

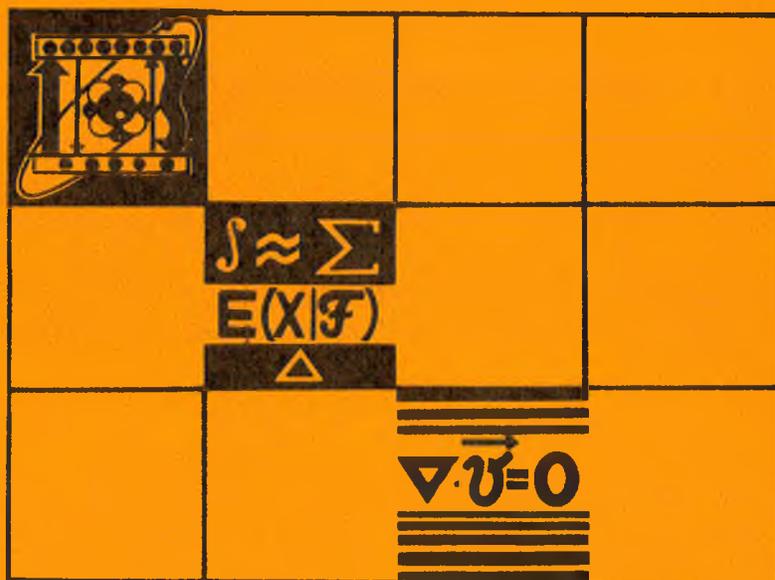
# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Механика

2 '91



# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

Барковский Л. М., Фо Тхи Нгуен Ханг (СРВ). Потоки энергии и тензорные импедансы на границах раздела анизотропных сред . . . . .	3
Сирота Н. Н. Третий закон термодинамики. I. . . . .	6
Титов А. Д. Осевая сила света зеркальных уголковых отражателей . . . . .	13
Гулис И. М., Комяк А. И., Миксюк Ю. И., Цвирко В. А. Пикосекундная стадия фотопротолитической реакции в протонных растворителях: модель, неэкспоненциальность, температурная зависимость . . . . .	16
Могильный В. В., Сидоренко М. М., Станкевич А. И. Усиление оптической записи в антраценсодержащих полимерных слоях . . . . .	21
Казаченко Л. П. К вопросу о содержании транс-, цис-конформаций галогенпроизводных бензальдегида в растворах $CCl_4$ . . . . .	24
Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр (САР). Составляющие диэлектрической проницаемости хромозамещенных ферритов железа . . . . .	28
Шепелевич В. Г. Структура и электрические свойства быстрозакаленных из расплава фольг сплавов сурьма-мышьяк . . . . .	31
Прокошин В. И., Ярмолевич В. А., Андарало Л. А., Рабкевич Т. М. Исследование плоских концентраторов магнитного потока для преобразователей Холла . . . . .	33
Бринкевич Д. И., Нассур Ф. (САР), Петров В. В., Чесноков С. А. Закалочные дефекты в кремнии, легированном акцепторными примесями III группы . . . . .	38

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Прусов И. А., Василевич Ю. В. Новое представление общих формул теории упругости ортотропного тела, подверженного действию нормальной нагрузки . . . . .	42
Рогозин С. В., Ле Маю Хай (СРВ). Продолжение голоморфных и мероморфных отображений со значениями в локально-выпуклом пространстве . . . . .	46
Сетько Е. А. Римановы поверхности правильных <i>bn</i> -угольников . . . . .	49
Хацкевич Г. А., Пономаренко А. В. Обнаружение неоднородностей регрессионных моделей по зависимым выборочным данным . . . . .	53
Мохамед Гхазал (Египет), Труш Н. Н. Статистические свойства расширенной периодограммы . . . . .	58
Кирица В. П. Точные <i>D</i> -оптимальные планы для линии регрессии с неравноточными наблюдениями . . . . .	62
Джебран Дж. (САР). Минимаксно-модульные задачи кусочно-линейного программирования . . . . .	65
Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратичных функций . . . . .	67

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Белявский А. К., Данейко И. К. К вопросу о волновом решении уравнения Гельмгольца в нестратифицированном волноводе . . . . .	71
Тагайназаров С. Критерий оптимальности и субоптимальности в одной специальной задаче линейного программирования . . . . .	73
Ровба Е. А. Интерполяционные рациональные функции типа Фейера — Бернштейна . . . . .	75

## ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Василий Иванович Ведерников</span> . . . . .	78
---	----

---

# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года  
один раз в четыре месяца

---

**СЕРИЯ 1**

**Физика  
Математика  
Механика**

**2'91**

**МАЙ**



МИНСК  
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ

*Главный редактор В. Г. РУДЬ*  
*Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ*

**Редакционная коллегия серии:**

*А. И. КОМЯК (ответственный редактор),*  
*Л. М. БАРКОВСКИЙ, (зам. ответственного редактора),*  
*В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), А. М. БЕЛЬ-*  
*СКИЙ (ответственный секретарь), Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГА-*  
*БАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕ-*  
*РОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕ-*  
*ШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ,*  
*В. И. МИРОНЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ,*  
*А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ,*  
*Н. И. ЮРЧУК*

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В. И. ЛЕНИНА

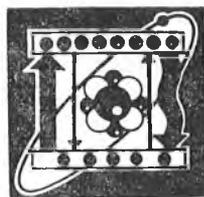
Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2

*Редактор А. И. Гуторова*  
*Младший редактор Г. М. Добычи*  
*Художественный редактор Д. Е. Дивин*  
*Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 21.03.91. Подписано в печать 20.05.91. Формат 70×108<sup>1/16</sup>.  
Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7.0. Усл. кр.-отт. 7.52.  
Уч.-изд. л. 7.28. Тираж 690 экз. Заказ 150. Цена 1 р.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11.  
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП  
Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 535

Л. М. БАРКОВСКИЙ, ФО ТХИ НГУЕТ ХАНГ (СРВ)

## ПОТОКИ ЭНЕРГИИ И ТЕНЗОРНЫЕ ИМПЕДАНСЫ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В ковариантной теории распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных и гиротропных средах существенную роль играют тензоры импедансов (характеристических и поверхностных) [1—3]. С их помощью находятся френелевские тензоры отражения и пропускания дискретных и непрерывных многокомпонентных систем со слоистой структурой, а также с произвольными ориентациями границ раздела [1, 2, 4]. В [5, 6] были также использованы операторы относительных импедансов, с помощью которых была найдена компактная экспоненциальная форма представления френелевских тензоров. В [1—5] поляризация волн и операторы преобразования амплитуд на границах описываются тензорами, т. е. единообразно. Широко использовался тензор когерентности  $\Phi = \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \rangle$  (тензор пучка [7]) для описания поляризационных состояний магнитного поля в кристаллах. Этот тензор аналогичен матрице плотности, применяемой для описания спиновых состояний в квантовой механике. В работах [1, 2, 4] основное внимание уделялось расчету тензоров отражения и пропускания слоистых систем без детального анализа эволюции лучей в них. Для проведения такого анализа необходимо иметь достаточно общую компактную формулу, связывающую векторы потоков энергии с тензорами когерентности  $\Phi$  и импедансов  $\gamma$ . В настоящем сообщении мы приводим такую формулу для гидроанизотропных сред с естественной и собственной гиротропией. Мы основываемся здесь на уравнениях связи и математическом аппарате описания оптической анизотропии и гиротропии кристаллов, предложенных Ф. И. Федоровым в [7].

Для монохроматических плоских волн, распространяющихся в однородных анизотропных и гиротропных средах, уравнения Максвелла и материальные уравнения записываются в виде [7]:

$$\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{H}}{dz} - ik\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{E}}{dz} + ik\mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E} + i\alpha_1 \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} + i\beta_1 \mathbf{E}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы напряженности и индукции электрического и магнитного полей соответственно,  $z = r\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{n}$  ( $n^2 = 1$ ) — фиксированный комплексный вектор,  $\mathbf{n} \times$  — антисимметричный тензор, дуальный вектору  $\mathbf{n}$ . Для однородных волн вектор  $\mathbf{n}$  вещественный и совпадает с направлением фазовой нормали. В общем случае  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  — комплексные несимметричные тензоры, являющиеся функциями от тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей и тензора гирации. Уравнения связи (2) описывают анизотропную среду, обладающую как естественной, так и собственной гиро-

тропией [7]. Будем исходить из локальной связи между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  [1, 3]:

$$[\mathbf{nE}] = \gamma \mathbf{H}, \quad (3)$$

здесь  $\gamma$  — тензор импеданса. Из уравнения (1) видно, что  $\mathbf{nD} = 0$ . Умножая (3) слева на  $(\mathbf{n}\varepsilon_1)^\times$  и учитывая последнее, получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathbf{n}\varepsilon_1\mathbf{n}} \{i\mathbf{n}\alpha_1\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{n}\varepsilon_1)^\times \gamma \mathbf{H}\}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в выражение для вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]\}, \quad (5)$$

получим

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi\mathbf{n}\varepsilon_1\mathbf{n}} \{[(\gamma\Phi)_t - \gamma\Phi] \mathbf{n}\varepsilon_1 + i\mathbf{n}\alpha_1\Phi\mathbf{n}^\times\} + \text{к. с.}, \quad (6)$$

где  $\Phi = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$  — тензор пучка (тензор поляризации).  $(\gamma\Phi)_t$  в (6) обозначает след тензора  $\gamma\Phi$ . Аббревиатура к. с. обозначает слагаемое, комплексно сопряженное к слагаемому, приведенному в (6) первым. Явный вид операторов  $\gamma$  рассматривался в работах [3]. Ковариантная формула (6) связывает средний поток энергии  $\mathbf{S}$  с тензорами  $\gamma$  и  $\Phi$  плоскостного электромагнитного поля в любой среде с общими уравнениями связи (2). Характерной особенностью оптической анизотропии и гиротропии является то, что их можно трактовать как своеобразный тип поляризационной дисперсии волн [8]. Для каждого  $\mathbf{n}$ , как правило, существуют только два состояния поляризации, которые переносятся в среде неизменными, т. е. являются устойчивыми. Все остальные поляризации, характеризующиеся тензорами  $\Phi$ , непрерывно трансформируются в процессе распространения. Они разлагаются на указанные два типа собственных состояний поляризаций, распространяющихся с различными скоростями. С другой стороны, тензор  $\gamma$  в (6) зависит от  $\mathbf{n}$  и тензоров материальных констант. Его спектральные формы с использованием поляризационных проекторов рассмотрены в [3]. В прозрачных средах только для некоторых двух независимых состояний  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  ( $\Phi_+\Phi_- = 0$ ) будут выполняться условия коммутации  $\gamma\Phi = \Phi\gamma$ . При этом (6) дадут устойчивые направления потоков энергии (лучей) изонормальных волн. Как  $\mathbf{S}$  так и  $\Phi$  являются квадратичными функциями векторов электромагнитного поля и в отличие от последних характеризуют непосредственно наблюдаемые величины.

Для собственно гиротропных сред в (2) имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon + ia^\times = \varepsilon_1^+, \\ \mu_1 = \mu + ib^\times = \mu_1^+, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — вещественные векторы гирации,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^+$  — условие самосопряженности. Тогда (6) упрощается

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} \{(\gamma\Phi)_t - \gamma\Phi\} \frac{\mathbf{n}\varepsilon_1}{\mathbf{n}\varepsilon_1\mathbf{n}} + \text{к. с.} \quad (8)$$

В данном случае [1]:

$$\begin{aligned} \gamma = -\frac{1}{n_+ + n_-} \left( \frac{\mathbf{n}^\times \widetilde{\mu}_1 \mathbf{n}^\times}{\mathbf{n}\mu_1\mathbf{n}} + n_+ n_- \mathbf{n}^\times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{n}^\times \right), \\ \Phi = c_+ \tau_+ + c_- \tau_-, \quad c_\pm = |H_\pm|^2, \\ \tau_\pm = \pm \left( \frac{1}{n_+^2} - \frac{1}{n_-^2} \right)^{-1} \mathbf{n}^\times \left( \frac{1}{n_\pm^2} + \mu_1^{-1} \mathbf{n}^\times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{n}^\times \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь черта над буквой обозначает взаимный тензор,  $n_\pm$  — показатели преломления двух изонормальных волн. Из (8) видно, что если волна

распространяется вдоль одного из собственных векторов тензора  $\epsilon_1$ , имеем

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [(\gamma\Phi)_l] \mathbf{n}, \quad (10)$$

где  $\operatorname{Re}$  обозначает действительную часть тензора. Для немагнитной среды подставим (9) в (8), после несложных преобразований получим

$$\mathbf{S}_{\pm} = \frac{c}{8\pi} \times \frac{c_{\pm} n_{\pm}}{\frac{1}{n_{\pm}^2} - \frac{1}{n_{\pm}^2}} \left\{ \frac{1}{n_{\pm}^2} (\operatorname{Re} \epsilon_1^{-1} - \epsilon_{1l}^{-1}) + \operatorname{Re} \epsilon_1^{-1} + n \overline{\epsilon_1^{-1}} \mathbf{n} \right\} \mathbf{n}. \quad (11)$$

(11) эквивалента формуле для вектора лучевой рефракции, полученной в [9].

Из (8) находим нормальную составляющую вектора Пойнтинга

$$S_n = \mathbf{S} \mathbf{n} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [(\gamma\Phi)_l]. \quad (12)$$

Легко показать, что из (12) вытекает формула, полученная Стрэттоном для изотропных сред [10].

Соотношения (8), (11) позволяют сформулировать лучевой закон Снелла для плоской границы раздела любых линейных однородных анизотропных и гиротропных сред.

В ковариантной форме геометрические законы отражения и преломления для границы двух произвольных анизотропных сред записываются в виде [7, 11]:

$$[\mathbf{m}_1 \mathbf{q}] = [\mathbf{m}_2 \mathbf{q}] = [\mathbf{m}_3 \mathbf{q}] = \dots = \mathbf{a}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3 \dots$  — векторы рефракции всех входящих и уходящих волн на данной плоскости раздела;  $\mathbf{q}$  — единичный вектор нормали к плоскости раздела, направленный во вторую среду. Для векторов рефракции имеем следующие соотношения [7, 11]:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{b} + \eta_i \mathbf{q}, \quad \eta_i = \pm \sqrt{m_i^2 - a^2}, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{q} \mathbf{a}]. \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{b}$  — тангенциальная составляющая векторов рефракции.

В собственных гироанизотропных средах поток энергии можем записать в следующем (см. 11) виде:

$$\mathbf{S}_{\pm} = X_{\pm} \mathbf{m}_{\pm}, \quad (15)$$

где

$$X_{\pm} = \frac{c}{8\pi} \frac{c_{\pm}}{\frac{1}{n_{\pm}^2} - \frac{1}{n_{\pm}^2}} \left\{ \frac{1}{n_{\pm}^2} (\operatorname{Re} \epsilon_1^{-1} - \epsilon_{1l}^{-1}) + \operatorname{Re} \epsilon_1^{-1} + n \overline{\epsilon_1^{-1}} \mathbf{n} \right\}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что  $X_{\pm}$  — симметричные тензоры. Как показано в [12], для таких тензоров справедливо равенство:

$$X_{\pm} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = [X_{\pm} \mathbf{a}, X_{\pm} \mathbf{b}]. \quad (17)$$

Пусть из гироанизотропной среды на границу падает одна из изонормальных волн, например, волна, вектор рефракции которой равен  $\mathbf{m}_{+} = n_{+} \mathbf{n}$ . Умножая векторные соотношения (13) на тензор  $X_{+}$  слева и используя (17), получим

$$[X_{+} \mathbf{m}_{+}, X_{+} \mathbf{q}] = [X_{+} \mathbf{m}_{++}^R, X_{+} \mathbf{q}] = X_{+} \mathbf{a}. \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{m}_{+}, \mathbf{m}_{++}^R$  — векторы рефракции падающей и отраженной волн. Если разделить соотношения (18) на  $\frac{1}{\sqrt{q X_{+}^2 q}}$  и ввести обозначения

$$\mathbf{q}' = \frac{X_{+} \mathbf{q}}{\sqrt{q X_{+}^2 q}}, \quad \mathbf{a}' = \frac{X_{+} \mathbf{a}}{\sqrt{q X_{+}^2 q}}, \quad \mathbf{q}'^2 = 1, \quad \mathbf{q}' \mathbf{a}' = 0, \quad (19)$$

то получим

$$[\mathbf{S}_{+}, \mathbf{q}'] = [\mathbf{S}_{++}^R, \mathbf{q}'] = \mathbf{a}'. \quad (20)$$

Из (20) следует, что векторы  $S_+$ ,  $S_{++}^R$  падающего и отраженного лучей и  $q'$  лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $a'$ .

Умножив (20) векторно на  $q'$ , нетрудно получить соотношение

$$S_+ - \xi_+ q' = S_{++}^R - \xi_{++} q' = b', \quad (21)$$

где

$$\xi_+ = q' S_+, \quad \xi_{++} = q' S_{++}^R, \quad b' = [q' a']. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$S_+ = b' + \xi_+ q', \quad S_{++}^R = b' + \xi_{++} q', \quad (23)$$

$$\xi_+ = \pm \sqrt{S_+^2 - a'^2}, \quad \xi_{++} = \pm \sqrt{S_{++}^{R2} - a'^2}.$$

Как видим, вектор  $q'$  образует с вектором  $q$  угол  $\alpha$ , косинус которого равен

$$\cos(\widehat{q, q'}) = \cos \alpha = \frac{q X_+ q}{\sqrt{q X_+^2 q}}. \quad (24)$$

Выражения (20), (23) аналогичны соответствующим выражениям для векторов рефракции (13), (14). Подобные соотношения в частном случае одноосных сред рассмотрены в [12, 13].

### Список литературы

1. Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Оптика и спектроскопия. 1975. Т. 39. № 1. С. 150.
2. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Lavrinenko A. V. // Journ. Phys. Ser. A: Math. Gen. 1987. V. 20. № 5. P. 1095.
3. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 4. С. 305.
4. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Камач Ю. Э., Козловский Е. Н., Овчинников В. М. // ОМП. 1980. № 8. С. 4.
5. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1978. Т. 23. № 6. С. 1145.
6. Барковский Л. М., Фохти Нгует Ханг // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 6. С. 523.
7. Федоров Ф. И. Теория гиротронии. М., 1976.
8. Barkovskii L. M., Borzdov G. N., Fedorov F. I. // Journ. Mod. Opt. 1990. V. 37. № 1. P. 85.
9. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1973. Т. 18. № 3. С. 465.
10. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М., 1948.
11. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. М., 1958.
12. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. М., 1978.
13. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. // Кристаллография. 1971. Т. 16. Вып. 1. С. 36.

Поступила в редакцию 27.02.91.

УДК 536

Н. Н. СИРОТА

### ТРЕТИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. I.

Современная термодинамика базируется на четырех основных законах: нулевом; первом — законе сохранения энергии и вещества; втором, определяющем температуру и направление термодинамических процессов, и третьем, характеризующем термодинамические свойства вещества вблизи абсолютного нуля температуры.

Третий закон термодинамики занимает особое место среди остальных ее законов. С одной стороны, его можно рассматривать как следствие первых двух (поэтому часто отождествляют с названием «Теорема Нернста»\*), но, с другой стороны, при более внимательном анализе он, вы-

\* Вначале Нернст ввел название «Тепловая теорема» (Wärme Theorem) не называя ее законом [1].

ступая независимым законом, позволяет не только обосновать начальную точку отсчета (абсолютный нуль, введенный как следствие второго закона) в температурном изменении свойств, но и количественно вскрыть многочисленные особенности поведения веществ при температурах, близких к абсолютному нулю. К числу важнейших утверждений третьего закона относятся требования устремления к нулю первых и вторых производных свободных энергий Гельмгольца и Гиббса, наличие общей касательной к  $\frac{\partial U}{\partial T}$  и  $\frac{\partial F}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial T}$  и  $\frac{\partial G}{\partial T}$ , параллельной оси температур, при  $T \rightarrow 0$ . Третий закон термодинамики позволяет с особой отчетливостью выявить роль времени в термодинамике и его меру.

Термодинамика устанавливает функциональные соотношения между термодинамическими величинами, характеризующими вещество или физико-химическую систему, при вариации внешних условий, используя понятие обобщенных сил ( $X_1, \dots, X_i$ , например, температура, давление, напряженности магнитного  $H$ , электрического  $E$  и других полей), действующих на систему, и обобщенных координат ( $x_1, \dots, x_i$ , например, объем  $V$ , электрическая  $D$  и магнитная  $B$  индукции и др.).

Остановимся кратко на характеристиках законов (начал) термодинамики. Нулевому закону соответствует утверждение, что в условиях равновесия в термодинамической системе во всех ее частях, в т. ч. во всех ее фазах, если эта система гетерогенная, температура одинакова:  $T_1 = T_2 = \dots = T_i = T$ . Подобный вывод в равной мере должен относиться и ко всем обобщенным силам, поскольку они действуют одинаково на систему в целом и ее части. Однако существуют известные ограничения нулевого закона и требуется его уточнение в системах, где наряду с «нормальными» фазами существуют «сверхфазы» [3].

Согласно первому закону термодинамики, в равновесной системе алгебраическая сумма поступающего в нее количества тепловой энергии  $\delta Q$ , изменения внутренней энергии  $dU$ , совершаемой системой элементарной работы всех видов  $\delta A$ , а также изменения приведенной массы системы  $c^2 dm$  равны нулю:

$$\delta Q - dU - \delta A - c^2 dm = 0.$$

Элементарная работа системы равна сумме произведений обобщенных сил на изменение сопряженных обобщенных координат:

$$\delta A = \sum_i X_i dx_i.$$

В частном случае при постоянстве обобщенной силы (одна обобщенная сила) в условиях равновесия

$$\delta Q = d(U + Xx) = dH.$$

При постоянстве внутренней энергии и вариации лишь сопряженных обобщенной силы и координаты

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_x dX + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_X dx = x dX + X dx.$$

Второй закон термодинамики утверждает, что в равновесных условиях система как целое не может совершать работу, если отсутствует другая система или другое состояние данной системы с более низким термодинамическим потенциалом, соответствующим рассматриваемым условиям.

В соответствии с третьим законом термодинамики при приближении температуры к абсолютному нулю величины свободной энергии Гельмгольца и Гиббса приближаются к величинам внутренней энергии  $U_{T \rightarrow 0} \rightarrow U_0$  и энтальпии  $H_{T \rightarrow 0} \rightarrow H_0$  соответственно; энтропия стремится к ее нулевому значению  $S_{T \rightarrow 0} \rightarrow S_0$ , теплоемкости — к нулю ( $c_{x_{T \rightarrow 0}} \rightarrow 0$ ,  $c_{x_{T \rightarrow 0}} \rightarrow 0$ ).

Производные по температуре всех термодинамических потенциалов стремятся к нулю.

Согласно тепловой теореме, при  $T \rightarrow 0$   $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{T \rightarrow 0} \rightarrow 0$  и  $A_{T \rightarrow 0} \rightarrow 0$ . Как замечает А. Зоммерфельд [4], В. Нернст «странным образом не любил понятия «энтропия», предпочитая ему «максимальная работа», служащая мерой «химического сродства». В отличие от представлений Бертелло, максимальная работа  $A$  изотермического процесса (при  $T \neq 0$ ) при постоянном объеме не равна теплоте процесса  $(A)_V \neq \Delta U$ , однако при понижении температуры это различие уменьшается и в пределе при  $T \rightarrow 0$  и  $V = \text{const}$   $\Delta U$  становится равной максимальной работе  $A_{\text{max}}$ . Зоммерфельд приводит слова Нернста [5]: «Тот факт, что на опыте разность между  $A$  и  $\Delta U$  очень мала, навел меня на мысль, что здесь мы имеем дело с некоторым предельным законом, согласно которому величины  $A$  и  $\Delta U$  не только равны друг другу при  $T=0$ , но и асимптотически стремятся друг к другу при  $T \rightarrow 0$ , следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{dA}{dT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{dU}{dT} \rightarrow 0.$$

Приведенная мысль, отмечает А. Зоммерфельд, дает представление о происхождении «гениальнейшего расширения термодинамики, достигнутого в нашем столетии».

Из уравнения Гиббса — Гельмгольца для свободной энергии Гельмгольца  $F = U + T \frac{\partial F}{\partial T}$  следует, что при  $T \rightarrow 0$   $F - U = 0$  и  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\frac{F - U}{T} = \frac{0}{0}$ . Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, находим:

$$-\left[\frac{\partial(F - U)}{\partial T}\right] = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{VT=0} = 0,$$

т. е. при  $T=0$

$$c_V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}\right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = 0, \text{ при } T \rightarrow 0, c_V \rightarrow 0.$$

Аналогично, из уравнения Гиббса — Гельмгольца для свободной энергии Гиббса  $\frac{G - H}{T} = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$  при  $T \rightarrow 0$ ,  $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = c_p \rightarrow 0$ . Так как  $S = S_0 + \int_0^T \frac{c_p}{T} dT$ , то при  $T \rightarrow 0$   $S \rightarrow S_0$ . Приведенные выражения не исчерпыва-

ют всей сущности третьего закона термодинамики и его доказательства, в частности остается открытым вопрос о величине  $S_0$  — энтропии системы при абсолютном нуле температуры.

Отметим существующие важнейшие представления о величине  $S_0$ . М. Планк [6] считал, что предельную величину  $S_0$  можно положить равной нулю, поскольку, по его мнению, для всех тел, находящихся в равновесии, она является одинаковой постоянной величиной. С учетом высказанного положения, третий закон термодинамики приобретает формулировку: «При приближении к абсолютному нулю температуры энтропия вещества стремится к постоянному значению  $S_0$ , не зависящему от температуры, давления, агрегатного состояния» (М. Планк).

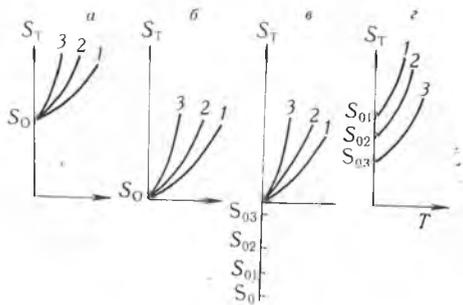
Принимая во внимание, что неупорядоченность обуславливает конечное значение энтропии, М. Планк приводит и более узкую формулировку третьего начала: «Энтропия всякого тела, имеющего конечный объем и состоящего исключительно из одинаковых составных частей, при неограниченном убывании температуры стремится к нулю».

Из приведенной формулировки видно, что она не обладает необходимой для закона общностью. Утвердившаяся точка зрения М. Планка позволила большинству исследователей считать, что существуют тела нернстовские, для которых справедлив третий закон термодинамики, и ненернстовские, для которых он не соблюдается.

Майер и Гепперт-Майер отмечали [7], что трудности, содержащиеся в формулировке третьего начала, заключаются в требовании полного

Зависимость полной ( $S = S_0 + S_T$ ) и температурно-зависящей ( $S_T$ ) энтропии от температуры:

*a* — у всех тел (1, 2, 3) энтропии  $S_0$  имеют конечные и равные значения, отсчет ведется от  $S_0 + S_T = 0$ ; *б* — у всех тел  $S_0 = 0$ ; *в* — для разных тел  $S_0$  различные, отсчет  $S_T$  ведется от нуля при  $T = 0$ ; *г* — для разных тел  $S_0$  различные, но отсчет ведется от  $S_0 + S_T$  при  $T = 0$



равновесия для достижения состояния с нулевой энтропией. Это их утверждение означает, однако, что для тел, не находящихся в термодинамическом равновесии, третий закон термодинамики не выполняется.

Так как большинство реальных тел находится в состоянии, которое отличается от идеального равновесного состояния, то, исходя из формулировок Планка и Майера — Гепперта-Майера, можно предположить, что все реальные тела являются ненернстовскими, для которых третий закон термодинамики не справедлив. Едва ли с этим можно согласиться.

Статистико-термодинамическое доказательство третьего закона термодинамики базируется на теореме Больцмана в форме, признанной Планком, согласно которой энтропия системы пропорциональна логарифму вероятности ее термодинамического состояния:

$$S = k \ln W_T.$$

При наличии нескольких близких уровней с вероятностью  $\omega_i$ :

$$S = k \sum_i \omega_i \ln W_{Ti}.$$

Если система при  $T=0$  находится на самом низком энергетическом уровне при невырожденном состоянии, то  $W_T=1$ ,  $S_0=0$ , что соответствует третьему закону термодинамики в формулировке Планка.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц полагали, что «при абсолютном нуле любая часть тела должна находиться в одном определенном (основном) квантовом состоянии, другими словами, статистические веса этих частей равны единице, а потому равно единице и их произведение, т. е. статистический вес макроскопического состояния тела в целом» [8].

В случае вырожденного состояния, соответствующего низшему энергетическому уровню при абсолютном нуле температуры, его термодинамическая вероятность  $W_T > 0$  и соответственно  $S_0 > 0$ .

Так как при  $T \rightarrow 0$  величина  $S_0$  становится не зависящей от температуры при различных значениях внешних параметров — давления, напряженности магнитного и электрического полей, то

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V, T \rightarrow 0} \rightarrow 0, \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p, T \rightarrow 0} \rightarrow 0, \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{H, T \rightarrow 0} \rightarrow 0, \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{E, T \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Следовательно, при  $T \rightarrow 0$   $c_V \rightarrow 0$ ,  $c_p \rightarrow 0$ ,  $c_H \rightarrow 0$ ,  $c_E \rightarrow 0$ .

Вопрос о значении  $S_0$  при  $T=0$  нельзя считать решенным окончательно. Но в отличие от распространенной точки зрения есть все основания полагать, что третий закон термодинамики требует при  $T=0$  равенства нулю лишь температурно-зависимой части энтропии  $S_T$ , т. е.

$$\lim_{T \rightarrow 0} (S - S_0) = \lim_{T \rightarrow 0} S_T \rightarrow 0,$$

что находится в согласии с больцмановским выражением

$$S_T = S - S_0 = k \ln \frac{W_T}{W_0},$$

если не оценивать температурно-независимую часть  $S_0 = k \ln W_0$ .

На рисунке показаны четыре возможных варианта начального отсчета изменения энтропии  $S_T$  в функции температуры.

Варианты *a* и *b* не являются общими, поскольку нет никаких оснований считать  $S_0$  одинаковыми или равными нулю для всех тел, например, энтропия смешения при абсолютном нуле может быть различной у растворов разных составов. Нереальным является и вариант *г*, рассмотренный, например, М. Клейном [9]. Начало отсчета  $S_T$  в этом случае зависит от параметра системы  $(p, H, E)$ , что противоречит условию нечувствительности начальной точки отсчета при  $T=0$  от внешних факторов. Единственным адекватным реальным вариантом является *в*, при котором возможна известная равновесная конечная нулевая энтропия при абсолютном нуле, не зависящая от температуры.

Абсолютный нуль является, таким образом, для всех веществ общим началом отсчета изменения температурно-зависимой части энтропии в функции от температуры. Этим снимается ряд вопросов, связанных с проблемой неравновесных, метастабильных фаз, для которых третий закон термодинамики справедлив, если в них при  $T \rightarrow 0$  не происходят какие-либо переходы в более равновесное состояние.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц считали [8], что «теорема Нернста является следствием квантовой статистики, в которой существенную роль играет понятие о дискретных квантовых состояниях. Она не может быть доказана в чисто классической статистике, в которой энтропия вообще определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной». Заметим, что наряду с рассмотрением дискретности квантовых состояний существенным элементом, который вносит квантовая механика в проблему доказательства третьего закона термодинамики, является введение представления о нулевой энергии  $E_{00}$  динамических процессов в веществе при абсолютном нуле температуры и определении ее величины.

Квантово-механическое обоснование третьего закона термодинамики может базироваться на квантовой теории теплоемкости твердых тел.

Согласно квантовой теории, внутренняя энергия моля твердого тела, обусловленная колебаниями атомов, при фононном спектре с плотностью состояний  $g(\nu) = dz/d\nu$  имеет вид:

$$U_T = U_{00} + \int_0^{\nu_m} g(\nu) \bar{\varepsilon}(\nu) d\nu,$$

где  $U_{00}$  — энергия атомизаций вещества при абсолютном нуле температуры в системе покоящихся атомов;  $\bar{\varepsilon}(\nu)$  — средняя энергия осцилляторов при температуре  $T$ ,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0(f_T + f_0)$ ,  $\varepsilon_0 = h\nu$ ,  $f_T$ ,  $f_0$  — температурно-зависимая и -независимая части вероятности возбуждения степени свободы:

$$f_T = \frac{p}{1+p} = \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{1 - e^{-\varepsilon/kT}} = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}, \quad f_0 = \frac{1}{2},$$

$\nu_m$  — максимально возможная частота осцилляторов.

Считая, что  $g(\nu)$  слабо зависит от температуры при  $V = \text{const}$ , и пренебрегая этой зависимостью, можно записать:

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \int_0^{\nu_m} g(\nu) \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} d\nu.$$

Поскольку при  $T \rightarrow 0$   $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = \frac{d}{dT} \left[ \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} + \frac{1}{2} \right] \varepsilon_0 \rightarrow 0$ , то теплоемкость

$c_V$  стремится к нулю. В частности, если положить, что при низких температурах теплоемкость описывается степенным законом с показателем степени  $n$

$$c_V \approx a \left( \frac{T}{\Theta} \right)^n,$$

что вытекает из теории Дебая и теории теплоемкости решетки твердых тел с анизотропными структурами Сироты — Тарасова (цепочечными

( $n=1$ ), слоистыми ( $n=2$ ), трехмерными ( $n=3$ )), то для всех  $n \geq 1$  при  $T \rightarrow 0$   $c_V \rightarrow 0$ .

Так как  $S_{VT} \simeq S_0 + \frac{a}{\theta^n} \int_0^T \frac{T^n}{T} dT$ , то при  $T \rightarrow 0$   $S_{VT \rightarrow 0} \rightarrow S_0$ .

Согласно электронной теории металлов, температурная зависимость электронной теплоемкости (при постоянной концентрации  $\rho$  газа квазисвободных электронов в металле) пропорциональна первой степени температуры:

$$c_{V, \text{эл.}} \approx \gamma T, \quad S_{V, \text{эл.}} \approx \gamma T + S_0, \quad \gamma \approx \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m_{\text{эл.}} \cdot N}{\hbar^2} \rho^{2/3}.$$

Следовательно, при  $T \rightarrow 0$   $c_{\text{эл.}} \rightarrow 0$ ,  $S_{V, \text{эл.}} \rightarrow S_0$ .

Рассмотренные примеры находятся в соответствии с теоремой Больцмана  $S - S_0 = k \ln(W_T/W_0)$ , когда при  $T \rightarrow 0$   $W_T \rightarrow W_0$ . В случае невырожденных систем, для которых  $W_0 = 1$ ,  $W_T \rightarrow 1$  и  $S_0 \rightarrow 0$ .

Однако вопрос об условиях вырождения нижнего энергетического уровня при абсолютном нуле температуры остается открытым. Более общий случай, когда  $W_{T, T \rightarrow 0} \rightarrow \text{const} > 0$ , исключать нельзя, исходя только из общих соображений, или ограничиваться постулированным. Проблемы обоснования и формулировок третьего закона термодинамики обсуждены и в ряде других работ, например, [10—15].

#### Следствия третьего закона термодинамики.

При их рассмотрении будем исходить из условия, что при  $T \rightarrow 0$  температурно-зависимая часть энтропии  $S_T$ , а также термические коэффициенты обобщенных координат стремятся к нулю.

Исходя из выражения для разности энтропий системы при постоянстве обобщенной силы  $X$

$$-\left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_X = \Delta S_X = (S - S_0)_X = \int_0^T \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T}\right)_X dT,$$

ее производную по  $X$  можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \Delta G}{\partial T \cdot \partial X} = \frac{\partial \Delta S}{\partial X} = \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{XT} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_X dT.$$

Интеграл правой части равен разности производных по температуре обобщенных координат при температурах  $T$  и абсолютном нуле:

$$\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{XT} = \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{XT} - \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{X(T=0)}.$$

Из этого следует, что

$$\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{X(T=0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial T}\right)_{X(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0.$$

При  $X = H$ ,  $x = V \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial T}\right)_{p(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$ ;

$X = p$ ,  $x = B \left(\frac{\partial \Delta B}{\partial T}\right)_{H(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$ ;  $\left(\frac{\partial \Delta M}{\partial T}\right)_{H(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$ , т. к.  $B = H + 4\pi M$ ;

$X = E$ ,  $x = D \left(\frac{\partial \Delta D}{\partial T}\right)_{E(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$ ;  $\left(\frac{\partial \Delta P}{\partial T}\right)_{E(T \rightarrow 0)} \rightarrow 0$ , ибо  $D = E + 4\pi P$ .

Производные энтропии по температуре при постоянной обобщенной силе, равные отношению соответствующих теплоемкостей к температуре, при приближении к абсолютному нулю снижаются до нуля

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X(T \rightarrow 0)} = \left(\frac{c_X}{T}\right)_{T \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

**Детерминант термодинамической устойчивости вблизи абсолютного нуля.** Отношение теплоемкости к температуре при постоянстве обобщенной силы —  $c_X/T$ , термические коэффициенты обобщенных координат

являются элементами детерминанта термодинамической неустойчивости  $D_{ny}$  или обратными величинами коэффициентов детерминанта  $D_y$  термодинамической устойчивости системы. Поскольку при  $T \rightarrow 0$   $c_X/T \rightarrow 0$ , то при приближении температуры к нулю

$$D_{ny} = \begin{vmatrix} \frac{c_X}{T} & \beta_{XX} \\ \beta_{XX} & \kappa_{XX} \end{vmatrix} \rightarrow 0,$$

где  $\beta_X = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 x}{\partial T^2}$ ;  $\kappa_X = -\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial X}$ .

При  $T \rightarrow 0$   $D_{ny}$  становится бесконечно малой величиной, а  $D_y$ , напротив, бесконечно большой. Следовательно, при абсолютном нуле температуры физико-химическая система приобретает предельную термодинамическую устойчивость, при которой вероятность термодинамических флуктуаций снижается до нуля [16].

**Термодинамические коэффициенты обобщенных сил вблизи абсолютного нуля.** Из выражения энтропий при постоянстве обобщенной координаты как производной по температуре свободной энергии Гельмгольца

$$-\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_x = \Delta S_x = (S_T - S_0)_x = \int_0^T \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T}\right)_x dT$$

следует, что ее производная по обобщенной координате равна

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial x}\right)_x = -\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right)_{xT} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right) dT,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right)_{xT} = \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right)_{xT} - \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right)_{x(T=0)},$$

т. е.  $\left(\frac{\partial \Delta X}{\partial T}\right)_{x(T=0)} = 0$ .

Следовательно, все термические коэффициенты обобщенных сил системы (их производные по температуре при постоянстве сопряженных обобщенных координат, например,  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{VT}$ ,  $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{BT}$ ,  $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{DT}$ ) при приближении температуры к абсолютному нулю стремятся к нулю.

### Список литературы

1. Nernst W. // Nachr. KGL. Gess. Iss. Hutingen. Mat. Phys. Kl. 1906 P. 1.
2. Гиббс Д. В. Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики. М., 1946. С. 203.
3. Семенченко В. К. Избр. главы Теоретической физики. 2-е изд. М., 1966. С. 396.
4. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М., 1955. С. 479.
5. Нернст В. Теоретические и опытные основания нового теплового закона. М.; Л., 1929.
6. Планк М. Введение в теоретическую физику. Ч. V. Теория теплоты. М., 1930. С. 222.
7. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика. М., 1980. С. 544.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М., 1976.
9. Клейн М. Термодинамика необратимых процессов. М., 1962.
10. Becker R., Döring W. Ferromagnetismus. Berlin, 1939.
11. Мюнстер А. Химическая термодинамика. М., 1971.
12. Шредингер Э. Статистическая термодинамика. М., 1948.
13. Залевский К. Феноменологическая и статистическая термодинамика. М., 1973.
14. Сирота Н. Н. Термодинамика и статистическая физика. Мн., 1969.
15. Тулупов В. А. // ЖФХ. 1978. Вып. 2. Т. 52. С. 257. См. также дискуссию ЖФХ. 1979. Вып. 2. Т. 53; 1984. Вып. 2. Т. 58; 1985. Вып. 4. Т. 59.
16. Семенченко В. К. // ЖФХ. 1947. Т. 21. С. 1461; 1959. Т. 33. С. 1440; Кристаллография. 1964. Т. 9. № 5. С. 611.

Поступила в редакцию 07.12.90.

## ОСЕВАЯ СИЛА СВЕТА ЗЕРКАЛЬНЫХ УГОЛКОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

Угловые отражатели (УО) в форме трехгранных углов ( $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/s$ ,  $s$  — целые четные числа) обладают свойством возвратного отражения, что позволяет использовать их в задачах, где применяется традиционный прямоугольный УО ( $s=2$ ) [1—3]. В [2] исследована важнейшая энергетическая характеристика — осевая сила света (интенсивность в центре дифракционной картины) призмных УО полного внутреннего отражения (ПВО) и показано, что для фиксированного показателя преломления она тем выше, чем больше число  $s$ . Для расширения углового диапазона возвратного действия отражающие грани призмных УО металлизуют или используют полые УО с зеркальными отражающими гранями [4—6]. УО таких типов незначительно изменяют состояние поляризации падающего на них излучения, однако уступают призмным УО ПВО по доли возвращаемой энергии (коэффициенту отражения). В данной работе исследована осевая сила отраженного света зеркальных УО в зависимости от материала покрытия зеркал и длины волны излучения.

Излучение, отраженное рассматриваемыми УО, представляет собой суперпозицию пространственно разнесенных коллинеарных пучков, каждый из которых соответствует своему способу распространения излучения внутри отражателя и выходит из своего сектора рабочей апертуры [7, 8]. В УО ( $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/s$ ) существует  $2s+2$  способа распространения исходного падающего пучка света, при этом он, испытав  $s+1$ -кратное переотражение от боковых граней, выходит в противоположном направлении.

Считаем, что линейно-поляризованное излучение падает на зеркальный УО в направлении главной оптической оси, составляющей равные углы  $\alpha = \arctg[\cos(\pi/2s)]$  с боковыми ребрами УО. Рабочая апертура, ограниченная вытянутым шестиугольником (правильным шестиугольником при  $s=2$ ) [7], состоит из  $2s+2$  секторов, границы которых совпадают с проекциями ребер УО и их зеркальных изображений в боковых гранях в направлении падающей волны на плоскость, перпендикулярную этому направлению. Для определения хода пучков внутри УО использовалась методика, разработанная в [9]. Комплексные показатели преломления металлов для различных длин волн взяты из [10].

Изменение амплитудно-фазовых характеристик падающей волны зависит от последовательности отражения волн от граней. Поэтому каждый сектор рабочей апертуры УО, работая как отдельный оптический элемент, формирует отраженную волну со своим состоянием поляризации. Для определения комплексных амплитуд поля в плоскости выходного зрачка УО использовался матричный метод Джонса [4, 6, 11]. Действие отражателя в создании поля в дальней зоне обусловлено интерференцией  $2s+2$  отраженных пучков. В соответствии с интегралом, описывающим дифракцию Фраунгофера, интенсивность в центре дифракционной картины определяется выражением [2, 12]:

$$I = \left| \sum_{i=1}^{2s+2} \frac{S_i}{S_0} E_{is}^{\text{вых}} \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^{2s+2} \frac{S_i}{S_0} E_{ip}^{\text{вых}} \right|^2, \quad (1)$$

где  $E_{is}^{\text{вых}}$ ,  $E_{ip}^{\text{вых}}$  — амплитуды ортогональных компонент вектора Джонса волны, выходящей из  $i$ -го сектора рабочей апертуры,  $S_i$  — площадь  $i$ -го сектора рабочей апертуры,  $S_0$  — площадь всей рабочей апертуры УО. Здесь использована нормировка, согласно которой  $I=1$ , если дифракция происходит на отверстии равновеликой площади  $S_0$ .

Линейно-поляризованный падающий свет в общем случае преобразуется в эллиптически поляризованный [7, 8]. При этом осевая сила света (1) не зависит от значений азимута поляризации входного излучения [2]. Зависимости осевой силы света (1) от длины волны в нм для зеркаль-

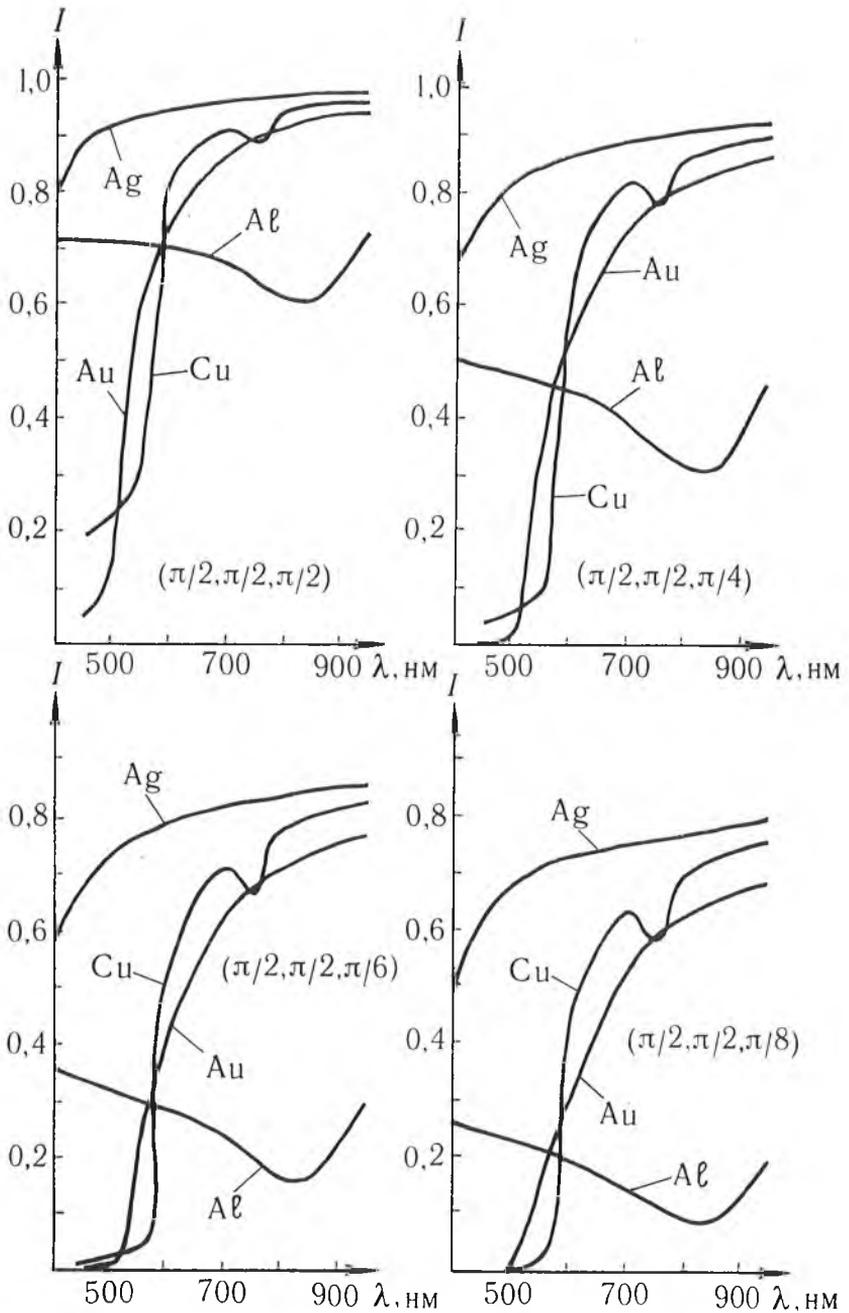


Рис. 1. Зависимости осевой силы выходящего излучения от длины волны входного линейно-поляризованного света

ных УО с  $s=2, 4, 6, 8$ , выполненных из серебра, алюминия, золота и меди, показаны на рис. 1. Из него видно, что с увеличением  $s$  значения осевой силы света уменьшаются, хотя характер зависимостей от длины волны сохраняется. Наилучшим материалом для любых  $s$  и  $\lambda$  является серебро.

Коэффициент отражения для  $i$ -го сектора рабочей апертуры УО определяется по формуле [4]:

$$R = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{\langle E_{is}^{\text{вых}} \rangle^2 + \langle E_{ip}^{\text{вых}} \rangle^2}{\langle E_s^{\text{вх}} \rangle^2 + \langle E_p^{\text{вх}} \rangle^2}, \quad (2)$$

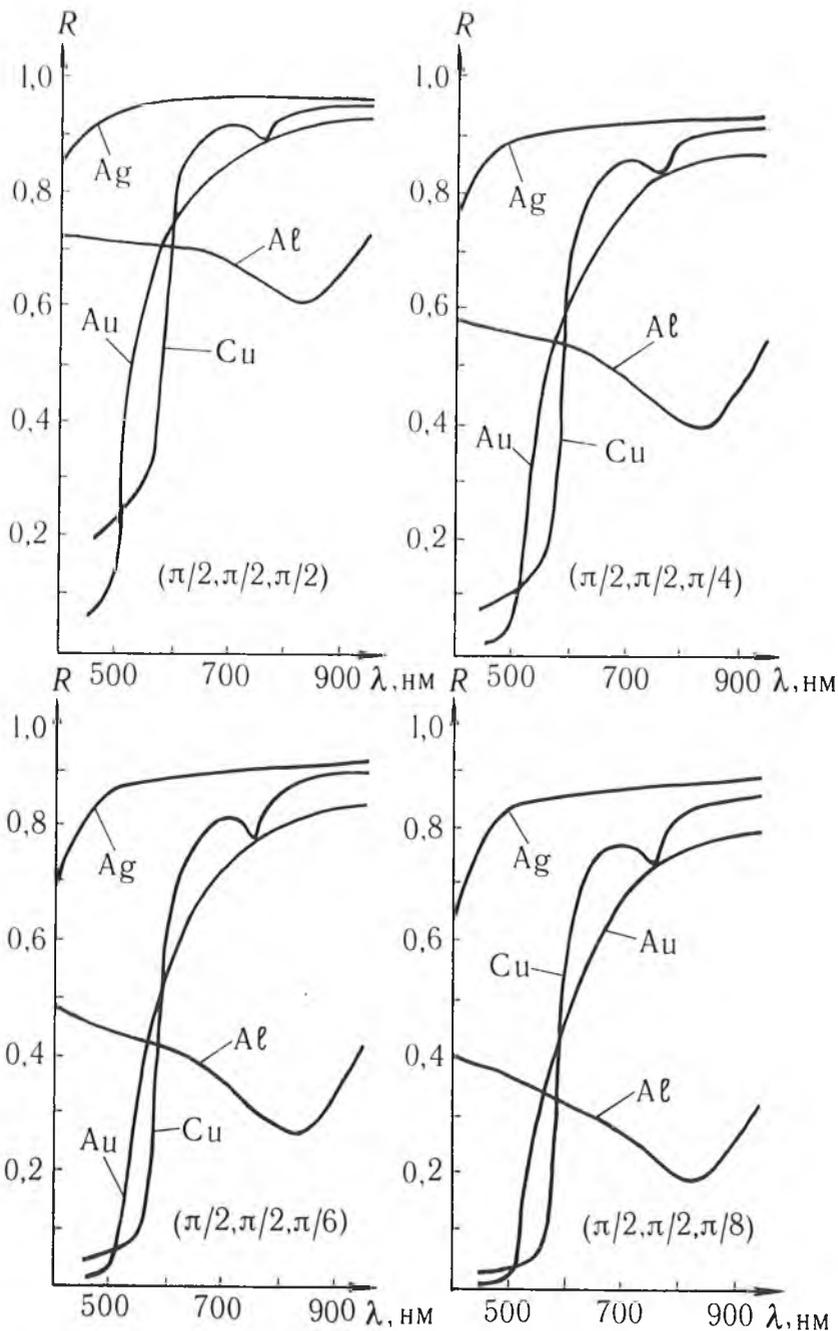


Рис. 2. Зависимости коэффициента отражения от длины волны входного линейно-поляризованного света

где  $I_{\text{вх}}$  и  $I_{\text{вых}}$  — интенсивности входного и выходного пучков света,  $E_s^{\text{вх}}$  и  $E_p^{\text{вх}}$  — амплитуды ортогональных компонент вектора Джонса входного пучка. Сами векторы Джонса в (1) и (2) имеют вид:

$$\vec{E}_{\text{вх}} = \begin{pmatrix} E_s^{\text{вх}} \\ E_p^{\text{вх}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{\text{вх}} \\ \sin \alpha_{\text{вх}} \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_{\text{вых}} = \begin{pmatrix} E_{is}^{\text{вых}} e^{i\delta_{\text{вых}}} \\ E_{ip}^{\text{вых}} \end{pmatrix} = C^{(i)} \vec{E}_{\text{вх}}. \quad (3)$$

Здесь  $\alpha_{\text{вх}}$  — азимут поляризации входного пучка,  $\delta_{\text{вых}} = \delta_{is}^{\text{вых}} - \delta_{ip}^{\text{вых}}$  — сдвиг фазы между  $E_{is}^{\text{вых}}$  и  $E_{ip}^{\text{вых}}$ ,  $C^{(i)}$  — матрица поляризационного действия  $i$ -го сектора рабочей апертуры УО (матрица Джонса), которая по-

лучается в результате перемножения матриц, описывающих поляризационные свойства отдельных граней [7, 8].

На рис. 2 представлены зависимости средних коэффициентов отражения зеркальных УО от длины волны излучения. Усреднение проводилось по азимуту поляризации падающего излучения в каждом из  $2s+2$  вариантов отражения, затем определялся средний коэффициент отражения. Зависимость  $R$  от азимута поляризации падающего излучения невелика. Разброс значений не превышает 4%. Такой же порядок имеет разброс значений в зависимости от варианта отражения. С ростом  $s$  отклонения  $R$  от среднего значения увеличиваются. Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что функциональные зависимости  $R(\lambda)$  и  $I(\lambda)$  схожи между собой.

Таким образом, по энергетическим характеристикам зеркальные УО с  $s \neq 2$  в ряде случаев незначительно уступают традиционному прямоугольному УО. В то же время по надежности работы в случае сборки их в панели и блоки они превосходят прямоугольный отражатель. Отсюда вытекает перспективность использования всего семейства зеркальных УО ( $\pi/2, \pi/2, \pi/s$ ) в оптическом и СВЧ приборостроении.

### Список литературы

1. Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю. / А. с. 1425565 СССР // БИ. 1988. № 35. С. 175.
2. Процко С. В., Титов А. Д. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. № 21. С. 8.
3. Процко С. В., Титов А. Д. // Измерительная техника. 1990. № 4. С. 19.
4. Коротаев В. В., Панков Э. Д. // Оптико-механическая промышленность. 1981. № 1. С. 9.
5. Денисюк Г. В., Корнеев В. И. // Там же. 1982. № 12. С. 1.
6. Ламекин П. И. // Там же. 1988. № 1. С. 14.
7. Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. // Изв. вузов. Приборостроение. 1990. Т. 33. № 3. С. 71; № 4. С. 75.
8. Процко С. В., Титов А. Д. // Оптико-механическая промышленность. 1990. № 6. С. 32.
9. Процко С. В., Титов А. Д. // Изв. вузов. Приборостроение. 1989. Т. 32. № 2. С. 54.
10. Розенберг Г. В. Оптика тонкослойных покрытий. М., 1958. С. 312.
11. Барковский Л. М., Борздов А. Н., Борздов Г. Н., Камач Ю. Э., Овчинников В. М. // Оптико-механическая промышленность. 1985. № 6. С. 23.
12. Вирник Я. З., Герасимов В. Б., Сагалович А. Я., Садовская Л. В., Хижняк А. И. // Укр. физ. журн. 1985. Т. 30. № 5. С. 688.

Поступила в редакцию 26.10.90.

УДК 535.37

*И. М. ГУЛИС, А. И. КОМЯК,  
Ю. И. МИКСЮК, В. А. ЦВИРКО*

### **ПИКОСЕКУНДНАЯ СТАДИЯ ФОТОПРОТОЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ПРОТОННЫХ РАСТВОРИТЕЛЯХ: МОДЕЛЬ, НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТЬ, ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ**

Раствор красителя, в котором протекает фотопротолитическая реакция, может рассматриваться как неоднородная система в смысле существования в нем набора разных по долевого весу ансамблей с различными временами фотореакции вплоть до сверхкоротких, соответствующих непосредственно элементарному акту фотопереноса протона. В эксперименте такая неоднородность раствора может проявиться лишь для ансамблей с достаточно короткими временами реакции (короче времени реорганизации, «перемешивания» ансамблей). Поэтому одним из аспектов неоднородности раствора красителя, связанной с протекающей в нем фотопротолитической реакцией, является довольно грубое, но удобное в плане анализа экспериментальных данных, разбиение ансамблей на

«быстрые» и «медленные». Вторым аспектом неоднородности раствора является распределение «быстрых» ансамблей по взаимодействию с окружением (энергии взаимодействия, степени экранировки партнеров полярным окружением молекулы красителя). В нашем эксперименте [1, 2] это проявляется в зависимости спектра флуоресценции исходной формы красителя и выхода реакции (относительной доли «быстрых» ансамблей среди всех возбужденных с данной экранировкой) от частоты возбуждающего света.

Разумно выделить и третий аспект неоднородности раствора, который состоит в том, что «быстрые» ансамбли различаются скоростью реализации переноса протона в зависимости от того, ближе или дальше находится партнер, короче или длиннее будет формироваться цепочка водородных связей, по которой произойдет эстафетный [3, 4] перенос. Другими словами, необходимо рассматривать константу скорости реакции как функцию расстояния между партнерами.

Пусть константа скорости переноса протона от донора к акцептору есть  $k_n(R)$ . В присутствии  $N$  партнеров по реакции в окружении возбужденной молекулы красителя на расстояниях  $R_i$  от нее закон затухания флуоресценции молекулы красителя будет определяться следующим выражением:

$$I(t, R_1, R_2, \dots, R_N) = \exp(-t/\tau_0) \cdot \prod_{i=1}^N \exp(-t \cdot k_n(R_i)). \quad (1)$$

Здесь  $\tau_0$  — время жизни возбужденной молекулы красителя в отсутствие реакции. Полагаем, что обратной реакцией можно пренебречь. Для простоты рассматриваем только один механизм реакции (определяющий быстрый процесс) — вращательную подстройку цепочки водородных связей между партнерами, т. е. исходим из того, что трансляционная диффузия в растворе заморожена. Усредним теперь процесс затухания флуоресценции по ансамблям с различным окружением молекулы красителя партнерами по реакции. Принимая пространственное распределение партнеров статистически равновероятным, имеем:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int I(t, R_1, R_2, \dots, R_N) \cdot \frac{1}{V^N} dR_1 dR_2 \dots dR_N = \\ &= \exp(-t/\tau_0) \cdot \left\{ \frac{1}{V} \int \exp(-k_n(R) \cdot t) dR \right\}^N, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V$  — объем раствора. Уместно отметить, что формальное описание здесь аналогично тому, которое используется в теории переноса энергии (см., напр., [5]). Переходя к пределу при  $V \rightarrow \infty$ , можно получить:

$$I(t) = \exp \left\{ -t/\tau_0 - c \int (1 - e^{-t \cdot k_n(R)}) dR \right\}, \quad (3)$$

где  $c = N/V$  — концентрация в растворе партнеров по реакции для молекул красителя.

Представим константу скорости переноса протона в следующем виде (см. [6], где аналогичная процедура используется для описания переноса энергии):

$$k_n(R) = (1/\tau_0) \cdot \exp \{ \gamma \cdot [1 - R/R_0] \}. \quad (4)$$

Здесь  $R_0$  назовем критическим расстоянием переноса протона. Как следует из (4), это такое расстояние, что  $k_n(R_0) = 1/\tau_0$ . Выбор именно такого вида зависимости  $k_n(R)$  приводит к упрощению расчетов, а также разумен с точки зрения физической модели переноса протона. В работе [7], например, было показано, что вероятность переноса протона должна экспоненциально падать с ростом  $R$ . Величина  $\exp(\gamma)$  является, как видно, предельно достижимой величиной вероятности переноса протона при  $R \rightarrow 0$  (случай нахождения реагентов на расстоянии контакта без посредников), выраженной в единицах константы спонтанной дезактивации возбужденной молекулы красителя  $1/\tau_0$ . Подставив выражение (4) в формулу (3), можно получить [6]:

$$I(t) = \exp \{-t/\tau_0 - \gamma^{-3} \cdot c \cdot V_p \cdot g(t/\tau_0 \cdot e^\gamma)\}, \quad (5)$$

где  $V_p = 4/3\pi R_0^3$  будем называть реакционным объемом. Если ввести обозначение  $z = t/\tau_0 \cdot e^\gamma$ , тогда  $g(z) = -z \int_0^1 \exp(-zy) (\ln y)^3 dy$ . Для  $z > 0$

$$g(z) = (\ln z)^3 + h_1 (\ln z)^2 + h_2 (\ln z) + h_3 + 0 [e^{-z} (\ln z)^3 z^{-2}]. \quad (6)$$

С использованием формул (5) и (6) (коэффициенты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  определены в работе [6]) были проведены расчеты законов затухания флуоресценции исходной формы молекул красителя для растворов с замороженной диффузией при различных значениях максимально достижимой константы скорости реакции фотопереноса протона, задаваемых параметром  $\gamma$ , и при вариации концентрации (см. рис. 1). Очевидно, что такое рассмотрение правомочно и для жидкого раствора в диапазоне времен, в котором можно пренебречь трансляционным смещением партнеров. Как видно из рис. 1, затухание флуоресценции является неэкспоненциальным. Неэкспоненциальность затухания при прочих равных условиях выражена тем ярче, чем круче зависимость  $k_n(R)$  (чем больше  $\gamma$ ). Закон затухания флуоресценции  $I(t)$  будет иметь неэкспоненциальный характер и для более слабой, степенной зависимости константы скорости реакции от расстояния между донором и акцептором протона [5, 6]  $k_n(R) = 1/\tau_0 \cdot (R_0/R)^S$ , если  $S > 3$ . Из рис. 1 также видно, что кинетику

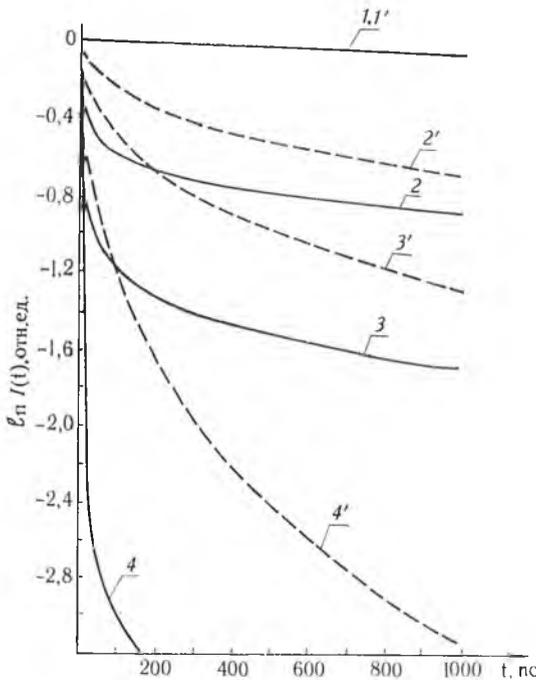


Рис. 1. Расчетные кинетики затухания флуоресценции раствора красителя ( $\tau_0 = 10^{-9}$  с), подверженного реакции фотопереноса протона в условиях замороженной трансляционной диффузии, представленные в полулогарифмическом масштабе;  $\gamma = 25$  (1—4) и  $\gamma = 10$  (1'—4'),  $N_p = cV_p = 0$ , т. е.  $c = 0$  (1, 1');  $N_p = 1$  (2, 2'), 2 (3, 3') и 5 (4, 4')

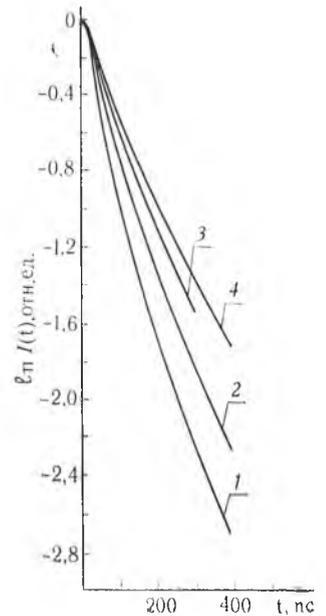


Рис. 2. Выделенные из общих кинетик быстрые компоненты затухания флуоресценции исходных для фотолитических реакций форм молекул красителей, представленные в полулогарифмическом масштабе. 3-метоксифенилазотрон в пропаноле с 1 М  $\text{HClO}_4$  (1);  $\nu_a = 18785 \text{ см}^{-1}$ ,  $\nu_p = 17860 \text{ см}^{-1}$ ,  $c = 10^{-4}$  моль/л; 2-нафтиламин в  $\text{H}_2\text{O}$  с 1 М (2) и 0,5 М  $\text{KOH}$  (4) и в пропаноле с 1 М  $\text{KOH}$  (3);  $c = 5 \cdot 10^{-5}$  моль/л,  $\nu_a = 28250 \text{ см}^{-1}$ ,  $\nu_p = 23800 \text{ см}^{-1}$  (2—4).  $T = 303 \text{ K}$  (1—5)

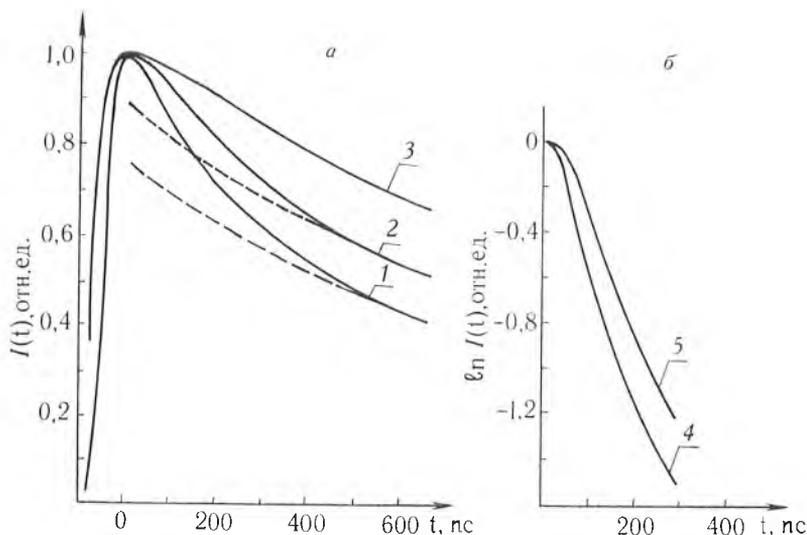


Рис. 3. 2-нафтиламин в пропаноле с 1 М КОН;  $c = 5 \cdot 10^{-5}$  моль/л; а) кинетики затухания флуоресценции нейтральной формы молекул красителя (1—3); б) выделенные из общих кинетик быстрые компоненты затухания, представленные в полулогарифмическом масштабе (4, 5);  $\nu_0 = 28\,250 \text{ см}^{-1}$ ,  $\nu_p = 23\,800 \text{ см}^{-1}$  (1—5);  $T = 303 \text{ К}$  (1, 4),  $283 \text{ К}$  (2, 5) и  $263 \text{ К}$  (3)

затухания флуоресценции условно можно разделить на «быстрый» и «медленный» участки. Амплитуда быстрой компоненты затухания тем больше, чем больше амплитуда константы скорости реакции и/или чем больше молекул партнера находится в реакционной сфере. Таким образом, следует ожидать, что закон затухания флуоресценции жидкого раствора (в котором возможен перенос протона по цепочке водородных связей) при определенных условиях (достаточно высокая константа скорости быстрого процесса реакции, крутая зависимость  $k_n(R)$ , достаточное количество партнеров в реакционной сфере) может быть неэкспоненциальным в области коротких времен с момента возбуждения, несмотря на наличие диффузии, работающей на сглаживание неэкспоненциальности и сокращающей время затухания медленной компоненты.

На рис. 2 представлены в полулогарифмическом масштабе выделенные из экспериментально зарегистрированных законов затухания флуоресценции исходных для реакции форм молекул красителей их быстрые компоненты для растворов 2-нафтиламина в воде (кривые 2 и 4) и в пропаноле (кривая 3) с добавками КОН и для раствора 3-метоксибензантрацена в пропаноле с добавкой  $\text{HClO}_4$  (кривая 1). Амплитуды быстрых кинетик при выбранных концентрациях добавок были достаточно высокими, а их регистрация проводилась на длинах волн максимумов стационарных спектров флуоресценции, что позволяло избежать осложнений, связанных со сдвигом мгновенных спектров во времени вследствие дипольной релаксации. Как видно из рис. 2, быстрые компоненты законов затухания флуоресценции исследованных систем действительно являются неэкспоненциальными. Для кривой 1, например, средние значения длительности затухания на временных интервалах  $50 \div 100 \text{ пс}$  и  $350 \div 400 \text{ пс}$  различаются  $\sim$  в 3 раза.

Представляет интерес исследовать температурные зависимости быстрой компоненты реакции. На рис. 3, а представлены полученные для различных температур кинетики затухания флуоресценции раствора 2-нафтиламина в пропаноле с добавкой 1 М КОН. Как видно, уже при незначительном понижении температуры раствора падает амплитуда быстрой компоненты кинетики затухания флуоресценции исходной для реакции формы молекул красителя. Другими словами, доля молекул красителя, участвующих в сверхбыстром процессе фотопереноса протона,

существенно зависит от температуры раствора и с понижением ее резко уменьшается.

Для объяснения этого результата воспользуемся представлением о зависимости константы скорости сверхбыстрого фотопереноса протона от расстояния между партнерами по реакции (4), где  $R_0$  определяет объем вокруг возбужденной молекулы красителя, в котором возможен процесс фотопереноса протона по сверхбыстрому механизму. В силу кубической зависимости реакционный объем весьма чувствителен к изменению  $R_0$ . При понижении температуры раствора процесс вращательной подстройки цепочек водородных связей между донором и акцептором протона замедляется. Таким образом, реакционный объем вокруг молекулы красителя будет существенно уменьшаться, поскольку уменьшится радиус  $R_0$ , на котором достигается условие  $k_n(R_0) = 1/\tau_0$ . Уменьшение реакционного объема означает уменьшение вероятности нахождения в нем партнеров по реакции для молекулы красителя на момент возбуждения, что, в свою очередь, означает уменьшение доли возбужденных молекул красителя, для которых возможен фотоперенос протона по сверхбыстрому подстроечному механизму реакции.

Можно было бы ожидать, что длительность быстрой компоненты кинетики затухания флуоресценции можно увеличить путем снижения температуры раствора. Однако, как следует из расчетов и эксперимента, при снижении температуры раствора резко падает амплитуда быстрой компоненты, и это, естественно, затрудняет возможности ее наблюдения и исследования. Что касается собственно вопроса об увеличении длительности, то неэкспоненциальность затухания должна привести к картине, с трудом поддающейся наглядной интерпретации. Действительно, рассматривая неэкспоненциальную кинетику как набор компонент с разными длительностями, мы можем ожидать, что снижение температуры приведет к удлинению всех компонент. При этом самые быстрые из них, «скрывающиеся» под сверткой в случае более высокой температуры, при ее понижении удлинятся и выйдут из-под свертки. Таким образом, на смену «растянувшимся» за счет понижения температуры компонентам в диапазоне малых (но наблюдаемых) времен появятся «новые» быстрые компоненты. Следовательно, вряд ли удастся наблюдать тривиальное увеличение длительности затухания. Действительно, как видно из рисунка 3, б, какого-либо заметного изменения (замедления) быстрой кинетики затухания флуоресценции при понижении температуры не обнаруживается.

Изложенные качественные соображения нашли подтверждение в расчетах, проведенных на основе обсуждавшейся выше модели. Снижение температуры, т. е. уменьшение  $R_0$ , действительно приводит к резкому снижению доли быстрого процесса и в то же время не сопровождается значительным изменением в наклонах кривых, представляющих быстрые компоненты затухания в полулогарифмическом масштабе, за исключением самых начальных этапов, которым в эксперименте можно поставить в соответствие область под сверткой.

### Список литературы

1. Миксюк Ю. И., Гулис И. М., Горбацевич С. К. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 26.
2. Гулис И. М., Миксюк Ю. И. // Тез. докл. Всесоюз. совещ. по молекулярной люминесценции. Караганда, 1989. С. 78.
3. Грагеров И. П., Погорелый В. К., Франчук И. Ф. Водородная связь и быстрый протонный обмен. Киев, 1978.
4. Stillinger F. H. // Theor. chemistry: Adv. and Perspect. 1978. V. 3. P. 177.
5. Ермолаев В. Л., Бодунов Е. Н., Свешникова Е. Б., Шахвердов Т. А. Безызлучательный перенос энергии электронного возбуждения. Л., 1977.
6. Inokuti M., Hiraizumi F. // Journ. Chem. Phys. 1965. V. 43. № 6. P. 1978.
7. Герман Э. Д., Догонадзе Р. Р. Дополнения // Белл Р. Протон в химии. М., 1977. С. 350.

Поступила в редакцию 12.01.91.

## УСИЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ В АНТРАЦЕНСОДЕРЖАЩИХ ПОЛИМЕРНЫХ СЛОЯХ

Фазовая запись оптической информации, основанная на изменении показателя преломления материала при фотопревращениях содержащихся в нем производных антрацена, известна с начала 70-х гг., когда авторы работы [1] предложили осуществлять регистрацию путем фотолиза фотодимеров полиаценов, растворенных в полимерных матрицах. При этом были достигнуты дифракционные эффективности (ДЭ) записываемых голограмм, не превышающие 5%. Близкие к предельным ДЭ объемных фазовых голограмм достигаются при использовании материалов «Реоксан» [2], разработанных позднее и функционирующих благодаря фотоокислению производных антрацена, уменьшающему молекулярную рефракцию и показатель преломления материала.

Светочувствительность указанных материалов ограничивается квантовой эффективностью фотореакций, достигая значений  $\sim 1 \text{ см}^2/\text{Дж}$ , которые для многих практических целей недостаточно высоки. В последнее время появились сообщения [3] об усилении фазовых голограмм, наблюдающемся для некоторых фотополимеризующихся композиций в результате диффузионных процессов в частично экспонированном слое.

Для регистрации светового воздействия нами использована реакция фотодимеризации *E*-изомеров эфиров оксима 9-формилантрацена в полиметилметакрилате (ПММА). Заместитель выбранного типа позволяет формировать из совместного раствора светочувствительного соединения и полимера устойчивые некристаллизующиеся при комнатной температуре слои с содержанием производного антрацена до 40 вес. %, что соответствует концентрациям  $\approx 2 \text{ моль} \cdot \text{л}^{-1}$  и при полном фотопревращении может обеспечить уменьшение показателя преломления на 3—4 единицы второго знака для длины волны 632,8 нм.

Проведенное исследование спектров электронного поглощения и люминесценции фоторегистрирующих слоев и их изменения в процессе экспонирования позволило установить основные особенности фотофизических и фотохимических процессов. Основным путем излучательной дезактивации возбуждений является эксимерная люминесценция с характерным бесструктурным спектром, смещенным в длинноволновую область по отношению к максимуму спектра поглощения на 6000—7000  $\text{см}^{-1}$  (рис. 1, кривая 2). Условием эффективного образования эксим-

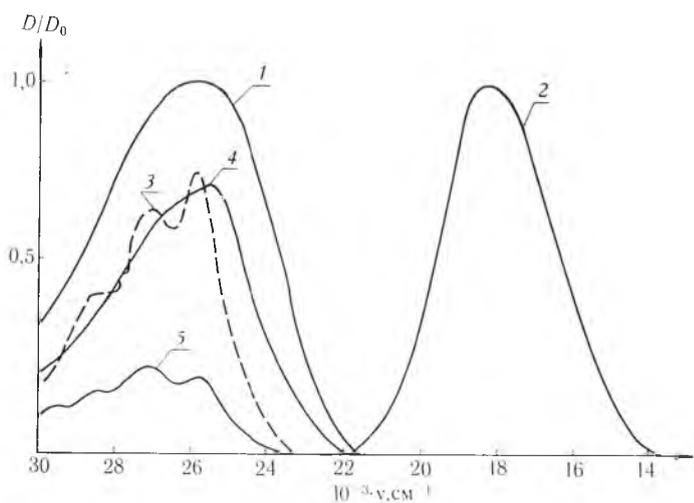


Рис. 1. Спектры поглощения (1, 3—5) и люминесценции (2) изобутирата оксима 9-формилантрацена в ПММА

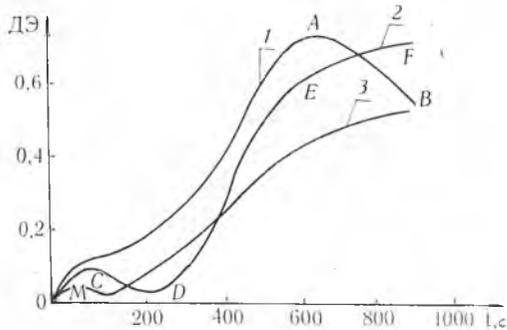


Рис. 2. Нарастание дифракционной эффективности при непрерывном экспонировании (1) и в режиме темнового усиления (2, 3)

чае колебательная структура появляется лишь при 70 %-м фотолизе (кривая 5). Качественный анализ продуктов фотопревращения светочувствительного слоя по спектрам их электронного поглощения (рис. 1, кривые 1, 3—5) приводит к выводу о двух типах продуктов. Первый из них является продуктом фотопревращения *E*-изомера эфира в неустойчивый *Z*-изомер, который распадается с образованием 9-цианантрацена и карбоновой кислоты (рис. 1, кривые 3, 5), при этом  $\pi$ -система антраценового кольца сохраняется, а в области длинноволновой полосы поглощения появляется ряд вибронных максимумов полос 9-цианантрацена. Ко второму типу относятся продукты со спектром поглощения, смещенным в ультрафиолетовую область за счет уменьшения системы  $\pi$ -сопряжения, которое может вызываться как фотодимеризацией, так и фотоокислением. Первый тип продуктов, достаточно характерный при невысоких содержаниях эфира, практически исчезает при увеличении концентрации светочувствительного компонента, проявляясь лишь при глубоких конверсиях (рис. 1, кривые 4, 5). Для выявления степени участия фотоокисления в общем процессе фотопревращений проводили экспонирование идентичных образцов в воздухе и вакууме и по изменению спектров поглощения рассчитывали квантовые эффективности расходования эфира, которые находились в пределах 0,05—0,14, не изменяясь при удалении из образцов кислорода. Этот факт свидетельствует о незначительной скорости генерации синглетного кислорода и последующего фотоокисления. Необходимо отметить и способность эфиров к термической деструкции до 9-цианантрацена и соответствующей карбоновой кислоты [4] через циклическое переходное состояние с согласованным перераспределением связей. Однако заметно распад происходит при температурах выше 330—350 К (период полураспада при 353 К — 10 ч, при 295 К — более полугода).

Проведено исследование фотохимических процессов при проекции на образец оптических интерференционных структур, приводящих к формированию объемных фазовых голографических решеток (ОФГДР). При записи ОФГДР оптической схемой формировались идентичные световые пучки ( $\lambda = 476,5$  нм), интерферирующие в плоскости образца. Регулировка интенсивности пучков осуществлялась с помощью поляризаторов. Диаметр поля экспонирования образца составлял около 8 мм. Зондирующим источником являлся гелий-неоновый лазер с линейной поляризацией излучения ( $\lambda = 632,8$  нм), создающий пучок диаметром 4 мм.

Использованная оптическая схема обеспечивала формирование решеток с пространственным периодом 0,4—0,8 мкм и наклонной ориентацией штрихов с углом относительно нормали к поверхности образца порядка 10—20°. Весьма существенным для достижения высоких значений ДЭ оказалось соотношение интенсивностей интерферирующих пучков. Оптимальной величиной отношения интенсивностей явилось значение порядка трех.

меров в твердом растворе является достаточное количество сэндвич-пар молекул красителя, захватывающих энергию электронного возбуждения и способных к образованию как возбужденного димера, так и фотодимера.

При 30 %-м фотолизе эфира колебательная структура хорошо видна только в спектре с низким (3 вес. %) содержанием эфира (рис. 1, кривая 3) и практически отсутствует для образца с содержанием 40 вес. % (кривая 4). В последнем случае

Типичные экспериментальные зависимости ДЭ во времени приведены на рис. 2. При непрерывном экспонировании ДЭ ОФГДР сначала монотонно возрастала во времени (кривая 1, участок  $OA$ ), а затем наблюдалась область спада ( $AB$ ). Если на начальной стадии процесса нарастания ДЭ прекратить экспонирование (точка  $C$  на кривой 2), то происходит сначала спад почти до нуля (участок  $CD$ ), а затем уверенное нарастание ( $DE$ ) до насыщения ( $EF$ ). При более раннем прекращении экспонирования (точка  $M$  на кривой 3) величина ДЭ меняется аналогично, но максимальное значение ДЭ в области насыщения оказывается меньшим.

Анализ типа фотореакций, формирующих первичную дифракционную решетку, и полученные зависимости ДЭ от времени в режиме темнового усиления позволяют сделать несколько предположений относительно механизма наблюдаемого явления.

Маловероятно, что к росту ДЭ приводит темновая термическая реакция, так как при температуре эксперимента период полупревращения для образования 9-цианантрацена на несколько порядков превосходит время усиления.

Среди гипотетических механизмов наблюдаемого усиления можно выделить предполагающие и не предполагающие поступательной диффузии вещества в перпендикулярном штрихам направлении на расстояния порядка периода решетки.

Обычные процессы материальной диффузии с потоком вещества в направлении уменьшения его концентрации приводят к снижению глубины модуляции ОФГДР и ее ДЭ. Коэффициенты диффузии антрацена в чистом ПММА достигают величин  $1,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  [5, 6]. При пластификации полимерного слоя дибутилфталатом (15 вес. %) коэффициенты диффузии возрастают почти на 2 порядка. Амплитуда модуляции показателя преломления  $\Delta n$  трехмерной пропускающей фазовой решетки следует из выражения [7]:  $D\Theta = \sin^2 \left( \frac{\pi \Delta n d}{\lambda \cos \Theta} \right)$ , в котором  $\lambda$  — длина волны света в регистрирующей среде,  $\Theta$  — угол схождения интерферирующих пучков,  $d$  — толщина решетки, составляющая в среднем около 80 мкм. Согласно данным рис. 2, возрастание  $\Delta n$  в процессе темнового усиления было равно примерно 0,001, что составляет около 3 % величины, которую может обеспечить полное превращение красителя или полное распределение его и фотодимера в чередующихся слоях ОФГДР. Коэффициент диффузии, обеспечивающий для антрацена изменение на 3 % амплитуды первоначального синусоидального распределения за 10 мин (время наблюдаемого роста ДЭ при усилении), можно оценить из выражения, характеризующего распределение концентрации при диффузионной релаксации [6]:

$$C(x, t) = C(x, 0) \exp \left[ -D \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right)^2 t \right],$$

где  $C(x, 0)$  — начальное распределение концентрации,  $\Lambda$  — период структуры. Полученная величина  $D \approx 10^{-14} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ , что примерно соответствует диффузии антрацена в ПММА, пластифицированном дибутилфталатом. Пластифицирующее действие в исследованных нами композициях оказывает сам краситель с подвижным заместителем, а усиление решетки может возникнуть при восходящей диффузии в процессе фазового расслоения твердого раствора эфир-фотодимер-полимер. В пользу предположительно возможного расслоения фаз, обогащенных и обедненных исходным красителем, говорит существенное влияние соотношения интенсивностей записывающих пучков на процесс формирования ОФГДР. В частности, рост ДЭ с уменьшением глубины модуляции интерференционной картины может быть связан с необходимостью достижения оптимального для фазового перехода состава твердого раствора.

Можно представить модель процесса усиления, в основе которой лежит лишь поворотная релаксация молекул или малое поступательное смещение.

При фотореакции происходит изменение не только молекулярной рефракции, но и молекулярного объема. Если предположить, что молекулярный объем фотодимера больше объема, занимаемого парой молекул, из которого он образовался, то в слоях с повышенным содержанием фотодимера должно возникнуть напряжение в виде избыточного давления с перпендикулярным плоскости штрихов ОФГДР градиентом. Релаксация такого напряжения может привести к уменьшению плотности материала в областях с высокой концентрацией фотодимера (максимумы интерференционной картины) и ее увеличению в местах с малой концентрацией (минимумы интерференционной картины). Сопряженное с изменением плотности изменение  $n$  углубит модуляцию решетки и повысит ДЭ. Возрастание  $n$  в процессе темнового усиления на 0,001 может обеспечить столь же небольшое относительное изменение плотности материала порядка 1 %.

Если образующиеся молекулы фотодимера являются источниками дефектов структуры материала, то перераспределение плотности между граничными слоями, образующими решетку, можно рассматривать как результат восходящей диффузии дефектов [8].

Кривые, описывающие послезащитное изменение ДЭ, имеют характерный спадающий участок, который возникает задолго до достижения первого максимума ДЭ (рис. 2, кривые 2, 3), т. е. характеризует первоначальное уменьшение глубины модуляции. Он проявляется и при непрерывном экспонировании (кривая 1), но менее отчетливо. Вероятно, падение ДЭ или замедление ее роста отражает конкурирующий с усилением процесс, которым может являться нисходящая диффузия или конформационные переходы молекул красителя из  $Z$ -изомера в  $E$ -изомер.

Усиление голографического изображения, рассматриваемое в настоящей работе, происходит без дополнительных воздействий на регистрирующий материал в процессе записи и непосредственно после нее. Это может создать благоприятные предпосылки для практического применения эффекта.

#### Список литературы

1. Tomlinson W. J., Chandross E. A., Fork R. L. // Appl. Optics. 1972. V. 11. № 3. P. 533.
2. Лашков Г. И., Суханов В. И. // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 44. Вып. 5. С. 1008.
3. Гюльназаров Э. С., Смирнова Т. Н., Тихонов Е. А., Шпак Т. М. // Укр. физ. журн. 1988. Т. 33. № 1. С. 8.
4. Лазарева А. М., Станкевич А. И. // Кинетика и катализ. 1988. № 5. С. 1248.
5. Лашков Г. И., Веняминнов А. В., Ратнер О. Б. // Высокомолекулярные соединения. 1986. Т. 28А. № 2. С. 435.
6. Шацева Л. С. // Тез. докл. Всесоюз. совещ. по молекулярной люминесценции. Караганда, 1989. С. 156.
7. Шварц К. К. Физика оптической записи в диэлектриках и полупроводниках. Рига, 1986. С. 28.
8. Журавлев А. Ф., Рыжкова Е. Ф. // Изв. вузов: Сер. физ. 1989. № 7. С. 91.

Поступила в редакцию 28.12.90.

УДК 539.194:537.228.4

Л. П. КАЗАЧЕНКО

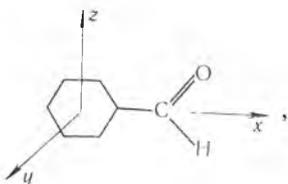
#### К ВОПРОСУ О СОДЕРЖАНИИ *транс*-, *цис*-КОНФОРМАЦИЙ ГАЛОГЕНПРОИЗВОДНЫХ БЕНЗАЛЬДЕГИДА В РАСТВОРАХ $CCl_4$

Соотношение вращательных *транс*-, *цис*-конформаций галогенпроизводных бензальдегида в растворах  $CCl_4$  определено методами эффекта Керра и дипольных моментов в работах [1, 2]. Расчет мольных констант Керра выполнен для планарных структур с использованием аддитивной схемы поляризуемостей Ле Февра, в основе которой лежит предположе-

ние об изотропности поляризуемости связи С—Н. Спектральные данные приведены в [3—5]. Результаты оценки содержания *транс*-, *цис*-конформаций, выполненные разными методами, не согласуются.

В настоящей статье молярные константы Керра и анизотропии поляризуемостей этих соединений рассчитаны как функции угла поворота альдегидной группы относительно плоскости бензольного кольца и с учетом анизотропии поляризуемости связи С—Н. Проведен более углубленный анализ содержания различных конформаций.

Исследовались *m*-Cl, Br, F и *o*-Cl производные бензальдегида



в которых *цис*- и *транс*- положения атомов галогенов определены по отношению к кислороду альдегидной группы. Планарная структура *o*-*цис*-Cl-бензальдегида стерически затруднена. *Транс*-форма может стабилизироваться за счет внутримолекулярной водородной связи.

Молярные константы Керра для различных вращательных конформаций рассчитывались по формуле

$$mK = \frac{2\pi}{9} N (Q_1 \pm Q_2), \quad (1)$$

где

$$Q_1 = 2 (45 kT)^{-1} (P_d/P_e) \gamma^2,$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} [(b_{xx} - b_{yy})^2 \pm (b_{xx} - b_{zz})^2 \pm (b_{yy} - b_{zz})^2 \pm 6 (b_{xy}^2 \pm b_{xz}^2 \pm b_{yz}^2)] -$$

анизотропия поляризуемости,

$$Q_2 = (45 k^2 T^2)^{-1} [\mu_x^2 (2b_{xx} - b_{yy} - b_{zz}) \pm \mu_y^2 (2b_{yy} - b_{zz} - b_{xx}) \pm \mu_z^2 (2b_{zz} - b_{xx} - b_{yy}) \pm 6 (\mu_x \mu_y b_{xy} \pm \mu_x \mu_z b_{xz} \pm \mu_y \mu_z b_{yz})],$$

$b_{ij}$ ,  $\mu_i$  — составляющие поляризуемостей и дипольных моментов молекулярных структур в выбранной системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $P_d$  — деформационная поляризация вещества,  $P_e$  — ее электронная часть,  $N$  — число Авогадро.

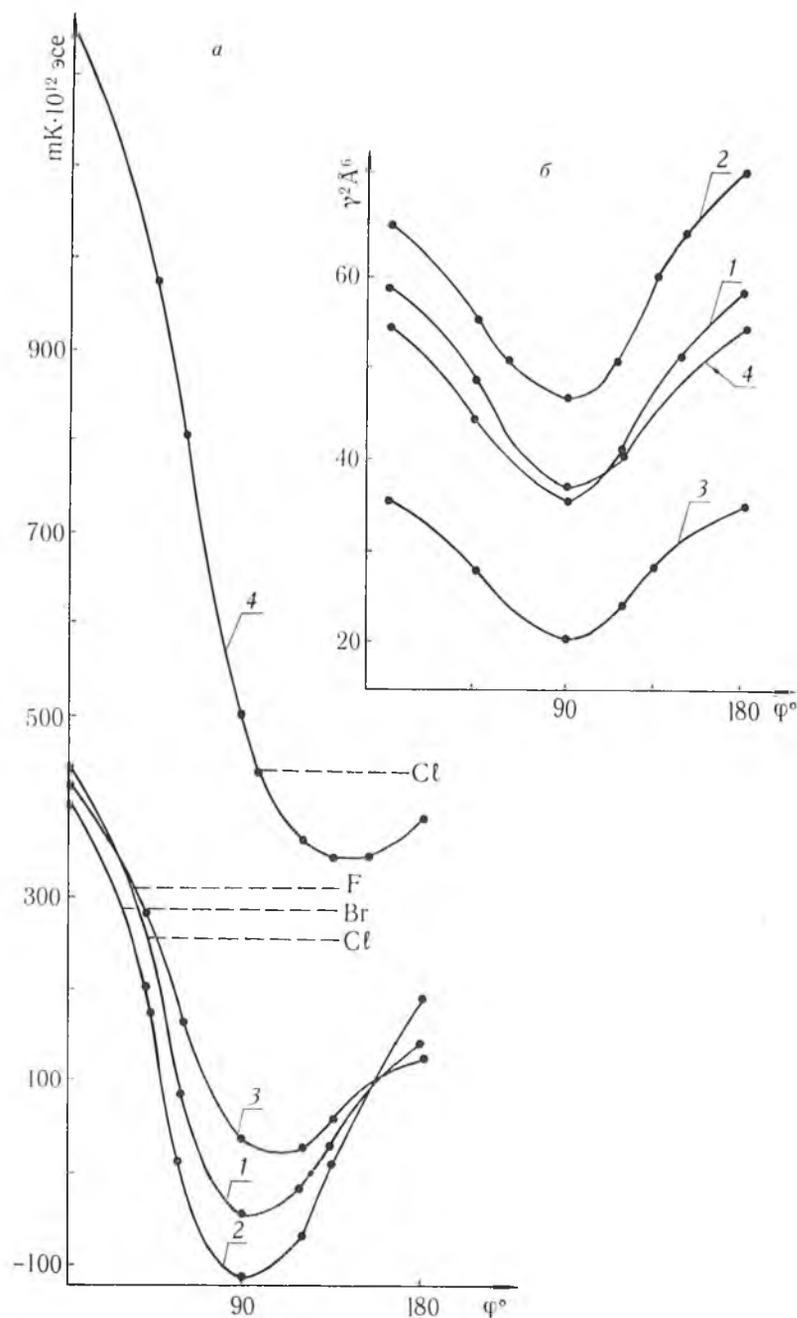
Величины  $b_{ij}$  определялись методом суммирования составляющих поляризуемостей связей

$$(b_{ij})_k = b_L L_i L_j \pm b_T T_i T_j \pm b_V V_i V_j, \quad (2)$$

где  $b_L, b_T, b_V$  — их главные поляризуемости,  $L_i, T_i, V_i$  — направляющие косинусы осей в системе координат  $x, y, z$ . При вращении вокруг связи С—С компоненты  $(b_{ij})_k$  альдегидной группы рассчитывались по формулам, приведенным в [6]. Для нее принималась тригональная ориентация связей. Нарушение геометрии бензольного кольца при введении заместителей не учитывалось. Угол вращения отсчитывался от *цис*-конформации. Отношение  $P_d/P_e = 1,1$ .

Проекции  $\mu_i$  определялись по аддитивной схеме с использованием значений групповых дипольных моментов: альдегидной группы — 2,96D; Cl, Br, F — монозамещенных бензола — 1,59; 1,57; 1,40D соответственно. Выбор значений  $b_L, b_T, b_V$  обосновывался следующими соображениями. Основной вклад в поляризуемость молекул вносят связи ароматического кольца и галогенов. Для них использовалась аддитивная схема Ле Февра. Анизотропия поляризуемости связей С—Н учитывалась по данным Вукса [6]. Поляризуемости связей С=O и С—С в обоих схемах отличаются незначительно.

Результаты расчета молярных констант Керра и анизотропий поляризуемостей молекул как функции угла вращения альдегидной группы при-



Зависимость мольной константы Керра ( $mK$ ) и анизотропии поляризуемости ( $\gamma^2 A^6$ )  $m\text{-Cl}$ ,  $\text{Br}$ ,  $\text{F}$  и  $o\text{-Cl}$ -бензальдегида (1, 2, 3, 4) от угла поворота альдегидной группы

ведены на рисунке. В угловом интервале  $0 \div 180^\circ$  величины  $mK$  описываются асимметричными кривыми; для *цис*- и *транс*-конформаций значительно различаются. В области  $\varphi = 90^\circ$  для  $m\text{-Cl}$ ,  $\text{Br}$ -бензальдегида они меняют знак, что свидетельствует об изменении соотношения молекулярных рефракций с ориентацией электрического вектора световой волны параллельно и перпендикулярно приложенному полю. Горизонтальными штриховыми линиями отмечены экспериментальные значения  $mK$  растворов в  $\text{CCl}_4$  этих соединений, измеренные при комнатной температуре [1—2].

Анизотропии поляризуемостей молекулярных структур представлены практически симметричными относительно  $\varphi=90^\circ$  кривыми. Вследствие близости значений  $\gamma^2$  *цис*- и *транс*-конформаций использование их для определения конформационного равновесия требует достаточно точных измерений деполаризации линий релеевского рассеяния света.

Более надежно конформации могут быть определены путем сравнения экспериментальных и рассчитанных значений  $mK$ . Графическое решение допускает существование структур *m*-Cl, Br, F-бензальдегида с углами поворота альдегидной группы  $38, 27$  и  $33^\circ$  соответственно и *o*-Cl-бензальдегида  $\sim 90^\circ$ . При учете только планарных форм задача установления их положения равновесия решается с использованием аддитивного уравнения

$$mK_{\text{экс}} = n \cdot mK_{\text{транс}} + (1-n)mK_{\text{цис}}. \quad (3)$$

Более достоверные результаты могут быть получены с привлечением аналогичного соотношения для дипольных моментов:

$$\mu_{\text{экс}}^2 = n \cdot \mu_{\text{транс}}^2 + (1-n)\mu_{\text{цис}}^2. \quad (4)$$

Существование в растворе  $\text{CCl}_4$  акомпланарных форм *m*-Cl, Br, F-бензальдегида не подтверждается сравнением экспериментальных и рассчитанных по аддитивной схеме дипольных моментов. Так, для *m*-Cl-бензальдегида при  $\varphi=38^\circ$   $\mu_{\text{адд}}=3,30D$ ,  $\mu_{\text{экс}}=2,61D$ . Конфигурация *o*-C-бензальдегида с углом поворота альдегидной группы  $90^\circ$  не реальна из-за полного отсутствия сопряжения. Экспериментальное значение мольной константы Керра этого соединения превышает рассчитанное для *транс*-конформации, поэтому можно допустить наличие в растворе  $\text{CCl}_4$  некоторой доли структуры, близкой к *цис*-форме.

В таблице приведены результаты оценки содержания *транс*-(*цис*-) конформаций исследованных соединений, выполненные с использованием уравнений (3, 4). Экспериментальные данные по дипольным моментам взяты из [1, 2]. Если допустить минимальный угол поворота альдегидной группы в *цис*-*o*-Cl-бензальдегиде  $15^\circ$ , то содержание *транс*-формы по (3) составит 94 %. Увеличение угла до  $30^\circ$  приводит к снижению ее содержания всего лишь на 1 %.

Оценить содержание *транс*-формы *o*-Cl-бензальдегида с использованием соотношения (4) затруднительно вследствие очевидного нарушения аддитивности групповых дипольных моментов ( $\mu_{\text{экс}}=3,00$ ;  $\mu_{\text{цис}}=4,44$ ,  $\mu_{\text{транс}}=3,26D$ ). Обычно в *o*-производных бензола рассчитанные по аддитивной схеме дипольные моменты превышают экспериментальные примерно на 10 %. Если принять эту поправку, то содержание *транс*-формы при  $\varphi=15^\circ$  составит 93 %.

Таким образом, учитывая анизотропию поляризуемости связи C—H в *m*, *o*-Cl, Br, F-бензальдегиде удастся согласовать результаты определения содержания в растворе  $\text{CCl}_4$  *транс*- и *цис*-конформаций методами эффекта Керра и дипольных моментов.

### Список литературы

1. Cheng C. L., Le Fevre R. J. W., Ritchie G. // Journ. Chem. Soc. Ser. B. 1971. P. 1198.
2. Am C. T., Huang H. H., Tan E. L. K. // Journ. Chem. Soc. Perkin Trans. 1972. V. 2. P. 1638.
3. Kafritzky A. R., Sinnott M. V., Tideude T. T., Topsom R. D. // Journ. Chem. Soc. 1969. V. 91. P. 628.

4. Miller F. A., Fately W. G., Witkowski R. E. // Spectrochim. Acta. Ser. A. 1967. V. 23. P. 891.

5. Karabatsos G. J., Vane F. M. // Journ. Amer. Chem. Soc. 1963. V. 85. P. 3886.

6. Верещагин А. Н. Поляризуемость молекул. М., 1980. С. 78, 93.

Поступила в редакцию 03.12.90.

УДК 538.245:538.21

М. И. ДАНИЛЬКЕВИЧ, Д. АЛЬ-ШАРР (САР)

## СОСТАВЛЯЮЩИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ХРОМОЗАМЕЩЕННЫХ ФЕРРИТОВ ЖЕЛЕЗА

Сегнетомагнитные и сегнетоэлектрические свойства ферритов и соединений на их основе обнаружены сравнительно давно [1, 2]. Однако до настоящего времени не выделены основные вклады в диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  такого рода веществ, что затрудняет анализ получаемых результатов. В данной работе на основе температурных и частотных зависимостей  $\epsilon$  и расчета некоторых диэлектрических характеристик оцениваются вклады упругих электронных и ионных смещений в измеряемую  $\epsilon$  и описываются типы релаксационных составляющих поляризации в хромозамещенных ферритах железа.

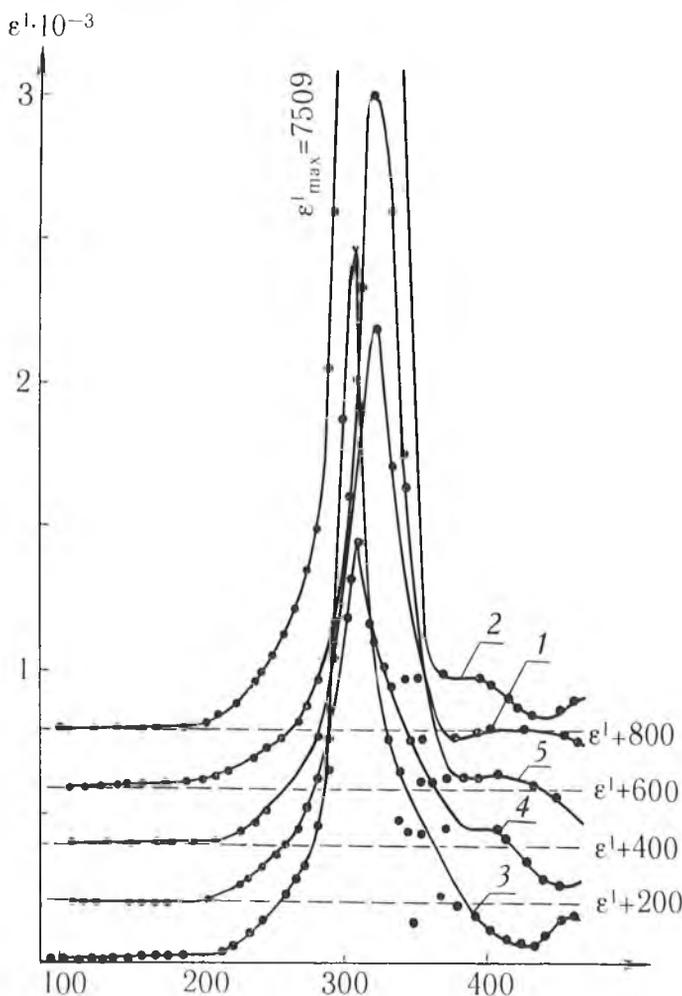


Рис. 1. Температурная зависимость диэлектрической проницаемости шпинелей  $\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$ :

1 -  $x = 1.2$ ; 2 -  $x = 1.3$ ; 3 -  $x = 1.4$ ; 4 -  $x = 1.5$ ; 5 -  $x = 1.6$

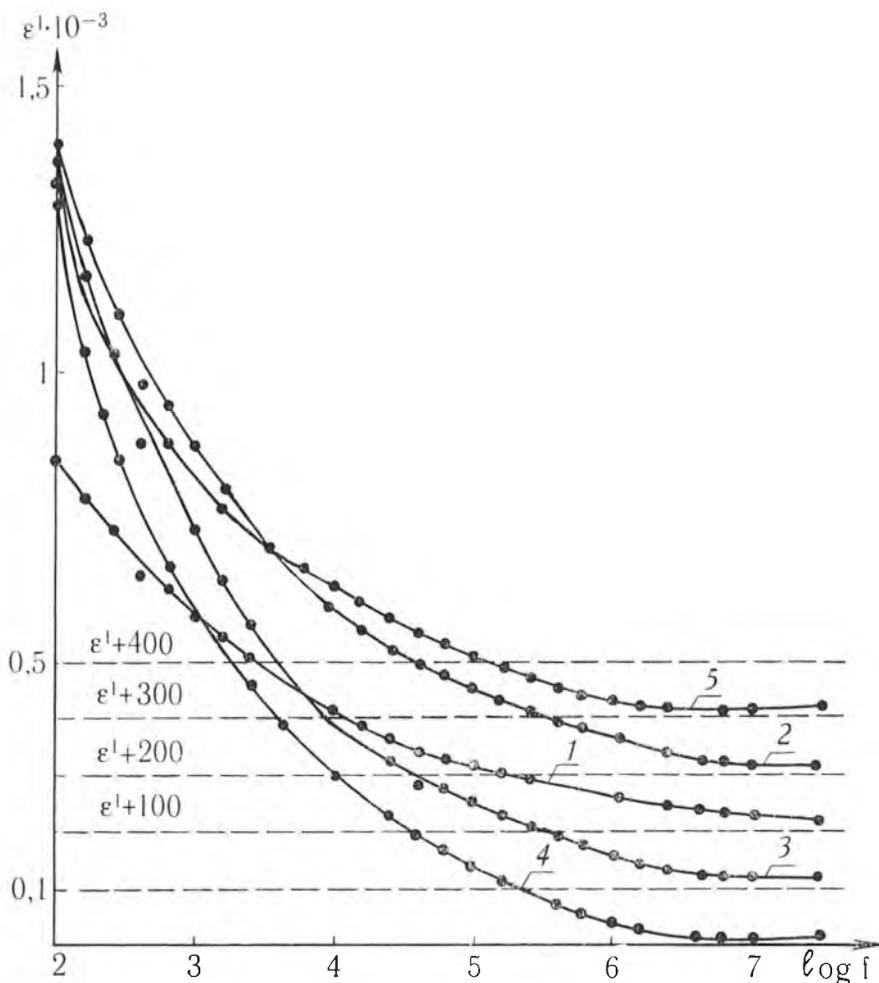


Рис. 2. Частотная зависимость диэлектрической проницаемости  $\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$ :  
 1 —  $x = 1.2$ ; 2 —  $x = 1.3$ ; 3 —  $x = 1.4$ ; 4 —  $x = 1.5$ ; 5 —  $x = 1.6$

Образцы  $\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$  ( $x = 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6$ ) изготовлены из окислов  $\text{FeO}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  по обычной керамической технологии спеканием на воздухе при 1573 К в течение трех часов. Рентгенографический анализ показал на наличие в синтезированных образцах только шпиннелиной фазы.

Температурная зависимость емкости  $C$  образцов и сопротивления потерь  $R_p$  измерялась на частоте 1 кГц с помощью полуавтоматического моста ВМ509 фирмы «Тесла», частотная зависимость  $C$  и фактора потерь — импедансметром ВМ507 и измерителем добротности ВМ560 той же фирмы. ВМ507 измеряет модуль комплексного сопротивления  $Z = 1/\omega C$  и фазовый угол  $\varphi$ , ВМ560 — емкость и добротность  $Q$  образца. Компоненты  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  комплексной проницаемости  $\epsilon^* = \epsilon' + i\epsilon''$  определяли после исключения краевой емкости  $C_k$  и емкости подводящих проводов  $C_n$ :

$$\epsilon' = \frac{C - C_k - C_n}{C_0} \sin \varphi, \quad \epsilon'' = \frac{C - C_k - C_n}{C_0} \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\epsilon' = \frac{(C_1 - C_2) - C_k - C_n}{C_0}, \quad \epsilon'' = \frac{C_1(Q_1 - Q_2)}{(C_1 - C_2)Q_1Q_2} \epsilon', \quad (2)$$

где  $C_0$  — геометрическая емкость образца,  $C_1$  и  $Q_1$  — резонансные значения емкости и добротности контура без измеряемого конденсатора,  $C_2$  и  $Q_2$  — аналогичные параметры с исследуемым конденсатором.

Температурный ход  $\epsilon'$  представлен на рис. 1, радиочастотные спектры — на рис. 2. В интервале 77—135 К  $\epsilon'$ , изменяясь от концентрации,

Диэлектрические характеристики шпинелей  $Fe_{3-x}Cr_xO_4$

$\epsilon$	$x$				
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$\epsilon'_{100\text{ К}}$	13,1	12,1	11,1	10,0	10,7
$\epsilon'_{10\text{ МГц}}$	22,1	16,8	19,5	12,0	15,2
$\epsilon'_{\text{эл}}$	4,92	4,86	4,83	4,82	4,89
$\epsilon'_{\text{ион}}$	3,12	3,00	2,93	2,85	2,87
$\epsilon'_{\text{эл}} + \epsilon'_{\text{ион}}$	8,04	7,86	7,76	7,67	7,76
$\epsilon'_{\text{max}}$	2400	7510	2470	1250	1800

Примечания:  $\epsilon'_{100\text{ К}}$  — низкотемпературный,  $\epsilon'_{10\text{ МГц}}$  — высокочастотный пределы диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ ;  $\epsilon'_{\text{эл}}$  — вычисление значения электронной,  $\epsilon'_{\text{ион}}$  — ионной составляющих  $\epsilon$ ;  $\epsilon'_{\text{max}}$  — проницаемость в максимуме температурной зависимости  $\epsilon$ .

составляет 10—13 единиц (см. таблицу) и не зависит от температуры. Близкая к этим значениям величина  $\epsilon'$  устанавливается на крайнем пределе высокочастотного диапазона и при комнатной температуре.

Полученные величины низкотемпературной и высокочастотной  $\epsilon'$  можно интерпретировать как сумму упругих составляющих проницаемости, обусловленных смещениями электронных оболочек ионов относительно ядер и смещениями катионов  $Fe^{2+}$ ,  $Fe^{3+}$ ,  $Cr^{3+}$  и анионов  $O^{2-}$  относительно друг друга. В статическом пределе эти составляющие описываются формулами Лоренц — Лорентца и Сигети:

$$\epsilon'_{\text{эл}} = \frac{1 + (8\pi/3) \sum_i N_i \alpha_i}{1 - (4\pi/3) \sum_i N_i \alpha_i}, \quad \epsilon'_{\text{ион}} = \pi \left( \frac{\epsilon_{\text{эл}} + 2}{3} \right)^2 \frac{(q^*)^2 N_A^2 \rho}{\omega_{0T}^2 M_k M_A}. \quad (3)$$

Здесь  $N_i$  и  $\alpha_i$  — числа ионов  $i$ -го типа и их электронные поляризуемости;  $q^*$  — эффективный ионный заряд;  $N_A$  — число Авогадро;  $\rho$  — плотность образца;  $\omega_{0T}^2$  — среднее значение квадрата частоты поперечных оптических фононов октаэдрически- и тетраэдрически связанных ионов;  $M_k$  — усредненная относительная атомная масса катиона;  $M_A$  — масса аниона.

$N_i$  определяли по заданному химическому составу и постоянной кристаллической решетки  $a$ :

$$\sum N_i = N_{(Fe_{3-x}Cr_xO_4)} = 8/a^3. \quad (4)$$

Поляризуемость катионов вычисляли по формуле Кирквуда:

$$\alpha = \frac{4}{9za_0} \left( \sum_k \langle r_k^2 \rangle \right)^2. \quad (5)$$

Значения  $\langle r_k^2 \rangle$  взяты из таблиц Банд и Тржасковской [3]. При этом допускали, что для ионов  $Fe^{3+}$  можно использовать  $\langle r_k^2 \rangle$  иона  $Mn^{2+}$ . Поляризуемость  $O^{2-}$  взята из [4, 5]. Частоты  $\omega_{0T}$  определяли линейной интерполяцией данных для  $Fe_3O_4$  [6] и  $CoCr_2O_4$  [7], что, как можно судить на основании [8], может быть оправдано для бинарных твердых растворов шпинелей.

Измеренные и вычисленные проницаемости соединений  $Fe_{3-x}Cr_xO_4$  приведены в таблице. Небольшое падение  $\epsilon'$  при замещении  $Fe^{3+}$  ионами  $Cr^{3+}$  можно связать с тем, что электронная поляризуемость  $\omega^{3+}$  меньше поляризуемости иона  $Fe^{3+}$  (принятые при расчете  $\epsilon'_{\text{эл}}$  и  $\epsilon'_{\text{ион}}$  поляризуемости составили 2,78; 0,535; 0,729 и 0,517 единиц  $10^{-24}$  см<sup>3</sup> соответственно). Падению  $\epsilon'$  при замещении способствует и уменьшение числа магнитных обменных связей. Вычисление  $\epsilon'_{\text{эл}}$  и  $\epsilon'_{\text{ион}}$  через величину поляри-

зуюмости, приходящуюся на одну связь  $\alpha_{m=1} = 0,2 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup> [9], и число связей  $m$  дает результаты, близкие приведенным в таблице.

Таким образом, на высоких частотах и при низких температурах в шпинелях  $\text{Fe}_{3-x}\text{Cr}_x\text{O}_4$  в пределах концентраций ионов хрома от 1,2 до 1,6 действуют два основных механизма поляризации: 1) упругие смещения орбитальных электронов и 2) упругие смещения ионов. Соответствующие им значения проницаемостей находятся в пределах  $\epsilon'_{\text{эл}} = (5-7) \pm \pm 1$  и  $\epsilon'_{\text{ион}} = (3,5-4,5) \pm 0,7$ .

При комнатной температуре, начиная с частот порядка  $10^5$  Гц и ниже, к указанным двум составляющим  $\epsilon$  добавляются релаксационные составляющие, достигающие в максимуме нескольких тысяч единиц. Их частотная зависимость может быть описана дебаевскими формулами

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon'_{\infty} + \sum_i \frac{\Delta\epsilon_{si}}{1 + \omega^2\tau_i^2} \quad (6)$$

лишь при предположении о большом наборе времен релаксации  $\tau_i$ , что можно связать с большой микроструктурной неоднородностью образцов. Поведение этих составляющих в области сильного температурного падения  $\epsilon$  имеет черты, схожие с зависимостью типа Кюри — Вейсса для сегнетоэлектриков при приближении к сегнетоэлектрической точке Кюри.

### Список литературы

1. Веневцев Ю. Н., Гагулин В. В., Любимов В. Н. Сегнетомагнетики. М., 1982.
2. Белов К. П., Горяга А. М., Шереметьев В. Н. // ФТТ. 1986. Т. 28. Вып. 1. С. 314.
3. Банд И. М., Тржасковская М. Б. Таблицы собственных значений энергий электронов, плотностей вблизи нуля и средних значений в самосогласованных полях атомов и ионов ( $2 \leq Z \leq 52$ ). Л., 1974.
4. Богородицкий Н. П., Волокобинский Ю. М., Воробьев А. А., Тареев Б. М. Теория диэлектриков. М.; Л., 1965.
5. Книттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1978.
6. Waldron R. D. // Phys Rev. 1955. V. 99. № 6. P. 1727.
7. Freundhотте J., Tarte P. // Spectrochim. Acta. 1971. V. 27A. № 9. P. 845.
8. Данилькевич М. И., Леонтьев А. В. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. 1987. Т. 23. № 12. С. 2040.
9. Данилькевич М. И., Леонтьев А. В. // Весті АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 6. С. 78.

Поступила в редакцию 05.11.90.

УДК 548.5:669.76

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ

### СТРУКТУРА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЫСТРОЗАКАЛЕННЫХ ИЗ РАСПЛАВА ФОЛЬГ СПЛАВОВ СУРЬМА-МЫШЬЯК

В последние годы активно ведутся исследования структуры, механических и физических свойств материалов, получаемых в виде фольг, чешуек или пластинок быстрой закалкой из расплава. Благодаря указанному методу можно формировать такую структуру в сплаве, которую невозможно создать другими известными видами термической обработки [1]. Полуметаллы, к которым относится и сурьма, а также их сплавы находят применение в технике. Известно [2], что сурьма только с висмутом и мышьяком может образовывать непрерывный ряд твердых растворов. Исследования быстроокаленных фольг сплавов сурьма-висмут показали, что с увеличением концентрации висмута наблюдается сначала увеличение, а затем уменьшение концентраций электронов и дырок [3]. В данной работе приведены результаты исследования структуры и

Полюсные плотности  
дифракционных линий  
фольг сплавов сурьма-мышьяк

Дифракционные линии	Содержание мышьяка, ат. %		
	2	4	8
10 $\bar{1}2$	6,1	7,6	8,2
10 $\bar{1}4$	0,3	0,3	0,2
11 $\bar{2}0$	0,2	0,3	0,2
10 $\bar{1}5$	0,3	0,4	0,3
20 $\bar{2}2$	0,4	0,4	0,2
10 $\bar{1}7$	0,2	0,0	0,1
20 $\bar{2}5$	0,2	0,2	0,2
21 $\bar{3}0$	0,2	0,1	0,1
12 $\bar{3}5$	0,3	0,2	0,2
0009	1,8	0,5	0,3

электрических свойств фольг сплавов сурьма-мышьяк, получаемых быстрой закалкой из жидкой фазы.

Фольги сплавов Sb- $x$  ат. % As ( $x = 2,4$  и  $8$ ) получены быстрой кристаллизацией капли расплава, выброшенной на внутреннюю полированную поверхность вращающегося медного цилиндра. Толщина фольг находится в пределах 10—60 мкм. При таких условиях кристаллизации скорость охлаждения расплава достигает  $10^6$  К/с [4]. Исследование текстуры фольг проведено с помощью обратных полюсных фигур. Полюсные плотности дифракционных линий, полученных с помощью дифрактометра ДРОН-3 в медном излучении, рассчитаны по методу Харриса [5]. Измерения удельного электросопротивления  $\rho$ , магнетосопротивления  $\beta$ , коэффициента Холла  $R$  и

дифференциальной термо-ЭДС  $\alpha$  проведены в интервале 77—300 К.

Быстрозакаленные фольги сплавов сурьма-мышьяк имеют мелкозернистую структуру. В фольгах сплава Sb-2 ат. % As образуется текстура  $\{10\bar{1}2\} + (0001)$ , как видно из таблицы, в которой приведены полюсные плотности дифракционных линий. С увеличением содержания мышьяка в сурьме текстура  $\{10\bar{1}2\}$  усиливается, а текстура  $(0001)$  исчезает. Формирование текстуры  $\{10\bar{1}2\}$  связано с процессами зарождения и роста кристаллитов [6]. Из шести пирамидальных плоскостей  $\{10\bar{1}2\}$  три ( $(01\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}2)$  и  $(1\bar{1}02)$ ) характеризуются самой высокой ретикулярной плотностью атомов, что способствует зарождению кристаллитов, у которых указанные плоскости ориентированы параллельно поверхности холодильника, т. е. поверхности фольги. Каждый атом сурьмы связан с тремя другими ближайшими атомами ковалентными связями. Две ковалентные связи располагаются в плоскостях  $(01\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}2)$  и  $(1\bar{1}02)$ , а третья связывает два атома соседних плоскостей. На межфазной границе кристалл—жидкость, совпадающей с плоскостями  $(01\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}2)$  и  $(1\bar{1}02)$ , образуется высокая плотность активных центров в виде ненасыщенных ковалентных связей. К ним легко присоединяются атомы из жидкой фазы, вызывая быстрый рост кристаллитов с указанной ориентировкой.

Существование текстуры  $(0001)$  энергетически выгодно, так как плоскость спайности характеризуется низким значением удельной поверхностной энергии. Можно предположить, что появление кристаллитов с ориентировкой  $(0001)$  вызвано рекристаллизационными процессами. Следует отметить, что такая же текстура, обусловленная рекристаллизационными процессами, наблюдалась в фольгах кадмия и цинка, полученных быстрым охлаждением из расплава [7]. Легирование задерживает протекание рекристаллизации, что приводит к исчезновению текстуры  $(0001)$  в сплавах, содержащих 4 и 8 ат. % As, и вызывает усиление текстуры  $\{10\bar{1}2\}$ .

Концентрационные зависимости  $\rho(x)$ ,  $\beta(x)$  и  $R(x)$  фольг сплавов Sb-As, измеренные при 77 К, представлены на рис. 1. Легирование сурьмы мышьяком вызывает увеличение удельного электросопротивления и уменьшение магнетосопротивления и коэффициента Холла. Температурные зависимости  $\rho(T)$ ,  $R(T)$  и  $\alpha(T)$  фольг Sb-4 ат. % As приведены на рис. 2. С увеличением температуры наблюдается рост удельного электросопротивления и дифференциальной термо-ЭДС и незначительное умень-

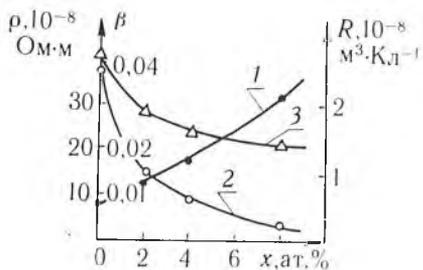


Рис. 1. Концентрационные зависимости  $\rho(1)$ ,  $\beta(2)$  и  $R(3)$  фольг сплавов сурьма-мышьяк при 77 К

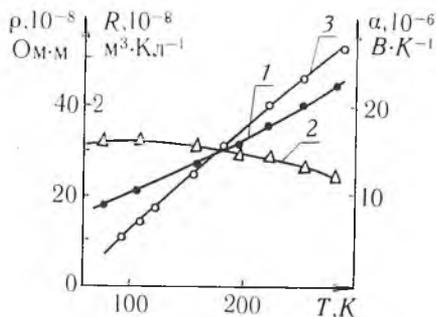


Рис. 2. Температурные зависимости  $\rho(1)$ ,  $R(2)$  и  $\alpha(3)$  фольг сплава Sb-4 ат. % As

шение коэффициента Холла. Следует отметить, что температурные зависимости кинетических свойств фольг исследуемых сплавов и фольг сурьмы качественно совпадают. Последнее позволяет заключить, что мышьяк в висмуте является электрически нейтральным легирующим элементом, т. е. не нарушает равенства концентраций электронов и дырок.

Проведен расчет параметров электронов и дырок в фольгах сплавов сурьма-мышьяк по двухзонной изотропной модели, которая успешно применялась при изучении общих закономерностей изменения энергетического спектра полуметаллов. Из него следует, что легирование сурьмы мышьяком приводит к уменьшению концентраций электронов и дырок, указывающее на уменьшение перекрытия валентной зоны и зоны проводимости. Наблюдается также уменьшение подвижностей дырок и электронов, уменьшение их отношения с ростом мышьяка в сурьме. По этой причине легирование сурьмы мышьяком вызывает уменьшение коэффициента Холла.

### Список литературы

1. Метастабильные и неравновесные сплавы / Ю. В. Ефимов, Г. Варлимонт, Г. Г. Мухин и др.; Под ред. Ю. В. Ефимова. М., 1988.
2. Хансен М., Андерко Е. Структура двойных сплавов. М., 1962.
3. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Зу Хен Чер // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 6. С. 535.
4. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
5. Русаков А. А. Рентгенография металлов. М., 1977.
6. Шепелевич В. Г. // Изв. АН БССР. Неорганические материалы. 1988. Т. 24. № 4. С. 542.
7. Физическое металловедение / Под ред. Р. У. Кана, П. Хаазена. М., 1987. Т. 2.

Поступила в редакцию 21.05.90.

УДК 538.123+621.083.8

В. И. ПРОКОШИН, В. А. ЯРМОЛОВИЧ,  
Л. А. АНДАРЛО, Т. М. РАБКЕВИЧ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ КОНЦЕНТРАТОРОВ МАГНИТНОГО ПОТОКА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА

Использование концентраторов магнитного потока значительно увеличивает чувствительность к магнитному полю преобразователей Холла [1]. Этот путь более прост, чем применение интегральных датчиков Холла либо традиционных схем усиления сигнала. При этом не требуется дополнительных источников электроэнергии. Особенно перспективно использование концентраторов в плоском исполнении, что обусловлено их технологической совместимостью с микроэлектронной технологией. Ис-

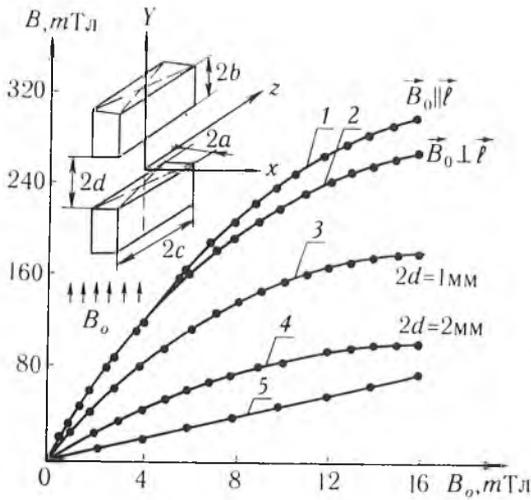


Рис. 1. Зависимость индукции магнитного поля  $B$  в центре симметрии концентратора магнитного потока ( $x=0, y=0, z=0$ ) от  $B_0$ : 1, 2 — сталь 3415;  $2a = 0,35$  мм,  $2b = 40$  мм,  $2c = 40$  мм,  $2d = 1$  мм при различных ориентациях  $\vec{B}_0$  и  $\vec{l}$ . 3, 4 — пермаллой;  $2a = 0,05$  мм,  $2b = 30$  мм,  $2c = 40$  мм с разными зазорами  $2d$ . 5 — сталь 3415;  $2a = 0,35$  мм,  $2b = 6,5$  мм,  $2c = 40$  мм,  $2d = 1$  мм

Для исследования свойств концентратора между пластинами располагается пленочный датчик Холла из  $p\text{-InSb-i-GaAs}$ , нормаль к которому параллельна оси  $y$ , что соответствует измерению составляющей  $B_y$  магнитной индукции. Внешнее магнитное поле  $B_0$  создавалось соленоидом, размеры которого значительно превышали габариты концентратора. Сигнал с элемента Холла регистрировался дифференциальным вольтметром В2-34. Зазор между пластинами  $2d$  и местоположение чувствительной области элемента контролировались с помощью микроскопа МБС-1.

Концентраторы изготавливались из пермаллоя с размерами  $2a = 0,5$  мм либо стали марки 3415 толщиной 0,35 мм. В последнем случае пластины вырезались либо параллельно вектору прокатки  $\vec{l}$ , либо перпендикулярно ему, что давало возможность исследовать влияние текстуры на величину магнитного поля в зазоре концентратора.

Для описания индукции магнитного поля  $|B|$  в зазоре концентратора использовалась формула Аркадьева [3]

$$B = B_0 \left[ \frac{1}{\mu(H_0)} + N_p \left( 1 - \frac{1}{\mu(H_0)} \right) \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $B_0$  — индукция внешнего магнитного поля,  $H_0$  — его напряженность. Относительная магнитная проницаемость материала концентратора обозначена через  $\mu(H_0)$ , а  $N_p(x, y, z)$  — размагничивающий фактор, который в общем случае является функцией координат и геометрии пластин. Для подавляющего большинства случаев, когда пластины изготовлены из материала с высокой начальной магнитной проницаемостью  $\mu_{\text{нач}}$ , выполняется неравенство  $1/\mu_{\text{нач}} \ll N_p$ , что дает возможность определить  $N_p$  из формулы (1) следующим образом:

$$N_p = \lim_{B_0 \rightarrow 0} B_0/B. \quad (2)$$

Таким образом, в области линейной зависимости  $B$  от  $B_0$  (см. рис. 1) имеем  $B = B_0/N_p$ , а величина  $1/N_p = K_y(0)$  имеет смысл коэффициента усиления концентратором магнитного потока, проходящего через элемент Холла. В этой области  $K_y(0)$  не зависит от внешнего магнитного

пользование твердотельных принципов усиления сигнала соответствует направлению создания элементов функциональной электроники.

Выбор формы и материала концентратора определяет функцию преобразования элементом Холла величины индукции магнитного поля в полезный сигнал. При этом эмпирический путь подбора геометрических параметров концентраторов очень трудоемок, а вопрос о влиянии магнитных характеристик материала практически не разработан.

Как показано в литературе [2], оптимальной для плоского концентратора является форма тонкого прямоугольного параллелепипеда с размерами  $2b, 2c, 2a$  соответственно, подчиняющаяся условию  $a \ll b, a \ll c$  (рис. 1).

поля, хотя в общем случае  $K_y = B/B_0$  является нелинейной функцией  $B_0$  или  $H_0$ , что следует из (1).

Для анализа зависимости  $K_y(B_0)$  при значительном увеличении  $B_0$  выберем область, в которой индукция в материале практически близка к значению технического насыщения  $B_s$ . В этом случае легко получить:

$$\frac{1}{K_y(B_0)} = B_0 \frac{1 - 1/K_y(0)}{B_s} + \frac{1}{K_y(0)}. \quad (3)$$

Следовательно,  $K_y(B_0) \sim 1/B_0$  при больших  $B_0$ , что хорошо согласуется с нашими экспериментальными результатами (рис. 2).

Важно и то, что в некоторых частных случаях можно учесть анизотропию вещества концентратора. Так, если внешнее магнитное поле  $B_0$  совпадает с осью анизотропии или перпендикулярно ему, то под  $\mu(H_0)$  подразумеваются компоненты тензора  $\mu_{ij}$ , а именно  $\mu_{\parallel}$  и  $\mu_{\perp}$ . Так, в случае холоднокатанных анизотропных сталей, когда  $\vec{B}_0$  параллелен либо перпендикулярен направлению прокатки (вектору прокатки  $\vec{l}$ ), эффект анизотропии можно оценить из следующего выражения:

$$\frac{B_{\parallel} - B_{\perp}}{B_0} = \left[ \frac{1}{\mu_{\parallel}} + N_p \left( 1 - \frac{1}{\mu_{\parallel}} \right) \right]^{-1} - \left[ \frac{1}{\mu_{\perp}} + N_p \left( 1 - \frac{1}{\mu_{\perp}} \right) \right]^{-1}. \quad (4)$$

При небольших  $B_0$ , когда выполняются условия  $1/\mu_{\parallel} \ll N_p$ ,  $1/\mu_{\perp} \ll N_p$ , из (4) следует, что величина  $(B_{\parallel} - B_{\perp})$  стремится к нулю. Последнее эквивалентно отсутствию чувствительности магнитного поля к анизотропии свойств ферромагнитного вещества (см. рис. 1). В области нелинейности  $B$  от  $B_0$ , т. е. когда  $1/\mu$  и  $N_p$  сравнимы между собой, наблюдается зависимость величины магнитной индукции от свойств материала концентратора, в том числе от направления прокатки для холоднокатанных сталей, что следует из (4).

Из проведенных исследований следует, что в области линейной зависимости  $B$  от  $B_0$  величина  $K_y(0)$  не зависит от свойств материала, а определяется размерами пластин концентраторов  $2b$  и  $2a$ , а также расстоянием между ними —  $2d$ . Область линейности  $B$  от  $B_0$  определяется отношением  $c/b$  [4] и значительно расширяется с увеличением этого отношения. Свойства материала концентратора (сталь, пермаллой) оказывают эффективное влияние, если сравнимы  $N_p$  и  $1/\mu$ , т. е. в области нелинейности  $B(B_0)$ . Уменьшение величин  $2d$  и  $2a$  при фиксированных других размерах способствует увеличению значения  $K_y(0)$ . К такому же эффекту приводит увеличение длины пластины концентратора  $2b$ .

При планировании разработки концентраторов необходимо использовать расчетные модели, по которым можно оценивать их параметры с точностью  $\sim 10\%$ . Вначале строится модель, описывающая структуру магнитного поля в плоскости симметрии ( $XOY$ ). При этом учитывается, что составляющая индукции по оси  $z$  тождественно равна нулю вследствие симметрии концентратора относительно этой плоскости и поля  $\vec{B}_0$ , т. е. индукция магнитного поля зависит лишь от двух координат ( $x, y$ ). Так как  $a \ll b$ ,  $a \ll c$ , то поле в плоскости ( $XOY$ ) близко к плоскопараллельному. Следовательно, структуру поля можно характеризовать двумя величинами: модулем  $B(x, y, 0) = B(x, y)$  и углом  $\gamma(x, y)$  между вектором  $\vec{B}$  и осью  $x$  в точке с координатами ( $x, y$ ). Далее используются приближенные выражения для

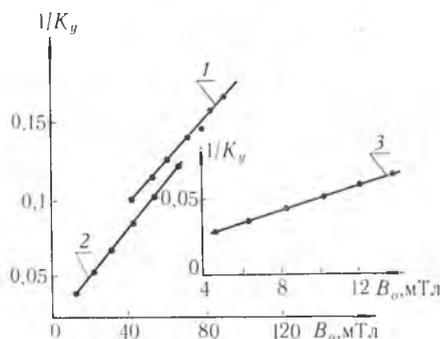


Рис. 2. Зависимость  $1/K_y(B_0)$  концентраторов из стали 3415 при достаточно больших  $B_0$ :

1 —  $2a = 0,35$  мм;  $2b = 10$  мм;  $2d = 0,5$  мм,  
 2 —  $2a = 0,35$  мм;  $2b = 30$  мм;  $2d = 0,5$  мм,  
 3 —  $2a = 0,35$  мм;  $2b = 30$  мм;  $2d = 1$  мм

$\gamma(x, y)$  и  $B(x, y)$  [5], которые верны при линейной зависимости между  $B(x, y)$  и  $B_0$ :

$$\gamma(x, y) = \sum_{i=1}^N K_i \operatorname{arctg} \frac{y - y_i}{x - x_i} + \operatorname{const}, \quad (5)$$

$$B(x, y) = B_0 \prod_{i=1}^N [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{-K_i/2}, \quad (6)$$

где  $(x_i, y_i)$  — координаты особых точек, а  $K_i$  — их порядки. Суть определения  $x_i, y_i, K_i$  при  $N=20$  изложена в [2]. Составляющие индукции магнитного поля по осям  $x$  и  $y$  записываются соответственно

$$B_x(x, y) = B(x, y) \cos \gamma(x, y), \quad (7)$$

$$B_y(x, y) = B(x, y) \sin \gamma(x, y). \quad (8)$$

Чтобы учесть нелинейные эффекты, связанные с зависимостью магнитной проницаемости ферромагнитного концентратора от  $B_0$ , подставляем  $N_p(x, y)$  (1) и получаем

$$B(x, y) = \frac{B_0 \mu(H_0) \prod_{i=1}^N [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{-K_i/2}}{\prod_{i=1}^N [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{-K_i/2} + [\mu(H_0) - 1]}. \quad (9)$$

Таким образом, структуру магнитного поля в плоскости  $(XOY)$  можно описать выражениями (5) и (9). Точность расчета по этим формулам зависит от выбранной модели, т. е. от набора  $x_i, y_i, K_i$ , ошибка обычно не превышает 10 % [4].

Для описания структуры магнитного поля концентратора вблизи плоскости  $(XOY)$  применяется трехмерное уравнение Лапласа для скалярного потенциала  $U(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (10)$$

В плоскости  $(XOY)$ , т. е. при  $z = 0$ , решение двумерного уравнения Лапласа  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  обозначается через  $U(x, y, 0) = V(x, y)$ . Решение уравнения ищется в виде ряда [6]:

$$U(x, y, z) = V + U_2 z^2 + U_4 z^4 + \dots = V + \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n} z^{2n}, \quad (11)$$

где  $U_{2n}(x, y)$  — функция только координат  $x$  и  $y$ . Подставляя (11) в (10) и приравнявая нулю члены, содержащие  $z^2, z^4, z^6$  и так далее, получаем:

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \\ U_4 &= \frac{1}{4!} \left( \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \right), \\ U_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{p=0}^n \frac{C_n^p \partial^{2n} V}{\partial y^{2p} \partial x^{2(n-p)}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C_n^p$  — число сочетаний из  $n$  по  $p$ .

Из условия  $\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} U(x, y, z)$  получаем следующие выражения для составляющих индукции магнитного поля по осям  $x, y, z$  соответственно:

$$B_x(x, y, z) = B_x(x, y, 0) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n} z^{2n}, \quad (13)$$

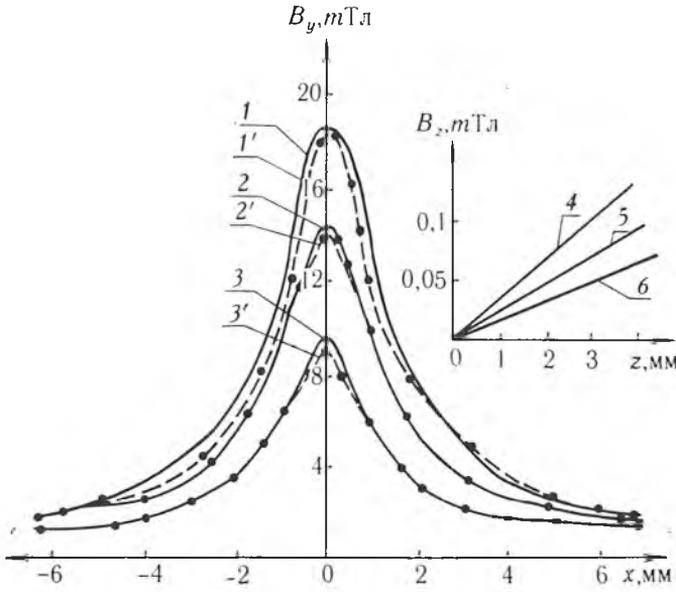


Рис. 3. Структура магнитного поля вблизи пластин концентратора при  $B_0 = 1,2$  мТл и размерах  $2d = 2$  мм;  $2a = 0,35$  мм: 1, 2, 3 — расчет; 1', 2', 3' — эксперимент. 1, 1' —  $2b = 40$  мм, ( $y = 0, z = 0$ ); 2, 2' —  $2b = 30$  мм, ( $y = 0, z = 10$  мм); 3, 3' —  $2b = 20$  мм, ( $y = 0, z = 0$ ); 4, 5, 6 — расчет  $2b = 30$  мм,  $y = 0,7$  мм ( $x = 0,1$  мм;  $0,2$  мм;  $0,22$  мм) соответственно

$$B_y(x, y, z) = B_y(x, y, 0) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n} z^{2n}, \quad (14)$$

$$B_z(x, y, z) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2_n \cdot z^{2n-1} U_{2n}. \quad (15)$$

Функцию  $U_{2n}$  можно выразить через  $B_x(x, y, 0)$  и  $B_y(x, y, 0)$ , если использовать (12):

$$U_2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} B_x(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} B_y(x, y, 0) \right], \quad (16)$$

$$U_n = -\frac{1}{4! \mu_0} \left[ \frac{\partial^3 B_x(x, y, 0)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 B_y(x, y, 0)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 B_x(x, y, 0)}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 B_y(x, y, 0)}{\partial y^3} \right]. \quad (17)$$

Для небольших  $z$  (расчет вблизи плоскости  $XOY$ ), отбрасывая члены высших порядков малости, имеем следующие формулы для вычисления:

$$B_x(x, y, z) = B_x(x, y, 0) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 B_x(x, y, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y(x, y, 0)}{\partial x \partial y} \right] \cdot z^2, \quad (18)$$

$$B_y(x, y, z) = B_y(x, y, 0) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 B_y(x, y, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x(x, y, 0)}{\partial x \partial y} \right] \cdot z^2 \quad (19)$$

$$B_z(x, y, z) = -z \left[ \frac{\partial B_x(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial B_y(x, y, 0)}{\partial y} \right]. \quad (20)$$

В качестве  $B_x(x, y, 0)$ ,  $B_y(x, y, 0)$  можно использовать выражения (7, 8), полученные в приближении плоскопараллельного поля в плоскости ( $XOY$ ), либо аналогичные, полученные из (5, 9) и учитывающие нелинейные эффекты по  $B_0$ .

На рис. 3 приведено распределение составляющих индукции магнитного поля для концентраторов, отличающихся размерами, при сравнении данных, полученных как экспериментальным, так и расчетным путем. Наблюдалось соответствие  $\sim 10-15\%$ .

## Список литературы

1. Панин В. В., Степанов В. М. Практическая магнитометрия. М., 1978.
2. Прокошин В. И., Ярмолович В. А., Андарало Л. А. и др. Характеристики преобразователей Холла с плоскими концентраторами магнитного поля / Редкол. журн. «Вести. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1989. 41 с. Деп в ВИНТИ 24.10.89. № 6457-В89.
3. Преображенский А. А., Вншорд Е. Г. Магнитные материалы и элементы. М., 1986.
4. Андарало Л. А., Прокошин В. И., Ярмолович В. А. // Проблемы магнитных измерений и магнитоизмерительной аппаратуры: Тез. докл. Л., 1989. Ч. 2. С. 3.
5. Соичнев А. Я. Расчет напряженности поля прямым методом. Л., 1967.
6. Грач И. М. Расчет электромагнитных полей на основе анализа их структуры и преобразования уравнений в выделенной подобласти. Фрунзе, 1985.

Поступила в редакцию 03.12.90.

УДК 621.315.592

Д. И. БРИНКЕВИЧ, Ф. НАССУР (САР),  
В. В. ПЕТРОВ, С. А. ЧЕСНОКОВ

### ЗАКАЛОЧНЫЕ ДЕФЕКТЫ В КРЕМНИИ, ЛЕГИРОВАННОМ АКЦЕПТОРНЫМИ ПРИМЕСЯМИ III ГРУППЫ

Закалка кристаллов Si : В приводит к генерации дефектов донорного типа [1, 2]. Так как данные о свойствах закаленного кремния, легированного другими примесями III группы Периодической системы, в литературе отсутствуют, представляет интерес изучение процессов образования и отжига закалочных термодефектов (ЗТД) в Si : A<sup>III</sup> (A<sup>III</sup> = Ga, In, Al). Максимальное внимание уделено Si : Al, так как на этом материале проведено наибольшее число исследований, посвященных радиационным и термическим дефектам [3]. Для сравнения изучался Si : (Sn, Al). Легирование электрически пассивной примесью олова дало возможность идентифицировать роль полей упругих напряжений. На примере Si : (Al, P) рассмотрено возможное влияние Al на генерацию и отжиг ЗТД в компенсированном кремнии п-типа проводимости.

**Параметры исходных образцов кремния и изменение концентрации носителей заряда в процессе закалки**

Образцы	Примесь	$N_{\text{исх}} \times 10^{-15}$ , см <sup>-3</sup>	$\Delta p(\Delta n) \cdot 10^{-15}$ , см <sup>-3</sup>				
			1270 К	1320 К	1370 К	1420 К	1470 К
1	Ga	1,05	1,00	0,95	1,01	0,90	1,02
2	In	1,80	1,70	1,73	1,73	1,69	1,70
3	In	18,5	17,2	17,6	17,9	18,1	18,0
4	Al	28,0	8,2	9,8	12,0	5,8	4,2
5	Al+Sn	30,7	9,0	12,4	21,8	6,6	3,0
6В	Al	15,8	5,0	5,9	10,0	5,4	3,8
6С	»	46,5	6,5	20,8	32,7	14,3	8,2
6Н	»	110	66,3	76,2	80	36,5	27,6
7В	Al+P	4,3	1,3	1,4	1,8	1,4	1,6
7С	»	2,0	0,23	0,27	0,25	0,28	0,28
7Н	»	6,9	4,75	5,48	6,68	3,05	1,82

Примечания: образцы 7В, 7С п-типа проводимости;  $N_{\text{исх}}$  — исходная концентрация носителей заряда.

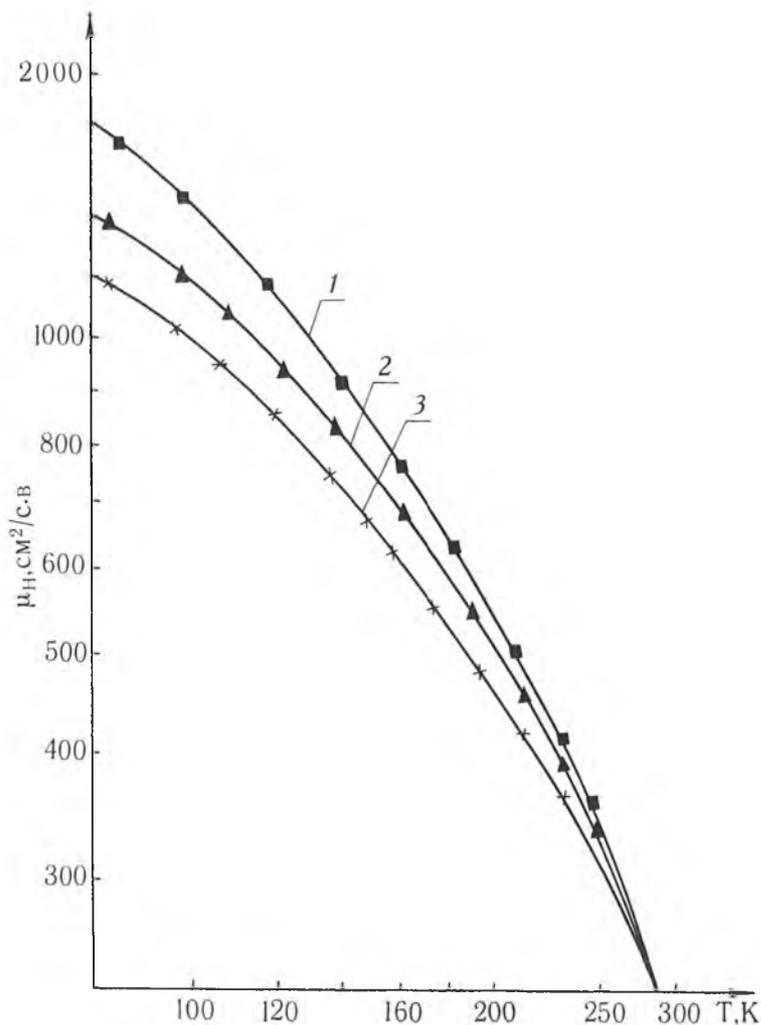


Рис. 1. Температурная зависимость холловской подвижности носителей заряда в образцах Si:Al до (1) и после закалки от температур 1270 (2) и 1370 (3)

Нами исследовались монокристаллы Si:Ga, Si:In, Si:Al, Si:(Al, Sn) и Si:(Al, P), выращенные из расплава по методу Чохральского. Концентрации алюминия, индия, галлия, бора и фосфора, полученные из измерений низкотемпературной (4,2 К) фотолюминесценции и эффекта Холла (4,2—300 К), варьировались в пределах от  $5 \cdot 10^{14}$  до  $2 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. Концентрация олова, измеренная методом нейтронно-активационного анализа, составляла  $3,5 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. Содержание междоузельного кислорода ( $N_0$ ) и углерода в положении замещения ( $N_c$ ) определялось по полосам ИК поглощения при 9,1 и 16,5 мкм соответственно [4]. Закалку осуществляли сбрасыванием образцов в спиртоводный раствор после 10-минутного прогрева при температуре ( $T_{\text{заж}}$ ) 1273—1473 К. Скорость охлаждения составляла не менее  $10^3$  К/с. После закалки образцы хранили при 78 К. Изохронный отжиг проводился в интервале температур 273—923 К с шагом 25 К в течение 15 мин.

Результаты изменений концентрации основных носителей заряда ( $\Delta p$ ,  $\Delta n$ ) (см. таблицу) показывают, что:

— эффективность введения ЗТД для Si:Al, как и для Si:B [5], максимальна при  $T_{\text{заж}} = 1370$  К;

— присутствие в Si:Al изовалентной примеси олова, имеющей боль-

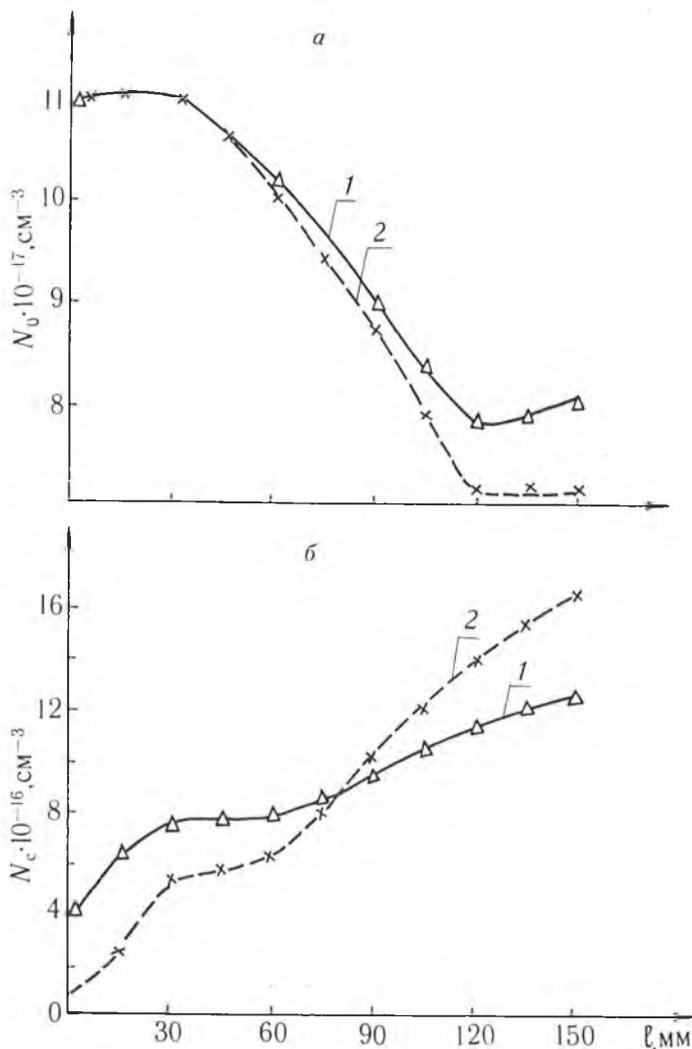


Рис. 2. Распределение по длине слитка Si:Al примесей кислорода (а) и углерода (б) до (1) и после (2) закалки от 1270 К

ший, чем у кремния, ковалентный радиус, увеличивает эффективность введения ЗТД для  $T_{\text{зак}} \leq 1420$  К;

— уменьшение концентрации электронов в процессе закалки Si:Al, P п-типа (образцы 7В, 7С) обусловлено отжигом так называемых «ростовых» термодоноров, генерируемых при остывании слитка после выращивания. Аналогичные изменения концентрации носителей заряда наблюдались при стабилизирующем отжиге 920 К длительностью 30 мин с последующим медленным охлаждением;

— в Si:Ga и Si:In после закалки происходит практически полная компенсация проводимости, причем концентрация ЗТД в этих материалах была значительно выше, чем в Si:Al.

Во всех образцах в процессе закалки имело место снижение холловской подвижности носителей заряда ( $\mu_H$ ) в области низких температур, которое наиболее отчетливо проявлялось при  $T_{\text{зак}} = 1370$  К (рис. 1). От концентраций легирующих (Ga, In, Al) и технологических (С, О) примесей данный эффект существенно не зависел. Такое поведение  $\mu_H$  обычно характерно для материалов, содержащих скопления дефектов.

После закалки образцов, изготовленных из нижней части слитка Si:Al, было обнаружено уменьшение концентрации междуузельного кислорода (рис. 2, а). Поведение углерода было иным: в образцах, выре-

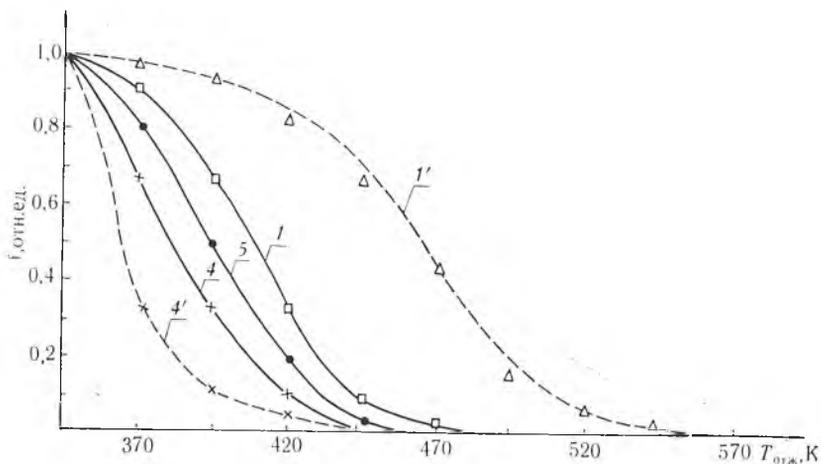


Рис. 3. Зависимость доли неотожженных ЗТД от температуры отжига.  $T_{\text{заж}}$ , К: 1270 (1, 4, 5); 1370 (1', 4'). Номера кривых и образцов в таблице совпадают

занных из нижней части, его концентрация возрастала, а из верхней — падала (рис. 2, б). Указанный эффект можно объяснить тем, что при высокотемпературной обработке (ВТО) происходит растворение включений технологических примесей (Gr, Fe) и миграция атомов в междоузельное положение [1]. При повышенной концентрации (нижняя часть слитка) эти примеси должны вытеснять кислород из междоузлий и способствовать переходу атомов углерода в положение замещения. В случае высоких температур междоузельные атомы Si способны эффективно взаимодействовать с атомами углерода [6], что обуславливает уменьшение  $N_c$  в образцах с малой концентрацией технологических примесей.

Отжиг ЗТД наблюдался при длительном ( $>25$  ч) хранении образцов при 270 К. В процессе изохронного отжига основная доля дефектов исчезала при температурах  $<420$  К, а полная аннигиляция ЗТД происходила в диапазоне 470—520 К (рис. 3). Наличие изовалентной примеси Sn смещало кривые в область высоких температур. С увеличением  $T_{\text{заж}}$  кривые для Si:Al сдвигались в низкотемпературную область, а для Si:Ga и Si:In — в высокотемпературную.

Различие в поведении Si:Al и Si:Ga, Si:In можно объяснить влиянием создаваемых атомами In и Ga полей упругих напряжений, способствующих дополнительному пространственному разделению дефектов вакансионного и междоузельного типов, препятствующему их аннигиляции [2]. Это приводит к возрастанию концентрации ЗТД. В таких кристаллах увеличивается энергетический барьер между ЗТД и их стоками, что проявляется в увеличении температуры отжига закалочных дефектов. Особенности поведения образцов, легированных изовалентной примесью Sn, можно также объяснить наличием деформационных напряжений.

### Список литературы

1. Салманов А. Р., Воронкова Г. И. // ФТП. 1978. Т. 12. № 10. С. 1958.
2. Борщевский В. В., Бринкевич Д. И., Петров В. В. // Изв. АН СССР: Неорганические материалы. 1990. Т. 26. № 1. С. 210.
3. Быковский В. А., Латушко Я. И., Петров В. В. // ФТП. 1987. Т. 21. № 11. С. 2039.
4. Ильин М. А., Коварский В. Я., Орлов А. Ф. // Заводская лаборатория. 1984. Т. 50. № 1. С. 24.
5. Leskoscchek W., Feichtinger H., Vidrich G. // Phys. stat. solidi. 1973. V. 20A. N 2. P. 601.
6. Davies G., Lightowlers E. C., Newman R. C., Oates A. S. // Semicond. Sci. Technol. 1987. V. 2. N 8. P. 524.



УДК 539.3.01

И. А. ПРУСОВ, Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

## НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В [1] изложен вывод общих формул для компонент напряжений и перемещений трехмерного ортотропного тела, основывающийся на специальном представлении составляющих упругого состояния через квазигармонические функции. Для решения основных граничных задач общие формулы преобразованы на основе осуществления довольно сложного предельного перехода для ряда функций [2]. В настоящей работе изложен другой подход к выводу общих формул, не требующий предельного перехода, дающий возможность получить расчетные формулы более простым и эффективным методом. Как и в [1, 2], предполагается, что между коэффициентами упругости имеется определенная зависимость.

Пусть  $u, v, w$  — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовых координат  $x, y, z$ ;  $\sigma_{ij}, \tau_{ij}$  и  $e_{ij}$  — компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука:

$$a_{ij}\sigma_{jj} = e_{ii}, \quad a_{44}\tau_{yz} = e_{yz}, \quad a_{55}\tau_{xz} = e_{xz}, \quad a_{66}\tau_{xy} = e_{xy} \quad (1)$$

и, при отсутствии массовых сил, уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Трем дифференциальным уравнениям равновесия удовлетворим, если положим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2}, & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2}, & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, & \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Phi_i = \Phi_i(x, y, z)$  — некоторые дифференцируемые функции переменных  $x, y, z$ ;  $\mu, \lambda$  — безразмерные коэффициенты.

Выразим компоненты перемещения  $u, v, w$  по формулам:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial}{\partial x} (A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2 + A_{13}\Phi_3), \\ v &= -\frac{\partial}{\partial y} (A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2 + A_{23}\Phi_3), \\ w &= -\frac{\partial}{\partial z} (A_{31}\Phi_1 + A_{32}\Phi_2 + A_{33}\Phi_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A_{ij}$  — произвольные вещественные коэффициенты.

Удовлетворяя уравнениям закона Гука для касательных напряжений при помощи равенств (2), (3), найдем значения постоянных  $A_{ij}$ :

$$A_{11} = A_{21} = -A_{31} = 0,5 a_{66},$$

$$A_{22} = A_{32} = -A_{12} = 0,5 a_{44},$$

$$A_{33} = A_{13} = -A_{23} = 0,5 a_{55}.$$

Представим функции  $\Phi_i(x, y_1, z_1)$  в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \beta(z\varphi(x, \mu y, \lambda z) + \psi(x, \mu y, \lambda z) + \dot{\varphi}(x, \mu y, \lambda z)), \\ \Phi_2 &= \beta\eta(z\varphi(x, \mu y, \lambda z) + \dot{\varphi}(x, \mu y, \lambda z)), \\ \Phi_3 &= \beta\xi(z\varphi(x, \mu y, \lambda z) + \dot{\varphi}(x, \mu y, \lambda z)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varphi(x, y_1, z_1)$ ,  $\psi(x, y_1, z_1)$  — квазигармонические функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$(X + \mu^{-2}Y + \lambda^{-2}L)\varphi(x, y_1, z_1) = 0, \quad (X + \mu^{-2}Y + \lambda^{-2}L)\psi(x, y_1, z_1) = 0.$$

Здесь  $X = \partial^2/\partial x^2$ ,  $Y = \partial^2/\partial y^2$ ,  $L = \partial^2/\partial z^2$ ;  $\dot{\varphi}(x, y_1, z_1) = \int_z^\infty \varphi(x, y_1, z_1) dz$ ,

$$\partial \dot{\varphi}(x, y_1, z_1)/\partial z = -\varphi(x, y_1, z_1), \quad \partial \varphi(x, y_1, z_1)/\partial z = -L\dot{\varphi}(x, y_1, z_1);$$

$\beta, \xi, \eta$  — произвольные постоянные.

С учетом выражений (4) формулы (2), (3) запишем в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \beta[z(Y + \xi L)\varphi + Y(\psi + \dot{\varphi}) - \xi L\dot{\varphi}], \\ \sigma_y &= \beta[z(X + \eta L)\varphi + X(\psi + \dot{\varphi}) - \eta L\dot{\varphi}], \\ \sigma_z &= \beta[z(\xi X + \eta Y)\varphi + (\xi X + \eta Y)\dot{\varphi}], \\ \tau_{xy} &= -\beta\left[z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\psi + \dot{\varphi})\right], \\ \tau_{yz} &= -z\beta\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \quad \tau_{xz} = -z\beta\xi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{44}\eta - a_{55}\xi - a_{66})\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (a_{44}\eta - a_{55}\xi - a_{66})\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} - a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right], \\ v &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{55}\xi - a_{44}\eta - a_{66})\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a_{55}\xi - a_{44}\eta - a_{66})\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y} - a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right], \\ w &= \frac{\beta}{2}\left[z(a_{66} - a_{44}\eta - a_{55}\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + a_{66}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]. \end{aligned}$$

Удовлетворим уравнениям закона Гука для нормальных напряжений. Для этого в (1) подставим выражения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, u, v, w$ , которые определены по формулам (5). Каждое полученное равенство представим в виде суммы двух выражений, одно из которых будет содержать множитель  $z$ .

Приравнявая нулю каждое из выражений, получим две системы дифференциальных уравнений.

Выпишем выражения при множителе  $z$ :

$$\begin{aligned} X\left[a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)\right]\varphi + Y(a_{11} + a_{13}\eta)\varphi + \\ + L(a_{11}\xi + a_{12}\eta)\varphi = 0, \\ X(a_{22} + a_{23}\xi)\varphi + Y\left[a_{12} + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(a_{66} + a_{44}\eta - a_{55}\xi)\right]\varphi + \\ + L(a_{12}\xi + a_{22}\eta)\varphi = 0, \\ X(a_{23} + a_{33}\xi)\varphi + Y(a_{13} + a_{33}\eta)\varphi + \\ + L\left[a_{13}\xi + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(-a_{66} + a_{44}\eta + a_{55}\xi)\right]\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Выпишем систему уравнений, не содержащих множителя  $z$ :

$$\begin{aligned}
 & X \left[ a_{12} \dot{\psi} + a_{12} \dot{\varphi} + a_{13} \dot{\xi} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} + \frac{1}{2} (a_{66} - a_{44} \eta + a_{55} \xi) \dot{\varphi} \right] + \\
 & \quad + Y (a_{11} \dot{\psi} + a_{11} \dot{\varphi} + a_{13} \eta \dot{\varphi}) - L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\varphi} = 0. \\
 & X (a_{22} \dot{\psi} + a_{22} \dot{\varphi} + a_{23} \dot{\xi} \dot{\varphi}) + Y \left[ a_{12} \dot{\psi} + a_{12} \dot{\varphi} + a_{23} \eta \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (a_{66} + a_{44} \eta - a_{55} \xi) \dot{\varphi} \right] - L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\varphi} = 0, \quad (7) \\
 & X (a_{23} \dot{\psi} + a_{23} \dot{\varphi} + a_{33} \dot{\xi} \dot{\varphi}) + Y (a_{13} \dot{\psi} + a_{13} \dot{\varphi} + a_{33} \eta \dot{\varphi}) - \\
 & - L \left[ a_{13} \dot{\xi} \dot{\varphi} + a_{23} \eta \dot{\varphi} + \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\psi} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при операторах  $X$ ,  $Y$ ,  $L$  в системах (6), (7) совпали. Для этого необходимо положить в (7):

$$X \left( a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \dot{\psi} + Y a_{11} \dot{\psi} = 2L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\varphi}, \quad (8)$$

$$X a_{22} \dot{\psi} + Y \left( a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \dot{\psi} = 2L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\varphi}, \quad (9)$$

$$X a_{23} \dot{\psi} + Y a_{13} \dot{\psi} - \frac{1}{2} a_{66} L \dot{\psi} = 2L \left[ a_{13} \dot{\xi} + a_{23} \eta + \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \right] \dot{\varphi}. \quad (10)$$

При зависимости между постоянными упругости ортотропного тела [1]

$a_{66} = 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12})$ ,  $a_{55} = 2(\sqrt{a_{11}a_{33}} - a_{13})$ ,  $a_{44} = 2(\sqrt{a_{22}a_{33}} - a_{23})$   
уравнения (8), (9) преобразуем к виду:

$$X \sqrt{a_{22}} \dot{\psi} + Y \sqrt{a_{11}} \dot{\psi} = \frac{2}{\sqrt{a_{11}}} L (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) \dot{\varphi}, \quad (11)$$

$$X \sqrt{a_{22}} \dot{\psi} + Y \sqrt{a_{11}} \dot{\psi} = \frac{2}{\sqrt{a_{22}}} L (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) \dot{\varphi}.$$

Правые части выражений (11) совпадут, если

$$\sqrt{a_{22}} (a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \eta) = \sqrt{a_{11}} (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta). \quad (12)$$

Из (12) имеем  $\eta/\xi = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$ .

Таким образом, среди уравнений (8)–(10) существуют два линейно независимых соотношения (9), (10). Из них найдем выражения  $X\dot{\psi}$  и  $Y\dot{\psi}$ . Поскольку  $X\dot{\psi} + \mu^{-2}Y\dot{\psi} = -\lambda^{-2}L\dot{\psi}$ , то с учетом найденных выражений  $X\dot{\psi}$  и  $Y\dot{\psi}$ , после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left\{ \left( a_{13} - \frac{a_{23}}{\mu^2} \right) (a_{12} \dot{\xi} + a_{22} \eta) + \left( \frac{a_{22}}{\mu^2} - \sqrt{a_{11} a_{22}} \right) \left[ a_{13} \dot{\xi} + a_{23} \eta + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} (-a_{66} + a_{44} \eta + a_{55} \xi) \right] \right\} \\
 \dot{\psi} = & \frac{\quad}{\lambda^{-2} (a_{13} a_{22} - a_{23} \sqrt{a_{11} a_{22}}) + (\mu^{-2} a_{22} - \sqrt{a_{11} a_{22}}) 0,5 a_{66}} \dot{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Систему уравнений (6) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 & X\dot{\varphi} + \frac{a_{11} + a_{13}\eta}{a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)} Y\dot{\varphi} + \\
 & \quad + \frac{a_{11}\xi + a_{12}\eta}{a_{12} + a_{13}\xi + \frac{1}{2}(a_{66} - a_{44}\eta + a_{55}\xi)} L\dot{\varphi} = 0, \\
 & X\dot{\varphi} + \frac{a_{12} + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(a_{66} + a_{44}\eta - a_{55}\xi)}{a_{22} + a_{23}\xi} Y\dot{\varphi} + \frac{a_{12}\xi + a_{22}\eta}{a_{22} + a_{23}\xi} L\dot{\varphi} = 0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$X\varphi + \frac{a_{12} + a_{33}\eta}{a_{23} + a_{33}\xi} Y\varphi + \frac{a_{13}\xi + a_{23}\eta + \frac{1}{2}(-a_{66} + a_{44}\eta + a_{55}\xi)}{a_{23} + a_{33}\xi} L\varphi = 0.$$

Уравнения (13) будут тождественно удовлетворены, если положить

$$\mu^2 = \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi \left( a_{13} + \frac{a_{55}}{2} \right) - \frac{\eta a_{44}}{2}}{a_{11} + \eta a_{13}} = \frac{a_{23} + \xi a_{33}}{a_{13} + \eta a_{33}} =$$

$$= \frac{a_{22} + \xi a_{23}}{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \eta \left( a_{23} + \frac{a_{44}}{2} \right) - \frac{\xi a_{55}}{2}}; \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi \left( a_{13} + \frac{a_{55}}{2} \right) - \frac{\eta a_{44}}{2}}{a_{11}\xi + a_{12}\eta} = \frac{a_{22} + \xi a_{23}}{a_{12}\xi + \eta a_{22}} =$$

$$= \frac{a_{23} + \xi a_{33}}{\xi \left( a_{13} + \frac{a_{55}}{2} \right) + \eta \left( a_{23} + \frac{a_{44}}{2} \right) - \frac{a_{66}}{2}}. \quad (15)$$

Системы уравнений (14), (15) исследованы в [1]. Воспользовавшись некоторыми конечными результатами [1], приведем выражения для  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\lambda^2 = a_{44}/a_{66}, \quad \mu^2 = \frac{a_{23} + a_{33}\xi}{a_{13} + a_{33}\eta}, \quad \xi = a_{22}a_{66}/2\Delta, \quad \eta = a_{66}\sqrt{a_{11}a_{22}}/2\Delta,$$

$$\Delta = a_{22}(2a_{11}a_{44}/a_{66} - a_{13} - 0,5a_{55}) - a_{12}(2a_{12}a_{44}/a_{66} + 0,5a_{44} - a_{23}).$$

Сопоставляя выражения (5) с ранее полученными формулами [2] для компонент напряжений и перемещений ортотропного полупространства, находящегося под действием нормальной нагрузки, найдем

$$\beta = \frac{\alpha_3}{\lambda} = - \frac{2\xi\alpha_2}{\xi + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}},$$

$$\text{где } \alpha_2 = \frac{a_{11} + 2a_{12}}{2a_{11}(a_{11} - a_{12})}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0,5a_{22}a_{66}\sqrt{a_{44}a_{66}}(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}})\Delta^{-2}.$$

При отсутствии касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  на граничной плоскости  $z=0$  полупространства задача об определении напряженно-деформированного состояния в исследуемой пространственной области сводится к определению квазигармонической функции  $\varphi(x, y, \lambda z)$  всюду в рассматриваемой области, кроме границы  $S$  на  $z=0$ , подверженной действию нормальной нагрузки. Функция  $\varphi$  стремится к нулю на достаточно больших расстояниях от  $S$ ; ее поведение на бесконечности описывается соотношением  $P/R$ , где  $P = \int_S p(x, y) dx dy$  — главный вектор распределенной по  $S$  нагрузки  $p(x, y)$ ;  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние от начала координат, расположенного внутри площадки загрузка  $S$ , до точки наблюдения.

В частности, полагая

$$\Phi_1 = z\alpha\varphi + \psi + \alpha\dot{\varphi},$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = z\alpha\varphi + \alpha\dot{\varphi},$$

где  $\alpha = (a_{11} - a_{12})^{-1}$ ,  $\psi = -2\alpha a_{11}^{-1}(a_{11} + a_{12})\dot{\varphi}$ , получим общие формулы для компонент напряжений и перемещений для изотропного полупространства, которые совпадают с известными формулами Л. А. Галина [3], полученными другим путем.

В качестве примера практического использования полученных формул дадим решение первой основной задачи. Пусть на поверхности полупространства заданы внешние усилия

$$\sigma_z = -p(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ на } S,$$

где  $p(x, y)$  — известная интенсивность распределения нормального давления.

Воспользовавшись формулой для  $\sigma_z$  из (5), при  $z=0$  имеем:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\right)_{z_1 \rightarrow +0} = \Omega(x, y_1) \text{ в обл. } S,$$

$$\text{где } \Omega(x, y_1) = -\frac{p(x, y)}{\beta \xi} - \left(\frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{\mu^2}\right) Y \dot{\varphi}.$$

Из теории потенциала известно, что решение граничной задачи может быть представлено в виде потенциала простого слоя:

$$\varphi(x, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\Omega(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}}.$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение для функции  $\varphi(x, y_1, z_1)$ . Его решение определяется простой квадратурной формулой:

$$\varphi(x, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi\beta\xi} \iint_S \frac{p(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2 + (y_1-\theta_2)^2 + z_1^2}},$$

если  $\eta/\xi = \mu^{-2}$  или  $a_{23} \sqrt{a_{11}} = a_{13} \sqrt{a_{22}}$ .

Для изотропного и трансверсально-изотропного материалов такие соотношения между постоянными упругости выполняются тождественно. При разработке и создании новых анизотропных материалов, обладающих трехосной ортотропией, возможно создание и таких, между модулями упругости которых выполняются указанные выше зависимости.

### Список литературы

1. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 83.
2. Василевич Ю. В., Прусов И. А. // Там же. № 2. С. 66.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.

Поступила в редакцию 05.03.91.

УДК 157.535.3:517.55

С. В. РОГОЗИН, ЛЕ МАЮ ХАЙ (СРВ)

### ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая работа является дальнейшим развитием исследований различных авторов [1—7] по проблеме продолжения голоморфных и мероморфных отображений.

*Определение 1.* Пусть  $X$  — комплексное многообразие и  $L$  — полное локально-выпуклое пространство.

Отображение  $f: X \rightarrow L$  называется голоморфным на  $X$ , если для всякого непрерывного линейного функционала  $l: L \rightarrow \mathbb{C}$  функция  $lf: X \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна.

Через  $O(X, L)$  обозначим пространство голоморфных отображений  $f: X \rightarrow L$ .  $O(X, L)$  можно наделять открыто-компактной топологией. Если  $L$  есть пространство Фреше, то сходимость в  $O(X, L)$  эквивалентна равномерной сходимости на компактных подмножествах  $X$ .

Имеет место следующее:

**Предложение 1.** Пусть  $D$  — открытое подмножество такого многообразия Штейна  $X$ , что  $X$  есть оболочка голоморфности  $D$  и  $L$  — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое голоморфное отображение  $f: D \rightarrow L$  голоморфно продолжается до голоморфного отображения  $\tilde{f}: X \rightarrow L$ .

Для доказательства предложения 1 нам необходима

**Лемма 1.** Пусть  $H_k(r)$  — область Гартогса и  $\Delta^k$  — единичный полидиск в  $\mathbb{C}^k$ . Пусть  $L$  — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое голоморфное отображение  $f: H_k(r) \rightarrow L$  продолжается до голоморфного отображения  $\hat{f}: \Delta^k \rightarrow L$ .

**Доказательство.** Напомним, что под областью Гартогса при любом  $0 < r < 1$  понимается множество вида:

$$H_k(r) = \left\{ (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} |z_j| < r, 1 \leq j \leq k-1 \\ |z_k| < 1 \end{array} \right. \right\} \cup \\ \cup \left\{ (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} |z_j| < 1, 1 \leq j \leq k-1 \\ 1-r < |z_k| < 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Для произвольного  $0 < \varepsilon < r$  рассмотрим:

$$\Delta^k(1-\varepsilon) = \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid |z_j| < 1-\varepsilon, 1 \leq j \leq k\}$$

и

$$K(\varepsilon) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} |z_j| < r-\varepsilon, 1 \leq j \leq k-1 \\ |z_k| < 1-\varepsilon \end{array} \right. \right\} \cup \\ \cup \left\{ z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} |z_j| < 1-\varepsilon \\ 1 \leq j \leq k-1 \\ 1-r+\varepsilon < |z_k| < 1-\varepsilon \end{array} \right. \right\}.$$

Очевидно,  $\overline{K(\varepsilon)} \subset H_k(r)$ .

Для каждого  $z = (z_1, \dots, z_k) \in \Delta^k(1-\varepsilon)$  составим отображение:

$$F_\varepsilon(z_1, \dots, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1-\varepsilon} \frac{f(z_1, \dots, z_{k-1}, t) dt}{t - z_k}.$$

Отображение  $F_\varepsilon: \Delta^k(1-\varepsilon) \rightarrow L$  голоморфно в  $\Delta^k(1-\varepsilon)$  (см. [8]) и определяет продолжение отображения  $f$ . Ввиду единственности семейства  $\{F_\varepsilon\}$  задает голоморфное отображение  $F: \Delta^k \rightarrow L$  и  $F|_{H_k(r)} = f$ . Лемма доказана.

**Определение 2** [5]. Пусть  $M$   $k$ -мерное комплексное многообразие.  $M$  называется выпуклой областью Гартогса, если всякое голоморфное вложение  $\varphi: H_k(r) \rightarrow M$  продолжается до голоморфного отображения  $\hat{\varphi}: \Delta^k \rightarrow M$ .

**Теорема 1** (Docquier — Grauert) [9]. Пусть  $M$  — многообразие Штейна,  $G$  — комплексное многообразие и  $\Pi: G \rightarrow M$  — локально-биголоморфное отображение. Если  $G$  есть выпуклая область Гартогса, то  $G$  штейново.

Перейдем к доказательству предложения 1.

Пусть  $f: D \rightarrow L$  — заданное голоморфное отображение. Через  $E$  обозначим пучок ростков голоморфных отображений  $f: X \rightarrow L$ , определяемый предпучком  $U \mapsto O(U, L)$ , где  $U$  — произвольное открытое подмножество  $X$ . Пусть  $\Pi: E \rightarrow X$  есть отображение, определяемое  $\Pi(x, g_x) = x$ , где  $g_x$  есть росток голоморфных отображений  $g: X \rightarrow L$  в точке  $x \in X$ . Тогда для каждого  $x \in X$   $E_x = \Pi^{-1}(x)$  является множеством ростков голоморфных отображений в точке  $x$ . Ввиду единственности,  $E$  — хаусдорфово пространство.

Пусть  $G$  — связная компонента  $E$ , содержащая множество  $\{f_x \mid x \in D\}$ .  $G$  можно наделять структурой комплексного многообразия при помощи локального гомеоморфизма:

$$\Pi_0 = \Pi|_G: \begin{array}{l} G \rightarrow X \\ (x, g_x) \mapsto x \end{array}$$

Если мы докажем, что  $\Pi_0$  биективно, то это будет означать, что отображение  $\hat{f}$  голоморфно продолжается до голоморфного отображения  $\hat{f}: X \rightarrow L$ .

Сначала покажем, что  $G$  — выпуклая область Гартогса. Пусть  $\varphi: H_k(r) \rightarrow G$  — произвольное голоморфное вложение, где  $k = \dim G = \dim X$ . Ввиду штейновости  $X$ , отображение  $\Pi_0 \circ \varphi: H_k(r) \rightarrow X$  продолжается до голоморфного отображения  $\tau: \Delta^k \rightarrow X$ . Заметим, что  $\tau$  локально-биголоморфно.

Действительно, рассмотрим:  $A = \{\omega \in \Delta^k \mid \text{rank}_\omega \tau < k\}$ . Тогда  $A$  есть аналитическое подмножество коразмерности 1 в  $\Delta^k$  и  $A \cap H_k(r) = \emptyset$ , следовательно,  $A = \emptyset$ . Это значит, что  $\tau$  локально-биголоморфно. Определим отображение  $e: G \rightarrow L$ , заданное формулой  $e(x, g_x) = g_x(x)$ , для каждого  $g_x \in G \cap E_x$ . Ясно, что  $e$  голоморфно. Рассмотрим голоморфное отображение  $e \circ \varphi: H_k(r) \rightarrow L$ . Ввиду леммы 1,  $e \circ \varphi$  продолжается до голоморфного отображения  $h: \Delta^k \rightarrow L$ . Составим отображение  $\hat{\varphi}: \Delta^k \rightarrow E$ , заданное формулой

$$\hat{\varphi}(\omega) = [h(\tau|_{V_\omega})^{-1}]_{\tau(\omega)},$$

где  $V_\omega \subset \Delta^k$  есть достаточно малая окрестность  $\omega$ , на которой  $\tau$  биголоморфно. Отображение  $\hat{\varphi}$  голоморфно и  $\hat{\varphi}|_{H_k(r)} = \varphi$ . Так как  $\varphi(H_k(r)) \subset G$  и  $G$  — связная компонента, то  $\hat{\varphi}(\Delta^k) \subset G$ . Следовательно,  $G$  — выпуклая область Гартогса. По теореме 1,  $G$  — штейново.

Пусть  $j: D \rightarrow G$  есть отображение, определяемое формулой  $j(z) = (z, \hat{f}_z)$ ,  $z \in D$ . Очевидно,  $j$  голоморфно и  $\Pi_0 \circ j = \text{id}_D$ . Пусть  $p$  и  $q$  есть точки  $G$  такие, что  $p \neq q$ . Ввиду штейновости  $G$  существует голоморфная функция  $t: G \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $t(p) \neq t(q)$ . Так как  $X$  есть оболочка голоморфности  $D$ , то функция  $t \circ j: D \rightarrow \mathbb{C}$  продолжается до голоморфной функции  $\hat{t}: X \rightarrow \mathbb{C}$ . Более того, так как

$$\hat{t} \Pi_0|_{j(D)} = t|_{j(D)}, \quad \text{то} \quad \hat{t} \Pi_0 = t.$$

Следовательно,  $\Pi_0(p) \neq \Pi_0(q)$ . Таким образом,  $\Pi_0$  инъективно. Но так как  $D \subset \Pi_0(G) \subset X$ ,  $\Pi_0(G)$  — штейново и  $X$  есть оболочка голоморфности  $D$ , то  $\Pi_0(G) = X$ . Следовательно,  $\Pi_0$  биективно и предложение 1 доказано.

**Определение 3.** Пусть  $X$  — комплексное многообразие и  $L$  — полное локально-выпуклое пространство. Отображение  $f: X \rightarrow L$  называется мероморфным, если для каждого  $x \in X$  существуют окрестность  $U_x$  точки  $x$  и скалярная голоморфная функция  $h: U_x \rightarrow \mathbb{C}$  такие, что  $h \times f$  является голоморфным отображением на  $U_x$  со значениями в  $L$ .

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть  $D$  — открытое подмножество такого многообразия Штейна  $X$ , что  $X$  является оболочкой голоморфности  $D$  и  $L$  — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое мероморфное отображение  $f: D \rightarrow L$  продолжается до мероморфного отображения  $f: X \rightarrow L$ .

Сначала докажем справедливость теоремы для случая, когда  $D$  является областью Гартогса.

**Предложение 2.** Пусть  $H_k(r)$  — область Гартогса,  $0 < r < 1$  и  $L$  — полное локально-выпуклое пространство. Тогда всякое мероморфное отображение  $\hat{f}: H_k(r) \rightarrow L$  продолжается до мероморфного отображения  $\hat{f}: \Delta^k \rightarrow L$ .

**Доказательство.** Произвольно выберем  $0 < \varepsilon < r$  и рассмотрим:

$$\Delta^k(1 - \varepsilon) = \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid |z_i| < 1 - \varepsilon, 1 \leq i \leq k\}$$

и

$$K(\varepsilon) = \left\{ z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \begin{array}{l} |z_i| < r - \varepsilon, 1 \leq i \leq k-1 \\ |z_k| < 1 - \varepsilon \end{array} \right\} \cup \left\{ z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \begin{array}{l} |z_i| < 1 - \varepsilon, 1 \leq i \leq k-1 \\ 1 - r + \varepsilon < |z_k| < 1 - \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что  $\overline{K(\varepsilon)} \subset H_h(r)$ . Для каждого  $z \in \overline{K(\varepsilon)}$  ввиду определения 3 существуют окрестность  $U_z$  точки  $z$  и голоморфная функция  $h_z: U_z \rightarrow \mathbb{C}$  так, что  $h_z \times f \in O(U_z, L)$ . Рассматриваем  $V = \{x \in U_z | h_z(x) = 0\}$  и идеал  $J(V)$ . Ввиду  $H^2(\Delta^h, \mathbb{Z}) = 0$  [8. С. 326—329] существует такая голоморфная функция  $\theta \in O(\Delta^h)$ , что для всякого  $x \in U_z \theta_x$  порождает  $J(V)$ . Это значит, что существует голоморфная функция  $g \in O(\Delta^h)$  так, что  $h_z = g_z \times \theta_z$ . Ввиду компактности  $\overline{K(\varepsilon)}$ , можно покрыть  $\overline{K(\varepsilon)}$  конечным числом окрестностей  $U_{z_1}, \dots, U_{z_q}$ . Тогда существуют такие голоморфные функции  $g_{z_1} \times \theta_{z_1}, \dots, g_{z_q} \times \theta_{z_q}$ , что  $g_{z_i} \times \theta_{z_i} \in O(\Delta^h)$  и  $g_{z_i} \times \theta_{z_i} \times f \in O(U_{z_i}, L)$ . Следовательно,  $g_{z_1} \times \theta_{z_1} \times g_{z_2} \times \theta_{z_2} \times \dots \times g_{z_q} \times \theta_{z_q} \times f \in O(K(\varepsilon), L)$ . По лемме 1, последнее отображение продолжается до голоморфного отображения  $F_\varepsilon: \Delta^h(1 - \varepsilon) \rightarrow L$ . Это значит, что  $f$  продолжается до мероморфного отображения  $G_\varepsilon: \Delta^h(1 - \varepsilon) \rightarrow L$ . Ввиду единственности семейства  $\{G_\varepsilon\}$  определит мероморфное отображение  $G: \Delta^h \rightarrow L$  и  $G$  — продолжение мероморфного отображения  $f$ . Предложение 2 доказано.

Теорему 2 теперь можно получить из предложения 2, опираясь на технику доказательства предложения 1.

### Список литературы

1. Ивашкович С. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 197.
2. Andreotti A., Stoll W. // Ann. Math. 1960. V. 72. № 2. P. 312.
3. Griffith P. A. // Invent. Math. 1971. V. 14. № 1. P. 27.
4. Hirschowitz A. // Invent. Math. 1974. V. 26. № 2. P. 303.
5. Shiffman B. // Math. Ann. 1971. V. 194. № 4. P. 249.
6. Siu Y. T. // Ann. Math. 1975. V. 102. № 3. P. 421.
7. Shiffman B. // Math. Ann. 1976. V. 222. № 2. P. 171.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1985. Т. 2.
9. Docquier F., Grauert H. // Math. Ann. 1960. V. 140. № 2. P. 94.

Поступила в редакцию 11.10.89.

УДК 517.948.32:517.544

Е. А. СЕТЬКО

### РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРАВИЛЬНЫХ $6n$ -УГОЛЬНИКОВ

1. Рассмотрим правильный  $6n$ -угольник  $S$  в плоскости комплексного переменного  $\zeta$  (рис. 1). Стороны его, расположенные в порядке обхода против часовой стрелки, обозначим так:

$$a_1, b_1, c_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, c_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, c_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}, c_n^{-1}.$$

Проведем склеивание сторон по правилу: сторона  $a_k$  склеивается с  $a_k^{-1}$  с помощью отображения симметрии  $a_k \leftrightarrow a_k^{-1}$  относительно прямой, проведенной через точку 0. Аналогично склеиваются стороны  $b_k$  и  $b_k^{-1}$ , а также  $c_k$  и  $c_k^{-1}$  ( $k = 1, \dots, n$ ). В результате склеивания возникает замкнутое ориентируемое двумерное многообразие рода  $n$ . Снабжая это многообразие конформной структурой, индуцируемой комплексными координатами на плоскости  $\zeta$  и законом склеивания сторон [1], получим риманову поверхность.

Рассмотрим задачу нахождения поля функций  $f$ , аналитических в  $S \setminus \partial S$ , кроме конечного числа полюсов, причем предельные значения этих функций связаны равенством:

$$f[\alpha(\zeta)] = f(\zeta), \quad \zeta \in \partial S \setminus \Lambda, \quad (1)$$

где  $\partial S$  — край многоугольника  $S$ ,  $\Lambda$  — совокупность его вершин,  $\alpha: \partial S \setminus \Lambda \rightarrow \partial S \setminus \Lambda$  — описанное выше склеивающее отображение.

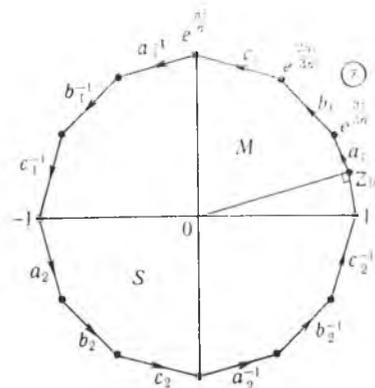


Рис. 1. Правильный  $6n$ -угольник  $S$

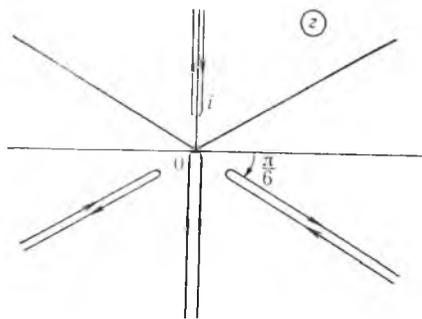


Рис. 2. Образ пятиугольника  $M$

2. Для решения поставленной задачи используем метод конформного склеивания, в основе которого лежит нахождение хотя бы одной непостоянной функции  $f_0$ , удовлетворяющей условию (1). В нашем случае для нахождения функции  $f_0$  используем принцип симметрии.

Пусть  $z = f_0(\xi)$  функция, реализующая конформный гомеоморфизм прямоугольного треугольника  $\Delta$  с вершинами  $0, 1, \xi_0$  на область  $\left\{ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{6} \right\}$  со следующим соответствием граничных точек:

$$f_0(0) = 0; f_0(1) = \infty; f_0(\xi_0) = e^{-\frac{\pi}{6}i} \cos \frac{\pi}{6},$$

где  $\xi_0 = e^{\frac{\pi i}{6n}} \cos \frac{\pi}{6n}$ . Эту функцию можно найти исключением переменного  $\tau$  из уравнений:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{B\left(\frac{1}{6n}; \frac{1}{2}\right)} \int_0^\tau t^{\frac{1}{6n}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt, \\ \tau = \frac{z^3}{z^3-1}, \operatorname{Im} \tau \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первая из функций в (2) — интеграл Кристоффеля — Шварца [2]. Она реализует конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} \tau \geq 0$  на треугольник  $\Delta$  со следующим соответствием граничных точек:

$$\tau = 0 \leftrightarrow \xi = 0; \tau = 1 \leftrightarrow \xi = 1; \tau = \infty \leftrightarrow \xi = \xi_0.$$

Вторая из функций (2) реализует конформный гомеоморфизм области  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{6}$  и полуплоскости  $\operatorname{Im} \tau \geq 0$ , при котором

$$z = 0 \leftrightarrow \tau = 0; z = 1 \leftrightarrow \tau = \infty; z = \infty \leftrightarrow \tau = 1.$$

Продолжая построенную функцию  $f_0(\xi)$  через прямолинейные участки границы по принципу симметрии Римана — Шварца [2] вокруг начала координат в направлении против часовой стрелки сначала через апофему, а затем через радиус и т. д., получим функцию, аналитическую в  $S$ . Обозначим ее  $f_0$ . Докажем, что построенная функция  $f_0$  является искомой. С этой целью заметим, что  $f_0$  реализует конформный гомеоморфизм замкнутого пятиугольника  $M$  с вершинами  $0, 1, e^{\frac{\pi i}{3n}}, e^{\frac{2\pi i}{3n}}, e^{\frac{\pi i}{n}}$  (рис. 1) на область с краем, которую будем называть листом. На ту же область

с краем функция  $f_0$  отображает пятиугольник, полученный из  $M$  поворотом вокруг точки  $0$  на любой угол, целократный  $\frac{\pi}{n}$ .

Докажем, что для  $f_0$  выполняется равенство (1). Для этого отметим, что на сторонах  $a_k$  и  $a_k^{-1}$  функция  $\alpha(\xi)$  совпадает с отображением симметрии относительно радиуса  $[0, e^{(6k-4)\frac{\pi i}{3n}}]$  (см. рис. 1). Заметим, что указанному радиусу на листе (рис. 2) соответствует луч  $\arg z = \frac{5\pi}{6}$ . А стороне  $a_k$  соответствуют на листе берега разреза, находящегося в четвертом квадранте (см. рис. 2). Описанная ситуация соответствует тому, что симметричные точки и точки оси симметрии принадлежат одной прямой  $\arg z = -\frac{\pi}{6} + \pi m, m = 0, 1$  (см. рис. 2). А так как образом любой точки прямой при симметрии относительно той же прямой является сама эта точка, то равенство (1) для  $\xi \in a_k$  установлено. Аналогично проводятся рассуждения для  $\xi \in b_k$  и  $\xi \in c_k$ .

Многоугольник  $S$  можно представить в виде объединения замкнутых пятиугольников

$$M, e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot M, e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot M, \dots, e^{(2n-1)\frac{\pi i}{n}} \cdot M, \quad (3)$$

каждый из которых  $f_0$  конформно отображает на лист (см. рис. 2). Считая листы, соответствующие различным пятиугольникам, различными, будем нумеровать их в том порядке, в котором расположены их прообразы в (3).

3. Располагая листы над плоскостью комплексного переменного  $z$ , склеим их в соответствии с тем, как в пункте 1 была образована замкнутая поверхность. Закон склеивания листов в окрестности точки  $z = 0$  дается подстановкой:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$ . В окрестности остальных конечных точек ветвления листы должны склеиваться по закону подстановки:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$ .

Таким образом, мы получим замкнутую  $2n$ -листную поверхность наложения расширенной плоскости  $z$  с известным законом склеивания листов и с известными точками ветвления. Задача свелась к тому, чтобы найти поле алгебраических функций, соответствующих построенной поверхности наложения. Такое поле порождается неприводимым алгебраическим уравнением степени  $2n$  по переменной  $w$  [4]:

$$w^{2n} + a_1(z)w^{2n-1} + \dots + a_{2n}(z) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения (4) — неизвестные, их надо найти.

4. При  $n = 1$  рассматриваемый многоугольник является правильным шестиугольником, а искомые функции — эллиптическими. Соответствующее этому случаю накрытие листа является двулистным, а искомое алгебраическое уравнение (4) можно взять, например, в виде:

$$v^2 = z(z^3 + i). \quad (5)$$

Для  $n > 1$  искомое поле будет расширением степени  $n$  поля рациональных функций  $R(z, v)$ , порожденного уравнением (5). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что функциям поля, порожденного уравнением (5), соответствуют функции, мероморфные в многоугольнике  $S$ , удовлетворяющие равенству (1) и дополнительному равенству:

$\hat{f}(e^{\frac{2\pi i}{n}} \xi) = \hat{f}(\xi), \xi \in [0, 1]$ . Степень расширения равна  $n$ , так как  $S$  можно рассматривать как  $n$ -листное накрытие его части — многоугольника  $M_1$  (рис. 3), у которого одинаково обозначенные пары сторон считаются склеенными.

Как и в работе [6], группа, порожденная вращением  $\zeta \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta$ , — циклическая, рассматриваемое расширение также циклическое. Поэтому алгебраическое уравнение, задающее искомое расширение, можно искать в виде следующего двучленного уравнения:

$$\omega^n = f(z, v),$$

где  $f(z, v)$  — некоторая рациональная функция от переменных  $z$  и  $v$ , связанных уравнением (5).

Таким образом, наша задача свелась к нахождению  $f(z, v)$  в (6).

Будем искать эту функцию, во-первых, в виде многочлена, а, во-вторых, в виде  $f = \Phi^n$ , где  $\Phi$  — новая неизвестная функция. Функцию  $\Phi$  будем искать как решение скалярной задачи Римана на римановой поверхности  $M_1$ , т. е. как аналитическую внутри  $M_1$  и удовлетворяющую следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \Phi^+(\zeta) = e^{-\frac{2\pi i}{n}} \Phi^-(\zeta), \zeta \in A, \\ \Phi(\zeta) = \Phi[\alpha(\zeta)], \zeta \in a_1 \cup b_1 \cup c_1, \\ \Phi(\zeta) = \Phi(e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta), \zeta \in d, \end{cases} \quad (7)$$

где линия  $A$  является каноническим сечением (см. рис. 3) и служит контуром.

5. Будем решать задачу (7) по схеме, приведенной в [3], посредством сведения к проблеме обращения Якоби. Общее решение этой задачи имеет вид:

$$\Phi(\zeta) = \varphi(\zeta) \exp \left\{ - \int_{\hat{\zeta}}^q \widehat{d\omega}_{\zeta\zeta}(\tau) \right\}, \quad (8)$$

где символом  $\widehat{d\omega}_{\zeta\zeta}(\tau)$  обозначен разрывной аналог ядра Коши [3] на  $M_1$ ,

$\widehat{\zeta} = e^{\frac{\pi i}{n}}$ , а точка  $q$  и путь интегрирования определяются из проблемы обращения Якоби. Для того чтобы определить мероморфную всюду на  $M_1$  функцию  $\varphi$ , запишем дивизор экспоненты в (8):  $(\widehat{\zeta})^{-1}(q)^{-1}$ . Отсюда следует, что  $\varphi(\zeta)$  в (8) надо подчинить единственному условию  $\varphi(q) = 0$ .

Считая, что  $q \in M_1$ , а интегрирование в (8) ведется по прямолинейному отрезку  $[\zeta, q]$ , можно записать проблему обращения в виде уравнения

$$\omega(q) = \frac{1-n}{n}, \quad (9)$$

где  $\omega(q) = \int_{\hat{\zeta}}^q d\omega(\tau)$ . В последнем равенстве через  $d\omega(\tau)$  обозначен комплексно-нормированный абелев дифференциал 1-го рода на  $S$ . Решая проблему обращения (9), получаем функции:

$$\begin{aligned} t_0 &= p \left( \frac{1-n}{n} \sqrt{i} K, 0, 4i \right), \\ h_0 &= p' \left( \frac{1-n}{n} \sqrt{i} K, 0, 4i \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $p$  и  $p'$  — функция Вейерштрасса и ее производная [5],  $K$  — нормирующий множитель, который находится из условия:

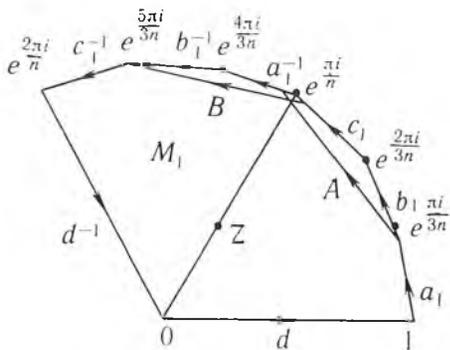


Рис. 3. Многоугольник  $M_1$

$$\frac{1}{K} \int_A \frac{dz}{\sqrt{z(z^3+i)}} = 1.$$

Переменные  $t$  и  $h$  в (10) связаны соотношением  $h^2 = 4t^3 - 4i$ . Для перехода в (10) к переменным  $z$  и  $v$  необходимо сделать замену  $z = \frac{1}{t}$ .

6. Исходя из решения (8) скалярной задачи Римана получим, что искомую функцию  $f$  в (6) можно взять в виде:

$$f(z, v) = [\varphi(\xi)]^n \exp \left\{ -n \int_{\xi}^q \tilde{d\omega}_{\xi}(\tau) \right\}. \quad (11)$$

Осталось найти явные аналитические выражения через  $z$  и  $v$  для символов, входящих в правую часть (11). В качестве  $\varphi$  в (11) можно взять  $\varphi(\xi) = z - z_0$ , где  $z = f_0(\xi)$ ,  $z_0 = \frac{1}{t_0}$ , а  $t_0$  из (10). Правая часть (11) — целая рациональная функция от  $z, v$ . Она имеет нуль кратности  $n$  в точке  $(z_0, -v_0)$  и полюс кратности  $n$  над точкой  $z = \infty$ . В зависимости от четности  $n$  возникают два случая. Для четного  $n$  искомая функция  $f$  будет иметь вид:

$$f(z, v) = (A_0 + A_1 z + \dots + A_{m+2} z^{m+2}) + v(B_0 + \dots + B_m z^m). \quad (12)$$

Если же  $n$  нечетно, то дополнительно предполагаем, что  $f(0, 0) = 0$ , поэтому

$$f(z, v) = (A_1 z + \dots + A_{m+2} z^{m+2}) + v(B_0 + \dots + B_m z^m), \quad (13)$$

где  $A_0, \dots, A_{m+2}, B_0, \dots, B_m$  — неопределенные коэффициенты. Их общее число  $(2m+3)$ , если  $n$  нечетно, и  $(2m+4)$ , если  $n$  четно равно  $n$ . Для нахождения этих коэффициентов необходимо решить систему  $n$  линейных однородных уравнений

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} f(z, v(z)) \right|_{\substack{z=z_0 \\ v=-v_0}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (14)$$

Существование нетривиального решения системы (14) вытекает из существования нетривиального решения задачи Римана (7).

### Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 64.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
3. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
4. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
5. Ахнезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
6. Зверович Э. И., Сетько Е. А. Римановы поверхности правильных  $4n$ -угольников / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1990. 17 с. Деп. в ВИНТИ 04.04.90. № 1845-В90.

Поступила в редакцию 30.05.90.

УДК 62-501.7

Г. А. ХАЦКЕВИЧ, А. В. ПОНОМАРЕНКО

### ОБНАРУЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ЗАВИСИМЫМ ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим линейную многофакторную регрессионную модель, с помощью которой, например, могут быть описаны информационные системы, функционирующие на фоне помех:

$$y_t = \sum_{i=1}^p \theta_i(t) x_i(t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (1)$$

В модели (1) неизвестные параметры  $\theta_i(t)$ ,  $i=1, \dots, p$  в некоторые моменты времени  $t_j \in \{p+1, \dots, T\}$ ,  $j=1, \dots, J$ , такие, что

$$\min_{1 < j < J} (t_j - t_{j-1}) > p_1, \quad t_0 = 0, \quad p_1 = kp, \quad k \gg 1,$$

могут скачкообразно изменять свои значения:

$$\theta_i^*(t) = \theta_i^{(0)} + \sum_{j=1}^J (\theta_i^{(j)} - \theta_i^{(j-1)}) e(t - t_j), \quad i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

где  $e(\tau)$  — единичная функция Хевисайда;  $\theta_i^{(j)} \neq \theta_i^{(j-1)}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Заметим, что если  $\exists t_j$  такой, что  $\theta_i^{(j)} = 0$ , уравнение (2) представляет собой структурную неоднородность модели (1), если же  $\forall t_j$ ,  $\theta_p^{(j)} \neq 0$ , то имеет место параметрическая неоднородность модели в рамках неизменной структуры.

Проблеме обнаружения моментов «разладки»  $\{t_j\}$  посвящено большое количество работ [1]. Особенностью данного объекта исследования (1) является коррелированность ошибок наблюдений  $\xi_i$ ,  $t=1, \dots, T$ , образующих гауссовскую последовательность центрированных случайных величин, для которой:

$$M(\xi_t \xi_s) = \begin{cases} \sigma^2 \rho(t, s), & \text{если } t \neq s \\ \sigma^2, & \text{если } t = s, \quad t, s = 1, \dots, T, \end{cases}$$

где  $M$  — символ математического ожидания.

Задача состоит в обнаружении моментов неоднородности  $t_j$ ,  $j = \overline{1, J}$  в условиях линейно независимых переменных  $x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, p$  по наблюдениям  $y_1, \dots, y_T$ .

## 2. Метод решения задачи.

В целях последовательной обработки наблюдений оценивание неизвестных параметров модели будем осуществлять адаптивным (рекуррентным) образом, предварительно осуществив декорреляцию ошибок наблюдений  $\xi_i$ ,  $t = \overline{1, T}$  и ортогонализацию независимых переменных  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, p}$ .

### 2.1. Декорреляция наблюдений.

Перепишем модель (1) в матричной форме в предположении ее однородности (когда модели (1)  $k \rightarrow \infty$ ):

$$y(T) = X(T) \cdot \theta + \xi(T),$$

где  $y(T) = (y_1, \dots, y_T)'$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ ,  $X(T) = \begin{pmatrix} x_1(1) & \dots & x_p(1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(T) & \dots & x_p(T) \end{pmatrix}$ ,

$$\xi(T) = (\xi_1, \dots, \xi_T)'$$

В силу теоремы Гаусса—Маркова [2] оптимальными оценками параметров  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, p}$  являются МНК-оценки;

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|y(T) - X(T)\theta\|_{R^{-1}(T)}^2, \quad (3)$$

где  $\|z\|_A^2 = z'Az$ ,  $R(T) = M\{\xi(T)\xi'(T)\}$ .

Для представления  $\hat{\theta}$  в рекуррентной форме воспользуемся оператором декорреляции  $D(T)$ , предложенным в [3] и представляющим частный случай разложения Холецкого матрицы  $R^{-1}(T)$ ;  $R^{-1}(T) = D'(T)D(T)$ . Тогда

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \|y^D(T) - X^D(T)\theta\|_{I_T}^2,$$

где  $y^D(T) = D(T)y(T)$ ,  $X^D(T) = D(T)X(T)$ ,  $\xi^D(T) = D(T)\xi(T)$ .

### 2.2. Ортогонализация независимых переменных.

По результату Хотеллинга [2], ортогональная матрица плана

эксперимента  $Q(T)$  позволяет минимизировать полную дисперсию МНК-оценок параметров, т. е.:

$$Q(T) = \operatorname{argmin}_{X(T)} \operatorname{tr} V(\hat{\theta}(X(T))),$$

где  $V(\hat{\theta}) = M(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'$ ,  $\operatorname{tr} A$  — след матрицы  $A$ . Поэтому, используя процедуру ортогонализации Грамма — Шмидта, преобразуем модель декоррелированных наблюдений к виду:

$$y^D(T) = X^D(T)\theta + \xi^D(T) = Q(T)\theta_u + \xi^D(T); \theta_u = U\theta, \quad (4)$$

где  $U$  — верхняя треугольная матрица, а  $Q'(T)Q(T) = I_p$ .

### 2.3. Рекуррентная форма МНК.

С целью выбора универсального задания начальной оценки параметров итеративного алгоритма воспользуемся процедурой Алберта [4], позволяющей генерировать оптимальные оценки  $\hat{\theta}_u(t, \varepsilon)$  параметров  $\theta_u$  модели [4], начиная с обработки первого наблюдения. Из [4] МНК-оценка  $\hat{\theta}_u(t)$  имеет вид:

$$\hat{\theta}_u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{\theta}_u(t, \varepsilon), \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

где

$$\hat{\theta}_u(t, \varepsilon) = \hat{\theta}_u(t-1, \varepsilon) + \gamma(t) \cdot (y_t^D - q'(t)\hat{\theta}_u(t-1, \varepsilon)), \quad \hat{\theta}_u(0, \varepsilon) = 0. \quad (5)$$

В процедуре (5) коэффициент влияния  $\gamma(t)$  вычисляется по разным формулам [4] в зависимости от сравнения текущего объема наблюдений  $t$  и числа неизвестных параметров  $p$ .

### 2.4. Обнаружение моментов неоднородности модели.

Последовательно опишем процедуру обнаружения  $t_j$ . Пусть  $j$  — 1-й момент неоднородности обнаружен и получена его оценка  $\hat{t}_{j-1}$ ,  $j = \overline{2, J}$ . Тогда решение задачи обнаружения момента неоднородности  $t_j$  модели (1) основано на критерии проверки статистических гипотез:

$$H_{0t}^{(j)} : \theta(\tau) = \theta^{(j-1)} \quad (\text{нет «разладки» в } \tau \in [\hat{t}_{j-1}, t]), \quad (6)$$

$$H_{1t}^{(j)} : \theta(\tau) = \theta^{(j)} \quad (\text{есть «разладка» в } \tau \in [\hat{t}_{j-1}, t]), \quad t \geq \hat{t}_{j-1} + p_1 + 1$$

с заданным уровнем значимости  $\alpha$ . Решающей функцией проверки гипотезы (6) служит статистика  $F$ -критерия [2], которая в силу гауссовости и независимости наблюдений  $y_t^D$ ,  $t = \overline{1, T}$  представляет собой статистику критерия отношения правдоподобия (при фиксированном  $\hat{t}_{j-1}$ ):

$$F(t) = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)} \cdot (t - \hat{t}_{j-1} - p_1 - 1), \quad (7)$$

где  $S(t)$  — сумма квадратов отклонений  $y_\tau^D - \hat{y}_\tau^D$ ,  $\tau = \overline{1, t}$ :

$$S(t) = \|y^D(t) - Q(t)\hat{\theta}_u(t)\|^2.$$

Статистика  $F(t)$  следует центральному распределению Фишера—Снедекора с  $n_1 = 1$  и  $n_2 = t - \hat{t}_{j-1} - p_1 - 1$  степенями свободы (в случае справедливости гипотезы  $H_{0t}^{(j)}$ ) и имеет нецентральное распределение Фишера—Снедекора с аналогичными степенями свободы и параметром нецентральности  $\delta(t)$  в противном случае. Тогда решающее правило обнаружения момента неоднородности модели  $t_j$  имеет вид:

Если  $F(t) < F^{-1}(1 - \alpha)$ , то  $H_{0t}^{(j)}$  не противоречит выборке

$$1, t - \hat{t}_{j-1} - p_1 - 1$$

$$y_\tau^D, \quad \tau = \overline{\hat{t}_{j-1}, t}. \quad (8)$$

Если  $F(t) \geq F^{-1}_{1, t-\hat{t}_{j-1}-p_{j-1}}(1-\alpha)$ , то  $H_{0t}^{(j)}$  следует отклонить.

$$\hat{t}_j = \min \{t : t > \hat{t}_{j-1}, F(t) \geq F^{-1}_{1, t-\hat{t}_{j-1}-p_{j-1}}(1-\alpha)\}.$$

В правиле (8)  $F^{-1}_{1, t-\hat{t}_{j-1}-p_{j-1}}(1-\alpha)$  квантиль порядка  $1-\alpha$  распределения Фишера—Снедекора.

Заметим, что параметр нецентральности имеет вид [5]:

$$\delta(t) = (q'(t) \Delta \theta_u(t))^2 / (M(\xi_t^D)^2 + q'(t) V(\hat{\theta}_u(t-1)) q(t)), \quad (9)$$

где  $q'(t)$  — строка с номером  $t$  матрицы  $Q(T)$ ,

$$\Delta \theta_u(t) = (\theta_1^{(j)} - \theta_1^{(j-1)}) \dots (\theta_p^{(j)} - \theta_p^{(j-1)}).$$

Статистика (7) может быть вычислена рекуррентным способом, основываясь на теореме из [5]:

**Теорема 1.** Формула вычисления кумулятивных сумм квадратов отклонений  $S(t)$  между экспериментальными и вычисленными по модели наблюдениями имеет вид:

$$S(t) = \begin{cases} S(t-1) + \frac{(y_t^D - q'(t) \hat{\theta}_u(t-1))^2}{M(\xi_t^D)^2 + q'(t) V(\hat{\theta}_u(t-1)) q(t)}, & \text{если } t \geq \hat{t}_{j-1} + p \\ S(t-1), & \text{если } t < \hat{t}_{j-1} + p, S(\hat{t}_{j-1}) = 0. \end{cases}$$

## 2.5. Свойства решающего правила обнаружения неоднородности.

**Лемма.** (Связь между нецентральным и центральным законами распределения Фишера — Снедекора)

$$p_{F(n_1, n_2, \delta)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{k!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \cdot p_{F(n_1+2k, n_2, 0)}(x) \cdot c_k(x), \quad x \in R_+^1, \quad (10)$$

где  $c_k(x) = \left(\frac{n_1}{n_1+2k}\right)^{\frac{n_1+2k}{2}} \cdot \left(\frac{n_2 + (n_1+2k) \cdot x}{n_2 + n_1 x}\right)^{\frac{n_1+2k+n_2}{2}}$ ;  $p_{F(\dots, 0)}(x)$ ,  $p_{F(\dots, \delta)}(x)$  — плотность распределения вероятностей (п. р. в.) центрального и нецентрального закона Фишера — Снедекора соответственно.

Доказательство леммы следует из явного вида п. р. в. нецентрального закона Фишера — Снедекора.

**Теорема 2.** Мощность критерия (8) является монотонной функцией параметра нецентральности  $\delta(t)$ , т. е.

$$W(t) = P(F(t) > F^{-1}_{1, t-\hat{t}_{j-1}-p_{j-1}}(1-\alpha) / \delta(t)) \rightarrow 1 \text{ при } \delta(t) \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим  $A = F^{-1}_{1, t-\hat{t}_{j-1}-p_{j-1}}(1-\alpha)$  и  $\lambda(t) = \frac{\delta(t)}{2}$ , тогда из (10):

$$W(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k(t) e^{-\lambda(t)}}{k!} \int_0^A p_{F(n_1+2k, n_2, 0)}(x) \cdot c_k(x) dx \equiv 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k(t) e^{-\lambda(t)}}{k!} F_k.$$

Вычисляя производную  $W(t)$  по  $\lambda$ , имеем  $\frac{dW(t)}{d\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} (F_k - F_{k+1})$ .

Интегрируя  $F_k$  по частям, легко показать, что  $F_k - F_{k+1} > 0$ , тогда  $\frac{dW(t)}{d\lambda} > 0$ . Далее, существует константа  $0 < L_0 < \infty$ , что  $F_k \leq L_0 \times$

$$\times \left(\frac{A + \frac{n_2}{2}}{A + n_2}\right)^k, \text{ откуда:}$$

$$W(t) \geq 1 - L_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left( \frac{A + \frac{n_2}{2}}{A + n_2} \right)^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = 1 - L_0 e^{-\lambda \frac{n_2}{2(A+n_2)}}.$$

С другой стороны,  $W(t) \leq 1, \forall \lambda$ , так как  $F_k \geq 0, \forall k$ . Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow \infty$  в неравенстве  $1 - L_0 e^{-\lambda \frac{n_2}{2(A+n_2)}} \leq W(t) \leq 1$ , получим  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} W(t) = 1$ .

*Следствие.* Для частного случая модели (1) — «неоднородного» сдвига:  $y_t = \theta(t) + \xi_t$ , где

$$M\xi_t = 0, M(\xi_t \cdot \xi_s) = \rho^{t-s}, |\rho| \leq 1, t, s = \overline{1, T}, \quad (11)$$

мощность критерия  $W(t)$  возрастает при  $\rho \downarrow (-1)$  и убывает при  $\rho \uparrow 1$ .

Доказательство основано на теореме 2 и выражении для  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \frac{(1-\rho) \cdot (\Delta\theta(t))^2}{(1+\rho) \cdot (1 + (1-\rho)/(1+\rho + (1-\rho)(t-2)))}, t \geq 2,$$

полученном по упрощенным формулам декорреляции [6] для зависимости (11).

### 3. Программная реализация алгоритма обнаружения неоднородности.

Предложенный критерий (8) реализован в виде паскаль-программы (компилятор турбо-паскаль версии 4,0 и 5,0), которая может быть использована на любой ПЭВМ (ЕС 1840, ЕС 1841) в операционных си-

#### Результаты моделирования

Коэффициент корреляции															
0,05				0,2				0,4				0,75			
Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки	Номер серии экспериментов	Истинный момент разладки	Коэффициент скачка параметров	Оценка момента разладки
1	5	1,5	5	1	5	1,5	6	1	5	1,5	нет	1	5	1,5	нет
2	6	1,5	6	2	6	1,5	6	2	6	1,5	нет	3	9	1,5	нет
3	7	1,5	7	3	7	1,5	7	3	7	1,5	нет	11	15	1,5	16
4	10	1,5	10	6	10	1,5	10	4	8	1,5	8	12	16	1,5	16
6	15	1,5	16	12	50	1,5	50	6	9	1,5	9	13	17	1,5	17
8	25	1,5	25	13	5	2	6	8	20	1,5	20	20	50	1,5	50
12	50	1,5	50	14	6	2	6	12	50	1,5	50	21	5	2	6
				24	50	2	50	13	5	2	нет	22	6	2	нет
				25	5	3	5	14	6	2	нет	23	7	2	8
				26	6	3	6	24	7	2	7	24	8	2	8
				36	50	3	50	25	8	2	8	25	9	2	10
								26	20	2	20	26	10	2	10
								36	50	2	50	27	11	2	12
												28	12	2	12
												40	25	2	25

Примечания: одна серия — 10 экспериментов;  $\kappa_1^{(0,75)} = 4,8$ ;  $\kappa_2^{(0,75)} = 0,85$ ; где  $\kappa_1$  — оценка эффективности алгоритма без оператора декорреляции,  $\kappa_2$  — с оператором декорреляции.

стемах *MSDOS*, *PCDOS*, *АДОС*. В качестве примера выбиралась следующая модель:

$$y_t = k_t \sum_{i=1}^p \theta_i x_i(t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, 100; \quad p = 3, \quad J = 1,$$

где  $x_1(t) = 1$ ,  $x_{2l}(t) = \cos\left(\frac{2\pi lt}{p}\right)$ ,  $x_{2l+1}(t) = \sin\left(\frac{2\pi lt}{p}\right)$ ,  $l = 1, \left[\frac{p-1}{2}\right]$ .

Множество переменных  $\{\xi_t\}$  — последовательность ошибок наблюдений с характеристиками (11);  $k_l \in \{1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ ,  $\rho \in ]-1; 1[$ .

Из таблицы можно заключить, что для более точного обнаружения момента разладок в условиях усиления корреляции требуется больший объем однородных наблюдений. Оценка эффективности  $\kappa^{(0)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |\hat{t}_j^{(k)} - t_j|$ ,  $m = 10$ .

### Список литературы

1. Статистические проблемы управления. Вильнюс, 1990. Вып. 89.
2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М., 1980.
3. Медведев Г. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1981. № 3. С. 46.
4. Алберт А. Регрессия, псевдонинверсия и рекуррентное оценивание. М., 1977.
5. Хацкевич Г. А. Обнаружение разладки стохастических систем при коррелированных помехах / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1983. 10 с. Деп. в БелНИИТИ 27.06.83. № 761 Бе-Д83.
6. Медведев Г. А., Хацкевич Г. А. // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 69.

Поступила в редакцию 30.06.89.

УДК 519.24

МОХАМЕД ГХАЗАЛ (*Eguzer*), Н. Н. ТРУШ

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАСШИРЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ

**Расширенное конечное преобразование Фурье и его свойства.** Пусть  $x(t)$ ,  $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  — стационарный в широком смысле случайный процесс. Будем предполагать, что  $M x(t) = 0$ ,  $R(\tau)$ ,  $\tau \in Z$ , — ковариационная функция, а  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi] = \Pi$ , — спектральная плотность рассматриваемого процесса.

Пусть  $x(0), x(1), \dots, x(T-1)$  —  $T$  последовательных наблюдений за процессом  $x(t)$ ,  $t \in Z$ . Построим статистику вида:

$$d_T = (\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)}} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) h(t) e^{-i\lambda t}, \quad \lambda \in \Pi, \quad (1)$$

которую будем называть расширенным конечным преобразованием Фурье, где  $h(t)$  — окна просмотра данных, свойства которых достаточно полно изложены в работе [1].

Для статистики  $d_T(\lambda)$ ,  $M d_T(\lambda) = 0$ ,  $\lambda \in \Pi$ . Рассмотрим ковариацию расширенного конечного преобразования Фурье.

**Теорема 1.** Для любых  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  справедливо следующее соотношение:

$$\text{cov} \{d_T(\lambda_1), d_T(\lambda_2)\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv,$$

где

$$\Phi_T(x, y) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \varphi_T(x) \overline{\varphi_T(y)}, \quad (2)$$

$x, y \in \Pi$ , а

$$\varphi_T(x) = \left[ 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{T-1} h(t) e^{ixt}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Используя определение ковариации и учитывая, что  $M d_T(\lambda) = 0$ , получим  $\text{cov}\{d_T(\lambda_1), d_T(\lambda_2)\} = M d_T(\lambda_1) \overline{d_T(\lambda_2)}$ . Подставляя вместо  $d_T(\lambda)$  его выражение в явном виде, задаваемое (1), и используя свойства математического ожидания

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d_T(\lambda_1), d_T(\lambda_2)\} &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} M x(t_1) x(t_2) h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} R(t_1 - t_2) h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2)}. \end{aligned}$$

Вместо ковариационной функции подставим выражение через спектральную плотность. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d_T(\lambda_1), d_T(\lambda_2)\} &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(v) e^{i(t_1 - t_2)v} dv \right\} \times \\ &\times h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2)} = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2)} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} f(v) e^{i(t_1 - t_2)v} dv. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d_T(\lambda_1), d_T(\lambda_2)\} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{t_1=0}^{T-1} h^2(t_1)}} \sum_{t_1=0}^{T-1} h(t_1) e^{i(v - \lambda_1 t_1)} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{t_2=0}^{T-1} h^2(t_2)}} \sum_{t_2=0}^{T-1} h(t_2) e^{-i(v - \lambda_2 t_2)} dv = \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

*Следствие.* Для любого  $\lambda, \lambda \in \Pi$  имеет место равенство:

$$D d_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(v + \lambda) \Phi_T(v) dv,$$

где

$$\Phi_T(v) = \Phi_T(v, v). \quad (4)$$

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 1. Исследуем свойства функции  $\Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2)$ .

**Лемма.** Для произвольных точек  $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$  функция  $\Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2)$ , задаваемая равенством (2), удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv = \frac{1}{\sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t) e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Используя (2), (3), получим, что левая часть соотношения (5) равна:

$$\frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2)} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_1 - t_2)v} dv \right].$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_1 - t_2)v} dv = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2 \\ 2\pi, & t_1 = t_2 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv = \frac{1}{\sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t) e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t},$$

что и требовалось доказать.

Из определения функции  $\Phi_T(v)$ , задаваемой равенством (4), вытекает, что она является периодической с периодом  $2\pi$  и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(v) dv = 1.$$

**Расширенная периодограмма и ее свойства.** Рассмотрим статистику

$$I_T(\lambda) = |d_T(\lambda)|^2, \quad \lambda \in \Pi, \quad (6)$$

где  $d_T(\lambda)$  задается соотношением (1), которую будем называть расширенной периодограммой. Исследуем моменты статистики  $I_T(\lambda)$ .

**Теорема 2.** Для статистики (6) справедливо равенство

$$M I_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u + \lambda) \Phi_T(u) du, \quad (7)$$

$\lambda \in [-\pi, \pi]$ , где функция  $\Phi_T(u)$  задается выражением (4).

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} x(t_1) x(t_2) h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1 - t_2)\lambda}.$$

Используя свойства математического ожидания, определение ковариационной функции и ее связь со спектральной плотностью, имеем

$$M I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)} \cdot \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(v) e^{i(t_1 - t_2)v} dv \right\} h(t_1) h(t_2) e^{-i(t_1 - t_2)\lambda}.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$M I_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \Phi_T(v - \lambda) dv,$$

где  $\Phi_T(v)$  задается равенством (4).

Сделаем замену переменной интегрирования  $v - \lambda = u$  и, учитывая, что подынтегральная функция симметричная и интегрирование осуществляется по промежутку длины  $2\pi$ , имеем

$$MI_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(v + \lambda) \Phi_T(v) dv,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Для произвольных точек  $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2)\} &= \frac{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^4(t)}{\left[\sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)\right]^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mu_1 + \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \mu_3 + \lambda_3) \times \\ &\times \Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \Phi_T(\alpha - \lambda_1, \alpha - \lambda_2) d\alpha \right|^2 + \\ &+ \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \Phi_T(v + \lambda_1, v - \lambda_2) dv \right|^2, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sum_{t=0}^{T-1} h^4(t)} \tilde{\varphi}(\mu_1) \tilde{\varphi}(\mu_2) \tilde{\varphi}(\mu_3) \overline{\tilde{\varphi}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (8)$$

а  $\Phi_T(v_1, v_2)$  задаются равенством (2),  $\tilde{\varphi}(\mu) = \varphi_T(\mu) \left(2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Доказательство.** Используя определение ковариации и свойства математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2)\} &= \frac{1}{\left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)\right]^2} \sum_{t_1, t_2, t_3, t_4=0}^{T-1} [M\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)\} \times \\ &\times h(t_1)h(t_2)h(t_3)h(t_4) e^{-i\{(t_1-t_2)\lambda_1 + (t_3-t_4)\lambda_2\}} - Mx(t_1)x(t_2)Mx(t_3)x(t_4) \times \\ &\times h(t_1)h(t_2)h(t_3)h(t_4) e^{-i\{(t_1-t_2)\lambda_1 + (t_3-t_4)\lambda_2\}}]. \end{aligned}$$

Обозначим  $m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = Mx(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)$  — смешанный момент 4-го порядка, а  $c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \text{sup}\{x(t_1), x(t_2), x(t_3), x(t_4)\}$  — смешанный семинвариант 4-го порядка.

Между смешанными моментами и смешанными семинвариантами 4-го порядка существует следующее связывающее их соотношение [2]:

$$\begin{aligned} c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) - m_2(t_1, t_2)m_2(t_3, t_4) - \\ &- m_2(t_1, t_3)m_2(t_2, t_4) - m_2(t_1, t_4)m_2(t_2, t_3). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая последнее соотношение и тот факт, что для стационарных процессов  $c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = c_4(t_1-t_4, t_2-t_4, t_3-t_4)$ ,  $c_2(t_i, t_j) = c(t_i-t_j)$ ,  $i=1, 2, j=3, 4$ ,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2)\} &= \frac{1}{\left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t)\right]^2} \sum_{t_1, t_2, t_3, t_4=0}^{T-1} [c_4(t_1-t_4, t_2-t_4, t_3-t_4) + \\ &+ R_2(t_1-t_3)R_2(t_2-t_4) + R_2(t_1-t_4)R_2(t_2-t_3)] h(t_1)h(t_2)h(t_3)h(t_4) \times \\ &\times e^{-i\{(t_1-t_2)\lambda_1 + (t_3-t_4)\lambda_2\}} = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $A_1$ . Известно из [2], что

$$c_4(u_1-u_4, u_2-u_4, u_3-u_4) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_4(x_1, x_2, x_3) e^{i \sum_{l=1}^3 x_l(u_l-u_4)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

где  $f_4(x_1, x_2, x_3)$  — семинвариантная спектральная плотность 4-го порядка. Тогда, меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \varphi_T(\beta_1 - \lambda_1) \varphi_T(\beta_2 + \lambda_1) \varphi_T(\beta_3 - \lambda_2) \times \\ \times \overline{\varphi_T(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \lambda_2)} d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3,$$

где  $\varphi_T(\beta)$  задаются равенством (3).

Сделаем замену переменных интегрирования,  $\mu_1 = \beta_1 - \lambda_1$ ,  $\mu_2 = \beta_2 + \lambda_1$ ,  $\mu_3 = \beta_3 - \lambda_2$ , тогда

$$A_1 = \frac{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h^4(t)}{\left[ \sum_{t=0}^{T-1} h^2(t) \right]^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_4(\mu_1 + \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \mu_3 + \lambda_2) \Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \times \\ \times d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3,$$

где  $\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  задается равенством (8).

Рассмотрим  $A_2$  и  $A_3$ . Используя представление для ковариационной функции через спектральную плотность, меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$A_2 = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \Phi_T(v + \lambda_1, v - \lambda_2) dv \right|^2, \\ A_3 = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \Phi_T(\alpha - \lambda_1, \alpha - \lambda_2) d\alpha \right|^2,$$

где  $\Phi_T(x, y)$  задается соотношением (2).

Тогда, объединяя  $A_1, A_2, A_3$ , получим требуемый результат.

### Список литературы

1. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория. М., 1980.
2. Журбенко И. Г., Труш Н. Н. // Литовский мат. сб. 1979. Т. 12. № 1. С. 67.
3. Г х а з а л М. // Материалы респ. науч.-практнч. конф. творческой молодежи «Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение». Мн., 1988. С. 22.

Поступила в редакцию 19.01.90.

УДК 519.28

В. П. КИРЛИЦА

### ТОЧНЫЕ $D$ -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ДЛЯ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Рассмотрим линейную модель наблюдений

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i), \quad i = \overline{1, N}; \quad N \geq 2, \quad (1)$$

где  $-1 \leq x_i \leq 1$ ;  $\theta_0, \theta_1$  — неизвестные параметры,  $\varepsilon(x_i)$  — некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2(x_i)$ .

В [1, 2] показано, что точный  $D$ -оптимальный план для модели (1) с равноточными наблюдениями ( $\sigma^2(x_i) \equiv \sigma^2$ ) имеет вид:

$$\varepsilon_1^0(2s) = \{-1, s; 1, s\}, \quad \varepsilon_1^0(2s+1) = \{-1, s; 1, s+1\}, \\ \varepsilon_1^0(2s+1) = \{-1, s+1; 1, s\}. \quad (2)$$

Построение точных  $D$ -оптимальных планов для моделей с неравноточными наблюдениями до сих пор не было исследовано. В статье рассматривается данная проблема для модели (1).

1. **Линейное изменение дисперсии наблюдений.** В данном пункте предполагается, что на отрезке  $[-1, 1]$  дисперсия наблюдений  $\sigma^2(x)$  изменяется по линейному закону:  $\sigma^2(x) = ax + b$ ,  $|a| < b$ ,  $b > 0$ .

**Теорема 1.** Для модели (1) с линейным законом изменения дисперсии наблюдений планы (2) — точные  $D$ -оптимальные планы.

**Доказательство.** Покажем сначала, что максимальное значение определителя информационной матрицы достигается при  $x_i = \pm 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим поведение определителя информационной матрицы как функции фактора  $x_1$ . Эту функцию обозначим через  $M(x_1)$ . Нетрудно подсчитать, что

$$M(x_1) = \lambda(x_1)(ex_1^2 - 2gx_1 + f) + ef - g^2, \quad (3)$$

где

$$e = \sum_{i=2}^N \lambda(x_i) > 0, \quad f = \sum_{i=2}^N x_i^2 \lambda(x_i), \quad g = \sum_{i=2}^N x_i \lambda(x_i),$$

$$\lambda(x_i) = \sigma^{-2}(x_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Производная  $M(x_1)$  равна:

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = \frac{aex_1^2 + 2bex_1 - 2bg - af}{(ax_1 + b)^2}. \quad (4)$$

Числитель в (4) обращается в ноль в точках  $(-b \pm \sqrt{D/e})/a$ , где  $D = b^2e + 2abg + a^2f$ . Если  $D \leq 0$ , то  $M(x_1)$  монотонно возрастает либо убывает на  $[-1, 1]$ , так как  $dM(x_1)/dx_1$  не меняет знака. Если  $D > 0$ , то  $dM(x_1)/dx_1$  меняет знак. Покажем, что в этом случае функция  $M(x_1)$  выпуклая, т. е.  $d^2M(x_1)/dx_1^2 > 0$ . Действительно:

$$\frac{d^2M(x_1)}{dx_1^2} = \frac{D}{(ax_1 + b)^3} > 0.$$

Итак, в любом случае функция  $M(x_1)$  на  $[-1, 1]$  достигает максимального значения на концах интервала  $[-1, 1]$ . Таким образом, в качестве точек спектра точного  $D$ -оптимального плана можно взять концы интервала  $[-1, 1]$ .

Обозначим через  $E(N)$  план эксперимента, точки спектра которого лежат в концах интервала  $[-1, 1]$ , через  $m$  — количество наблюдений в точке  $-1$ . Тогда количество наблюдений в точке  $1$  будет  $N - m$ . Информационная матрица такого плана равна:

$$M(E(N)) = 4m(N - m) \cdot \lambda(-1) \cdot \lambda(1).$$

Очевидно максимум  $M(E(N))$  по  $m$  достигается при  $m = N/2$ , если  $N = 2s$  и при  $m = (N - 1)/2$  или  $m = (N + 1)/2$ , если  $N = 2s + 1$ ,  $s \geq 1$ . Теорема доказана.

2. **Кусочно-линейное непрерывное изменение дисперсии наблюдений.** Пусть дисперсия наблюдений  $\sigma^2(x)$  является непрерывной кусочно-линейной положительной функцией на  $[-1, 1]$ , т. е. на интервалах  $[c_i, c_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ;  $c_1 = -1$ ,  $c_{r+1} = 1$ , объединение которых составляет отрезок  $[-1, 1]$ ,  $\sigma^2(x)$  описывается прямыми линиями.

Важно уметь строить точные  $D$ -оптимальные планы для кусочно-линейных функций  $\sigma^2(x)$ , поскольку любую непрерывную дисперсию наблюдений можно достаточно точно аппроксимировать кусочно-линейной непрерывной функцией.

Используя рассуждения из доказательства теоремы 1, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** Существует точный  $D$ -оптимальный план для линии регрессии (1) с кусочно-линейной непрерывной положительной дисперсией наблюдений, точки спектра которого принадлежат множеству точек  $\{c_i, i = \overline{1, r+1}\}$ .

Теорема 2 позволяет эффективно строить точные  $D$ -оптимальные планы для кусочно-линейных непрерывных положительных функций  $\sigma^2(x)$ .

Из теоремы 2 следует, что точный  $D$ -оптимальный план следует искать среди планов вида:

$$\varepsilon_1(N) = \{c_i, m_i; i = \overline{1, r+1}\}, \quad (5)$$

где  $m_i$  — количество наблюдений в точке  $c_i$ . Очевидно,  $m_i$  должны удовлетворять ограничениям:

$$0 \leq m_i \leq N, \quad i = \overline{1, r+1}; \quad \sum_{i=1}^{r+1} m_i = N. \quad (6)$$

Пусть  $\lambda(c_i) = \lambda_i, i = \overline{1, r+1}$ . Тогда информационная матрица  $M(\varepsilon_1(N))$  плана (5)

$$M(\varepsilon_1(N)) = \sum_{i=1}^{r+1} m_i \lambda_i \sum_{i=1}^{r+1} m_i c_i^2 \lambda_i - \left[ \sum_{i=1}^{r+1} m_i \lambda_i c_i \right]^2. \quad (7)$$

Функция (7) относительно переменных  $m_i, i = \overline{1, r+1}$  представляет собой квадратичную форму.

Из условия максимизации (7) относительно переменных  $m_i, i = \overline{1, r+1}$  при ограничении (6) можно найти оптимальные значения  $m_i^0, i = \overline{1, r+1}$ , определяющие точный  $D$ -оптимальный план для модели (1) с кусочно-линейной непрерывной положительной дисперсией наблюдений.

Используем теорию, изложенную во втором пункте, для решения следующей задачи.

Пусть требуется для трех наблюдений построить  $D$ -оптимальный план  $\varepsilon_1^0(3)$  для модели (1) с дисперсией наблюдаемых значений  $\sigma^2(x) = (1-0,9x)^3$ . Математическая теория построения таких  $D$ -оптимальных планов пока не создана. Численные расчеты на ПЭВМ показали, что  $D$ -оптимальный план  $\varepsilon_1^0(3)$  следует сосредоточить в трех точках:  $x_1^0 = x_2^0 = 1, x_3^0 = 0,8$ , при этом  $|M(\varepsilon_1^0(x))| = 3644,3$ .

Если кривую  $\sigma^2(x) = (1-0,9x)^3$  аппроксимировать прямыми, проходящими через три точки  $(h_i, \sigma^2(h_i)), h_i = -1+i, i=0, 1, 2$ , то, следуя пункту 2,  $D$ -оптимальный план  $\varepsilon_1^0(3)$  нужно сосредоточить в точках:  $x_1^0 = 0, x_2^0 = x_3^0 = 1$  и  $|M(\varepsilon_1^0(3))| = 2000$ .

Если указанную кривую  $\sigma^2(x)$  аппроксимировать прямыми, проходящими через пять точек  $(h_i, \sigma^2(h_i)), h_i = -1+0,5 \cdot i, i=0, 4$ , то  $D$ -оптимальный план  $\varepsilon_1^0(3)$  следует сосредоточить в точках:  $x_1^0 = x_2^0 = 0,5, x_3^0 = 1$  и  $|M(\varepsilon_1^0(3))| = 3005,3$ .

### Список литературы

1. Moysiadis C., Koulias S. // Math. Operationsforsch. u. Statist. Ser. Statist. 1983. № 3. P. 367.
2. Кирлица В. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2. С. 36.

Поступила в редакцию 15.05.90.

## МИНИМАКСНО-МОДУЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Постановка задачи.** Пусть  $f_{ikh}l(x) = a'_{ikh}l x + b_{ikh}l$ ,  $t \in T_{ikh}l$ ,  $k \in K_l^i$ ,  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0 = \{0\} \cup I$ ,  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  — линейные функции векторного аргумента  $x(J)$ ,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ . Образум с помощью их как компонент кусочно-линейные модульные функции

$$f_{ikh}l(x) = f_{ikh}l = a'_{ikh}l x + b_{ikh}l + \sum_{t \in T'_{ikh}l} |f_{ikh}l| - \sum_{t \in T''_{ikh}l} |f_{ikh}l|,$$

$$T'_{ikh}l, T''_{ikh}l \subset T_{ikh}l, k \in K_l^i, l \in L^i, i \in I_0.$$

Используем эти функции для формирования кусочно-линейных минимаксно-модульных функций

$$f_i(x) = a'_i x + b_i + \sum_{l \in L^i_+} \max_{k \in K_l^i} f_{ikh}l + \sum_{l \in L^i_-} \min_{k \in K_l^i} f_{ikh}l, L^i_+, L^i_- \subset L^i, i \in I_0.$$

Минимаксно-модульной задачей кусочно-линейного программирования назовем задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, f_i(x) = 0, i \in I, d_x \leq x \leq d^*. \quad (1)$$

Пусть  $x$  — план задачи (1). Введем множества:

$$T^0_{ikh}l(x) = \{t \in T_{ikh}l : f_{ikh}l = 0\}, T^0 = \bigcup_{k \in K_l^i} \bigcup_{l \in L^i} \bigcup_{i \in I_0} T^0_{ikh}l(x),$$

$$T^{\pm}_{ikh}l(x) = \{t \in T'_{ikh}l : f_{ikh}l > 0\} \cup \{t \in T''_{ikh}l : f_{ikh}l < 0\},$$

$$T^+ = \bigcup T^+_{ikh}l, T^-_{ikh}l = \{t \in T'_{ikh}l : f_{ikh}l < 0\} \cup \{t \in T''_{ikh}l : f_{ikh}l > 0\},$$

$$T^- = \bigcup T^-_{ikh}l, T' = \bigcup T'_{ikh}l, T'' = \bigcup T''_{ikh}l.$$

Таким образом, множество  $T^0(x)$  разобьем на два непересекающихся подмножества  $T^{0+}$ ,  $T^{0-}$  и введем обозначения:  $\tilde{T}^+ = T^+ \cup T^{0+}$ ;  $\tilde{T}^- = T^- \cup T^{0-}$ ,  $\tilde{T}^{0+} = (\tilde{T}^+ \cap T') \cup (\tilde{T}^- \cap T'')$ ,  $\tilde{T}^{0-} = (\tilde{T}^+ \cap T'') \cup (\tilde{T}^- \cap T')$ . Множество всевозможных разбиений вида  $t = (T^{0+}, T^{0-})$  обозначим через  $T$ . Каждому элементу  $t$  этого множества соответствует многогранная область  $X$ ,  $n$ -мерного пространства, определенная соотношениями:  $\tilde{T}^+(x) \subset \tilde{T}^+(\bar{x})$ ;  $\tilde{T}^-(x) \subset \tilde{T}^-(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in X$ . В области  $X$  функции  $f_{ikh}l$  имеют линейный вид:

$$f_{ikh}l = a'_{ikh}l x + b_{ikh}l + \sum_{t \in T'_{ikh}l} |f_{ikh}l| - \sum_{t \in T''_{ikh}l} |f_{ikh}l| = \tilde{a}'_{ikh}l x + \tilde{b}_{ikh}l.$$

$$\text{Здесь } \tilde{a}'_{ikh}l = a'_{ikh}l + \sum_{t \in \tilde{T}^{0+}} a_{ikh}l - \sum_{t \in \tilde{T}^{0-}} a_{ikh}l, \tilde{b}_{ikh}l = b_{ikh}l + \sum_{t \in \tilde{T}^{0+}} b_{ikh}l - \sum_{t \in \tilde{T}^{0-}} b_{ikh}l.$$

Далее построим множества  $K_{il}^- = \{s \in K_l^i : \omega_{isl}(x) = 0\}$ ,  $l \in L^i$ ,

$K_{il}^> = \{s \in K_l^i : \omega_{isl}(x) > 0\}$ ,  $l \in L^i_+$ ,  $K_{il}^< = \{s \in K_l^i : \omega_{isl}(x) < 0\}$ ,  $l \in L^i_-$ ,  $i \in I_0$ ,

где  $\omega_{isl}(x) = f_{il}(x) - f_{isl}(x)$ ,  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0$ ;  $f_{il} = \max_{s \in K_l^i} f_{isl}$ ,  $l \in L^i_+$ ,  $f_{il} =$

$$= \min_{s \in K_l^i} f_{isl}, l \in L^i_-, i \in I_0.$$

Наряду с планом  $x$  рассмотрим псевдоплан  $\bar{x} = x + \Delta x$ . Предположим, что вектор  $\bar{x}$  такой, что:  $\tilde{T}^+(x) \subset \tilde{T}^+(\bar{x})$ ,  $\tilde{T}^-(x) \subset \tilde{T}^-(\bar{x})$ ,  $K_{il}^>(x) \subset K_{il}^>(\bar{x})$ ,  $l \in L_+^i$ ,  $K_{il}^<(x) \subset K_{il}^<(\bar{x})$ ,  $l \in L_-^i$ ,  $i \in I_0$ . Множество  $K_{il}^>$ ,  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0$ , разобьем на подмножества:

$$K_{il}^{\bar{=}} = \{s \in K_{il}^{\bar{=}}(x): \omega_{isl}(\bar{x}) = 0\}, l \in L^i; K_{il}^{\bar{>}} = \{s \in K_{il}^{\bar{=}}(x): \omega_{isl}(\bar{x}) > 0\}, \\ l \in L_+^i; K_{il}^{\bar{<}} = \{s \in K_{il}^{\bar{=}}(x): \omega_{isl}(\bar{x}) < 0\}, l \in L_-^i, i \in I_0.$$

Из каждого множества  $K_{il}^{\bar{=}}$ ,  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0$ , выделим один индекс  $s_{il}$ . Каждому  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0$  припишем вектор  $p^{il}$ :

$$p_s^{il} = 0, s \neq s_{il}, p_{s_{il}}^{il} = 1, s \in K_{il}^{\bar{=}}.$$

Совокупность  $p^{il}$ ,  $l \in L^i$ ,  $i \in I_0$  обозначим через  $p_l$ . Пусть  $P_l$  — множество всевозможных наборов  $p_l$ . Для произвольного разбиения  $N = (t, p_t)$  введем задачу

$$\tilde{a}_0' \Delta x \rightarrow \min, \\ \tilde{a}_i' \Delta x = 0, i \in I; \tilde{a}_l' \Delta x \leq \alpha_l, l \in I_*; \tilde{a}_l' \Delta x \geq \alpha_l, l \in I^*; \quad (2)$$

$A(\tilde{T}^{0+}, J) \Delta x \geq \gamma(\tilde{T}^{0+})$ ;  $A(\tilde{T}^{0-}, J) \Delta x \leq \gamma(\tilde{T}^{0-})$ ;  $d_* - x \leq \Delta x \leq d^* - x$ , где

$$A(T, J/N) = \left[ \begin{array}{l} a_{ikh}(J/N) \\ t \in T_{ikh}, k \in K_l^i, l \in L^i, i \in I_0 \end{array} \right];$$

$$\gamma(\tilde{T}^{0+}) = -f(\tilde{T}^{0+}/x), \gamma(\tilde{T}^{0-}) = -f(\tilde{T}^{0-}/x);$$

$$\alpha_l = \omega_{is_k}(x), k \in L^i, s \in K_{il}^{\bar{=}}, i \in I_0, l \in I_* \cup I^*;$$

$$\tilde{a}_i = a_i + \sum_{l \in L^i} \tilde{a}_{is_{il}l}, i \in I_0;$$

$$I_* = \bigcup_{i \in I_0} \bigcup_{k \in L_+^i} K_{i/s_{ik}}^k, I^* = \bigcup_{i \in I_0} \bigcup_{k \in L_-^i} K_{i/s_{ik}}^k.$$

Задача (2) имеет, по крайней мере, один план  $\Delta x = 0$ . Очевидно, что если  $x^0$  — оптимальный план задачи (1), то план  $\Delta x^0 = 0$  оптимален в задаче (2). Совокупность  $S_0(N) = \{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ ,  $I_{\text{оп}} = I \cup I_{\text{оп}*} \cup I_{\text{оп}}^* \cup \tilde{T}_{\text{оп}}^{0+} \cup \tilde{T}_{\text{оп}}^{0-}$  назовем опорой, если  $\det A_{\text{оп}}(N) \neq 0$ ,  $A_{\text{оп}}(N) = (a_{ij}, i \in I_{\text{оп}}, j \in J_{\text{оп}})$ .

По опоре построим векторы потенциалов  $u(I_{\text{оп}}/N)$ , оценок  $\Delta(J_H/N)$ ,  $J_H = J/J_{\text{оп}}$ :

$$u'(I_{\text{оп}}/N) = \tilde{a}_0'(J_{\text{оп}}/N) A_{\text{оп}}^{-1}(N),$$

$$\Delta'(J_H/N) = u'(I_{\text{оп}}/N) A(I_{\text{оп}}, J_H/N) - \tilde{a}_0'(J_H).$$

Согласно теории ЛП [1, 2], для оптимальности плана  $\Delta x = 0$  в задаче (2) необходимо и достаточно существование такой опоры  $S_0$ , что для  $u(I_{\text{оп}}/N)$ ,  $\Delta(J_H/N)$  справедливы соотношения:

$$u_l \leq 0 \text{ при } \alpha_l = 0; u_l = 0 \text{ при } \alpha_l > 0, l \in I_{\text{оп}*};$$

$$u_l \geq 0 \text{ при } \alpha_l = 0; u_l = 0 \text{ при } \alpha_l < 0, l \in I_{\text{оп}}^*;$$

$$u_t \leq 0 \text{ при } \gamma_t = 0; u_t = 0 \text{ при } \gamma_t > 0, t \in \tilde{T}_{\text{оп}}^{0-};$$

$$u_t \geq 0 \text{ при } \gamma_t = 0; u_t = 0 \text{ при } \gamma_t < 0, t \in \tilde{T}_{\text{оп}}^{0+};$$

$$\Delta_j \leq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \Delta_j \geq 0 \text{ при } x_j = d_j^*;$$

$$\Delta_j = 0 \text{ при } d_{*j} < x_j < d_j^*, j \in J_H.$$

Обозначим  $M$  — множество всех разбиений типа  $N = (t, p_t)$ ,  $M(S_0)$  — множество всех разбиений, для которых опора  $S_0$  вместе с вектором  $\Delta x = 0$  удовлетворяет критерию оптимальности в задаче (2).

Совокупность опор  $S^{ij}$ ,  $i = \overline{1, t}$ ,  $j = \overline{1, q_i}$  назовем оптимальным пакетом, если  $\bigcup_{i \geq 1} \bigcup_{j > 1} M(S^{ij}) = M$ ,  $M(S^{ij}) \cap M(S^{i_1 j_1}) = \emptyset$ ,  $(i, j) \neq (i_1, j_1)$ ,  $i = \overline{1, t}$ ,  $i_1 = \overline{1, t}$ ,  $j = \overline{1, q_i}$ ,  $j_1 = \overline{1, q_{i_1}}$ . Справедлив следующий пакетный критерий оптимальности. Для локальной оптимальности плана  $x$  в задаче (1) необходимо и достаточно существование оптимального пакета опор.

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1977. Ч. 1. Общие задачи.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1987. Ч. 4. Выпуклые задачи.

Поступила в редакцию 25.04.90.

УДК 517.977

А. О. АБДУРАХИМОВ

### ГАРАНТИРОВАННАЯ МИНИМИЗАЦИЯ СОВОКУПНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $T$ ,  $K_t^+$ ,  $K_t^-$ ,  $t \in T$ , — заданные конечные множества индексов,  $K_t = K_t^+ \cup K_t^-$ ;  $T_+$ ,  $T_-$  — некоторые подмножества множества  $T$ :  $T_+ \cup T_- = T$ ,  $T_+ \cap T_- = \emptyset$ ;  $D$ ,  $D_{ht}$ ,  $k \in K_t$ ,  $t \in T$ , — симметричные  $n \times n$ -матрицы;  $D \geq 0$ ,  $D_{ht} \geq 0$ ;  $d_*$ ,  $d^*$ ,  $a$ ,  $a_{ht}$ ,  $k \in K_t$ ,  $t \in T$ ,  $-n$  — векторы;  $b$ ,  $b_{ht}$ ,  $k \in K_t$ ,  $t \in T$ , — скаляры.

Множество  $X = \{x \in R^n: d_* \leq x \leq d^*\}$  назовем множеством планов. На плане  $x$  вычислим значения квадратичных функций  $n$  переменных  $x = (x_j, j \in J)$ :

$$f_{ht}(x) = x' D_{ht} x / 2 + a'_{ht} x + b_{ht}.$$

Считая функции  $f_{ht}(x)$ ,  $k \in K_t$ ,  $t \in T$ , компонентами целевой функции экстремальной задачи, гарантированным значением целевой функции на плане  $x$  назовем число

$$f(x) = x' D x / 2 + a' x + b + f^+(x) + f^-(x),$$

где

$$f^+(x) = \sum_{t \in T_+} \max_{k \in K_t^+} f_{ht}(x);$$

$$f^-(x) = \sum_{t \in T_-} \min_{k \in K_t^-} f_{ht}(x).$$

Простой задачей гарантированного квадратичного программирования назовем задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (1)$$

Задача (1) представляет задачу кусочно-квадратичного программирования.

Цель данной статьи — реализация конструктивного подхода\* для решения задачи (1). Понятия оптимального плана, локально-оптимального плана вводятся стандартно. Пусть  $x$  — план задачи (1). В окрестности плана  $x$  проанализируем функцию  $f(z)$ ,  $z \in R^n$ , с целью идентифи-

\* Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984, 1986, 1987. Ч. 1—4.

кации оптимальности плана  $x$ . Для этого окрестность плана  $x$  разобьем на подобласти гладкости задачи и протестируем план  $x$  в каждой из них.

Исследование начнем с функции  $f_t^+(z)$ ,  $z \in R^n$ .

Пусть

$$\begin{aligned}\omega_{kt}^+ &= f_t^+(z) - f_{kt}(z), \quad k \in K_t^+, \quad t \in T_+, \\ f_t^+(z) &= \max_{k \in K_t^+} f_{kt}(z), \quad t \in T_+.\end{aligned}$$

Построим множества

$$\begin{aligned}K_t^{-+} &= K_t^{-+}(x) = \{k \in K_t^+ : \omega_{kt}^+(x) = 0\}, \quad t \in T_+, \\ K_t^{>+} &= K_t^{>+}(x) = \{k \in K_t^+ : \omega_{kt}^+(x) > 0\}, \quad t \in T_+.\end{aligned}$$

Выбирая из каждого множества  $K_t^{\pm+}$ ,  $t \in T_+$ , по одному элементу  $q^t$  составим набор  $p^+ = \{p_t^+, t \in T_+\}$ , где  $p_t^+ = \{x, q^t\}$ . Набору  $p^+$  поставим в соответствие множество

$$X(p^+) = \{z \in R^n : \omega_{kt}^+(z) \geq 0, \quad k \in K_t^{>+} \cup K_t^{-+}/q^t, \quad t \in T_+\}.$$

Множество всевозможных наборов  $p^+$  обозначим через  $P^+$ . Совокупность  $X(P^+) = \{X(p^+), p^+ \in P^+\}$  составляет набор областей гладкости функции  $f^+(z)$ ,  $z \in R^n$ , в окрестности точки  $x$ .

Множество  $X(p^+)$  в аналитической форме записывается следующим образом:

$$z' \tilde{D}_i z / 2 + \tilde{a}_i' z + \tilde{b}_i \leq 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i &= D_{kt} - D_{q^t i}, \quad \tilde{a}_i = a_{kt} - a_{q^t i}, \quad \tilde{b}_i = b_{kt} - b_{q^t i}, \quad t \in T_+, \quad k \in K_t^+ / q^t, \\ i &\in I_* = \bigcup_{t \in T_+} K_t^+ / q^t.\end{aligned}$$

В каждой области  $X(p^+)$  функция  $f^+(z)$ ,  $z \in R^n$ , является гладкой и имеет вид:

$$f^+(z) = z' D_+ z / 2 + a_+' z + b_+,$$

где

$$a_+ = \sum_{t \in T_+} a_{q^t i}, \quad D_+ = \sum_{t \in T_+} D_{q^t i}, \quad b_+ = \sum_{t \in T_+} b_{q^t i}.$$

Аналогично анализируется функция  $f^-(z)$ ,  $z \in R^n$ :

$$p^- = \{p_t^-, t \in T_-\}, \quad p_t^- = \{x, r^t\}, \quad r^t \in K_t^{\bar{-}}, \quad t \in T_-,$$

$$X(p^-) = \{z \in R^n : \omega_{kt}^-(z) \leq 0, \quad k \in K_t^{\bar{-}} \cup K_t^{\leq-} / r^t, \quad t \in T_-\}.$$

Здесь  $\omega_{kt}^-(z) = \bar{f}_t^-(z) - f_{kt}(z)$ ,  $k \in K_t^{\bar{-}}$ ,  $t \in T_-$ ,  $\bar{f}_t^-(z) = \min_{k \in K_t^{\bar{-}}} f_{kt}(z)$ ,  $t \in T_-$ ;

$K_t^{\bar{-}} = K_t^{\bar{-}}(x) = \{k \in K_t^- : \omega_{kt}^-(x) = 0\}$ ,  $t \in T_-$ ;  $K_t^{\leq-} = K_t^{\leq-}(x) = \{k \in K_t^- : \omega_{kt}^-(x) < 0\}$ ,  $t \in T_-$ .

Совокупность  $X(P^-) = \{X(p^-), p^- \in P^-\}$  составляет набор областей гладкости функции  $f^-(z)$ ,  $z \in R^n$ , в окрестности точки  $x$ . Здесь  $P^-$  — множество всевозможных наборов  $p^-$ .

Множество  $X(p^-)$  в аналитическом виде записывается следующим образом:

$$z' \tilde{D}_i z / 2 + \tilde{a}_i' z + \tilde{b}_i \geq 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i &= D_{kt} - D_{r^t i}, \quad \tilde{a}_i = a_{kt} - a_{r^t i}, \quad \tilde{b}_i = b_{kt} - b_{r^t i}, \quad t \in T_-, \quad k \in K_t^- / r^t, \quad i \in I^* = \\ &= \bigcup_{t \in T_-} K_t^- / r^t.\end{aligned}$$

В области  $X(p^-)$  функция  $f^-(z)$ ,  $z \in R^n$ , имеет вид:

$$f^-(z) = z'D_-z/2 + a_-z + b_-,$$

где

$$D_- = \sum_{t \in T_-} D_{rt}; \quad a_- = \sum_{t \in T_-} a_{rt}; \quad b_- = \sum_{t \in T_-} b_{rt}.$$

Проанализируем функцию  $f(z)$ ,  $z \in R^n$ . Точками ее негладкости являются все точки  $z$ , в которых хотя бы одна из функций  $f^+(z)$ ,  $f^-(z)$ ,  $z \in R^n$ , является негладкой.

Пусть  $p = \{p^+, p^-\}$ ,  $P$  — множество всевозможных наборов  $p$ . Каждому набору  $p$  поставим в соответствие множество  $X(p) = \{z \in R^n : \omega_{kt}^+(z) \geq 0, k \in K_t^{>+} \cup K_t^{+}/q^t, t \in T_+; \omega_{kt}^+(z) \leq 0, k \in K_t^{<-} \cup K_t^{-}/r^t, t \in T_-\}$ . Очевидно, что множество  $X(p)$  определяется неравенствами (2), (3). В области  $X(p)$  функция  $f(z)$ ,  $z \in R^n$ , является гладкой и имеет вид:

$$f(z) = z'\tilde{D}z/2 + \tilde{a}'z + \tilde{b},$$

где  $\tilde{D} = D + D_+ + D_-$ ;  $\tilde{a} = a + a_+ + a_-$ ;  $\tilde{b} = b + b_+ + b_-$ .

Совокупность областей  $X(P) = \{X(p), p \in P\}$  определяет области гладкости функции  $f(z)$ ,  $z \in R^n$ .

Для фиксированного  $p \in P$ , или, другими словами, для области  $X(p)$  составим задачу:

$$\begin{aligned} & (\tilde{a} + \tilde{D}x)'y + y'\tilde{D}y/2 \rightarrow \min_y, \\ & (\tilde{a}_i + \tilde{D}_ix)'y + y'\tilde{D}_iy/2 \leq \gamma_i, \quad i \in I_*, \\ & (\tilde{a}_i + \tilde{D}_ix)'y + y'\tilde{D}_iy/2 \geq \gamma_i, \quad i \in I^*, \\ & d_* - x \leq y \leq d^* - x, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$y = z - x, \quad \gamma_i = \gamma_{kt} = \omega_{kt}^+(x), \quad t \in T_+, \quad k \in K_t^+/q^t; \quad \gamma_i = \gamma_{kt} = \omega_{kt}^-(x), \quad t \in T_-, \quad k \in K_t^-/r^t.$$

Гладкую задачу (4) будем называть  $(x, p)$ -квадратизацией задачи (1).

Задача (4) имеет, по крайней мере, один план  $y=0$ . Очевидно, что если  $x^0$  — оптимальный план задачи (1), то план  $y^0 = 0$  является оптимальным в задаче (4).

Задача (4) представляет квадратичную (вообще говоря, невыпуклую) задачу нелинейного программирования. Линеаризовав в окрестности точки  $y = 0$  целевую функцию и функции ограничений (4), получим задачу:

$$\begin{aligned} & (\tilde{a} + \tilde{D}x)'W \rightarrow \min, \quad (\tilde{a}_i + \tilde{D}_ix)'W \leq \gamma_i, \quad i \in I_*; \quad (\tilde{a}_i + \tilde{D}_ix)'W \geq \gamma_i, \quad i \in I^*; \\ & d_* - x \leq W \leq d^* - x. \end{aligned} \quad (5)$$

Если  $x^0$  — оптимальный план задачи (1), то вектор  $W^0 = 0$  является оптимальным в задаче (5).

Введем обозначения:

$$c = \tilde{a} + \tilde{D}x, \quad \tilde{c}_i = \tilde{a}_i + \tilde{D}_ix, \quad i \in I_* \cup I^*; \quad F = F(I, J/x, p) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{ij}, & j \in J \\ i \in I_* \cup I^* \end{bmatrix}.$$

*Определение 1.* Совокупность  $M_{\text{оп}}(p) = \{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ ,  $I_{\text{оп}} = I_{* \text{оп}} \cup I_{\text{оп}}^*$ ,  $I_{* \text{оп}} \subset I_*$ ,  $I_{\text{оп}}^* \subset I^*$ ,  $J_{\text{оп}} \subset J$ ,  $|I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$  назовем (локальной) опорой основных ограничений на плане  $x$ , матрицу  $F_{\text{оп}} = F_{\text{оп}}(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}/x, p) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{ij} & j \in J_{\text{оп}} \\ i \in I_{\text{оп}} \end{bmatrix}$  — (локальной) опорной матрицей, если  $\det F_{\text{оп}} \neq 0$ .

*Определение 2.* При фиксированном  $p \in P$  пара  $\{x, M_{\text{оп}}(p)\}$  из плана и опоры ограничений называется опорным планом задачи (1). Опорный план будем называть невырожденным, если он не вырожден по прямым  $d_{*j} < x_j < d_j^*$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ , и по основным  $\gamma_i > 0$ ,  $i \in I_{*н}$ ;  $\gamma_i < 0$ ,  $i \in I_n^*$ ,  $I_{*н} = I_{*}/I_{*оп}$ ,  $I_n^* = I^*/I_{\text{оп}}^*$ , ограничениям.

Следуя конструктивным методам линейного программирования, опорному плану  $\{x, M_{\text{оп}}(p)\}$  поставим в соответствие (локальный) вектор потенциалов:

$$u' = u'(I_{\text{оп}}/x, p) = -(c_j, j \in J_{\text{оп}})' F_{\text{оп}}^{-1} \quad (6)$$

и подсчитаем (локальные) оценки:

$$\Delta_j = \Delta_j(x, p) = u'(I_{\text{оп}}/x, p) F_j + c_j', j \in J_n = J/J_{\text{оп}}. \quad (7)$$

Пусть  $\{x, M_{\text{оп}}(p)\}$  — невырожденный опорный план. Для локальной оптимальности плана  $x$  в задаче (1) необходимо выполнение соотношений:

$u_i \geq 0$  при  $\gamma_i = 0$ ;  $u_i = 0$  при  $\gamma_i > 0$ ,  $i \in I_{*оп}$ ;  $u_i \leq 0$  при  $\gamma_i = 0$ ;  $u_i = 0$  при  $\gamma_i < 0$ ,  $i \in I_{\text{оп}}^*$ ;  $\Delta_j \geq 0$  при  $x_j = d_{*j}$ ;  $\Delta_j \leq 0$  при  $x_j = d_j^*$ ;  $\Delta_j = 0$  при

$$d_{*j} < x_j < d_j^*, j \in J_n. \quad (8)$$

Соотношения (6), (7), (8) получены для набора  $p$  и опоры  $M_{\text{оп}}$ . Обозначим через  $p(M_{\text{оп}})$  совокупность наборов  $p \in P$ , для которых выполняются (8) с опорой  $M_{\text{оп}}$ . Справедливо следующее пакетное необходимое условие оптимальности.

Для оптимальности плана  $x$  в задаче (1) необходимо существование такого пакета опор  $M_{\text{оп}}^s$ ,  $s = \overline{1, \tau}$ , что  $U_{s=1}^{\tau} p(M_{\text{оп}}^s) = P$ ,  $p(M_{\text{оп}}^l) \cap p(M_{\text{оп}}^g) = \emptyset$ ,  $l = \overline{1, \tau}$ ;  $g = \overline{1, \tau}$ ;  $l \neq g$ , и для сопровождающих их векторов

$$u(M_{\text{оп}}^s/p), \Delta(M_{\text{оп}}^s/p), p \in p(M_{\text{оп}}^s), s = \overline{1, \tau}$$

выполняются соотношения (8).

Поступила в редакцию 10.05.90.



УДК 534.23:517.95

А. К. БЕЛЯВСКИЙ, И. К. ДАНЕЙКО

## К ВОПРОСУ О ВОЛНОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕСТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

Как известно, при наличии горизонтальной зависимости скорости звука получение волнового решения уравнения Гельмгольца

$$\Phi_{rr}'' + \frac{1}{r} \Phi_r' + \Phi_{zz}'' + k^2(r, z)\Phi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\Phi(r, 0) = 0, \quad \Phi_z'(r, H) + g\Phi(r, H) = 0,$$

где  $g$  — адмитанс полупространства  $z > H$ ,  $H$  — глубина волновода, вызывает определенные трудности [1]. Решить эту задачу возможно, лишь задавшись определенным видом волнового числа  $k$ .

Пусть  $k^2(r, z) = m_1(z) + \chi(r)m_2(z)$ ;  $\chi$ ,  $m_n$  — произвольные функции переменных  $r$  и  $z$  соответственно. Причем функция  $m_1(z)$  определяет некоторый «базовый» профиль скорости звука в данной среде, а  $m_2(z)$  — возмущение, вносимое в него в горизонтальном направлении по закону  $\chi(r)$ .

Такой подход наиболее эффективен в случае, когда известны лишь два экспериментальных профиля по трассе распространения и может быть задан закон, по которому первый из них переходит во второй. Тогда решение уравнения (1) следует искать в виде:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} [\psi_n(z) - \varphi_p(z) b_{np} d_p \chi / (1 + \chi)] R_{np}(r). \quad (2)$$

Здесь  $b_{np} = \int_0^H \psi_n(z) \varphi_p(z) dz$ ,  $d_p = \left( \int_0^H \varphi_p^2(z) dz \right)^{-1}$  — нормирующий множитель,  $A_{np}$  — коэффициент возбуждения,  $R_{np}(r)$  удовлетворяет уравнению

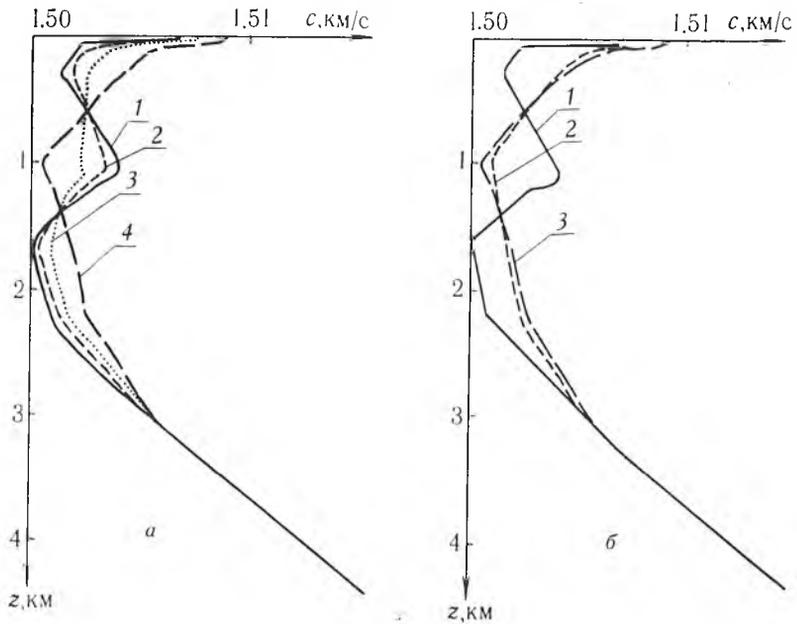
$$r(1 + \chi)^2 R'' + (1 + \chi)(1 + \chi - 2r\chi') R' + [r(1 + \chi)^3 \alpha_n^2 - r\chi(1 + \chi)^2 \xi_p^2 - r(\chi''(1 + \chi) - 2\chi'^2) - \chi'(1 + \chi)] R = 0 \quad (3)$$

(штрих означает дифференцирование по  $r$ ), а  $\psi_n(z)$  и  $\varphi_p(z)$  являются решениями следующих граничных задач Штурма — Лиувилля:

$$\psi'' + (m_1(z) - \alpha_n^2) \psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(H) + g\psi(H) = 0, \quad (4)$$

$$\varphi'' + (m_1(z) - m_2(z) - \xi_p^2) \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(H) + g\varphi(H) = 0. \quad (5)$$

Следует иметь в виду, что  $\psi_n(z) = \sum_p b_{np} d_p \varphi_p(z)$ , в чем нетрудно убедиться, домножив обе части равенства на  $\varphi_k$  и интегрируя по  $z$  от 0 до  $H$  при условии  $\int_0^H \varphi_n \varphi_p dz = 0$ , ( $k \neq p$ ). Если  $m_2\chi = 0$ , то последнее разложение сводится к хорошо известному решению однородного уравнения



Зависимость профилей скорости звука от расстояния для  $D=1$ ,  $r=5$  (1), 20 (2), 35 (3) и 50 (4) км:  
 $a - \chi(r) = Dr^2$ ;  $б - \chi(r) = D/r^2$

Гельмгольца:  $\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(z) H_0^{(1)}(\alpha_n r)$ ,  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка.

Рассмотрим теперь уравнение (3). Подстановка  $R(r) = (1 + \chi) y(r)/r^2$  приводит его к виду

$$y'' + [(2r)^{-2} + \alpha_n^2 + (\alpha_n^2 - \xi_p^2) \chi] y = 0 \quad (6)$$

и для  $\chi(r) = Dr^2$ , например,

$$y(r) = r^{-\frac{1}{2}} W_{t,0}([D(\xi_p^2 - \alpha_n^2)]^{\frac{1}{2}} r^2),$$

где  $t = \alpha_n^2 / [4(D(\xi_p^2 - \alpha_n^2))^{\frac{1}{2}}]$ ,  $D$  — константа,  $W$  — функция Уиттекера. На рисунке (а) приведен один из возможных (для данного примера) наборов идеализированных профилей скорости звука, взятых при  $D = 1$  и  $r = 5, 20, 35$  и  $50$  км, причем экспериментально заданными считаются только первый и последний из них. Аналогичным образом можно получить решение для случая  $\chi(r) = D/r^2$ . После несложных преобразований будем иметь:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} [\psi_n(z) (1 + Dr^2) - \varphi_p(z) b_{np} d_p] H_v^{(1)}(\alpha_n r) / (Dr^2),$$

$$v = [D(\xi_p^2 - \alpha_n^2)]^{\frac{1}{2}} / 2.$$

Соответствующее изменение профилей с расстоянием приводится на рисунке (б).

В случае, когда в данной области присутствует распределенный источник, заданный функцией

$$F(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r) q_j(z),$$

выражение (2) примет вид:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{npj} R_{npj} (\psi_n(z) - \varphi_p(z) b_{np} d_p \chi / (1 + \chi)),$$

где

$$A_{npj} = \left( \int_0^H q_j(z) \varphi_p(z) dz \right) / b_{np},$$

$R_{npj} = D_1 R_{np} + D_2 R_{np} \int dr / (ER_{np}^2) + R_{np} \int (\int ER_{np} f_j(r) dr) dr / (ER_{np}^2)$ ,  
 $E = r / (1 + \chi)^2$ ,  $D_1, D_2$  — некоторые константы [2]. В частности, при  $F(r, z) = \delta(z - z_0) \delta(r)$  получим

$$\Phi(r, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(z_0) [\varphi_p(z) d_p \chi - \psi_n(z) (1 + \chi) / b_{np}] y_{np}(r) / r^2.$$

При некоторых значениях функций  $m_1(z)$  и  $m_2(z)$  возможно получить решение задач (4), (5) в конечном виде. Более подробно этот вопрос был исследован в [3] для целого класса зависимостей скорости звука от глубины.

### Список литературы

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л., 1982.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
3. Де Санто Дж. А. // Акустика океана / Под ред. Де Санто Дж. А. М., 1982. С. 37.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

### КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СУБОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть  $I = \{1, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, \dots, n\}$ ,  $K = \{1, \dots, k\}$ ,  $L = \{1, \dots, l\}$ ,  
 $A_0 = A_0(L, J)$ ,  $B_0 = B_0(L, K)$ ,  $H = H(I, L)$ ;  $\rho \in R_+$ ;  $b_*, b^* \in R^m$ ;  $x, d_*, d^* \in R^n$ ;  
 $y, f_*, f^* \in R^k$ ;  $f_* \leq 0 \leq f^*$ ;  $X = \{x \in R^n: d_* \leq x \leq d^*\}$ ,  $Y_\rho = \{y \in R^k: \rho f_* \leq y \leq \rho f^*\}$ ,  
 $A = HA_0$ ,  $B = HB_0$ ,  $h_{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $H$ ,  $Q = \{z \in R^l: Z = A_0 x, x \in X\}$ ,  $Z = \{z: b_* \leq Hz \leq b^*\}$ ,  $S_\rho = \{z \in R^l: Z = \rho y, y \in Y_\rho\}$ ,  
 $Z_\rho = \{z: z = z^1 + z^2, z^1 \in Z, z^2 \in S_\rho\}$ ,  $Z_\rho < \infty$ ,  $Q \cap Z_\rho \neq \emptyset$

**Задача.** Найти оптимальный план  $z^0 \in Q^*$ :

$$z^0 \in Q \cap Z_\rho, Q \cap Z_\rho = \emptyset \text{ при } \rho < \rho^0. \quad (1)$$

Пусть  $I_{\text{оп}} \subset I$ ,  $J_{\text{оп}} \subset J$ ,  $K_{\text{оп}} \subset K$ ;  $K_*, K^* \subset K_{\text{оп}}$ ,  $|I_{\text{оп}}| + |K_*| + |K^*| = |J_{\text{оп}}| + |K_{\text{оп}}| + 1$ . Рассмотрим два случая: 1.  $K_* \cap K^* = \emptyset$ ; 2.  $K_* \cap K^* = k_0$ ,  $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$ .

Сформируем множество

$$K_{(\text{оп})} = \begin{cases} [K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)] \cup k_\rho, & \text{если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), & \text{если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

где  $k_\rho$  — дополнительный индекс, соответствующий переменной  $\rho$ :  $y k_\rho = \rho$ .

Построим матрицу  $D_{\text{оп}} = D(I_{\text{оп}}; J_{\text{оп}}, K_{(\text{оп})})$  с блоками  $D(I_{\text{оп}}; J_{\text{оп}}, K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)) = (A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) - B(I_{\text{оп}}, K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*)))$ ;  $D(I_{\text{оп}}, k_\rho) = (B(I_{\text{оп}}, K_*) f_*(K_*) + B(I_{\text{оп}}, K^*) f^*(K^*))$ .

\* Г. Габасов, Э. А. Салнев, С. Тагайназаров. Оптимизация статических и дискретных систем в условиях неопределенности / Редкол. журн. «Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1988. 41 с. Деп. в ВИНТИ 29.06.88. № 5196-B88.

Совокупность  $M_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, K_*, K^*; J_{\text{оп}}, K_{\text{оп}}\}$  назовем опорой задачи (1), если  $\det \bar{D}_{\text{оп}} \neq 0$ .

Обозначим:  $I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}$ ,  $K_{*\text{н}} = K \setminus K_*$ ,  $K_{\text{н}} = K \setminus K^*$ ,  $J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$ ,  $K_{\text{н}} = K \setminus K_{\text{оп}}$ .

Пару  $\{x, M_{\text{оп}}\}$  из плана  $x$  и опоры  $M_{\text{оп}}$  будем называть опорным планом. Опорный план считаем невырожденным, если он вместе с некоторым  $\rho = \rho(x)$  и  $y = y(x)$  удовлетворяет соотношениям:

$$d_*(J_{\text{оп}}) < x(J_{\text{оп}}) < d^*(J_{\text{оп}}), \quad b_*'(I_{\text{н}}) < D(I_{\text{н}}, J)x + D(I_{\text{н}}, K)y < b^*(I_{\text{н}}), \\ \rho f_*(K_{*\text{н}}) < y(K_{*\text{н}}), \quad y(K_{\text{н}}) < \rho f^*(K_{\text{н}}).$$

Пусть  $\{x, M_{\text{оп}}\}$  — опорный план. Матрицу  $D_{\text{оп}}^{-1}$  разобьем на блоки

$$D_{\text{оп}}^{-1} = \begin{pmatrix} F_x = F(J_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}) \\ F_y = F(K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), I_{\text{оп}}) \\ u_{\text{оп}} = u'(I_{\text{оп}}) \end{pmatrix}, \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset,$$

$$D_{\text{оп}}^{-1} = \begin{pmatrix} F_x = F(J_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}) \\ F_y = F(K_{\text{оп}} \setminus (K_* \cup K^*), I_{\text{оп}}) \end{pmatrix}, \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0).$$

Подсчитаем векторы  $\Delta^{x'} = u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J)$ ,  $\Delta' = u'_{\text{оп}} B(I_{\text{оп}}, K)$ ,  $\Delta_* = \Delta(K_*)$ ,  $\Delta^* = \Delta(K^*)$ , если  $K_* \cap K^* = \emptyset$ ;  $\Delta_{*k_0} = -1/(f_{*k_0}^* - f_{*k_0})$ ,  $\Delta_{k_0}^* = 1/(f_{*k_0}^* - f_{*k_0})$ , если  $K_* \cap K^* = k_0$ ,  $f_*(k_0) \neq f^*(k_0)$ .

Можно показать, что  $\Delta_* f_* + \Delta^* f^* = 1$ .

Наряду с опорным планом  $\{x, M_{\text{оп}}\}$  рассмотрим тройку  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\rho})$  такую, что 1) компоненты  $\bar{x}(J_{\text{н}})$ ,  $\bar{y}(K_{\text{н}})$ ,  $\bar{\omega}_{\text{оп}} = \omega(I_{\text{оп}})$ ,  $\bar{S}_{*\text{оп}} = \bar{S}_*(K_*)$ ,  $\bar{S}_{\text{оп}} = \bar{S}^*(K^*)$ ,  $\omega_{\text{оп}} = \omega(I_{\text{оп}}) = D(I_{\text{оп}}, J)x + D(I_{\text{оп}}, K)y$ ,  $S_* = S_*(K) = y(K) - \rho f_*(K)$ ,  $S^* = S^*(K) = y(K) - \rho f^*(K)$  — произвольны; 2) компоненты  $\bar{x}(J_{\text{оп}})$ ,  $\bar{y}(K_{\text{оп}})$  и число  $\bar{\rho}$  удовлетворяют системе уравнений:  $\bar{\omega}_{\text{оп}} = D(I_{\text{оп}}, J)\bar{x} + D(I_{\text{оп}}, K)\bar{y}$ ,  $\bar{S}_{*\text{оп}} = \bar{y}(K_*) - \bar{\rho} f_*(K_*)$ ,  $\bar{S}_{\text{оп}} = \bar{y}(K^*) - \bar{\rho} f^*(K^*)$ .

Обозначим:  $\Delta \omega_{\text{оп}} = \bar{\omega}_{\text{оп}} - \omega_{\text{оп}}$ ,  $\Delta S_{*\text{оп}} = \bar{S}_{*\text{оп}} - S_{*\text{оп}}$ ,  $\Delta S_{\text{оп}} = \bar{S}_{\text{оп}} - S_{\text{оп}}$ ,  $\Delta y(K) = \bar{y}(K) - y(K)$ ,  $\Delta x(J) = \bar{x}(J) - x(J)$ .

Разобьем множества  $I_{\text{оп}}$ ,  $J_{\text{н}}$  на непересекающиеся подмножества;  $I_{\text{оп}}^+ = \{i \in I_{\text{оп}}: u_i \geq 0\}$ ,  $I_{\text{оп}}^- = \{i \in I_{\text{оп}}: u_i \leq 0\}$ ,  $I_{\text{оп}}^+ \cap I_{\text{оп}}^- = \emptyset$ ,  $I_{\text{оп}}^+ \cup I_{\text{оп}}^- = I_{\text{оп}}$ ;  $J_{\text{н}}^+ = \{j \in J_{\text{н}}: \Delta_j^x \geq 0\}$ ,  $J_{\text{н}}^- = \{j \in J_{\text{н}}: \Delta_j^x \leq 0\}$ ,  $J_{\text{н}}^+ \cap J_{\text{н}}^- = \emptyset$ ,  $J_{\text{н}}^+ \cup J_{\text{н}}^- = J_{\text{н}}$ .

Построим компоненты  $\xi(I_{\text{оп}})$ ,  $\kappa(J_{\text{н}})$ :  $\xi_i = b_{*i}$ , если  $i \in I_{\text{оп}}^+$ ;  $\xi_i = b_i^*$ , если  $i \in I_{\text{оп}}^-$ ;  $\kappa_j = d_j^*$ , если  $j \in J_{\text{н}}^+$ ;  $\kappa_j = d_{*j}$ , если  $j \in J_{\text{н}}^-$ . Положим  $\kappa_{\text{оп}} = D_{\text{оп}}^{-1}(\xi_{\text{оп}} + \rho(B(I_{\text{оп}}, K_*)f_{*\text{оп}} + B(I_{\text{оп}}, K^*)f_{\text{оп}}) - A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})\kappa_{\text{н}})$ .

$$\text{Число } \beta = \beta(x, M_{\text{оп}}) = \begin{cases} \Delta_{\text{н}}^{x'}(x_{\text{н}} - \kappa_{\text{н}}) + u'_{\text{оп}}(\xi_{\text{оп}} - \omega_{\text{оп}}) + \rho(\Delta_* f_{*\text{оп}} + \\ + \Delta_{\text{оп}}^* f_{\text{оп}}^*), \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ \rho(\Delta_{*k_0} f_{*k_0}^* + \Delta_{k_0}^* f_{k_0}^*), \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0), \end{cases}$$

назовем оценкой субоптимального плана  $x$ .

Справедлива формула

$$\Delta \rho = \bar{\rho} - \rho = \begin{cases} - \sum_{j \in J_{\text{н}}} \Delta_j^x \Delta x_j + \sum_{k \in K_{\text{н}}} \Delta_k \Delta y_k + \sum_{i \in I_{\text{оп}}} u_i \Delta \omega_i + \\ + \sum_{k \in K_*} \Delta_{*k} \Delta S_{*k} + \sum_{k \in K^*} \Delta_k^* \Delta S_{\text{н}}^*, \text{ если } K_* \cap K^* = \emptyset, \\ \Delta_{k_0}^* \Delta S_{k_0}^* + \Delta_{*k_0} \Delta S_{*k_0}, \text{ если } K_* \cap K^* = k_0, f_*(k_0) \neq f^*(k_0). \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) следуют:

**Критерий оптимальности.** Для оптимальности плана  $x$  достаточно существования такой опоры  $M_{\text{оп}}$ , что выполняются соотношения: 1) если  $M_{\text{оп}}$  — опора первого типа, то

$$\begin{aligned}
u_i &\geq 0 \text{ при } h'_{(i)}(A_0x - B_0y) = b_{*i}; \quad u_i \leq 0 \text{ при } h'_{(i)}(A_0x - B_0y) = b_i^*, \\
u_i &= 0 \text{ при } b_{*i} \leq h'_{(i)}(A_0x - B_0y) \leq b_i^*, \quad i \in I_{\text{оп}}; \quad \Delta_j^x \geq 0 \text{ при } x_j = d_j^*; \\
\Delta_j^x &\leq 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \quad \Delta_j^x = 0 \text{ при } d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j \in J_{\text{н}}; \quad \Delta_{*k} \geq 0 \text{ при} \\
y_k &= \rho f_{*k}; \quad \Delta_{*k} = 0 \text{ при } y_k > \rho f_{*k}, \quad k \in K_*, \quad \Delta_k^* \leq 0 \text{ при } y_k = \rho f_k^*; \\
\Delta_k^* &= 0 \text{ при } y_k < \rho f_k^*; \quad k \in K^*, \quad \Delta_k = 0 \text{ при } k \in K_{\text{н}}, \quad (3)
\end{aligned}$$

2) если  $M_{\text{оп}}$  — опора второго типа, то

$$\begin{aligned}
\Delta_{*k_0} &\geq 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho f_{*k_0}; \quad \Delta_{*k_0} = 0 \text{ при } y_{k_0} > \rho f_{*k_0}, \quad k_0 \in K_*; \\
\Delta_{k_0}^* &\leq 0 \text{ при } y_{k_0} = \rho f_{k_0}^*; \quad \Delta_{k_0}^* = 0 \text{ при } y_{k_0} < \rho f_{k_0}^*, \quad k_0 \in K^*.
\end{aligned}$$

Пусть  $\{x, M_{\text{оп}}\}$  — невырожденный опорный план. Для оптимальности плана  $x$  выполнение соотношений (3) необходимо.

**Критерий субоптимальности.** При любом  $\varepsilon \geq 0$  для  $\varepsilon$ -оптимальности плана  $x$  необходимо и достаточно существования такой опоры  $M_{\text{оп}}$ , при которой оценка субоптимальности удовлетворяет неравенству  $\beta(x, M_{\text{оп}}) \leq \varepsilon$ .

Поступила в редакцию 27.10.89.

УДК 517.538.5

Е. А. РОВБА

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ТИПА ФЕЙЕРА — БЕРНШТЕЙНА

Пусть  $\{\alpha_k\}$  — произвольная последовательность комплексных чисел,  $\alpha_0 = 0$ ;  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_k| < 1$ . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad \theta_k = \arg \alpha_k; \\
\lambda_n(x; y) &= \int_x^y \lambda_n(u) du.
\end{aligned}$$

Так как  $\forall a \in [0; 1) \int_0^{2\pi} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos u + a^2} du = 2\pi$ , то функция  $\lambda_n(0; y)$  переменной  $y$  возрастает на отрезке  $[0; 2\pi]$  от 0 до  $(2n + 1)\pi$ . Следовательно, функция  $\sin \lambda_n(0; y)$  имеет на промежутке  $[0; 2\pi]$   $(2n + 1)$  нулей. Обозначим их через  $x_k$ ,  $k = 0, 2n$ :  $x_k$

$$\int_0^{x_k} \lambda_n(u) du = k\pi, \quad k = 0, 2n.$$

Для произвольной функции  $f \in C_{2\pi}$  полагаем:

$$G_n(x; f) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f(x_k)}{2\lambda_n(x_k)} D_n(x; x_k), \quad (1)$$

где  $D_n(x; x_k) = \sin \lambda_n(x_k; x) / \sin \frac{x - x_k}{2}$ .

Нетрудно проверить, что  $G_n(x; f)$  есть тригонометрическая интерполяционная рациональная функция порядка не выше  $n$ . Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow x_k} D_n(x; x_k) = 2\lambda_n(x_k), \quad G_n(x_k; f) = f(x_k), \quad k = 0, 2n.$$

Из известного тождества М. М. Джрбашяна [1]

$$D_n(x; y) = \frac{1}{\xi - z} \left( \xi \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k \xi} \cdot \frac{1 - \bar{\alpha}_k z}{z - \alpha_k} - z \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} \cdot \frac{1 - \bar{\alpha}_k \xi}{\xi - \alpha_k} \right), \quad (2)$$

$$z = e^{ix}, \quad \xi = e^{iy},$$

вытекает, что  $G_n(x; f)$  есть тригонометрическая рациональная функция порядка не выше  $n$ , и, как следствие, отсюда имеем, что

$$G_n(x; 1) \equiv 1. \quad (3)$$

Очевидно, функция  $G_n(x; 1)$  в частном случае, когда  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , является тригонометрическим интерполяционным полиномом с равноотстоящими узлами. Исходя из этого полинома С. Н. Бернштейн [2] построил суммы, аналогичные средним Фейера для тригонометрических рядов Фурье. В настоящей заметке на основании функций (1) построены рациональные функции с подобными свойствами.

Пусть

$$U_n(x; f) = \frac{1}{4\lambda_n(x)} \sum_{k=0}^{2n} \frac{f(x_k)}{\lambda_n(x_k)} D_n^2(x; x_k). \quad (4)$$

Учитывая, что

$$1 - 2|\alpha_k| \cos(x - \theta_k) + |\alpha_k|^2 = (e^{ix} - \alpha_k)(e^{-ix} - \bar{\alpha}_k)$$

и тождество (2), заключаем, что  $U_n(x; f)$  есть тригонометрическая рациональная функция порядка не выше  $2n$ .

Далее, легко проверить, что

$$U_n(x_j; f) = \frac{f(x_j)}{4\lambda_n^2(x_j)} \lim_{x \rightarrow x_j} D_n^2(x; x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{0, 2n}.$$

Представляет интерес сравнить функцию (4) с рациональной функцией типа Фейера [3].

Покажем также, что рациональная функция  $U_n(x; f)$  является точной для  $f(x) \equiv 1$ . Действительно,  $U_n(x_j; 1) = 1$  и  $U_n(x_j; 1) = 0$ ,  $j = \overline{0, 2n}$ . Проверим правильность последнего соотношения.

Очевидно, если  $j \neq k$ , то

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{D_n^2(x; x_j)}{\lambda_n(x)} \right) \Big|_{x=x_j} = 0.$$

Если же  $k = j$ , то после несложных вычислений также получим, что

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{d}{dx} \left( \frac{D_n^2(x; x_k)}{\lambda_n(x)} \right) = 0.$$

Таким образом, рациональная функция  $U_n(x; 1) - 1$  порядка не выше  $2n$  имеет  $4n + 2$  нулей. Следовательно,

$$U_n(x; 1) \equiv 1. \quad (5)$$

Имеет место

**Теорема.** Если последовательность  $\{\alpha_k\}$  такая, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty,$$

то для  $\forall f \in C_{2\pi}$  соответствующая последовательность рациональных функций  $\{U_n(x; f)\}$  равномерно сходится на  $\mathbb{R}$  к функции  $f$ .

Докажем вначале следующую лемму.

**Лемма.** Справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{2n} (2\lambda_n(x_k))^{-1} = 1. \quad (6)$$

## РЕФЕРАТЫ

УДК 535

Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг. **Потоки энергии и тензорные импедансы на границах раздела анизотропных сред** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Установлена общая ковариантная связь между вектором среднего потока энергии и тензорами импеданса и пучка плоских электромагнитных волн в гиросферической среде. Сформулирован лучевой закон Снелла для плоской границы раздела любых линейных однородных анизотропных и гиросферических сред.

Библиогр. 13 назв.

УДК 536

Сирота Н. Н. **Третий закон термодинамики. I** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Рассматриваются вопросы термодинамики вблизи абсолютного нуля температуры. Дается обоснование теоремы Нернста с позиций классической и квантовой статистик. Анализируется характер поведения детерминанта устойчивости и термодинамических коэффициентов обобщенных сил системы.

Библиогр. 16 назв., ил. 1.

УДК 535.513

Титов А. Д. **Осевая сила света зеркальных уголкового отражателей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

При помощи матричного метода Джонса исследованы зависимости интенсивности в центре дифракционной картины в дальней зоне (осевая сила света) и коэффициента отражения зеркальных уголкового отражателей в форме трехгранных углов ( $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/s$ ,  $s$  — целые четные числа) от длины волны линейно-поляризованного падающего излучения при серебрении, алюминировании, золочении или меднении отражающих граней.

Библиогр. 12 назв., ил. 2.

УДК 535.37

Гулис И. М., Шляк А. И., Миксюк Ю. И., Цвирко В. А. **Пикосекундная стадия фотопротолитической реакции в протонных растворителях: модель, неэкспоненциальность, температурная зависимость** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Для растворов красителей в протонных растворителях, в которых возможен эстафетный перенос протона по цепочке водородных связей, предложено рассматривать константу скорости фотопротолитической реакции как функцию расстояния между партнерами: Проведенные модельные расчеты и теоретический анализ позволили предсказать неэкспоненциальность быстрых компонент законов затухания флуоресценции исследованных систем, а также объяснить резкое падение амплитуды быстрой компоненты, т. е. уменьшение доли фотопереноса протона по сверхбыстродействию подстроечному механизму реакции при понижении температуры раствора.

Библиогр. 7 назв., ил. 3.

УДК 535.215.4-547.672

Могильный В. В., Сидоренко М. М., Станкевич А. И. **Усиление оптической записи в антраценосодержащих полимерных слоях** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Исследованы особенности фотофизических и фотохимических процессов, протекающих при формировании объемных фазовых голографических решеток на основе реакции фотодимеризации эфиров оксима 9-формилантрацена в полиметилметакрилате. Приведены экспериментальные зависимости дифракционной эффективности решеток во времени и высказаны предположения о возможных механизмах наблюдаемого процесса темнового усиления.

Библиогр. 8 назв., ил. 2.

УДК 539.194:537.228.4

Казаченко Л. П. К вопросу о содержании *транс*-, *цис*-конформаций галогенпроизводных бензальдегида в растворах  $CCl_4$  // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Выполнен расчет молярных констант Керра *m*-Cl, Br, F и *o*-Cl производных бензальдегида с учетом анизотропии поляризуемости связи C—H и в зависимости от угла поворота альдегидной группы. Проведен анализ содержания в растворе  $CCl_4$  различных конформаций. Получено практическое совпадение результатов оценки соотношения *транс*-, *цис*-конформаций методами эффекта Керра и дипольных моментов.

Библиогр. 6 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 538.245:538.21

Данилькевич М. И., Аль-Шарр Д. (САР). Составляющие диэлектрической проницаемости хромозамещенных ферритов железа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

На основе опытных данных о температурной и частотной зависимостях  $\epsilon$  и расчета поляризуемостей ионов выделены вклады упругих смещений электронных оболочек ионов и их взаимных смещений и вклад релаксационных механизмов сегнетоэлектрического типа в измеряемую проницаемость шпинелей  $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ , ( $1,2 \leq x \leq 1,6$ ). Зависимость электронной и ионной составляющих  $\epsilon$  от состава связывается с изменением при этом электронной поляризуемости ионов.

Библиогр. 9 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 548.5:669.76

Шелелевич В. Г. Структура и электрические свойства быстрозакаленных из расплава фольг сплавов сурьма-мышьяк // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Проведены исследования структуры и электрических свойств фольг сплавов сурьма-мышьяк, полученных быстрым охлаждением из жидкой фазы. В фольгах преобладает текстура  $\{10\bar{1}2\}$ . Легирование сурьмы мышьяком вызывает уменьшение концентраций носителей электронов и дырок и уменьшение их подвижностей.

Библиогр. 7 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 538.123+621.083.8

Прокошин В. И., Ярмолович В. А., Андарало Л. А., Рабкевич Т. М. Исследование плоских концентраторов магнитного потока для преобразователей Холла // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Предлагаются результаты исследования плоских концентраторов магнитного потока, изготовленных из пермаллоя и стали марки 3415. Выводится выражение для описания индукции магнитного поля в зазоре концентратора. Приводится распределение составляющих индукции магнитного поля для концентраторов, отличающихся размерами и материалом.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 621.315.592

Бринкевич Д. И., Нассур Ф. (САР), Петров В. В., Чесноков С. А. Закалочные дефекты в кремнии, легированном акцепторными примесями III группы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Путем измерения спектров ИК поглощения, эффекта Холла и проводимости исследованы процессы генерации и отжига дефектов (ЗТД), вводящихся при закалке монокристаллов Si:Al, Si:Ga, Si:In, Si:(Sn, Al) и Si:(Al, P), выращенных по методу Чохральского. После закалки обнаружено уменьшение концентрации междоузельного кислорода, обусловленное его взаимодействием с технологическими примесями замещения. Показано, что смещение отжига ЗТД в высокотемпературную область связано с полями упругих напряжений.

Библиогр. 7 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 539.3.01

Прусов И. А., Василевич Ю. В. Новое представление общих формул теории упругости ортотропного тела, подверженного действию нормальной нагрузки // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Дан новый вывод общих формул для компонент тензора напряжений и перемещений ортотропного полупространства, подверженного действию нормальной нагрузки, через специальное представление квазигармонических функций.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.535.3:517.55

Рогозин С. В., Ле Маю Хай (СРВ). Продолжение голоморфных и мероморфных отображений со значениями в локально-выпуклом пространстве // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Рассматривается продолжение голоморфных и мероморфных отображений со значениями в локально-выпуклом пространстве (возможно, бесконечной размерности).

Библиогр. 9 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Сетько Е. А. Римановы поверхности правильных  $6n$ -угольников // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Исследуется проблема построения в явном виде основных функционалов римановых поверхностей специального вида. Такие поверхности получаются из правильных  $6n$ -угольников, стороны которых склеены попарно, через две. Проблема решается методом конформного склеивания. Сначала с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца и принципа симметрии строится одна нетривиальная функция искомого поля. Все поле строится как расширение поля, порожденного найденной функцией.

Библиогр. 6 назв., пл. 3.

УДК 62-501.7

Хацкевич Г. А., Пономаренко А. В. Обнаружение неоднородностей регрессионных моделей по зависимым выборочным данным // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Рассматриваются вопросы обнаружения моментов неоднородности регрессионных моделей по коррелированным выборочным наблюдениям. Предложен адаптивный алгоритм построения решающей статистики, исследована эффективность критерия. Приведены результаты моделирования на ЭВМ.

Библиогр. 6 назв., табл. 1.

УДК 519.24

Мохамад Гхазал, Труш Н. Н. Статистические свойства расширенной периодограммы // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Вычисляются первые два момента расширенного конечного преобразования Фурье и расширенной периодограммы для произвольных окон просмотра данных.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.28

Кирлица В. П. Точные  $D$ -оптимальные планы для линии регрессии с неравноточными наблюдениями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Показано, что точные  $D$ -оптимальные планы для линии регрессии с дисперсией наблюдений, изменяющейся линейно, совпадают с точными  $D$ -оптимальными планами, построенными для равноточных наблюдений. Указана процедура построения точных  $D$ -оптимальных планов для линии регрессии с кусочно-линейной непрерывной положительной дисперсией наблюдений.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.977

Джебран Дж. (САР). Минимаксно-модульные задачи кусочно-линейного программирования // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности в минимаксно-модульной задаче кусочно-линейного программирования.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.977

Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Приводится пакетное необходимое условие оптимальности в задаче кусочно-квадратичного программирования с параллелепипедными ограничениями.

УДК 534.23:517.95

Белявский А. К., Данейко И. К. К вопросу о волновом решении уравнения Гельмгольца в нестратифицированном волноводе // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Методом разделения переменных получено решение уравнения Гельмгольца для волновода с определенной неоднородностью по трассе распространения. Рассмотрен случай наличия в данной среде произвольного распределенного источника.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.977

Тагайназаров С. Критерий оптимальности и субоптимальности в одной специальной задаче линейного программирования // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Рассматривается специальная линейная экстремальная задача, которую можно трактовать как обобщенную первую фазы при исследовании классической задачи линейного программирования. Приводятся критерии оптимальности и субоптимальности в специальных терминах, учитывающих ее структуру.

УДК 517.538.5

Ровба Е. А. Интерполяционные рациональные функции типа Фейера — Бернштейна // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2.

Построены интерполяционные рациональные функции  $U_n(x; f)$ , обобщающие известные тригонометрические полиномы Бернштейна. Для произвольной функции  $f \in C_{2\pi}$  последовательность  $\{U_n(x; f)\}$  равномерно сходится на  $\mathbb{R}$  к  $f$  при условии полноты соответствующей системы рациональных функций.

Библиогр. 3 назв.