выбранной ориентации для функции $z = \varphi(\zeta)$, обратной к $\zeta = \omega(z)$, имеем:

$$\varphi^-(\zeta) = t_1 \in \Sigma_1, \quad \varphi^+(\zeta) = a(t) \in \Sigma_2. \quad (5)$$

Используя (5), перепишем краевое условие (1) в виде:

$$\Phi[\varphi^+(\zeta)] = G[\varphi^-(\zeta)]\Phi[\varphi^-(\zeta)] + g[\varphi^-(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma_1.$$

Введем новую функцию

$$F(\zeta) = \Phi[\varphi(\zeta)], \quad (6)$$

аналитическую в плоскости с разрезом Γ_1 . Получим краевое условие задачи Римана:

$$F^+(\zeta) = H(\zeta)F^-(\zeta) + h(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_1, \quad (7)$$

где $H(\zeta) = G[\varphi^-(\zeta)]$, $h(\zeta) = g[\varphi^-(\zeta)]$.

Значения решения задачи (4) имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера [1]. Отсюда вытекает, что контур Γ_1 , полученный в результате отображения ω ляпуновского контура Γ , будет контуром того же класса.

Таким образом, задача Карлемана (1) на простом замкнутом контуре Γ сведена к задаче Римана (7) на разомкнутом контуре Γ_1 .

Из условия (2) имеем, что $[G(t_1)]^2 = 1$, $[G(t_2)]^2 = 1$. Отсюда следует, что в каждой точке сдвига $a(t)$ функция $G(t)$ принимает одно из двух значений: либо $(+1)$, либо (-1) . Такие же значения принимает коэффициент $H(\zeta)$ задачи (7) на концах a и b контура Γ_1 .

Предположим, что

$$G(t_1) = G(t_2) = 1. \quad (8)$$

Пусть краевая задача (1) разрешима, и пусть $\Phi(t) \in E_p$ — ее решение. Наша цель — показать, что соответствующее решение задачи (7) $F(\zeta)$ принадлежит пространству $E_p(\Gamma_1)$.

Аналитичность функции $F(\zeta)$ в области $D_1 = \omega(D)$ очевидна. Покажем принадлежность функции $F(\zeta)$ пространству $L_p(\Gamma_1)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |F(\zeta)|^p |d\zeta| &= \int_{\Gamma_1} |\Phi[\varphi(\zeta)]|^p |d\zeta| = \int_{\Sigma_2} |\Phi(z)|^p |\omega'(z)| |dz| \leq \\ &\leq \max |\omega'(z)| \int_{\Sigma_2} |\Phi(z)|^p |dz| < \infty, \end{aligned}$$

так как $\Phi(t) \in L_p(\Gamma)$.

Итак, имеем $\int_{\Gamma_1} |F(\zeta)|^p |d\zeta| < \infty$. Это означает принадлежность $F(\zeta)$ пространству $L_p(\Gamma_1)$.

Докажем теперь представимость функции $F(\zeta)$ интегралом Коши в D_1 . Достаточно будет показать представимость функции $F(\zeta)$ интегралом Коши в конечной области, частью границы которой является контур Γ_1 . Для этого дополним контур Γ_1 кривой L так, чтобы образовалась простая гладкая замкнутая кривая $C = L \cup \Gamma_1$.

Вычислим

$$\begin{aligned} \int_C F(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^k d\zeta &= \int_{C'} \Phi[\varphi(\zeta)] [\omega(z) - \omega(z_0)]^k \omega'(z) dz = \\ &= \int_{C'} \Phi(z) [\omega(z) - \omega(z_0)]^k \omega'(z) dz, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

В (9) $\Phi(z) \in E_p$, $\omega'(z)$ — удовлетворяет условию Гельдера, $[\omega(z) - \omega(z_0)]$ — непрерывная функция. Тогда произведение $\Phi(z)[\omega(z) - \omega(z_0)]^k \omega'(z)$ принадлежит E_p .

Имеем $\int_C F(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^k d\zeta = 0$, что является необходимым и достаточным условием представимости функции $F(\zeta)$ интегралом Коши.

Перейдем непосредственно к решению задачи (7).

Задачу (7) можно свести к задаче для замкнутого контура, рассмотрим ее на контуре $C = \Gamma_1 \cup L$. На дополняющей кривой L будет $F^+(\zeta) = F^-(\zeta)$. Задача (7) равносильна следующей

$$F^+(\zeta) = H_1(\zeta) F^+(\zeta) + h_1(\zeta), \quad \zeta \in C, \quad (10)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} H_1(\zeta) &= \begin{cases} H(\zeta), & \zeta \in \Gamma_1 \\ 1, & \zeta \in L \end{cases}, \\ h_1(\zeta) &= \begin{cases} h(\zeta), & \zeta \in \Gamma_1 \\ 0, & \zeta \in L \end{cases}. \end{aligned}$$

Из (8) следует, что $H_1(a) = H_1(b) = 1$. Тогда $H_1(\zeta)$ — непрерывная функция, и для решения задачи (10) можно применить результаты работы [2], на основании которой в случае $\kappa = \frac{1}{2\pi i} \arg H_1|_C = 0$ непрерывная

функция H_1 допускает обобщенную факторизацию $H_1 = \frac{X^+}{X^-}$, где $X(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln H_1(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau \right\}$, $[X(\zeta)]^\pm \in E_p$.

Следуя [1], сведем задачу (10) к задаче о скачке $\frac{F^+}{X^+} - \frac{F^-}{X^-} = \frac{h_1}{X^+}$.

Решая задачу о скачке, получим

$$F(\zeta) = \frac{X(\zeta)}{2\pi i} \int_C \frac{h_1(\tau)}{X(\tau)(\tau - \zeta)} d\tau.$$

Учитывая (6), решение задачи (1) в случае $\kappa = 0$ имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{\Sigma_0} \frac{g[\omega(\tau)] \omega'(\tau) d\tau}{X[\omega(\tau)] [\omega(\tau) - \omega(z)]},$$

$\omega(z)$ — решение задачи (4).

Если $\kappa > 0$,

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \left[\int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)] \omega'(\tau) d\tau}{X[\omega(\tau)] [\omega(\tau) - \omega(z)]} + P_\kappa[\omega(z)] \right],$$

P_κ — полином порядка κ .

В случае $\kappa < 0$ решение задачи (1) имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{X[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)] \omega'(\tau) d\tau}{X[\omega(\tau)] [\omega(\tau) - \omega(z)]}.$$

Так как $X(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка $|\kappa|$, то, чтобы существовало решение задачи (1), необходимы и достаточны следующие условия:

$$\int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]}{X[\omega(\tau)]} |\omega(\tau)|^k \omega'(\tau) d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \kappa - 1.$$

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев, 1973.

Поступила в редакцию 29.01.91.

УДК 517.925

А. В. ЧИЧУРИН

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ С ЗАДАНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У ЧАСТНЫХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

В работах [1, 2] для дифференциальных систем вида:

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

где P_i и Q_i принадлежат пространству комплексных голоморфных функций на области $D^{n+1} \subset C^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ и являются полиномами по x_1, x_2, \dots, x_n , были получены достаточные условия существования и указан вид решений, обладающих бесконечными предельными свойствами в окрестности некоторой конечной точки z_0 . Ранее в работах [3, 4] были получены условия существования и указан вид решений с заданными предельными свойствами для систем трех уравнений вида (1) ($n = 3$).

В данной статье ставится следующая задача: для некоторых частных классов систем вида

$$\frac{dx_i}{dz} = f(z) \frac{P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где P_i и Q_i такие же, как и для системы (1), $f(z)$ — интегрируемая комплекснозначная функция, указать явный вид решений, обладающих заданными предельными свойствами.

Обозначим: $\bar{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{V} \equiv (V_2, V_3, \dots, V_n)$,

$$\bar{\beta} \equiv (\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\sigma), \quad \bar{0} \equiv \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n-\sigma}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}, \quad 2 \leq \sigma \leq n.$$

Полиномы $P_i(\bar{x})$, $Q_i(\bar{x})$ ($i = \overline{1, n}$) всегда можно представить в виде:

$$P_i(\bar{x}) = \sum_{\tau=0}^{p^{(i)}} P_{\tau}^{(i)}(\bar{x}), \quad Q_i(\bar{x}) = \sum_{\tau=0}^{q^{(i)}} Q_{\tau}^{(i)}(\bar{x}),$$

где $P_{\tau}^{(i)}(\bar{x})$, $Q_{\tau}^{(i)}(\bar{x})$ ($i = \overline{1, n}$) — однородные полиномы по x_1, x_2, \dots, x_n степени τ ; $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) — целые неотрицательные числа.

Заметим, что одновременно все коэффициенты многочленов $P_{p^{(i)}}^{(i)}(\bar{x})$, $Q_{q^{(i)}}^{(i)}(\bar{x})$ не должны быть тождественными нулями.

Метод исследования аналогичен методу работ [1, 2]. С помощью замены

$$x_1 = \frac{1}{U}, \quad x_j = \frac{V_j}{U} \quad (j = \overline{2, n}) \quad (3)$$

получим систему (обозначим ее: система (1)), голоморфную в окрестности точки ($z = z_0$, $U = 0$, $V_2 = \beta_2, \dots, V_{\sigma} = \beta_{\sigma}$, $V_{\sigma+1} = 0, \dots, V_n = 0$), если выполнены неравенства

$$P_p^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) \prod_{j=2}^n Q_q^{(j)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) \neq 0, \quad (4)$$

$$p^{(1)} - q^{(1)} \geq \max(2, p^{(j)} - q^{(j)}), \quad (5)$$

где β_{ξ} ($\xi = \overline{2, \sigma}$) определяются как ненулевые корни многочленов $S_j(\bar{V}) = V_j P_p^{(1)}(1, \bar{V}) Q_q^{(j)}(1, \bar{V}) - P_p^{(j)}(1, \bar{V}) Q_q^{(1)}(1, \bar{V})$, ($j = \overline{2, n}$).

Обозначим через ($V_2 = \beta_2, \dots, V_n = \beta_n$) решение системы уравнений $S_j(\bar{V}) = 0$ ($j = \overline{2, n}$).

Применим метод для случая, когда

$$p^{(1)} - q^{(1)} = p^{(2)} - q^{(2)} = \dots = p^{(n)} - q^{(n)} \geq 2, \quad (6)$$

$$\prod_{v=1}^{\sigma} \beta_v \neq 0; \quad \beta_{\sigma+1}, \dots, \beta_n \text{ равны нулю.} \quad (7)$$

Сделаем замену

$$V_j = \varphi_j + \beta_j \quad (j = \overline{2, n}), \quad (8)$$

и, разложив правые части уравнений системы (1) в ряды Тейлора по степеням U , $\varphi_2, \dots, \varphi_n$, получим систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{dU} &= - \frac{Q_q^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})}{P_p^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})} U^{p^{(1)} - q^{(1)} - 2} (1 + \Phi(U, \bar{\varphi})), \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U \frac{d\varphi_j}{dU} &= a_{j2}\varphi_2 + \dots + a_{jn}\varphi_n + F_j(U, \bar{\varphi}) \quad (j = \overline{2, n}), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где $a_{j\mu} = \frac{\partial S_j}{\partial \varphi_{\mu}}(\bar{\beta}, \bar{0}) / P_p^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) Q_q^{(j)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})$ ($j, \mu = \overline{2, n}$),

а F_j — голоморфные функции от U , $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ в окрестности точки $U = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = 0$, обращающиеся в нуль в этой точке вместе со своими частными производными по $\varphi_2, \dots, \varphi_n$. Через $\Phi(U, \bar{\varphi})$ обозначен n -кратный, сходящийся в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$ степенной ряд, причем такой, что $\Phi(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Рассмотрим следующие коэффициентные условия:

$$P_p^{(n)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) = 0, \quad P_p^{(n)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_{\mu} = 0, \quad (11)$$

$$Q_q^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) = 0, \quad Q_q^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_{\mu} = 0, \quad (12)$$

$$Q_q^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) = 0, P_p^{(n)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\mu = 0, \quad (13)$$

$$Q_q^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0}) = 0, P_p^{(n)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\mu = 0, \quad (14)$$

где $\mu = \overline{2, n}$; $\eta = \overline{\sigma + 1, n}$,

$$P_p^{(i)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\lambda = \sum_{\substack{p_{i1}, \dots, p_{i\sigma} \\ \tau_1, \dots, \tau_\sigma = 0}} P_p^{(i)} \sim \prod_{\substack{k=2 \\ (k \neq \lambda)}}^{\sigma} \beta_k^{\tau_k} \tau_k \beta_k^{\tau_k - 1}, \quad (15)$$

($\lambda = \overline{2, \sigma}$) и $\tau_1, \dots, \tau_\sigma$ — множество всех наборов индексов $\tau_1, \dots, \tau_\sigma$ таких, что $\tau_1 + \dots + \tau_\sigma = p^{(i)}$;

$$P_p^{(i)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_r = \sum_{\substack{p_{i1}, \dots, p_{in} \\ \tau_1, \dots, \tau_\sigma = 0}} P_p^{(i)} \sim \prod_{k=2}^{\sigma} \beta_k^{\tau_k}, \quad (16)$$

($r = \overline{\sigma + 1, n}$) и $\tau_1, \dots, \tau_\sigma$ — множество всех наборов индексов $\tau_1, \dots, \tau_\sigma$ таких, что $\tau_1 + \dots + \tau_\sigma = p^{(i)} - 1$. $Q_q^{(i)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_\lambda, Q_q^{(i)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})'_r$ ($i = \overline{1, n}$) имеют вид, аналогичный (15), (16).

При выполнении любого из условий (11)–(14) характеристический многочлен $\Delta(s)$ системы Брио и Буке (10) примет вид:

$$(1 - \lambda)^{n-\sigma} \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2\sigma} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\sigma 2} & a_{\sigma 3} & \dots & a_{\sigma\sigma} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(s) = 0. \quad (18)$$

Воспользуемся результатами работ [5, 6]. Предположим, что (17) содержит: только простые элементарные делители

$$(s - a_1), (s - a_2), \dots, (s - a_n); \quad (19)$$

непростые элементарные делители

$$(s - a_r)^{\xi_{1r}}, (s - a_r)^{\xi_{2r}}, \dots (r = \overline{1, \xi}; \xi < n). \quad (20)$$

Допустим, что

$$\operatorname{Re} a_\kappa > 0 (\kappa = \overline{1, m}), \operatorname{Re} a_v \leq 0 (v = \overline{m + 1, n}). \quad (21)$$

При этом возможны следующие ситуации:

а) между a_1, a_2, \dots, a_m не существует соотношений вида

$$a_\kappa = \rho_\kappa + \rho_\nu a_\nu + \dots (\psi, \kappa = \overline{1, m}; \psi \neq \kappa) \quad (22)$$

с целыми неотрицательными коэффициентами (среди которых имеется хотя бы одно натуральное число); (условие (23)), б) существует хотя бы одно соотношение вида (22). Тогда величинам a_κ ($\kappa = \overline{1, m}$) поставим в соответствие целые неотрицательные числа V_κ (называемые «весом») так, чтобы $V_\kappa = 0$, если a_κ не встречается в левой части соотношения (22); в противном случае для каждого возможного соотношения (22) образуем числа $\rho_{\kappa 1}(V_1 + e_1 - 1) + \dots + \rho_{\kappa \kappa-1}(V_{\kappa-1} + e_{\kappa-1} - 1)$, для a_κ (удобно рассматривать a_1, a_2, \dots, a_m в возрастающем порядке, т. е. $\operatorname{Re} a_1 < \operatorname{Re} a_2 < \dots < \operatorname{Re} a_m$), и V_κ примет значение на единицу большее наибольшего из этих чисел (условие (24)). Проведем процедуру, аналогичную рассмотренной в работах [1, 2]. Запишем функции V_η в виде $V_\eta = \tau \tilde{V}_\eta$ ($\eta = \overline{\sigma + 1, n}$). В зависимости от коэффициентных условий рядов V_η возможны два случая:

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (z \rightarrow z_0)}} \widetilde{V}_\eta = \infty, \text{ или} \quad (25)$$

$$\widetilde{V}_\eta = x_{\eta 0} \text{ при } \tau = 0 \text{ (} z = z_0 \text{)}. \quad (26)$$

Обозначим коэффициентное условие, при котором имеет место (25), как условие (А), а условие, когда имеет место (26), — (В). Тогда имеет место

Теорема 1. Пусть задана дифференциальная система (2). Если для системы (1) выполнены условия (4), (6), (7), а для системы (10) — хотя бы одно из условий (11) — (14) и выполнены:

1) условия (19) и (23):

а) условие (А), то решением системы (2) является система рядов

$$x_l = \tau^{-1} (\beta_l + N_l) \quad (l = \overline{1, \sigma}), \quad x_\eta = \widetilde{N}_\eta \quad (\eta = \overline{\sigma + 1, n}), \quad \text{где} \quad (27)$$

$$N_l = N_l(\tau, M_2 \tau^{a_2}, \dots, M_m \tau^{a_m}, [M_{m+1, 1} + h_{m+1, 1} V_{m+1} \ln \tau] \tau, \dots, \\ [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma} (V_{m+1} + n - \sigma - 1) \ln \tau] \tau) \quad (28)$$

— $[n - \sigma + m]$ — кратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$, M_v ($v = \overline{2, n}$), $M_{m+1, 1}, \dots, M_{m+1, n-\sigma}$ — постоянные, обладающая свойством

$$x_i(z) \rightarrow \infty \quad (i = \overline{1, n}) \text{ при } z \rightarrow z_0, \quad (29)$$

б) условие (В), то решением является система рядов вида

$$x_l = \tau^{-1} (\beta_l + N_l) \quad (l = \overline{1, \sigma}), \quad x_\eta = x_{\eta 0} + \widetilde{N}_\eta \quad (\eta = \overline{\sigma + 1, n}), \quad (30)$$

где N_i ($i = \overline{1, n}$) определяются из (28), обладающая свойством

$$x_l(z) \rightarrow \infty, \quad (l = \overline{1, \sigma}), \quad x_\eta(z) \rightarrow x_{\eta 0} \quad (\eta = \overline{\sigma + 1, n}) \text{ при } z \rightarrow z_0, \quad (31)$$

2) условия (19) и (24):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, [M_2 + h_2 \ln \tau] \tau^{a_2}, \dots, [M_m + h_m \ln \tau] \tau^{a_m}, [M_{m+1, 1} + \\ + h_{m+1, 1} V_{m+1} \ln \tau] \tau, \dots, [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma} (V_{m+1} + n - \sigma - 1) \ln \tau] \tau) \quad (32)$$

($i = \overline{1, n}$) — ведут себя так же, как и ряды (28), h_v ($v = \overline{2, m}$), $h_{m+1, 1}, \dots,$

$\dots, h_{m+1, n-\sigma}$ — постоянные, обладающая свойством (29);

б) условие (В), то решением является система рядов вида (30), где

N_i ($i = \overline{1, n}$) определяются из (32), обладающая свойством (31);

3) условия (20) и (23):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, M_{21} \tau^{a_2}, \dots, [M_{me_m} + h_{me_m} (e_m - 1) \ln \tau] \tau^{a_m}, [M_{m+1, 1} + \\ + h_{m+1, 1} V_{m+1} \ln \tau] \tau, \dots, [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma} (V_{m+1} + n - \sigma - 1) \ln \tau] \tau) \quad (33)$$

($i = \overline{1, n}$) — $[e_2 + \dots + e_m + 1]$ — кратные степенные ряды сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$, $M_{v\xi}$, $h_{v\xi}$ — постоянные, числа e_v определяются из условия (20) ($v = \overline{2, m+1}$, $\xi = \overline{1, e_v}$, $e_{m+1} = n - \sigma$), обладающая свойством (29);

б) условие (В), то решением является система рядов вида (30), где N_i ($i = \overline{1, n}$) определяются из (33), обладающая свойством (31);

4) условия (20) и (24):

а) условие (А), то решением является система рядов вида (27), где

$$N_i = N_i(\tau, [M_{21} + h_{21} V_2 \ln \tau] \tau^{a_2}, \dots, [M_{me_m} + h_{me_m} (V_m + e_m - 1) \ln \tau] \tau^{a_m} \\ [M_{m+1, 1} + h_{m+1, 1} V_{m+1} \ln \tau] \tau, \dots, [M_{m+1, n-\sigma} + h_{m+1, n-\sigma} \times \\ \times (V_{m+1} + n - \sigma - 1) \ln \tau] \tau) \quad (34)$$

($i = \overline{1, n}$), и ведут себя так же, как ряды (33), числа $V_v (v = \overline{2, m})$ определяются из условия (24), обладающая свойством (29);

б) условие (B), то решением является система рядов вида (30), где $N_i (i = \overline{1, n})$ определяются из (34), обладающая свойством (31);

$\widetilde{N}_\eta (\eta = \sigma + 1, n)$ в каждом из случаев 2, 3, 4 (подслучай а)) зависят от тех же переменных, что и соответствующие $N_i (i = \overline{1, n})$ и удовлетворяют условию (25), $\beta_1 \equiv 1$, τ всюду определяется по формуле

$$\tau = \left[(q^{(1)} - p^{(1)} + 1) \frac{P_{(1)}^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})}{Q_{(1)}^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})} \int_{z_0}^z f(z) dz \right]^{(p^{(1)} - q^{(1)} - 1)^{-1}}. \quad (35)$$

Запишем еще одно условие:

$$Q_{(1)}^{(\xi)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})_\mu = 0, P_{(1)}^{(1)}(1, \bar{\beta}, \bar{0})_\mu = 0 \quad (\xi = \overline{2, \sigma}; \mu = \overline{2, n}). \quad (36)$$

При выполнении хотя бы одной из пар условий ((36) и одно из условий (11) — (14)) $\Delta(s)$ системы (10) имеет вид $(1 - \lambda)^n$.

Теорема 2. Пусть задана дифференциальная система (2). Если для системы (1) выполнены условия (4), (6), (7), а для системы (10) — хотя бы одна пара условий ((36), (11)) — ((36), (14)), то решением системы (2) является система рядов вида: 1) (27) при выполненном условии (A); 2) (29) при выполненном условии (B), где $N_i = N_i(\tau, [M_2 + h_2 \ln \tau], \dots, [M_n + h_n \ln \tau]) (i = \overline{1, n})$ — n -кратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$, $M_j, h_j (j = \overline{2, n})$ — постоянные; τ определяется по формуле (35); $\widetilde{N}_\eta (\eta = \sigma + 1, n)$ зависят от тех же переменных, что и $N_i (i = \overline{1, n})$, и удовлетворяют условию (25).

Очевидно, что в первом случае решение будет обладать свойством (29), во втором — свойством (31).

Список литературы

1. Будько Т. С., Чичурин А. В. Существование полярных и псевдополярных решений автономных дифференциальных систем произвольного конечного порядка. Мн., 1989. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 11.12.89. № 7319-B89.
2. Будько Т. С., Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 1852.
3. Там же. 1985. Т. 21. № 11. С. 1849.
4. Там же. 1987. Т. 23. № 5. С. 754.
5. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957.
6. Норг J. // Journ. fur M. 1896. V. 116. P. 265; 1897. V. 117. P. 104.

Поступила в редакцию 25.02.91.

УДК 519.852.67

В. Г. МЕДВЕДЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Численные решения на ЭВМ и ППЭВМ двух линейных полубесконечных экстремальных задач проводились с помощью метода опорных задач [1] и пакета ЛП АСУ [2].

1. Алгоритм решения. Целью эксперимента была проверка эффективности метода опорных задач [1] для решения полубесконечной задачи линейного программирования:

$$c^* x \rightarrow \max, b_*(t) \leq A(t) x \leq b^*(t), t \in T; d_* \leq x \leq d^*. \quad (1)$$

Здесь $c, x, d^*, d_* \in \mathbf{R}^n$; $b^*(\cdot), b_*(\cdot) \in \mathbf{R}^m$; $A(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times n}$; $T = \{t | a \leq t \leq b\}$; $b_*(\cdot), b^*(\cdot), A(\cdot) \in C^p(T)$, $p \geq 2$ — целое число.

Предполагается, что в задаче (1) выполняется условие Слейтера:

$$\exists v, d_* \leq v \leq d^*, \text{ такой, что } b_*(t) < A(t)v < b^*(t), \text{ для всех } t \in T. \quad (2)$$

В основу метода опорных задач положены понятия: опорный план, опора, структура опорного плана, уравнения доводки [1]. Он состоит из двух частей: 1) процедуры формирования и решения последовательности конечномерных задач линейного программирования и 2) процедуры доводки.

Первая часть алгоритма предназначена для получения приближенных значений элементов оптимального опорного плана и идентификации его структуры.

Вторая процедура алгоритма строит точные значения элементов оптимального плана путем решения специальным образом сформированной системы нелинейных уравнений (уравнений доводки) методом Ньютона.

II. В эксперименте сравнивался метод опорных задач с методом математического программирования, использующим пакет ЛП АСУ (первый пример). В качестве второго примера была взята известная задача односторонней аппроксимации в пространстве $L_1(T)$ [3].

Вычисления производились на ЕС-1035 (программа MLS11D и ППП ЛП АСУ) и на ППЭВМ IBM AT-286 (тактовая частота 12 МГц) — программа SIP. Программа MLS11D написана на языке Фортран, программа SIP — на TURBO PASCAL 5.5. Они реализуют метод опорных задач [1].

Первый тестовый пример был предложен Костюковой О. И.:

$$\begin{aligned} & -13x_1 + 18x_2 \rightarrow \max, \\ & -4t \leq t^3(4-t)x_1 - 6t^2x_2 \leq 1-4t, \quad t \in [0.5, t^*], \\ & -10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Результаты решения помещены в табл. 1.

Таблица 1

t^*	1,99			2,00			2,01		
	ЛП АСУ	MLS11D	SIP	ЛП АСУ	MLS11D	SIP	ЛП АСУ	MLS11D	SIP
ϵ^*	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-14}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-14}	10^{-7}	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-14}	10^{-7}
M	1	1	1	1	1	1	1	2	1
N	746	23	20	1502	19	19	756	21	20
P	366	4	4	475	5	3	298	7	4
S	—	4	2	—	4	3	—	4	3
$c'x^0$	5,04564	5,037905	5,037905	5,00218	5,0	5,0	4,96543	4,955865	4,955865
τ	1020	7,323	0,49	3824,8	7,561	0,56	870	7,803	0,43
x^0	0,99039	0,991949	0,991949	0,99949	1,0	1,0	1,01072	1,013980	1,013980
	0,99560	0,996291	0,996291	0,99975	1,0	1,0	1,00582	1,007644	1,007644
Q^0	0,850	0,854177	0,854177	0,943	1,000	1,000	1,188	1,20669	1,20669
	1,990	1,990	1,990	2,000	2,000	2,000	2,010	2,010	2,010

Примечания: ϵ^* — точность локализации опорных моментов; M — количество решенных опорных задач; N — среднее количество основных ограничений в опорных задачах; P — количество итераций адаптивного метода при решении опорных задач; S — количество итераций в доводке; τ — время решения задачи в секундах; x^0 — оптимальный план; Q^0 — оптимальные опорные моменты; ϵ — шаг сетки $S_\epsilon(T)$, наложенной на множество T , на которой проверялось выполнение ограниченной задачи на оптимальном плане.

n	3		6		8		9	10	11
	MLSIID	SIP	MLSIID	SIP	MLSIID	SIP	SIP	SIP	SIP
ε	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
ε^*	10^{-14}	10^{-7}	10^{-14}	10^{-7}	10^{-14}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-5}
M	10	1	11	2	15	2	2	2	1
N	16	13	19	28	27	26	28	53	58
P	28	5	36	14	60	23	32	42	41
L	2	2	4	4	5	5	5	6	6
S	4	4	6	4	8	4	5	19	6
$c'x^\circ$	0,649042	0,649042	0,616085	0,616085	0,615663	0,615653	0,615632	0,615628	0,615626
τ	13	0,49	25,5	3,1	38	5,6	7,85	23,17	21,14
Q^0	0,333333	0,333333	0,0	0,0	0,0	0,0	0,057674	0,0	0,047157
			0,276393	0,276389	0,5	0,499691	0,278662	0,112888	0,227523
	1,0	1,0	0,723607	0,723604	0,172673	0,172464	0,585406	0,349560	0,482712
			1,0	1,0	0,827327	0,827176	0,861004	0,636596	0,734704
				1,0	1,0	1,0	0,880271	0,918828	
							1,0	1,0	1,0
x^0			0,0	0,0	0,0	0,0	0,000039	0,0	0,000009
			1,023268	1,023267	1,002913	1,002897	0,998120	1,000263	0,999433
	0,089096	0,089096	—0,240687	—0,240677	—0,053486	—0,053252	0,032616	—0,007682	0,012586
	0,423652	0,423052	1,221962	1,221934	0,709010	0,708457	0,072977	0,421688	0,197844
	1,045259	1,045259	—1,388633	—1,388602	—1,299414	—1,295654	1,109614	—0,522817	0,817676
			0,941498	0,941485	2,499343	2,493864	—2,563445	1,906660	—2,871419
					—2,205327	—2,201331	3,768226	—3,594561	6,997137
					0,903576	0,902425	—2,796046	4,377179	—10,352188
						0,935306	—2,869606	9,619342	
							0,846283	—5,051575	
								1,188556	

Примечания: обозначения те же, что и в табл. 1.

Второй тестовый пример представляет задачу односторонней аппроксимации функции $\text{tg}(t)$ полиномом $(n - 1)$ -й степени $\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ на отрезке $T = [0, 1]$ в пространстве $L_1(T)$ [3]:

$$\sum_{i=1}^n x_i / i \rightarrow \min, \\ x_1 + tx_2 + \dots + t^{n-1}x_n \geq \text{tg}(t), t \in T, x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

В [3] задачу (4) не удалось решить при $n > 8$ из-за потери точности в вычислениях. Она не была решена и процедурой MLSIID при $n > 8$ из-за того, что опорная задача не смогла идентифицировать структуру опоры. Процедура SIP решила задачу при $n \leq 11$. Результаты решения задачи (4) приведены в табл. 2.

Замечания.

1. В программе MLSIID значения $A(t)$, $b^*(t)$, $b_*(t)$, $t \in T$, в узлах сетки $S_\varepsilon(T)$, в которых проверялись основные ограничения, каждый раз вычислялись заново, а в программе SIP — хранились в памяти.

2. Время решения задачи (1) программой SIP не включает времени создания сетки $S_\varepsilon(T)$.

Список литературы

1. Медведев В. Г. Линейные полубесконечные экстремальные задачи. Теория, алгоритмы и численный эксперимент // Междунар. советско-польский семинар: Тез. докл. Мн., 1989. С. 190.
2. Курницкий Б. Я., Алексеев Г. П., Виткин Ю. В. Применение пакетов прикладных программ по экономико-математическим методам в АСУ. М., 1980.
3. Watson G. A. // Lect. Notes Econ. and Math. Systems. 1983. V. 215. P. 193.

Поступила в редакцию 05.04.91.

УДК 517.577

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, В. М. РАЧОК

ОДНО РЕШЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуется специальный класс дискретных управлений типа обратной связи. Метод определения параметров управления близок к известному методу А. Манитуса для исследования невырожденных задач в классе кусочно-непрерывных управлений. Отметим, что в этом классе решение вырожденной задачи не существует.

Рассмотрим систему управления:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^h K_1(s)x(t-s)ds + B(t)u(t), t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{\gamma(\tau) \mid \tau \in [t_0 - h, t_0), x(t_0) = x_0\}, \quad (2)$$

где x — n -вектор, u — m -вектор, $m < n$; $\gamma(t)$ — заданная кусочно-непрерывная n -векторная функция на $[t_0 - h, t_0]$, x_0 — заданный n -вектор; $A(t)$, $K_1(s)$, $B(t)$ — непрерывные матрицы своих размерностей, $\text{rank } B(t) \equiv m$, $t \in T$; под $u(t)$, $t \in T$, будем понимать кусочно-постоянные управления с заданными точками разрыва p_i , $i = 1, N - 1$, $p_{i+1} = p_i + \Delta$, $\Delta > 0$, $p_0 = t_0$, $p_N = t_1$; $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Качество процесса управления оценивается функционалом

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} x'(t) D(t) x(t) dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $D(t) > 0$, $D'(t) = D(t)$ — непрерывная матричная функция, $t \in T$.

Задача 1. Найти оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, для (1) — (3) в классе кусочно-постоянных функций с заданными точками разрыва.

Задача 2. Для системы (1) — (3) найти оптимальное управление в форме обратной связи:

$$u^0(t) = u_i^0 = \mu_i x(p_{i-1}) + \int_0^h \mu_i(-r) x(p_{i-1} - r) dr, \quad (4)$$

$$i = \overline{1, N}, t \in [p_{i-1}, p_i].$$

При решении задачи 1 потребуется формула Коши для решения системы (1)—(2) [1]:

$$x(t) = F(t, t_0) x_0 + \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^h F(t, \tau+s) K_1(s) x_0(\tau) ds d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $F(t, \tau)$ — матричная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau) A(\tau) - \int_0^h F(t, \tau+s) K_1(s) ds,$$

$$\tau \leq t, F(t, t-0) = E, F(t, \tau) = 0, \tau > t.$$

Учитывая (5), запишем (3) в виде:

$$1(u) = 2 \sum_{i=1}^N u_{i-1}' \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2) K_2(t_0, \tau_2) d\tau_2 x_0 + 2 \sum_{i=1}^N u_{i-1}' \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2), \quad (6)$$

$$K_3(t_0, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 x_0(\tau_3) d\tau_3 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{i-1}' \int_{p_{i-1}}^{p_i} \left[B'(\tau_2) \int_{p_{j-1}}^{p_j} K_4(t_0, \tau_2, \tau_4), \right. \\ \left. B(\tau_4) d\tau_4 \right] d\tau_2 u_{j-1} + c,$$

где

$$K_2(t_0, \tau_2) = \int_{\tau_2}^{t_0} F'(t, \tau_2) D(t) F(t, t_0) dt,$$

$$K_3(t_0, \tau_2, \tau_3) = \int_{\tau_0}^{t_1} \int_{t_0-\tau_3}^h F'(t, \tau_2) D(t) F(t, \tau_3+s_3) K_1(s_3) ds_3 dt,$$

$$K_4(t_0, \tau_2, \tau_4) = \int_{\max(\tau_2, \tau_4)}^{t_1} F'(t, \tau_2) D(t) F(t, \tau_4) dt, \quad (7)$$

$$c = x_0' \int_{t_0}^{t_1} F'(t, t_0) K(s) D(t) F(t, t_0) dt x_0 + 2x_0' \int_{t_0}^{t_0} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau_3}^h F'(t, t_0),$$

$$D(t) F(\tau_3+s_3) K_1(s_3) x_0(\tau_3) ds_3 d\tau_3 dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau_1}^h \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau_3}^h x_0'(\tau_1),$$

$$K_1'(s_1) F'(t, \tau_1+s_1) D(t) F(t, \tau_3+s_3) K_1(s_3), x_0(\tau_3) ds_3 d\tau_3 ds_1 d\tau_1 dt.$$

Отметим, что выражения (7) совпадают с матричными импульсами задачи (1)—(3) [2].

Введем обозначения:

$$\Phi_{2,i} = \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2) K_2(t_0, \tau_2) d\tau_2,$$

$$f_i^k = f_i^{k-1} - \Phi_{4, i N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4, N-k+1 N-k+1}^{k-1})^{-1} f_{N-k+1}^{k-1}. \quad (14)$$

$$\Phi_{4, ij}^k = \Phi_{4, ij}^{k-1} - \Phi_{4, i N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4, N-k+1 N-k+1}^{k-1})^{-1} \Phi_{4, N-k+1 j}^{k-1}, \quad (15)$$

$$f_i^0 = f_i, \quad \Phi_{4, ij}^0 = \Phi_{4, ij}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad i, j = \overline{1, N-k}.$$

Подставляя в (13) $k = N-1, \dots, 1$, получим оптимальные участки кусочно-постоянного управления.

Теорема 1. Оптимальное управление в выбранном классе кусочно-постоянных функций задается соотношениями (13)–(15).

Приступим к решению задачи 2.

Положим

$$f_i^k = \alpha_i^k + \int_0^h \beta_i^k(-r) x(p_i - r) dr, \quad (16)$$

где

$$\alpha_i^k = \alpha_i^{k-1} - \Phi_{4, i N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4, N-k+1 N-k+1}^{k-1})^{-1} \alpha_{N-k+1}^{k-1}, \quad (17)$$

$$\beta_i^k(r) = \beta_i^{k-1}(r) - \Phi_{4, i N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4, N-k+1 N-k+1}^{k-1})^{-1} \beta_{N-k+1}^{k-1}(r), \quad (18)$$

$$\alpha_i^0 = \alpha_i = -\Phi_{2, i}, \quad \beta_i^0(-r) = \beta_i(-r) = -\Phi_{3, i}(r), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Определим на первом шаге

$$\Phi_2 = \Phi_2(t_0), \quad \Phi_3(r) = \Phi_3(t_0, r), \quad \Phi_4 = \Phi_4(t_0), \quad f_j = f_j(t_0), \quad N = N(t_0).$$

Для u_1^0 имеем из (13):

$$u_1^0 = (\Phi_{4, 1 1}^{N(t_0)-1})^{-1} f_1^{N(t_0)-1} = (\Phi_{3, 1 1}^{N(t_0)-1})^{-1} (\alpha_1^{N(t_0)-1} x(t_0) + \int_0^h \beta_1^{N(t_0)-1}(-r) x(t_0 - r) dr) = g_{1, 1} x(t_0) + \int_0^h g_{2, 1}(-r) x(t_0 - r) dr.$$

Проводя замену t_0 на p_i , получим следующие соотношения для u_i^0 , $1 \leq i \leq N$:

$$u_i^0 = g_{1, i} x(p_{i-1}) + \int_0^h g_{2, i}(-r) x(p_{i-1} - r) dr, \quad (19)$$

$$g_{1, i} = (\Phi_{4, 1 1}^{N(p_{i-1})-1})^{-1} \alpha_1^{N(p_{i-1})-1}, \quad (20)$$

$$g_{2, i}(r) = (\Phi_{4, 1 1}^{N(p_{i-1})-1})^{-1} \beta_1^{N(p_{i-1})-1}(r), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (21)$$

Учитывая вышесказанное, получаем, что справедлива

Теорема 2. Для задачи (1)–(3) оптимальное управление в форме обратной связи (4) существует и определяется формулой (19), коэффициенты в которой вычисляются по формулам (17), (18), (20), (21).

Замечание. Вырожденность функционала (3) понимается в смысле работы [3].

Список литературы

1. Габасов Р. Ф., Кирilloва Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
2. Забелло Л. Е., Смородни В. С. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 2000.
3. Bell D. J., Jacobson D. H. Singular optimal control problems. London — New York — San-Francisco, 1975.

Поступила в редакцию 11.04.91.

О РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

Пусть в каждый из T моментов времени имеются система из $N = N(t)$, $t = \overline{1, T}$ микрообъектов, распределенных по r состояниям, и наблюдения $y_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, являющиеся относительными частотами попадания микрообъектов в j -е состояние в момент времени t . Математической моделью эволюции каждого из N микрообъектов служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей $P = (p_{ij})$, $i, j = \overline{1, r}$ переходных вероятностей, причем все N марковских цепей независимы.

Пусть $q_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$ обозначает вероятность попадания микрообъекта в j -е состояние в момент времени t ; $p_{ij}^{(S)}$, $i, j = \overline{1, r}$, $S = 0, 1, 2, \dots$ обозначает переходную вероятность из i -го состояния в j -е состояние за S шагов. Отметим, что вероятность $q_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$ для каждого отдельного микрообъекта постоянна в данный момент времени и меняется с изменением t . Кроме того, известно [1], что $q_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$ и $p_{ij}^{(S)}$, $i, j = \overline{1, r}$, $S = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{j=1}^r q_{j,t} = 1, \quad q_{i,t+1} = \sum_{i=1}^r q_{i,t} p_{ij}^{(1)}. \quad (1)$$

В [1] предложено рассматривать описанную вероятностную модель как полиномиальную. Действительно, пусть в момент времени t , $t = \overline{1, T}$ имеется N микрообъектов. Вероятность того, что в состоянии j , $j = \overline{1, r}$ будут находиться $n_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$ микрообъектов, где

$$n_{j,t} = N(t) y_{j,t}, \quad \sum_{j=1}^r n_{j,t} = N(t) \quad (2)$$

определим формулой

$$P(n(t) | q(t), N) = N(t)! \cdot \left[\prod_{i=1}^r n_{i,t}! \right]^{-1} \cdot \prod_{j=1}^r q_{j,t}^{n_{j,t}} \quad (3)$$

с ограничениями (1) — (2). Здесь $n(t)$ — вектор с элементами $n_{i,t}$, $i = \overline{1, r}$, $q(t)$ — вектор с известными элементами $q_{i,t}$, $i = \overline{1, r}$.

Формула (3) является основой для получения оценки максимального правдоподобия матрицы P как по микроданным, так и по агрегированным данным. Процедуры получения оценок достаточно подробно изложены в [1]. Вопрос об асимптотических свойствах оценки максимального правдоподобия по имеющимся агрегированным данным остается открытым до настоящего времени. Одной из первых попыток в этом направлении является упомянутая нами работа [1]. Возьмем за основу идею этой работы и получим формулы вычисления моментов высших порядков агрегированных характеристик однородной марковской цепи.

Пусть $(N)_k = \prod_{i=1}^k (N - i + 1)$, где k — любое натуральное число, не превосходящее N . Из [2] имеем:

$$E(n_{i,t}) = N \cdot q_{i,t}, \quad i = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}; \quad (4)$$

$$E(n_{i,t}, n_{j,t}) = (N)_2 q_{i,t} q_{j,t} + N p_{ij}^{(0)} q_{i,t}, \quad i, j = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (5)$$

Так как $N = N(t)$ носит неслучайный характер, то из соотношений (4) — (5) очевидным образом следуют соответствующие формулы для

$y_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$. Вычисление других моментов рассмотрим в виде леммы, вводя по мере надобности необходимые дополнительные обозначения.

Пусть $j = j(1, 2, \dots, r)$ обозначает произвольную перестановку индексов $(1, 2, \dots, r)$; $j(i)$ — i -й член в перестановке j , $i = \overline{1, k}$, $k \leq r$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любых $t = \overline{1, T}$; $j(i)$, $i = \overline{1, k}$ имеет место равенство

$$E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i), t} \right) = (N)_k \prod_{i=1}^k q_{j(i), t}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k < r$. При этом N элементов системы распределяются по $(k+1)$ классу так, что первые k классов содержат соответственно по $n_{j(i), t}$, $i = \overline{1, k}$, $t = \overline{1, T}$ элементов, а к $(k+1)$ классу отнесем элементы системы, не принадлежащие в данный момент времени t , $t = \overline{1, T}$ ни к одному из них. Этот класс будет содержать $\left(N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t} \right)$ элементов в момент времени t , $t = \overline{1, T}$. Вероятность такого разбиения определим по аналогии с (3), т. е.

$$P(\tilde{n}(t) | \tilde{q}(t), N) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^k n_{j(i), t}! \left(N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t} \right)!} \times \\ \times \prod_{i=1}^k q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}} \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right)^{N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t}}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{n}(t) = \left(n_{j(1), t}, n_{j(2), t}, \dots, n_{j(k), t}, \left(N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t} \right) \right), \\ \tilde{q}(t) = \left(q_{j(1), t}, q_{j(2), t}, \dots, q_{j(k), t}, \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right) \right).$$

Далее, исходя из определения математического ожидания, получаем:

$$E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i), t} \right) = \sum_{\substack{n_{j(i), t} \\ i=1, k}} \prod_{i=1}^k n_{j(i), t} P(\tilde{n}(t) | \tilde{q}(t), N),$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i), t}$, $i = \overline{1, k}$. После несложных преобразований из последнего соотношения следует:

$$E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i), t} \right) = (N)_k \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \sum_{\substack{n_{j(i), t} \\ i=1, k}} \frac{1}{\prod_{i=1}^k (n_{j(i), t} - 1)!} \times \\ \times \frac{(N-k)!}{\left(N - k - \sum_{l=1}^k (n_{j(l), t} - 1) \right)!} \prod_{i=1}^k q_{j(i), t}^{n_{j(i), t} - 1} \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right)^{N - k - \sum_{l=1}^k (n_{j(l), t} - 1)}. \quad (7)$$

Сумма в правой части (7) равна 1 как $(N-k)$ -я степень полинома $\left(q_{j(1), t} + \dots + q_{j(k), t} + \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right) \right)$. Таким образом, для случая $k < r$ утверждение леммы 1 доказано.

Для случая $k = r$ доказательство проводится аналогичным образом, используя представление (3) непосредственно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых $t = \overline{1, T}$, $j(i)$, $i = \overline{1, k}$ имеет место равенство

$$E \left(\prod_{i=1}^m n_{j(i), t} \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} \right) = \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \left\{ (N)_k + (N)_{k+1} \sum_{i=1}^m q_{j(i), t} + \right. \\ \left. + (N)_{k+2} \sum_{i_1=1}^{m-1} \sum_{i_2=i_1+1}^m q_{j(i_1), t} q_{j(i_2), t} + \dots + (N)_{k+m-1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \dots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^m \prod_{v=1}^{m-1} q_{j(i_v), t} + (N)_{k+m} \prod_{v=1}^m q_{j(v), t} \right\},$$

где m — любое целое число из интервала $[0, k]$.

Доказательство. Его также проведем лишь для случая $k < r$. Используя формулу (6), получаем:

$$E \left(\prod_{i=1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} \right) = \sum_{\substack{n_{j(i), t} > 0 \\ i=1, k}} \prod_{t=1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{t=m+1}^k n_{j(i), t} P(\tilde{n}(t) | \tilde{q}(t), N),$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i), t}$, $i = \overline{1, k}$.

После несложных преобразований из последнего соотношения следует:

$$E \left(\prod_{i=1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} \right) \sum_{\substack{n_{j(i), t} > 1 \\ i=1, k}} \prod_{i=1}^m n_{j(i), t} \times \\ \times \frac{N!}{\prod_{i=1}^k (n_{j(i), t} - 1)! \left(N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t} \right)!} \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right)^{N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t}}. \quad (8)$$

Для дальнейшего преобразования правой части соотношения (8) заметим, что

$$\prod_{i=1}^m n_{j(i), t} = 1 + \sum_{i_1=1}^m (n_{j(i_1), t} - 1) + \sum_{i_1=1}^{m-1} \sum_{i_2=i_1+1}^m (n_{j(i_1), t} - 1)(n_{j(i_2), t} - 1) + \dots + \\ + \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \dots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^m \prod_{v=1}^{m-1} (n_{j(i_v), t} - 1) + \prod_{v=1}^m (n_{j(v), t} - 1). \quad (9)$$

Кроме того, для любого $S = \overline{1, m}$ имеет место равенство:

$$\sum_{\substack{n_{j(i), t} > 1 \\ i=1, k}} \prod_{v=1}^S (n_{j(i_v), t} - 1) \frac{N!}{\prod_{i=1}^k (n_{j(i), t} - 1)! \left(N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t} \right)!} \times \\ \times \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \left(1 - \sum_{l=1}^k q_{j(l), t} \right)^{N - \sum_{l=1}^k n_{j(l), t}} = (N)_{k+S} \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \prod_{v=1}^S q_{j(i_v), t}. \quad (10)$$

Подставляя правую часть соотношения (9) в формулу (8) и используя результаты (7), (10), получаем утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим несколько частных случаев утверждения леммы 2. Полагая $m = k = 1$, получаем

$$E(n_{j(1), t}^2) = q_{j(1), t} [N + (N)_2 q_{j(1), t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = k = 2$, получаем

$$E(n_{j(1), t}^2 n_{j(2), t}^2) = q_{j(1), t} q_{j(2), t} [(N)_2 + (N)_3 (q_{j(1), t} + q_{j(2), t}) + (N)_4 q_{j(1), t} q_{j(2), t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = 1, k = 2$, получаем

$$E(n_{j(1), t}^2 n_{j(2), t}) = q_{j(1), t} q_{j(2), t} [(N)_2 + (N)_3 q_{j(1), t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = 1, k = 3$, получаем

$$E(n_{j(1), t}^2 n_{j(2), t} n_{j(3), t}) = q_{j(1), t} q_{j(2), t} q_{j(3), t} [(N)_3 + (N)_4 q_{j(1), t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Далее, пусть $\Omega_k = (1, 2, \dots, k)$, $\omega(\Omega_k)$ — функция мощности множества Ω_k ; $\Omega_k(s)$ — некоторое подмножество множества Ω_k , имеющее мощность S , $0 \leq S \leq k$; $\sum_{\Omega_k(s)}$ — суммирование по всем C_k^S подмножествам $\Omega_k(S)$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Для любых $t = \overline{1, T}$, $j(i)$, $i = \overline{1, k}$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t}\right) &= \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \times \\ &\times \sum_{S=0}^m \sum_{\Omega_m(S)} 2^{\omega(\Omega_l \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_m(S)} q_{j(i), t} \times \\ &\times \sum_{Z=0}^l \sum_{\Omega_l(Z)} (N)_{k+S+Z} 2^{-\omega(\Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_l(Z)} q_{j(i), t} \end{aligned}$$

где l, m — любые целые числа из интервала $[0, k]$ такие, что $l \leq m$.

Доказательство. Его, как и доказательство леммы 2, проведем лишь для случая $k < r$. Используя формулу (6), получаем:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t}\right) &= \sum_{i=\overline{1, k}} n_{j(i), t} \prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \times \\ &\times \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} P(\tilde{n}(t) | \tilde{q}(t), N), \end{aligned}$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i), t}$, $i = \overline{1, k}$. Применяя к правой части последнего соотношения последовательно преобразования, которые использовались при доказательстве лемм 1, 2, получим:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t}\right) &= \sum_{i=\overline{1, k}} n_{j(i), t} \prod_{i=1}^l n_{j(i), t} \dots n_{j(i), t} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{i_1=1}^m (n_{j(i_1), t} - 1) + \sum_{i_1=1}^{m-1} \sum_{i_2=i_1+1}^m (n_{j(i_1), t} - 1) (n_{j(i_2), t} - 1) + \right. \\ &\left. + \dots + \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \dots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^m (n_{j(i_1), t} - 1) \dots (n_{j(i_{m-1}), t} - 1) + \right. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& + (n_{j(1), t-1}) (n_{j(2), t-1}) \dots (n_{j(m), t-1}) \} \times \\
& \times \frac{N!}{\prod_{i=1}^k (n_{j(i), t-1})! \left(N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t} \right)!} \prod_{i=1}^k q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}} \left(1 - \sum_{i=1}^k q_{j(i), t} \right)^{N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t}}.
\end{aligned}$$

Используя принятые обозначения, перепишем правую часть соотношения (11) в другой равносильной форме. Получим

$$\begin{aligned}
& E \left(\prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} \right) = \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \times \\
& \times \sum_{S=0}^m \sum_{\Omega_m(S)} \sum_{\substack{n_{j(i), t} \\ i=1, k}} \left\{ \prod_{i \in \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-1}) \prod_{i \in \Omega_l \cap \Omega_m(S)} n_{j(i), t} \prod_{i \in \Omega_l / \Omega_m(S)} n_{j(i), t} \times \right. \\
& \times \left. \frac{N!}{\prod_{i=1}^k (n_{j(i), t-1})! \left(N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t} \right)!} \prod_{i=1}^k q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}} \left(1 - \sum_{i=1}^k q_{j(i), t} \right)^{N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t}} \right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}
& \prod_{i \in \Omega_l \cap \Omega_m(S)} n_{j(i), t} \prod_{i \in \Omega_l / \Omega_m(S)} n_{j(i), t} = \prod_{i \in \Omega_l \cap \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-2} + 2) \times \\
& \times \prod_{i \in \Omega_l / \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-1} + 1) = \sum_{Z=0}^l \sum_{\Omega_l(Z)} 2^{\omega(\Omega_l \cap \Omega_m(S)) - \omega(\Omega_l(Z) / \Omega_m(S))} \times \\
& \times \prod_{i \in \Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-2}) \prod_{i \in \Omega_l(Z) / \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-1}),
\end{aligned}$$

то, подставляя правую часть последнего равенства в формулу (12), получим:

$$\begin{aligned}
& E \left(\prod_{i=1}^l n_{j(i), t}^3 \prod_{i=l+1}^m n_{j(i), t}^2 \prod_{i=m+1}^k n_{j(i), t} \right) = \prod_{i=1}^k q_{j(i), t} \times \\
& \times \sum_{S=0}^m \sum_{\Omega_m(S)} 2^{\omega(\Omega_l \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_m(S)} q_{j(i), t} \times \sum_{Z=0}^l \sum_{\Omega_l(Z)} 2^{-\omega(\Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_l(Z)} q_{j(i), t} \times \\
& \times \sum_{\substack{n_{j(i), t} \\ i=1}} \frac{N!}{\prod_{i \in \Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S)} (n_{j(i), t-3})! \prod_{i \in \Omega_m(S) \cup \Omega_l(Z)} (n_{j(i), t-2})!} \times \\
& \times \frac{1}{\prod_{i \in \Omega_l / (\Omega_m(S) \cup \Omega_l(Z))} (n_{j(i), t-1})! \left(N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t} \right)!} \prod_{i \in \Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S)} q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}-3} \times \\
& \times \prod_{i \in \Omega_m(S) \cup \Omega_l(Z)} q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}-2} \prod_{i \in \Omega_l / \Omega_m(S) \cup \Omega_l(Z)} q_{j(i), t}^{n_{j(i), t}-1} \left(1 - \sum_{i=1}^k q_{j(i), t} \right)^{N - \sum_{i=1}^k n_{j(i), t}}.
\end{aligned}$$

Применяя в заключение преобразования, аналогичные выводу соотношения (7), на основании известных свойств полиномиального распределения получаем утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим несколько частных случаев утверждения леммы 3. Полагая $l = m = k = 1$, получим:

$$E(n_{i,t}^3) = q_{i,t} [(N + (N)_2 q_{i,t}) + 2q_{i,t} ((N)_2 + (N)_3 2^{-1} q_{i,t})] = \\ = q_{i,t} [N + 3(N)_2 q_{i,t} + (N_3) q_{i,t}^2], \quad i = \overline{1, r}; \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $l = m = k = 2$, получим:

$$E(n_{i,t}^3 n_{j,t}^3) = q_{i,t} q_{j,t} \{ ((N)_2 + (N)_3 (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_4 q_{i,t} q_{j,t}) + \\ + (2q_{i,t} ((N)_3 + (N)_4 (2^{-1} q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_5 2^{-1} q_{i,t} q_{j,t}) + \\ + 2q_{j,t} ((N)_3 + (N)_4 (q_{i,t} + 2^{-1} q_{j,t}) + (N)_5 2^{-1} q_{i,t} q_{j,t}) + \\ + 4q_{i,t} q_{j,t} ((N)_4 + (N)_5 2^{-1} (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_6 2^{-2} q_{i,t} q_{j,t}) \} = \\ = q_{i,t} q_{j,t} \{ (N)_2 + 3(N)_3 (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_4 (q_{i,t}^2 + 9q_{i,t} q_{j,t} + q_{j,t}^2) + \\ + 3(N)_5 q_{i,t} q_{j,t} (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_6 q_{i,t}^2 q_{j,t} \}, \quad i, j = \overline{1, r}; \quad i \neq j, \quad t = \overline{1, T}$$

Полагая $l = 1, m = 2, k = 3$, получим в итоге

$$E(n_{j(1),t}^3 n_{j(2),t}^2 n_{j(3),t}) = q_{j(1),t} q_{j(2),t} q_{j(3),t} \{ (N)_3 + (N)_4 (3q_{j(1),t} + q_{j(2),t}) + \\ + (N)_5 q_{j(1),t} (q_{j(1),t} + 3q_{j(2),t}) + (N)_6 q_{j(1),t}^2 q_{j(2),t} \}, \quad t = \overline{1, T}.$$

В заключение отметим также, что, полагая $l = 0$, из леммы 3 получим утверждение леммы 2, а при $l = m = 0$ — леммы 1. Кроме того, лемма 3 обобщает результаты работы [2], т. е. леммы 2, 4, 6, применительно к одному и тому же моменту наблюдения.

Список литературы

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.
2. Снйкевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов высших порядков агрегированных случайных характеристик однородной марковской цепи // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 40.

Поступила в редакцию 08.10.91.

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12

Полозов М. П., Шэбе Х. (Германия). Электрореологический эффект в ОТО // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Развито общерелятивистское описание электрореологического эффекта (ЭРЭ), основанное на теории эволюции материальных параметров жидкости, движущейся во внешнем гравитационном поле. Показано, что при выбранном законе эволюции специального вида ЭРЭ приобретает анизотропию. Полученные результаты применяются к системе, движущейся в поле Шварцшильда.

Библиогр. 8 назв.

УДК 621.315.592:546.28

Урбанович А. И., Новиков А. П., Нгуен Ван Конг (СРВ). Термоупругая генерация продольных акустических колебаний при торможении быстрых заряженных частиц в кристаллах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Проведен расчет акустического сигнала от перегретой области вблизи трека заряженной частицы, проходящей через пластину мишени с учетом как поперечного размера трека, так и временной зависимости мощности энерговыделения.

Библиогр. 2 назв., ил. 3.

УДК 621.373.826

Аддаси Джихад (Иордания), Толстик А. Л., Чалей А. В. Фазовый отклик растворов красителей, индуцируемый переходами между возбужденными электронными состояниями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Теоретически исследовано светоиндуцированное изменение показателя преломления раствора красителя, обусловленное поглощением с возбужденных уровней молекул, при оптической подкачке в основную полосу поглощения. Рассмотрено влияние на резонансную и тепловую нелинейность переходов в основном и в возбужденном синглетном либо триплетном каналах.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 535.35

Онщенко Н. С. Немарковость дефазировки квантовых систем в когерентной спектроскопии. Ч. I // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Описана немарковская дефазировка квантовых систем на основе обобщенных квантово-кинетических уравнений. Моделью стохастических флуктуаций, вызывающих дефазировку, выбран телеграфный процесс. В качестве приложений рассмотрен ряд нестационарных нелинейно-оптических когерентных явлений.

Библиогр. 11 назв., ил. 1.

УДК 517.926

Халпалюк А. П. Обобщенные решения уравнений Эйлера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Показано, что обыкновенное линейное дифференциальное уравнение Эйлера n -го порядка имеет в области обобщенных функций $2n$ линейно независимых частных решений. Пояснены причины, приводящие к удвоению числа решений по сравнению с классическими результатами.

Библиогр. 6 назв.

УДК 535.513

Титов А. Д. Поляризационные свойства прямоугольного световозвращателя. 2. Металлизация части отражающих граней // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

При помощи матричного метода Джонса исследованы поляризационные состояния излучения, отраженного от прямоугольных световозвращателей, не все боковые грани которых металлизированы, при линейно-поляризованном падающем излучении. Изучены случаи серебряных, алюминированных, золоченых и медяных отражающих граней при различных длинах волн.

Библиогр. 7 назв., ил. 4, табл. 1.

УДК 535.37

Горбачевич С. К., Гулис И. М., Рамма Яшвантрао (Маврикий). Влияние безызлучательного индуктивно-резонансного переноса энергии электронного возбуждения на спектрально-кинетические характеристики замедленной флуоресценции твердых растворов профлавина // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Экспериментально и теоретически рассмотрено влияние безызлучательного индуктивно-резонансного S—S-переноса энергии электронного возбуждения на спектральные и временные характеристики замедленной флуоресценции твердых растворов профлавина в матрице поливинилового спирта. Показано, что результатом синглет-синглетного переноса энергии является сокращение длительности замедленной флуоресценции. Кроме того, соотношение интенсивностей флуоресценции донора и сенсibilизированной флуоресценции акцептора (родамина 6G) различны для быстрого и замедленного свечения.

Библиогр. 8 назв., ил. 2.

УДК 539.193/194:661.729

Зятков И. П., Княжевнич Н. Д., Гоголинский В. И., Пидевич Г. А. Квантовохимические расчеты структуры и конформаций кремнийорганических пероксидов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Проведены квантовохимические расчеты геометрического строения и электронной структуры семи органических и кремнийорганических пероксидов полуэмпирическим методом МО ЛКАО в приближении MNDO с полной оптимизацией всех геометрических параметров. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными структурных исследований.

Библиогр. 8 назв., ил. 1, табл. 5.

УДК 669.15:546.72

Сухвало С. В., Конюшко Л. И. Свойства интерметаллических соединений $GdFe_2$ и $ErFe_2$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Изучены свойства магнитных поликристаллических массивных образцов $GdFe_2$, аморфных и поликристаллических пленок того же состава, а также аморфных пленок $ErFe_2$ в диапазоне $T = 150 \div 800$ К. На основании полученных результатов проведено выявление фазовых магнитных превращений типа спиновой переориентации, установлены температурные области их протеканий. По признаку наличия тепловых эффектов и температурного гистерезиса свойств в переходной области выявленные превращения отнесены к фазовым переходам первого рода.

Библиогр. 10 назв., ил. 4.

УДК 546.28:621.315.592

Борщевский В. В., Бринкевич Д. И., Мераан Ф. (САР), Петров В. В. Взаимодействие золота и кислорода в монокристаллическом кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Методами измерения спектров ИК поглощения, эффекта Холла и проводимости исследованы процессы диффузии в кислородсодержащем кремнии. Показано, что в кремнии, выращенном из расплава по методу Чохральского, в процессе диффузии золото эффективно взаимодействует с преципитатами кислорода, что способствует переходу его в электрически неактивное состояние и уменьшению степени компенсации проводимости в кислородсодержащих материалах.

Библиогр. 5 назв., ил. 2, табл. 2.

УДК 517.976

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных эстиматоров для линейных динамических систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Рассматривается задача оценивания состояния динамической системы. Описывается метод построения оптимального эстиматора, который в режиме реального времени строит оценки начального состояния.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517.518

Корзюк В. И. **Об операторах осреднения с переменным шагом. I** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Рассматриваются операторы осреднения с переменным шагом, сохраняющие на границе области условия осредняемых функций, если последние имеют смысл на границе. Операторы строятся с помощью операторов осреднения Соболева и леммы о разбиении единицы. Для указанных операторов изучаются свойства, необходимые для доказательства теорем о существовании и единственности решений граничных задач для дифференциальных задач.

Библиогр. 31 назв.

УДК 532.546

Видякин В. В., Харразова И. Р. **К решению стационарных задач фильтрации с переменным начальным градиентом** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

На основе использования метода граничных интегральных уравнений построены и анализируются решения стационарных задач нелинейной фильтрации в системе скважины.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 517.948.32:517.544

Штин С. Л. **Явное решение одной задачи Римана для пятимерного вектора** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Приводится решение в замкнутой форме задачи сопряжения Римана пятого порядка с кусочно-постоянным коэффициентом. Это решение удается получить с помощью редукции исходной задачи к матричной задаче порядка 4 благодаря специальному виду ее коэффициента и последующему сведению 4-мерной задачи к задаче сопряжения на плоскости.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Шевла Т. А. **Краевая задача Карлемана в пространствах E_p** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Рассматривается краевая задача Карлемана на простом замкнутом контуре с непрерывным коэффициентом. Решение ищется в пространствах E_p . Построено явное решение задачи.

Библиогр. 2 назв., ил. 1.

УДК 517.925

Чичурин А. В. **О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Получены достаточные условия существования и указан вид решений, обладающих заданными предельными свойствами у специальных классов нормальных дифференциальных систем конечного порядка с рациональными относительно искомым функций правыми частями.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.852.6

Медведев В. Г. **Численный эксперимент по решению линейных полубесконечных экстремальных задач** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Приводятся результаты численного решения на ЭВМ и ППЭВМ двух линейных полубесконечных экстремальных задач. Сравняется метод опорных задач с методом математического программирования.

Библиогр. 3 назв., табл. 2.

УДК 517.977

Забелло Л. Е., Рачок В. М. Одно решение вырожденной задачи для систем с распределенным запаздыванием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Решена вырожденная линейно-квадратичная задача в специальном классе дискретных управлений типа обратной связи. Метод определения параметров управления близок к известному методу А. Манитуса для исследования невырожденных задач в классе кусочно-непрерывных управлений.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.233.2

Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов случайных характеристик однородной марковской цепи для полиномиальной схемы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2.

Получены формулы для вычисления математического ожидания произведения произвольного числа частот состояний однородной марковской цепи, взятых в одинаковые моменты времени, при условии, что степень каждого множителя ≤ 3 .

Библиогр. 2 назв.

Handwritten calculations and notes:

6310
4

24840

5 572 0

7570
2

15020

саче 24840
сатар 15020
4500
7100
11500

63260

1200

24

6310
3000

9310