

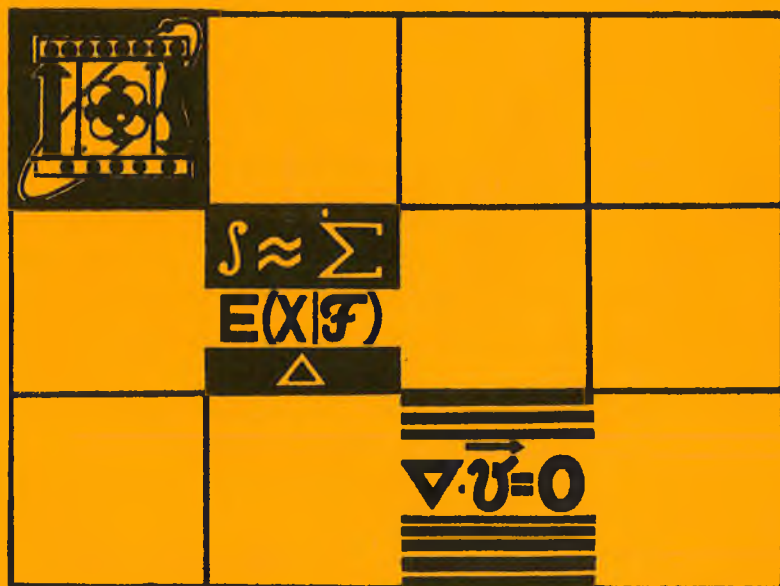
ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

3 '91



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Федоров Ф. И., Барковский Л. М. Группы операторов Коши в оптике и акустике кристаллов	3
Ничипор И. В., Феранчук И. Д., Ульянчиков А. П. Решение уравнения Шредингера для квантовых систем в периодических полях	11
Сягло И. С. Простой вывод в шестимерной форме уравнений связи электродинамики движущихся сред	14
Шишкин Г. В., Мохаммед Али Ясин (Ирак). О точном описании дираковской частицы в векторном и тензорном полях. II	17
Новиков А. П., Урбанович А. И., Нгуен Ван Конг. Акустические колебания в кристаллах, возбуждаемые пучками частиц	18
Грузинский В. В. Соотношение между спектрами поглощения оптического излучения, рассеяния электронов и люминесценции паров флуоренона	21
Горбачев С. К., Гулис И. М. Системы органолюминофоров с переносом энергии как перспективные среды для нелинейных светопроводящих транспарантов	26
Бакиновская Л. Н., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. Н. Преобразователь двоичного кода в двоично-десятичный с использованием D-триггеров	30

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Габасов Р., Кириллова Ф. М. Устойчивость, стабилизация, оптимальность	35
Забрейко П. П. С-теория линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода	38
Зверович Э. И. Явное решение одной задачи о вдавливании прямолинейного штампа в упругую полосу	43
Медведев Г. А. О соответствии регрессионных и авторегрессионных моделей случайных процессов и полей	47
Харин Ю. С. Асимптотический анализ робастности оценок минимального контраста	55
Юрчук Н. И., Яшкин В. И. О классическом решении смешанной задачи для трехмерного гиперболического уравнения с центральной симметрией	59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Мозолевский И. Е., Корзюк А. В., Рогач В. П. Метод конечных элементов решения задач со смешанными граничными условиями для уравнения Пуассона на плоскости в областях со сложной геометрией	64
Козел П. Т. Строение элементов ортогональной группы четной степени над алгебраически замкнутым полем характеристики 2	68
Русак В. Н., Та Хонг Куанг (СРВ). О сравнении наилучшего рационального и полиномиального приближения в круге $ z \leq 1$	69
Луцевич Ж. А. К теории дифференциальных уравнений второго порядка, общий интеграл которых не имеет подвижных критических точек	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Федор Иванович Федоров	74
------------------------	----

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

3 '91

СЕНТЯБРЬ



МИНСК
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ“

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (*ответственный редактор*),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*),
В. В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), А. М. БЕЛЬ-
СКИЙ (*ответственный секретарь*), Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГА-
БАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕ-
РОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕШИН-
СКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИ-
РОНЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕР-
НЯВСКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ,
Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия I: Физ. Мат. Мех. 1991, № 3

Редактор *А. И. Гуторова*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *Д. Е. Дивин*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 02.07.91. Подписано в печать 11.09.91. Формат 70×108¹/₁₆.
Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,32.
Уч.-изд. л. 7,1. Тираж 720 экз. Заказ 377. Цена 1 р.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства «Бело-
русский Дом печати». 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 535.343.2; 535.548; 538.951-405; 539.219.3

Ф. И. ФЕДОРОВ, Л. М. БАРКОВСКИЙ

ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ КОШИ В ОПТИКЕ И АКУСТИКЕ КРИСТАЛЛОВ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-групповые методы широко применяются для исследования физических систем. В частности, используется метод теории групп и алгебр Ли. В электродинамике групповые методы впервые применил Пуанкаре, установив групповую структуру преобразований Лоренца и введя группу преобразований поляризации света, изображаемую сферой Пуанкаре [1—3]. Симметричные исследования уравнений Максвелла в вакууме производились рядом авторов [4, 5]. Однако исследованию симметрий уравнений оптики и акустики с учетом анизотропии, т. е. различных уравнений связи, почти не уделено внимания. Эти уравнения определяют функции отклика материальной среды на внешние электромагнитные или механические воздействия. Сюда относятся, например, такие характеристики среды и поля в ней, как операторы диэлектрической и магнитной проницаемостей, операторы модулей упругости, гиационные операторы и др. [6—10]. Эти операторы обладают рядом общих свойств, выводимых из таких фундаментальных принципов, как симметрия, причинность, устойчивость и т. д. без использования микроскопических моделей среды. Они тесно связаны с операторами рассеяния волн [11]. Соотношения, описывающие эти свойства, привлекают пристальное внимание занимающихся линейной и нелинейной электродинамикой и акустикой. Вскрываются все новые некорректности, неточности ряда утверждений, относящихся к таким свойствам. Это касается, например, гиротропных пространственно-диспергирующих сред [7, 9, 10] и ряда других случаев (см. [12]). Новые подходы требуются для описания усиливающих и нелинейных сред. Обнаружение способности многих физических систем к самоорганизации, существование эффектов обращения волновых фронтов, сжатия состояний, оптической и акустической бистабильности и др. требуют разработки описания, базирующегося на симметричном анализе.

В настоящей статье, являющейся в основном обзором работ [9, 10, 13—17], рассматриваются операторы Коши для волновых уравнений кристаллооптики и кристаллоакустики. В работах по оптике и акустике тот факт, что решения соответствующих уравнений обладают групповыми свойствами, до недавнего времени оставался в тени. Между тем его учет позволяет производить систематизацию их волновых свойств.

Векторная природа электромагнитного поля и поля смещений упругих волн естественно приводит к применению методов функционального анализа. Давно установлена глубокая аналогия между векторами (точками в линейном пространстве) и функциями (точками в функциональном пространстве). Явления дисперсии, анизотропии, гиротропии, дихро-

изма, отражения, преломления, дифракции, рефракции и др. описываются на языке спектральных разложений волновых операторов. Среди последних важную роль играют операторы Коши, представляемые в ряде случаев операторными экспонентами.

Давно известна форма представления ряда Тейлора в символическом (операторном) виде:

$$f(x+h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) = T_h f(x), \quad (1)$$

где используется формальное разложение в ряд операторной экспоненты

$$T_h = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k}. \quad (2)$$

Оператор (1), (2) является оператором сдвига [11]. Большинство линейных операторов, используемых в гармоническом анализе, связано с линейными операторами сдвига T_h , которые обладают групповыми свойствами

$$T_0 = 1, \quad T_{a+b} = T_a T_b, \quad T_{-a} = T_a^{-1}. \quad (3)$$

Если T_a имеет инвариантные подпространства u_i , то можно рассматривать его действие на каждом u_i отдельно. Каждое одномерное инвариантное подпространство u порождается функцией f , которая служит совместным собственным вектором всех T_a .

1. Тензорные дисперсионные уравнения

Уравнения Максвелла для электромагнитных векторных волн $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(\zeta) e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\zeta) e^{-i\omega t}$, где $\zeta = \mathbf{r}\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой (фазовой) нормали, имеют вид:

$$\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{H}}{d\zeta} = ik_0 \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\zeta} - ik_0 \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{n} \times$ — антисимметричный тензор, дуальный вектору $\mathbf{n}$; $k_0 = \frac{\omega}{c}$; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — индукции электрического и магнитного полей. При наличии уравнений связи $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ из (4) следует уравнение (см. [13—15]):

$$\mathbf{n} \times \epsilon^{-1} \mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\zeta^2} + k_0 \mu \mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

Аналогично для упругих волн $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\zeta) e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u}$ — вектор смещения частиц среды) получаются уравнения [15]:

$$\Lambda \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\zeta^2} + \omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Здесь $(\Lambda)_{ac} = \frac{1}{\rho} c_{abcd} n_b n_d$, а $\frac{1}{\rho} c_{abcd}$ — приведенный тензор модулей упругости [8], ρ — плотность среды. Уравнения (5) (и аналогичные уравнения для $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$) так же, как (6) имеют общую форму:

$$\alpha \frac{d^2 \mathbf{F}}{d\zeta^2} + \kappa^2 \mathbf{F} = 0, \quad (7)$$

где α — некоторый тензор; κ — скалярная постоянная. При этом следует учитывать, что в случае (5) детерминант $|\alpha| = 0$, а в случае (6) $|\alpha| \neq 0$. Поэтому в последнем случае существует обратный тензор α^{-1} и уравнение (7) может быть записано в виде:

$$d^2 \mathbf{F} / d\zeta^2 = -\kappa^2 \alpha^{-1} \mathbf{F}. \quad (8)$$

Как известно, линейные дифференциальные уравнения вида $d\mathbf{F}/d\zeta = \kappa \mathbf{F}$ или $d^2 \mathbf{F} / d\zeta^2 = \kappa \mathbf{F}$, где κ — постоянное число, имеют соответственно решения $\mathbf{F} = \mathbf{C} e^{\kappa \zeta}$ или

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_+ e^{\sqrt{\kappa} \zeta} + \mathbf{C}_- e^{-\sqrt{\kappa} \zeta}, \quad (9)$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{\pm}$ — произвольные постоянные векторы. Аналогично могут быть написаны и решения уравнений типа (8):

$$\mathbf{F} = e^{\pm i\kappa\beta\xi} \mathbf{F}_0, \quad \beta = \sqrt{\alpha^{-1}}, \quad (10)$$

где $\mathbf{F}_0$ — произвольный постоянный вектор, а в экспоненте стоит квадратный корень из матрицы, т. е. матрица β , удовлетворяющая соотношению $\beta^2 = \alpha^{-1}$. Экспоненциальный оператор в формуле (10) удовлетворяет групповым условиям (3) и является примером оператора Коши. Такие операторы описывают решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [24] и в литературе иногда называются пропагаторами.

Для любой матрицы, не имеющей кратных собственных значений (и, следовательно, приводимой к диагональному виду), квадратный корень определяется просто. Если

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (11)$$

то

$$\sqrt{A} = S \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \pm \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \pm \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (12)$$

где S — матрица, преобразующая A к диагональной форме. Поскольку возможны все сочетания знаков, то $\sqrt{A}$ имеет 2^n различных значений. Выбор возможных значений β в решении (10) должен производиться на основании граничных или иных условий.

Уравнение типа (8) можно получить из (7) и в том случае, когда α — особенная матрица ($|\alpha| = 0$). Хотя при этом не существует обратная матрица α^{-1} , однако вместо нее можно взять псевдообратную матрицу α^{-} (см. [18]), и соответственно в выражении (10) для $\mathbf{F}$ будем иметь $\beta = \sqrt{\alpha^{-}}$. Для трехмерных тензоров с одним нулевым собственным значением в [19] даны ковариантные алгоритмы псевдообращения и извлечения квадратного корня. Ковариантный алгоритм псевдообращения в общем случае любых квадратных матриц изложен в [20]. В результате мы в любом случае приходим к общему выводу: для плоских монохроматических волн, как электромагнитных, так и упругих, в произвольной среде векторы, характеризующие волновое поле, должны выражаться в универсальной форме вида (10):

$$\mathbf{F}(t, \xi) = e^{i(\omega t - \kappa N \xi)} \mathbf{F}_0, \quad (13)$$

где N — некоторый тензор; $\kappa = k_0 = \omega/c$ для электромагнитных волн и $\kappa = \alpha \sqrt{\rho}$ для упругих волн. Соотношение, определяющее тензор N , получается при подстановке выражения (13) в уравнение (7) и имеет вид:

$$\alpha N^2 - 1 = 0. \quad (14)$$

В случаях (5), (6) матрица α соответственно равна $\mu^{-1} \mathbf{p} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{p} \times$ или $c_{abcd} n_b n_d$.

Если сравнить (13) с общепринятым в литературе выражением, например, для вектора магнитного поля плоской волны: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega(t - \frac{1}{c} n \xi)}$ где n — показатель преломления, то различие сведется к тому, что вместо скаляра n появляется тензор N . Естественно поэтому назвать N тензором показателей преломления. Этот тензор был введен в работах [21, 22, 9]. В одноосных средах тензор N имеет следующую спектральную форму:

$$N = n_e \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + n_o [\mathbf{p} \mathbf{e}] \cdot [\mathbf{p} \mathbf{e}], \quad \mathbf{e} = \frac{[\mathbf{p} \mathbf{c}]}{|\mathbf{p} \mathbf{c}|}, \quad (15)$$

где $\mathbf{c}$ — единичный вектор оптической оси,

$$n_0 = \sqrt{\epsilon_0}, \quad n_e = \left\{ \frac{\epsilon_0 \epsilon_e}{\epsilon_0 + (\epsilon_e - \epsilon_0) (\pi c)^2} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

— показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн [6, 7]. Точки между векторами в (15) обозначают диады, являющиеся поляризационными проекторами соответствующих волн [25].

Уравнение, связывающее показатель преломления с параметрами среды, обычно называют дисперсионным уравнением. Для электромагнитных волн в изотропной среде оно выражается соотношением Максвелла $n^2 - \epsilon \mu = 0$, в котором фигурируют только скалярные величины *). В кристаллах дисперсионное уравнение, полученное впервые Френелем и часто называемое «уравнением нормалей» [6, 7], имеет более сложный вид. Общая ковариантная форма дисперсионного уравнения в произвольных кристаллах, где вместо скалярного показателя преломления фигурирует вектор рефракции $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ в общем случае комплексный, была получена в работе [23] (см. также монографии [6—8]). Введение вектора рефракции [23] позволило связать воедино такие фундаментальные характеристики плоской волны, как показатель преломления, коэффициент затухания, направления фазовой и амплитудной нормалей. Однако дисперсионное уравнение оставалось скалярным уравнением для вектора $\mathbf{m}$.

Примененный в [9, 10, 13—17] подход представляет собой дальнейший шаг в направлении объединения характеристик плоских волн, распространяющихся в произвольных средах. Поскольку вместо скалярного показателя преломления вводится тензор показателей преломления N , то и дисперсионное уравнение [14] по необходимости приобретает тензорный характер. Преимущество такого подхода состоит в том, что оператор (тензор) показателей преломления N описывает сразу обе изонормальные собственные электромагнитные волны, возникающие в анизотропной среде (или три такие волны в случае упругих волн), т. е. все волновое поле, соответствующее заданному $\mathbf{n}$.

Очевидно, наличие тензора N в экспоненте формулы (13) означает, что фаза

$$\varphi = \omega t - \mathbf{n} N \boldsymbol{\zeta} \quad (17)$$

приобретает операторный характер. Таким образом, введение тензора показателей преломления естественно влечет за собой введение понятия операторной фазы.

Из формулы (13) при $t=0$, $\boldsymbol{\zeta}=0$ следует, что $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(0, 0)$, таким образом, в общем случае

$$\mathbf{F}(t, \boldsymbol{\zeta}) = e^{i(\omega t - \mathbf{n} N \boldsymbol{\zeta})} \mathbf{F}(0, 0). \quad (18)$$

Отсюда ясно, что полученное решение имеет эволюционный характер, т. е. значение поля в точке $\boldsymbol{\zeta}$ в момент t определяется из его начального значения при $t=0$, $\boldsymbol{\zeta}=0$ путем действия эволюционного оператора σ (оператора Коши [24]):

$$\mathbf{F}(t, \boldsymbol{\zeta}) = \sigma(t, \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{F}(0, 0), \quad \sigma(t, \boldsymbol{\zeta}) = \exp(i \varphi). \quad (19)$$

Поскольку начальный вектор $\mathbf{F}_0$ может быть любым, то формула (19) относится к общему случаю распространения плосковолновых полей в анизотропной среде.

Для стационарных (ϵ , μ , Λ — постоянны) однородных сред операторные решения (19) можно записать в виде:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\zeta}, t) = (e^{ik_0 N \boldsymbol{\zeta}} \mathbf{a} + e^{-ik_0 N \boldsymbol{\zeta}} \mathbf{b}) e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Под N в (20) подразумевается ветвь корня уравнения (14), относящаяся к волнам, распространяющимся в одном и том же направлении $\mathbf{n}$. Здесь N — тензоры второго ранга, а векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются из начальных условий при $\boldsymbol{\zeta}=0$.

* Строго говоря, оптические свойства изотропной среды, ввиду наличия выделенного направления $\mathbf{n}$, также характеризуются не скаляром n , а тензором N (см. [16]).

В предположении, что векторы $F(0)$ и $(\partial F/\partial \xi)_{\xi=0}$ известны, находим:

$$F(\xi) = G_1(\xi) F_0 + G_2(\xi) \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}, \quad (21)$$

де

$$G_1(\xi) = \frac{\partial G_2(\xi)}{\partial \xi} = \cos(k_0 N \xi), \quad G_2(\xi) = \frac{1}{k_0} \sin(k_0 N \xi) N^{-1} \quad (22)$$

— функции Грина (пропаторы). Производные

$$\frac{\delta F(\xi)}{\delta F(0)} \Big|_{F'(0)} = G_1(\xi), \quad \frac{\delta F(\xi)}{\delta F'(0)} \Big|_{F(0)} = G_2(\xi) \quad (23)$$

являются тензорами и характеризуют зависимость решений (20), (21) от начальных условий в точке $\xi=0$. Если $F'(0) = (\partial F/\partial \xi)_{\xi=0} = ik_0 N F(0)$, то $b=0$ и имеем одно условие

$$\frac{\delta F(\xi)}{\delta F(0)} = e^{ik_0 N \xi} = \cos(k_0 N \xi) + i \sin(k_0 N \xi). \quad (24)$$

Тензор $N = N' + iN''$ может быть назван также оператором адмитанса и диссипативен при [16] условии $\frac{1}{2i}(N - N^+) = N'' \leq 0$.

Операторы Коши $\sigma^{(+)} = \exp[i\omega\rho(\xi_2 - \xi_1)]$ при вещественных положительных $\omega\rho(\xi_2 + \xi_1)$ (однородные волны) являются сжатиями, т. е. $\|\sigma^{(+)}\| \leq 1$. В недиссипативных средах $N = N^+$.

В ряде задач удобно использовать пространственно однородные (осцилляторные) представления полей в анизотропной среде, когда заданным считается волновой вектор k [21].

Уравнения (7), (8) и, как следствие, (13), (14) были получены из уравнений электромагнитного поля (движения упругой среды) в предположении, что $F = F(\xi) e^{i\omega t}$. Если же теперь пространственное изменение величины F определяется формулой $F = F(t) e^{ikr}$ (плоская волна), то уравнениям поля будут удовлетворять эволюционные решения

$$F(t, \xi) = e^{i(\Omega t - k\xi)} F(0, 0), \quad (25)$$

где Ω есть тензор второго ранга, находимый из уравнения

$$\Omega^2 + \alpha' = 0. \quad (26)$$

Для электромагнитного поля α' равно $c^2 \mu^{-1} k \times \epsilon^{-1} k \times$, где c — скорость света. Тензор второго ранга Ω , стоящий в показателе экспоненты на том месте, где обычно находится частота ω , естественно назвать тензором частот. Очевидно, он зависит как от характеристик волны (k), так и от свойств среды (ϵ, μ). Положим для простоты $\mu = 1$ и будем считать $F = H$, тогда для Ω находим из (26) выражение

$$\Omega = \Omega(k) = -\frac{1}{\Omega_t} k \times (\bar{\Omega}_t/k^2 + c^2 \epsilon^{-1}) k \times. \quad (27)$$

Для входящих в (27) следов имеем выражения [21]:

$$\Omega_t = c \sqrt{\epsilon_t^{-1} k^2 - k \epsilon^{-1} k} + 2 \sqrt{k^2 k \epsilon^{-1} k}, \quad (28)$$

$$\bar{\Omega}_t = c^2 \sqrt{k^2 k \epsilon^{-1} k}.$$

Имеет место равенство

$$\Omega^2 = -(kcN)^2. \quad (29)$$

Представления (18), (25) удобны для построения негармонических волновых полей в анизотропных средах методом Фурье [26].

Множество всех $F(t) = \exp(i\Omega t) F(0)$ есть однопараметрическая полугруппа (при $\xi \geq 0$), сжимающая при $\|F\| \leq 1$. Операторы $ik_0 N$ (14), (15) и $i\Omega$ (27) являются инфинитезимальными или производящими операторами (генераторами) соответствующих полугрупп. Ясно, что всевозможные решения (ветви) тензорных уравнений (14), (26) характеризуют симметрию поляризационных состояний в среде, т. е. виды тех поляриза-

ционных состояний волн, которые переносятся неизменными в различных направлениях нормали $\mathbf{n}$. При этом наряду с изонормальными волнами, распространяющимися в заданном направлении $\mathbf{n}$, появляются ветви N и Ω , соответствующие встречным волнам, распространяющимся в противоположном направлении.

2. Экспоненциальные френелевские операторы отражения от стратифицированных анизотропных сред

Один из распространенных способов описания преобразования волн на границах кристаллов основан на применении тензоров волнового сопротивления (тензоров импедансов). Соответствующая процедура вычисления тензоров отражения и пропускания на границе двух сред в общей ковариантной операторной трактовке с привлечением импедансных тензоров рассматривалась в [9, 10, 13—17].

Как показано выше, эволюция электромагнитного и акустического полей в однородных кристаллах характеризуется экспоненциальными операторами. Так же можно записать в экспоненциальной форме френелевские операторы R отражения волн на границе раздела анизотропных сред или на многослойных системах. Интегральные экспоненты для неоднородных кристаллов рассматривались в [13, 15].

Совокупности операторов отражения R и пропускания D многослойных систем реализуют некоторые новые разновидности групп Ли.

В случае нормального падения упругих волн на однородную или стратифицированную среду для решения задачи отражения (рассеяния назад) можно воспользоваться методом пересчета входного импеданса [27]. В работах [28, 29] этот метод был обобщен на случай стратифицированных оптически и акустически анизотропных сред.

Рассмотрим вначале однородный анизотропный акустический слой 2, находящийся между анизотропными полупространствами 3 и 1. Из полупространства 3 на слой по нормали падает упругая волна

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 \exp[i(Kz - \omega t)], \quad (30)$$

где $K = \omega \rho \gamma^{-1} = k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2 + k_3 \tau_3$ — тензор волновых чисел [31], τ_i ($i = 1, 2, 3$) — поляризационные проекторы. Волна (30) представляет собой суперпозицию трех изонормальных волн, волновые числа k_i ($i = 1, 2, 3$) которых являются собственными значениями тензора K [31].

В слое 2 установившуюся в результате многократных отражений результирующую упругую волну можно представить в виде суперпозиции двух бегущих суммарных волн вида (30), распространяющихся в противоположных направлениях: $\mathbf{u}_2 = \exp(iK_2 z) \mathbf{u}_2^+ + \exp(-iK_2 z) \mathbf{u}_2^-$. Здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается. На границе слоя 2 и полупространства 1 ($z=0$) условия непрерывности полных смещения и нормальной силы дают

$$\gamma_1 (\mathbf{u}_2^+ + \mathbf{u}_2^-) = \gamma_2 (\mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^-), \quad (31)$$

где γ_1, γ_2 — тензорные импедансы волн вида (30) [29] в полупространстве 1 и в слое 2 соответственно. Здесь учтено, что тензоры импеданса падающей и отраженной волн отличаются знаком. На границе слоя ($z = -l_2$, ось z направлена из 3 в 1), разделяющей среды 2 и 3, справедливо равенство

$$\gamma_2 [e^{-iK_2 l_2} \mathbf{u}_2^+ - e^{iK_2 l_2} \mathbf{u}_2^-] = \gamma_0 [e^{-iK_2 l_2} \mathbf{u}_2^+ + e^{iK_2 l_2} \mathbf{u}_2^-].$$

Отсюда с учетом (31) получаем следующее выражение для входного импеданса γ_0 анизотропного слоя:

$$\gamma_0 = \gamma_2 [e^{-iK_2 l_2} - e^{iK_2 l_2} (\gamma_2 + \gamma_1)^{-1} (\gamma_2 - \gamma_1)] \times \\ \times [e^{-iK_2 l_2} + e^{iK_2 l_2} (\gamma_2 + \gamma_1)^{-1} (\gamma_2 - \gamma_1)]^{-1}. \quad (32)$$

Сшивая акустические поля на границе $z = -l_2$ между слоем 2 и полупространством 3, для тензора отражения R ($\mathbf{u}_3 = R\mathbf{u}$) получаем

$$R = (\gamma_3 + \gamma_0)^{-1} (\gamma_3 - \gamma_0), \quad (33)$$

где γ_3 — импеданс волны (25) в среде 3, а γ_0 дается формулой (32). Если имеем многослойную структуру, состоящую из N слоев, то ее входной импеданс γ_0^N можно получить последовательным пересчетом импедансов по формуле (32) [28]. Тензор отражения многослойной среды аналогично (33) имеет вид:

$$R_N = (\gamma_{N+1} - \gamma_0^N)^{-1} (\gamma_{N+1} + \gamma_0^N), \quad (34)$$

где γ_{N+1} — импеданс волны (30) в $N+1$ среде, ограничивающей структуру сверху. Выражение для входного импеданса [28, 29] существенно упрощается, если тензоры импеданса γ_i , $i=0, 1, \dots, N+1$ всех слоев коммутируют между собой. В этом случае

$$\gamma_0^N = [\gamma_0^{N-1} - i\gamma_N \operatorname{tg}(K_N l_N)] [\gamma_N - i\gamma_0^{N-1} \operatorname{tg}(K_N l_N)]^{-1} \gamma_N.$$

Следует иметь в виду, что тензоры R (33) и R_N (34) представляют некоторое дробно-линейное преобразование, точнее, преобразование Кэли [29, 30] тензора относительного импеданса. Для плоской границы раздела двух анизотропных сред имеем

$$\Gamma = \gamma_2^{-1} \gamma_1, \quad (35)$$

где Γ — тензор относительного импеданса при падении волны из среды с тензором внутреннего импеданса γ_2 на границу со средой 1, в которой тензор импеданса волны равен γ_1 .

Тензор отражения рассматриваемой структуры с учетом (35) представляется теперь в виде $R = (\gamma_2 + \gamma_1)^{-1} (\gamma_2 - \gamma_1) = (1 + \Gamma)^{-1} (1 - \Gamma) = \exp(iT)$. Легко проверить, что равенство $(1 + \Gamma)^{-1} (1 - \Gamma) = \exp(iT)$ удовлетворяется тождественно при тензоре $T = \operatorname{arctg}(i\Gamma)$. Здесь $\operatorname{arctg}(i\Gamma)$ представляет операторозначную функцию [32]. В итоге получаем:

$$\gamma_0 = \alpha_N e^{-iK_N l_N} e^{i\Phi_N} e^{iK_N l_N}, \quad (36)$$

$$e^{i\Phi_N} = [1 - e^{2iK_N l_N} e^{iT_{N-1}}] [1 + e^{2iK_N l_N} e^{iT_{N-1}}]^{-1}. \quad (37)$$

Стратифицированная структура в результате отражения звука при нормальном падении осуществляет преобразование Кэли тензоров относительного импеданса. Это, в частности, позволяет использовать только экспоненциальные операторы, а также избежать неограниченного возрастания компонент тензора импедансов в определенных точках отрезка интегрирования (см. также [33]). В случае кусочно-однородной стратифицированной среды преобразования полей на границах и в объеме, как видно из изложенного, характеризуются экспоненциальными операторами одного и того же класса, являющимися элементами групп Ли. Экспоненциальные операторы описывают также преобразование поляризации волн, распространяющихся вдоль оси винтообразных закрученных анизотропных структур [9] (холестерические жидкие кристаллы). Как показано в [9], справедливо соотношение:

$$\{nE(z)\} = \exp(akzn^\times) \exp(ikzN)\{nE(0)\},$$

где a — параметр закрутки.

Применение экспоненциальных операторов Коши для расчета пропускания оптических каналов с произвольно ориентированными анизотропными элементами рассматривалось в [9, 34] с помощью тензоров нормальной рефракции N_n , а также являющихся генераторами групп Ли. При переходе от косоугольного падения к нормальному на границу анизотропных сред тензоры N_n и N совпадают [34, 35].

Экспоненциальные операторы пространственно-временной эволюции использованы в [9, 10, 36] для описания пространственной и частотной дисперсии электромагнитных и упругих волн в анизотропных средах. С их помощью было выяснено, каким образом материальные тензоры в диспергирующих средах могут вводиться на разнообразных группах эволюционных операторов. При этом были отмечены недостатки обычно применяемого подхода, связанного с необоснованным распространением

формализма групп эволюционных операторов в изотропных диспергирующих средах на случай анизотропных сред.

В работах [25, 37] изложен ковариантный метод вычисления генераторов N групп Ли в подвергнутых внешним воздействиям кристаллах.

В работах [38] рассматривался изоморфизм групп $SL(2, c)$ и $SO(3, c)$ в задаче отражения света от стратифицированных анизотропных сред. Использование полярного разложения френелевских операторов отражения позволило применить для их представления векторную параметризацию, развитую в [3, 7]. При этом оказалось возможным достигнуть значительного упрощения расчетов отражения и пропускания для сложных многокомпонентных анизотропных систем ввиду простого закона композиции вектор-параметров группы вращений.

В работах [39] операторы Коши были использованы в приближенных операторных решениях уравнений Гельмгольца в геометрической оптике и акустике анизотропных сред. Важнейшими характеристиками таких решений являются введенные там операторы эйконала.

В [40] исследованы случаи вырождения генераторов групп Ли для уравнений кристаллооптики и найдены условия возбуждения волн с квадратичной и кубической координатными зависимостями амплитуд.

Таким образом, в оптике и акустике кристаллов имеются обширные области применения теоретико-группового анализа на основе полученных в цитированных работах компактных ковариантных выражений для генераторов соответствующих групп.

Список литературы

1. Пуанкаре А. // Принцип относительности. М., 1973. С. 90, 118.
2. Poincaré H. *Theorie mathématique de la lumière*. Paris, 1892.
3. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М., 1979.
4. Круглов С. И., Плетюхов В. А., Стражев В. И. // О поляризационной симметрии уравнений Максвелла. Мн., 1980. Препринт ИФ АН БССР. № 226. С. 47.
5. Фушич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, 1983.
6. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Мн., 1958.
7. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976.
8. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965.
9. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. Волновые операторы в оптике. Мн., 1983. Препринт ИФ АН БССР. № 304; Эволюционные операторы в электродинамике диспергирующих сред. Мн., 1987. Препринт ИФ АН БССР. № 463.
10. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Fedorov F. I. // *Journ. Mod. Optics*. 1990. V. 37. № 1. P. 85.
11. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., 1971.
12. Киржниц Д. А. // УФН. 1987. Т. 152. Вып. 3. С. 399.
13. Барковский Л. М. // ЖПС. 1975. Т. 23. С. 304; Докл. АН БССР. 1976. Т. 20. № 6. С. 491.
14. Федоров Ф. И., Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 8. С. 684.
15. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 36. Вып. 6. С. 1140; Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1313; Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 12. С. 1070.
16. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1976. Т. 21. № 3. С. 445; Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 46. № 5. С. 938.
17. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 5. С. 424; Акустический журнал. 1987. Т. 33. Вып. 5. С. 798.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1945.
19. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 4.
20. Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1975. № 5. С. 12.
21. Барковский Л. М. // ЖПС. 1975. Т. 23. С. 304; Докл. АН БССР. 1976. Т. 20. № 6. С. 491.
22. Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Оптика и спектроскопия. 1975. Т. 39. С. 150.
23. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. С. 1171.
24. Математическая энциклопедия. М., 1982. Т. 3. С. 59.
25. Барковский Л. М. // Оптика и спектроскопия. 1973. Т. 34. Вып. 6. С. 1193; 1975. Т. 38. Вып. 1. С. 115; Кристаллография. 1973. Т. 18. С. 465; 1977. Т. 22. Вып. 1. С. 21.
26. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // ЖПС. 1983. Т. 39. Вып. 6. С. 996.

27. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973. С. 511.
28. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1978. Т. 23. № 6. С. 1145.
29. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Акустический журнал. 1987. Т. 33. № 5. С. 798.
30. Барковский Л. М., Нгуен Тхай Хонг // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 1. С. 114.
31. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1975. № 2. С. 34; 1979. № 2. С. 43.
32. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. С. 670.
33. Прихотько В. Ю., Тютюкин В. В. // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 2. С. 212.
34. Федоров Ф. И. и др. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1982. № 3. С. 59; 1982. № 4. С. 49.
35. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. // Journ. Phys. A; Math. Gen., 1987. V. 20. P. 1095.
36. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 6. С. 508.
37. Барковский Л. М. и др. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 2. С. 222.
38. Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 8. С. 692; Оптика и спектроскопия. 1989. Т. 67. Вып. 3. С. 629.
39. Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. Вып. 1. С. 61; Акустический журнал. 1991. № 2. С. 230.
40. Borzdov G. N. // Journ. Mod. Optics. 1990. V. 37. № 3. P. 281; Optics Comm. 1990. V. 75. № 3. P. 205; Кристаллография. 1990. Т. 35. Вып. 3. С. 535.

Поступила в редакцию 14.09.91.

УДК 530.145

И. В. НИЧИПОР, И. Д. ФЕРАНЧУК, А. П. УЛЬЯНЕНКОВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

В работе [1] проведено обобщение нулевого приближения операторного метода (ОМ) для аппроксимации собственных значений и волновых функций частицы, движущейся в пространственно-периодическом поле и приближенного расчета квазиэнергетических состояний в поле, периодическом по времени. Специфика рассматриваемых случаев связана с тем, что волновые функции должны удовлетворять дополнительным условиям, вытекающим из теоремы Флоке [2]. Построенные в [1] базисные последовательности волновых функций нулевого приближения $|\Psi_n^{(0)}(\omega)\rangle$ обеспечивают достаточно высокую точность ($\leq 1\%$) аппроксимации решений при любых параметрах, однако не позволяют построить в явном виде алгоритм вычисления матричных элементов соответствующего гамильтониана для произвольных квантовых чисел, что затрудняет использование итерационной схемы. В связи с этим предложим еще одну модификацию ОМ, которая позволяет упростить вычисления в подобных случаях.

Рассмотрим более детально возникающие трудности на примере уравнения Матье, соответствующего уравнению Шредингера для частицы с массой $m=1/2$ в одномерном периодическом поле

$$(\hat{H} - E) \Psi = (\hat{p}^2 + h \cos(2x) - E) \Psi(x) = (-d^2/dx^2 + h \cos(2x) - E) \Psi(x) = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее теореме Блоха (частный случай теоремы Флоке)

$$\Psi(x+\pi) = e^{ikh} \Psi(x) \quad (2)$$

с произвольным квазиимпульсом $-1 \leq k \leq 1$, определяющим зонный спектр $E_n(k)$ частицы в периодическом поле [3]. Для построения волновых функций нулевого приближения ОМ проведем, в соответствии с [1], приближенную факторизацию гамильтониана (1) с помощью пары канонически сопряженных операторов:

$$a = \hat{p} - i\sqrt{2h} \cos x; \quad a^+ = \hat{p} + i\sqrt{2h} \cos x, \quad \hat{H} = aa^+ + a^+a. \quad (3)$$

Эти операторы удовлетворяют более сложным перестановочным соотношениям, чем их аналоги — операторы рождения и уничтожения в случае гармонического осциллятора, однако их можно использовать для нахождения волновых функций нулевого приближения. Введем в гамильтониан системы вариационный параметр ν , необходимый для использования ОМ, с помощью линейного преобразования (3), позволяющего определить следующие операторы:

$$b = \hat{p} - i\nu/2 \cos x, \quad b^+ = \hat{p} + i\nu/2 \cos x. \quad (4)$$

По аналогии с представлением чисел заполнения [4] построим две последовательности состояний

$$A_n |\Psi_n^{(+)}\rangle = A_n (b^+)^n |\Psi_0^{(+)}\rangle, \quad B_n |\Psi_n^{(-)}\rangle = B_n (b)^n |\Psi_0^{(-)}\rangle, \quad (5)$$

где A_n, B_n — нормировочные коэффициенты, а волновые функции «вакуумных» состояний $|\Psi_0^{(\pm)}\rangle$ являются решениями уравнений первого порядка $b |\Psi_0^{(+)}\rangle = 0, b^+ |\Psi_0^{(-)}\rangle = 0$, т. е.

$$|\Psi_0^{(\pm)}\rangle = \exp\left(\pm \frac{\nu}{2} \sin x\right). \quad (6)$$

Волновые функции нулевого приближения ОМ для периодических решений уравнения Матье [5] построим с помощью линейной комбинации функций (5), обладающей определенной четностью:

$$\begin{aligned} |\Psi_n^{(even)}(x)\rangle &= C_n^{(even)} [|\Psi_n^{(+)}\rangle + |\Psi_n^{(-)}\rangle], \\ |\Psi_n^{(odd)}(x)\rangle &= C_n^{(odd)} [|\Psi_n^{(+)}\rangle - |\Psi_n^{(-)}\rangle]. \end{aligned} \quad (7)$$

Нормировочные коэффициенты C_n находятся из условия:

$$\int_0^{2\pi} dx \langle \Psi_n(x) | \Psi_n(x) \rangle = \pi.$$

Нулевое приближение для собственных значений определяется в соответствии с рецептом ОМ

$$E_n^{(0)}(\nu) = \langle \Psi_n | \hat{H} | \Psi_n \rangle \quad (8)$$

с дополнительным условием $\partial E_n^{(0)}/\partial \nu = 0$ для вычисления параметра ν . Согласно результатам [1], построенное таким образом приближение дает хорошую аналитическую интерполяцию периодических решений уравнения Матье и соответствующих им собственных значений. Для построения аналогичной интерполяции всего зонного спектра $E_n^{(0)}(k)$ учтем условие (2), определяя новый вектор состояния:

$$|\Psi_n(x)\rangle = e^{ikhx} \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x+\pi) = \varphi_n(x). \quad (9)$$

Периодическая функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет уравнению Шредингера $(\hat{H} - E) \varphi_n(x) = [-d^2/dx^2 - 2ikd/dx + k^2 + h \cos(2x) - E] \varphi_n(x) = 0$ (10) с гамильтонианом, который уже не обладает определенной четностью. Вследствие этого он смешивает состояния $|\Psi_n^{(odd)}\rangle$ и $|\Psi_n^{(even)}\rangle$ в (7), поэтому волновую функцию нулевого приближения для энергетической зоны с номером n выбираем в виде:

$$\varphi_n^{(0)} = A |\Psi_n^{(even)}\rangle + B |\Psi_n^{(odd)}\rangle, \quad \langle \varphi_n^{(0)} | \varphi_n^{(0)} \rangle = 1. \quad (11)$$

Энергию соответствующего уровня находим по формуле

$$E_n^{(0)}(k) = \langle \varphi_n^{(0)} | \hat{H}_k | \varphi_n^{(0)} \rangle \quad (12)$$

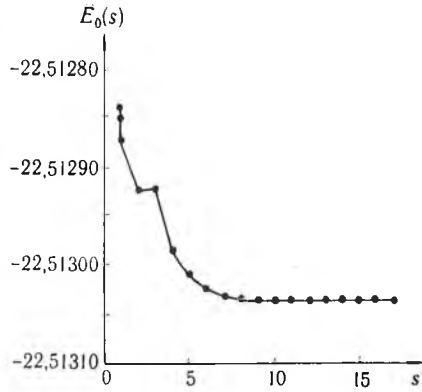
с дополнительным условием для определения всех вариационных параметров

$$\partial E_n^{(0)}/\partial \nu = \partial E_n^{(0)}/\partial A = \partial E_n^{(0)}/\partial B = 0. \quad (13)$$

Некоторые результаты вычислений зонного спектра в нулевом приближении ОМ по формуле (12) приведены в таблице.

Зонный спектр, вычисленный по формуле (13) в нулевом приближении ОМ, в сравнении с [5].
Случай $n=30$

k	0.0	0.5	1.0
$E_0^{(0)}(k)$	-22.513026	-22.512980	-22.512993
$E_0^{\text{точн}}$	-22.513037	—	-22.563004
$E_1^{(0)}(k)$	-8.998766	-8.099101	-8.100342
$E_1^{\text{точн}}$	-8.099346	—	-8.101105



Зависимость ряда последовательных приближений E_0^s от номера итерации s

Рассмотрим построение итерационной схемы нахождения последовательных приближений для собственных значений и собственных функций уравнения Матве, нулевое приближение которых было найдено ранее. Учтем, что волновая функция нулевого приближения $|\varphi_n^{(0)}\rangle$ дает хорошую аппроксимацию для точной волновой функции $|\varphi_n\rangle$ во всем диапазоне изменения аргумента. Это означает, что ряд Фурье для разности $|\varphi_n\rangle - |\varphi_n^{(0)}\rangle$, которая также является периодической функцией, должен достаточно быстро сходиться при всех x . Поэтому для нахождения базисного набора при построении точного решения достаточно вычислить коэффициенты следующего ряда Фурье:

$$|\varphi_n\rangle = |\varphi_n^{(0)}\rangle + \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} |l\rangle; |l\rangle = e^{ilx}. \quad (14)$$

Причем точную функцию по-прежнему считаем нормированной условием

$$\langle \varphi_n | \varphi_n^{(0)} \rangle = 1. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае волновая функция нулевого приближения не ортогональна базисным векторам состояния $\langle \varphi_n^{(0)} | l \rangle = 0$, что приводит к следующему виду итерационной схемы:

$$E_n^{(s)} = \frac{\sum_{l=-(s-1)}^{s-1} C_{nl}^{(s-l-1)} \langle \varphi_n^{(0)} | \hat{H}_k | l \rangle + \langle \varphi_n^{(0)} | \hat{H}_k | \varphi_n^{(0)} \rangle}{\sum_{l=-(s-1)}^{s-1} C_{nl}^{(s-l-1)} \langle \varphi_n^{(0)} | l \rangle + 1}, \quad (16)$$

$$C_{nl}^{(s)} = \frac{\sum_{m=-(s-1)}^{s-1} C_{nm}^{(s-m-1)} \langle m | \hat{H}_k | l \rangle + \langle l | \hat{H}_k | \varphi_n^{(0)} \rangle - E^{(s-1)} \langle l | \varphi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(s-1)} - \langle l | \hat{H}_k | l \rangle}.$$

Здесь $\langle m | \hat{H}_k | l \rangle$ и $\langle \varphi_n^{(0)} | \hat{H}_k | l \rangle$ — матричные элементы гамильтониана, а точное решение уравнения Шредингера определяется пределами последовательностей:

$$E_n = \lim_{s \rightarrow \infty} E_n^{(s)}, \quad C_{nl} = \lim_{s \rightarrow \infty} C_{nl}^{(s)}. \quad (17)$$

Зависимость значения E_n от номера итерации s , полученная на основе итерационной схемы (16), представлена на рисунке. Очевидна сходимость указанных приближений к значению, вычисленному в [5]. Матричные

ные элементы гамильтониана для данного случая выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle l | \hat{H}_k | m \rangle &= (l+k)^2 + \frac{\hbar}{2} [\delta_{m, l-2} + \delta_{m, l+2}], \\ \langle \varphi_0^{(0)} | \hat{H}_k | l \rangle &= (l+k)^2 \langle \varphi_0^{(0)} | l \rangle + \hbar \langle \varphi_0^{(0)} | \cos(2x) | l \rangle = \\ &= \frac{(-1)^{l/2}}{2} \left[V \sqrt{2} (l+k)^2 \left\{ C I_l \left(\frac{v}{2} \right) + P I_{l+1} \left(\frac{v}{2} \right) \right\} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \hbar \left\{ C \left(I_{l+2} \left(\frac{v}{2} \right) + I_{l-2} \left(\frac{v}{2} \right) \right) \pm P \left(I_{l+3} \left(\frac{v}{2} \right) \mp I_{l-1} \left(\frac{v}{2} \right) \right) \right\} \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Коэффициенты C и P определяются из условия (15).

Список литературы

1. Feranchuk I. D., Komarov L. I., Nichipor I. V. // Journ. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. № 12. P. 3849.
2. Делоне Н. В., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М., 1973.
3. Давыдов А. С. Теория твердого тела. М., 1976.
4. Feranchuk I. D., Komarov L. I. // Phys. Lett. A. 1982. V. 88. № 5. P. 212.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., 1979.

Поступила в редакцию 25.03.91.

УДК 530.12

И. С. СЯГЛО

ПРОСТОЙ ВЫВОД В ШЕСТИМЕРНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Обычно уравнения связи, или материальные уравнения в электродинамике движущихся сред, получают следующим образом. Записывают уравнения связи:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1)$$

в системе отсчета, в которой среда покоится. После левые и правые части пересчитывают к системе отсчета, относительно которой среда движется. Такой вывод приведен, например, в [1]. При этом уравнения связи получаются неразрешенными относительно векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ или $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Другой возможный способ получения уравнений связи для движущихся сред заключается в определении четырехмерного тензора четвертого ранга ϵ^{kmrs} и записи уравнений связи в четырехмерной тензорной форме

$$f^{km} = \frac{1}{2} \epsilon^{kmrs} F_{rs}. \quad (2)$$

Здесь f^{km} и F_{rs} антисимметричные тензоры электромагнитного поля, компоненты которых связаны с проекциями векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ согласно правилам:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= (f^{41}, f^{42}, f^{43}), \quad \mathbf{H} = (f^{23}, f^{32}, f^{12}), \\ \mathbf{E} &= (F_{14}, F_{24}, F_{34}), \quad \mathbf{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}).\end{aligned}\quad (3)$$

Если записать тензор ϵ^{kmrs} в системе отсчета покоя среды и применить к нему преобразования Лоренца, то получатся уравнения связи в форме, разрешенной относительно $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Такой подход для анизотропных и гиротропных сред использован в [2]. Однако проще всего получить уравнения связи для движущихся сред, если записать соотношения (2) в шестимерном бивекторном пространстве, что является целью данного сообщения.

Воспользуемся антисимметрией тензоров электромагнитного поля и введем коллективные индексы подстановкой

$$\begin{pmatrix} km \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 24 & 34 & 23 & 31 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тогда векторы индукции и напряженности электромагнитного поля станут компонентами шестимерных векторов F_A и f^A :

$$F_A = (E, B), \quad f^A = (-D, H). \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем при матричной записи шестимерных величин используется блочная форма записи матриц с блоками трехмерной размерности. Преобразования Лоренца тензоров электромагнитного поля индуцируют в шестимерном пространстве преобразование векторов F_A и f^A :

$$F_{A'} = L_{A'}^{B'} F_B, \quad f^{A'} = L_B^{A'} f^B, \quad (6)$$

где шестимерные коэффициенты преобразования $L_B^{A'}$ получаются из четырехмерных преобразований Лоренца по правилу

$$L_B^{A'} = 2L_n^{[k'} L_r^{m']}. \quad (7)$$

В случае движения штрихованной системы отсчета со скоростью v , произвольно ориентированной относительно системы координат, коэффициенты преобразования Лоренца записываются шестимерной матрицей

$$L_B^{A'} = \begin{pmatrix} \kappa & -\frac{\gamma}{c} v^x \\ \frac{\gamma}{c} v^x & \kappa \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где введены обозначения:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad v_{ab}^x = e_{acb} v_c \\ \kappa_{ab} = \gamma \delta_{ab} + (1 - \gamma) \frac{v_a v_b}{v^2}. \quad (9)$$

Умножение трехмерных тензоров κ и v^x на трехмерные векторы дает результат:

$$\kappa E = \gamma E + (1 - \gamma) (vE) \frac{v}{v^3}, \\ v \times E = v \times E. \quad (10)$$

Подстановка (5) и (8) в формулы (6) позволяет легко получить обычные формулы преобразования напряженностей и индукций электромагнитного поля. Например,

$$D' = \kappa D + \frac{\gamma}{c} [v \times H], \\ H' = \kappa H - \frac{\gamma}{c} [v \times D]. \quad (11)$$

Уравнения связи (1) электромагнитного поля в шестимерной форме приобретают вид

$$f^A = \varepsilon^{AB} F_B, \quad (12)$$

где шестимерный тензор проницаемости в системе покоя среды имеет компоненты

$$\varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_c & 0 \\ 0 & \mu_c^{-1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь индекс c у ϵ_c и μ_c означает, что значения диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости берутся в системе отсчета среды. Для анизотропных сред в диагональных блоках матрицы (13) стоят компоненты трехмерных тензоров. В случае изотропных сред эти блоки равны единичным матрицам, соответственно умноженным на скаляры ϵ_c и μ_c . Так как соотношения (12) являются тензорными, то они сохраняют свою форму при переходе к другой системе отсчета. Компоненты шестимерного тензора проницаемости преобразуются при помощи коэффициентов преобразования (8). Обычно в уравнениях связи для движущихся сред используется скорость среды по отношению к системе отсчета, которая противоположна по знаку скорости системы отсчета относительно среды. Поэтому, записывая формулы преобразования тензора проницаемости, поменяем знак у скорости. Считая, что в системе покоя среды тензор проницаемости имеет вид (13), получим в системе отсчета, относительно которой среда движется:

$$\epsilon^{A'B'} = L_C^{A'} L_D^{B'} \epsilon^{CD} = \begin{pmatrix} -\epsilon & -\beta \\ \alpha & \mu^{-1} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где трехмерные блоки представляют собой следующие матрицы:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \kappa \epsilon_c \kappa + \frac{\gamma^2}{c^2} v \times \mu_c^{-1} v \times, \\ \beta &= \frac{\gamma}{c} (\kappa \epsilon_c v \times - v \times \mu_c^{-1} \kappa), \\ \alpha &= \frac{\gamma}{c} (v \times \epsilon_c \kappa - \kappa \mu_c^{-1} v \times), \\ \mu^{-1} &= \kappa \mu_c^{-1} \kappa + \frac{\gamma}{c^2} v \times \epsilon_c v \times. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя тензор проницаемости (14) в формулу (12), запишем уравнения связи для движущихся сред в трехмерной форме:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \beta \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \alpha \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B}, \quad (16)$$

где ϵ , β , α , μ^{-1} даются формулами (15).

Как показано в [3], для гиротропных сред в системе покоя среды уравнения связи можно записать в форме (16). Тогда недиагональные блоки в матрице ϵ^{AB} отличны от нуля уже в системе покоя среды. Соответственно усложнятся и формулы (15). Результаты для этого случая, полученные с помощью четырехмерных преобразований Лоренца, приведены в [2].

В первом приближении по $\frac{v}{c}$ уравнения связи значительно упрощаются. Запишем их для анизотропной движущейся среды в общепринятой форме, когда $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ выражаются через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_c \mathbf{H} + \frac{1}{c} (v \times \mathbf{E} - \mu_c [v \times \epsilon_c \mathbf{E}]), \\ \mathbf{D} &= \epsilon_c \mathbf{E} - \frac{1}{c} (v \times \mathbf{H} - \epsilon_c [v \times \mu_c \mathbf{H}]). \end{aligned} \quad (17)$$

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959.
2. Сягло И. С. // Гравитация и электромагнетизм. Мн., 1981.
3. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн., 1976.

Поступила в редакцию 12.01.90.

О ТОЧНОМ ОПИСАНИИ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЕКТОРНОМ И ТЕНЗОРНОМ ПОЛЯХ. II

Продолжая работу [1], рассмотрим разделение переменных в уравнении Дирака в ортогональных криволинейных координатах с учетом внешних векторного и тензорного полей. В общем случае векторное поле не подчиняется условию Лоренца и полагается, что векторное и тензорное поля независимы. Это может быть сделано в приложениях.

Метрический тензор плоского пространства принимаем в виде:

$$ds^2 = e^{2\theta_1} (dx^1)^2 + e^{2\theta_2} (dx^2)^2 + e^{2\theta_3} (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \quad (1)$$

т. е. времениподобная переменная мнимая и при dx^4 отсутствует функция Ламе, что всегда можно сделать в отсутствие гравитации в инерциальной системе отсчета.

Уравнение Дирака в диагональной калибровке тетрады можно представить в виде:

$$\left\{ \sum_{kl} e^{-\theta_k} \gamma^k (\partial_k - iA_k - i\gamma^l T_{lk}) + m_0 \right\} \tilde{\Psi} = 0, \quad (2)$$

$$\Psi = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \tilde{\Psi}. \quad (3)$$

Ввиду того, что функции Ламе максимум зависят от двух переменных, для конкретизации полагаем

$$\theta_1 = \theta_1(x^2, x^3), \quad \theta_2 = \theta_2(x^2, x^3), \quad \theta_3 = \theta_3(x^2, x^3). \quad (4)$$

Обращаясь к алгебраическому методу разделения переменных [2, 3], естественно попытаться разделить переменные в уравнении (2) последовательно и начиная с попарного разделения.

В случае последовательного разделения вначале отделяем переменную, не испорченную криволинейностью, т. е. x^4 . Затем удобно отделить x^1 от x^2, x^3 . Здесь, как показывает анализ, имеют место две различные ситуации: а) $\theta_1 = 0$ (общецилиндрические координаты) и для дальнейшего разделения необходимо потребовать

$$\theta_2(x^2, x^3) = \theta_3(x^2, x^3) = \theta(x^2); \quad (5)$$

б) $\theta_1 \neq 0$ (координаты с выделенной осью симметрии) и для полного разделения переменных необходимо:

$$\begin{aligned} \theta_1(x^2, x^3) &= \theta_2(x^2, x^3) = \theta(x^2), \\ \theta_3(x^2, x^3) &= \theta(x^2) + \eta(x^3). \end{aligned} \quad (6)$$

В итоге можно перечислить все возможности полного разделения переменных в уравнении Дирака (2). Такие возможности реализуются при следующих конфигурациях полей:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(x^1), & A_2 &= e^{-\theta} B_2(x^2), & A_3 &= e^{-\theta} B_3(x^2), \\ A_4 &= e^{-\theta} B_4(x^2), & &= e^{-\theta}(e^{-\eta} B_2(x^2) + C_2(x^3)), & &= e^{-\theta} C_3(x^3), \\ &= e^{-\theta} C_4(x^3), & & & &= e^{-\theta}(e^{-\eta} C_3(x^3) + D_3(x^4)), \\ &= e^{-\theta} D_1(x^4), & & & & \\ T_{12} &= D_{12}(x^4), & T_{13} &= D_{13}(x^4), & T_{14} &= D_{14}(x^4), \\ & & & & &= e^{-\eta} C_{14}(x^3) + D_{14}(x^4), \\ T_{23} &= D_{23}(x^4), & T_{24} &= D_{24}(x^4), & T_{34} &= e^{-\theta} B_{34}(x^2) + D_{34}(x^4). \end{aligned} \quad (7)$$

Начиная с попарного разделения переменных, приходим к следующему набору полевых функций, допускающих полное разделение в уравнении (2):

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(x^1), \quad A_2 = e^{-\theta} B_2(x^2) + A_2(x^1), \\ A_3 &= e^{-\theta} (e^{-\eta} C_3(x^3) + D_3(x^4)), \quad A_4 = e^{-\theta} D_4(x^4), \\ T_{12} &= e^{-\theta} D_{12}(x^4) + A_{12}(x^1). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что условие (5) не выполняется для параболических цилиндрических и эллиптических цилиндрических координат, а условия (6) не выполняются в случае сфероидальных (сплюснутых и вытянутых) координат. Все эти случаи должны быть исследованы специально.

Список литературы

1. Шишкин Г. В., Ясин М. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3. С. 72.
2. Шишкин Г. В. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 23. № 4. С. 336.
3. Shishkin G. V., Villalba V. M. // Journ. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2132.

Поступила в редакцию 18.03.91.

УДК 621.315.592:546.28

А. П. НОВИКОВ, А. И. УРБАНОВИЧ, НГУЕН ВАН КОНГ

АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КРИСТАЛЛАХ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПУЧКАМИ ЧАСТИЦ

Хорошо известно, что быстрые заряженные частицы при прохождении через твердое тело могут возбуждать акустические колебания, обусловленные различными механизмами [1—3]. Результаты имеющихся теоретических и экспериментальных работ свидетельствуют о том, что зачастую основной вклад в процесс генерации акустических колебаний дает тепловой механизм [4—6]. При этом локальный нагрев области вблизи трека заряженной частицы может приводить к генерации термоупругих напряжений, превышающих даже прочность материала. Использование в [6] предположение, что трек представляет собой тонкую нить, не всегда оправдано, так как трек релятивистских частиц всегда имеет отличные от нуля поперечные размеры. Поэтому представляет несомненный интерес выход за рамки этого приближения.

В настоящей работе проведен расчет акустического сигнала, возникающего при воздействии концентрированных энергетических потоков на тонкую пластину твердого тела, толщина которой меньше характерной радиационной длины ($h < h_d$). На практике такая задача встречается при взаимодействии сфокусированных ионных, электронных и фотонных пучков с кристаллами. При этом область, подвергнутая возмущению, представляет цилиндр радиусом R_0 , в котором происходит непрерывное выделение энергии с постоянной интенсивностью Sh . Решение этой задачи можно использовать и для описания начальных стадий зарождения акустических волн вдоль трека частиц, если передача энергии от возбужденной электронной подсистемы к решетке происходит с постоянной скоростью. Возникающие вследствие теплового расширения среды термоупругие напряжения характеризуются объемной термоупругой силой $F(r, t)$, пропорциональной градиенту плотности поглощенной энергии $P(r, t)$, т. е.

$$F(r, t) = -\Gamma \nabla P(r, t) = -\alpha k \nabla T(r, t). \quad (1)$$

где Γ — параметр Грюнайзена вещества мишени; α — коэффициент объемного расширения вещества; k — модуль всестороннего сжатия; $T(r, t)$ — температура мишени.

С учетом аксиальной симметрии температуру нагретой области можно найти из уравнения теплопроводности

$$\rho c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2)$$

с граничными условиями вида:

$$-2\pi\lambda \lim_{r \rightarrow R_0} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = S, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T < \infty, \quad (3)$$

где ρ , c_T и λ — соответственно плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества.

Изменение амплитуды возникающей расходящейся цилиндрической звуковой волны $u(r, t)$ описывается уравнением [7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{F(r, t)}{\rho}, \quad (4)$$

где c — скорость продольного звука в веществе мишени.

Будем решать уравнения (2), (4) с помощью преобразования Лапласа

$$T^*(r, p) = \int_0^\infty \exp(-pt) T(r, t) dt, \quad u^*(r, p) = \int_0^\infty \exp(-pt) u(r, t) dt \quad (5)$$

при нулевых начальных условиях. Переходя в (2)–(4) к уравнениям для изображений $T^*(r, p)$ и $u^*(r, p)$, можно найти:

$$T^*(r, p) = \frac{\sqrt{a} S K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{2\pi\lambda R_0 \rho \sqrt{p} K_1 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad (6)$$

$$u^*(r, p) = \gamma a \left(A K_1 \left(p \frac{r}{c} \right) + B I_1 \left(p \frac{r}{c} \right) - \frac{K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{p^2 R_0 (1 - ap/c^2) K_1 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \right), \quad (7)$$

где $a = \lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности; $K_\nu(x)$ — функция Макдональда; $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя; A и B — постоянные;

$$\gamma = \frac{\alpha k S}{2\pi \lambda \rho c^2}.$$

Поскольку решения при $r \rightarrow \infty$ должны оставаться ограниченными, следует положить $B=0$. Для определения постоянной A необходимо задать граничное условие для $u(r, t)$. Предположим, что поверхность цилиндра свободна от напряжений, т. е. радиальное напряжение на поверхности цилиндра σ_{rr} равно нулю и справедливо условие [7]:

$$(1 - \mu) \frac{du^*(r, p)}{dr} + \mu \frac{u^*(r, p)}{r} \Big|_{r=R_0} = (1 + \mu) \alpha T^*(R_0, p), \quad (8)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Подставляя (7) в (8), после преобразований получим:

$$A = \frac{1}{a\gamma} \left[\frac{2\mu - 1}{R_0} K_1 \left(R_0 \frac{p}{c} \right) + (\mu - 1) \frac{p}{c} K_0 \left(R_0 \frac{p}{c} \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \frac{(1 + \mu) \alpha \sqrt{a} S K_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{2\pi\lambda R_0 \rho \sqrt{p} K_1 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \frac{\gamma a}{p^2 R_0 (1 - ap/c^2)} \times \right. \\ \times \left. \left[(\mu - 1) \sqrt{\frac{p}{a}} \frac{K_0 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{K_1 \left(R_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \frac{2\mu - 1}{R_0} \right] \right\}. \quad (9)$$

Выполнение обратного преобразования Лапласа для $u^*(r, p)$ при значении постоянной A , определяемой формулой (9), затруднительно. По-

этому ограничимся рассмотрением не слишком большой области, окружающей трек, которую волна напряжений, движущаяся со скоростью c , будет проходить достаточно быстро. В этих условиях достаточно найти решение $u(r, t)$ для малых значений времени t . В области значений $t \leq a/c^2$ решение уравнения (7) имеет вид:

$$u(r, t) = u_1(r, t) + \begin{cases} 0, & \text{при } t < \frac{r-R_0}{c} \\ u_2(r, t), & \text{при } t \geq \frac{r-R_0}{c}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$u_1(r, t) = \frac{\gamma c^2 (r-R_0)}{6 \sqrt{\pi a R_0 r}} \left\{ -\sqrt{t} \left[5t + \frac{(r-R_0)^2}{2a} \right] \exp\left(-\frac{(r-R_0)^2}{4at}\right) + \right. \\ \left. + \frac{3 \sqrt{a\pi}}{r-R_0} \left[t^2 + \frac{(r-R_0)^2}{a} t + \frac{(r-R_0)^4}{12a^2} \right] \operatorname{Erf}\left(\frac{r-R_0}{2\sqrt{at}}\right) \right\}, \quad (11)$$

$$u_2(r, t) = -\frac{2c\alpha(1+\mu)S\sqrt{a}}{3\pi\lambda(1-\mu)\sqrt{\pi R_0 r}} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{3/2} - \frac{8c^2\gamma}{15\sqrt{\pi a R_0 r}} \left(t - \frac{r-R_0}{c}\right)^{5/2}, \quad (12)$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt.$$

Решение (10) состоит из двух слагаемых. Первое описывает перемещения, возникающие одновременно во всех точках рассматриваемой области. Слагаемое, выражаемое функцией $u_2(r, t)$, представляет собой упругую продольную волну, фронт которой движется со скоростью c . Если рассмотреть произвольную точку $r > R_0$, то в ней вначале возникает составляющая напряжения, соответствующая функции $u_1(r, t)$. В момент времени $(r-R_0)/c$ к этой точке приходит волна, соответствующая функции $u_2(r, t)$, и напряжение скачкообразно изменяется.

В случае, когда радиус цилиндрической области R_0 мал ($R_0 \rightarrow 0$), т. е. трек моделируется бесконечно тонкой нитью, для малых времен t из (7) находим:

$$u^*(r, p) \approx \gamma c^2 \left(\frac{K_1\left(r \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\sqrt{ap^3}} - \frac{K_1\left(r \frac{p}{c}\right)}{cp^2} \right), \quad (13)$$

а выражение для $u(r, t)$ принимает известный вид [7]:

$$u(r, t) = u_1(r, t) + \begin{cases} 0, & \text{при } t < r/c \\ u_2(r, t), & \text{при } t \geq r/c, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$u_1(r, t) = \frac{\gamma c^2 r t}{8a} \left[\left(1 + \frac{4at}{r^2}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{4at}\right) + \left(2 + \frac{r^2}{4at}\right) \operatorname{Ei}\left(\frac{-r^2}{4at}\right) \right], \quad (15)$$

$$u_2(r, t) = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{ct}{r} \sqrt{c^2 t^2 - r^2} + r \ln \frac{r}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2} + ct} \right), \quad (16)$$

$E_1(x)$ — интегральная показательная функция.

Отметим, что функция $u_2(r, t)$, определяемая (12), отрицательна при всех значениях $t > (r-R_0)/c$, как и в случае $R_0 \rightarrow 0$ при всех $t > r/c$. Значения компонент тензора напряжений могут быть рассчитаны по формулам:

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\mu} \left[(1-\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T \right], \quad (17a)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\mu} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\mu) \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T \right], \quad (17b)$$

где G — модуль сдвига, а $T(r, t)$ находится из (6).

$$T(r, t) \approx \frac{S(r-R_0)}{2\pi\lambda\sqrt{\pi R_0 r}} \left[\frac{2\sqrt{at}}{r-R_0} \exp\left(-\frac{(r-R_0)^2}{4at}\right) - \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}\left(\frac{r-R_0}{2\sqrt{at}}\right) \right] \quad (18)$$

при $R_0 \neq 0$, а при $R_0 \rightarrow 0$

$$T(r, t) = -\frac{S}{4\pi\lambda} \operatorname{Ei}\left(\frac{-r^2}{4at}\right).$$

Список литературы

1. White R. M. // Journ. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 7. P. 2123.
2. Perry F. C. // Appl. Phys. Lett. 1970. V. 17. № 9. P. 408.
3. Калинин А. И., Лазурик-Эльцуфин В. Т. // Укр. физ. журн. 1974. Т. 19. № 3. С. 515.
4. Залюбовский Н. И., Калинин А. И., Лазурик В. Т. Введение в радиационную акустику. Харьков, 1986. С. 168.
5. Лямшев Л. М., Челноков Б. Н. // Радиационная акустика / Под ред. Л. М. Лямшева. М., 1987. С. 8.
6. Калинин А. И., Лазурик-Эльцуфин В. Т. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 6 (12). С. 2364.
7. Паркус Г. Неустойчивые температурные напряжения. М., 1963. С. 252.

Поступила в редакцию 11.03.91.

УДК 535.33/34:535.37

В. В. ГРУЗИНСКИЙ

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ПОГЛОЩЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ПАРОВ ФЛУОРЕНОНА

Длительное время процессы электрон-молекулярных взаимодействий изучались лишь для простых молекул [1, 2], либо анализировалось свечение продуктов разрушения органических молекул [3]. В последнее время достигнут определенный прогресс в понимании элементарных процессов электрон-молекулярных взаимодействий и особенностей люминесценции многоатомных молекул при их возбуждении электронами различной энергии, причем богатую информацию дает сопоставление спектрально-люминесцентных характеристик, полученных при оптическом и электронном возбуждении [4—6]. При изучении электрон-молекулярных взаимодействий можно получить новые сведения о структуре электронных и колебательных уровней энергии, об уровнях, лежащих выше потенциала ионизации, о механизмах преобразования энергии электронного возбуждения в световую, радиационной устойчивости практически важных органических молекул и т. д.

В настоящей работе специфика электрон-молекулярных взаимодействий рассмотрена на примере молекулы флуоренона. Это сложное органическое соединение характеризуется малоинтенсивным длинноволновым поглощением и наличием при оптическом возбуждении трех видов люминесценции в газовой фазе: флуоресценции, термически активированной замедленной флуоресценции (ТАЗФ) и фосфоресценции [7]. Недавно установлено, что фосфоресценция и ТАЗФ проявляются и при однофотонном инфракрасном возбуждении излучением CO_2 -лазера молекул флуоренона в основном состоянии [8], а также ТАЗФ стимулируется и в триплетном состоянии [9]. Относительная интенсивность полос фосфоресценции и ТАЗФ определяется температурой, энергией возбуждающего кванта $h\nu$, и плотностью мощности лазерного излучения, причем при низких значениях указанных величин проявляется преимущественно фосфоресценция.

Спектр потерь энергии электронов позволяет получить информацию об электронных возбужденных состояниях и эффективности перехода

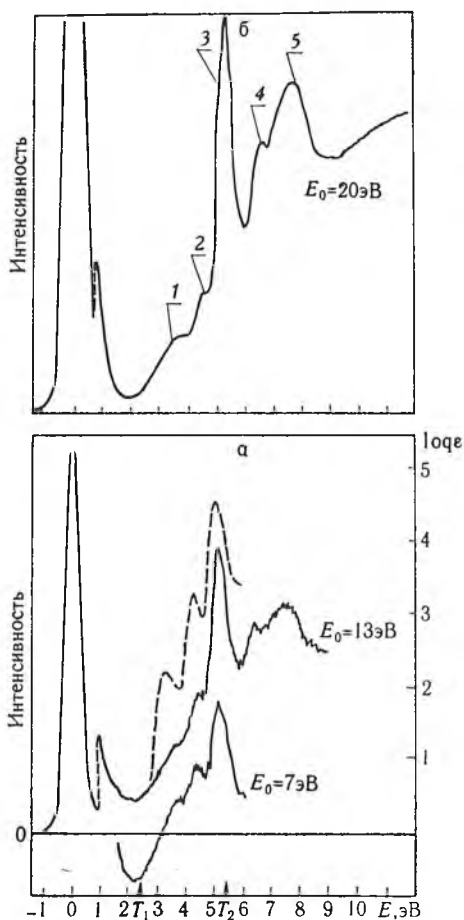


Рис. 1. Спектры потерь энергии электронов в парах флуоренона, измеренные при различных начальных энергиях электронного пучка E_0 ; пунктир — спектр оптического поглощения

шается с уменьшением энергии первичных электронов E_0 . Если соотношение интенсивностей полос 1 и 2 для используемых значений $E_0 \approx 7-20$ эВ изменяется меньше (от 1,35 до 1,55), то уже для полос 1 и 3 оно заметнее: от ~ 2 ($E_0 = 7$ эВ) до ~ 5 ($E_0 = 20$ эВ). Это связано с тем обстоятельством, что сечения возбуждения запрещенных переходов в отличие от разрешенных достигают максимума при меньших энергиях электронов E_0 . Таким образом, большее соответствие интенсивностей полос в спектрах поглощения и рассеяния электронов для флуоренона можно получить при использовании более высокоэнергетических первичных электронов.

О запрещенном характере полос 1 и 2 свидетельствует и положительная величина разности $\bar{E}' - \bar{E}$ между средней энергией всех молекул в основном состоянии $\bar{E}$ и средней колебательной энергией комбинирующих основного и возбужденного состояний $\bar{E}'$, полученные для флуоренона в [7] из диаграммы комбинирующих переходов [11] по температурной зависимости спектров поглощения. Селективная же энергия, характеризующая разность между средним запасом колебательной энергии, получаемым ансамблем молекул при возбуждении, и средним запасом колебательной энергии в отсутствие зависимости вероятности поглощения в области полос поглощения 1 и 2 $\Delta E' > 0$, т. е. переход запрещен сильнее для молекул ансамбля с меньшим запасом колебательной энергии. Все приведенные данные свидетельствуют о запрещенном характере синг-

молекул в эти состояния. На рис. 1 представлен такой спектр для паров флуоренона при давлении $\sim 2,5 \cdot 10^{-2}$ тор и температуре $T = 237$ К [10]. Наибольшую интенсивность в спектре имеет полоса упругого рассеяния электронов, что характерно для сложных молекул, обладающих большим сечением упругого рассеяния, чем атомы. Последующие полосы обусловлены неупругим рассеянием электронов под углом $\Theta = 90^\circ$. На этом же рисунке пунктиром приведен спектр оптического поглощения. Видно, что этот спектр получен в более узком интервале энергий $h\nu$, чем спектр потерь энергии электронов, который несет большую информацию о структуре электронных состояний сложных молекул.

Первый электронный переход типа $\pi\pi^*$ у флуоренона запрещен (коэффициент поглощения в максимуме полосы $\epsilon_{\max} = 207$ л·моль $^{-1}$ см $^{-1}$), поэтому оптический спектр поглощения приведен в полулогарифмическом масштабе. Положение полос 1—3 в спектрах совпадает. Однако относительная интенсивность максимумов полос различается. В оптическом спектре поглощения они соотносятся как 0,005 : 0,056 : 1,0. В то же время в спектре потерь энергии электронов соотношение интенсивностей меньше (следует также учесть, что на рис. 1 не вычтен нарастающий в области больших значений E фон), причем оно умень-

лет-синглетных переходов $S_0 \rightarrow S_1^*$ и $S_0 \rightarrow S_2^*$ относительно перехода $S_0 \rightarrow S_3^*$. В работе [12] отмечалось, что в формировании состояния S_2^* флуоренона принимает также участие запрещенный переход. Спектры потерь энергии электронов в зависимости от E_0 позволяют более четко выявить эти особенности. Вероятно, по этим спектрам можно построить диаграммы комбинирующих состояний, как и по спектрам поглощения, и получить новые сведения о природе электронных состояний сложных молекул и о механизме электрон-молекулярных взаимодействий. Тем более, что для сложных молекул появились данные о характере возбуждения колебательных состояний электронами [13].

Совокупность имеющихся данных [7, 8] позволяет точнее оценить положение нижнего триплетного состояния T_1 флуоренона в газовой фазе $\approx 2,43$ эВ ($19\,600\text{ см}^{-1}$). В отличие от изученных ранее сложных молекул [4, 6] у флуоренона даже при низком значении $E_0 = 7$ эВ не обнаружено полосы, соответствующей переходу $S_0 \rightarrow T_1$, что свидетельствует о малой эффективности прямого возбуждения триплетного состояния T_1 в процессе электрон-молекулярных взаимодействий.

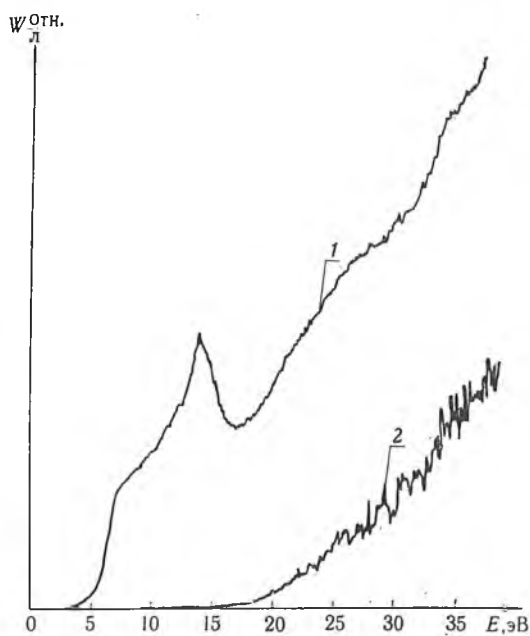


Рис. 2. Функция возбуждения флуоресценции паров флуоренона для полосы $\lambda_{\max} = 465$ нм (1) и $\lambda_{\max} = 325$ нм (2)

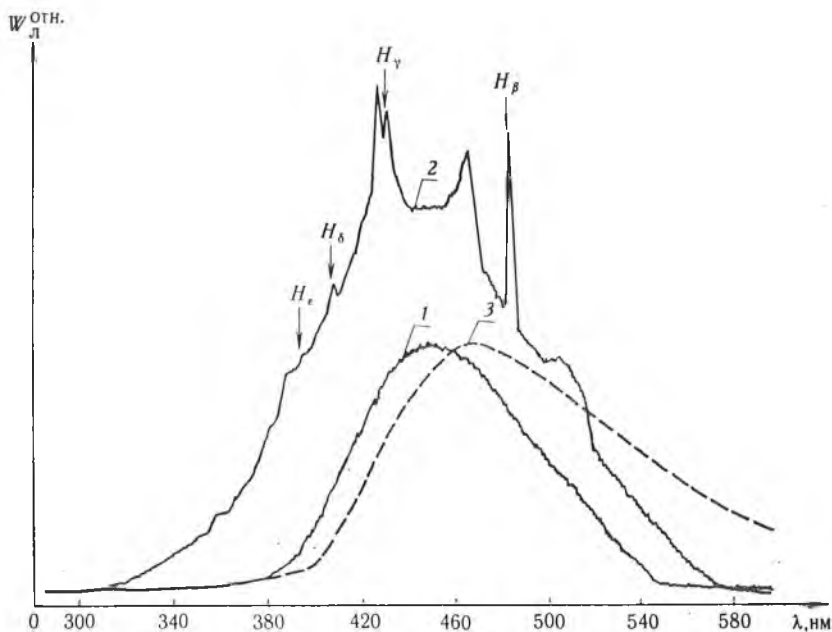
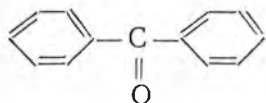


Рис. 3. Спектры флуоресценции паров флуоренона при возбуждении пучком электронов с $E_0 = 14$ (1) и 150 эВ (2) и оптическим излучением с $E_0 = 3,4$ эВ (3)

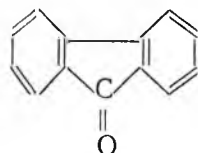
Флуоренон люминесцирует при оптическом и электронном возбуждении.

Своеобразна функция возбуждения синглетных состояний паров флуоренона (рис. 2) [14]. Это одно из немногих изученных нами сложно-молекулярных соединений, у которого в спектре свечения наблюдаются линии продуктов разрушения молекул при $E_0 > 30$ эВ (рис. 3) [10]. Как и в случае функций возбуждения атомов, максимальное значение интенсивности достигается при $E_0 \approx 4E_n$ (где E_n — пороговая энергия, соответствующая энергии возбуждения первого возбужденного синглетного состояния), а при $E_0 > 17$ эВ интенсивность свечения паров резко возрастает. Отметим, что при возбуждении в диапазоне $E_0 \sim 22\text{—}38$ эВ возникает интенсивная полоса свечения с максимумом 325 нм, не наблюдаемая при $E_0 \sim 150$ эВ. Пороговая энергия достаточно высока $E_n \sim 20$ эВ.

У паров бензофенона (I) и флуоренона (II)



I



II

наблюдается схожая двухполосная люминесценция при оптическом возбуждении. У флуоренона полосы фосфоресценции ($\lambda_{\max} \approx 540$ нм) и ТАЗФ ($\lambda_{\max} \approx 465$ нм) разнесены сильнее, так как синглет-триплетный интервал больше $\Delta\nu_{ST} = 5400$ см⁻¹, чем у бензофенона $\Delta\nu_{ST} = 1600$ см⁻¹. Полосы люминесценции при низких температурах имеют выраженную колебательную структуру. Обычно в спектрах ароматических кетонов проявляется колебательная структура с основной прогрессией частоты ~ 1670 см⁻¹, как у паров бензофенона, обусловленная валентными колебаниями карбонильной группы $>C=O$. У бензофенона бензольные кольца по стерическим причинам развернуты на $\sim 30^\circ$ [16], что обуславливает достаточную автономность карбонильной группы. Молекула флуоренона почти плоская. В электронных спектрах проявляется колебательная структура с разностью частот ~ 1200 см⁻¹, соответствующая колебаниям углеродного скелета молекулы. Аналогично проявляются колебания и в инфракрасном спектре поглощения [17]: у бензофенона наблюдается интенсивная полоса ~ 1700 см⁻¹, а у флуоренона она слабо выражена, но имеются три интенсивные полосы $\nu = 1100, 1160$ и 1200 см⁻¹ (для взвеси в вазелиновом масле).

Как отмечалось ранее, при оптическом возбуждении квантами с энергией 3,74—4,52 эВ наблюдаются две сильно разнесенные полосы люминесценции вследствие механизмов: $S_0 \rightarrow S_1^* \rightarrow T_1 \rightarrow S_0$ и $S_0 \rightarrow S_1^* \rightarrow T_1 \rightarrow S_1^* \rightarrow S_0$. Причем при более низких температурах преимущественно проявляется первая полоса, при более высоких — вторая. В соответствии со значением естественного времени жизни молекул в нижнем возбужденном синглетном состоянии τ_0 [7] и длительностью люминесценции τ [8] можно оценить квантовый выход люминесценции по соотношению $\gamma = \tau/\tau_0$. Эффективность люминесценции паров флуоренона невелика: при $T = 475$ К $\gamma \approx 3,8 \cdot 10^{-2}$, а при $T = 545$ К $\gamma \approx 10^{-2}$. Согласно [8], τ изменяется от $1,4 \cdot 10^{-4}$ с до $4,0 \cdot 10^{-5}$ с в диапазоне $T = 475\text{—}545$ К.

Неожиданным оказался спектр люминесценции паров флуоренона при возбуждении пучком электронов (рис. 3). Он состоит лишь из коротковолновой полосы при температуре на 100° меньшей, чем при оптическом возбуждении, когда преимущественно наблюдается полоса фосфоресценции [7]. Энергия активации безызлучательного перехода, полученная по наклону зависимости интенсивности люминесценции W от температуры $\ln W(T)$, составляет ~ 4600 см⁻¹ и несколько меньше $\Delta\nu_{ST} = 5400$ см⁻¹, а константа k_{TS} меньше, чем у бензофенона ($\sim 10^{-7}$ с⁻¹) [7]. По этому поводу можно высказать ряд предположений. Эта полоса может быть обусловлена малоинтенсивной флуоресценцией. Учитывая существенно

большую интенсивность полос S_n^* в спектрах рассеяния электронов, чем S_1^* (рис. 1), а также рост функции возбуждения в этом диапазоне энергий (рис. 2), можно ожидать помимо прямого дополнительного заселения состояния S_1^* за счет быстрой внутренней конверсии из состояний S_n^* . Поскольку у ароматических кетонов константа интерконверсии велика и составляет $\sim 10^{10}$ — 10^{11} см⁻¹ (вследствие заселения триплетного состояния T_1 при переходах $S_n^* \rightarrow T_1$ и интенсивного триплет-триплетного поглощения в области $\sim 24\,000$ с⁻¹ [18]), возможно осуществление ТАЗФ по механизму $S_0 \rightarrow S_n^* \rightarrow T_1 \rightarrow T_n \rightarrow S_1^* \rightarrow S_0$. Заметим, что ТАЗФ может активироваться возбуждением триплетных молекул излучением СО₂-лазера [9] колебательно-возбужденных молекул флуоренона. Следует иметь в виду, что переход $T_1 \rightarrow T_n$ может осуществляться между разрешенными электронными состояниями и обладать достаточно высокими сечениями возбуждения электронами.

Таким образом, на примере молекулы флуоренона показано сходство и различие спектрально-люминесцентных свойств при оптическом и электронном возбуждении многоатомных молекул. Дальнейшее понимание механизмов взаимодействия электронов со сложными молекулами возможно при расшифровке спектров потерь энергии электронов в области выше потенциала ионизации, где проявляются полосы, обусловленные ионизацией молекул в π - и σ -состояниях, полос ридберговских состояний, полос, связанных с возбуждением внутренних оболочек молекул, которые начали изучаться только для сравнительно простых молекул. Интересную информацию может дать поляризация люминесценции и возбуждение поляризованными электронами. Например, возможно, в этом направлении можно получить ответ на проблему, поставленную еще Пастером: почему разные биологически активные молекулы являются или правовращающими, или левовращающими естественно оптически активными веществами, т. е. природа не является зеркально-симметричной.

Автор благодарен С. М. Казакову и В. А. Сучкову за помощь в получении спектров.

Список литературы

1. Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Д. Бейтса. М., 1964.
2. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М., 1969.
3. Robin M. L., Schweitzer G. K., Wehri E. L. // Journ. Appl. Spectr. Rev. 1981. V. 17. № 1. P. 165.
4. Vorisevich N. A., Gruzinsky V. V., Suchkov V. A., Kazakov S. M., Khristoforov O. V. // Spectr. Lett. 1985. V. 18. № 9. P. 731.
5. Грузинский В. В., Кухто А. В., Ложечник Ф. Д. Теоретическое изучение механизмов возбуждения и флуоресценции сложных органических соединений в газовой фазе при возбуждении мощным пучком электронов наносекундной длительности. Мн., 1987. 51 с. (АН БССР. Ин-т физики. Препринт № 478).
6. Грузинский В. В. // ЖПС. 1989. Т. 51. № 3. С. 470.
7. Баркова Л. А., Грузинский В. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1983. № 6. С. 69.
8. Залеская Г. А., Урбанович А. Е. Возникновение триплетных молекул флуоренона при многофотонном колебательном возбуждении молекул основного электронного состояния. Мн., 1989. 27 с. (АН БССР. Ин-т физики. Препринт № 563).
9. Залеская Г. А., Гололобов А. Е., Павлова В. Т. // ЖПС. 1989. Т. 51. № 5. С. 818.
10. Грузинский В. В., Казаков С. М., Калинин В. И., Сучков В. А., Христофоров О. В. // Всесоюз. конф. по физике электронных и атомных столкновений: Тез. докл. Ужгород, 1988. С. 85.
11. Толкачев В. А. // Оптика и спектроскопия. 1966. Т. 20. № 6. С. 982.
12. Zwarich R., Bree A. // Journ. Mol. Spectr. 1974. V. 52. P. 329.
13. Abou af R., Benoit C. // Chem. Phys. 1990. V. 144. № 3. P. 407.
14. Грузинский В. В. // Весці АН БССР: Сер. фіз.-мат. навук. 1989. № 6. С. 80.
15. Борисевич Н. А., Грузинский В. В. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 852.
16. Dörr F. // Zeitschr. Electrochemie. 1957. B. 61. № 8. S. 950.
17. Josien M. L., Fuson N. // Bull. Soc. Chim. France. 1952. V. 19. № 3. P. 389.
18. Kobayashi T., Nagakura S. // Chem. Phys. Letters. 1976. V. 43. № 3. P. 429.

СИСТЕМЫ ОРГАНОЛЮМИНОФОРОВ С ПЕРЕНОСОМ ЭНЕРГИИ КАК ПЕРСПЕКТИВНЫЕ СРЕДЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЕТООУПРАВЛЯЕМЫХ ТРАНСПАРАНТОВ

В системах параллельной обработки оптической информации, в частности, в ряде существующих концептуальных архитектур оптических компьютеров, в том числе и с нейроноподобной структурой, основным устройством, обеспечивающим высокую параллельность обработки оптической информации, является пространственный модулятор света (ПМС) [1]. Особый интерес представляют устройства, в которых управление проходящим световым потоком осуществляется дополнительным световым потоком. Для обеспечения высокой степени параллельности такой светоуправляемый транспарант должен обладать низким уровнем потребления энергии в расчете на один элемент; при этом, чем выше степень параллельности, тем жестче это требование. В то же время требования к динамическим характеристикам устройства могут быть не столь высоки (высокая параллельность компенсирует относительно невысокое быстродействие отдельного элемента). К настоящему времени в связи с широким развитием работ по оптической бистабильности и оптическому управлению световыми потоками теоретически проанализированы и экспериментально продемонстрированы возможности использования достаточно широкого круга материалов с нелинейным откликом (см., напр., обзор [1]). В то же время следует отметить, что системам на основе сложных органических молекул не уделялось достаточного внимания. В этом аспекте симптоматичным является появление публикации [2], где обсуждаются перспективы применения сложных молекул в ПМС, при этом идея применения базируется на совершенно очевидных оптически индуцированных изменениях поглощения. Несмотря на то, что для такого рода «прямого» использования молекулярных сред требуются управляющие интенсивности порядка насыщающих для соответствующих переходов, высокие сечения поглощения (типичные для молекул), а также возможность использования переходов в долгоживущие состояния (если соответственно сниженное быстродействие приемлемо) делают оценки управляющих интенсивностей достаточно оптимистичными. Тем не менее, безусловно, актуален поиск возможности дальнейшего снижения управляющих интенсивностей.

В настоящей работе рассматривается люминесцентный транспарант, понимаемый как устройство, на которое воздействуют два световых потока (первый будем называть падающим или возбуждающим, второй — управляющим). Интенсивность возбуждаемой первым потоком люминесценции в данной точке транспаранта также зависит от интенсивности управляющего сигнала, т. е. $I_{\text{ЛЮМ}} = f(I_1, I_2)$. В таком рассмотрении имеется аналогия с обычным светоуправляемым ПМС, где интенсивность прошедшего первого потока зависит от интенсивности управляющего. Можно ожидать, что в ряде приложений люминесцентный транспарант сможет выполнять функции, аналогичные традиционным ПМС; могут быть

предложены и иные применения для целей преобразования оптических сигналов (информации).

Начнем рассмотрение с простейшего ансамбля: бихромофора, состоящего из донора и акцептора. Некоторые аспекты задачи о нелинейных эффектах в системах типа бихромофоров, связанных переносом энергии электронного возбуждения, рассматривались в [3, 4]. В приве-

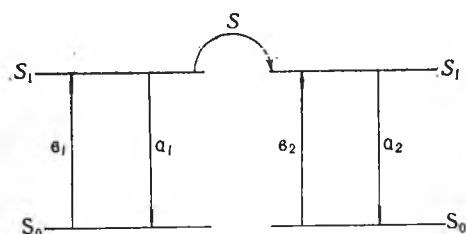


Рис. 1

денном нами рассмотрении акцент делается на зависимостях интенсивности и выхода флуоресценции от интенсивностей двух потоков и анализе возможностей оптического управления.

Итак, в схеме уровней энергии (рис. 1) a_1, a_2 — константы скорости спонтанной дезактивации возбужденных состояний молекул 1 и 2.

$$b_{1(2)} = \sigma_{1(2)} \frac{I_{1(2)}}{h\nu_{1(2)}}, \quad (1)$$

где $\sigma_{1(2)}$ — сечения поглощения молекулы; $I_{1(2)}$ — плотность мощности возбуждающего света.

Будем считать, что спектры поглощения двух молекул, входящих в состав бихромофора, позволяют производить независимое возбуждение этих молекул. S — константа скорости безызлучательного переноса энергии; в силу спектрального различия молекул считаем перенос энергии направленным от 1 к 2, соответственно молекулу 1 будем называть донором, а 2 — акцептором.

Аналогично тому, как делается в [4], возможные состояния системы будем характеризовать двумя индексами i, j , где $i=0,1$ отвечает основному или возбужденному состоянию донора, а $j=0,1$ — акцептора. Соответствующие заселенности состояний обозначим $Y_{i,j}$.

Состояние акцептора существенно влияет на интенсивность люминесценции донора только в том случае, если константа скорости переноса энергии будет много больше констант скоростей спонтанной дезактивации молекул ($S \gg a_1, a_2$). Действительно, в этом случае люминесценция донора будет отсутствовать, если акцептор находится в основном состоянии, и появляться при переводе акцептора в возбужденное состояние («выключение» переноса энергии). Состояние $\{1, 0\}$ можно не учитывать в дальнейшем рассмотрении. Таким образом, для описания характеристик бихромофора (нормируя $Y_{00} + Y_{01} + Y_{11} = 1$) можно записать систему балансных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{01} &= -Y_{01}(2b_1 + b_2 + a_2) + Y_{11}(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) \\ \dot{Y}_{11} &= -Y_{01}b_1 - Y_{11}(a_1 + a_2), \end{aligned} \quad (2)$$

которая имеет простое решение для стационарного случая:

$$\begin{aligned} Y_{01} &= Y_{11}(a_1 + a_2)/b_1 \\ Y_{11} &= (b_1 + b_2)/[(a_1 + a_2)(2b_1 + b_2 + a_2)/b_1 + b_1 + b_2 - a_1 - a_2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Доля молекул донора и акцептора X_{1d} и X_{1a} , находящихся в возбужденном состоянии, может быть записана:

$$X_{1d} = Y_{11}; \quad X_{1a} = Y_{01} + Y_{11}. \quad (4)$$

Для использования бихромофоров в качестве объектов, в которых возможно управление интенсивностью люминесценции световым потоком, наибольший интерес представляет случай, когда интенсивность управляющего излучения низка. При малых интенсивностях возбуждения (донора или акцептора), т. е. при $b_1, b_2 \ll a_1, a_2$, выражение (3) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} Y_{01} &= (b_1 + b_2)/a^2 \\ Y_{11} &= b_1(b_1 + b_2)/[a_2(a_1 + a_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Интенсивность люминесценции в расчете на одну молекулу в квантовых единицах запишется:

$$I_d = X_{1d}a_1' = a_1'(b_1 + b_2)/[a_2(a_1 + a_2)], \quad (6)$$

где a_1' — чисто излучательная часть a_1 .

Квантовый выход донора φ_d определим как

$$\varphi_d = \frac{I_d}{b_1} = a_1'(b_1 + b_2)/[a_2(a_1 + a_2)]. \quad (7)$$

Таким образом, φ_d в обсуждаемом приближении является не постоянной величиной, а линейной функцией от b_1 и b_2 . В выражении же для интенсивности I_d содержится произведение $b_1 b_2$; если b_1 заметно меньше b_2 , то на основании (6) можно утверждать, что система с бихромофором выполняет функции умножения двух входных оптических сигналов. Будем называть для определенности световой поток I_2 , воздействующий на канал акцептора, управляющим. Оценим мощности, требующиеся для осуществления управления. Полагаем $b_1 \ll b_2$; считаем акцептор более долгоживущим, чем донор, т. е. $a_2 < a_1$; полагаем для простоты $a'_1 = a_1$.

Тогда $\varphi_d \approx \frac{b_2}{a_2} = \frac{I_2 b_2}{h\nu_2 a_2}$; величину $h\nu_2 a_2 / \sigma_2 = I_n$ традиционно назовем интенсивностью насыщения. Таким образом, $\varphi_d = \frac{I_2}{I_n}$, т. е., если ограничиться вполне реалистичными с точки зрения возможности регистрации требованиями к $\varphi_d \sim 0,01$, то приходим к заключению, что для управления люминесценцией путем воздействия на канал акцептора достаточна интенсивность порядка 1 % от I_n . При этом, как оговаривалось, интенсивность возбуждения донора еще ниже. Для типичных значений $\sigma \sim \sim 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ это дает $I_2 \sim 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\tau_A} \text{ Вт/см}^2$. (Здесь $\tau_A = \frac{1}{a_2}$ — время жизни возбужденного состояния акцептора, с). Отметим, что в обсуждаемом случае $a_2 < a_1$ и именно τ_A определяет время переходного процесса изменения интенсивности флуоресценции при ступенчатом включении (выключении) управляющего потока I_2 . (Переходный процесс описывается экспонентой с временем τ_A). В случаях, когда можно поступиться быстродействием в пользу параллельности и положить, например, $\tau_A = 10^{-3} \text{ с}$, I_2 достигает $2 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/мкм}^2$, т. е., полагая размер элемента 1 мкм^2 , имеем мощность на один элемент $2 \cdot 10^{-10} \text{ Вт}$.

Не останавливаясь на деталях подробного кинетического рассмотрения, отметим лишь практически интересный частный результат: управление люминесценцией импульсами малой длительности ($\Delta t < \tau_A$), действующими по каналу акцептора. Поглощение кванта из этого импульса переводит хромофор в люминесцентное состояние; квантовый выход ансамбля в этом случае, очевидно, равен $\varphi_A = a'_1/a_1 X_{1d}$, где доля X_{1d} при $X_{1d} \ll 1$ равна $X_{1d} = E_2 \sigma_2 / h\nu_2$ (E_2 — энергия импульса). Задав $\varphi_d = 0,01$, получим оценку: $E_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/см}^2 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ Дж/мкм}^2$.

Представляет интерес рассмотреть возможность использования в светоправляемых транспарантах систем, более легко реализуемых на практике, — неупорядоченных ансамблей сложных органических молекул.

Рассмотрим раствор, состоящий из сложных органических молекул двух типов, между которыми возможен безызлучательный индуктивно-резонансный перенос энергии электронного возбуждения (молекул донора и акцептора). Пусть квантовый выход акцептора близок к нулю. Положим также, что концентрация донора существенно ниже концентрации акцептора, т. е. перенос энергии между молекулами донора отсутствует. Концентрацию акцептора выберем такой, чтобы люминесценция донора была существенно затухшена. Тогда для управления люминесценцией донора достаточно некоторое число молекул акцептора «выключить», т. е. перевести в возбужденное состояние.

Решение задачи о взаимодействии такой системы с двумя световыми потоками в общем случае, естественно, существенно сложнее, чем задачи о бихромофоре. Однако при допущении о малости интенсивности (чтобы возникающей заселенностью акцептора за счет переноса с донора можно было бы пренебречь) решение оказывается весьма простым. Действительно, задача о тушении люминесценции донора акцептором в неупорядоченных ансамблях молекул при отсутствии миграции по донору решена аналитически [5]:

$$1 - \frac{\varphi_d}{\varphi_{0d}} = \sqrt{\pi} \beta \exp(\beta^2) \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx \right\}, \quad (8)$$

где $\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C_A}{C_{A0}}$; C_A — концентрация акцептора; C_{A0} — критическая концентрация переноса донор-акцептор; φ_d , φ_{0d} — квантовый выход донора в присутствии акцептора и без него соответственно.

Возбуждение части молекул акцептора (выключение молекул акцептора) эквивалентно уменьшению их концентрации. Для вычисления квантового выхода донора при наличии излучения, которое возбуждает акцептор, в выражении (8) достаточно заменить C_A на C'_A причем

$$C'_A = C_A [1 - b_2/(b_2 + a_2)]. \quad (9)$$

На рис. 2 приведены рассчитанные значения $\varphi_d(b)/\varphi_d(b=0)$ в зависимости от интенсивности возбуждения акцептора для различных концентраций. Из рисунка видно, что «управление» люминесценцией донора тем эффективней, чем выше концентрация акцептора. Однако при больших концентрациях $\varphi_d(b=0)$ мал и использование таких систем в управляемых светом транспарантах может оказаться затруднительным с экспериментальной точки зрения. Ограничимся для оценки диапазоном концентраций акцептора, в котором $\varphi_d(b=0)$ порядка 0,01. Из рис. 2 (кривые 4, 5) видно, что изменение квантового выхода донора более чем в два раза может быть достигнуто при достаточно скромных интенсивностях возбуждающего акцептор излучения ($I_2/I_H=0,5$).

Тем не менее очевидно, что в этом случае требуемые для управления интенсивности на один-два порядка выше, чем в случае системы бихромофоров. С качественной точки зрения это различие объяснимо тем, что в случае бихромофоров перевода в возбужденное состояние одной молекулы акцептора достаточно для полного снятия тушения входящей в данный бихромофор молекулы донора. В случае же ансамбля акцепторов такой же перевод в возбужденное состояние одной молекулы снижает тушение, но не ликвидирует — другие невозбужденные молекулы ансамбля продолжают выполнять функцию тушителей.

На основе переноса энергии в ансамбле молекул возможна реализация и другого варианта оптического управления. Представим систему из молекул донора и молекул другого типа, в основном состоянии не являющихся акцептором, но превращающихся в акцепторы при переводе в возбужденное состояние.

(Спектр поглощения из основного состояния у этих молекул не перекрывается со спектром флуоресценции донора, а поглощение из некоторого возбужденного состояния — синглетного или триплетного — обеспечивает высокое значение интеграла перекрытия). Таким образом, при воздействии дополнительным световым потоком по каналу «потенциального» акцептора возникают ловушки и происходит тушение флуоресценции, более эффективное в случае высоких концентраций донора (за счет переноса энергии по его молекулам с доставкой на акцептор).

Оценим плотности мощности I_2 , необходимые

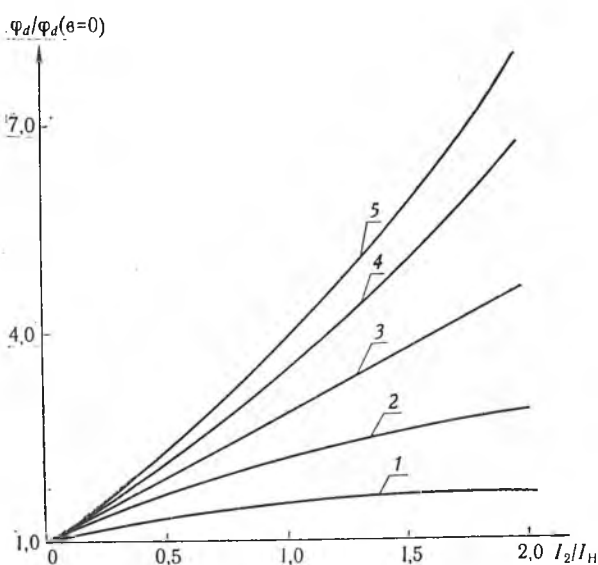


Рис. 2. Зависимости $\frac{\varphi_d}{\varphi_d(b=0)}$ от интенсивности возбуждения:

$C = 2 \cdot 10^{-3}$ (1); $5 \cdot 10^{-3}$ (2); 10^{-2} (3); $2 \cdot 10^{-2}$ (4); $4 \cdot 10^{-2}$ (5). моль/л; $\varphi_d(b=0) = 0,44$ (1); 0,17 (2); 0,06 (3); 0,017 (4); 0,004 (5)

для управления («светондущированного тушения») в этом случае. Воспользуемся соотношением для относительного квантового выхода люминесценции донора [6]:

$$\frac{\varphi_{0d}}{\varphi_d} - 1 \approx \frac{\pi^{3/2}}{2\sqrt{2}} \frac{C}{C_0} \frac{C_A}{C_{A0}}, \quad (10)$$

где C и C_A — концентрация донора и акцептора; $C_0 = \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3\right)^{-1}$;

R_0 — критическое расстояние для переноса донор — донор. Соотношение (10) выполняется для $C/C_0 \gg 1$, $R_{A0} < R_0$, $C_A \ll C$.

Эта область как раз является областью наших практических интересов: высокая концентрация C обеспечивает сильную зависимость при малых C_A . Пренебрегая, как и в предыдущих рассмотрениях, заселением акцептора за счет переноса (т. е., полагая I_1 малым), для концентрации возбужденных молекул, являющихся акцепторами, запишем:

$$C_A = C_X \frac{b_2}{b_2 + a_2} = C_X \frac{I_2/I_H}{1 + I_2/I_H}, \quad (11)$$

где C_X — концентрация молекул примеси, исходной для образования акцептора.

Для интересующей нас области $I_2 \ll I_H$ и $C_A \approx C_X \frac{I_2}{I_H}$.

Зададимся для оценки достаточно типичными значениями: C , $C_X = 10^{-1}$ моль/л, $R_0 = 5$ нм, $R_{A0} = 4$ нм. Тогда из (10) получим: $\varphi_{0d}/\varphi_d - 1 \approx 900 \frac{I_2}{I_H}$ т. е. интенсивность $I_2 \sim 10^{-3} I_H$ достаточна для уменьшения квантового выхода в два раза. Если использовать те же параметры, что рассматривались при оценке управляющей энергии для бихромофора, то для настоящего случая имеем в расчете на элемент $2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Проведенные оценки позволяют считать системы с переносом энергии перспективными нелинейными средами для реализации оптического управления.

Список литературы

1. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. М., 1988.
2. Spreiser S., Orenstein M. // Appl. Optics. 1988. V. 27. № 14. P. 2944.
3. Малашкевич Г. Е., Пятосин В. Е., Цвирко М. Н. // Оптика и спектроскопия. 1984. Т. 57. Вып. 1. С. 50.
4. Маркель В. А., Штокман М. И. // Там же. 1988. Т. 65. Вып. 6. С. 1231.
5. Ермолаев В. Л., Бодунов Е. М., Свешников Е. Б., Шахвердов Т. А. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения. Л., 1977.
6. Бодунов Е. Н. // Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1990.

Поступила в редакцию 04.04.91.

УДК 681.325.53(075.8)

Л. Н. БАКИНОВСКАЯ, Б. Н. КРАСНОГОЛОВЫЙ,
В. П. СУПРУН, Б. Н. ШПИЛЕВОЙ

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДВОИЧНОГО КОДА В ДВОИЧНО-ДЕСЯТИЧНЫЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ D-ТРИГГЕРОВ

Важным узлом преобразователя двоичного, или бинарного, кода (БК) в двоично-десятичный (БДК) последовательного типа является двоично-десятичный регистр со схемой коррекции (рис. 1), в котором осуществляется сдвиг и коррекция преобразуемого кода. Как правило, схема коррекции (СК) выполняется на логических элементах, а регистр (Pr2) — на тетрадах триггеров. В качестве последних обычно используют универсальные JK-триггеры с входной логикой ЗИ, которая в ряде случаев может упростить построение СК [1, 2]. Но JK-триггеры требуют

управления по двум информационным входам (J и K), а в силу сложности схемы и большого числа выводов в корпусе микросхемы содержится только один триггер.

Если же тетрады $Pг2$ построить на D -триггерах с одним информационным входом (D), микросхемы которых содержат два и большее количество триггеров, то, несмотря на отсутствие входной логики, в большинстве случаев удастся упростить схему $Pг2$ и $СК$ и соответственно сократить аппаратные затраты. Дополнительным соображением в пользу применения D -триггеров в тетрадах $Pг2$ может служить тот факт, что входной регистр ($Pг1$), как правило, выполняют также на D -триггерах.

Алгоритм преобразования $БК \rightarrow БДК$ представлен в табл. 1 [3].

При $p=0$ происходит удвоение содержимого тетрады и, если удвоенное значение превышает девять, формируется сигнал переноса $p_+=1$. При $p=1$ к удвоенному значению прибавляется единица и, если полученное содержимое превышает десять, вырабатывается сигнал переноса $p_+=1$.

Для синтеза младшей тетрады на основании алгоритма преобразования и матрицы переходов D -триггера (табл. 2) составляем сводную таблицу переходов состояний, которая для БДК с весами 8421 имеет вид табл. 3 (Q_1-Q_4 — состояния триггеров тетрады).

По данным табл. 3 могут быть составлены логические уравнения для D -входов всех триггеров тетрады и сигнала переноса p_+ в последующую тетраду. Эти пять уравнений представляют собой систему недоопределенных булевых функций пяти переменных (Q_1-Q_4, p), минимизацию которых «вручную» лучше осуществить по картам Вейча—Карно (рис. 2).

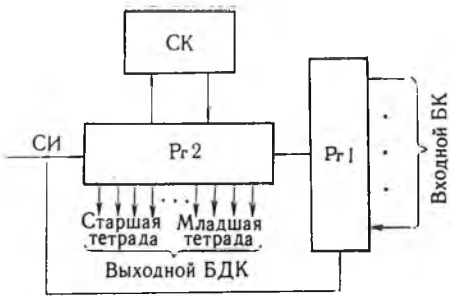


Рис. 1. Структурная схема последовательного преобразования $БК \rightarrow БДК$: $Pг1$ — входной регистр сдвига; $Pг2$ — выходной двоично-десятичный регистр; $СК$ — схема коррекции; $СИ$ — синхронимпульсы

Таблица 1

X	F_i^t	$p=0$		$p=1$	
		F_i^{t+1}	p_+	F_i^{t+1}	p_+
0	F_0	F_0	0	F_1	0
1	F_1	F_2	0	F_3	0
2	F_2	F_4	0	F_5	0
3	F_3	F_6	0	F_7	0
4	F_4	F_8	0	F_9	0
5	F_5	F_0	1	F_1	1
6	F_6	F_2	1	F_3	1
7	F_7	F_4	1	F_5	1
8	F_8	F_6	1	F_7	1
9	F_9	F_8	1	F_9	1

Таблица 2

$Q^t \rightarrow Q^{t+1}$		D^t
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Примечания: X —десятичная цифра; F_i^t — текущее состояние, двоичные 4-разрядные кодовые слова, отображающие десятичные цифры 0—9 в заданном БДК; F_i^{t+1} — следующее состояние триггеров тетрады; p — сигнал переноса от предыдущей тетрады (или от $Pг1$ для младшей тетрады); p_+ — сигнал переноса на последующую тетраду.

X	F_i^t				F_i^{t+1}								D_1		D_2		D_3		D_4		p_+	
	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	$p=0$				$p=1$				p									
					Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
8	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1

Минимизированные и приведенные к элементному базису И—НЕ уравнения получатся в виде:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= p; \quad D_2 = \overline{Q_1}Q_4 \vee Q_1Q_2\overline{Q_3} \vee \overline{Q_1}Q_2Q_3 \vee Q_1\overline{Q_2}\overline{Q_3}\overline{Q_4} = \\
 &= \overline{Q_1}Q_4 \wedge \overline{Q_1}Q_2\overline{Q_3} \wedge \overline{Q_1}Q_2Q_3 \wedge \overline{Q_1}\overline{Q_2}\overline{Q_3}\overline{Q_4}; \\
 D_3 &= Q_1Q_2 \vee \overline{Q_1}Q_4 \vee Q_2\overline{Q_3}\overline{Q_4} = \overline{Q_1}Q_2 \wedge \overline{Q_1}Q_4 \wedge \overline{Q_2}\overline{Q_3}\overline{Q_4}; \\
 D_4 &= Q_1Q_4 \vee \overline{Q_1}\overline{Q_2}Q_3 = \overline{Q_1}Q_4 \wedge \overline{Q_1}\overline{Q_2}Q_3; \\
 p_+ &= Q_4 \vee Q_1Q_3 \vee Q_2Q_3 = \overline{Q_4} \wedge \overline{Q_1}Q_3 \wedge \overline{Q_2}Q_3.
 \end{aligned}$$

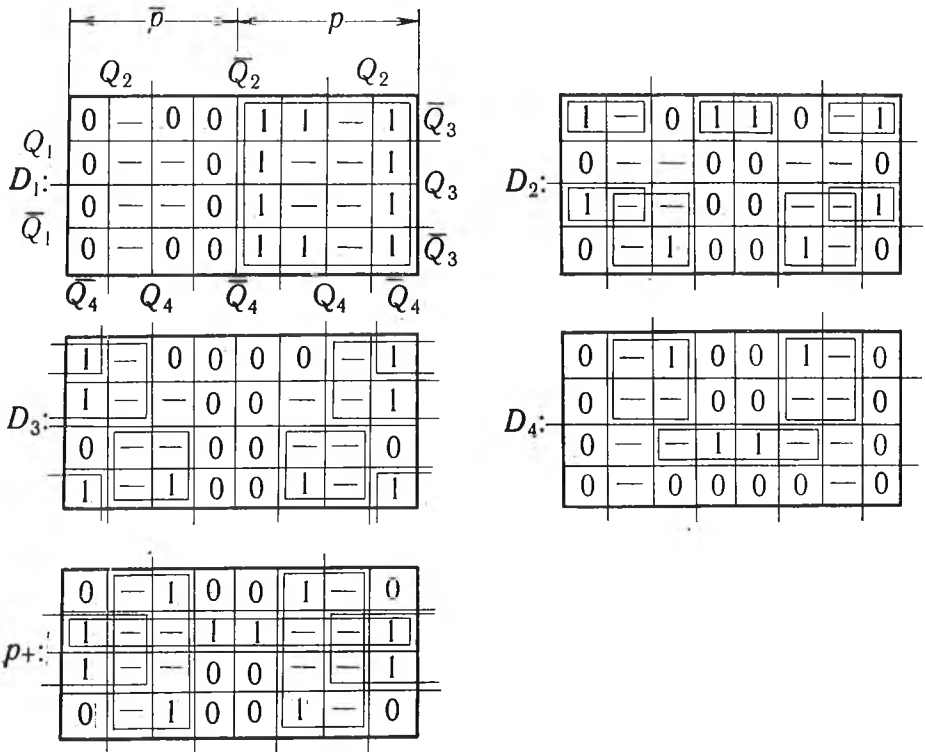


Рис. 2. Карты Вейча — Карно для младшей тетрады преобразователя БК→БДК 8421

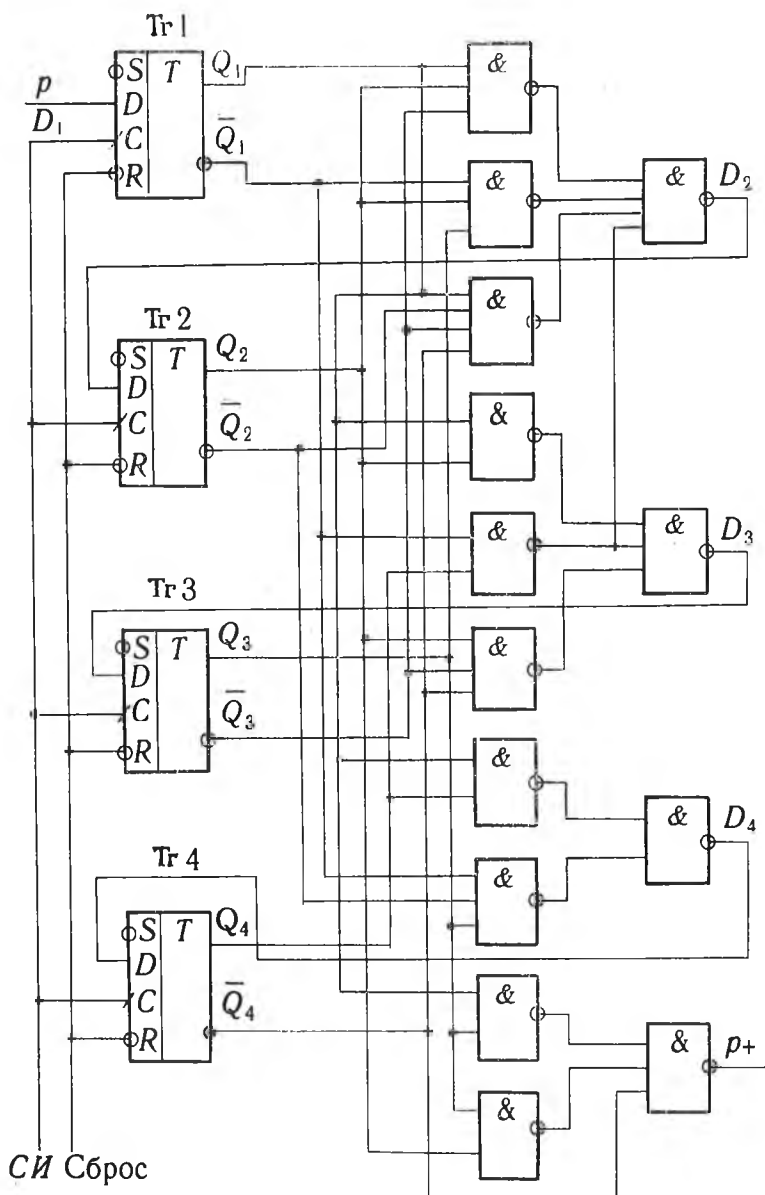


Рис. 3. Младшая тетрада Rg2 со схемой коррекции

В соответствии с полученными уравнениями построена структурная логическая схема младшей тетрады (рис. 3), содержащая 14 логических элементов и 4 триггера. Если ориентироваться на микросхемы серии К155, аппаратные затраты будут следующими: К155ЛА3 (2И—НЕ) — 2 шт., К155ЛА4 (3И—НЕ) — 2 шт., К155ЛА1 (4И—НЕ) — 1 шт., D-триггеры К155ТМ2 — 2 шт. Таким образом, младшая тетрада с элементами коррекции может быть выполнена на семи микросхемах при двух лишних логических элементах 2И—НЕ, которые могут найти применение в других тетрадах преобразователя кодов.

Промежуточные тетрады не отличаются от младшей, роль сигнала переноса p в них играет сигнал переноса p_+ из предыдущей тетрады.

Что же касается старшей тетрады, то ее схема несколько упрощается за счет отсутствия схемы формирования сигнала переноса (нет еще более старшей тетрады).

Наиболее трудоемкая процедура функционально-логического синтеза

тетрад преобразователя кодов — минимизация систем недоопределенных булевых функций — может быть автоматизирована. В результате машинной минимизации по одному из методов для младшей тетрады получены следующие уравнения:

$$D_1 = p; \quad D_2 = \bar{Q}_1 Q_4 \vee \bar{Q}_1 Q_2 Q_3 \vee Q_1 \bar{Q}_3 \bar{Q}_4;$$

$$D_3 = Q_1 Q_2 \vee \bar{Q}_1 Q_4 \vee Q_2 \bar{Q}_3;$$

$$D_4 = Q_1 Q_4 \vee \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 Q_3;$$

$$p_+ = Q_1 Q_3 \vee Q_1 Q_4 \vee \bar{Q}_1 Q_4 \vee \bar{Q}_1 Q_2 Q_3.$$

Из сравнения уравнений, полученных при «ручной» и машинной минимизации, следует, что в последнем случае удалось получить меньшее число различающихся между собой конъюнкций (восемь против десяти) и за счет этого сократить аппаратные затраты на одну микросхему.

По изложенной методике могут быть синтезированы тетрады с элементами коррекции для преобразователей БК→БДК и с другими весовыми коэффициентами в выходном коде (не только 8421).

Существенного сокращения аппаратных затрат можно достигнуть при построении преобразователя кода на программируемых логических матрицах (ПЛМ), и полученные выше уравнения хорошо приспособлены для реализации на этой элементной базе.

Современные ПЛМ имеют 8—16 входов, 4—12 выходов, 24—96 вертикальных шин (различных конъюнкций) и время задержки, превышающее в два-три раза значение задержки типового логического элемента соответствующей серии [4].

С учетом этих данных нетрудно подсчитать, что для построения схем коррекции преобразователя 10-разрядного БК в три тетрады БДК 8421 потребуется всего одна микросхема ПЛМ. Нужно еще учесть, что и синхронные D -триггеры могут быть синтезированы в базисе ПЛМ (одна-две микросхемы).

Таким образом, по аппаратным затратам преобразователи кодов на основе D -триггеров вполне конкурентноспособны с преобразователями БК→БДК 8421, выполненными на специализированных микросхемах (например, К155ПР7) или ПЗУ [2].

Список литературы

1. Колпаков И. Ф., Никитюк Н. М., Урманова Л. А. // Приборы и техника эксперимента. 1973. № 6. С. 70.
2. Красноголовый Б. Н., Шпилевой Б. Н. Преобразователи кодов. Мн., 1983.
3. Rhyne V. T. // IEEE Trans. Comput. 1970. V. 19. № 9. P. 808.
4. Потемкин И. С. Функциональные узлы цифровой автоматики. М., 1988.

Поступила в редакцию 12.01.91.



УДК 517.977

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ, СТАБИЛИЗАЦИЯ, ОПТИМАЛЬНОСТЬ

1. Устойчивость решений [1] — одна из центральных проблем теории дифференциальных уравнений, поставленных многочисленными прикладными задачами. Результаты, полученные в этой области, давно и широко используются в теории управления для стабилизации собственно неустойчивых динамических систем [2]. В классическую эпоху теории автоматического регулирования часто довольствовались достижением для систем общего свойства устойчивости. С развитием техники повышались требования к стабилизации. Устойчивые переходные процессы стали оценивать по различным критериям качества. Новый этап теории стабилизации наступил после создания теории оптимального управления [3]. Первым крупным и практически важным приложением теории оптимальных процессов к задачам стабилизации явился метод Летова — Калмана аналитического конструирования оптимальных регуляторов [4, 5]. Наиболее эффективно он используется для стабилизации линейных систем с квадратичной оценкой качества переходных процессов без учета каких-либо ограничений на управление и траекторию. Использование других результатов математической теории оптимальных процессов для решения усложненных проблем стабилизации сдерживается отсутствием эффективных алгоритмов синтеза оптимальных систем.

В последнее время в рамках Минского семинара по конструктивным проблемам оптимального управления на базе методов решения экстремальных задач [6, 7] разработаны алгоритмы синтеза оптимальных систем управления. Цель данной работы — показать, каким образом эти результаты могут применяться для создания оптимальных стабилизаторов с ограниченными управляющими воздействиями. Предлагаемые алгоритмы рассчитаны на реализацию с помощью средств современной вычислительной техники.

2. Рассмотрим n -мерный дискретный процесс $x(t)$, $t \in 0, h, \dots$, описываемый уравнением

$$x(t+h) = A(h)x(t). \quad (1)$$

Дискретные системы встречаются во многих приложениях и поэтому их исследование представляет самостоятельный интерес. В данной работе они играют вспомогательную роль при стабилизации непрерывных систем

$$\dot{x} = Ax. \quad (2)$$

В связи с тем, что предлагаемые далее стабилизаторы рассчитаны на реализацию с помощью микропроцессорных устройств, работающих с тактом $h > 0$, то целесообразно от системы (2) перейти к (1), положив

$A(h) = \exp Ah$. В этом случае траектории двух систем (1), (2), выходящие из одного начального состояния, будут совпадать и в моменты $t_k = kh$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, стабилизация дискретной системы (1) ведет к стабилизации и непрерывной системы (2).

Предположим, что система (1) неустойчива относительно состояния покоя $x=0$, т. е. существует такое (неустойчивое) начальное состояние $x_0 \neq 0$, что процесс $x(t)$, $t \geq 0$, начавшийся в момент $t=0$ из состояния x_0 , обладает свойством $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, если $t \rightarrow \infty$.

Пусть для стабилизации системы (1) доступны скалярные управляющие воздействия $u(t)$, $t \geq 0$, стесненные ограничением:

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Будем считать, что взаимодействие управления (3) с объектом стабилизации (1) описывается уравнением

$$x(t+h) = A(h)x(t) + b(h)u(t). \quad (4)$$

Обозначим

$$X_\alpha = \{x \in R^n: |x_j| \leq \alpha, \quad j = \overline{1, n}\}, \quad (0 < \alpha < \infty). \quad (5)$$

Определение 1. Состояние $x(0) \in X_\alpha$ назовем $\alpha\theta$ -стабилизируемым, если существует такое управление $u(t)$, $t \in T_{\theta-h} = \{0, h, \dots, \theta-h\}$, которое удовлетворяет ограничению (3) и порождает траекторию $x(t)$, $t \in T_\theta$, вдоль которой выполняется условие

$$x(\theta) \in X_\alpha. \quad (6)$$

Систему (1) будем называть $\alpha\theta$ -стабилизируемой, если все ее состояния $x(0) \in X_\alpha$ $\alpha\theta$ -стабилизируемы.

Если в дополнение к (6) выполняется соотношение $x(t) \in X_{p\alpha}$, $t \in T_\theta$, ($p \geq 1$), то будем говорить о равномерной $\alpha\theta$ -стабилизируемости.

Определение 2. Состояние $x(0) \in X_\alpha$ назовем $\alpha q\theta$ -асимптотически стабилизируемым $0 < q < 1$, если существует такое управление $u(t)$, $t \in T_{\theta-h}$, которое удовлетворяет ограничению (3) и порождает траекторию $x(t)$, $t \in T_\theta$, вдоль которой выполняется условие $x(\theta) \in X_{q\alpha}$. Систему (1) будем называть $\alpha q\theta$ -асимптотически стабилизируемой, если все ее состояния $x(0) \in X_\alpha$ $\alpha q\theta$ -асимптотически стабилизируемы.

3. На языке теории оптимального управления в п. 2 рассмотрены задачи о существовании стабилизирующих управлений. Для построения последних можно было бы в духе линейного программирования ввести первую фазу метода. Однако перейдем сразу к оптимальной стабилизации.

Определение 3. Для заданного начального состояния $x(0) \in X_\alpha$ $\alpha q\theta$ -асимптотически стабилизирующее управление назовем оптимальным, если на нем минимально значение параметра q , т. е., если оно является решением задачи:

$$\begin{aligned} q \rightarrow \min, \quad & x(t+h) = A(h)x(t) + b(h)u(t), \\ & x(0) = x_0, \quad |x_j(\theta)| \leq q\alpha, \quad j = \overline{1, n}, \\ & |u(t)| \leq 1, \quad t \in T_{\theta-h}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оптимальное равномерно $q\alpha\theta$ -асимптотически стабилизирующее управление является решением задачи:

$$\begin{aligned} q \rightarrow \min, \quad & x(t+h) = A(h)x(t) + b(h)u(t), \\ & x(0) = x_0, \quad x(t) \in X_{p\alpha}, \quad t \in T_\theta; \\ & |x_j(\theta)| \leq q\alpha, \quad j = \overline{1, n}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (8)$$

4. Оптимальные управления, введенные в п. 3, принято называть программными. Они пригодны лишь для разомкнутых систем управления.

На практике чаще используются замкнутые системы (системы управления с обратной связью), более приспособленные для парирования неучтенных возмущений. Подобные возмущения типичны для процессов, которые требуется стабилизировать.

Опишем схему синтеза стабилизирующего воздействия, которое вырабатывается в режиме реального времени.

Предположим, что система управления (4), (3) проработала в дискретные моменты времени $0, h, \dots, \tau$. К моменту τ она под действием управлений $u(0), \dots, u(\tau-h)$ и внешних возмущений $w(0), \dots, w(\tau-h)$ находится в состоянии $x(\tau)$. В следующий момент $\tau+h$ она из-за возникшего возмущения $w(\tau)$ окажется не в состоянии $\tilde{x}(\tau+h) = A(h)x(\tau) + b(h)u(\tau)$, а в состоянии $x(\tau+h) = \tilde{x}(\tau+h) + w(\tau)$.

Устройство, которое для каждого $\tau \geq 0$ за время, не превосходящее h , при любом $x(\tau+h)$ решает экстремальную задачу вида:

$$q \rightarrow \min, \quad x(t+h) = A(h)x(t) + b(h)u(t), \\ |x_j(\tau+\theta+h)| \leq qa, \quad j = \overline{1, n}; \quad x(\tau+h) = \overset{\vee}{x}(\tau+h) + w(\tau), \quad (9) \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in \{\tau+h, \dots, \tau+\theta\},$$

назовем оптимальным стабилизатором.

Понятие равномерного оптимального стабилизатора может быть введено аналогично.

Очевидно, что непосредственное решение задачи (8) в каждый момент τ слишком трудоемко и не может быть осуществлено за реально приемлемое время h . Поэтому оптимальное управление $u^0(\cdot|\tau+h, x(\tau+h))$ задачи (8) построим с помощью коррекции управления $u^0(\cdot|\tau, x(\tau))$, полученного стабилизатором в предыдущий момент времени. В качестве базового для начального момента $\tau=0$ можно выбрать оптимальную программу $u^0(\cdot)$ для (6).

Согласно [7], решением задачи вида (8), построенной для момента τ , является совокупность $\{u^0(\cdot|\tau, x(\tau)), S_{\text{оп}}(\tau)\}$, где $S_{\text{оп}}(\tau) = \{J_{\text{оп}}(\tau), T_{\text{оп}}(\tau)\}$, $J_{\text{оп}}(\tau) \subset J = \{1, 2, \dots, n\}$, $T_{\text{оп}}(\tau) = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$, $\tau \leq \tau_1(\tau) < \tau_2(\tau) < \dots < \tau_l(\tau) \leq \tau+\theta$.

При этом выполняются соотношения: $|J_{\text{оп}}(\tau)| = |T_{\text{оп}}(\tau)| = l$, $0 \leq l \leq n$, $\det P(\tau) \neq 0$, $P(\tau) - l \times l$ — матрица, построенная по элементам системы (4).

Коррекция решения $\{u^0(\cdot|\tau, x(\tau)), S_{\text{оп}}(\tau)\}$ состоит в вычислении чисел $\tau_1(\tau+h)$, $\tau_2(\tau+h)$, $\dots$, $\tau_l(\tau+h)$. Эти числа в общем случае мало отличаются от соответствующих чисел $\tau_1(\tau)$, $\tau_2(\tau)$, $\dots$, $\tau_l(\tau)$, известных стабилизатору в момент времени τ . Алгоритм коррекции сводится к конечной совокупности арифметических операций. Из-за большого объема необходимых вспомогательных сведений описание алгоритма здесь не приводится. Оно будет опубликовано отдельно. Отметим лишь, что в основе алгоритма лежат идеи двойственности.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969. С. 384.
4. Калман Р. Е. // Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М., 1961. Т. 2. С. 521.
5. Летов А. М. // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4, 5, 6.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1977—1980. Ч. 1—3.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.

Поступила в редакцию 12.11.90.

С-ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Хорошо известно, что первоначальные результаты по теории интегральных уравнений относились к непрерывным решениям линейных интегральных уравнений второго рода или, как принято говорить, к **С**-теории этих уравнений. В этой связи значительная часть монографий и учебников по теории интегральных уравнений посвящена **С**-теории (см., напр., [1—8]). Однако изложение этой теории в упомянутых и других книгах проведено при упрощающих специальных дополнительных ограничениях, не связанных с существом дела. Типичными из этих дополнительных предположений являются непрерывность ядра или наличие у него лишь так называемых слабых особенностей и др. Возникает естественный вопрос об установлении основных фактов теории интегральных уравнений при минимальных ограничениях на его ядро. При этом следует отметить, что непосредственное использование абстрактной теории линейных операторных уравнений здесь невозможно по той причине, что ее применение связано с анализом сопряженного уравнения, которое в рассматриваемом случае оказывается уравнением в пространстве функций ограниченной вариации (в скалярном случае) или подходящем пространстве ограниченных мер (в общем случае); анализ уравнений в этих пространствах связан со значительными техническими трудностями.

Попытаемся изложить основные факты **С**-теории линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода на основе, с одной стороны, теории Рисса — Шаудера компактных линейных операторов в банаховых пространствах и, с другой стороны, современной теории интегральных операторов. В короткой статье, конечно, невозможно затронуть все аспекты рассматриваемой теории, поэтому ограничимся вопросом о справедливости классических теорем Фредгольма для таких уравнений, включая теоремы об интегральном представлении их решений. За рамками статьи остались вопросы, связанные с детерминантами Фредгольма и теория некоторых специальных классов интегральных уравнений (напр., с осцилляционными ядрами).

1. Пусть Ω — компактное метрическое пространство, A — некоторая σ -алгебра его подмножеств (называемых, как обычно, измеримыми), на которой задана конечная счетно аддитивная мера μ ; предполагается, что любое компактное множество Ω измеримо и что измеримое множество с любой степенью точности по мере может быть аппроксимировано компактными подмножествами Ω . Типичными примерами этой ситуации являются отрезок $\Omega = [a, b]$, ограниченная замкнутая область Ω в конечномерном пространстве, натуральный ряд или произвольное счетное множество, компактизированное «бесконечностью» ∞ с соответствующей метрикой и с дискретной мерой (последний случай позволяет охватить бесконечные системы линейных уравнений) и т. д. Через **С** обозначим пространство Чебышева вещественных или комплексных непрерывных на Ω функций, а через L_p ($1 \leq p \leq \infty$) — пространство Лебега интегрируемых со степенью p при $p < \infty$ и ограниченных в существенном при $p = \infty$ вещественных или комплексных функций.

Нас интересует уравнение Фредгольма второго рода

$$\lambda x(t) - \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds = f(t) \quad (1)$$

вместе с соответствующим однородным уравнением

$$\lambda x(t) - \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds = 0 \quad (2)$$

и транспонированным уравнением

$$\lambda y(t) - \int_{\Omega} k^*(t, s) y(s) dt = 0, \quad (3)$$

где

$$k^*(t, s) = \overline{k(s, t)}. \quad (4)$$

Предполагается, что ядро $k(t, s)$ измеримо по совокупности переменных. Основную роль при этом играют довольно тонкие свойства линейного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \quad (5)$$

и транспонированного к нему линейного интегрального оператора

$$K^{\circ}x(t) = \int_{\Omega} k^*(t, s) x(s) ds. \quad (6)$$

Соответствующие предположения, однако, удобнее формулировать непосредственно в терминах ядра $k(t, s)$ или, что эквивалентно, определенной на Ω и принимающей значения в пространстве S измеримых на Ω функций вектор-функции

$$\underline{k}(t) = k(t, s). \quad (7)$$

Примем следующие обозначения: $L(X, Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y ; $L(X, Y, \text{com})$ и $L(X, Y, \text{wcom})$ — пространства компактных и соответственно слабо компактных линейных операторов, $L(X, Y, \text{ws})$ — усиленно непрерывных (т. е. преобразующих слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся) операторов.

В дальнейшем основную роль играют приводимые ниже леммы. Часть приведенных в них результатов хорошо известна (см., напр., [9—11]):

Лемма 1. *Справедливы следующие включения:*

$$L(C, C, \text{com}) \subset L(C, C, \text{wcom}) = L(C, C, \text{ws}) = L(L_{\infty}, C) \subset \\ \subset L(C, C) \subset L(L_{\infty}, L_{\infty}). \quad (8)$$

При этом $L(C, C, \text{com})$ и $L(C, C, \text{wcom})$ являются идеалами и, кроме того, произведение двух операторов из $L(C, C, \text{wcom})$ является оператором из $L(C, C, \text{com})$.

Лемма 2. *Линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), действует в пространстве C в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $\underline{k}(t)$, определенная равенством (7), является C -слабо непрерывной вектор-функцией из Ω в L_1 . При этом оператор K является непрерывным и*

$$\|K\| = \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} |k(t, s)| ds; \quad (9)$$

кроме того, сопряженный к K оператор K^* оставляет L_1 инвариантным и сужение этого оператора на L_1 совпадает с транспонированным к K оператором K° , определенным равенством (6).

Условие C -слабой непрерывности вектор-функции $\underline{k}(t)$, определенной равенством (7), в частности, влечет за собой неравенство (8) или, иными словами, принадлежность ядра $k(t, s)$ пространству $Z(\Omega)$ измеримых по совокупности переменных функций $z(t, s)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|z(t, s)\|_Z = \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} |z(t, s)| ds. \quad (10)$$

Однако принадлежность ядра $k(t, s)$ этому пространству далеко не достаточна для C -слабой непрерывности функции $\underline{k}(t)$. В настоящее время условие C -слабой непрерывности детально изучено лишь в самом про-

стом случае, когда $\Omega = [a, b]$; именно для этого известны [12] достаточно тонкие, но простые и удобные критерии $\mathbf{C}$ -слабой непрерывности функции Ф. Рисса, Г. М. Фихтенгольца, А. Н. Колмогорова.

Лемма 3. *Линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), действует в пространстве $\mathbf{C}$ и является слабо компактным в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $k(t)$, определенная равенством (7), является $\mathbf{L}_\infty$ -слабо непрерывной вектор-функцией из Ω в $\mathbf{L}_1$.*

В отличие от условия $\mathbf{C}$ -слабой непрерывности функции $\underline{k}(t) = k(t, s)$ условие ее $\mathbf{L}_\infty$ -слабой непрерывности проверяется сравнительно просто. Оно означает, что $k(t, s) \in Z(\Omega)$ и, кроме того, каждая из функций

$$K\chi_D(t) = \int_D k(t, s) ds \quad (D \in \mathbf{A}) \quad (11)$$

($\chi_D(t)$ — характеристическая функция множества $D \in \mathbf{A}$) непрерывна.

Лемма 4. *Линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), является компактным в пространстве $\mathbf{C}$ в том и только том случае, когда соответствующая ему функция $k(t)$, определенная равенством (7), является непрерывной вектор-функцией из Ω в $\mathbf{L}_1$.*

Последнее условие формулируется уже совсем просто: оно означает, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} |k(t, s) - k(t_0, s)| ds = 0 \quad (t_0 \in \Omega). \quad (12)$$

Для любых двух функций $m(t, s)$ и $n(t, s)$ из $Z(\Omega)$ определена их свертка $m * n(t, s)$:

$$m * n(t, s) = \int_{\Omega} m(t, \xi) n(\xi, s) d\xi, \quad (13)$$

также являющаяся функцией из $Z(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть линейный интегральный оператор M с ядром $m(t, s)$ и линейный интегральный оператор N с ядром $n(t, s)$ действуют в пространстве $\mathbf{C}$. Тогда действующий в $\mathbf{C}$ линейный оператор MN является интегральным оператором с ядром $m * n(t, s)$.*

2. Будем говорить, что для уравнения (1) справедливы теоремы Фредгольма, если для него справедливы следующие утверждения:

а) Спектр $\text{sp} K$ линейного интегрального оператора K , определенного равенством (5), является или конечным, или счетным множеством с единственной предельной точкой 0.

б) Для каждого $\lambda \in \text{sp} K \setminus \{0\}$ однородные уравнения (2) и (3) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений соответственно в $\mathbf{C}$ и в $\mathbf{L}_1$.

с) Для каждого $\lambda \in \text{sp} K \setminus \{0\}$ уравнение (1) имеет непрерывные решения в том и только том случае, когда его правая часть $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Omega} f(t) \overline{h_j(t)} dt = 0 \quad (j = 1, \dots, m); \quad (14)$$

эти решения имеют вид:

$$x(t) = x_0(t) + c_1 e_1(t) + \dots + c_m e_m(t), \quad (15)$$

где $x_0(t)$ — некоторое решение уравнения (1), а $c_1, \dots, c_m$ — произвольные постоянные; здесь $e_1(t), \dots, e_m(t)$ и $h_1(t), \dots, h_m(t)$ — все линейно независимые решения уравнений (2) и (3) соответственно в $\mathbf{C}$ и в $\mathbf{L}_1$.

Теорема 1. *Пусть линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), слабо компактен. Тогда для уравнения (1) справедливы теоремы Фредгольма.*

Подчеркнем, что теорема 1 непосредственно из соответствующей теоремы Рисса — Шаудера не вытекает (прежде всего потому, что $\mathbf{L}_1$ не совпадает с сопряженным к $\mathbf{C}$ пространством).

Обозначим через $\Lambda(K)$ множество точек λ комплексной плоскости, для которых $\lambda^{-1} \notin \text{sp}K$, а через $\Lambda_0(K)$ — его компоненту связности, содержащую нуль; эта компонента содержит открытый круг $\Lambda_c(K) = \{\lambda: |\lambda| < (\rho(K))^{-1}\}$, где $\rho(K)$ — спектральный радиус оператора K , определенный равенством

$$\rho(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|K^n\|)^{1/n}. \quad (16)$$

Как известно, в $\Lambda(K)$ определена аналитическая функция $L(\lambda, K) = K(I - \lambda K)^{-1}$, называемая *резольвентой Фредгольма*, связанная с резольвентой Гильберта $R(\lambda, K)$ простыми равенствами

$$R(\lambda, K) = \lambda^{-1} I + \lambda^{-2} L(\lambda^{-1}, K), \quad L(\lambda, K) = \lambda^{-1} K R(\lambda^{-1}, K). \quad (17)$$

При естественных ограничениях резольвента Фредгольма оказывается интегральным оператором, что позволяет при соответствующих значениях λ , $\lambda^{-1} \notin \text{sp}K$ записывать решения $x(t)$ уравнения (1) в виде:

$$x(t) = \lambda^{-1} f(t) - \lambda^{-2} \int_{\Omega} l(\lambda^{-1}; t, s) f(s) ds; \quad (18)$$

здесь $l(\lambda; t, s)$ — ядро оператора $L(\lambda, K)$.

Теорема 2. Пусть линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), действует в пространстве $\mathbf{C}$. Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda_0(K)$ оператор $L(\lambda, K)$ допускает интегральное представление:

$$L(\lambda, K) f(t) = \int_{\Omega} l(\lambda, t, s) f(s) ds \quad (19)$$

с ядром $l(\lambda, t, s) \in Z(\Omega)$. Это ядро при $\lambda \in \Lambda_c(K)$ определяется равенством

$$l(\lambda, t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k^{(n)}(t, s), \quad (20)$$

где $k^{(n)}(t, s)$ ($n=1, 2, \dots$) — итерированные ядра, определенные формулами

$$k^{(1)}(t, s) = k(t, s), \quad k^{(n+1)}(t, s) = k^{(n)} * k(t, s) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (21)$$

при этом ряд (20) сходится по норме пространства $Z(\Omega)$.

Если в условиях теоремы 2 интегральный оператор K слабо компактен, то $\Lambda_0(K) = \Lambda(K)$ и оператор $L(\lambda, K)$ является слабо компактным интегральным оператором при всех $\lambda \in \Lambda(K)$.

3. В теории интегральных уравнений важную роль играют различные утверждения об интегральных уравнениях с ядрами, удовлетворяющими специальным условиям. Остановимся на некоторых из них.

Напомним, что в случае $\Omega = [a, b]$ ядро $k(t, s)$ называется *ядром Вольтерра*, если $k(t, s) = 0$ при $s > t$. В общем случае будем называть ядро $k(t, s)$ *ядром Вольтерра*, если в Ω задано семейство замкнутых множеств $\{\Omega(t): t \in \Omega\}$, обладающее следующими свойствами: (а) для каждого $\delta > 0$ существует такое конечное множество $\Omega(\delta) = \{t_1, \dots, t_m\}$, что

$$\mu(\Omega(t_{j-1}) \Delta \Omega(t_j)) < \delta \quad (j=1, \dots, m, \Omega_0 = \emptyset), \quad \bigcup_{j=1}^m \Omega(t_j) = \Omega;$$

(б) $k(t, s) = 0$ при $s \notin \Omega(t)$. Классическая теорема Вольтерра может быть обобщена следующим образом.

Теорема 3. Пусть линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), с ядром Вольтерра $k(t, s)$ действует в пространстве $\mathbf{C}$ и слабо компактен. Тогда $\rho(K) = 0$.

Рассмотрим случай симметричного ядра: $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$. Для интегральных уравнений с такими ядрами при дополнительном условии, что это ядро интегрируемо с квадратом, справедливы классические теоремы

Гильберта — Шмидта, являющиеся частным случаем спектральной теоремы для компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ядро действующего в пространстве $\mathbf{C}$ линейного интегрального оператора не обязательно интегрируемо с квадратом. Однако верно следующее утверждение, позволяющее существенно расширить область применения теории Гильберта — Шмидта.

Теорема 4. Пусть линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), с симметричным ядром $k(t, s)$ действует в пространстве $\mathbf{C}$. Тогда он как оператор в $\mathbf{L}_2$ является непрерывным самосопряженным оператором. Более того, если K как оператор в $\mathbf{C}$ слабо компактен, то как оператор в $\mathbf{L}_2$ он компактен и его собственные функции, отвечающие ненулевым собственным значениям, непрерывны.

Отметим, что даже в случае компактного в $\mathbf{C}$ оператора K для уравнения (1) возможна ситуация, когда интегральное уравнение (1) с $\lambda=0$ не имеет ненулевых решений в $\mathbf{C}$, однако имеет их в $\mathbf{L}_2$, или когда оно не имеет ненулевых решений в $\mathbf{L}_2$, но имеет их в $\mathbf{L}_1$. При анализе таких уравнений полезна общая теория ортогональных рядов (см., напр., [13]).

Остановимся еще на интегральных уравнениях с неотрицательными ядрами: $k(t, s) \geq 0$. Для таких операторов типичными являются условия положительности спектрального радиуса. Будем говорить, что ядро $k(t, s)$ является невырожденным, если хотя бы одна из функций

$$k(s_0, s_1)k(s_1, s_2) \dots k(s_{n-1}, s_n)k(s_n, s_0) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (20)$$

не эквивалентна нулю.

Теорема 5. Пусть линейный интегральный оператор K , определенный равенством (5), с неотрицательным ядром $k(t, s)$ действует в пространстве $\mathbf{C}$. Тогда его спектральный радиус $\rho(K)$ положителен, если его ядро является невырожденным. Если оператор K слабо компактен, то его спектральный радиус положителен в том и только том случае, когда его ядро невырожденно; при этом существует, по крайней мере, одно ненулевое неотрицательное непрерывное решение $e(t)$ уравнения (2) и, по крайней мере, одно ненулевое неотрицательное интегрируемое решение $h(t)$ уравнения (3) с $\lambda=\rho(K)$.

4. Изложенная теория легко может быть модифицирована на случай, когда пространство $\mathbf{C}$ рассматривается как совокупность классов эквивалентных друг другу измеримых функций, в каждом из которых есть непрерывная функция. Изложенная теория может быть также модифицирована в $\mathbf{L}_\infty$ - и $\mathbf{L}_1$ -теории; впрочем, ситуация в этом случае является значительно более простой, так как сопряженным к пространству $\mathbf{L}_1$ является пространство $\mathbf{L}_\infty$ и здесь возможно прямое использование теорем Хаусдорфа о сопряженных операторах.

Список литературы

1. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л., 1934. Т. 3. Ч. 2.
2. Ловитт У. Линейные интегральные уравнения. М., 1957.
3. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М., 1951.
5. Привалов И. И. Интегральные уравнения. М.; Л., 1935.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 4. Кн. 1.
7. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960.
8. Интегральные уравнения (СМБ). М., 1966.
9. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория. М., 1966.
10. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский Е. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
12. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. М., Л., 1936.
13. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., 1958.

Поступила в редакцию 22.03.91.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛОСУ

1. Предположим, что упругая полоса занимает область $-h < \text{Im } z < 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ (рис. 1). Ее напряженное состояние описывается следующими уравнениями [1. С. 406]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}. \quad (3)$$

Здесь Φ — функция, аналитическая в полосе $-h < \text{Im } z < h$, кроме возможных разрывов на вещественной оси. Функции $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$, $\tau_{xy}(z)$, $u(z)$, $v(z)$ описывают напряженное состояние полосы; μ , κ — постоянные.

Зададим краевые условия следующим образом. Пусть на отрезке $[-a, a]$ верхнего края полосы в нее на глубину $\delta < h$ вдавлен жесткий штамп прямолинейным основанием, т. е.

$$u(x) = 0, \quad v(x) = -\delta \quad \text{при } -a < x < a, \quad (4)$$

а остальная часть верхнего края свободна от внешних напряжений, т. е.

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = 0 \quad \text{при } |x| > a. \quad (5)$$

Предположим, что полоса своим нижним краем опирается на жесткое основание, т. е.

$$v(x - ih) = 0 \quad \text{при } -\infty < x < +\infty, \quad (6)$$

и пусть во всех точках нижнего края отсутствует объемное расширение, т. е.

$$\sigma_x(x - ih) + \sigma_y(x - ih) = 0 \quad \text{при } -\infty < x < +\infty. \quad (7)$$

Используя уравнения (1) — (3), выразим краевые условия (4) — (7) через потенциал Φ :

$$\kappa \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = 0 \quad \text{при } -a < x < a, \quad (8)$$

$$\Phi^-(x) - \Phi^+(x) = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad (9)$$

$$\text{Im} [\kappa \Phi(x - ih) + \Phi(x + ih) + 2ih \overline{\Phi'(x - ih)}] = 0 \quad \text{при } -\infty < x < +\infty, \quad (10)$$

$$\text{Re} \Phi(x - ih) = 0 \quad \text{при } -\infty < x < +\infty. \quad (11)$$

Знаки «+» и «-» у предельных значений неизвестной функции здесь и всюду в дальнейшем означают соответственно левое и правое предельные значения этой функции по отношению к выбранной ориентации соответствующей кривой. Желая упростить краевые условия (8) — (11), заметим прежде всего, что уравнение (9) выражает аналитическую продолжимость функции Φ через линии $(-\infty, -a)$ и $(a, +\infty)$, поэтому (9)

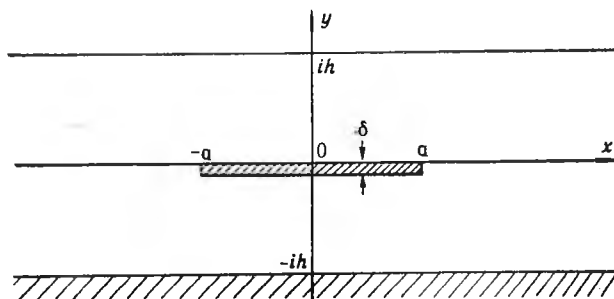


Рис. 1. Штамп, вдавленный в полосу

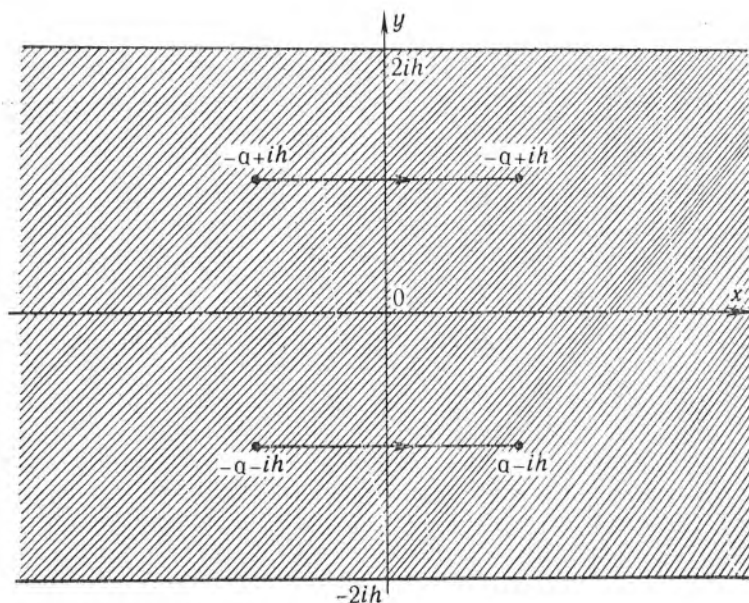


Рис. 2. Риманова поверхность $\mathcal{U}$

можно опустить. Далее, из равенства (11) следует, что $\operatorname{Re}\Phi'(x-ih)=0$. Поэтому третье слагаемое под знаком Im в (10) можно опустить. Обозначая далее $\Phi(x-ih)=-if(x)$, где функция f — вещественная, перепишем краевую задачу (8)–(11) в следующем виде:

$$\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = 0 \text{ при } -a < x < a, \quad (12)$$

$$\operatorname{Re}\Phi(x-ih) = 0 \text{ при } -\infty < x < +\infty, \quad (13)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(x+ih) = \kappa f(x) \text{ при } -\infty < x < \infty. \quad (14)$$

Будем искать решение этой задачи в классе функций, имеющих интегрируемые особенности при $z \rightarrow \pm a$ и исчезающих при $\operatorname{Im}z \rightarrow \infty$.

2. Найдем общее решение задачи (12)–(14), считая временно функцию f известной. Это решение будет построено в явном виде методом симметрии. С этой целью введем новую неизвестную функцию

$$F(z) := \begin{cases} i\Phi(z+ih) & \text{при } -2h \leq \operatorname{Im}z \leq 0, \\ -i\Phi(\bar{z}+ih) & \text{при } 0 \leq \operatorname{Im}z \leq 2h, \end{cases} \quad (15)$$

кусочно-аналитическую в полосе $-2h \leq \operatorname{Im}z \leq 2h$ (рис. 2) и удовлетворяющую условию симметрии, т. е. тождеству

$$\overline{F(\bar{z})} \equiv F(z). \quad (16)$$

Перепишем краевую задачу (12)–(14) в терминах функции F :

$$F^+(x-ih) = -\kappa F^-(x-ih), \quad -a < x < a, \quad (17)$$

$$F^+(x+ih) = -\frac{1}{\kappa} F^-(x+ih), \quad -a < x < a, \quad (18)$$

$$F^+(x) = -F^-(x) - 2\kappa f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (19)$$

$$F(x-2ih) = F(x+2ih), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (20)$$

Задача (17)–(20) есть скалярная задача Римана на цилиндре, т. е. на полосе $-2h \leq \operatorname{Im}z \leq 2h$, края которой склеены согласно отображению $x-2ih \rightarrow x+2ih$. Обозначим этот цилиндр буквой $\mathcal{U}$. Задача Римана (17)–(20) вместе с условием симметрии (16) равносильна задаче (12)–(14).

Построим общее решение задачи (17)–(20), используя метод работы [2]. Основными функционалами римановой поверхности $\mathcal{U}$ являются ра-

циональные функции от переменной $\omega = e^{\lambda z}$, где $\lambda = \frac{2\pi}{h}$ т. е. мероморфные периодические функции с основным периодом $4hi$.

Требуемый для построения решения однородной задачи (17) — (20) аналог ядра Коши на $\mathcal{U}$ удобно взять в следующем виде:

$$K(z, \tau) d\tau = \left(\frac{1}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}} - \frac{1}{e^{\lambda\tau} + 1} \right) de^{\lambda\tau}. \quad (21)$$

Такая форма ядра требуется для того, чтобы сходились все интегралы, которые ниже встретятся.

Картину разрешимости задачи (17) — (20) с учетом условия симметрии (16) можно описать следующим образом. Однородная ($f(x) \equiv 0$) задача имеет одно линейно независимое решение (над полем $\mathbf{R}$), а неоднородная ($f(x) \not\equiv 0$) разрешима безусловно. Найдем общее решение F_0 однородной задачи (17) — (20):

$$F_0(z) = r(e^{\lambda z}) \exp \left\{ \frac{\pi i - \ln \kappa}{2\pi i} \int_{-a+ih}^{a+ih} K(z, \tau) d\tau + \frac{\pi i + \ln \kappa}{2\pi i} \int_{-a-ih}^{a-ih} K(z, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, \tau) d\tau \right\}, \quad (22)$$

где $r(\omega)$ — рациональная функция от $\omega = e^{\lambda z}$, подбираемая так, чтобы F_0 имела в точках $\pm a \pm ih$ особенности интегрируемых порядков, стремилась к нулю при $\text{Im} z \rightarrow \infty$ и удовлетворяла условию симметрии. Прежде чем находить $r(\omega)$, надо вычислить входящие в (22) интегралы. Вычисляя их и включая постоянные множители в функцию $r(\omega)$, получим:

$$F_0(z) = \pm ie^{\frac{\lambda z}{2}} r(e^{\lambda z}) \left(\frac{e^{\lambda z} - ie^{\lambda a}}{e^{\lambda z} - ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{i \ln \kappa}{2\pi} \left(\frac{e^{\lambda z} + ie^{\lambda a}}{e^{\lambda z} + ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{i \ln \kappa}{2\pi}, \quad (23)$$

где «+» берется при $\text{Im} z > 0$, а «-» при $\text{Im} z < 0$. Два последних множителя в (23) считаются непрерывными вне соответствующих разрезов и стремящимися к ± 1 при $\text{Im} z \rightarrow \pm \infty$.

Полагая далее

$$r(e^{\lambda z}) = \frac{\alpha e^{\lambda z}}{(e^{\lambda z} - ie^{\lambda a})(e^{\lambda z} + ie^{\lambda a})}, \quad (24)$$

где α — произвольная вещественная постоянная, легко заключить, что функция F_0 является общим решением однородной задачи (17) — (20), удовлетворяющим условию симметрии (16). Последнее очевидно, так как множитель $\pm ie^{\frac{\lambda z}{2}}$ в (23) удовлетворяет условию симметрии, а все остальное в правой части (23) является вещественным на вещественной оси, и, значит, тоже удовлетворяет условию симметрии.

Переходя к построению частного решения F_1 неоднородной задачи (17) — (20), построим «каноническую функцию» $X(z)$, чтобы с ее помощью факторизовать коэффициент задачи (17) — (20). Она отличается от (23) лишь множителем, рациональным по переменной $\omega = e^{\lambda z}$, подобранным так, чтобы $X(z)$ обращалась в нуль по возможности меньшей кратности в точках $\pm a \pm ih$ и росла при $\text{Im} z \rightarrow \pm \infty$. Учитывая эти требования, находим

$$X(z) = \pm ie^{-\frac{\lambda z}{2}} (e^{2\lambda z} + e^{-2\lambda a}) \left(\frac{e^{\lambda z} - ie^{\lambda a}}{e^{\lambda z} - ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{i \ln \kappa}{2\pi} \left(\frac{e^{\lambda z} + ie^{\lambda a}}{e^{\lambda z} + ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{i \ln \kappa}{2\pi}. \quad (25)$$

Отсюда видна асимптотика функции X :

$$\begin{aligned} X(z) &\asymp e^{\frac{3}{2}\lambda z} \text{ при } \text{Im} z \rightarrow +\infty, \\ X(z) &\asymp e^{-\frac{1}{2}\lambda z} \text{ при } \text{Im} z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Факторизуя коэффициент задачи (17) — (20) и отбрасывая те условия сопряжения, которые в результате этого «стираются», приходим к задаче «о скачке»:

$$\frac{F^+(x)}{X^+(x)} - \frac{F^-(x)}{X^-(x)} = -2\kappa \frac{f(x)}{X^+(x)}, \quad (27)$$

$$\frac{F(x-2ih)}{X(x-2ih)} = \frac{F(x+2ih)}{X(x+2ih)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (28)$$

Так как правая часть (27) исчезает при $x \rightarrow \pm\infty$, то в качестве аналога ядра Коши для решения задачи (27), (28) можно взять выражение

$$\frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda z}} = \frac{\lambda d\tau}{1 - e^{\lambda(z-\tau)}},$$

более простое, чем (21). Используя его, получим частное решение задачи (27), (28) в виде

$$\frac{F_1(z)}{X(z)} = -\frac{\lambda\kappa}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{1 - e^{\lambda(z-\tau)}}. \quad (29)$$

Отсюда находится частное решение неоднородной задачи (17) — (20), удовлетворяющее условию симметрии:

$$F_1(z) = -\frac{\lambda\kappa}{\pi i} X(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{1 - e^{\lambda(z-\tau)}}. \quad (30)$$

Общее решение неоднородной задачи (17) — (20), удовлетворяющее условию симметрии, равно

$$F(z) = F_1(z) + F_0(z),$$

где F_1 из (30), а F_0 из (23).

3. Общее решение задачи (17) — (20) построено в предположении, что функция $f(x)$ известна. На самом деле она неизвестна и связана с комплексными потенциалами Φ и F следующими равенствами $f(x) = i\Phi(x-ih) = F(x-2ih) = F(x+2ih)$.

Подставляя сюда выражение для общего решения задачи (17) — (20), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$f(x) = -\frac{\lambda\kappa}{\pi i} X(x+2ih) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{1 + e^{\lambda(x-\tau)}} + F_0(x+2ih). \quad (31)$$

Функция $X^+(x)$ — чисто мнимая, а $X(x+2ih)$ — чисто вещественная. Они связаны следующим равенством:

$$\begin{aligned} X(x+2ih) = -iX(x) = e^{-\frac{\lambda x}{2}} (e^{2\lambda x} + e^{-2\lambda a}) & \left(\frac{e^{\lambda x} - ie^{\lambda a}}{e^{\lambda x} - ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{i\ln \kappa}{2\pi}} \times \\ & \times \left(\frac{e^{\lambda x} + ie^{\lambda a}}{e^{\lambda x} + ie^{-\lambda a}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{i\ln \kappa}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Деля уравнение (31) на $e^{-\frac{\lambda x}{2}} X(x+2ih)$ и вводя новую неизвестную функцию

$$\psi(x) := \frac{f(x) e^{\frac{\lambda x}{2}}}{X(x+2ih)}, \quad (32)$$

получим интегральное уравнение типа свертки:

$$\psi(x) - \frac{\kappa\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\operatorname{ch} \frac{\lambda(x-\tau)}{2}} = \frac{\alpha \cdot e^{\frac{5}{2}\lambda x}}{(e^{2\lambda x} + e^{2\lambda a})(e^{2\lambda x} + e^{-2\lambda a})}.$$

Применяя к нему преобразование Фурье

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g(t) dt; \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} G(t) dt,$$

имеем

$$\Psi(x) \left[1 + \frac{\kappa}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{\lambda}} \right] = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{5}{2} \lambda t + i x t}}{(e^{2\lambda t} + e^{2\lambda a})(e^{2\lambda t} + e^{-2\lambda a})} dt.$$

Вычисляя последний интеграл, получим:

$$\Psi(x) = \frac{2\pi\alpha}{\lambda \operatorname{sh} 2\lambda a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\lambda}{2} + ix \right) a}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{\pi i}{4} \right)} \cdot \frac{c\lambda \frac{\pi x}{\lambda}}{\left(\kappa + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{\lambda} \right)}.$$

Беря от этой функции обратное преобразование Фурье и используя (32), находим $f(x)$:

$$f(x) = \frac{X(x + 2ih)}{e^{\frac{\lambda x}{2}}} \cdot \frac{\alpha}{\lambda \operatorname{sh} 2\lambda a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\lambda}{2} + it \right) a \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi t}{\lambda} \cdot e^{-ixt}}{\left(\kappa + \operatorname{ch} \frac{\pi t}{\lambda} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{\pi t}{\lambda} + \frac{\pi i}{4} \right)} dt.$$

Таким образом, входящая в (30) неизвестная функция $f(\tau)$ определена. Тем самым построено в квадратурах общее решение задачи (8) — (10), а значит, и исходной задачи о вдавливании штампа.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1 (157). С. 113.

Поступила в редакцию 04.04.91.

УДК 519.21

Г. А. МЕДВЕДЕВ

О СООТВЕТСТВИИ РЕГРЕССИОННЫХ И АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

Наиболее распространенными математическими моделями наблюдаемых случайных процессов и полей являются регрессионные и авторегрессионные модели. Они описываются соответственно следующими соотношениями:

$$Y(X) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(X) + \xi(X), \quad X \in \mathbf{R}^{(m)}, \quad (1)$$

$$y(x) = \sum_{x_k \in N} \theta_k y(x - x_k) + \eta(x), \quad x \in \mathbf{Z}^{(m)}. \quad (2)$$

Для простоты будем полагать, не теряя общности, что $Y \in \mathbf{R}^{(1)}$, $y \in \mathbf{R}^{(1)}$; $\xi(X)$ и $\eta(x)$ — некоторые случайные процессы (поля) с заданными свойствами. Множество, порождающее активных соседей (ПАС), $N = \mathbf{Z}^{(m)}$. Таким образом, чтобы построить регрессионную модель процесса (поля) $Y(X)$, необходимо задать набор коэффициентов a_i , набор базовых функций $f_i(\cdot)$ и порождающий процесс (поле) $\xi(X)$. Чтобы построить авторегрессионную модель процесса (поля) $y(x)$, нужно задать набор коэффициентов θ_k , множество ПАС N и порождающий процесс (поле) $\eta(x)$.

Рассмотрим вложенный процесс (поле), описываемый соотношением (1), но для $X \in \mathbb{Z}^{(m)}$. Представляет интерес рассмотреть вопрос о том, может ли такой вложенный процесс (поле) быть описанным моделью (2). Поскольку в общем случае трудно сформулировать конструктивное условие такого перехода от (1) к (2), рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Одномерная полиномиальная регрессия

Пусть

$$Y(X) = \sum_{l=0}^n a_l X^l + \xi(X), \quad X \in \mathbb{R}^1, \quad (3)$$

$\xi(X)$ — некоторая однородная случайная функция со средним значением E и корреляционной функцией $R(X) = M\{\xi(X')\xi(X'+X)\}$. Заметим, что справедливо представление

$$z(X) = \sum_{l=0}^n a_l X^l = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k z(X - kH);$$

для всякого $H \in \mathbb{R}^{(1)}$. Действительно, подставим в правую часть равенства функции $z(X - kH)$ в явном виде и, перегруппировав слагаемые, получим:

$$\sum_{l=0}^n a_l X^l = b_0 + \sum_{l=0}^n X^l \sum_{k=1}^n b_k \sum_{m=l}^n a_m C_m^l (-kH)^{m-l}. \quad (4)$$

Здесь C_m^l — биномиальные коэффициенты, а $H \neq 0$ (так как для $H = 0$ доказываемое соотношение выполняется тривиально для $b_0 = 0$ и $\sum_{k=1}^n b_k = 1$).

Поскольку (4) должно выполняться для всех $X \in \mathbb{R}^{(1)}$, то, приравнявая в (4) коэффициенты при одинаковых степенях X^l , получим систему уравнений относительно b_k , $0 \leq k \leq n$:

$$b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \sum_{m=0}^n a_m (-kH)^m = a_0, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n b_k \sum_{m=l}^n a_m C_m^l (-kH)^{m-l} = a_l, \quad 0 < l < n, \quad (6)$$

$$a_n \sum_{k=1}^n a_k = a_n. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^n b_k = 1. \quad (8)$$

Используя (8), уравнение (6) можно записать в виде:

$$\sum_{m=l+1}^n a_m C_m^l (-H)^{m-l} \sum_{k=1}^n k^{m-l} b_k = 0. \quad (9)$$

Придавая в (9) индексу l последовательно значения $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1, получим, что

$$\sum_{k=1}^n k^l b_k = \delta_{i0}, \quad 0 \leq l \leq n-1. \quad (10)$$

δ_{lk} — символ Кронекера.

Наконец, используя (8) и (10) в (5), получим:

$$b_0 = (-1)^{n+1} a_n \sum_{k=1}^n (kH)^n b_k. \quad (11)$$

Таким образом, коэффициенты b_k , $1 \leq k \leq n$ находятся из неоднородной системы n линейных алгебраических уравнений (10), после чего по формуле (11) может быть вычислен коэффициент b_0 .

Матрица системы (10) является матрицей Вандермонда $W = (W_{ij})$, у которой $W_{ij} = j^{i-1}$. Поскольку эта матрица является невырожденной, то система (10) имеет единственное решение. Причем поскольку правая часть (10) является вектором с единственной ненулевой компонентой (первой), то решение (10) определяется только элементами первого столбца матрицы W^{-1} . Используя следствие 3 Приложения, получаем, что

$$b_k = (-1)^{k+1} C_n^k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем по следствию 12 Приложения

$$b_0 = n! H^n a_n. \quad (13)$$

Таким образом, полиномиальная функция (4) представима в виде:

$$z(X) = \sum_{l=0}^n a_l X^l = n! H^n a_n + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k z(X - kH). \quad (14)$$

Используя (14) в (3), получаем:

$$Y(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} C_n^k Y(X - kH) + n! H^n a_n + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \xi(X - kH).$$

Наконец, производя переобозначения

$$\begin{aligned} x &= X/H, \quad \theta_k = (-1)^{k+1} C_n^k, \\ y(x) &= Y(xH), \\ \eta(x) &= n! H^n a_n + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \xi((x-k)H), \end{aligned} \quad (15)$$

вместо (3) получаем эквивалентную запись

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \theta_k y(x - k) + \eta(x), \quad (16)$$

которая переводит регрессионную модель (3) в авторегрессионную модель типа (2) с множеством ПАС $N = (1, 2, \dots, n)$ и порождающим процессом $\eta(x)$, математическое ожидание которого равно $n! H^n a_n$, а корреляционная функция

$$r(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (-1)^{l+k} C_n^k C_n^l R((x+k-l)H).$$

Примечательным здесь является тот факт, что коэффициенты авторегрессии (16) не зависят от коэффициентов регрессии (3).

Вместе с тем существенно то, что порождающий процесс $\eta(x)$ имеет систематическую составляющую $n! H^n a_n$.

2. Двумерная полиномиальная регрессия

Пусть теперь $X = (X_1, X_2) \in R^{(2)}$,

$$Y(X_1, X_2) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m a_{l,k} X_1^l X_2^k + \xi(X_1, X_2) \quad (17)$$

Здесь $\xi(X_1, X_2)$ — однородное случайное поле с математическим ожиданием $M\{\xi(X_1, X_2)\} = E$ и корреляционной функцией $R(X_1, X_2) = M\{\xi(X_1', X_2') \xi(X_1' + X_1, X_2' + X_2)\}$.

Придадим (17) вид авторегрессии таким же образом, как это было сделано выше при переходе от (3) к (16). Предположим, что существует представление

$$z(X_1, X_2) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m a_{l,k} X_1^l X_2^k = b_{0,0} + \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m (1 - \delta_{lk0}) b_{l,k} \times \\ \times z(X_1 - lH_1, X_2 - kH_2), \quad (18)$$

которое имеет место в каждой точке некоторой двумерной области $X \in \mathbb{R}^{(2)}$. Здесь δ_{jkl} — символ Кронекера, равный единице при $j=k=l$ и равный нулю в других случаях. Найдем коэффициенты $b_{l,k}$ представления (18) таким же способом, который использован при анализе (3). Это приводит к следующей системе уравнений относительно коэффициентов $b_{l,k}$:

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m (1 - \delta_{lk0}) b_{l,k} = 1,$$

$$(1 - \delta_{uv0} - \delta_{un} - \delta_{vm}) \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m k^v l^u b_{l,k} = 0, \quad (19) \\ 0 \leq u \leq n, \quad 0 \leq v \leq m.$$

$$b_{0,0} = (-1)^{m+n+1} a_{n,m} H_1^n H_2^m \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m l^n k^m b_{l,k}. \quad (20)$$

Используя следствия 13 и 14 Приложения, получим:

$$b_{0,0} = n! m! H_1^n H_2^m a_{n,m}, \quad (21)$$

$$b_{l,k} = (-1)^{1+l+k} C_n^l C_m^k \text{ в остальных случаях.}$$

Введем следующие переобозначения:

$$x_k = X_k H_k^{-1}, \quad k = 1, 2; \quad y(x_1, x_2) = Y(x_1 H_1, x_2 H_2), \quad (22)$$

$$\eta(x_1, x_2) = n! m! H_1^n H_2^m a_{n,m} + \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^{l+k} C_n^l C_m^k \xi((x_1 - l)H_1, (x_2 - k)H_2), \\ \theta_{l,k} = (-1)^{1+l+k} C_n^l C_m^k.$$

Тогда, принимая во внимание (18), (21), (22), можно соотношение (17) записать в виде:

$$y(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m (1 - \delta_{lk0}) \theta_{l,k} y(x_1 - l, x_2 - k) + \eta(x_1, x_2). \quad (23)$$

Таким образом, регрессионная модель (17) оказывается эквивалентной авторегрессионной модели (23) с множеством ПАС в виде целочисленной решетки прямоугольника $\{(l, k) / 0 \leq l \leq n, 0 \leq k \leq m\}$ без одного узла $l=k=0$. Порождающее поле (23) имеет математическое ожидание $n! m! H_1^n H_2^m a_{n,m}$ и корреляционную функцию

$$r(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^n \sum_{l'=0}^n \sum_{k=0}^m \sum_{k'=0}^m (-1)^{l+l'+k+k'} C_n^l C_n^{l'} C_m^k C_m^{k'} \times \\ \times R((x_1 + l - l')H_1, (x_2 + k - k')H_2).$$

3. Гиперэкспоненциальная регрессия

Пусть (1) имеет вид:

$$Y(X) = \sum_{l=1}^n a_l e^{\omega_l X} + \xi(X), \quad X \in \mathbb{R}^{(1)}, \quad (24)$$

где $\omega_j \neq \omega_l$ для всякого $j \neq l$. Полагаем, что для некоторого $H \neq 0$

$$z(X) = \sum_{l=1}^n a_l e^{\omega_l X} = \sum_{k=1}^n b_k z(X - kH) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_k a_l e^{\omega_l (X - kH)}. \quad (25)$$

Очевидно, что такое представление имеет место тогда, когда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^n b_k e^{\omega_l kH} = 1 \text{ для всех } 1 \leq l \leq n, \quad (26)$$

которые могут рассматриваться как система уравнений относительно коэффициентов b_k . Обозначим $W_{kl} = e^{-\omega_l kH}$, $W = (W_{kl})$, $E^* = (1, 1, \dots, 1)$. Тогда систему (26) можно записать в матричной форме:

$$W^* b = E. \quad (27)$$

Здесь $*$ — знак транспонирования.

Определитель матрицы W с точностью до постоянного множителя,

равного $e^{-H \sum_{l=1}^n \omega_l}$, совпадает с определителем Вандермонда и при различных ω_l отличается от нуля. Поэтому решение системы (27) при принятых предположениях существует и представление (25) имеет место. В связи с этим (24) может быть представлена на множестве Z в виде авторегрессии:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n b_k y(x - k) + \eta(x), \quad x \in Z, \quad (28)$$

где, как и прежде, использованы обозначения

$$y(x) = Y(xH), \quad \eta(x) = \xi(xH) - \sum_{k=1}^n b_k \xi((x - k)H),$$

а коэффициенты b_k находятся из уравнения (27).

Рассмотрим теперь двумерное поле:

$$Y(X_1; X_2) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} e^{u_l X_1 + v_k X_2} + \xi(x_1, x_2), \quad (29)$$

где $u_i \neq u_j$, $v_i \neq v_j$ для всяких $i \neq j$. Предположим, что для некоторых $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$ имеет место представление

$$z(X_1, X_2) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} e^{u_l X_1 + v_k X_2} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m b_{\alpha\beta} z(X_1 - \alpha H_1, X_2 - \beta H_2). \quad (30)$$

Найдем коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ такого представления. Нетрудно видеть, что (30) имеет место, если справедливы следующие равенства:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m b_{\alpha\beta} e^{-\alpha u_l H_1 - \beta v_k H_2} = 1, \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (31)$$

Эти равенства могут рассматриваться как уравнения относительно коэффициентов $b_{\alpha\beta}$. Обозначим $W_{\alpha l}^{(1)} = e^{-\alpha u_l H_1}$, $W_{\beta k}^{(2)} = e^{-\beta v_k H_2}$. Тогда (31) перепишется в виде

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m W_{\alpha}^{(1)} b_{\alpha\beta} W_{\beta k}^{(2)} = 1. \quad (32)$$

И если ввести в рассмотрение $(n \times n)$ — матрицу $W_1 = (W_{\alpha l}^{(1)})$, $(m \times m)$ — матрицу $W_2 = (W_{\beta k}^{(2)})$, $(n \times m)$ — матрицу $B = (b_{\alpha\beta})$ и $(n \times m)$ — матрицу E , составленную из единиц, то (32) запишется в матричной форме:

$$W_1^* B W_2 = E. \quad (33)$$

Определители матриц W_1 и W_2 являются определителями Вандермонда

с точностью до множителей $e^{-H_1 \sum_{l=1}^n u_l}$ и $e^{-H_2 \sum_{k=1}^m v_k}$ соответственно. Поэтому при принятых предположениях относительно u_b и v_k матричное уравнение (33) имеет единственное решение

$$B = (W_1^{-1})^* E W_2^{-1}. \quad (34)$$

В связи с этим регрессионная модель (29) имеет свой авторегрессионный аналог

$$y(x_1, x_2) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m b_{\alpha\beta} y(x_1 - \alpha, x_2 - \beta) + \eta(x_1, x_2), \quad (35)$$

где x_1, x_2 — целочисленные переменные, $y(x_1, x_2) = Y(x_1 H_1, x_2 H_2)$,

$$\eta(x_1, x_2) = \xi(x_1 H_1, x_2 H_2) - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m b_{\alpha\beta} \xi((x_1 - \alpha) H_1, (x_2 - \beta) H_2).$$

В заключение заметим, что элементы вектора b из (27) и матрицы B в (34) находятся с использованием следствия 15 Приложения.

Считая в (25) и (30) коэффициенты ω_l, u_l, v_l комплексными и определяя функцию $z(\cdot)$ как вещественную часть соответствующих сумм, можно аналогичные результаты получить для регрессионных моделей с тригонометрическими базовыми функциями.

Таким образом, довольно широкий класс регрессионных моделей с полиномиальными, экспоненциальными и тригонометрическими базовыми функциями может быть описан авторегрессионными моделями.

Аналогичная проблема рассматривалась в [1] при построении ARIMA процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть W_n — $(n \times n)$ — матрица Вандермонда с элементами $(W_n)_1 = 1$, $(W_n)_{i,j} = r_j^{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Известно [2], что ее определитель $\det W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i)$. В частности, если $r_j = j$, то $\det W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (i!)$.

Лемма 1. Алгебраические дополнения элементов первой строки $\det W_n$ имеют вид:

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \left(\prod_{i=1}^n r_i / r_k \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i) / \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k) \right).$$

(Здесь и ниже принимается $\prod_{i=1}^0 (\dots)_i \equiv 1$).

Доказательство леммы сводится к вычислению миноров первой строки $\det W_n$, которые, в свою очередь, с точностью до множителя являются определителями Вандермонда, но порядка, меньшего на единицу, чем исходный определитель.

Следствие 1 Элементы первого столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{k1} = (-1)^{1+k} \prod_{i=1}^n r_i / r_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k) \right).$$

Следствие 2. Если $r_i = i$, $1 \leq i \leq n$, то

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \prod_{i=1}^n (i!) / k! (n-k)!$$

Следствие 3. Если $r_i = i$, то элементы первого столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{k1} = (-1)^{1+k} C_n^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Лемма 2. Алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы W_n имеют вид:

$$A_{nk} = (-1)^{n+k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i) \bigg/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k) \right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 4. Элементы последнего столбца матрицы W_n^{-1} имеют вид

$$(W_n^{-1})_{kn} = (-1)^{n+k} \bigg/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k) \right).$$

Следствие 5. Если $r_i = i$, то

$$A_{nk} = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^{n-1} (i!) / (k-1)! (n-k)!$$

Следствие 6. Если $r_i = i$, то элементы последнего столбца имеют вид:

$$(W_n^{-1})_{kn} = (-1)^{n+k} / (k-1)! (n-k)!.$$

Рассмотрим теперь матрицу Вандермонда W_{n+1} , у которой $(W_{n+1})_{ij} = (j-1)^{i-1}$, $1 \leq j \leq n+1$, $1 \leq i \leq n+1$.

Следствия 2, 3, 5, 6 для такой матрицы модифицируются к следующему.

Следствие 7. Алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы W_{n+1} имеют вид:

$$A_{11} = \prod_{i=1}^n (i!), \quad A_{1k} = 0, \quad 1 < k \leq n+1.$$

Следствие 8. Алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы W_{n+1} имеют вид:

$$A_{n+1,k} = (-1)^{n+k} \prod_{i=1}^n (i!) / k! (n-k)!, \quad 1 \leq k \leq n+1.$$

Следствие 9. Элементы первого столбца матрицы W_{n+1}^{-1} имеют вид:

$$(W_{n+1}^{-1})_{11} = 1, \quad (W_{n+1}^{-1})_{k1} = 0, \quad 1 < k \leq n+1.$$

Следствие 10. Элементы последнего столбца матрицы W_{n+1}^{-1} имеют вид:

$$(W_{n+1}^{-1})_{kn} = (-1)^{k+n} / k! (n-k)!, \quad 1 \leq k \leq n+1.$$

Пусть теперь Δ — вектор с компонентами $\Delta_l = \delta_{nl} + d\delta_{n+1,l}$, $1 \leq l \leq n+1$. Это означает, что у этого вектора отличается от нуля только первая (она равна 1) и последняя (она равна d) компоненты. Введем в рассмотрение $(n+1)$ — вектор c , у которого первая компонента $c_1 = 0$, а $c_k = b_{k-1}$, $2 \leq k \leq n+1$. Таким образом, справедлива

Лемма 3. Система уравнений (10) может быть записана в виде $W_{n+1}c = \Delta$. Причем последнее уравнение имеет вид: $\sum_{k=1}^n b_k k^n = d$, где d — пока неопределенная константа. Отсюда $c = W_{n+1}^{-1} \Delta$, т. е.

$$c_k = \sum_{l=1}^{n+1} (W_{n+1}^{-1})_{kl} \Delta_l = (W_{n+1}^{-1})_{k,1} + d (W_{n+1}^{-1})_{k,n+1}.$$

$$c_1 = 1 + d(-1)^n / n!, \quad c_{k+1} = d(-1)^{n+k} / k! (n-k)!, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Но по определению $c_1 = 0$, поэтому $d = (-1)^{n+1} n!$.
 Таким образом, справедливы
Следствие 11.

$$b_k = (-1)^{1+k} C_n^k.$$

Следствие 12.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k k^n = (-1)^n n!.$$

Введем в рассмотрение $(n+1) \times (m+1)$ — матрицы C и D с элементами $C_{11}=0$, $C_{l,k}=b_{l-1,k-1}$ для остальных значений индексов

$$D_{l,k} = \delta_{1lk} + d\delta_{l,n+1}\delta_{k,m+1}, \quad 1 \leq l \leq n+1, \quad 1 \leq k \leq m+1.$$

Таким образом, матрица D имеет только два элемента, отличных от нуля: первый элемент в первой строке (он равен 1) и последний элемент в последней строке (он равен d). Здесь d — пока неопределенная константа, соответствующая равенству

$$d = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m l^n k^m b_{l,k}.$$

Использование этих обозначений позволяет убедиться, что справедлива
Лемма 4. Система уравнений (19) может быть записана в следующей матричной форме:

$$W_{n+1} C W'_{m+1} = D.$$

Здесь W_{n+1} , W_{m+1} — матрицы Вандермонда порядка $(n+1)$ и $(m+1)$ соответственно с элементами $W_{ij} = (j-1)^{i-1}$. ($W_{11}=1$).

Решение полученного матричного уравнения имеет вид:

$$C = W_{n+1}^{-1} D (W_{m+1}^*)^{-1}.$$

Используя конкретную структуру матрицы D , получаем элементы матрицы C в следующем виде:

$$c_{l,k} = (W_{n+1}^{-1})_{l,1} (W_{m+1}^{-1})_{k,1} + d (W_{n+1}^{-1})_{l,n+1} (W_{m+1}^{-1})_{k,m+1}.$$

Из того, что $c_{11}=0$, а также из следствий 9 и 10, получаем, что

$$d = - \frac{(W_{n+1}^{-1})_{11} (W_{m+1}^{-1})_{11}}{(W_{n+1}^{-1})_{1,n+1} (W_{m+1}^{-1})_{1,m+1}} = (-1)^{1+n+m} n! m!.$$

Таким образом, оказывается справедливым

Следствие 13. Коэффициенты $b_{l,k}$, удовлетворяющие системе (19), определяются формулами

$$b_{l,k} = (-1)^{1+l+k} C_n^l C_m^k,$$

если l и k одновременно не равны нулю.

Следствие 14.

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m l^n k^m b_{l,k} = (-1)^{1+n+m} n! m!.$$

Вернемся теперь к рассмотрению матрицы Вандермонда W_n с элементами $(W_n)_{ij} = r_j^{i-1}$, $1 \leq i, j \leq n$. Введем обозначения

$$G_{0,n}^{(k)} = 1,$$

$$G_{l,n}^{(k)} = \sum \binom{l}{i_1, \dots, i_l} \prod_{j=1}^l r_{i_j}, \quad 1 \leq l \leq n-1.$$

Здесь $\sum^{(l,k)}$ обозначает сумму по всем наборам индексов $(i_1, i_2, \dots, i_l)$, удовлетворяющих условиям $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n; i_j \neq k, 1 \leq j \leq l)$. Как и раньше через $A_{j,k}$ будем обозначать алгебраическое дополнение

к элементу определителя Вандермонда $\det W_n$ с индексами (j, k) . Тогда справедлива

Лемма 5. Алгебраическое дополнение элемента $(W_n)_{lk}$ в определителе Вандермонда имеет вид:

$$A_{l,k} = (-1)^{n-l} G_{n-l,n}^{(k)} A_{n,k},$$

где $A_{n,k}$ находится по лемме 2.

Доказательство леммы проводится непосредственным вычислением.

Следствие 15. Матрица W_n^{-1} , обратная матрице Вандермонда W_n , имеет элементы

$$(W_n^{-1})_{k,n-l} = (-1)^{n+k+l} \sum^{(l,k)} \prod_{j=1}^l r_{i_j} \left/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} (r_k - r_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (r_{k+j} - r_k) \right) \right.$$

$$1 \leq l \leq n-1, 1 \leq k \leq n.$$

Элементы последнего столбца матрицы W_n^{-1} определяются следствием 4.

Список литературы

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М., 1974.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1978.

Поступила в редакцию 08.04.91.

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ОЦЕНОК МИНИМАЛЬНОГО КОНТРАСТА

1. Введение. Математическая модель. В теории статистического оценивания параметров известно [1, 2] семейство оценок минимального контраста (МК), включающее как частные случаи широко применяемые на практике оценки максимального правдоподобия (ОМП), М-оценки [3, 4], МНК-оценки. Пусть в R^p определено m -параметрическое семейство F плотностей вероятностных распределений

$$F = \{f(x, \theta), x \in R^p : \theta \in \Theta \subseteq R^m\},$$

где Θ — открытое множество. Наблюдается случайная выборка $X = \{x_i : i = \overline{1, n}\} \subset R^p$ объема n из распределения $f(\cdot, \theta^0)$ с неизвестным значением $\theta^0 \in \Theta$. МК-оценка $\hat{\theta} = T(X)$ определяется соотношениями [1]:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta^c} L(\theta), \quad L(\theta) = \sum_{i=1}^n g(x_i, \theta)/n, \quad (1)$$

где Θ^c — замыкание Θ ; $g(x, \theta)$ — функция контраста, такая, что $E_{\theta^0}\{g(x, \theta_0)\} < E_{\theta^0}\{g(x, \theta)\} \quad \forall \theta \neq \theta^0, \theta \in \Theta^c$; $E_{\theta^0}\{\cdot\}$ — символ математического ожидания по распределению $f(\cdot, \theta^0)$.

Асимптотический (при $n \rightarrow \infty$) анализ МК-оценок для вышеописанной модели проведен в [1, 2]. Однако на практике модельные предположения часто нарушаются [3, 4]: выборка X соответствует «ε-искаженному» распределению $p_\varepsilon(\cdot) \neq f(\cdot, \theta^0)$, теряются оптимальные свойства МК-оценок и актуальны задачи анализа и синтеза робастных (устойчивых) оценок [3, 4]. В настоящей статье для асимптотического ($n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$) анализа робастности МК-оценок развивается метод асимптотических разложений [1, 5, 6].

2. Случай параметрических искажений Хубера. Пусть в R^p наблюдается «ε-засоренная» выборка X из ε-смеси распределений с плотностью:

$$p_\varepsilon(x, \theta^0, \theta^+) = (1 - \varepsilon) f(x, \theta^0) + \varepsilon f(x, \theta^+), \quad x \in R^p, \quad (2)$$

где $0 \leq \varepsilon < 1$ — уровень «засорения», $\theta^+ \neq \theta^0$, $\theta^+ \in \Theta$ — параметр «засоряющего» распределения. Примем обозначения: 1_m , $1_{m \times m}$ (соответственно m — вектор-столбец и $(m \times m)$ — матрица), все элементы которых равны единице; $g^{(k)}(x, \theta')$ — набор m^k частных производных k -го порядка от $g(x, \theta)$ по θ в точке θ' ($g^{(0)}(\cdot) \equiv g(\cdot)$);

$$G_1^{(k)}(\theta, \theta_0) = E_{\theta_0} \{g^{(k)}(x, \theta)\} \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

$$G_2^{(k)}(\theta, \theta^0, \theta^+) = (1 - \varepsilon) G_1^{(k)}(\theta, \theta^0) + \varepsilon G_1^{(k)}(\theta, \theta^+); \quad (3)$$

$$J(\theta, \theta^0) = E_{\theta^0} \{g^{(1)}(x, \theta) g^{(1)T}(x, \theta)\}, \quad \tau = \max \{\varepsilon, 1/\sqrt{n}\}.$$

При $\theta = \theta^0$ величины в (3) условимся кратко обозначать: $\hat{G}_1^{(k)}, \hat{f}^{(k)}, \hat{J}$.

Теорема 1. Если F удовлетворяет условиям регулярности Чибисова [2] порядка (k, r) при $k > 1$, $r > 4$ и функция $G_2(\theta, \theta^0, \theta^+)$ имеет единственную точку минимума $\theta^* \in \Theta^c$, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость почти наверное:

$$\hat{\theta} \xrightarrow{п. н.} \theta^*; \quad (4)$$

для предельного значения θ^* верно асимптотическое разложение:

$$\theta^* = \theta^0 - \varepsilon (\hat{G}_1^{(2)})^{-1} \hat{G}_1^{(1)}(\theta^0, \theta^+) + O(\varepsilon^2) 1_m. \quad (5)$$

Доказательство. Согласно (2), (3),

$$E\{g(x_i, \theta)\} = G_2(\theta, \theta^0, \theta^+),$$

где $E\{\cdot\}$ — символ математического ожидания по распределению выборки X , соответствующему (2). В силу (1) и усиленного закона больших чисел,

$$L(\theta) \xrightarrow{п. н.} G_2(\theta, \theta^0, \theta^+), \quad \theta \in \Theta^c.$$

Далее (4) доказывается аналогично строгой состоятельности ОМП [7]. Разложение (5) строится аналогично [5, 6] с использованием линейной формулы Тейлора для левой части уравнения $G_2^{(1)}(\theta^*, \theta^0, \theta^+) = 0$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для моментов МК-оценки $\hat{\theta}$ справедливы асимптотические представления: $E\{\hat{\theta} - \theta^*\} = O(\tau^2) 1_m$, $U = E\{\hat{\theta} - \theta^*\} \times \times (\hat{\theta} - \theta^*)^T = n^{-1} (\hat{G}_1^{(2)})^{-1} \hat{J} (\hat{G}_1^{(2)})^{-1} + o(\tau^2) 1_{m \times m}$.

Доказательство основано на соотношении: $\hat{\theta} - \theta^* = -(L^{(2)}(\bar{\theta}))^{-1} L^{(1)}(\theta^*)$, в котором $|\bar{\theta} - \theta^*| < |\hat{\theta} - \theta^*|$, и на теореме о непрерывности моментов [7].

Следствие 1. Матрица вариаций МК-оценки $V = E\{(\hat{\theta} - \theta^0)(\hat{\theta} - \theta^0)^T\} = (\hat{G}_1^{(2)})^{-1} (\varepsilon^2 G_1^{(1)}(\theta^0, \theta^+) G^{(1)T}(\theta^0, \theta^+) + n^{-1} \hat{J}) (\hat{G}_1^{(2)})^{-1} + o(\tau^2) 1_{m \times m}$.

Определим обобщенную вариацию МК-оценки $\hat{\theta}$ как величину определителя матрицы вариаций $v(\varepsilon, n) = |V| \geq 0$. Коэффициентом робастности оценки $\hat{\theta}$ при наличии « ε -засоренной» выборки объема n назовем отношение обобщенных вариаций:

$$\kappa = \kappa(\varepsilon, n) = v(\varepsilon, n) / v(0, n).$$

Чем меньше κ , тем устойчивее исследуемая оценка $\hat{\theta}$.

Для заданного $\delta > 0$ назовем δ -критическим уровнем «засорения» такое значение уровня «засорения» $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\delta, n)$, что если $\varepsilon \leq \varepsilon_*$, то коэффициент робастности не превосходит гарантированного значения $1 + \delta$: $\kappa(\varepsilon_*, n) \leq 1 + \delta$.

Следствие 2. В асимптотике $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \sqrt{n} \rightarrow c$, $0 < c < \infty$

$$\kappa(\varepsilon, n) \rightarrow 1 + c^2 G_1^{(1)T}(\theta^0, \theta^+) (\hat{J})^{-1} G_1^{(1)}(\theta^0, \theta^+),$$

$$\sqrt{n} \varepsilon_*(\delta, n) \rightarrow (\delta / (G_1^{(1)T}(\theta^0, \theta^+) (\hat{J})^{-1} G_1^{(1)}(\theta^0, \theta^+)))^{1/2}.$$

Следствие 3. Если $F = \{n_p(x|\theta, \Sigma)\}$ — гауссовское семейство с параметром сдвига θ , то для ОМП $\hat{\theta} \kappa(\varepsilon, n) = 1 + n\varepsilon^2 \Delta^2$, $\varepsilon_*(\delta, n) = \min\{1, \sqrt{\delta/n/\Delta}\}$, где $((\theta^+ - \theta^0)^T \Sigma^{-1} (\theta^+ - \theta^0))^{1/2}$ — расстояние Махаланобиса между двумя гауссовскими распределениями: «засоряющим» $N_p(\theta^*, \Sigma)$ и основным $N_p(\theta^0, \Sigma)$.

3. Многovoыборочные задачи оценивания при случайных засорениях. При построении математической модели стохастического явления на практике часто требуется оценить параметры вероятностного распределения наблюдений для $L \geq 2$ выборок $X^{(1)}, \dots, X^{(L)}$, полагая, что каждая выборка соответствует своему собственному режиму протекания исследуемого стохастического явления или меняющимся условиям эксперимента.

Пусть зафиксированы L различных плотностей $f(\cdot, \theta_1^0), \dots, f(\cdot, \theta_L^0) \in F$; $f(\cdot, \theta_i^0)$ — i -ая вероятностная модель наблюдений M_i ; $\theta_i^0 \in \Theta$ — неизвестное истинное значение параметров модели M_i ($i = \overline{1, L}$). В пространстве R^p наблюдается «засоренная» выборка X , состоящая из L независимых подвыборок $X^{(1)}, \dots, X^{(L)}$, где $X^{(i)} = \{x_j^{(i)} \in R^p : j = \overline{1, n_i}\}$ — выборка объема n_i независимых случайных наблюдений; наблюдение $x_j^{(i)}$ с вероятностью ε_{ik} соответствует модели M_k ($i, k = \overline{1, L}$). Величины $\{\varepsilon_{ik}\}$ образуют $(L \times L)$ — матрицу вероятностей случайного «засорения» $E = (\varepsilon_{ik})$, строки которой удовлетворяют условию нормировки: $\varepsilon_{i1} + \dots + \varepsilon_{iL} = 1$ ($i = \overline{1, L}$). Вероятность $\varepsilon_i = 1 - \varepsilon_{ii}$ появления «засорения» в $X^{(i)}$ назовем уровнем «засорения» выборки $X^{(i)}$. Если $\varepsilon_+ = \max \varepsilon_i = 0$, то $E = I_L$ — единичная матрица, и «засорения» в $X^{(i)}$ отсутствуют.

Исследуем вначале свойства МК-оценок $\{\hat{\theta}_i\}$, определяемых (1):

$$\hat{\theta}_i = \arg \min_{\theta \in \Theta^c} L_i(\theta), \quad L_i(\theta) = \sum_{j=1}^{n_i} g(x_j^{(i)}, \theta) / n_i, \quad i = \overline{1, L}. \quad (6)$$

Аналогично (3) обозначим: $\hat{G}_{1ij}^{(k)} = G_1^{(k)}(\theta_i^0, \theta_j^0)$, $k = 1, 2$;

$$G_{2i}^{(k)}(\theta, \theta_1^0, \dots, \theta_L^0) = \sum_{j=1}^L \varepsilon_{ij} G_1^{(k)}(\theta, \theta_j^0), \quad \hat{J}_{ij} = J(\theta_i^0, \theta_j^0), \quad i, j = \overline{1, L};$$

$$\tau = \max_i \{\varepsilon_i, 1/\sqrt{n_i}\}.$$

Теорема 3. Если F удовлетворяет условиям регулярности Чибисова [2] порядка (k, r) при $n > 1$, $r > 4$ и функция $G_{2i}(\theta, \theta_1^0, \dots, \theta_L^0)$ имеет единственную точку минимума $\theta_i^* \in \Theta^c$, $n_i \rightarrow \infty$, то $\hat{\theta}_i \xrightarrow{п.н.} \theta_i^*$,

$$\theta_i^* = \theta_i^0 - (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} \hat{G}_{1ij}^{(1)} + O(\varepsilon_+^2) \mathbf{1}_m.$$

Теорема 4. В условиях теоремы 3 вектор смещения и матрица вариаций МК-оценки $\hat{\theta}_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, L\}$) удовлетворяют разложениям:

$$E\{\hat{\theta}_i - \theta_i^0\} = -(\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} \hat{G}_{1ij}^{(1)} + O(\tau^2) \mathbf{1}_m,$$

$$V_i = (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} \hat{G}_{1ij}^{(1)} \hat{G}_{1ik}^{(1)} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} + \frac{1}{n_i} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \hat{J}_{ii} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} +$$

$$+ o(\tau^2) \mathbf{1}_{m \times m}.$$

Доказательство теорем 3, 4 проводится теми же методами, что и для теорем 1, 2 с учетом

$$p_{ei}(x, \theta_1^0, \dots, \theta_L^0) = \sum_{j=1}^L \varepsilon_{ij} f(x, \theta_j^0).$$

Коэффициентом асимптотической робастности МК-оценок $\{\hat{\theta}_i\}$ с функцией контраста $g(\cdot)$ назовем неотрицательно определенный функционал

$u = u(g, E) = \lim_{n_1, \dots, n_L \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^L \text{tr}(V_i)$ — предельную суммарную среднеквадратическую ошибку оценивания всех $L \cdot m$ компонент оцениваемых параметров. Чем $u(g, E)$ меньше, тем выше робастность оценок $\{\hat{\theta}_i\}$.

Условимся говорить, что $\{\hat{\theta}_i\}$ — робастные оценки ν -го порядка, если ν — такое наибольшее натуральное число, что для любых $\theta_1^0, \dots, \theta_L^0 \in \Theta$ $u(g, E) = o(\varepsilon_+^\nu)$; при этом ν — порядок робастности.

Следствие. В условиях теоремы 3

$$u(g, E) = \sum_{i=1}^L \left| \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \hat{G}_{1ij}^{(1)} \right|^2 + o(\varepsilon_+^2),$$

так что МК-оценки (6) имеют порядок робастности $\nu=1$.

Укажем метод повышения порядка робастности статистических оценок параметров $\{\theta_i\}$. С учетом (3), (6) определим вспомогательные статистики: $\hat{G}_{1ij}^{(k)} = G_{1ij}^{(k)}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)$, $i, j = \overline{1, L}$; $k = 1, 2$.

Теорема 5. В условиях теоремы 3 функционально преобразованная статистическая оценка

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i + (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} \hat{G}_{1ij}^{(1)} \quad (i = \overline{1, L})$$

имеет матрицу вариаций $\tilde{V}_i$, допускающую асимптотическое разложение

$$\tilde{V}_i = n_i^{-1} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} \hat{J}_{ii} (\hat{G}_{1ii}^{(2)})^{-1} + o(\tau^2) \mathbf{1}_{m \times m}.$$

Доказательство основано на том факте, что при $\tau \rightarrow 0$ статистика $\hat{G}_{1ij}^{(k)}$ является состоятельной оценкой для $\hat{G}_{1ij}^{(k)}$.

Следствие. Статистические оценки $\{\hat{\theta}_i\}$ являются робастными оценками второго порядка: $u(g, E) = o(\varepsilon_+^2)$.

В заключение отметим, что изложенный метод повышения порядка робастности статистических оценок может быть использован для построения робастных оценок порядка $\nu=3$ и выше.

Список литературы

1. Pfanzagl J. // *Metrika*. 1969. V. 14. P. 249.
2. Чибисов Д. М. // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18. № 2. С. 303.
3. Хубер П. Робастность в статистике. М., 1984.
4. Хампель Ф., Ронchetti Э. Робастность в статистике. М., 1989.
5. Харин Ю. С. // *Автоматика и телемеханика*. 1983. № 11. С. 100.
6. Kharin Yu. S., Medvedev A. G. // *Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of V Intern. Conf. Utrecht*. 1990. P. 602.
7. Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.

Поступила в редакцию 30.03.91.

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

1. В цилиндре $\Pi = G \times (0, T)$, $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, рассмотрим центрально-симметрическую по пространственным переменным смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) + \sum_{i=1}^3 b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + \\ + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + q(x, t) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\Gamma = \{(x, t) \in \bar{\Pi} : r = R\}$ — боковая поверхность цилиндра.

Природа центральной симметрии проявляется в коэффициентах уравнения (1) следующим образом:

$$b_i(x, t) = b(r, t) x_i, \quad c(x, t) = c(r, t), \quad q(x, t) = q(r, t).$$

Будем предполагать, что функции b , c , q непрерывны в Π , их производные $\frac{\partial b}{\partial r}$, $\frac{\partial c}{\partial r}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$ ограничены в $\bar{\Pi}$, а b удовлетворяет условию согласования.

В работе С. Н. Барановской [1] впервые установлено существование классического решения в замкнутом прямоугольнике $[0, l] \times [0, T]$ первой смешанной задачи для уравнений с одномерным волновым оператором (т. е. задачи вида (1)—(3) в случае одной пространственной переменной) при условиях на начальные функции φ и ψ , совпадающих с необходимыми:

$$\omega \in C^2[0, l], \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \quad (5)$$

$$\psi \in C^1[0, l], \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (6)$$

Еще ранее этот факт был установлен В. А. Чернятиным в работах [2—4] с помощью метода Фурье для телеграфного уравнения с независимым от t коэффициентом q в свободном члене.

Цель нашей работы — получить аналогичный результат для задачи (1)—(3) с тремя пространственными переменными.

З а м е ч а н и е 1. Анализ формулы

$$u(r, t) = \frac{(r+t)\varphi(r+t) + (r-t)\varphi(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \xi \psi(\xi) d\xi, \quad (7)$$

дающей решение задачи Коши вида (1), (2) при $b \equiv c \equiv q \equiv 0$, показывает, что особенность в точке $r=0$ вынуждает наложить требования $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$, чтобы обеспечить принадлежность функции u классу C^2 (см. напр., [5, С. 326, 327]). Следовательно, для достижения поставленной цели необходимо модифицировать понятие классического решения рассматриваемой смешанной задачи (1)—(3).

З а м е ч а н и е 2. Выводу формулы (7) и многим другим исследованиям волновых уравнений с центральной симметрией предшествует сведение таких уравнений к одномерным волновым уравнениям с оператором Бесселя. Это сведение, как известно, производится путем перехода

к сферическим координатам (см., напр., [6. С. 200; 7. С. 115]). При $r=0$ такая замена переменных является вырожденной, и поэтому одномерное волновое уравнение с оператором Бесселя будет эквивалентным трехмерному волновому уравнению во всех точках его задания кроме оси $r=0$. В связи с этим представляется естественным требовать, чтобы решение удовлетворяло трехмерному волновому уравнению лишь в рассматриваемой области с выколотой осью $r=0$.

Определение. Ослабленным на оси $r=0$ классическим решением задачи (1)–(3) будем называть функцию

$$u \in C^1(\bar{\Pi}) \cap C^2(\Pi \setminus \{0\} \times [0, T]),$$

обращающую уравнение (1) в тождество в $\bar{\Pi} \setminus \{0\} \times [0, T]$ — цилиндре с выколотой осью, удовлетворяющую условиям (2), (3) в обычном смысле и

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x| \Delta u(x, t) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^3 x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что условия (8), (9) являются (ослабленной) заменой требования принадлежности $C^2(\Pi)$ обычного классического решения.

Если функция u является (ослабленным или обычным) классическим решением задачи (1)–(3), то из уравнения (1) в силу условия (3) предельным переходом устанавливается, что

$$\Delta u(x, t)|_{r=0}. \quad (10)$$

Покажем, что для существования ослабленного классического решения задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы начальные функции φ и ψ удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\in C^1[0, R] \cap (0, R], \quad \varphi(R) = \Delta \varphi(R) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} r \Delta \varphi(r) &= 0, \quad \left(\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\psi(r) \in C[0, R] \cap C^1(0, R], \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \psi(R) = 0. \quad (12)$$

2. В задаче (1)–(3) перейдем к сферическим координатам. Так как рассматривается центрально-симметрическая задача, то решение зависит только от расстояния r , т. е. $u(x, t) = u(r, t)$. Для функции $u(r, t)$ получим одномерную смешанную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r, t) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) \right) + rb(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) + \\ + c(r, t) \frac{\partial u}{\partial t}(r, t) + q(r, t)u(r, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (13)$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (14)$$

$$u(R, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (15)$$

В соответствии с нашим определением решение задачи (13)–(15) ищется в классе функций

$$u \in C^1([0, R] \times [0, T]) \cap C^2((0, R] \times [0, T]),$$

удовлетворяющих условиям:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} = 0. \quad (17)$$

Свойство (10), которому всегда удовлетворяет решение задачи, в переменных (r, t) запишется в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (18)$$

Теорема. Необходимыми и достаточными условиями существования ослабленного на оси $r=0$ классического решения $u(x, t)$ смешанной задачи (1)–(3) являются условия (11), (12) на начальные функции φ и ψ .

З а м е ч а н и е 3. Единственность ослабленного на оси $r=0$ классического решения вытекает из единственности сильно обобщенного решения этой задачи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть существует ослабленное на оси $r=0$ классическое решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)–(3). Тогда функция $u(r, t) \in C^1([0, R] \times [0, T]) \cap C^2((0, R] \times [0, T])$ и удовлетворяет уравнению (13), условиям (14)–(18). Тогда начальные функции φ и ψ из условий (15)–(18) удовлетворяют условиям (11), (12).

Достаточность. Пусть функции φ и ψ удовлетворяют условиям (11), (12). Покажем, что существует ослабленное на оси $r=0$ классическое решение задачи (1)–(3).

Произведем в задаче (13)–(15) замену искомой функции по формуле $v(r, t) = ru(r, t)$. Тогда для нахождения функции $v(r, t)$ получим задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, t) + rb(r, t) \frac{\partial v}{\partial r}(r, t) + c(r, t) \frac{\partial v}{\partial t}(r, t) + \\ + (q(r, t) - b(r, t))v(r, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < T \end{aligned} \quad (19)$$

$$v(r_0, 0) = \Phi(r), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = \Psi(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (20)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

где начальные функции $\Phi(r) = r\varphi(r)$ и $\Psi(r) = r\psi(r)$ удовлетворяют условиям:

$$\Phi \in C^2[0, R], \quad \Phi(0) = \Phi(R) = 0, \quad \Phi'(0) = \Phi'(R) = 0, \quad (22)$$

$$\Psi \in C^1[0, R], \quad \Psi(0) = \Psi(R) = 0, \quad (23)$$

(см. условия (5), (6)). Так как коэффициенты уравнения (19) по предположению непрерывны в замкнутом прямоугольнике $[0, R] \times [0, T] = \bar{Q}$, имеют в $\bar{Q}$ ограниченные производные и выполняется условие (4), то, как установлено в [1], задача (19)–(21) имеет классическое решение $v \in C^2(\bar{Q})$, и для него справедливо равенство:

$$\begin{aligned} v(r, t) = \frac{\tilde{\Phi}(r+t) + \tilde{\Phi}(r-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{r-(t-\tau)}^{r+(t-\tau)} \tilde{F}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ — продолжения функций Φ и Ψ с отрезка $[0, R]$ на всю ось $\mathbf{R}^1$: сначала они продолжаются на отрезок $[-R, 0]$ нечетным образом, а затем $2R$ -периодически на ось $\mathbf{R}^1$. Функции $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ являются нечетными, а из условий (22) и (23) следует, что $\tilde{\Phi} \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\tilde{\Psi} \in C^1(\mathbf{R}^1)$.

Символом $\tilde{F}$ обозначено выражение

$$\tilde{F} = -\tilde{r} \hat{b} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \hat{c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - (\hat{q} - \hat{b}) \tilde{v},$$

где $\tilde{r}$ и $\tilde{v}$ — нечетные $2R$ -периодические продолжения функций r и v с $[0, R]$ и $\bar{Q}$ на $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^1 \times [0, T]$ соответственно; $\hat{b}$, $\hat{c}$ и $\hat{q}$ — продолжения функций b , c и q с $\bar{Q}$ на полосу $\mathbf{R}^1 \times [0, T]$ сначала четным образом на $[-R, 0] \times [0, T]$, а затем $2R$ -периодически. Отметим, что $\tilde{F}$ является ни-

чем иным, как аналогичным нечетным $2R$ -периодическим продолжением с $\bar{Q}$ на полосу $\mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции

$$F = -rb \frac{\partial v}{\partial r} - c \frac{\partial v}{\partial t} - (q - b)v.$$

Покажем теперь, что функция

$$u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} = \frac{\tilde{\Phi}(r+t) + \tilde{\Phi}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2r} \int_0^t dt \int_{r-(t-\tau)}^{r+(t-\tau)} \tilde{F}(\xi, \tau) d\xi \quad (25)$$

является ослабленным на оси $r=0$ классическим решением задачи (1) — (3) или, что одно и то же, функция $u \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2((0, R] \times [0, T])$ является решением задачи (13) — (15) и удовлетворяет условиям (16) — (18). Так как $v \in C^2(\bar{Q})$, то функция $\frac{v}{r}$ при $r \neq 0$ тоже принадлежит классу C^2 , и, следовательно, $u \in C^2((0, R] \times [0, T])$. Непосредственным вычислением устанавливается, что функция u удовлетворяет уравнению (13) в Q и условиям (14) и (15). Выполнимость условия (18) устанавливается путем предельного перехода при $r \rightarrow R$ в уравнении (13) в силу граничного условия (15). Осталось показать, что $u \in C^1(\bar{Q})$ и для этой функции выполняются условия (16) и (17). Используя правило Лопиталья, получим, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) = \tilde{\Phi}'(t) + \tilde{\Psi}(t) + \int_0^t \tilde{F}(t - \tau, \tau) d\tau.$$

Следовательно, $u \in C(\bar{Q})$. Далее, вычислив в формуле (25) производные $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ и перейдя в полученных выражениях к пределу при $r \rightarrow 0$, с помощью правила Лопиталья и разложений значений функций $\tilde{\Phi}(r+t)$, $\tilde{\Phi}'(r+t)$, $\tilde{\Phi}(r-t)$, $\tilde{\Phi}'(r-t)$ по степеням r установим, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \tilde{\Psi}''(t) + \tilde{\Psi}'(t) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}(t - \tau, \tau)}{\partial(t - \tau)} d\tau.$$

Тем самым показано, что $u \in C^1(Q)$. Так как

$$r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) \right) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\Phi}''(r+t) + \tilde{\Phi}''(r-t) + \tilde{\Psi}'(r+t) - \right. \\ \left. - \tilde{\Psi}'(r-t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial r} [\tilde{F}(r+(t-\tau), \tau) - \tilde{F}(r-(t-\tau), \tau)] d\tau \right\}$$

и функции $\tilde{\Phi}''$ — нечетная, $\tilde{\Psi}'$ — четная, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}$ — четная, то, перейдя в последнем равенстве к пределу при $r \rightarrow 0$, установим, что функция u удовлетворяет условию (16). Наконец, разлагая по степеням r значения функций, входящих в правую часть равенства

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\Phi}''(r+t) - \tilde{\Phi}''(r-t) - \frac{\tilde{\Phi}'(r+t) - \tilde{\Phi}'(r-t)}{r} + \right. \\ \left. + \tilde{\Psi}'(r+t) + \tilde{\Psi}'(r-t) - \frac{\tilde{\Psi}(r+t) + \tilde{\Psi}(r-t)}{r} + \right. \\ \left. + \int_0^t \left[\frac{\partial \tilde{F}(r+(t-\tau), \tau)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{F}(r-(t-\tau), \tau)}{\partial r} \right] d\tau - \right.$$

$$- \frac{1}{r} \int_0^t [\tilde{F}(r + (t - \tau), \tau) - \tilde{F}(r - (t - \tau), \tau)] d\tau \Big\},$$

и переходя в этом равенстве к пределу при $r \rightarrow 0$, установим, что функция u удовлетворяет условию (17). Теорема доказана.

Список литературы

1. Барановская С. Н. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 787.
2. Чернятин В. А. // Современные проблемы математического моделирования. М., 1984. С. 29.
3. Чернятин В. А. // ДУ. 1985. Т. 21. № 9. С. 1569.
4. Чернятин В. А. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1080.
5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1954. С. 326, 327.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. С. 200.
7. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. С. 115.

Поступила в редакцию 16.04.91.



УДК 517.95

И. Е. МОЗОЛЕВСКИЙ, А. В. КОРЗЮК, В. П. РОГАЧ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПЛОСКОСТИ В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Метод конечных элементов в настоящее время представляет собой хорошо развитую область вычислительной математики, теоретические и прикладные аспекты которой достаточно полно изложены в литературе [1—4]. Тем не менее практическая реализация метода конечных элементов, в отличие от сеточных методов, требует довольно сложного программирования даже для простых задач. Существующие большие коммерческие пакеты, основанные на применении метода конечных элементов для решения прикладных задач в той или иной предметной области, обычно содержат свою специализированную базу данных, макро-язык для контроля за правильностью ввода — вывода, обильный графический интерфейс и т. д. Однако зачастую они слишком узко специализированы, машинозависимы и сложны в применении. Поэтому пользователь, которому надо решить даже достаточно простую задачу методом конечных элементов, зачастую сталкивается с неприятной альтернативой: с необходимостью либо осваивать какой-либо сложный пакет прикладных программ, реализующий метод конечных элементов на вычислительных системах большой мощности (что само по себе уже является сильным ограничением), либо пытаться самому разрабатывать нужное программное обеспечение.

Задачи со смешанными граничными условиями для уравнения Пуассона в двумерной области сложной геометрии возникают в различных практических областях: электродинамике, микроэлектронике, теплофизике и т. д. Теоретические аспекты их разрешимости и свойства решений исследованы с исчерпывающей полнотой. Однако применение стандартных сеточных методов для численного решения таких граничных задач затруднительно в силу произвольности геометрии области. Поэтому рассмотрим численное решение задачи методом конечных элементов и его реализацию в виде программного комплекса для ПЭВМ класса ЕС-1841 и выше. В состав комплекса входит автоматический генератор сеток и средства визуализации сгенерированной сетки и полученного решения.

Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная многоугольником $\partial\Omega$ область на плоскости. Предположим, что граница $\partial\Omega$ разделена на две части $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ так, что $\int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} ds = 0$ и $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо обра-

зовано конечным числом замкнутых отрезков. Далее, пусть $C^m(\bar{\Omega})$ ($m \geq 0$) — множество функций, непрерывно дифференцируемых до порядка m включительно в области Ω вплоть до границы. Обозначим через

$C_I^m(\bar{\Omega})$ ($m \geq 1$) множество функций $u \in C^{m-1}(\Omega)$, для которых существуют непересекающиеся подобласти $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ области Ω , такие, что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^p \bar{\Omega}_i \text{ и } u|_{\bar{\Omega}_i} \in C^m(\Omega_i).$$

Пространство $C_I(\Omega) = C_I^0(\Omega)$ определим как множество функций u в Ω , для которых сужение u на Ω_i допускает непрерывное продолжение на R^2 .

Рассмотрим в области Ω задачу:

для заданных f и g найти u такое, что

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (01)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = g, \quad (02)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0. \quad (03)$$

Через $L_2(\Omega)$ обозначим гильбертово пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций в Ω со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

Далее, зададим в $C_I^m(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\beta} v(x) dx$$

и пусть $H^m(\Omega)$ — пространство Соболева, которое при сделанных предположениях можно рассматривать как пополнение $C_I^m(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{2,m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [D^{\alpha} u(x)]^2 dx \right)^{1/2},$$

порождаемой данным скалярным произведением [1]. Пусть

$$W = \{u \in C_I^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega_1} = 0\}$$

и пусть V — замыкание W в $H^1(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{2,1}$. Далее, рассмотрим на $V \times V$ билинейную форму

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \nabla u(x) dx. \quad (1)$$

Лемма 1. Билинейная форма (1) симметрична, непрерывна и коэрцитивна на $V \times V$.

Предположим, что существует продолжение g на $\bar{\Omega}$ класса $C_I^1(\bar{\Omega})$, которое мы снова обозначим через g , и пусть $W_g = g + W$, а V_g — замыкание W_g в $H^1(\Omega)$. В слабой постановке задача (01) — (03) формулируется следующим образом:

для заданных $f \in C_I^0(\bar{\Omega})$ и $g \in C(\partial\Omega_1)$ найти $u \in V_g$ такое, что

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

Теорема 1. Для любого $f \in C_I^2(\bar{\Omega})$ и любого g , допускающего продолжение на $\bar{\Omega}$ класса $C_I^2(\bar{\Omega})$, существует единственное $u \in V_g$, являющееся решением задачи (2).

Доказательство данных утверждений проводится стандартным способом [2].

Метод конечных элементов для задачи (2). Для приближенного решения задачи применим метод конечных элементов первого порядка. Более точно, пусть $\{T_i\}_{i=1}^N$ — множество замкнутых треугольников на плоскости, каждые два из которых либо не пересекаются, либо имеют

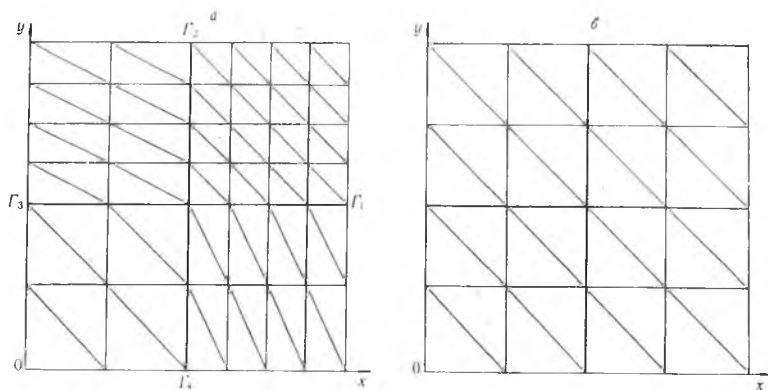


Рис. 1. Адаптивная (а) и равномерная (б) сетки для решения тестовой задачи

общую сторону или вершину. Предположим, что $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N T_i$, причем пересечение каждого треугольника с $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо совпадает с вершинной или стороной треугольника. Пусть $\{P_i\}_{i=1}^M$ — множество всех вершин треугольников $\{T_i\}_{i=1}^N$. Пространство U конечных элементов первого порядка в $\bar{\Omega}$ определим следующим образом: функция $u \in U$ однозначно определяется своими значениями в точках $P_i, i = 1, M$, а ее сужение на каждый треугольник является функцией вида $ax + by + c$. Несложно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. $U \subseteq C_1^1(\bar{\Omega})$.

Базисом Лагранжа в пространстве U назовем систему функций $u_i, u_M \subset U$ таких, что $u_i(P_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим последовательность пространств $\{U_\alpha\}$, удовлетворяющую условию $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha = 0$, где h_α — максимальный из диаметров треугольников T_j , относящихся к U_α . Предположим, что последовательность пространств $\{U_\alpha\}$ является равномерной с постоянной q , т. е. для любой базисной функции $u_i \in U_\alpha$

$$\max_{1 \leq i \leq M} \sup_{x \in T_k} |u_i| \leq q h_\alpha^{-i} \forall 1 \leq i \leq M, \forall 1 \leq k \leq N, \forall j_s = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $W_\alpha = W \cap U_\alpha$ и $V_{g_\alpha} = g_\alpha + W_\alpha$, где $g_\alpha \in U_\alpha, g_\alpha(P_i) = g(P_i) \forall i = 1, \dots, M$ — аппроксимация g в пространстве U_α . Аналогично [2] можно показать, что имеет место следующий результат.

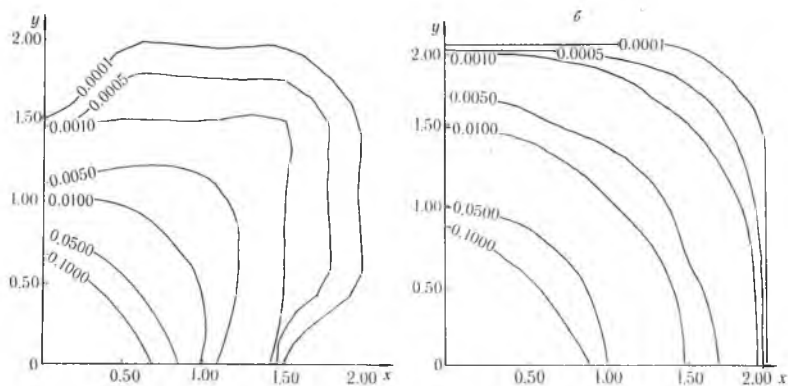


Рис. 2. Изолинии относительной погрешности для адаптивной (а) и равномерной (б) сеток

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда $\forall \alpha > 0$ существует единственный элемент $u_{g_\alpha} \in V_{g_\alpha}$, такой, что

$$a(u_{g_\alpha}, v) = (f, v) \quad \forall v \in W_\alpha, \quad (3)$$

причем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|u_{g_\alpha} - u\| = 0$,

где u — решение задачи (2).

Программная реализация метода конечных элементов.

Приближенное решение задачи (01) — (03) методом конечных элементов можно условно разделить на следующие этапы:

- генерация сетки, т. е. разбиение области, в которой ищется решение, на треугольные элементы;
- задание значений правой части и граничных значений в соответствующих узлах сгенерированной сетки;
- построение локальных и глобальных матриц жесткости и соответствующих векторов нагрузки;
- решение результирующей системы алгебраических уравнений и вывод полученных значений.

Данный алгоритм реализован на ПЭВМ ЕС1841 в виде программного комплекса на языке TURBO — PASCAL-3.0 с использованием графического пакета TURBO — GRAPHICS-1,5A для вывода графических результатов. В качестве автоматического генератора сетки использовалась процедура, аналогичная программе GRID из [3], позволяющая произвольным образом изменять плотность сетки в различных частях области. При этом предусмотрена линейная интерполяция условий Дирихле на вновь полученные граничные узлы. Локальные матрицы жесткости и векторы нагрузки рассчитывались на основе интегрального соотношения (3) с помощью метода Бубнова — Галеркина. Для решения системы линейных уравнений применялся метод Холесского. Пользователь имеет возможность графической интерпретации полученных результатов, включая вывод сгенерированной сетки и изолиний полученного решения.

Для иллюстрации возможностей пакета рассмотрим граничную задачу:

$$\Delta u = 4b\Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = y^2 + 4, \quad u|_{\Gamma_2} = x^2 + 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0,$$

имеющую точное решение $u = x^2 + y^2$.

На рис. 1 приведены соответствующие обозначения и изображены адаптивная и равномерная сетки, построенные по четырем зонам, на которые условно разбивалась расчетная область. На рис. 2 показаны изолинии относительной погрешности численного решения задачи на адаптивной и равномерной сетках.

Список литературы

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М., 1978.
3. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979.
4. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М., 1986.

Поступила в редакцию 10.02.90.

СТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

В работе найдены элементарные делители элементов группы $O_n(K, Q)$, $n = 2m$, над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Для любого допустимого набора элементарных делителей строится элемент группы $O_n(K, Q)$ в явном виде.

Определения и обозначения из [1], [2].

Теорема. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 2; V — n -мерное, $n = 2m$, векторное пространство над K ; $Q: V \rightarrow K$ — невырожденная квадратичная форма; $O_n(K, Q)$ — группа ортогональных преобразований пространства V .

1. Элементарными делителями элементов группы $O_n(K, Q)$ являются многочлены вида: а) $(x + 1)^{2l}$ может входить в состав элементарных делителей произвольное число раз; б) парами могут входить $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $\alpha \neq 1$, l — произвольное и $(x + 1)^l$, $(x + 1)^l$, l — нечетное.

2. Любая конечная система многочленов, удовлетворяющих условиям а), б), есть набор элементарных делителей ортогонального преобразования.

Доказательство первого утверждения следует из [2] и [3]. В [2] доказано, что в пространстве V существует базис, в котором $O_n(K, Q)$ совпадает с подгруппой всех матриц $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ симплектической группы $Sp_n(K)$ таких, что диагональные элементы матриц tAC , tBD равны нулю (t означает транспонирование). Элементарные делители группы $Sp_n(K)$ над полем характеристики 2 найдены в [3]. Над алгебраически замкнутым полем получим лишь многочлены вида а) и б). Первое утверждение следует также из [4] и [5].

Доказательство второго утверждения теоремы.

а) Пусть $H = \begin{bmatrix} 0_n & E_l \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0_n & E_l \\ E_l & 0_n \end{bmatrix}$, где 0_n — нулевая $l \times l$ -матрица, E_l — единичная матрица; V — векторное пространство размерности $n = 2l$ над полем K характеристики 2,

$$e_1, \dots, e_n \quad (1)$$

— базис пространства V . Рассмотрим отображение $Q: V \rightarrow K$, $Q(X) = {}^tXHX$ и $f: V \times V \rightarrow K$, $f(X, Y) = {}^tXFY$. Так как $H + {}^tH = F$ и ${}^tYHX = {}^tX{}^tHY$, то непосредственно проверяется, что $Q(cX + dY) = c^2Q(X) + d^2Q(Y) + cd f(X, Y)$, $c, d \in K$. Следовательно, Q является квадратичной формой с матрицей H в базисе (1), f — соответствующая ей билинейная форма с матрицей F . Форма Q — невырожденная, так как подпространство, ортогональное к V относительно формы f , нулевое. Построим элемент группы $O_n(K, Q)$ с элементарным делителем $(x + 1)^{2l}$. Рассмотрим

$n \times n$ -матрицу, $n = 2l$, $R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^{l-1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{l-1} & C_n^l \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и имеют порядок $l \times l$. Непосредственно проверяется, что ${}^tRFR = F$, ${}^tRHR = H + T$, где $T = \begin{bmatrix} {}^tAC & {}^tAD + E_l \\ {}^tBC & {}^tBD \end{bmatrix}$. Здесь ${}^tAC = {}^tBD = 0$ (при вычислении tBD учитывается, что $n = 2l$ и $C_n^l = 0$ при характеристике 2), ${}^t(BC) = {}^tAD + E_l$. Следовательно, T — симметрическая матрица с нулевыми элементами на главной диагонали. Матрица R имеет один элементарный делитель $x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^l x + 1 = (x + 1)^n$, $n = 2l$. Гомоморфизм σ пространства V с матрицей R в базисе (1) принадлежит $O_n(K, Q) : Q(\sigma X) = Q(X)$ следует из ${}^tRFR = R$ и ${}^tRHR = H + T$.

б) Рассмотрим многочлены $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $\alpha \neq 1$. Пусть H и F те же, что в а), A — $l \times l$ -матрица с одним элементарным делителем $(x + \alpha)^l$ (A можно взять в форме Жордана). Матрица $R = A + {}^tA^{-1}$ имеет указанные выше элементарные делители и ${}^tRFR = F$, ${}^tRHR = H$. Поэтому гомоморфизм σ пространства V с матрицей R в базисе (1) принадлежит $O_n(K, Q)$ и имеет два элементарных делителя $(x + \alpha)^l$, $(x + \alpha^{-1})^l$, $n = 2l$.

в) Аналогично строится элемент группы $O_{2l}(K, Q)$ для многочленов $(x + 1)^l$, $(x - 1)^l$, где l — нечетное.

Пусть задана система многочленов, удовлетворяющих условиям а), б) теоремы, сумма степеней которых равна $n = 2m$. Для этих многочленов, как в а) — в), рассмотрим матрицы H, F, R . Пусть H_1, F_1, R_1 — прямые суммы соответственно матриц H, F и R . Выберем в пространстве V какой-либо базис $e_1, \dots, e_n$ и определим на V квадратную форму Q с помощью матриц H_1, F_1 , а гомоморфизм σ пространства V с помощью матрицы R_1 . σ будет ортогональным преобразованием пространства V с заданной системой элементарных делителей. Второе утверждение доказано, так как невырожденные квадратичные формы пространства V над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 эквивалентны [1, § 16].

Автор благодарит И. Д. Супруненко за участие в обсуждении работы и замечания.

Список литературы

1. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М., 1974.
2. Козел П. Т. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 3. С. 45.
3. Козел П. Т. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 6. С. 488.
4. Wall G. E. // Austr. Math. Soc. 1963. V. 3. P. 1.
5. Hesselink W. H. // Math. Z. 1979. V. 166. P. 165.

Поступила в редакцию 03.05.90.

УДК 517.53

В. Н. РУСАК, ТА ХОНГ КУАНГ (СРВ)

О СРАВНЕНИИ НАИЛУЧШЕГО РАЦИОНАЛЬНОГО И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В КРУГЕ $|z| \leq 1$

Рассмотрим класс функций, аналитических в $|z| \leq 1$, вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{l_k}, \quad (1)$$

где $(l_k)_{k=0}^{\infty}$ — целочисленная арифметическая прогрессия с положительной разностью d .

Через $R_{n,m}(f)$ будем обозначать наилучшее равномерное рациональное приближение функции $f(z)$ в $|z| \leq 1$ рациональными функциями, порядки числителей и знаменателей которых не превышают n и m соответственно, т. е.

$$R_{n,m}(f) = \inf_{r_{n,m}(z)} \max_{|z| \leq 1} |f(z) - r_{n,m}(z)|, \quad r_{n,m}(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)}.$$

В этой публикации найдена скорость стремления к нулю последовательности $R_{n,m}(f)$ при условии, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^4}{n} = 0. \quad (2)$$

Запись $A_{n,m} \sim B_{n,m}$ означает, что при условии (2) имеется асимптотическое соотношение

$$A_{n,m} = B_{n,m} \left(1 + O\left(\frac{1+m^4}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предположим, что тейлоровские коэффициенты f_k , $k \geq n_0$, степенного ряда (1) удовлетворяют условиям

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^\alpha}\right)^j \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,j}}{n^k}\right), \quad j \leq m, \quad (3)$$

где q — комплексное число; α — целое положительное; $b_{k,j}$ — комплексные числа, подчиненные ограничениям

$$|b_{k,j}| \leq (Cj^2)^k, \quad j \leq m, \quad k \geq 1. \quad (4)$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть тейлоровские коэффициенты f_k , $k \geq n_0$, степенного ряда (1) удовлетворяют условиям (3), (4). Тогда

$$R_{l_n, dm}(f) \sim m! \left| \frac{q\alpha}{n^{\alpha+1}} \right|^m \cdot |f_{n+1}|. \quad (5)$$

Доказательство этой теоремы основано на применении аппроксимаций Паде, теория которых подробно изложена в книге Дж. Бейкера, П. Грейвс-Морриса [1]. Вывод нижней оценки в (5) осуществляется с помощью леммы 3.1 из работы [2].

Лемма. Пусть степенные ряды

$$q_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} z^k, \quad i = \overline{1, m},$$

сходятся при $|z| < \rho$. Тогда при $|z_1| < \rho, \dots, |z_m| < \rho$ имеет место следующее тождество:

$$\det |q_i(z_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0} \det |a_{k_j}^{(j)}|_{i,j=1}^m \det |z_i^{k_j}|_{i,j=1}^m.$$

Эта лемма принадлежит Коши, а ее доказательство имеется, например, в книге Хоа Ло Кена [4].

З а м е ч а н и е 1. Излагаемые в данной статье результаты продолжают исследования, начатые в [3].

Теорема 2. (О сравнении наилучшего рационального и полиномиального приближения). При выполнении условий теоремы 1 имеют место соотношения

$$R_{l_n, dm}(f) \sim \left| \frac{q\alpha}{n^{\alpha+1}} \right|^m \cdot m! \cdot R_{l_n, 0}(f) \sim m! \left| \frac{\alpha}{n} \right|^m \cdot R_{l_n+dm, 0}(f).$$

В качестве следствия теорем 1 и 2 рассмотрим некоторые примеры.

а) Пусть $f(z)$ любая из следующих функций:

$$\cos z, \operatorname{ch} z, \sin z/z, \operatorname{sh} z/z.$$

Тогда

$$R_{2n, 2m}(f) \sim \frac{m!}{(2n^3)^m} R_{2n, 0}(f) \sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m R_{2n+2m, 0}(f),$$

где

$$R_{2n, 0}(f) \sim \begin{cases} 1/(2n+2)!, & f(z) = \cos z, \operatorname{ch} z \\ 1/(2n+3)!, & f(z) = \sin z/z, \operatorname{sh} z/z. \end{cases}$$

б) Пусть $f(z)$ одна из функций $\sin z, \operatorname{sh} z$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{2n+1, 2m}(f) &\sim \frac{m!}{(2n^3)^m (2n+3)!} \sim \frac{m!}{(2n^3)^m} R_{2n+1, 0}(f) \sim \\ &\sim m! \left| \frac{2}{n} \right|^m R_{2n+2m+1, 0}(f). \end{aligned}$$

в) Пусть $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода, т. е.

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k! (k+\nu)!},$$

где ν — целое неотрицательное число. Тогда

$$\begin{aligned} R_{2n+\nu, 2m}(J_\nu) &\sim \frac{m!}{n^{3m} (n+1)! (n+\nu+1)! 2^{2n+m+\nu+2}} \sim \\ &\sim \frac{m!}{(2n^3)^m} R_{2n+\nu, 0}(J_\nu) \sim m! \left| \frac{2}{n} \right|^m R_{2n+2m+\nu, 0}(J_\nu). \end{aligned}$$

г) Рассмотрим функцию

$$f(z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(h) z^{2k}, \quad (6)$$

где $J_{2k}(t)$ — функция Бесселя первого рода. Тогда

$$\begin{aligned} R_{2n, 2m}(f) &\sim \frac{m! h^{2(n+m+1)}}{n^{3m} (2n+2)! 2^{2n+3m+1}} \sim \\ &\sim m! \left(\frac{h^2}{8n^3} \right)^m R_{2n, 0}(f) \sim m! \left| \frac{2}{n} \right|^m R_{2n+2m, 0}(f). \end{aligned}$$

Заметим, что для функции (6) имеет место соотношение (см. [7], с. 60).

$$\operatorname{Re} f(e^{it}) = \cos(h \cos t).$$

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1 и 2 были доказаны раньше В. Н. Русаком [5], [6] для случая фиксированных m .

З а м е ч а н и е 3. Интересно заметить, что правая часть асимптотики (5) не зависит от d .

Список литературы

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М., 1986.
2. Дзядык В. К. // Матем. сб. 1979. Т. 108 (150). № 2. С. 247.
3. Русак В. Н., Та Хонг Куанг // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 10. С. 12.
4. Хуа Ло Кен. Гармонический анализ функций многих переменных в классических областях. М., 1959.
5. Русак В. Н. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. № 11. С. 969.
6. Русак В. Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1988. № 6. С. 26.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. М., 1988.

Поступила в редакцию 11.09.90.

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ КОТОРЫХ НЕ ИМЕЕТ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

В работах [1]—[3] выделены некоторые классы дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{j=0}^n P_j(z, u, u') u''^{n-j} = 0, \quad (1)$$

где $P_j(z, u, u')$ — полином относительно u, u' с аналитическими по $z \in D$ коэффициентами, общий интеграл которых не имеет подвижных многозначных особенностей (уравнение Р-типа). В работах [1—2] эти исследования проводились в основном с целью получить существенно новые трансцендентные функции, и эта задача осталась открытой. В [2] при $n=2$ получены некоторые уравнения Р-типа, решения которых выражаются через решения пятого и шестого уравнений Пенлеве. В [3] предложен метод, позволяющий строить уравнения вида (1) Р-типа, решения которых рациональным образом выражаются через решения уравнений Пенлеве ($P_1 - P_6$) при различных n .

В настоящей работе этим методом построено уравнение Р-типа вида (1) с $n=2$, решение которого рационально выражается через решение третьего уравнения Пенлеве:

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w}{z} + \frac{1}{z} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad \gamma \delta \neq 0 \quad (P_3)$$

(без ограничения общности считаем $\gamma = -\delta = 1$ [4]).

Заметим, что в [3] уравнение Р-типа вида (1), связанное с уравнением (P_3), приведено при $n=3$. Следуя [3], систему, эквивалентную уравнению (P_3), будем искать в виде:

$$\begin{aligned} w' &= a_0 w^2 + u w + a_2, \\ w u' &= b_0 w^2 + b_1 w + b_2 + (c_0 w^2 + c_1 w + c_2) u, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_i, b_j, c_j ($i=0, 2; j=0, 1, 2$) — функции z .

Из первого уравнения системы (2) следует, что $u(z)$ выражается рационально через w, w' и, таким образом, если w не имеет подвижных многозначных особенностей (Р-свойство), то и u также имеет Р-свойство. Исключая из (2) u , сравнивая полученное уравнение с (P_3), для определения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{aligned} a_0 &= -c_0, \quad c_1 = -1/z, \quad c_2 = a_2, \quad a_0 c_0 = -1, \quad b_0 = a_0 c_1 + \alpha/z, \\ b_1 &= a_0 c_2 + a_2 c_0, \quad b_2 = a_2 c_1 + \beta/z, \quad a_2 c_2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) находим, что одна из эквивалентных уравнению (P_3) систем имеет вид:

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon_1 w^2 + u w + \varepsilon_2, \quad z w u' = (\alpha - \varepsilon_1) w^2 - u (\varepsilon_1 z w^2 + w - \varepsilon_2 z) + \beta - \varepsilon_2, \\ \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_2^2 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Потребуем, чтобы во втором уравнении системы (4) множители, стоящие при w^0, w^2 , не были нулевыми, т. е.

$$z u - \varepsilon_1 \alpha + 1 \neq 0, \quad z u + \varepsilon_2 \beta - 1 \neq 0. \quad (5)$$

Для этого, в силу (4), достаточно выполнения условия

$$\alpha + \eta_1 \beta \neq 2 \eta_2, \quad \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1. \quad (6)$$

В противном случае, т. е. при невыполнении хотя бы одного условия (5), уравнение (P_3) вырождается в уравнение Риккати с условием (6), которое интегрируется через функции Бесселя [4].

Итак, система (4) является системой Р-типа, так как ω и u не имеют подвижных критических точек. Определим уравнение, описывающее функцию $u(z)$. Для этого исключим ω из (4). В результате получим уравнение Р-типа вида (1) с $n=2$

$$\begin{aligned} z^2 u''^2 + 4zu'' \{u' + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 zu + \varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\} - u'^2 \{z^2 u^2 - 4\} - \\ - 2u' \{zu^3 - 8\varepsilon_1 \varepsilon_2 zu - 4(\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha)\} - u^4 \{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 z^2 + 1\} - \\ - 4zu^3 \{\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\} + 4u^2 \{4z^2 + \alpha \beta - \varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha + \varepsilon_1 \varepsilon_2\} + \\ + 16zu \{\varepsilon_2 \beta - \varepsilon_1 \alpha\} + 4\{\varepsilon_1 \beta - \varepsilon_2 \alpha\}^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом справедлива

Теорема 1. Уравнение (7) имеет Р-тип и его решения выражаются через решения уравнения (P_3) по формуле:

$$u = (\omega' - \varepsilon_2) / \omega - \varepsilon_1 \omega. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые свойства решений уравнения (7) в силу полученного соотношения (8). Прежде всего отметим, что фундаментальная область пространства параметров уравнения (7) в силу (8) совпадает с фундаментальной областью пространства параметров уравнения (P_3) [4], т. е.

$$\operatorname{Re} \beta \geq 0, \operatorname{Re}(\alpha - \beta) \geq 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) \leq 2. \quad (9)$$

Построим рациональные решения (0-решения) уравнения (7). Заметим, что если ω — 0-решение уравнения (P_3) , то u также является 0-решением уравнения (7). Для существования 0-решений уравнения (P_3) необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\text{либо а) } \alpha + \beta = 4n, \text{ либо б) } \alpha - \beta = 4n, n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Покажем, что условие (10) является необходимым и достаточным для существования рациональных решений уравнения (7). Для этого можно воспользоваться методом доказательства аналогичного утверждения для уравнения (P_3) [4]. Пусть $u(z, \alpha, \beta)$ 0-решение уравнения (7). Тогда оно имеет конечное число полюсов. В окрестности полюса $z_0 \neq 0$ решение имеет разложение

$$u(z, \alpha, \beta) = \frac{2\varepsilon}{z - z_0} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i (z - z_0)^i, \varepsilon^2 = 1.$$

Определим вычет точки $z = \infty$ решения $u(z, \alpha, \beta)$. Сделаем в (7) замену

$zt = 1$ и в полученное уравнение подставим разложение $u = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k t^k$.

Тогда найдем, что вычет точки $z = \infty$ равен $(-\varepsilon_2 \beta + \varepsilon_1 \alpha) / 2$. Теперь, воспользовавшись теоремой о полной сумме вычетов однозначной функции с конечным числом особых точек, получаем условие (10). Доказательство же достаточности следует из соотношения (8) и теоремы 7.1 [4], согласно которой при выполнении условия (10) уравнение (P_3) имеет 0-решения. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (7) имело рациональные решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10).

Список литературы

1. Bureau F. // Ann. mat pura ed appl. 1972. V. 91. P. 163.
2. Bureau F., Garset A. // Ibid. 1972. V. 92. P. 177.
3. Громан В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1978. № 1.
4. Громан В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.

Поступила в редакцию 11.10.90.

Наши юбиляры



ФЕДОР ИВАНОВИЧ ФЕДОРОВ



19 июня 1991 г. исполнилось 80 лет со дня рождения академика АН БССР Федора Ивановича Федорова — выдающегося советского ученого, основателя белорусской школы теоретической физики.

После окончания в 1931 г. физико-математического отделения педагогического факультета Белгос-университета им. В. И. Ленина и двух лет работы преподавателем физики и математики педагогического техникума в г. Кричеве Ф. И. Федоров был направлен на учебу в аспирантуру Физического института при Ленинградском университете. Его научным руководителем становится один из крупнейших физиков-теоретиков — академик Владимир Александрович Фок. Период обучения в аспирантуре был труднейшим испытанием для Ф. И. Федорова, поскольку в те времена физику и математику в БГУ им. В. И. Ленина в основном преподавали бывшие учителя гимназий и реальных училищ и даже его лучшие выпускники имели большие пробелы в специальной подготовке. Однако исключительная одаренность, огромная работоспособность и редкая организованность позволили

Федору Ивановичу всего за три года овладеть новейшими идеями и методами теоретической физики, решить ряд сложных задач квантовой электродинамики и успешно защитить кандидатскую диссертацию.

В 1936 г. Ф. И. Федоров возвращается в Минск и начинает работать на недавно созданном физико-математическом факультете университета. По его инициативе в 1938 г. была организована кафедра теоретической физики, заведующим которой Федор Иванович оставался в течение 24 лет.

На долю Ф. И. Федорова выпала сложная и ответственная задача восстановления физико-математического факультета Белгосуниверситета им. В. И. Ленина в период Великой Отечественной войны и в первые послевоенные годы. В самое тяжелое для университета время (1943—1950) он был его деканом. Сегодня уже трудно себе представить характер и объем тех сложнейших проблем, которые приходилось решать в 1943 г., когда на подмосковной станции Сходня факультет возобновил работу, и особенно с августа 1944 г. после возвращения университета в только что освобожденный Минск. На факультете были сосредоточены наиболее квалифицированные кадры физиков и математиков Белоруссии. Их бесспорным лидером стал Ф. И. Федоров. Блестяще защитив (1954) диссертацию на тему «Инвариантные методы в оптике анизотропных сред», он становится первым доктором физико-математических наук, выросшим в республике.

При всей занятости научно-организационными делами Федор Иванович прежде всего — активно работающий ученый-исследователь, который не мыслит своего существования без постоянного, напряженного творческого научного поиска. В период работы в университете, а затем в Академии наук (с 1962 г. по настоящее время) им получены важнейшие научные результаты, заложившие фундамент для последующих широких исследований по теории элементарных частиц и квантовой теории поля, общей теории относительности и теории групп пространственно-временной симметрии, оптических свойств анизотропных сред и упругих волн в кристаллах. Перу Ф. И. Федорова принадлежит около 350 научных публикаций, в том числе 6 крупных оригинальных монографий. При всем разнообразии проблем эти работы объединены общностью развиваемого им ковариантного подхода, эффективностью и изяществом разрабатываемых и используемых математических методов. Научные достижения академика Ф. И. Федорова в об-

ласти оптики анизотропных сред отмечены Государственными премиями СССР и БССР; предсказанное им еще в 1954 г. явление — смещение отраженного луча перпендикулярно плоскости падения — было подтверждено экспериментально в 1969 г., а в 1980 г. зарегистрировано в качестве научного открытия.

Многие поколения выпускников физико-математического, а затем физического факультета Белгосуниверситета им. В. И. Ленина, где профессор Ф. И. Федоров продолжает работать, с гордостью причисляют себя к числу учеников Федора Ивановича. Блестящие, тщательно продуманные и отточенные до совершенства, яркие по форме и глубокие по содержанию лекции Ф. И. Федорова являются эталоном педагогического и лекторского мастерства. Федор Иванович воспитывает прежде всего личным примером, беспрдельной преданностью науке, исключительно высокой требовательностью к себе и к результатам своего труда.

Многогранна общественная деятельность Ф. И. Федорова. Он является президентом Белорусского Физического общества, членом правлений Советского фонда мира и общества «Знание», руководителем ряда комплексных научных программ, членом редколлегии нескольких научных журналов. Ф. И. Федоров удостоен высокого звания Героя Социалистического Труда, награжден многими орденами и медалями.

С годами не ослабевает творческая и общественная активность старейшины белорусских физиков. Глубокое уважение вызывает его высокая восприимчивость к новым идеям. Свое восьмидесятилетие Ф. И. Федоров встречает полный энергии, являясь примером жизнелюбия и оптимизма.

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.343.2; 535.548; 538.951-405; 539.219.3

Федоров Ф. И., Барковский Л. М. Группы операторов Коши в оптике и акустике кристаллов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Дается краткий обзор работ по теории операторов Коши в оптике и акустике неоднородных анизотропных сред. Рассматриваются ковариантные решения одномерных тензорных волновых уравнений. Обсуждаются волноводный и осцилляторный типы решений, представляемых группами операторов Коши. Для них находятся инфинитезимальные операторы — тензоры показателей преломления и частот. Отдельно рассматриваются группы экспоненциальных дискретных преобразований векторов электромагнитного и акустического полей на границах раздела стратифицированных сред.

Библиогр. 40 назв.

УДК 530.145

Ничипор И. В., Феранчук И. Д., Ульяненок А. П. Решение уравнения Шредингера для квантовых систем в периодических полях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Рассматривается модификация операторного метода (ОМ) для аппроксимации собственных значений и волновых функций частицы, движущейся в пространственно-периодическом поле. Построена итерационная схема вычисления последовательных приближений ОМ и численно исследована его сходимость.

Библиогр. 5 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 530.12

Сягло И. С. Простой вывод в шестимерной форме уравнений связи электродинамики движущихся сред // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. № 3.

Для ковариантной записи материальных уравнений электродинамики используется шестимерный тензор проницаемости. Преобразование его к движущейся системе отсчета позволяет легко получить материальные уравнения для движущихся анизотропных сред.

Библиогр. 3 назв.

УДК 530.12

Шишкин Г. В., Ясин Мохаммед Али (Ирак). О точном описании дираковской частицы в векторном и тензорном полях. II // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

На основе алгебраического метода разделения переменных рассматривается уравнение Дирака для частицы в присутствии векторного и тензорного полей. В отличие от части I этой работы, где рассматривались поля «плоской» симметрии, здесь указаны конфигурации полей, допускающие полное разделение переменных в уравнении Дирака в ортогональных криволинейных координатах.

Библиогр. 3 назв.

УДК 621.315.592:546.28

Новиков А. П., Урбанович А. И., Нгуен Ван Конг (СРВ). Акустические колебания в кристаллах, возбуждаемые пучками частиц // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Проведен расчет акустического сигнала от перегретой области вблизи трека заряженной частицы, проходящей через пластину мишени, в предположении, что трек представляет собой цилиндр, в котором происходит непрерывное выделение энергии.

Библиогр. 7 назв.

УДК 535.33/34:535.37

Грузинский В. В. Соотношение между спектрами поглощения оптического излучения, рассеяния электронов и люминесценции паров флуоренона // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991.

На примере молекулы флуоренона показано сходство и различие механизмов возбуждения и дезактивации электронных состояний и спектрально-люминесцентных свойств при оптическом и электронном возбуждении многоатомных молекул. Определен ряд констант, характеризующих столкновения молекул флуоренона со световыми квантами и электронами.

Библиогр. 18 назв., ил. 3.

УДК 535.37

Горбачевич С. К., Гулис И. М. Системы органолюминофоров с переносом энергии как перспективные среды для нелинейных светуправляемых транспарантов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Предложена и теоретически проанализирована концепция светуправляемого транспаранта на основе молекулярных систем с переносом энергии электронного возбуждения. Показана возможность снижения мощности управляющего сигнала (для квазистационарного режима) или энергии (для импульсного режима) до уровня порядка 10^{-11} Вт и 10^{-14} Дж соответственно в расчете на один элемент.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 681.325.53(075.8)

Бакиновская Л. Н., Красноголовый Б. Н., Супрун В. П., Шпилевой Б. Н. Преобразователь двоичного кода в двоично-десятичный с использованием D-триггеров // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Описаны возможности использования D-триггеров в преобразователях двоичного кода в двоично-десятичный последовательного типа со сдвигом и коррекцией. Изложена методика логического проектирования тетрад двоично-десятичного регистра на D-триггерах со схемой коррекции.

Библиогр. 4 назв., ил. 3, табл. 3.

УДК 517.977

Габасов Р., Кириллова Ф. М. Устойчивость, стабилизация, оптимальность // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Описывается схема применения результатов по синтезу оптимальных регуляторов к построению стабилизаторов, обеспечивающих с помощью ограниченных воздействий асимптотическую устойчивость собственно неустойчивых динамических систем.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.94

Забрейко П. П. С-теория линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Рассматривается классическое интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве S непрерывных функций на компактном метрическом пространстве. На основе необходимых и достаточных условий на ядро, при которых соответствующий оператор является ограниченным, слабо компактным оператором в пространстве S , формулируются общие условия, при которых для уравнения справедливы теоремы Фредгольма и теоремы об интегральном представлении решений. Формулируются условия справедливости утверждений теорем Вольтерра, Гильберта — Шмидта и Енча.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Зверович Э. И. Явное решение одной задачи о вдавливании штампа в упругую полосу // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Построено в явном виде решение следующей краевой задачи о вдавливании штампа с прямоугольным основанием в упругую полосу, лежащую на жестком основании. Под штампом задано смещение, вне штампа нет напряжений, а на нижнем крае полосы отсутствуют объемные расширения.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 519.21

Медведев Г. А. О соответствии регрессионных и авторегрессионных моделей случайных процессов и полей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Показано, что регрессионным моделям процессов и полей может быть придана форма записи, характерная для авторегрессионных моделей в случаях, когда функции регрессии являются степенными или экспоненциальными полиномами, а также тригонометрическими. Характерной особенностью таких авторегрессионных моделей является наличие систематической составляющей в порождающей случайной последовательности. Получены формулы пересчета регрессионных коэффициентов в коэффициенты авторегрессии.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.2

Харин Ю. С. Асимптотический анализ робастности оценок минимального контраста // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Рассматриваются одно- и многовыборочные задачи статистического оценивания параметров с использованием семейства оценок минимального контраста при наличии регулярных параметрических искажений вероятностных распределений. Для анализа устойчивости и синтеза робастных оценок развивается метод асимптотических разложений.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.956

Юрчук Н. И., Яшкин В. И. О классическом решении смешанной задачи для трехмерного гиперболического уравнения с центральной симметрией // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Установлены условия на начальные функции, являющиеся необходимыми и достаточными условиями существования ослабленного на оси $r = 0$ классического решения смешанной задачи в цилиндре $\Pi = G \times (0, T)$, $G = \{x \in R : r = |x| < R\}$, для уравнений с волновым оператором в главной части в случае центральной симметрии по пространственным переменным.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.95

Мозолевский И. Е., Корзюк А. В., Рогач В. П. Метод конечных элементов решения задач со смешанными граничными условиями для уравнения Пуассона на плоскости в областях со сложной геометрией // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Описывается реализация на ПЭВМ метода конечных элементов в применении к численному решению граничной задачи с условиями Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в области произвольной многоугольной формы на плоскости.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 512.643

Козел П. Т. Строение элементов ортогональной группы четной степени над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Найдены элементарные делители элементов указанной в заглавии группы. Дан метод построения в явном виде элемента такой группы для заданной системы элементарных делителей.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.53

Руса́к В. Н., Та Хо́нг Куа́нг (СРВ). О сравнении наилучшего рационального и полиномиального приближения в круге $|z| \leq 1$ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

Рассмотрены наилучшие рациональные приближения целых функций, тейлоровские коэффициенты которых подчинены определенным ограничениям. Найдены асимптотические формулы и сравнительные оценки полиномиальных наилучших приближений с наилучшими приближениями рациональными функциями, у которых степени числителя n и знаменателя m такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} m^4/n = 0$.

$n \rightarrow \infty$

Библнгр. 7 назв.

УДК 517.925.7

Луцевич Ж. А. К теории дифференциальных уравнений второго порядка, общий интеграл которых не имеет подвижных критических точек // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 3.

В работе методом эквивалентных систем построено уравнение вида $\sum P_j(z, u, u') u'' = 0$, где $P_j(z, u, u')$ — полином относительно u, u' с аналитическими по $z \in D$ коэффициентами, общий интервал которого рациональным образом выражается через решения третьего уравнения Пенлеве и, следовательно, не имеет подвижных многозначных особенностей.

Библнгр. 4 назв.

АННОТАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ФОНДА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ МИНИСТЕРСТВА НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Е. А. Турецкая, А. Э. Шультман. Обучающая программа «Законы сохранения энергии и импульса». № РТ1200.0001 в РФАП Минобр. БССР.

Программа предназначена для обучения решению задач по теме «Законы сохранения энергии и импульса». В основном она ориентирована на студентов вузов и техникумов, но в сокращенном варианте может применяться в школах и на подготовительных отделениях. Программа содержит задачи пяти рангов сложности, обучающие задачи и вспомогательные материалы. Ранг и задачу обучаемый выбирает самостоятельно через меню. Задачи 1—3 рангов достаточно простые, типовые. Задачи 4-го ранга требуют определенной сообразительности. В задачах 5-го ранга при решении используется интегрирование. Обучаемый может решать задачу самостоятельно (контроль осуществляется по конечной формуле) или использовать помощь ЭВМ. Помощь разбита на фрагменты и не является пассивной: обучаемый должен получить и ввести для контроля определенные промежуточные формулы. После любого фрагмента задачи можно продолжить решение самостоятельно. Программа работает в диалоговом режиме.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимые с IBM PC/AT; тип и версия ОС — MS DOS 3.3 и Альфа-ДОС; язык программирования — TURDO PASCAL; оперативная память — 35К; объем программы — 104К.

Ю. А. Полканов Выявление аномальной неоднородности на фоне псевдорегулярной структуры сложного спадающего сигнала. № РТ12.000002 в РФАП Минобр. БССР.

Комплекс программ «АНОМАЛИЯ» предназначен для анализа сложной структуры спадающего сигнала с модуляцией негармонического вида (импульсной, с возможной фазовой модуляцией), выявления аномалии периодичности в сигнале на фоне мощной псевдорегулярной структуры гармонического вида путем специальной обработки, позволяющей усиливать импульсные аномалии сигнала при сглаживании сопутствующей структуры сигнала.

Технические характеристики: тип ЭВМ — ЕС 1840; тип и версия ОС — MS DOS; язык программирования — TURBO PASCAL; оперативная память — 512К; объем программы — 100К.

Ю. А. Полканов. Выявление элементов периодичности в структуре сложного спадающего сигнала. № РТ12.000003 в РФАП Минобр. БССР.

Комплекс программ «СТРУКТУРА» предназначен для анализа сложной структуры спадающего сигнала с модуляцией негармонического вида (импульсной, с возможной фазовой модуляцией), выявления элементов периодичности в сигнале по спектру интервалов между локальными максимумами, минимумами, максимумами и минимумами сигнала путем визуализации результатов для последующего зрительного анализа на соответствие изменения спектра требуемому при последовательной по спаду сигнала фильтрации локальных пиков сигнала одинаковой амплитуды, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга (специальная программа «ФИЛЬТРАЦИЯ»), когда наличие периодичности соответствует характерное изменение спектра интервалов (появление пиков в спектре интервалов за пределами первоначального спектра, в «длинноволновой» области). Причем существует возможность представления результатов анализа в виде определенной элементарной ячейки структуры неоднородностей сигнала действиями вне представляемого комплекса программ («нау хау»).

Технические характеристики: тип ЭВМ — ЕС-1840; тип и версия ОС — MS DOS 3.3; язык программирования — PASCAL; оперативная память — 512К; объем программы — 90К.

Ф. Е. Акулич. Решение транспортной задачи на узкие места декомпозиционным методом. № РТ1200.0004 в РФАП Минобр. БССР.

Программа предназначена для нахождения точного решения транспортной задачи на узкие места. Реализован декомпозиционный алгоритм решения, разработанный автором. Основное достоинство разработанной программы — сокращение времени решения задачи по сравнению с классическими методами (прямой метод и так называемый пороговый метод). Это достигается за счет того, что декомпозиционный алгоритм требует вычисления на каждой итерации меньшего числа оценок.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимая с IBM PC; тип и версия ОС — MS DOS 3.3; язык программирования — ФОРТРАН; оперативная память — не менее 256К.

Ф. Е. Акулич. Построение верхней границы изменения компонент векторов производства и потребления транспортной задачи на узкие места. № РТ1200.0005 в РФАП Минобр. БССР.

Программа предназначена для нахождения максимально возможного изменения одной из компонент векторов производства и потребления таким образом, чтобы в измененной задаче значение оптимума совпадало со значением оптимума исходной задачи.

Для решения этой задачи использован алгоритм, разработанный автором. Он позволяет путем однократного решения задачи определить допустимое изменение компонент векторов производства и потребления, при котором оптимум функционала сохраняется.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимая с IBM PC; тип и версия ОС — MS DOS 3.3; язык программирования — ФОРТРАН; оперативная память — не менее 256К.

Ф. Е. Акулич. Построение оптимального плана параметрической транспортной задачи на узкие места. № РТ1200.0006 в РФАП Минобр. БССР.

Программа предназначена для построения оптимального плана транспортной задачи на узкие места, в которой изменена одна из компонент векторов производства и потребления.

Предполагается, что оптимальный план исходной задачи имеется, при этом изменение компонент векторов производится не на произвольную величину, а на величину, которая не изменяет оптимум функционала исходной задачи. Эффективность программы обусловлена тем, что при построении оптимального плана «измененной» задачи в значительной степени учитывается оптимальный план исходной. Это дает возможность на порядок сократить время работы программы. При этом эффективность ее использования возрастает с ростом размерности задачи.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимая с IBM PC; тип и версия ОС — MS DOS 3.3; язык программирования — ФОРТРАН; оперативная память — не менее 256К.

Ф. Е. Акулич. Решение задачи о максимальном потоке в многополюсной сети. № РТ1200.0007 в РФАП Минобр. БССР.

Программа предназначена для построения максимального потока в двудольной сети с несколькими источниками и стоками. Реализован метод последовательного сокращения невязок, который не требует введения в сеть дополнительных дуг, и это приемлемо с точки зрения экономии памяти при большом числе источников и стоков.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимая с IBM PC; тип и версия ОС — MS DOS 3.3; язык программирования — ФОРТРАН; оперативная память — не менее 256К.

А. О. Околовнич, Р. А. Прытков. Программно-аппаратный комплекс для сопряжения устройства быстрой печати СМ6313 и ППЭВМ типа IBM PC. № РТ1200.0008 в РФАП Минобр. БССР.

Программно-аппаратный комплекс для сопряжения устройства печати СМ6313 и ППЭВМ типа IBM PC представляет собой драйвер, предназначенный для быстрого вывода на печать больших объемов текстовой и табличной информации.

Технические характеристики: тип ЭВМ — совместимая с IBM PC; тип и версия ОС — MS DOS 3.0 и выше; наличие параллельного порта (порта подключения устройства печати); язык программирования — PASCAL и ASSEMBLER; объем программы — 7К.

ВНИМАНИЮ ПРОГРАММИСТОВ И ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ЭВМ

На базе факультета повышения квалификации по прикладной математике и ЭВМ Белгосунiversитета им. В. И. Ленина создан Республиканский фонд алгоритмов и программ Министерства народного образования БССР (РФАП Минобр. БССР).

Фонд оказывает следующие услуги:

- заключает договоры с разработчиками на распространение программных средств с выплатой авторского вознаграждения при их реализации;
- осуществляет поставку программных средств по договорным ценам;
- оформляет юридическую защиту авторских прав разработчиков программных средств;
- помогает найти деловых партнеров для разработки программных средств;
- реализует техническую документацию на системные программные средства, подготовленную на русском языке типографским способом;
- осуществляет общее и тематическое информационное обслуживание;
- предлагает методическую помощь по вопросам разработки и маркетинга программных средств.

Фонд приглашает принять участие в коммерческих выставках программных продуктов по тематикам:

- Сервисные программные средства для профессионалов и начинающих пользователей ПЭВМ (сентябрь);
- Автоматизированные рабочие места специалистов производства (октябрь);
- Методы прикладной математики в решении научных и производственных задач (ноябрь);
- Автоматизация медицинских обследований и делопроизводства в поликлинике (декабрь).

Аннотации программных средств, зарегистрированных в РФАП Минобр. БССР, публикуются в журнале «Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина». Сер. 1.

Обращаться по адресу: 220080, Минск, Ленинский пр., 4, БГУ, ФПК по ПМ и ЭВМ, РФАП Минобр. БССР, физический корп., ком. 280, тел. 20-60-46.

ФАКУЛЬТЕТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЭВМ БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА ИМ. В. И. ЛЕНИНА ПРОВОДИТ НАБОР СЛУШАТЕЛЕЙ НА 1991/92 УЧЕБНЫЙ ГОД ПО НАПРАВЛЕНИЯМ:

- Системы автоматизированного проектирования вычислительных устройств;
- Программирование на персональных ЭВМ;
- Математическое обеспечение автоматизированных систем управления;
- Математическое и программное обеспечение ЭВМ;
- Математические методы обработки экспериментальных данных с помощью ЭВМ;
- Математическое и программное обеспечение оптимизационных задач;
- Математическое моделирование и алгоритмы оптимизации дискретных и непрерывных динамических систем управления;
- Автоматизированное проектирование информационно-вычислительных сетей.

На факультет принимаются специалисты, имеющие высшее образование.

Повышение квалификации осуществляется с отрывом и без отрыва от производства, а также в форме целевого набора с частичным отрывом от производства по согласованному учебным планам. Срок обучения 1,5 месяца.

Иногородние обеспечиваются общежитием.

Основанием для заключения договора на повышение квалификации является заявка, подаваемая министерствами, предприятиями на имя декана факультета.

Факультет повышения квалификации по прикладной математике и ЭВМ заключает также договоры на проведение консультаций.

Заявки с указанием специализации набора и количества слушателей высылать по адресу: 220080, Минск, БГУ им. В. И. Ленина, ФПК по прикладной математике и ЭВМ. Тел. 20-60-46.

Деканат