ISSN 0321–0367

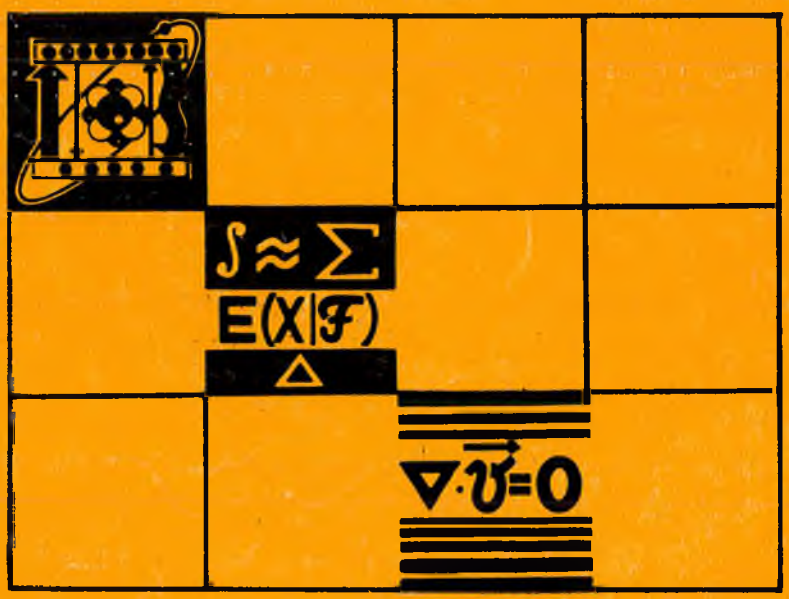
ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

1'91



СОДЕРЖАНИЕ

Хапалюк А. П. О решениях уравнения Бесселя 3
Тимощенко А. И. Уравнение Даффина — Кеммера для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена 7
Ан Чан Мо (КНДР), *Толстик А. Л., Чалей А. В.* Приближенные методы расчета отражательной способности ОВФ-голограмм в растворах красителей . . . 9
Титов А. Д. Поляризационные свойства зеркального и металлизированного световозвращателей в форме трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) 15
Левкович А. Д., Муайед М. С. (Ирак), *Перцев А. Н.* Экспериментальное сравнение методов измерения распределения поглощенных бета-частиц по глубине поглотителя 19
Шепелевич В. Г. Структура и кинетические свойства фольг сплавов висмут-сурьма 22
Прокошин В. И., Ярмолович В. А., Рабкевич Т. М. Функциональная модель пленочного преобразователя Холла в неоднородном магнитном поле 24
Лопатик А. Р., Мисевич О. В., Хаджо А. К. (САР), *Холмецкий А. Л.* МСКЭ при полном внешнем отражении мессбауэровского излучения 29
Белявский А. К., Данейко И. К. Обобщение метода конформного преобразования для задачи распространения волн в произвольном волноводе 33

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Зверович Э. И. О возможности явного построения глобальной униформизации алгебраического соответствия 36
Ковалев М. М., Топчишвили А. Л. Несобственные задачи выпуклой дискретной оптимизации 39
Зверович И. Э., Силла А. (Гвинея). *P*-унграфичность в некоторых классах графов 41
Писарук Н. Н., В. С. Редди (Индия). Матричные игры с зависимыми стратегиями 44
Чепинога М. М., Злебова А. Е. Исследование длинных внутренних волн с помощью обобщенных уравнений Рейнольдса 47
Драгун В. А., Феденко Н. П. О методе Чебышева 51
Третьякова Л. Г. К задаче об ω-периодических решениях квазилинейного телеграфного уравнения 53
Бобков В. В., Бобкова Н. А. Об одном классе численных методов решения задачи Коши 57
Ведерников С. В. Инвариантные части области симметрии 60
Мороз О. А. К вопросу о неасимптотической устойчивости 62

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Зажогин А. П., Серафимович А. И. Исследование влияния нейтральных лигандов на электронные свойства комплексов уранилхлорида 65
Пряхин А. Е., Минько И. Р. Импульсный спектрометр-релаксометр ЯМР . . 68
Рогозин С. В., Ле Маю Хай (СРВ). Продолжение мероморфных отображений со значениями в компактном кэлеровом многообразии 71
Шилин А. П. Два парных интегральных уравнения типа свертки 73

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

1'91

МИНСК
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ

Главный редактор **В. Г. РУДЬ**

Ответственный секретарь **П. Н. БАРАНОВСКИЙ**

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК *(ответственный редактор)*, Л. М. БАРКОВСКИЙ *(зам. ответственного редактора)*, В. В. БОБКОВ *(зам. ответственного редактора)*, А. М. БЕЛЬСКИЙ *(ответственный секретарь)*, Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЁНОК, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУ УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1991, № 1

Редактор *В. Г. Рудь*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *Д. Е. Дивин*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 20.11.90. Подписано в печать 03.01.91. Формат 70×108 1/16. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,36. Тираж 720 экз. Заказ 1059. Цена 1 р.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11. Адрес редакции: 220080. Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041. Минск, Ленинский пр., 79.

© Вестник БГУ имени В. И. Ленина, 1991

Физика

УДК 517.925

А. П. ХАПАЛЮК

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Для решения уравнения Бесселя [1]

$$x^2 \frac{d^2 \widehat{Z}(x)}{dx^2} + x \frac{d\widehat{Z}(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2)\widehat{Z}(x) = 0, \tag{1}$$

где ν — постоянное число (порядок уравнения), воспользуемся комплексным преобразованием Фурье, которое, как известно, определяется парой интегралов [5]:

$$\widehat{Z}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \check{Z}(\xi)\, e^{-ix\xi} d\xi, \quad \check{Z}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Z}(x)\, e^{ix\xi}\, dx. \tag{2}$$

Функция $\widehat{Z}(x)$ называется оригиналом, $\check{Z}(\xi)$ — трансформантой. В дальнейшем вместо двух интегралов (2) будем использовать краткую запись $\widehat{Z}(x) \div \check{Z}(\xi)$ (стрелка всегда направлена от оригинала к трансформанте). Для записи оригиналов и трансформант используются одинаковые буквы, но аргументы оригиналов обозначаются малыми латинскими, а трансформант — малыми греческими буквами, и это считается их отличительным признаком. Поэтому далее надстрочные знаки над оригиналами ($\wedge$) и трансформантами ($\vee$) будут опускаться.

Применяя преобразование Фурье (2) к уравнению Бесселя (1), получим дифференциальное уравнение для трансформант

$$(\xi^2 - 1)\frac{d^2 Z(\xi)}{d\xi^2} + 3\xi \frac{dZ(\xi)}{d\xi} + (1 - \nu^2) Z(\xi) = 0. \tag{3}$$

Теперь учтем, что любое решение уравнения (3) является трансформантой некоторого решения уравнения (1) и наоборот. Таким образом, между решениями уравнений (1) и (3) можно установить взаимно однозначное соответствие вида (2). В математическом отношении решения уравнения (3) проще решений уравнения (1). Это дает возможность сравнительно сложные решения уравнения Бесселя представить единым образом как обратные преобразования Фурье простых решений уравнения (3). Этот метод имеет ряд преимуществ, в частности, он легко выявляет многие особенности решений уравнения Бесселя, в том числе такие, которые не нашли отражения в классическом анализе [1].

Решениями уравнения (3) являются элементарные с точками ветвления функции. Конкретные их значения зависят от выбора ветвей и могут быть записаны по-разному. Анализ показывает, что имеется всего четыре варианта выбора линейно независимых решений. Для определенности возьмем следующий их вариант (b-решения):

$$b_\nu^{(1)}(\xi)=\begin{cases} e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi-\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{-i\sqrt{\xi^2-1}} \\ e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi-i\sqrt{1-\xi^2})^\nu}{\sqrt{1-\xi^2}}, \\ e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{i\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases} \qquad b_\nu^{(2)}(\xi)=\begin{cases} e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi-\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{i\sqrt{\xi^2-1}} \\ e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi+i\sqrt{1-\xi^2})^\nu}{\sqrt{1-\xi^2}}, \\ e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{-i\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases}$$

$$b_\nu^{(3)}(\xi)=\begin{cases} e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{-i\sqrt{\xi^2-1}} \\ e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi+i\sqrt{1-\xi^2})^\nu}{\sqrt{1-\xi^2}}, \\ e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{i\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases} \qquad b_\nu^{(4)}(\xi)=\begin{cases} e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{i\sqrt{\xi^2-1}} \\ e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\xi-i\sqrt{1-\xi^2})^\nu}{\sqrt{1-\xi^2}}, \\ e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\dfrac{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})^\nu}{-i\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases} \tag{4}$$

где верхняя строчка определяет решение при $\xi>1$, средняя — при $|\xi|<1$, нижняя — при $\xi<-1$.

Для нецелых порядков ν эти решения линейно независимы и удовлетворяют условиям (звездочка означает комплексное сопряжение):

$$b_\nu^{(2)}(\xi)=b_\nu^{(1)*}(\xi),\ b_\nu^{(3)}=b_{-\nu}^{(1)}(\xi),\ b_\nu^{(4)}(\xi)=b_{-\nu}^{(1)*}(\xi), \tag{5}$$

которые переходят в условия для оригиналов

$$b_\nu^{(2)}(x)=b_\nu^{(1)*}(-x),\ b_\nu^{(3)}(x)=b_{-\nu}^{(1)}(x),\ b_\nu^{(4)}(x)=b_{-\nu}^{(1)*}(-x). \tag{6}$$

Дело, как видим, свелось к вычислению обратных преобразований Фурье трансформант (4). Трудности заключаются в том, что не все эти интегралы Фурье сходятся в обычном смысле и в известной нам литературе отсутствуют. В [1—4] имеются нужные нам следующие значения интегралов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} b_\nu^{(1)}(\xi) &\leftarrow\!\div \frac{1}{2}\left[J_\nu(|x|)+J_\nu(|x|)\operatorname{sgn}x\right]=J_\nu(x_+) \\ b_\nu^{(2)}(\xi) &\leftarrow\!\div \frac{1}{2}\left[J_\nu(|x|)-J_\nu(|x|)\operatorname{sgn}x\right]=J_\nu(x_-) \end{aligned}\right\}\nu>-1,$$

$$\left.\begin{aligned} b_\nu^{(3)}(\xi) &\leftarrow\!\div \cos\nu\pi\, J_\nu(x_+-\sin\nu\pi\, Y_\nu(x_+)=J_{-\nu}(x_+) \\ b_\nu^{(4)}(\xi) &\leftarrow\!\div \cos\nu\pi\, J_\nu(x_-)-\sin\nu\pi\, Y_\nu(x_-)=J_{-\nu}(x_-) \end{aligned}\right\}(|\nu|<1), \tag{7}$$

где использованы обозначения [5]

$$f(x_\pm)=f(|x|)\,\Theta(\pm x),\ \Theta(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}, \tag{8}$$

а J_ν и Y_ν — известные функции Бесселя первого и второго рода [1]. Таким образом, формулы (7) для $|\nu|<1$, $\nu\neq0$ определяют все четыре линейно независимые решения уравнения Бесселя. Они, как видно, не совпадают с классическими решениями [1] и их следует рассматривать в области обобщенных функций (обобщенные решения).

Теперь нужно снять ограничения на порядок ν в (7). Хотя за пределами этих ограничений интегралы Фурье не сходятся в обычном смысле, они существуют как обобщенные функции. Несколько громоздкие, но в принципе несложные выкладки показывают, что их можно определить по формулам ($\nu=m+\lambda$, m — целое число):

$$\begin{aligned} b_\nu^{(1)}(x) &= i^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)b_\lambda^{(1)}(x)+\lambda i^{m-1}U_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{1}{x}b_\lambda^{(1)}(x)\right], \\ b_\nu^{(2)}(x) &= (-i)^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)b_\lambda^{(2)}(x)-\lambda(-i)^{m-1}U_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{1}{x}b_\lambda^{(2)}(x)\right], \\ b_\nu^{(3)}(x) &= (-i)^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)b_\lambda^{(3)}(x)-\lambda(-i)^{m-1}U_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{1}{x}b_\lambda^{(3)}(x)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

$$b_\nu^{(4)}(x) = i^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right) b_\lambda^{(4)}(x) + \lambda i^{m-1} U_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{1}{x} b_\lambda^{(4)}(x)\right].$$

При заданном m всегда можно выбрать такое ν, чтобы выполнялось условие $|\lambda|<1$ и, следовательно, функции $b_\nu^{(j)}(x)$ в (9) вычислялись по формулам (7). $T_m(\xi)$ и $U_m(\xi)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода, которые здесь определены тождеством

$$(\xi + i\sqrt{1-\xi^2})^m \equiv T_m(\xi) + i\sqrt{1-\xi^2}\,U_m(\xi). \tag{10}$$

В результате все четыре линейно независимые решения уравнения Бесселя (1) для произвольного нецелого порядка ν определяются через решения порядка меньше единицы и их производные, которые в области обобщенных функций всегда существуют. Практически вычислить их нетрудно.

При переходе к целому порядку b-решения трансформант (4) вырождаются и становятся линейно зависимыми, часть решений теряется. Недостающие решения нужно находить дополнительно, используя, например, известные методы предельных переходов. Однако проще для целого ν ($\nu=m$) решения уравнения (3) записать в другом виде:

$$Z_m^{(1)}(\xi) = T_m(\xi)\begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ 0 \end{cases}, \quad Z_m^{(2)}(\xi) = T_m(\xi)\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \\ 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases}$$

$$Z_m^{(3)}(\xi) = T_m(\xi)\begin{cases} \dfrac{i}{\sqrt{\xi^2-1}} \\ 0, \\ \dfrac{-i}{\sqrt{\xi^2-1}} \end{cases} \quad Z_m^{(4)}(\xi) = U_m(\xi). \tag{11}$$

Обратные преобразования Фурье выражений (11), хотя не всегда сходятся в обычном смысле, довольно просто находятся в области обобщенных функций по единой схеме. В качестве примера распишем ее более подробно для решений первого рода:

$$Z_m^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-ix\xi}\,d\xi = T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-ix\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{2}T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)J_0(x). \tag{12}$$

Здесь подынтегральная функция $T_m(\xi)$ рассматривается как мультипликатор [5—6] и, заменив переменную интегрирования ξ на оператор дифференцирования по $x\left(\xi \to i\frac{d}{dx}\right)$, выносится из-под знака интеграла. Аналогично вычисляются остальные три решения:

$$\begin{aligned} 2i^m Z_m^2(x) &= i^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)Y_0(|x|), \\ 2i^m Z_m^{(3)}(x) &= i^m T_m\left(i\frac{d}{dx}\right)[J_0(|x|)\operatorname{sgn} x], \\ i^m Z_m^{(4)}(x) &= i^{m-1} U_m\left(i\frac{d}{dx}\right)\delta(x), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция Дирака [5—6]. Исключением является $m=0$, когда $Z_m^{(4)}(x)$ вырождается. Это недостающее решение может быть определено по формуле:

$$Z_0^{(4)}(x) = Y_0(|x|)\operatorname{sgn} x \div \frac{4}{\pi}\left|\begin{array}{l} \dfrac{\ln(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{-i\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ \dfrac{\ln(i\xi + \sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ \dfrac{\ln(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{i\sqrt{\xi^2 - 1}} \end{array}\right. . \tag{14}$$

Заметим, что производные от этого решения не могут быть решениями уравнения Бесселя других порядков, так как их трансформанты содержат логарифмы и не могут быть решениями уравнения (3).

На этом заканчивается формальное решение уравнения Бесселя для произвольного порядка ν. Очевидно, что для каждого порядка получено четыре линейно независимых решения. Нетрудно проверить, например, прямой подстановкой, что все они действительно удовлетворяют уравнению Бесселя. Вместо двух классических получается четыре обобщенных решения. Между ними имеется принципиальная разница. В частности, среди полученных здесь решений отсутствуют функции Бесселя второго рода целого порядка $Y_m(x)$. В действительности на оси x это комплексные функции и мнимые их части, а следовательно, и функции в целом не являются решениями уравнения Бесселя. Классическая формула для их определения:

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{15}$$

является ошибочной. Дело в том, что решения $J_{\pm\nu}(x)$, вопреки существующим утверждениям [1], не являются аналитическими функциями переменного ν. При целочисленных значениях ν, как легко заметить из их трансформант, они могут иметь простые полюса, из-за чего формула (15) становится непригодной. Вместо формулы (15) можно предложить две (для нечетного и четного решений) формулы

$$\begin{aligned} Y_\nu^{(1)}(|x|)\operatorname{sgn} x &= \frac{1}{2\cos\nu\frac{\pi}{2}}\{\cos\nu\pi[b_\nu^{(1)}(x) - b_\nu^{(2)}(x)] - [b_\nu^{(3)}(x) - b_\nu^{(4)}(x)]\}, \\ Y_\nu^{(2)}(|x|) &= \frac{1}{2\sin\nu\frac{\pi}{2}}\{\cos\nu\pi[b_\nu^{(1)}(x) + b_\nu^{(2)}(x)] - [b_\nu^{(3)}(x) + b_\nu^{(4)}(x)]\}, \end{aligned} \tag{16}$$

которые справедливы для любого ν.

Полученные здесь особенности решений уравнения Бесселя легко просматриваются для решений полуцелых порядков, когда все они выражаются через элементарные функции. В действительности классические решения полуцелого порядка являются комплексными функциями. Так как исходное уравнение действительное, то мнимая и действительная части классических решений по отдельности будут решениями. Например, при $\nu = \frac{1}{2}$ имеем:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x_+}{\sqrt{x_+}} \pm i\frac{\sin x_-}{\sqrt{x_-}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{\cos x_+}{\sqrt{x_+}} \frac{\cos x_-}{\sqrt{x_-}}, \tag{17}$$

что и приводит к четырем линейно независимым решениям. Естественно, что эти четыре решения получаются также из общих формул (7) и (9).

Список литературы

1. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., 1949. Т. 1.
2. Бейтман Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. М., 1969. Т. 1.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.

5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 530.12 : 530.145

А. И. ТИМОЩЕНКО

УРАВНЕНИЕ ДАФФИНА — КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0 В ПОЛЕ КЕРРА — НЬЮМЕНА

В [1—3] приведены общековариантные уравнения Даффина — Кеммера (ДК) для векторной частицы и рассмотрены некоторые точные решения этих уравнений для пространства де Ситтера. В [4] получены сведения о всевозможных операторах симметрии уравнений ДК для свободной частицы и при наличии некоторых внешних электромагнитных полей специального вида. В [5] установлены общие свойства операторов условной симметрии [6] уравнений ДК во внешних электромагнитных полях на фоне риманового пространства-времени. В настоящей работе рассматривается разделение переменных в уравнении ДК для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена (КН) и исследуются некоторые его возможные симметрии.

Уравнение ДК на фоне риманового пространства-времени имеет вид [1]:

$$[\gamma^\mu(\nabla_\mu - ie_0A_\mu) + m_0]\psi = 0, \qquad (1)$$

где греческие индексы относятся к произвольной системе референции; $\gamma^\mu \leqslant h^\mu_{\cdot k}\gamma^k$ — матрицы ДК; $h^\mu_{\cdot k}$ — векторы лоренцева базиса, в котором γ^k постоянны, латинские индексы нумеруют эти векторы; $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\Gamma_\mu = \Gamma_{mn\mu}\gamma^m\gamma^n$; $\Gamma_{mn\mu}$ — коэффициенты вращения Риччи; A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля; e_0 и m_0 — постоянные, описывающие заряд и массу частицы. Для частицы со спином 0 $\psi = \mathrm{colon}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ (colon — столбец). При разделении переменных в (1) в поле КН все величины удобно отнести к изотропному базису Ньюмена-Пенроуза $h^\nu_{\cdot k}$: $h^\mu_{\cdot(1)} = m^\mu$, $h^\mu_{\cdot(2)} = \bar{m}^\mu$, $h^\mu_{\cdot(3)} = l^\mu$, $h^\mu_{\cdot(4)} = k^\mu$, в качестве которого берется изотропная тетрада Киннерсли (стандартные обозначения см. в [7]). В координатах Бойера — Линдквиста r, ϑ, φ, t метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты: $g_{11} = \Sigma/\Delta$, $g_{22} = \Sigma$, $g_{33} = (r^2 + a^2 + a^2 f \sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta$, $g_{34} = -af\sin^2\vartheta$, $g_{44} = -(1-f)$, где $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$; $f = (2Mr - Q^2)/\Sigma$; $\Delta = r^2 - 2M_\nu + Q^2$; M, a, Q — параметры, определяемые массой, угловым моментом и зарядом источника тяготения. Проводя вычисления, аналогичные методу Тюкольского (см., напр., [8]), частное решение (1) в поле КН можно представить в виде:

$$\psi = \mathrm{colon}\,(R_0\Theta_0,\ R_0\Theta_1/\bar{p},\ R_0\Theta_2/p,\ R_1\Theta_0/\Delta,\ R_2\Theta_0/\Sigma)\, e^{i,(m\varphi - \omega t)}$$

где величины R зависят только от r, а Θ — от ϑ; m и ω — константы разделения; $p = r + ia\cos\vartheta$. Функции R_1, R_2, Θ_1 и Θ_2 определяются через R_0 и Θ_0 выражениями:

$$\sqrt{2}m_0 R_1 = \Delta D^- R_0,\ \sqrt{2}m_0 R_2 = -\Delta D^+ R_0,$$
$$\sqrt{2}m_0\Theta_1 = -L^-\Theta_0,\ \sqrt{2}m_0\Theta_2 = -L^+\Theta_0,$$

где введены операторы:

$$D^\pm = \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{\Delta}[\omega(r^2 + a^2) - ma - md - e_0qr],$$
$$L^\pm = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \pm \left(\omega a\sin\vartheta - \frac{m}{\sin\vartheta}\right),$$

q — величина заряда источника тяготения. Функции R_0 и Θ_0 подчиняются уравнениям:

$$(D^+\Delta D^- + D^-\Delta D^+)\,R_0 - (\lambda + 2m_0^2 r^2)\,R_0 = 0,$$

$$(L^+L^- + L^-L^+)\,\Theta_0 + \operatorname{ctg}\vartheta\,(L^+ + L^-)\,\Theta_0 + (\lambda - 2m_0^2 a^2\cos^2\vartheta)\,\Theta_0 = 0,$$

причем λ — безразмерная константа разделения.

В [8] показано, что разделение переменных в уравнениях Якоби, Кляйна — Фока и Дирака в поле КН возможно ввиду наличия в этом пространстве-времени по крайней мере трех операторов симметрии. Два из них являются лиевскими операторами [6] $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial\varphi$. Третий оператор соответствует бивектору Яно — Киллинга, допустимому в этом пространстве. Было установлено [5], что для уравнения ДК не существует операторов симметрии, связанных с этим бивектором. Если учесть указанные лиевские операторы симметрии, в случае уравнения ДК остается единственная возможность построить оператор симметрии Q этого уравнения в виде:

$$Q = E^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\,(\nabla_\lambda - ie_0 A_\lambda) + \Phi E, \tag{2}$$

где $E_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon_{\lambda\varkappa\mu\nu}E^\varkappa$ — некоторый тривектор, $\varepsilon_{\lambda\varkappa\mu\nu}$ — псевдотензор Леви-Чивитта, Φ — скаляр; эти величины подчиняются уравнениям [5].

$$\nabla_\lambda E^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = 0,\ \ \partial_\lambda\Phi - ie_0\widetilde{F}_{\lambda\varkappa}E^\varkappa = 0,\ \ \widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}F^{\lambda\varkappa}. \tag{3}$$

Можно показать, что система (3) в поле КН совместна только при тривиальном решении: $\Phi = \mathrm{const}$, $E^\mu = 0$.

Таким образом, уравнение (1) имеет лишь два независимых оператора симметрии, а четыре независимые переменные разделились полностью.

По-видимому, в данном случае следует обратиться к расширению метода разделения переменных [6], переходя к отысканию операторов условной симметрии уравнения (1). Ограничимся рассмотрением частного случая, когда оператор Q имеет вид (2) и подчиняется коммутационному соотношению

$$[Q,\ L] = SQ, \tag{4}$$

где [,] — коммутатор, L — оператор уравнения (1), S — некоторая матрица. Из (1) и (4) следует, что $S = \pi_\lambda\gamma^\lambda$, $\pi_\lambda = -\widetilde{F}_{\lambda\varkappa}J^\varkappa - \partial_\lambda\ln|\Phi|$, $J^\varkappa = \frac{ie_0}{\Phi}E^\lambda$, $\Phi \neq 0$, а псевдовектор $J^\varkappa$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\nabla_{[\mu}J_{\nu]} - \widetilde{F}_{[\mu\lambda}\,.\,J_{\nu]}\,J_\lambda = 0. \tag{5}$$

Решая (5) в изотропном базисе Киннерсли, найдем, что в поле КН реализуются две возможности.

1. $J_{(1)} = J_{(3)} = 0$,

$$J_{(2)} = \frac{ip\Sigma}{2ar\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Delta}{\Sigma}F\right),\ \ J_{(4)} = F.$$

2. $J_{(1)} = J_{(4)} = 0$,

$$J_{(2)} = \frac{ip\Sigma}{2ar\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G}{\Sigma}\right),\ \ J_{(3)} = \frac{G}{\Sigma},$$

где $F = F(r)$ и $G = G(r)$ — произвольные функции r. Функция Φ в обоих случаях остается неопределенной.

Итак, в случае разделения переменных в одном уравнении должен существовать полный набор операторов, коммутирующих между собой и с оператором уравнения. Для уравнений, описывающих квантовые объекты, собственные значения этих операторов однозначно определяют чистые состояния, а волновые функции являются произведениями собственных волновых функций каждого из операторов. Если квантовый объект подчиняется матричному дифференциальному уравнению, то с математической точки зрения уже не столь очевидным является требование

существования полного набора операторов, коммутирующих между собой и с оператором уравнения, как необходимое и достаточное условие разделения переменных. Это подтверждается доказанной в [6] теоремой и рассмотренным нами случаем уравнения ДК для частицы со спином 0 в поле КН. Можно предположить, что возможность расширения метода разделения переменных заложена в тех случаях, когда $\psi^{+}\psi$ (крест означает обычное эрмитовское сопряжение) не имеет смысла плотности вероятности.

Список литературы

1. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. Общековариантный формализм Даффина — Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера. Минск, 1986. 45 с. (АН БССР. Ин-т физики. Препринт № 426).
2. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 1. С. 58.
3. Богуш А. А., Отчик В. С., Редьков В. М. // VII Всесоюзн. конференц. Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: Тез. докл. Ереван, 1988. С. 249.
4. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, 1983.
5. Тимощенко А. И. // Гравитация и электромагнетизм. 1990. Вып. 5. С. 162.
6. Фущич В. И., Жданов Р. З. // Симметрии и решения нелинейных уравнений мат. физ. Киев, 1987. С. 17.
7. Точные решения уравнений Эйнштейна / Под ред. Э. Шмутцера. М., 1982.
8. Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986.

Поступила в редакцию 15.10.90.

УДК 535.34

АН ЧАН МО (КНДР), А. Л. ТОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ОВФ-ГОЛОГРАММ В РАСТВОРАХ КРАСИТЕЛЕЙ

При рассмотрении отражательной способности динамических ОВФ-голограмм, формируемых в растворах красителей при встречном четырехволновом взаимодействии, ограничиваются, как правило, приближением заданных полей накачки [1—4]. Учет изменения волн накачки при их распространении в объеме среды приводит к рассмотрению системы дифференциальных уравнений, которые могут быть решены лишь численно [5, 6]. Аналитические аппроксимации численных решений рассматривались в [7]. Анализ проводился для двухуровневой модели резонансной среды. Для растворов красителей характерно частичное перекрытие полос поглощения основного и возбужденного уровней, что обусловливает необходимость привлечения более сложных спектроскопических моделей. При этом вследствие низкого квантового выхода люминесценции в возбужденном канале наряду с резонансным механизмом нелинейности следует учитывать тепловую нелинейность.

В настоящей работе рассмотрены аналитические приближения, позволяющие рассчитать отражательную способность ОВФ-голограмм в красителях, моделируемых трех- и четырехуровневыми схемами. Учтены переходы между возбужденными синглетными (S_1—S_2) и триплетными (T_1 — T_2) состояниями молекул.

Отражательная способность динамических ОВФ-голограмм, равная отношению интенсивностей обращенной и сигнальной волн на входе в нелинейную среду, в приближении заданной накачки описывается формулой [1]

$$R = |\varphi|^2 [\psi + (|\varphi|^2 - \psi^2)^{1/2} \operatorname{ctg}\{(|\varphi|^2 - \psi^2)^{1/2} K_0 L/2\}]^{-2}, \qquad (1)$$

где ψ — нормированный амплитудный коэффициент нелинейного поглощения слабых сигнальной и обращенной волн в присутствии мощных полей накачки; φ — коэффициент параметрической связи волн; K_0 — на-

чальный коэффициент поглощения; L — длина взаимодействия. Для красителей, моделируемых трех- и четырехуровневой схемами, имеем [6]:

$$\psi = \frac{2C_+/A_+ + 2C_-/A_- - \mathrm{Im}D_+/A_+^3 - \mathrm{Im}D_-/A_-^3}{2\sqrt{2}(B + A_+A_-)^{1/2}} -$$

$$- \frac{A_+(\sqrt{I_+} - \sqrt{I_-})^2 + A_-(\sqrt{I_+} + \sqrt{I_-})^2 + \sqrt{I_+I_-}(F_+/A_+ - F_-/A_-)}{\sqrt{2}A_+A_-(B + A_+A_-)^{3/2}} \mathrm{Im}G, \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{G\sqrt{I_+I_-}(F_+/A_+ + F_-/A_-)}{\sqrt{2}A_+A_-(B + A_+A_-)^{3/2}} + \frac{D_+/A_+^3 - D_-/A_-^3}{2\sqrt{2}(B + A_+A_-)^{1/2}}, \quad (3)$$

где

$$A_\pm = [1 + \gamma(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^2 + \beta(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^4]^{1/2},$$

$$B = 1 + \gamma(I_+ + I_-) + \beta(I_+ - I_-)^2, \quad C_\pm = 1 + (\gamma - \alpha)(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^2,$$

$$D_\pm = \hat{\alpha}(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^2 + 2\hat{\beta}(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^4 + (\gamma\hat{\beta} - \hat{\alpha}\beta)(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^6,$$

$$F_\pm = 2 + \gamma(\sqrt{I_+} \pm \sqrt{I_-})^2, \quad G = \hat{\alpha} + 2\hat{\beta}(I_+ + I_-) + (\gamma\hat{\beta} - \hat{\alpha}\beta)(I_+ - I_-)^2,$$

$I_\pm$ — интенсивности встречных волн накачки. Параметры $\hat{\alpha} = a + i\alpha$, $\hat{\beta} = b + i\beta$ и γ характеризуют оптические и спектроскопические свойства раствора красителя. Учитывая как резонансный (амплитудный и фазовый), так и тепловой механизмы нелинейности, запишем:

$$\hat{\alpha} = (\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{21} - \hat{\vartheta}_{23})/vp_{21} - \delta(1 - \mu_{21}),$$

$$\hat{\beta} = [B_{23}(\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{32}) + B_{32}(\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{21} - \hat{\vartheta}_{23})]/v^2p_{21}p_{32} -$$
$$- \delta[B_{32}(1 - \mu_{21})/vp_{32} + B_{23}(1 - \mu_{32})/vp_{21}],$$

$\gamma = (B_{12} + B_{21})/vp_{21} + B_{32}/vp_{32}$ — для трехуровневой $(S_0 - S_1 - S_2)$ и

$$\hat{\alpha} = [\hat{\vartheta}_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + \hat{\vartheta}_{21} - \hat{\vartheta}_{34}p_{23}/p_{31}]/v(p_{21} + p_{23}) - \delta(1 - \mu_{21}),$$

$$\hat{\beta} = [(B_{34}(\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{43}) + B_{43}(\hat{\vartheta}_{12} - \hat{\vartheta}_{34}))p_{23}/p_{31} + B_{43}(\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{21})]/v^2p_{43} \times$$
$$\times (p_{21} + p_{23}) - \delta[B_{43}(1 - \mu_{21})/vp_{43} + B_{34}(1 - \mu_{43})p_{23}/vp_{31}(p_{21} + p_{23})],$$

$\gamma = [B_{12}(1 + p_{23}/p_{31}) + B_{21}]/v(p_{21} + p_{23}) + B_{43}/vp_{43}$ — для четырехуровневой модели красителя $(S_0 - S_1 - T_1 - T_2)$. Здесь $\delta = 2\omega(dn/dT)t/cC_\rho$, причем dn/dT — термооптический коэффициент, C_ρ — теплоемкость единицы объема, t — время; μ_{ij} — квантовый выход люминесценции в канале $i - j$, $\hat{\vartheta}_{ij} = \vartheta_{ij} + iB_{ij}$, $\vartheta_{ij}(\omega)$ связаны дисперсионными соотношениями с коэффициентом Эйнштейна для вынужденного перехода $B_{ij}(\omega)$; p_{ij} — суммарная вероятность спонтанных и безызлучательных переходов; v — скорость света в среде.

При равных интенсивностях встречных волн накачки $I_+ = I_- = I_0$ выражения для коэффициентов нелинейного поглощения ψ и параметрической связи волн φ упрощаются:

$$\psi = \frac{A^2(A + A^2 - 8\beta I_0^2) - (2\alpha I_0 + 8\beta I_0^2)(1 + A + 2A^2 - 16\beta I_0^2)}{\sqrt{2}A^3(1 + A + 2\gamma I_0)^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{(2\hat{\alpha} I_0 + 8\hat{\beta} I_0^2)(1 + A - 16\beta I_0^2) + 8\hat{\beta} I_0^2 A^2}{\sqrt{2}A^3(1 + A + 2\gamma I_0)^{1/2}}, \quad (5)$$

где $A = (1 + 4\gamma I_0 + 16\beta I_0^2)^{1/2}$.

Зависимости отражательной способности ОВФ-голограмм от интенсивности волн накачки и оптической плотности среды, рассчитанные по формулам (1), (4), (5), изображены штрих-пунктирной линией для красителей, моделируемых трех- (рис. 1*а*) и четырехуровневой схемами

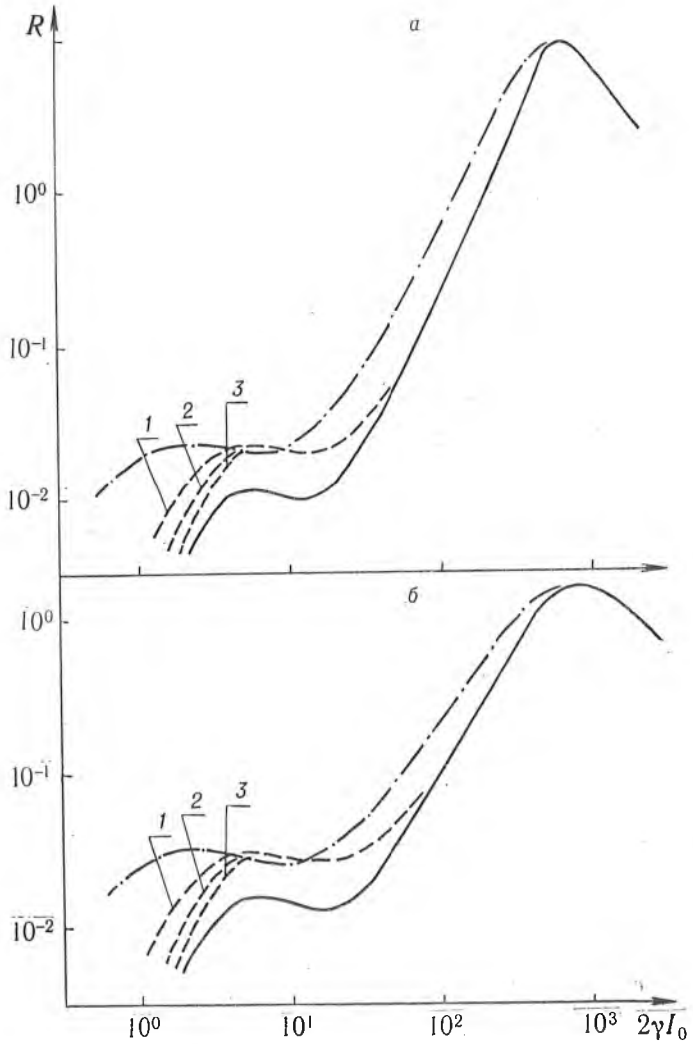


Рис. 1. Зависимости отражательной способности ОВФ-голограмм R от суммарной интенсивности волн накачки $2\gamma I_0$ для красителей, моделируемых трех- (*а*) и четырехуровневой (*б*) схемами, в нулевом (штрих-пунктирная линия), первом (1), втором (2) и третьем (3) порядке приближения при $K_0L = 5$, $\mu_{21} = 0{,}9$, $p_{32}/p_{21} = 100$ (*а*); $\mu_{21} = 0{,}1$, $p_{23}/p_{31} = 10$, $p_{43}/(p_{21} + p_{23}) = 10$ (*б*). Сплошные линии соответствуют точному решению задачи

(рис. 1, *б*; 2). Расчеты проведены при следующих параметрах среды и излучения: возбуждение красителя осуществляется в центре полосы поглощения S_0—S_1 (λ=700 нм), стоксов сдвиг зеркально-симметричных гауссовых контуров поглощения и испускания составляет 1,6 полуширины контура Δ (Δ=30 нм), контур поглощения в возбужденном канале S_1—S_2(T_1—T_2) смещен на 1,2Δ в длинноволновую область относительно основного канала S_0—S_1, длительность взаимодействия t=20 нс, $C_\rho^{-1}dn/dT = -10^{-4}$ Дж$^{-1}\cdot$см^3. Как и следовало ожидать, приближение заданной накачки находится в хорошем согласии с точным решением задачи при небольшой оптической плотности среды $K_0L \leqslant 0{,}2$, а также и при большей оптической плотности, когда интенсивности накачки достаточно для просветления объема нелинейного слоя.

Для нахождения более точных аналитических аппроксимаций применим метод учета нелинейного поглощения, приведенный в [7], для двух-

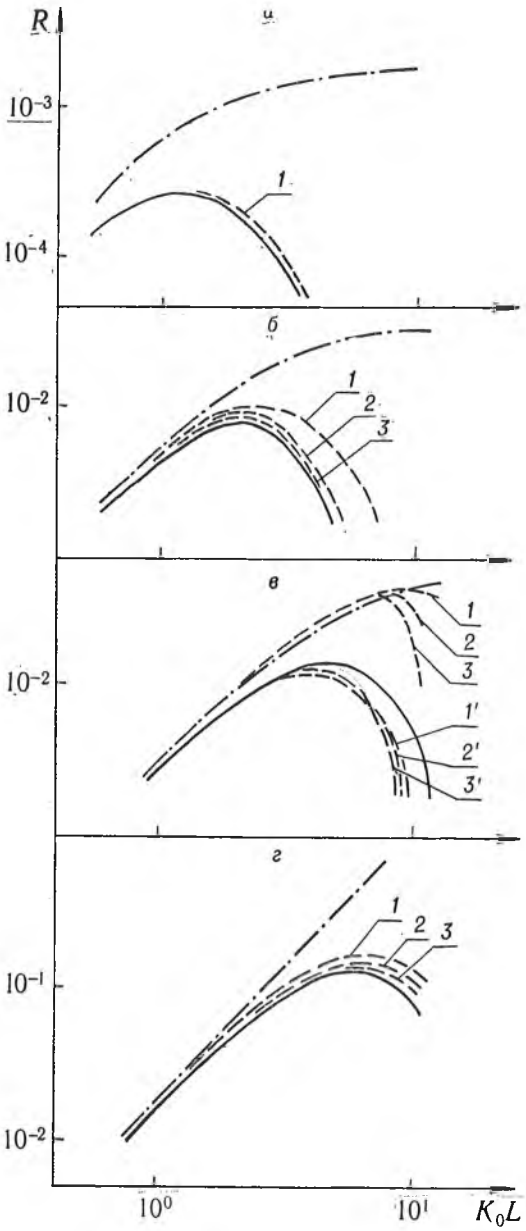


Рис. 2. Зависимости отражательной способности R от оптической плотности раствора красителя K_0L при интенсивностях накачки на входе в нелинейную среду $2\gamma I_0 = 0{,}1$ (*а*), 1 (*б*), 10 (*в*), 100 (*г*). Остальные параметры те же, что и на рис. 1, *б*

уровневой модели среды. Суть метода сводится к использованию формул для отражательной способности ОВФ-голограмм, полученных в приближении заданной накачки, но с заменой интенсивности накачки на ее эффективное значение, играющее роль средней по длине взаимодействия величины интенсивности. В предположении экспоненциального убывания полей в процессе распространения $I_+(z) = I_0 \exp(-Kz)$, $I_-(z) = I_0 \exp[-K(L-z)]$ — эффективное значение интенсивности $\tilde{I} = \sqrt{I_+ I_-} = I_0 \exp(-KL/2)$. В свою очередь, существует зависимость коэффициента поглощения раствора красителя K от интенсивности излучения, которая для нашего случая имеет вид [8]: $K = K_0[1+(\gamma-\alpha)I]/(1+\gamma I + \beta I^2)$. Учесть взаимное влияние интенсивности излучения и коэффициента поглощения можно, используя рекуррентное соотношение, связывающее n и $n-1$ порядки приближений:

$$\tilde{I}_n = I_0 \exp[-K_0L(1 + 2(\gamma-\alpha)\tilde{I}_{n-1})/2(1 + 2\gamma\tilde{I}_{n-1} + 4\beta\tilde{I}_{n-1}^2)]. \quad (6)$$

В качестве нулевого приближения принимается заданная интенсивность волн накачки I_0.

Результаты расчетов отражательной способности ОВФ-голограмм, выполненных по формулам (1), (4), (5), с заменой интенсивности накачки I_0 на ее эффективное значение $\tilde{I}_n$ для различных порядков приближений ($n = 1, 2, 3$) иллюстрируются на рис. 1, 2 кривыми *1*, *2*, *3* соответственно. Введение эффективного значения интенсивности позволило качественно правильно описать зависимость отражательной способности от оптической плотности раствора красителя и расширить диапазон применимости аналитических приближений до величины оптической плотности $K_0L \leqslant 2$. Причем при интенсивностях накачки $I_0 \lesssim \gamma^{-1}$ (см. рис. 2, *а*, *б*), а также $I_0 \sim \gamma/\beta$ (просветление возбужденного канала) (см. рис. 2, *г*) приближения, полученные для $n = 2, 3$, пригодны вплоть до значения $K_0L \simeq 8$.

Следует учесть, что при переходе от выражений (2), (3) к приближенным соотношениям (4), (5), полученным при равных интенсивностях

волн накачки ($I_+ = I_-$), пренебрегли членами вида $I_+ - I_-$, $\sqrt{I_+} - \sqrt{I_-}$. В условиях же сильного поглощения, когда интенсивности волн накачки $I_+(z)$ и $I_-(z)$ существенно различаются в объеме среды, указанные слагаемые могут играть определенную роль. Учитывая, что формулы (4), (5) позволили описать отражательную способность ОВФ-голограмм при интенсивностях накачки $I_0 \gtrsim \gamma/\beta$, рассмотрим диапазон небольших интенсивностей. Когда спектроскопические свойства красителя определяются просветлением резонансного перехода $S_0 - S_1$ и линейным поглощением с возбужденного уровня $S_1(T_1)$. Выражения (2), (3) существенно упрощаются:

$$\psi = 1 - \widehat{\alpha}/\gamma + \alpha(1 + \gamma(I_+ + I_-))/\gamma A^{3/2}, \tag{7}$$

$$\varphi = 2(\widehat{\alpha} - b_T/\gamma)\sqrt{I_+ I_-}/A^{3/2} + 2b_T\sqrt{I_+ I_-}/\gamma, \tag{8}$$

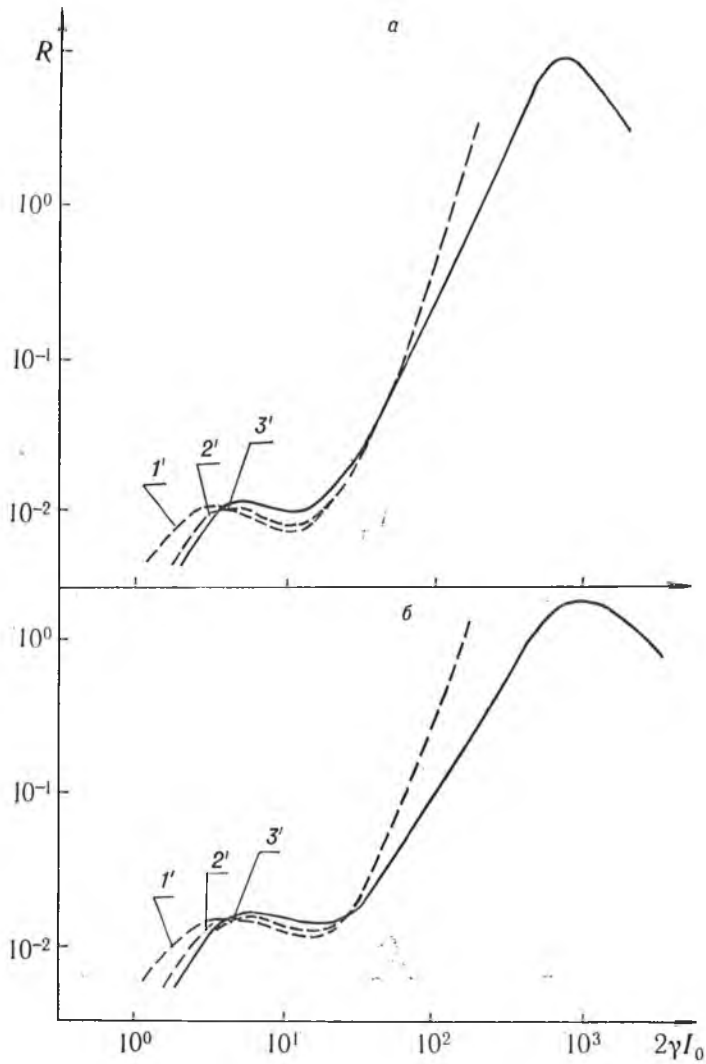


Рис. 3. Зависимости отражательной способности R от интенсивности накачки $2\gamma I_0$

где $A = 1 + 2\gamma(I_+ + I_-) + \gamma^2(I_+ - I_-)^2$, $b_T = -\delta B_{23}(1 - \mu_{32})/vp_{21}$ для трех- и $b_T = -\delta B_{34}(1 - \mu_{43})p_{23}/vp_{31}(p_{21} + p_{23})$ для четырехуровневой модели красителя. Рассчитав в приближении экспоненциального убывания полей

в процессе распространения среднее по длине взаимодействия значение слагаемого $\gamma^2(I_+-I_-)^2$ и заменив интенсивности I_+, I_- в (7), (8) на их эффективное значение $\tilde{I}_n$, запишем окончательные выражения для коэффициентов нелинейного поглощения и параметрической связи волн:

$$\psi = 1 - \alpha/\gamma + \alpha(1 + 2\gamma\tilde{I}_n)/\gamma A^{3/2}, \tag{9}$$

$$\varphi = 2(\alpha - b_T/\gamma)\tilde{I}_n/A^{3/2} + 2b_T\tilde{I}_n/\gamma, \tag{10}$$

где

$$A = 1 + 4\gamma\tilde{I}_n + 2\gamma^2\tilde{I}_n^2[(\exp(K_nL) - \exp(-K_nL))/2K_nL - 1], \tag{11}$$

$K_n = K_0(1+2(\gamma-\alpha)\tilde{I}_n)/(1+2\gamma\tilde{I}_n)$. Отражательная способность ОВФ-голограмм при этом по-прежнему описывается формулой (1), а для эффективного значения интенсивности накачки $\tilde{I}_n$ имеем рекуррентное соотношение (6), в котором параметр β нужно положить равным нулю. Результаты расчетов, выполненных по формулам (1), (9), (10) для трех- и четырехуровневой модели красителя, практически совпадают с кривыми *1—3* на рис. 2, *а*, *б* и представлены штриховыми линиями *1′—3′* на рис. *2в*, *3*, отвечающими приближениям $n=1$—3 соответственно. Видно хорошее совпадение с точным решением задачи (сплошная линия) при оптической плотности $K_0L \leqslant 6$.

Учитывая весьма компактный вид формул (9), (10), рассмотрим возможность их использования также без учета слагаемого $\gamma^2(I_+-I_-)^2$, т. е. когда для коэффициента A имеем простое выражение $A=1+4\gamma I_n$. Из формулы (11) следует, что указанное приближение справедливо при малых интенсивностях накачки $\gamma\tilde{I}_n \ll 1$, а также при небольшой оптической плотности раствора красителя, когда $\exp(K_nL) \simeq 1-K_nL$. Анализ, проведенный для различных значений интенсивности волн накачки и оптической плотности среды, показал хорошую точность приближения при значениях $K_0L \leqslant 2$.

Подводя итог сказанному, отметим, что при анализе реальных ситуаций, когда интенсивности накачки недостаточно для просветления возбужденного канала и оптимальная оптическая плотность раствора красителя $\leqslant 6$, для расчета отражательной способности ОВФ-голограмм целесообразно применять формулы (1), (9), (10). В случае просветления возбужденного синглетного S_1—S_2 либо триплетного перехода T_1—T_2 ($I_0 \sim \gamma/\beta$) необходимо использовать точные выражения для коэффициента нелинейного поглощения (4) и параметрической связи волн (5).

Список литературы

1. Buck J. A., Dienes A., Whinnery J. R. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1981. V. 71. № 11. P. 1381.
2. Кабанов В. В., Рубанов А. С. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1277.
3. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. // ЖПС. 1984. Т. 41 № 6. С. 911.
4. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. // ЖПС. 1983. Т. 39. № 4. С. 567.
5. Brown W. P. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 5. P. 629.
6. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. // Изв. АН СССР: Сер. физ. 1990. Т. 54. № 6. С. 1092.
7. Ан Чан Мо, Толстик А. Л., Чалей А. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2. С. 3.
8. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 8. С. 1681.

Поступила в редакцию 21.05.90.

УДК 535.513

А. Д. ТИТОВ

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЗЕРКАЛЬНОГО И МЕТАЛЛИЗИРОВАННОГО СВЕТОВОЗВРАЩАТЕЛЕЙ В ФОРМЕ ТРЕХГРАННОГО УГЛА ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$)

Световозвращатель (СВ) в форме трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) обладает свойством возвратного отражения независимо от направления падающего излучения [1]. Поляризационные свойства его в режиме полного внутреннего отражения исследованы в [2, 3]. Большинство используемых в настоящее время СВ имеют металлизированные грани, что позволяет устранить мелкоструктурность изображения [4].

Положение равнореберного СВ относительно прямоугольной системы координат XYZ определено векторами внутренних нормалей к отражающим (зеркальным или металлизированным) граням *1, 2, 3* и фронтальной грани *4* (рис. 1, *а*).

$$\vec{n}_1 = \{\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2,\ 0\},\ \vec{n}_2 = \{0,\ 1,\ 0\},\ \vec{n}_3 = \{0,\ 0,\ 1\},$$
$$\vec{n}_4 = (5-2\sqrt{2})^{-1/2}\{1,\ \sqrt{2}-1,\ 1\}.$$

Состояние поляризации линейно поляризованного излучения, падающего на СВ в направлении $\vec{q}_1 = \vec{n}_4$ и отраженного $-\vec{q}_1$, описывается в правовинтовых системах ортогональных векторов $\vec{q}_1$, $\vec{s}$, $\vec{p}$ и $-\vec{q}_1$, $-\vec{s}$, $\vec{p}$ [2, 5]. Внутри СВ излучение распространяется десятью возможными способами, отличающимися порядком переотражения от граней, и выходит из него после пяти отражений в направлении, обратном исходному. При полностью освещенной фронтальной грани реализуются все варианты прохождения и СВ формирует десять выходящих с различными состояниями поляризации пучков, пространственно разнесенных по секторам выходной апертуры (см. рис. 1, *б*).

Полагаем, что амплитуда светового вектора входного луча равна единице, а азимут поляризации $\alpha_{вх}$ отсчитывается по часовой стрелке от оси *s*. Тогда векторы Джонса входного и выходного лучей можно записать в виде:

$$\vec{E}_{вх} = \begin{pmatrix} E_s^{вх} \\ E_p^{вх} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{вх} \\ \sin\alpha_{вх} \end{pmatrix},\ \vec{E}_{вых} = \begin{pmatrix} E_s^{вых} e^{i\delta_{вых}} \\ E_p^{вых} \end{pmatrix} = C^{(p)}\vec{E}_{вх}. \qquad (1)$$

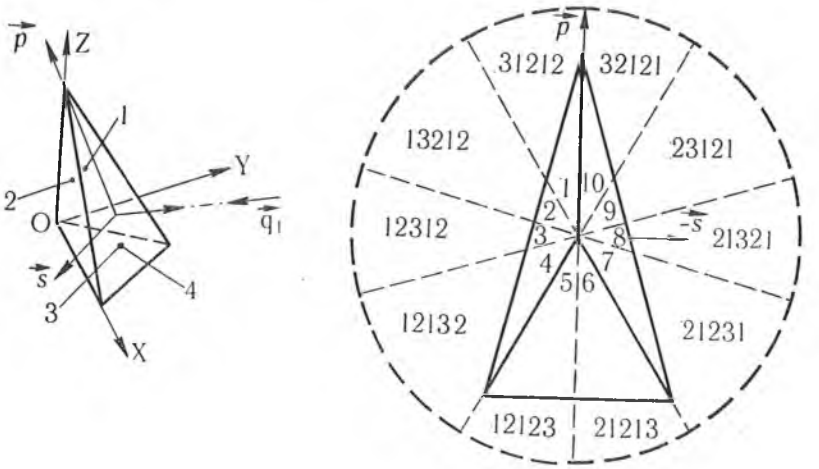


Рис. 1. Система координат (*а*) и фронтальная грань световозвращателя с разбиением выходной апертуры на сектора, соответствующие различным последовательностям отражения пучка от граней (*б*)

Здесь $\delta_{\text{вых}} = \delta_s^{\text{вых}} - \delta_p^{\text{вых}}$ — сдвиг фазы между $E_s^{\text{вых}}$ и $E_p^{\text{вых}}$, $C^{(p)}$—матрица поляризационного действия системы (матрица Джонса), которая получается в результате перемножения матриц, описывающих поляризационные свойства отдельных граней:

$$C^{(p)} = {}_{ok''}T_{j''} \left[\prod_{k}^{4} ({}_{m}R_{j\,mk}T_j) \right]_{k'} R_{j'\,k'o}T_{j'} = \begin{pmatrix} a_{11}\, e^{i\delta_{11}} & a_{12}\, e^{i\delta_{12}} \\ a_{21}\, e^{i\delta_{21}} & a_{22}\, e^{i\delta_{22}} \end{pmatrix},$$

где $k=1, 2, 3$ — номера граней в порядке прохождения их оптическим пучком от начальной грани k' до конечной k''; m — номер грани, следующей непосредственно за гранью k; j — текущий номер волны (j' и j'' — номера входящей и последней рассматриваемой волны); o — индекс поляризационного базиса, связанного с фронтальной гранью. Некоторые варианты отражения цепочки (1) приведены в [2]. Переход от системы ортов ${}_k\vec{s}_j$, ${}_k\vec{p}_j$, q_j, в которой описывается поляризационное состояние отраженной от k-й грани j-й волны, к системе ортов ${}_m\vec{s}_j$, ${}_m\vec{p}_j$, $\vec{q}_j$, связанной с m-й гранью, на которую падает j-я волна, осуществляется с помощью матрицы поворота базисных векторов

$${}_{mk}T_j = \begin{pmatrix} {}_m\vec{s}_j\, {}_k\vec{s}_j & {}_m\vec{s}_j\, {}_k\vec{p}_j \\ {}_m\vec{p}_j\, {}_k\vec{s}_j & {}_m\vec{p}_j\, {}_k\vec{p}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix},$$

где α_j — угол между ортами нормалей ${}_k\vec{s}_j$ и ${}_m\vec{s}_j$ к плоскостям падения на отражающие грани:

$${}_i\vec{s}_j = \frac{[\vec{n}_i \times \vec{q}_j]}{|[\vec{n}_i \times \vec{q}_j]|}, \quad {}_i\vec{p}_j = [\vec{q}_j \times {}_i\vec{s}_j], \quad i = m,\ k.$$

Матрица поляризационного действия отражающей грани имеет вид:

$${}_iR_j = \begin{pmatrix} {}_ir_j^{(s)}\, e^{i\,{}_i\delta_j^{(s)}} & 0 \\ 0 & {}_ir_j^{(p)}\, e^{i\,{}_i\delta_j^{(p)}} \end{pmatrix},$$

где ${}_ir_j^{(s)} = \sqrt{\dfrac{(n\cos\Theta - u)^2 + v^2}{(n\cos\Theta + u)^2 + v^2}}$,

$${}_ir_j^{(p)} = \sqrt{\frac{[(n_2^2 - k_2^2)\cos\Theta - nu]^2 + (2n_2k_2\cos\Theta - nv)^2}{[(n_2^2 - k_2^2)\cos\Theta + nu]^2 + (2n_2k_2\cos\Theta + nv)^2}},$$

$$\operatorname{tg} {}_i\delta_j^{(s)} = -\frac{2nv\cos\Theta}{u^2 + v^2 - n^2\cos^2\Theta},$$

$$\operatorname{tg} {}_i\delta_j^{(p)} = -\frac{2n\cos\Theta\,[2n_2k_2u - (n_2^2 - k_2^2)\,v]}{(n_2^2 + k_2^2)^2\cos^2\Theta - n^2(u^2 + v^2)}.$$

Здесь $2u^2 = \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n^2\sin^2\Theta)^2 + 4n_2^2k_2^2} + (n_2^2 - k_2^2 - n^2\sin^2\Theta)$, $2v^2 = \sqrt{(n_2^2 - k_2^2 - n^2\sin^2\Theta)^2 + 4n_2^2k_2^2} - (n_2^2 - k_2^2 - n^2\sin^2\Theta)$;

n — показатель преломления материала СВ; $n_2' = n_2 - ik_2$ — комплексный показатель преломления металла, напыленного на боковые грани; Θ — угол падения j-й волны на i-ю грань.

Расчеты показали, что отраженный луч в общем случае поляризован эллиптически. Зависимость эллиптичности пучка, выходящего из сектора *1*, для зеркального СВ, выполненного из серебра, алюминия, золота или меди при некоторых длинах волн, от $\alpha_{\text{вх}}$ приведена на рис. 2. Аналогичная зависимость для металлизированного СВ с $n=1{,}513$ изображена на рис. 3. Показатели преломления металлов взяты из [6]. Для сравнения на этих же рисунках штриховыми линиями обозначена зависимость для прямоугольного СВ при $\lambda=400$ нм (Ag, Al) и $\lambda=500$ нм

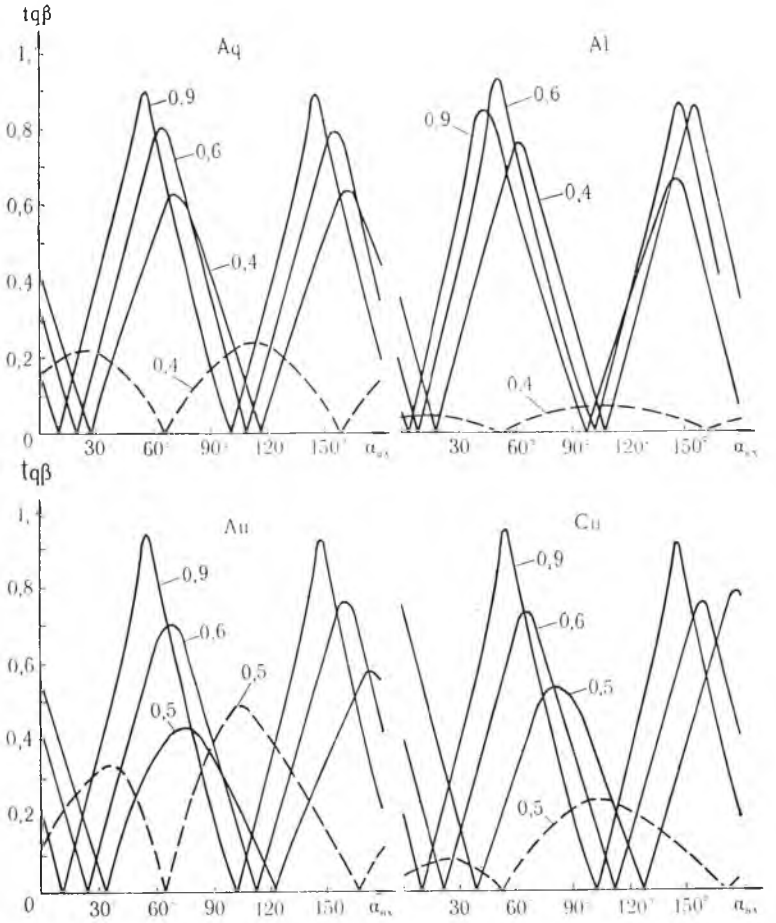


Рис. 2. Зависимость эллиптичности поляризации tgβ выходящего излучения от азимута поляризации $\alpha_{вх}$ входного линейно поляризованного света для зеркального световозвращателя при различных длинах волн и материалах напыления

(Au, Cu). Видно, что эллиптичность света, отраженного от СВ (π/2, π/2, π/4), существенно больше, чем от прямоугольного СВ. Кроме того, если в СВ (π/2, π/2, π/2) при некоторых длинах волн отраженный луч не бывает поляризован линейно ни при каких значениях $\alpha_{вх}$ [5], то для исследованного СВ всегда имеются два значения $\alpha_{вх}$, для которых отраженный луч линейно поляризован.

Коэффициент отражения СВ определяется по формуле:

$$R = \frac{I_{вых}}{I_{их}} = \frac{(E_s^{вых})^2 + (E_p^{вых})^2}{(E_s^{вх})^2 + (E_p^{вх})^2},$$

где $I_{вх}$ и $I_{вых}$ — интенсивности входного и выходного лучей. В таблице приведены значения коэффициентов отражения СВ (в процентах) с серебрёными, алюминированными, золочёными и меднёными боковыми гранями. Усреднение проводилось по азимуту поляризации падающего излучения в каждом из десяти вариантов отражения, затем определяли средний коэффициент. В скобках даны значения для прямоугольного СВ, которые согласуются с [5].

Полученные результаты свидетельствуют, что отражательные характеристики металлизированного и зеркального СВ (π/2, π/2, π/4) допускают их использование в оптическом приборостроении наряду с прямоугольным СВ.

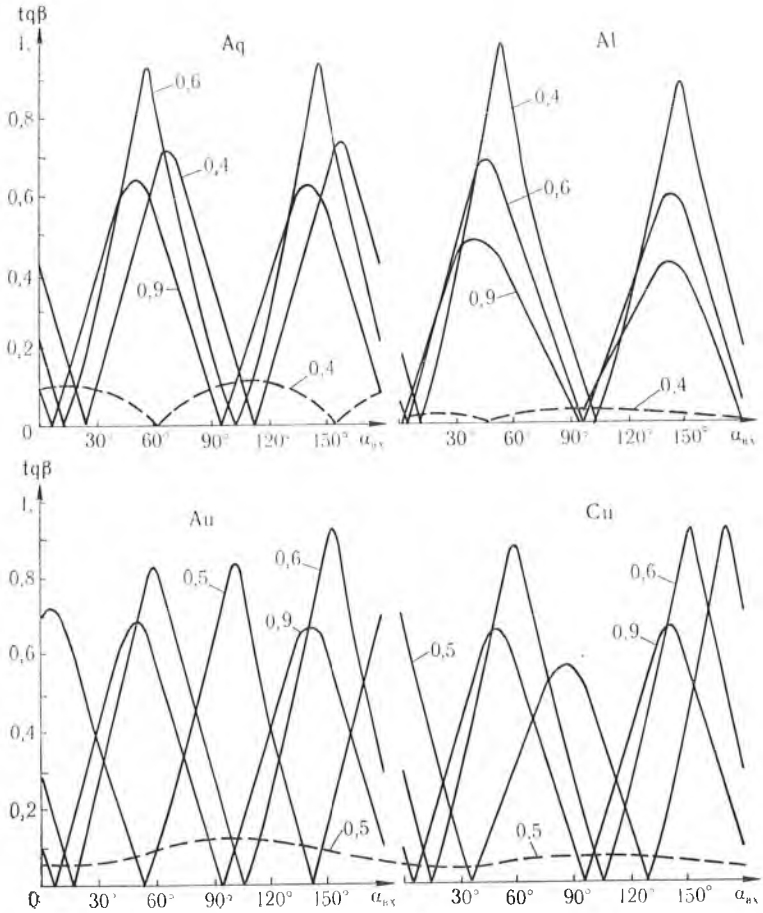


Рис. 3. Зависимость эллиптичности поляризации tgβ выходящего излучения от азимута поляризации $\sigma_{вх}$ входного линейно поляризованного света для металлизированного световозвращателя при различных длинах волн и материалах напыления

Длина волны, нм	Металлизированный СВ ($n = 1{,}513$)				Зеркальный СВ			
	Ag	Al	Au	Cu	Ag	Al	Au	Cu
400	76(83)	51(65)	—	—	76(83)	58(73)	—	—
500	88(92)	46(62)	4(12)	8(18)	90(93)	55(71)	5(13)	10(23)
600	90(93)	43(61)	58(69)	68(77)	92(95)	53(71)	62(74)	71(81)
700	90(94)	36(56)	76(84)	83(89)	92(96)	47(67)	80(88)	86(92)
800	91(95)	28(48)	82(87)	87(92)	93(96)	40(61)	86(92)	90(94)
900	91(95)	34(54)	84(90)	89(93)	94(96)	45(66)	88(93)	91(95)

Список литературы

1. Процко С. В., Титов А. Д. // Изв. вузов: Приборостроение. 1989. Т. 32. № 2. С. 54.
2. Процко С. В., Титов А. Д. // Оптико-механическая промышленность. 1989. № 11. С. 14.
3. Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2. С. 9.
4. Денисюк Г. В., Корнеев В. И. // Оптико-механическая промышленность. 1982. № 12. С. 1.
5. Коротаев В. В., Панков Э. Д. Там же. 1981. № 1. С. 9.
6. Золотарев В. М., Морозов В. Н., Смирнова Е. В. // Оптические постоянные природных и технических сред. Л., 1984.

Поступила в редакцию 28.05.90.

УДК 620.179.153

А. Д. ЛЕВКОВИЧ, М. С. МУЛЙЕД (ИРАК), А. Н. ПЕРЦЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГЛОЩЕННЫХ БЕТА-ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ ПОГЛОТИТЕЛЯ

Изучение распределения поглощенных бета-частиц в веществе представляет интерес с точки зрения их прохождения через среду и, в частности, при использовании позитронов для исследования структурных и электронных свойств вещества [1]. Для электронных и позитронных источников кривая распределения может быть получена из измеренной функции пропускания бета-частиц; для позитронных источников применяется метод амплитудно-временного отбора аннигиляционных гамма-квантов, свидетельствующих о гибели позитрона [2]. Первый способ шире по применению, второй является более корректным. Поэтому целесообразно сопоставить результаты, полученные обоими методами в одинаковых условиях (источник, геометрия, вещество). Например, измеренные первым методом массовые коэффициенты поглощения позитронов ^{22}Na для никеля и бериллия равны 25 и 19 см^2/г соответственно [3] (источник расположен вплотную к поглотителю, исследовалась область стабилизации энергетических распределений); второй метод дал 77 и 30 см^2/г соответственно [4]. Существует неясность в характере распределения остановившихся бета-частиц: расчет дает кривые с максимумом, положение которого зависит от порядкового номера вещества [1]; первый метод в указанной выше геометрии для никеля и бериллия качественно подтверждает расчеты [5]; второй метод для металлов приводит к экспоненциальным кривым [4, 6, 7].

В данной работе источником позитронов является ОСГИ на основе радионуклида ^{22}Na активностью $1{,}2\cdot10^5$ Бк, поглотителем выбран алюминий. Установка для измерений по первому способу и их методика (за

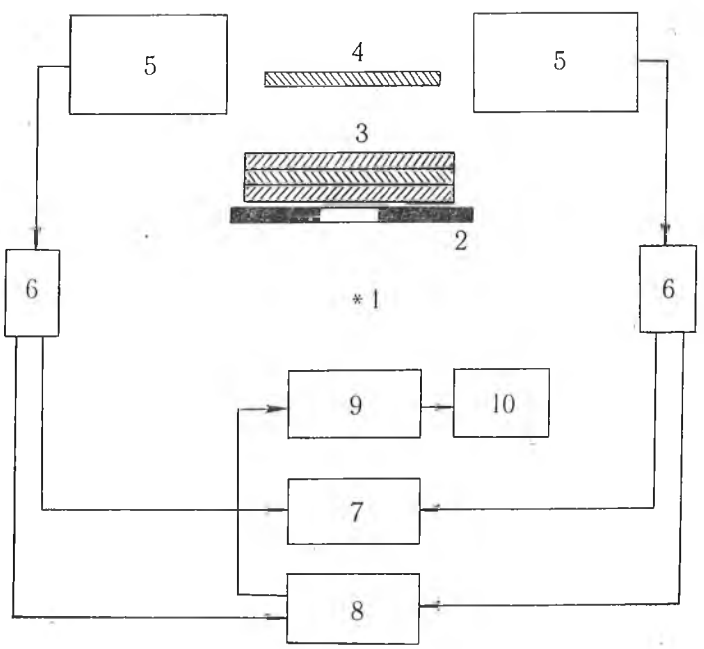


Рис. 1. Блок-схема установки:

1 — источник ^{22}Na; *2* — диафрагма; *3* — наращиваемый поглотитель; *4* — базовый поглотитель; *5* — сцинтилляционные зонды; *6* — радиометры, *7* — схема совпадений с формирователем; *8* — сумматор; *9* — многоканальный анализатор; *10* — цифропечатающее устройство

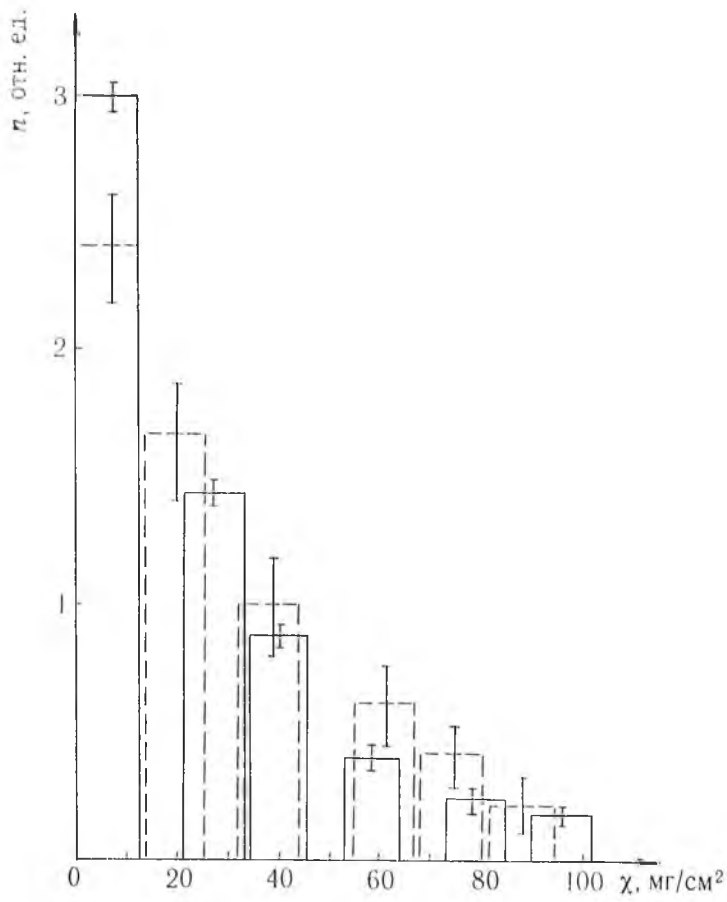


Рис. 2. Распределение поглощенных позитронов ^{22}Na по глубине алюминиевого поглотителя. Сплошные линии — результаты измерений по методу пропускания, пунктирные линии — по методу гамма-гамма совпадений.

исключением геометрии) аналогичны [5]. Исследования по второму методу проводились на установке, блок-схема которой представлена на рис. 1. Быстрые позитроны, испускаемые ^{22}Na, поступают на основной поглотитель варьируемой толщины и далее на базовый поглотитель постоянной толщины (11,8 мг/см²). Аннигиляция позитрона с испусканием двух гамма-квантов (угол разлета равен 180°) в подавляющем большинстве случаев происходит после его термализации [2], что эквивалентно его установке в поглотителе. Интенсивность суммарно-совпаденческой линии при настройке окон дискриминаторов на аннигиляционную линию в 511 кэВ пропорциональна числу термализованных позитронов в базовом поглотителе. Изменение интенсивности суммарно-совпаденческой линии в зависимости от толщины основного поглотителя характеризует распределение остановившихся позитронов по глубине поглотителя.

Цикл измерения одной точки включал набор с базовым поглотителем и без него за одно и то же время для определения фона. Использовались промышленные радиометры типа 20046 в комплекте со сцинтилляционными зондами *VA-S*-50. Разрешающее время схемы совпадений составляло 0,2 мкс.

Геометрия узла источник — диафрагма — поглотитель выглядит так: расстояние источник — диафрагма равно 1 см, радиус диафрагмы 0,5 см, расстояние диафрагма — поглотитель в первом методе и диафрагма — базовый поглотитель во втором составляли 1 см (основной поглотитель размещается на диафрагме). В этом случае средняя геометрическая тол-

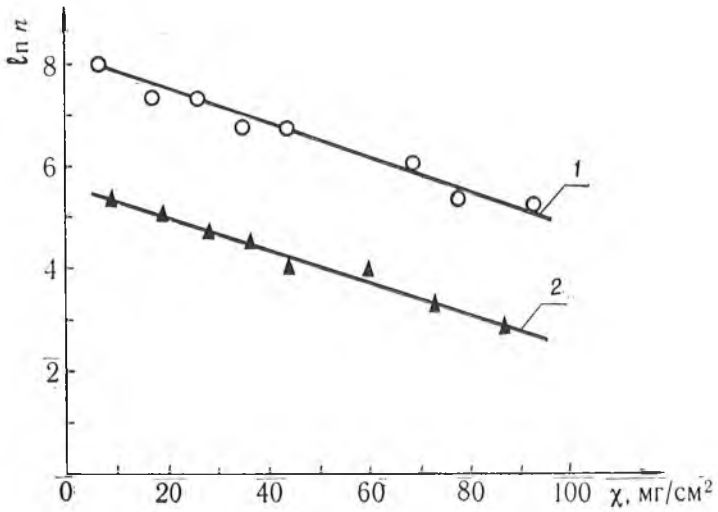


Рис. 3. Распределение поглощенных позитронов ^{22}Na по глубине алюминиевого поглотителя в полулогарифмическом масштабе:

1 — результаты измерений по методу пропускания; *2* — по методу гамма-гамма совпадений

щина поглотителя $\bar{x}$ связана с его поперечной толщиной x соотношением

$$\bar{x} = x \frac{R}{R - \sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{R^2}{R^2 - r^2},$$

где R — расстояние источник — край геометрического изображения на поглотителе; r — радиус диафрагмы. В этой геометрии для обоих методов $\bar{x} = 1{,}04\ x$.

Экспериментальные результаты, полученные двумя методами, для удобства совмещены на одном рисунке (2); указаны ошибки, обусловленные статистикой отсчетов. Если n_1 — число отсчетов, определяемых сигналом и фоном, n_2 — только фоном, то число сигнальных отсчетов $n = n_1 - n_2$, среднеквадратичное отклонение — $\sqrt{n_1 + n_2}$.

Значение массового коэффициента поглощения μ и его среднеквадратичная ошибка в предположении экспоненциального закона распределения числа поглощенных позитронов по толщине поглотителя $n(\chi) = n_0 e^{-\mu\chi}$ определялись следующим образом. Для каждой пары смежных точек (рис. 3) находился массовый коэффициент поглощения μ_i. Для совокупности из n значений μ_i вычислялось среднее значение $\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_n \mu_i$ и среднеквадратичное отклонение $\Delta\mu = \sqrt{\frac{\sum_n \mu_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_n \mu_i\right)^2}{n-1}}$.

Получены следующие значения массовых коэффициентов поглощения позитронов ^{22}Na в алюминии: для метода пропускания $\mu = (0{,}035 \pm 0{,}005)$ см²/мг, метода гамма-гамма совпадений — $(0{,}032 \pm 0{,}003)$ см²/мг. В пределах точности измерения значения μ согласуются, и оба метода указывают на экспоненциальный закон распределения числа поглощенных позитронов по толщине поглотителя. Можно также отметить близость указанных значений μ к приведенным в литературе: 0,0412 см²/мг [6] и 0,0339 см²/мг [7] (в [7] использовался источник ^{22}Na активностью $1{,}85 \cdot 10^8$ Бк). Оба результата получены методом гамма-гамма совпадений, но геометрии измерений в этих работах разные, что и обусловливает, по-видимому, различие в полученных данных.

Таким образом, результаты данной работы позволяют сделать вывод,

что методы пропускания и гамма-гамма совпадений при одинаковых условиях измерений приводят к эквивалентным значениям массового коэффициента поглощения и законам распределения поглощенных частиц по глубине вещества.

Список литературы

1. Воробьев С. А. Прохождение бета-частиц через кристаллы. М., 1975.
2. Гольданский В. И. Физическая химия позитрона и позитрония. М., 1968.
3. Перцев А. Н., Ходасевич В. В., Ахмед Бакр, Касько И. В., Крымский А. А., Урбан О. П. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-энэрг. навук. 1986. № 2. С. 119.
4. Ахмед Бакр, Абдель Моез. Энергетические распределения бета-частиц при прохождении через бериллий и никель. Канд. дисс. Минск, 1988.
5. Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 63.
6. Spanel L. E., Rupaal A. S., Patrick J. P. // Phys. Rev. 1973. V. B. 8. P. 4072.
7. Купчишин А. И., Кузьминых В. А., Мукашев К. М., Тронин Б. А., Федченко Р. Г. Физика атомного ядра и космических лучей. Алма-Ата, 1985. С. 14.

Поступила в редакцию 15.02.90.

УДК 548.5 : 669.76

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ

СТРУКТУРА И КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОЛЬГ СПЛАВОВ ВИСМУТ-СУРЬМА

При средних скоростях кристаллизации бинарных сплавов Bi—Sb и тройных сплавов Bi—Sb—Te, Bi—Sb—Sn, используемых для изготовления термоэлементов [1] и преобразователей Холла [2], образуется устойчивая дендритная структура [3], ухудшающая технические параметры материалов. В последние три десятилетия успешно развиваются методы получения фольг скоростным охлаждением из расплава, благодаря чему создается более равномерное распределение компонентов в твердых растворах [4]. В данной работе представлены экспериментальные результаты по изучению структуры и кинетических свойств фольг сплавов Bi—8%Sb, Bi—8%Sb — 0,02%Te и Bi—8%Sb — 0,05%Sn (используются атомные проценты), полученных скоростным охлаждением из жидкой фазы.

Фольги исследуемых материалов получали при кристаллизации капли расплава, выброшенной на внутреннюю отполированную поверхность вращающегося со скоростью 3000 об/мин медного цилиндра диаметром 20 см. Скорость охлаждения при таких условиях кристаллизации составляла $\sim 10^6$ К/с [4].

Рентгеноструктурный анализ текстуры фольг проводился на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении. Для расчета полюсных плотностей дифракционных линий $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}5\}$, $\{20\bar{2}2\}$, $\{10\bar{1}7\}$, $\{20\bar{2}5\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{12\bar{3}5\}$ и (0009) использовался метод Харриса [5]. Металлографические и рентгеноспектральные исследования выполнялись с помощью микроскопа ММУ-3 и установки РЭММА-200. Измерения удельного электросопротивления ρ, коэффициента Холла R и дифференциальной термо-ЭДС α осуществлялись компенсационным методом в интервале 77—300 К.

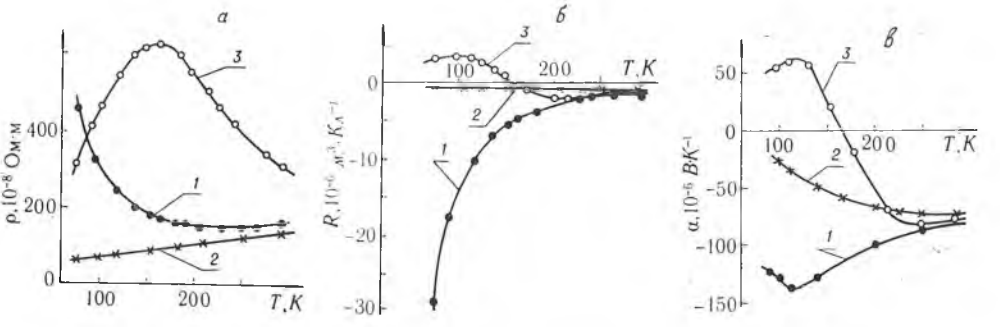
Фольги исследуемых сплавов, полученные скоростным охлаждением из жидкой фазы, имели поликристаллическую структуру и толщину 20—60 мкм. Большинство зерен было ограничено внешними поверхностями. Рентгеноспектральные исследования показали равномерное распределение сурьмы в фольгах.

Полюсные плотности дифракционных линий $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}5\}$, $\{10\bar{1}7\}$, $\{20\bar{2}2\}$, $\{20\bar{2}5\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{12\bar{3}5\}$ и (0009) фольг сплавов Bi—8%Sb, Bi—8%Sb — 0,02%Te и Bi—8%Sb — 0,05%Sn приведены

Полюсная плотность дифракционных линий фольг

Дифракционная линия	Сплав		
	Bi-8% Sb	Bi-8% Sb-0,02% Te	Bi-8% Sb-0,05% Sn
$10\bar{1}2$	6,2	9,2	9,1
$10\bar{1}4$	0,2	0,0	0,1
$11\bar{2}0$	0,5	0,0	0,0
$10\bar{1}5$	0,4	0,3	0,3
$20\bar{2}2$	0,4	0,2	0,2
$10\bar{1}7$	0,4	0,1	0,1
$20\bar{2}5$	0,1	0,1	0,1
$21\bar{3}0$	0,5	0,0	0,0
$12\bar{3}5$	0,4	0,0	0,0
0009	0,9	0,1	0,2

в таблице. Наблюдается четкая текстура типа $\{10\bar{1}2\}$, формирование которой обусловлено тем, что три плоскости $(01\bar{1}2)$, $(\bar{1}012)$ и $(1\bar{1}02)$ обладают высокой ретикулярной плотностью атомов, равной $1{,}93/a^2$ (a — постоянная решетки в гексагональной установке). Поэтому центры зарождения твердой фазы ориентируются указанными плоскостями параллельно внутренней поверхности цилиндра. Каждый атом висмута в кристаллической решетке связан с тремя другими ковалентными связями, образующими между собой угол 95°30′ [6]. При этом две ковалентные связи находятся в плоскостях $(01\bar{1}2)$, $(\bar{1}012)$ и $(1\bar{1}02)$, а третья связывает два атома, расположенные в соседних плоскостях такого же типа. Такая ориентация ковалентных связей способствует сохранению преимущественной ориентировки зародышей в процессе их роста.



Температурные зависимости удельного сопротивления (*а*), коэффициента Холла (*б*) и дифференциальных термо-ЭДС (*в*) фольг сплавов Bi-Sb (*1*), Bi-Sb-Te (*2*), Bi-Sb-Sb (*3*)

Кинетические свойства фольг исследуемых материалов зависят от их состава и температуры (см. рисунок). В бинарном сплаве Bi—8% Sb процессы переноса определяются электронами и дырками, концентрации которых равны друг другу, а подвижность электронов значительно больше подвижности дырок [7]. Последним и объясняется отрицательный знак коэффициента Холла и дифференциальной термо-ЭДС фольг. Зависимость $\rho(T)$ фольг сплава Bi—8% Sb имеет минимум вблизи 250 К. В области низких температур длина свободного пробега электронов сравнима с размерами зерен [8], границы которых дают существенный вклад в их рассеяние. Рассеяние носителей заряда на дефектах кристаллической решетки не зависит от температуры [9], поэтому увеличение удельного электросопротивления с понижением температуры обусловлено бо-

лее значительным уменьшением концентрации носителей заряда, чем ростом их подвижности. Увеличение концентрации электронов и дырок при повышении температуры приводит к уменьшению абсолютных величин коэффициента Холла и дифференциальной термо-ЭДС. Некоторое падение $|\alpha|$ при $T<110$ К, по-видимому, вызвано сближением подвижностей электронов и дырок.

Легирование сплава Bi—8%Sb теллуром приводит к повышению концентрации электронов, которые и определяют кинетические свойства в области низких температур. При $T>200$ К появляются дырки, которые из-за их низкой подвижности незначительно влияют на процессы переноса. Поэтому $\rho(T)$ и $|\alpha(T)|$ монотонно увеличиваются, а $R(T)$ изменяется незначительно, достигая экстремума при 210 К.

В тройном сплаве Bi—8%Sb—0,05%Sn кинетические свойства в области низких температур определяются только дырками. Поэтому при $T<120$К $\alpha(T)$ и $\rho(T)$ увеличиваются с повышением температуры, а $R(T)$ почти не изменяется. Дальнейший рост температуры приводит к появлению высокоподвижных электронов в зоне проводимости, и вблизи 160 К удельное электросопротивление имеет максимум, а дифференциальная термо-ЭДС и коэффициент Холла меняют знак с положительного на отрицательный.

Список литературы

1. Иорданишвили Е. К. Термоэлектрические источники питания. М., 1968.
2. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г., Ярмолович В. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1983. № 2. С. 24.
3. Шепелевич В. Г. // Изв. АН БССР. Неорганические материалы. 1986. Т. 22. № 3. С. 378.
4. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
5. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов. М., 1969.
6. Кребс Г. Основы кристаллохимии неорганических соединений. М., 1971.
7. Иванов Г. А., Попов А. М. // ФТТ. 1963. Т. 5. № 9. С. 2409.
8. Абросимов В. М., Егоров Б. Н., Карандашев В. А., Крыкин М. А. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. № 7. С. 1449.
9. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 7. С. 609.

Поступила в редакцию 21.05.90.

УДК 538.123+621.3.083.8

В. И. ПРОКОШИН, В. А. ЯРМОЛОВИЧ, Т. М. РАБКЕВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПЛЕНОЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ХОЛЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Преобразователи Холла широко применяются в метрологии для топографии неоднородных магнитных полей, в разнообразных технических устройствах, регистрирующих перемещение, вращение объекта и др. Миниатюризация используемых при этом магнитных систем, необходимость в регистрации полей, создаваемых цилиндрическими магнитными доменами, требуют оценки погрешности измерений в условиях локализации неоднородных магнитных полей. При этом преобразователь Холла (ПХ) уже нельзя считать точечным. Влияние технических характеристик ПХ, его геометрии и других параметров, определяемых технологией производства, на работоспособность в неоднородном магнитном поле практически не исследовано. Таким образом, разработка функциональной модели реального ПХ является весьма актуальной.

Рассмотрим основные физические приближения, используемые для построения функциональной модели с учетом современных технологий в производстве ПХ. Наиболее совершенными являются пленочные преобразователи Холла, обычно изготавливаемые с применением фотолитографической технологии. Толщина пленки d варьируется в широких пре-

делах от 0,01 до 10 мкм. Пусть область локализации поля такова, что изменение составляющей индукции B, перпендикулярной пластине Холла, незначительно по толщине пленки. Тем самым считаем преобразователь бесконечно тонким по оси Z, что допустимо для большинства пленочных ПХ. Зависимостью электрической проводимости пленки σ от индукции магнитного поля пренебрежем, т. е. $\sigma(B)=\sigma(0)=\sigma$. Это допущение корректно, так как материал пленки обычно легированный полупроводник, например, InSb или InAs с уровнем концентрации носителей заряда $(1-5)\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Такая конструкция считается оптимальной [1].

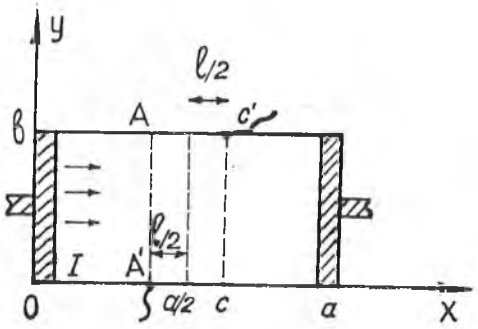


Рис. 1. Преобразователь Холла прямоугольной формы в неоднородном магнитном поле

Указанная модель позволяет рассматривать функционирование преобразователя Холла в двухмерно-неоднородном магнитном поле, т. е. $\vec{B}=(0, 0, B)$, где $B(x, y)$ — функция координат x и y.

Конфигурацию преобразователя выберем, как показано на рис. 1, в виде прямоугольника, что соответствует достаточно распространенной форме ПХ. Холловские контакты считаем точечными. В отсутствие магнитного поля на выходе ПХ появляется ЭДС, которую называют остаточным напряжением $U_c(0)$. Напряжение $U_c(0)$ зависит от нескольких факторов: технологии производства, режимов эксплуатации, от тока J, проходящего через ПХ. Использовав разложение U_c в ряд по J [2], получаем:

$$U_c(0) = r_1 J + r_2 J^2 + r_3 J^3 + \dots r_n J^n. \qquad (1)$$

$U_{нэ}=r_1 J$ — напряжение неэквипотенциальности, которое возникает вследствие асимметрии холловских зондов, при этом r_1 имеет смысл электросопротивления между линиями AA' и CC'. Если ввести параметр асимметрии l, то $U_{нэ}=r_1 J=Ul/a$, где U — разность потенциалов при длине ПХ, равной a. Фактически же U — ЭДС внешнего генератора напряжения. При питании ПХ от источника постоянного тока величиной J имеем $U_{нэ}=JR_{вх}l/a$, где $R_{вх}$ — электрическое сопротивление входа ПХ. При номинальном токе управления и неэкстремальных температурных режимах эксплуатации, как правило, $|U_{нэ}|>|r_2J^2+r_3J^3+\dots|$. Роль слагаемых в разложении (1) возрастает при увеличении тока, причем некоторые коэффициенты могут равняться нулю. Их природа связана с комплексом практически неконтролируемых термогальваномагнитных эффектов в полупроводниках [3].

Уменьшение остаточного напряжения является актуальной задачей при производстве промышленных ПХ. Применяемые способы (механическое подцарапывание, лазерная подгонка и др.) существенно уменьшают асимметрию, но полностью компенсировать $U_{нэ}$ не могут. Значения $|U_{нэ}|$ зависят от материала и способа изготовления и составляют 10 мкВ—10 мВ.

В рассматриваемой модели допускается, что остаточное напряжение в основном обусловлено $U_{нэ}$, т. е. $U_c(0)\approx U_{нэ}$, которое определяется экспериментально по величине сигнала в отсутствие магнитного поля. Измеряемая в магнитном поле величина

$$U_c(B)=U_c(0)+U_x, \qquad (2)$$

где U_x — ЭДС Холла. Основным параметром ПХ является чувствительность к магнитному полю при фиксированном токе:

$$\gamma = \left.\frac{U_x}{B_0}\right|_{J=\text{const}}. \qquad (3)$$

Она определяется в однородном постоянном магнитном поле B_0 и является индивидуальной характеристикой преобразователя. Естественно, что γ прямо пропорциональна коэффициенту Холла R материала преобразователя. Таким образом, можно считать известными σ, R, γ, U, $U_{нэ}$, геометрические размеры преобразователя, распределение индукции магнитного поля $B(x, y)$.

Проведем расчет $U_c(B)$ — выходного сигнала реального преобразователя Холла (см. рис. 1) в магнитном поле $B(x, y)$. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0, \tag{5}$$

где $\vec{j}$ — вектор плотности электрического тока; $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, связанная со скалярным потенциалом φ следующим уравнением:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{6}$$

Систему уравнений (4—6) следует дополнить законом Ома, который запишем в виде [4]:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} + \sigma rR\,[\vec{E}\times\vec{B}]. \tag{7}$$

Выражение (7) справедливо как для изотропного материала, так и для анизотропного полупроводника с несколькими максимумами или минимумами энергии при условии, что время релаксации изотропно и зависит лишь от энергии [4]. Поле предполагается слабым, т. е. $\mu B \ll 1$, где μ — холловская подвижность носителей заряда. Оценка величины μB при $B=0{,}2$ Тл и $\mu=0{,}1$ В/м^2 с для гетероэпитаксиальных структур n — —InSb—i—GaAs [5] подтверждает предположение слабого поля и корректность выражения (7).

С учетом $\vec{B} = (0,\ 0,\ B)$ из (4—7) следует уравнение для φ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \sigma R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}\right) = 0. \tag{8}$$

Условие отсутствия протекания тока через боковые поверхности электродов ($\vec{j}_y = 0$) может быть записано:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \sigma RB\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{y=0\\ y=b}} = 0. \tag{9}$$

Потенциалы на токовых электродах считаются постоянными:

$$\varphi(0,\ y) = U, \tag{10}$$

$$\varphi(a,\ y) = 0. \tag{11}$$

Решение данной задачи будем искать в виде: $\varphi = U(1 - x/a) + \varphi_1$, где первое слагаемое — потенциал в отсутствие магнитного поля, а φ_1 — малая добавка, которая в приближении слабого поля выполняет роль потенциала возмущения.

Из (8)—(11) получаем следующие условия для отыскания функции φ_1, которые совпадают с [6]:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = A\frac{\partial B}{\partial y}, \tag{12}$$

$$\varphi_1(0,\ y) = \varphi_1(a,\ y) = 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{y=0} = AB(x,\ 0), \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{y=b} = AB(x,\ b), \tag{15}$$

где $A = -\sigma UR/a$.

Для решения уравнения (12) с граничными условиями (13—15) воспользуемся методом конечных интегральных преобразований [7]:

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_{\text{одн.}} + \sum_{\lambda_n} \frac{D_n(y) \cdot Q_n(x)}{N_n^2}, \tag{16}$$

где $\varphi_{\text{одн.}}$ — решение вспомогательной однородной задачи, которое получают методом разделения переменных при устранении распределенных источников; λ_n, $Q_n(x)$ и N_n^2—собственные числа, собственные функции и квадрат нормы, определяемые из [7]; $D_n(y)$— вспомогательные функции, учитывающие неоднородные граничные условия и заданные источники.

$$\varphi_{\text{одн.}} = 2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \left\{ \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \int_0^a B(x, b) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \int_0^a B(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \right\}. \tag{17}$$

Используя таблицы, приведенные в [7], можно записать выражение для второго слагаемого в соотношении (16):

$$\sum_{\lambda_n} \frac{D_n(y) Q_n(x)}{N_n^2} = -2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \left\{ \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \int_0^a \frac{\partial B(x, s)}{\partial s} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \times \right.$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{a}(b-s)\right] dx\, ds + \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \int_0^a \int_0^y \frac{\partial B(x, s)}{\partial s} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \times$$

$$\left. \times \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} s\right) dx\, dS \right\}. \tag{18}$$

Окончательно потенциал $\varphi(x, y)$ получается в виде:

$$\varphi(x, y) = U\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{2\sigma RU}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cdot \left[\int_0^a B(x, b) \times \right.\right.$$

$$\times \sin \frac{n\pi}{a} x dx - \int_0^a \int_y^b \frac{\partial B(x, s)}{\partial s} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}(b-s)\, dx\, ds \Big] -$$

$$- \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \cdot \left[\int_0^a B(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx + \int_0^a \int_0^y \frac{\partial B(x, s)}{\partial s} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \times \right.$$

$$\left.\left. \times \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} s\right) dx\, ds \right] \right\}. \tag{19}$$

Величина сигнала с ПХ будет равна разности потенциалов в точках $\left(\frac{a-l}{2}, b\right)$ и $\left(\frac{a+l}{2}, 0\right)$:

$$U_c = \varphi\left(\frac{a-l}{2}, b\right) - \varphi\left(\frac{a+l}{2}, 0\right) = U \frac{l}{a} + 2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \times$$

$$\times \left\{ \left[\sin \frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - \frac{l}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} b\right) - \sin \frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2} + \frac{l}{2}\right) \right] \cdot \int_0^a B(x, b) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx - \right.$$

$$- \left[\sin \frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - \frac{l}{2}\right) - \sin \frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2} + \frac{l}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b \right] \int_0^a B(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx +$$

$$+\sin\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2}+\frac{l}{2}\right)\int_0^a\int_0^b\frac{\partial B(x,\ s)}{\partial s}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{a}(b-s)\,dx\,ds-$$

$$-\sin\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-\frac{l}{2}\right)\int_0^a\int_0^b\frac{\partial B(x,\ s)}{\partial s}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{a}s\right)dx\,ds\Big\}. \qquad (20)$$

Если учесть, что смещение холловских зондов невелико, т. е. $l/a \ll 1$, то можно использовать приближение $\sin\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{2}\pm\frac{l}{2}\right)\approx\sin\frac{n\pi}{2}\pm\frac{n\pi}{2}\frac{l}{a}\cos\frac{n\pi}{2}$ и представить выражение (20) следующим образом:

$$U_c = U\frac{l}{a}+2A\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}\,\mathrm{th}\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)\Big\{\int_0^a[B(x,\ b)+B(x,\ 0)]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx-\frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)}\int_0^a\int_0^b\frac{\partial B}{\partial y}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}\left(y-\frac{b}{2}\right)dx\,dy\Big\}+$$

$$+A\frac{l}{a}\sum_{n=2,4,6,8}^{\infty}(-1)^{n/2}\,\mathrm{cth}\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)\Big\{\int_0^a[B(x,\ 0)-B(x,\ b)]\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)}\int_0^a\int_0^b\frac{\partial B}{\partial y}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{ch}\left(y-\frac{b}{2}\right)dx\,dy\Big\}. \qquad (21)$$

Для экспериментальной проверки (21) проводились измерения выходного сигнала преобразователя Холла в неоднородном магнитном поле (рис. 2). Магнитное поле изменялось только по оси x. Выходной сигнал, измеренный точечным элементом Холла с $a=0{,}2$ мм, $b=0{,}1$ мм, показан сплошной линией. Кривая *1* соответствует выходному сигналу преобразователя, имеющего ту же чувствительность, что и точечный элемент Холла, но значительно большие размеры ($a=15$ мм, $b=1$ мм). Кривая *2* — результаты расчета по формуле (21) при условии $l/a\approx 0$. При $l/a\approx\approx 0{,}1$ экспериментальная зависимость $U_c(x)$ представлена кривой *3*. Практически кривые 2 и 3 оказываются параллельно сдвинутыми, что и подтверждает (21). Следовательно, данная формула хорошо описывает реальный сигнал преобразователя Холла.

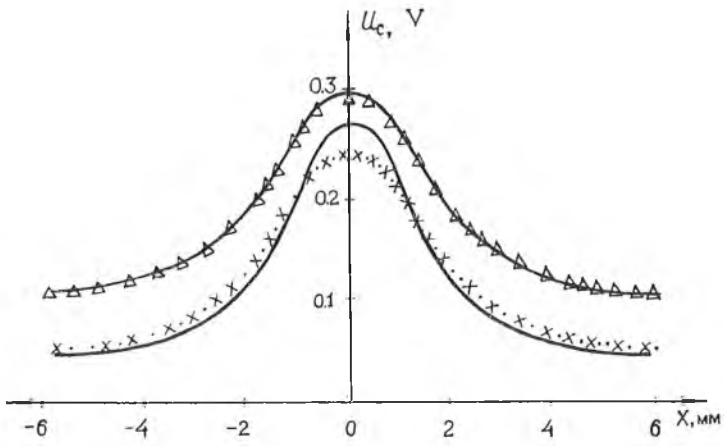


Рис. 2. Зависимость выходного сигнала пленочного преобразователя Холла с магнитной чувствительностью $\gamma = 500$ мВ/Тл от координаты x:

сплошная линия — экспериментальная, полученная с помощью точечного ПХ; *1* (×) — экспериментальная, размеры ПХ: $a = 15$ мм, $b = 1$ мм; *2* (•) — расчет по формуле (21) с учетом $l/a \approx 0$; *3* (△) — экспериментальная при $l/a \approx 0{,}1$

Исходя из выражений (20, 21), можно сделать следующие выводы:

— величина выходного сигнала преобразователя Холла в неоднородном магнитном поле зависит от ориентации потенциальных и токовых электродов относительно магнитного поля (т. е. потенциальные и холловские контакты неэквивалентны даже в симметричных ПХ);

— подгонка ПХ, связанная с уменьшением l (механическое подцарапывание, лазерная подгонка и др.), более предпочтительна по сравнению с электрическими способами компенсации остаточного напряжения неэквипотенциальности, например, путем подключения встроенной ЭДС;

— полученные выражения можно использовать для оценки влияния размеров ПХ на точность измерения распределения индукции магнитного поля.

Список литературы

1. Болванович Э. И. Полупроводниковые пленки и миниатюрные измерительные преобразователи. Минск, 1971.
2. Вайсс Г. Физика гальваномагнитных полупроводниковых приборов и их применение. М., 1974.
3. Кучис Е. В. Методы исследования эффекта Холла. М., 1974.
4. Смит Р. Полупроводники. М., 1982.
5. Шепелевич В. Г., Прокошин В. И., Ярмолович В. А. Свойства пленок антимонида индия и миниатюрных преобразователей Холла на их основе / Редкол. журн. «Изв. вузов МВиССО СССР». Сер. Физика. Томск, 1988. 19 с. Деп. в ВИНИТИ от 11.01.87. № 105—В88.
6. Коровкин В. Ю. // Измерительная техника. 1988. № 8. С. 50.
7. Иоссель Ю. Я. Расчет потенциальных полей в энергетике. Л., 1978.

Поступила в редакцию 28.09.90.

УДК 539.062

А. Р. ЛОПАТИК, О. В. МИСЕВИЧ,
А. К. ХАДЖО (САР), А. Л. ХОЛМЕЦКИЙ

МСКЭ ПРИ ПОЛНОМ ВНЕШНЕМ ОТРАЖЕНИИ МЕССБАУЭРОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Интегральная мессбауэровская спектроскопия конверсионных электронов (МСКЭ) позволяет во многих случаях повысить производительность гамма-резонансных измерений по сравнению с традиционным вариантом [1]. Это преимущество становится особенно важным при исследовании когерентных процессов взаимодействия мессбауэровского излучения с веществом, когда необходима жесткая коллимация первичного пучка, в частности, при полном внешнем отражении (ПВО) мессбауэровского излучения. Последнее представляет большой интерес не только с точки зрения физики самого явления, но главным образом для исследования тонких поверхностных слоев материалов (2—3 нм), поскольку именно такова глубина проникновения мессбауэровского излучения в вещество при ПВО.

Известно, что зеркально отраженная волна возникает в результате интерференции когерентно рассеянных волн, когда рассеивающие центры равномерно заполняют полупространство [2]. Заметной величины зеркально отраженная волна достигает, когда угол падения приближается к углу полного внешнего отражения φ, определяемому условием $\sin^2\varphi = 1-n^2$.

Для мессбауэровского излучения $n<1$, величина $(1-n^2)$ имеет порядок 10^{-6}; угол φ составляет несколько минут. С увеличением угла скольжения амплитуда зеркально отраженной волны быстро уменьшается (пропорционально $[(1-n^2)/\sin^2\varphi]^2$) и становится неразличимой на некогерентном фоне.

При реализации условий ПВО расходимость пучка гамма-квантов должна быть меньше φ. Это требует его жесткой коллимации, что

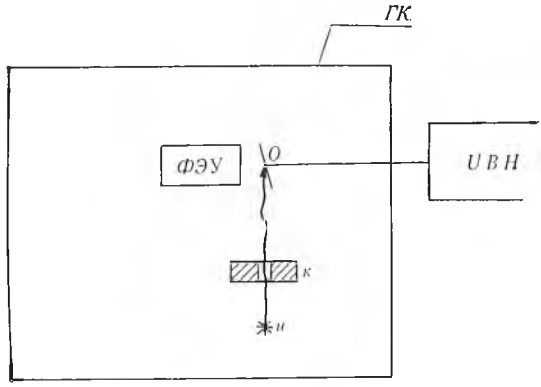


Рис. 1. Структурная схема воздушного сцинтилляционного детектора электронов:

И — —источник излучения; *К* — коллиматор; *ИВН* — источник высокого напряжения; *ГК* — герметизированная камера

приводит к потере скорости счета и ухудшению отношения эффект/фон. Поэтому до настоящего времени сообщалось лишь о немногих попытках практической реализации этого метода [3, 4].

Оценим величину потока излучения I, падающего на образец от источника ^{57}Co активностью Q и расходимостью пучка $\alpha \cong \varphi/2$. Поток мессбауэровского излучения $I = kQ\Delta\Omega$, где k — относительная интенсивность мессбауэровской линии в интегральном спектре излучения. В случае малых α телесный угол регистрации $\Delta\Omega \simeq \alpha^2/4 = \varphi^2/16$.

Для мессбауэровского излучения железа угол ПВО $\varphi = 4 \cdot 10^{-3}$; для источника ^{57}Co $k \simeq 1/15$; $I \simeq 1{,}3 \cdot 10^2$ с$^{-1}$, если $Q = 2 \cdot 10^9$ Бк. Доля регистрируемых конверсионных электронов в несколько раз меньше величины I, и в лучшем случае составит $\simeq 30$—50 с$^{-1}$. При числе каналов мессбауэровского спектрометра $N = 256$ скорость счета в канале составляет весьма малую величину ($\approx 0{,}2$ с$^{-1}$), что позволяет говорить о получении мессбауэровских спектров только с образцов, обогащенных изотопом ^{57}Fe. Кроме того, при столь низкой скорости счета большое значение приобретает выбор наиболее эффективного детектора низкоэнергетических электронов. В известных экспериментальных работах [3, 4] использовался газопроточный пропорциональный счетчик электронов. Однако сравнительно большая величина конструктивного фона существенно увеличивала время измерений. В этом плане представляется перспективной попытка применения воздушного сцинтилляционного детектора электронов [5], имеющего малый рабочий объем, локализуемый размерами образца. Основной элемент детектора (рис. 1) — фотоумножитель (ФЭУ), который регистрирует световые импульсы от микроразрядов в разреженном воздухе, инициируемых электронами, вылетающими с поверхности облучаемого образца *О*. Образец расположен вблизи входного окна ФЭУ, его облучение производится коллимированным касательным пучком гамма-квантов. Электростатическое поле, вызывающее микроразряды, создается за счет разности потенциалов фотокатода ФЭУ и образца, т. е. строго локализуется в необходимом зазоре. Это позволяет существенно подавить фон от конструктивных элементов системы, что обеспечивает высокое отношение сигнал/фон, в том числе при малой скорости счета электронов.

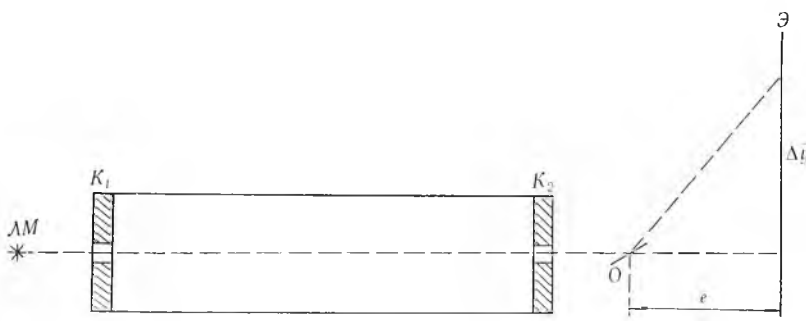


Рис. 2. Схема юстировки образца *О*:

K_1, K_2 — коллиматоры; *Э* — экран; *ЛН* — лампочка накаливания

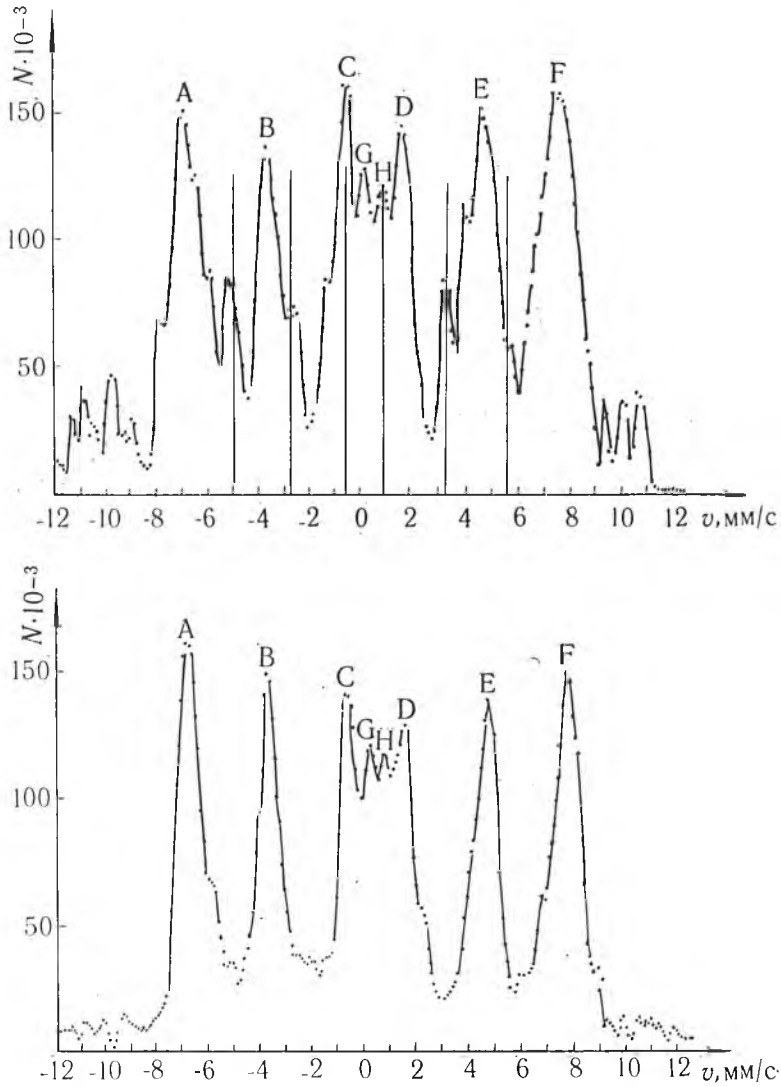


Рис. 3. Мессбауэровские спектры, полученные с пленки при температуре отжига 150 °С:

а — в условиях ПВО; *б* — при их рассогласовании

Коллимация первичного пучка гамма-квантов проводилась с помощью двух соосных коллиматоров с шириной отверстия 2 мм, разделенных расстоянием в 30 см. При минимально наблюдаемой ширине щели вычислялся угол наклона образца к оси пучка $\vartheta = \Delta y/l$, где Δy — изменение координаты изображения щели за счет отражения света от образца. Величина ϑ выбиралась равной $(0 \pm 1) \cdot 10^{-3}$. Затем образец перемещался назад на 1 мм. В этих условиях, как легко показать, угол скольжения гамма-излучения на образец составлял $(3 \pm 1) \cdot 10^{-3}$, что обеспечивало реализацию условий ПВО (рис. 2).

Разработанный метод использовался для исследования приповерхностных слоев пленочной структуры на основе Co^{57} Fe_2O_4, получаемой осаждением из коллоидных водных растворов на подложке из стекла. Съемка спектров проводилась при различных температурах отжига образцов как с тонкого поверхностного слоя 2—3 нм, так и объемных слоев (в последнем случае проводилось рассогласование условий ПВО, что обеспечивало глубинность измерений, сравнимую с толщиной пленки, $\simeq$100 нм). Измерения проводились на автоматизированном модуляцион-

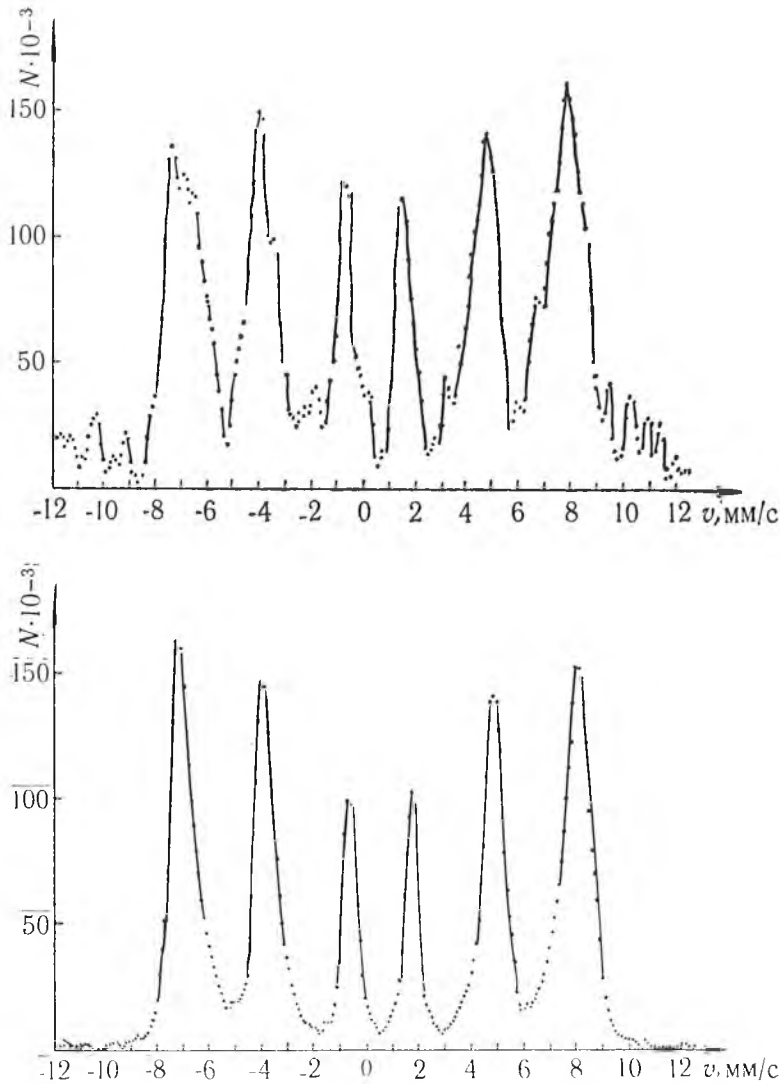


Рис. 4. Мессбауэровские спектры, полученные с пленки при температуре отжига 550 °С:
а — в условиях ПВО; *б* — при их рассогласовании

но-временном ЯГР-спектрометре [6]. Использовался источник ^{57}Co в матрице хрома активностью $\simeq 1$ ГБк. Время одного измерения — 24 ч.

Спектры исходной структуры пленки (температура отжига 150 °С) приведены на рис. 3. Основу их составляет суперпозиция секстета уширенных линий магнитной сверхтонкой структуры (группы линий *A*, *B*, *C*, *Д*, *E*, *F*) и дублета квадрупольного расщепления парамагнитного железа (группы линий *G*, *H*). Уширение линий зеемановского секстета можно объяснить, с одной стороны, близостью структуры $CoFe_2O_4$ к структуре окисла Fe_3O_4, в решетке которого железо занимает две различные координации, соответствующие нескольким значениям эффективного магнитного поля на ядре [7]. В связи с этим спектр магнитного железа представляет наложение двух неразрешенных зеемановских секстетов. С другой стороны, заметный вклад в дополнительное уширение линий могут вносить и релаксационные процессы [8].

Вместе с тем сравнение спектров (см. рис. 3, *а*, *б*) показывает и заметное различие их структуры, что отражает отличие физико-химических свойств поверхностного слоя ~ 2 нм от образца в целом. Это различие проявляется прежде всего в большей ширине линий зеемановского

секстета на спектрах ПВО по сравнению со спектрами МСКЭ, что, вероятно, связано с большей диффузионной подвижностью атомов железа на поверхности пленки. Последняя, как известно [8], может приводить к существенному уширению мессбауэровских линий. Кроме того, в спектре ПВО присутствует секстет линий металлического железа α-Fe (положение линий α-Fe на спектре (рис. 3, *а*) показано вертикальными линиями), которое находится на поверхности в виде кластеров и его наличие дает интересный физико-химический эффект, требующий своего объяснения.

На рис. 4, *а*, *б* изображены спектры, полученные с пленки после ее отжига при температуре 550 °С. Обращает на себя внимание полное превращение парамагнитного железа в окисное, что проявляется в исчезновении центрального дублета квадрупольного расщепления. Сравнение спектров позволяет сделать качественный вывод об уширении линий спектра ПВО по сравнению со спектром МСКЭ. Причиной этого могут быть как диффузионные процессы на поверхности, так и наличие дополнительных фаз окисного железа в слое ~ 2 нм. К сожалению, рентгеноструктурные исследования, которые помогли бы ответить на этот вопрос, в таком тонком слое невозможны. В спектре ПВО наблюдается также исчезновение линий от металлического железа, что связано с переходом последнего в окисные формы при отжиге.

Таким образом, проведенные исследования доказали возможность реализации экспериментов по ПВО мессбауэровского излучения с помощью воздушного сцинтилляционного детектора конверсионных электронов и одновременно продемонстрировали эффективность метода в изучении тонких поверхностных слоев материалов.

Список литературы

1. Иркаев С. М., Кузьмин Р. Н., Опаленко А. А. Ядерный гамма-резонанс. М., 1970.
2. Андреева М. А., Кузьмин Р. Н. Мессбауэровская гамма-оптика. М., 1982.
3. Frost J. S. // Appl. Phys. Let. 1985. V. 47. № 6. P. 581.
4. Белозерский Г. Н., Семенов В. Г., Соколов А. Ю. Конверсионная мессбауэровская спектроскопия в геометрии полного внешнего отражения: Тез. докл. IV Всесоюз. совещ. по когерентному взаимодействию излучения с веществом. М., 1988. С. 236.
5. Гурачевский В. Л. и др. // ПТЭ. 1985. № 6. С. 38.
6. Бильдюкевич Е. В. и др. Там же. С. 62.
7. Химические применения мессбауэровской спектроскопии / Под ред. В. И. Гольданского. М., 1970.
8. Суздалев И. П. Динамические эффекты в гамма-резонансной спектроскопии. М., 1979.

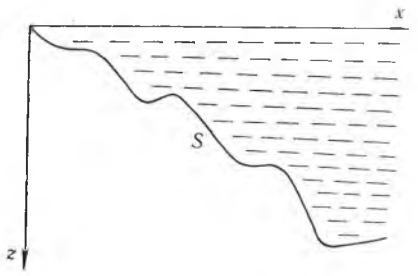
Поступила в редакцию 23.04.90.

УДК 534.23

А. К. БЕЛЯВСКИЙ, И. К. ДАНЕЙКО

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Метод конформного преобразования доказал свою эффективность при решении отдельного класса задач, связанных с расчетом акустических полей в клиновидных областях [1, 2]. Однако при переходе от идеально ровного дна к реальным поверхностям и учете горизонтальной неоднородности океана данный подход становится трудноприменимым. Это объясняется как сложностями в подборе новой ортогональной координатной системы, приводящей границы к более простому виду, так и необходимостью ограничиться узким классом зависимостей скорости звука от глубины. Прямоугольные же волноводы вообще исключаются



Клинообразный волновод, моделирующий условия прибрежного шельфа (S — поверхность дна)

из области применения указанного метода. Большинство этих проблем можно решить лишь при использовании неортогональных систем координат.

Рассмотрим клинообразный горизонтально-стратифицированный волновод с абсолютно мягкой верхней границей и произвольной нижней (см. рисунок). Задача нахождения двухмерного акустического поля в такой области имеет вид:

$$\nabla^2\psi(x, z) + k^2(z)\psi(x, z) = 0,$$
$$\psi|_{z=0} = 0, \ \psi'_n + g\psi|_{z=\gamma(z)} = 0, \qquad (1)$$

где $k^2(z) = \omega^2/c^2(z)$; c — скорость звука; ω — частота; ψ'_n — производная по внешней нормали; g — адмитанс дна. Функция $\gamma(t)$, описывающая нижнюю границу клина, может быть построена с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Если известны $N+1$, точка с координатами x_i, z_i, причем $(x_i, z_i) \in S$, то

$$x = \gamma(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i z^i + a_0, \ a_i = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n C_N^n \Big/ \prod_{m=0}^{N_*} (z_n - z_m),$$
$$a_0 = (-1)^N \sum_{n=0}^{N} x_n \prod_{m=0}^{N_*} z_m \Big/ \prod_{m=0}^{N_*} (z_n - z_m),$$

$m \neq n$, C_N^n — сочетание из N элементов z_i по n, индекс «*» обозначает, что из произведения исключается член, для которого $m=n$ [3]. В частности, профиль дна (см. рисунок) может быть однозначно задан с помощью 15 точек. Перейдем в новый координатный базис $x=\mu(u)+v$, $z=q(u)$. Тогда задача (1) примет вид:

$$q'^2\psi''_{uu} - q''\psi'_u + q'(\mu'^2 + q'^2)\psi''_{vv} - (\mu''q' - \mu'q'')\psi'_v - 2q'\mu'\psi''_{uv} +$$
$$+ q'^3 k^2(q)\psi = 0, \ \psi = 0, \ q = 0;$$

$$\psi'_v(q' + b\mu') - \psi'_u b + gq'(1 + b^2)^{\frac{1}{2}}\psi = 0, \ \mu + v = \gamma(q);$$

(здесь и в дальнейшем штрих без индекса при μ и q означает дифферинцирование по u, а при f — по v, $b = \gamma'_z$). Пусть $\mu(u) = \sum_{i=1}^{N} a_i q^i + a_0$, тогда, применяя стандартный метод разделения переменных, получим:

$$\psi(u, v) = (q')^{\frac{1}{2}} \exp[\alpha(q + \mu - iv + \int b d\mu) + g\int(1 + b^2)^{\frac{1}{2}} dq],$$

где α — постоянная разделения, а функция $q(u)$ является решением уравнения

$$QQ'' - \frac{3}{4}Q'^2 + Q^2Q'A + Q^4B + Q^3D + Q^2P = 0,$$

$$Q = q', \ A = \alpha + g(1 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \ B = k^2(q) + 2\alpha^2 + 2\alpha g(1 + b^2)^{\frac{1}{2}} + \qquad (2)$$
$$+ g^2(1 + b^2), \ D = 2\alpha g(1 + b^2)^{\frac{1}{2}} b\mu' + 2\alpha^2 b\mu' + g(1 + b^2)^{\frac{1}{2}\prime},$$
$$p = \alpha^2(b\mu')^2 + \alpha(b\mu')',$$

способ решения которого будет обсуждаться в последующих публикациях. Остается добавить, что данный подход, избавляя от необходимости решения задачи на собственные функции и собственные значения, приводит к не менее сложному уравнению (2).

Перейдем теперь к задаче нахождения акустического поля в прямоугольном нестратифицированном волноводе. В качестве функций, аппроксимирующих реальные профили скорости звука, выберем аналогичные использовавшимся в [4]. Тогда уравнение

$$\nabla^2\psi(x, z)+k^2(x, z)\psi(x, z)=0$$

с граничными условиями

$$\psi|_{z=0}=0,\ \psi'_z+g\psi|_{z=H}=0,$$

с помощью преобразования координат $x=\mu(u)f(v)$, $z=q(u)$ может быть приведено к виду:

$$\mu^2 f'^3(q'\psi''_{uu}-q''\psi'_u)-2\mu\mu' q' ff'^2\psi''_{uv}+\mu'^2 q'(f^2 f'\psi''_{vv}+(2ff'^2-f^2 f'')\psi'_v)+$$
$$+q'^3(f'\psi''_{vv}-f''\psi'_v)-\mu(\mu'' q'-\mu' q'')f'^2\psi'_u+q'^3 f'^3 k^2(v)\psi=0,$$
$$\psi|_{q=0}=0,\ \psi'_v f\mu'-\psi'_u\mu f'-\psi g q'\mu f'|_{q=H}=0.$$

Если искать решение последней задачи как произведения $\psi(u, v)=$ $=U(u)V(v)$, после несложных преобразований получим:

$$\psi(u, v)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(u)(q')^{\frac{1}{2}}(\mu f)^{\alpha_n}, \tag{3}$$

где α_n и φ_n — собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{gathered}4\mu^2 q'^2\varphi''+(8\alpha^2\mu'^2 q'^2+\mu^2(2q'''q'-3q''^2))\varphi=0,\\ \varphi|_{q=0}=0,\ \varphi|_{q=H}=\mu^{\alpha}\exp(-gH);\end{gathered} \tag{4}$$

A_n — коэффициент возбуждения n-й моды; $f(v)=[(\alpha_n^2-\alpha_n)/k^2(v)]^{\frac{1}{2}}$, а $q(u)$ и $\mu(u)$ выбираются так, чтобы наилучшим образом удовлетворить условию $k^2(x, z)\to k^2(v)/\mu^2$ [4].

Значение $\varphi(u)$ может быть получено как методом фазовой функции, детально разработанным в [5], так и с помощью любого другого подхода, применимого в данном случае.

В заключение отметим, что при соответствующем выборе функции q и μ можно получить решение задачи (4) аналитически, что существенно упростит процесс отыскания общего решения (3).

Список литературы

1. Завадский В. Ю. О некоторых вопросах дифракции в соприкасающихся жидких и упругих клиньях // Акуст. журн. 1966. Т. 12. Вып. 2. С. 192.
2. Комиссарова Н. Н. Поле точечного источника в клиновидной области, моделирующей условия распространения подводного звука в прибрежной зоне // Акуст. журн. 1973. Т. 19. Вып. 4. С. 552.
3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954. С. 43.
4. Белявский А. К., Данейко И. К. Распространение волн в неоднородном клине. Метод конформного преобразования // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2. С. 62.
5. Крупин В. Д. Вычисление звуковых полей в волноводах на основе метода фазовой функции // Вопросы судостроения. Сер.: Акустика. 1977. Вып. 9. С. 3.

Поступила в редакцию 25.07.90.

УДК 517.948.32 : 517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

О ВОЗМОЖНОСТИ ЯВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ УНИФОРМИЗАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СООТВЕТСТВИЯ

1. Пусть F — неприводимый многочлен от двух комплексных переменных z и w над полем $\mathbf{C}$.

Уравнение

$$F(z, w) = 0 \tag{1}$$

задает (вообще говоря, многозначное) алгебраическое соответствие между переменными z и w.

Под *униформизацией* этого соответствия понимается нахождение пары однозначных аналитических функций

$$\begin{cases} z = \varphi(\zeta), \\ w = \psi(\zeta), \end{cases} \tag{2}$$

таких, что выполняется тождество $F[\varphi(\zeta), \psi(\zeta)] \equiv 0$. Униформизация называется *локальной*, если функции (2) удовлетворяют уравнению (1) в некоторой окрестности наперед заданной точки (z_0, w_0), где $F(z_0, w_0) = 0$. Достаточно полное и алгоритмичное решение проблемы нахождения локальной униформизации содержится в многочисленных известных теоремах о неявных функциях. Построить униформизацию можно, например, методом диаграммы Ньютона [1]. *Униформизация называется глобальной, если функции (2) удовлетворяют уравнению (1) для всевозможных значений переменных z и w, связанных этим уравнением.* Проблема существования глобальной униформизации (или 22-я проблема Гильберта [2]) полностью решена в ряде классических работ, выполненных на рубеже веков. Однако в общем случае никаких способов явного построения глобальной униформизации эти работы не содержат, поскольку в них используется общая теорема Б. Римана о существовании конформного гомеоморфизма односвязной римановой поверхности на каноническую область. Такие способы есть только в некоторых частных случаях (униформизация рациональными, периодическими, двоякопериодическими и некоторыми другими классами функций). Вообще, в работах по теории униформизации прослеживается тенденция искать униформизирующие функции в тех или иных классах автоморфных функций [3], что тоже сужает возможности их явного построения. Поэтому оставим только самые существенные ограничения, каковыми являются требования однозначности и аналитичности функций (2). Тогда общая схема построения униформизации может быть описана следующим образом. Если риманова поверхность $\mathbf{R}$, заданная уравнением (1), не подобна однолистным, то на ней проводим разрезы L с таким расчетом, чтобы разрезанная поверхность стала подобной однолистным, т. е. конформно эквивалентной какой-либо однолистной области $D \subset \widehat{\mathbf{C}}$. Тогда искомая

глобальная униформизация выражается в явном виде через конформный гомеоморфизм f: $\mathbf{R}\setminus L \to D$ следующим образом:

$$\begin{cases} z = (\pi_1 \circ f^{-1})(\zeta), \\ w = (\pi_2 \circ f^{-1})(\zeta), \end{cases} \quad \zeta \in D,$$

где $(z, w) \in \mathbf{R}$, а $\pi_1 : (z, w) \to z$ и $\pi_2 : (z, w) \to w$ — отображения проектирования. Успех явного построения униформизации (3) зависит, вообще говоря, от удачного подбора разрезов L, области D и отображающей функции f.

2. В случае, когда риманова поверхность $\mathbf{R}$, заданная уравнением (1), рода нуль (т. е. гомеоморфна расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbf{C}}$), глобальная униформизация соответствия (1) известна и реализуется с помощью рациональных функций φ и ψ. Способы построения униформизации дает теория алгебраических функций [1]. В основе этих способов лежит существование рациональной функции $\zeta = r(z, w)$, имеющей на $\mathbf{R}$ единственный простой полюс.

Предположим теперь, что род римановой поверхности $\mathbf{R}$ равен нулю, *но ее алгебраическое уравнение (1) не задано.* Вместо этого пусть известно, что поверхность $\mathbf{R}$ задана как n-листное накрытие плоскости $\hat{\mathbf{C}}$, и пусть заданы проекции всех ее точек ветвления. Точнее говоря, пусть заданы точки $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$ и подстановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ длины n. Считается, что при обходе против часовой стрелки вокруг каждой точки a_ν листы накрытия $\mathbf{R}$ переходят друг в друга по закону соответствующей подстановки σ_ν. К числу точек ветвления отнесем также точку ∞, при обходе вокруг нее листы должны переходить друг в друга по закону подстановки $\sigma_\infty = \sigma_1^{-1} \circ \ldots \circ \sigma_k^{-1}$. Для наших целей важно уметь находить функцию w, реализующую конформный гомеоморфизм римановой поверхности $\mathbf{R}$ на плоскость $\hat{\mathbf{C}}$. Такая функция должна удовлетворять неприводимому алгебраическому уравнению степени n по w и степени 1 по z

$$(\alpha_0 + \beta_0 z)\, w^n + (\alpha_1 + \beta_1 z)\, w^{n-1} + \ldots + (\alpha_n + \beta_n z) = 0 \tag{3}$$

с неопределенными коэффициентами α_μ, β_μ. Эти коэффициенты следует находить из системы уравнений, выражающей заданный закон склеивания листов [4]. Мы предлагаем более перспективный способ построения функции w, основанный на построении интегральной формулы, аналогичной известной формуле Кристоффеля — Шварца [5]. Зная закон склеивания листов, легко найти число точек ветвления поверхности $\mathbf{R}$, лежащих над a_ν, и кратности этих точек ветвления. Для этого достаточно разложить подстановку σ_ν на циклы и отметить все те циклы, длины которых больше единицы (т. е. те, которые дают положительный вклад в индекс ветвления поверхности $\mathbf{R}$). Пусть точка ветвления (a_ν, w_ν) имеет кратность $\gamma_\nu \geqslant 2$. Здесь w_ν — неизвестное, и пусть p — число этих неизвестных. Одному значению a_ν соответствует несколько различных w_ν, но мы условимся для простоты нумеровать только различные значения w_ν. Пусть, далее, над точкой $z = \infty$ лежат q точек $(\infty, \tilde{w}_1), \ldots, (\infty, \tilde{w}_4)$ кратностей $\lambda_1 \geqslant 1, \ldots, \lambda_q \geqslant 1$ соответственно, где все $\tilde{w}_\nu \in \mathbf{C}$. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. *Функцию, реализующую конформный гомеоморфизм плоскости $\hat{\mathbf{C}}_w$ на n-листную рода нуль поверхность наложения $\mathbf{R}$ плоскости $\hat{\mathbf{C}}_z$, можно задать равенством*

$$z = C + \gamma_0 \int_{\hat{w}}^{w} \prod_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod_{\mu=1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1}\, d\zeta, \tag{4}$$

где C, γ_0, $\tilde{w}$ — произвольные постоянные, а неизвестные w_ν, $\tilde{w}_\mu$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_s = C + \gamma_0 \int\limits_{\hat{w}}^{w_s} \prod\limits_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod\limits_{\mu=1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1} d\zeta, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s = 1, \ldots, p; \\ \operatorname*{res}\limits_{\zeta=\tilde{w}_j} \left[\prod\limits_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} \prod\limits_{\mu-1}^{q} (\zeta - \tilde{w}_\mu)^{-\lambda_\mu - 1} \right] = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, \ldots, q. \end{cases} \tag{5}$$

Первая группа уравнений системы (5) выражает тот факт, что $(a_s, w_s) \in \mathbf{R}$. Мы условились нумеровать только различные значения w_s, сопоставляя им нужное число раз одно и то же значение a_s. Вторая группа уравнений (5) гарантирует то, что интеграл (4) есть рациональная функция от w (не содержит логарифмических слагаемых), т. е. уравнение (4) — алгебраическое от z и w.

Отметим некоторые частные случаи формулы (4). Если подстановка σ_∞ — цикл длины n, то точек $\tilde{w}_\mu$ нет вовсе, и если потребовать, чтобы при $w \to \infty$ было $z \sim w^n$, то формула (4) переходит в такую:

$$z = C + n \int\limits_{\hat{w}}^{w} \prod\limits_{\nu=1}^{p} (\zeta - w_\nu)^{\gamma_\nu - 1} d\zeta, \tag{6}$$

где $\Sigma(\gamma_\nu - 1) = n - 1$. Если, кроме того, $p = 2$ (т. е. имеется всего три точки ветвления), то можно положить $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, и формула (4) конкретизируется так:

$$z = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{B(\gamma_1 \gamma_2)} \int\limits_0^w \zeta^{\gamma_1 - 1} (1 - \zeta)^{\gamma_2 - 1} d\zeta, \tag{7}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{N}$; $\gamma_1 \geqslant 2$, $\gamma_2 \geqslant 2$; $\gamma_1 + \gamma_2 = n + 1$, а $B(\gamma_1, \gamma_2)$ — бета-функция Эйлера.

3. Предположим теперь, что уравнение (1) задает риманову поверхность $\mathbf{R}$ рода $\rho \geqslant 1$, т. е. гомеоморфную сфере с ρ ручками. Пусть n — степень уравнения (1) по переменной w. Пользуясь диаграммой Ньютона, можно представить $\mathbf{R}$ в виде n-листного накрытия расширенной плоскости $\hat{\mathbf{C}}_z$, причем вычисляются проекции всех точек ветвления этого накрытия, а также закон склеивания листов. Так как $\mathbf{R}$ — замкнутая поверхность рода $\rho \geqslant 1$, то на ней существует ρ простых замкнутых попарно непересекающихся кривых, которые ее не разбивают и не проходят через точки ветвления. Пусть $\mathbf{A}$ — одна из таких кривых. Предположим для простоты, что кривая $\mathbf{A}$ однолистна, т. е. сужение отображения проектирования $(z, w) \to z$ на $\mathbf{A}$ есть гомеоморфизм. Присоединим к $\mathbf{R} \setminus \mathbf{A}$ два берега разреза $\mathbf{A}$. Разрежем плоскость $\hat{\mathbf{C}}_z$ по образу разреза $\mathbf{A}$ при отображении проектирования $(z, w) \to z$. В результате получим две замкнутые области: ограниченную $\bar{D}^+$ и неограниченную $\bar{D}^-$. Приклеим эти области к разрезанной поверхности следующим образом. Край области $\bar{D}^+$ склеиваем с внешним берегом разреза $\mathbf{A}$, а край области $\bar{D}^-$ склеиваем с внутренним берегом разреза $\mathbf{A}$. В результате склеивания возникла замкнутая $(n+1)$-листная накрывающая поверхность, индекс ветвления которой такой же, как у поверхности $\mathbf{R}$. Следовательно, род новой поверхности равен $\rho - 1$. Если $\rho - 1 \geqslant 1$, то проделываем такую же операцию с новой поверхностью. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете получим $(n+\rho)$-листное накрытие $\tilde{\mathbf{R}}$ плоскости $\hat{\mathbf{C}}_z$, род которого равен нулю, причем известны проекции всех ее точек ветвления и закон

склеивания листов. Применяя к $\tilde{\mathbf{R}}$ результаты предыдущего пункта, заключаем, что существует рациональная функция $z=\varphi(\zeta)$, реализующая конформный гомеоморфизм плоскости $\hat{\mathbf{C}}_\zeta$ на поверхность $\tilde{\mathbf{R}}$ (и некоторой 2ρ-связной плоской области на разрезанную поверхность $\mathbf{R}$). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого алгебраического соответствия (1) существует глобальная униформизация (2), такая, что хотя бы одна из функций* φ *или* ψ *— рациональная.*

Существование такой униформизации принципиально важно с точки зрения ее фактического нахождения.

Список литературы

1. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 234.
2. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М., 1969.
3. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.; Л., 1936.
4. Джураев О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. № 3. С. 53.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. С. 175.

Поступила в редакцию 02.07.90.

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, А. Л. ТОПЧИШВИЛИ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Теория несобственных задач линейного и выпуклого программирования разработана в 70—80-е годы [1]. Практика применения дискретных моделей требует создания аналогичной теории несобственных задач дискретной оптимизации. Способы анализа противоречивых моделей выпуклого программирования связаны с разными методами аппроксимации несовместных систем выпуклых ограничений. В статье предлагается метод аппроксимации систем выпуклых диофантовых неравенств совместными системами, основанный на доказанном свойстве порядковой выпуклости функции невязки. Тем самым будет построен один из способов анализа несобственных задач выпуклой дискретной оптимизации.

Пусть Z^n—решетка целочисленных векторов, Z^n_+—подрешетка векторов с неотрицательными координатами. Пусть $a_i : Z^n_+ \to R$ — порядково-выпуклые неубывающие для $i = 1, \ldots, m$ и невозрастающие для $i = m+1, \ldots, m+k$ функции. Напомним, что функция $f : Z^n \to R$ называется порядково-выпуклой, если ее (i, j) — градиенты $\nabla_{ij} f(x)$, определяемые правилом $\nabla_{ij} f(x) = f(x+e_i+e_j) - f(x+e_i) - f(x+e_j) + f(x)$, не имеют отрицательных значений для всех x и i, j.

Рассмотрим систему диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,

$$a_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m+k. \tag{1}$$

В частном случае функции a_i могут быть линейными:

$$a_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j - b_i', \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$a_i''(x) = b_i'' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' x_j, \quad i = m+1, \ldots, m+k$$

(все a_{ij}', a_{ij}'' — неотрицательны), т. е. речь идет о коррекции следующей системы линейных диофантовых неравенств: $x \in Z^n_+$,

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \leqslant b'_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j \geqslant b''_i, \quad i = m+1, \ldots, m+k. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию невязки i-го ограничения $a_i^+(x) = \max\{0, a_i(x)\}$. Тогда величину $g(x) = \sum_{i=1}^{m+k} a_i^+(x)$ назовем невязкой системы (1) в точке x, а функцию $g : Z^n \to R_+$ — функцией невязки. Меру несовместимости ξ системы (1) введем правилом

$$\xi = \min_{x \in Z_+^n} g(x). \tag{4}$$

Лемма 1. Система (1) совместна тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Пусть x^* — оптимальное решение задачи (4). Тогда переход от несовместной системы (1) к совместной системе

$$a_i(x) \leqslant a_i^+(x^*), \quad i = 1, \ldots, m+k$$

назовем l_1-аппроксимацией системы (1); l_1-аппроксимацией несовместной линейной системы (2)—(3) будет следующая совместная система

$$A'x \leqslant b' + \Delta b', \quad A''x \geqslant b'' - \Delta b'', \tag{5}$$

где компоненты векторов возмущений $\Delta b'$ и $\Delta b''$ определяются правилом

$$\Delta b' = \max\left\{0, \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j^* - b'_i\right\},$$

$$\Delta b'' = \min\left\{0, \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} x_j^* - b''_i\right\},$$

l_1-аппроксимация соответствует коррекции системы (1) путем минимального в метрике $\|\cdot\|_{l_1}$ возмущения правой части. Возможны аппроксимации с минимизацией возмущений по другим нормам в R^{m+k}. Если $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^{m+k}, то тогда функция невязки системы определяется правилом $g(x) = \|a_1^+(x), \ldots, a_{m+k}^+(x)\|$. Выбор нормы определяется как содержательным смыслом задачи, так и требованием эффективной разрешимости задачи оптимизации (4). В непрерывном случае последнее требование несущественно, так как выпуклость функций $a_i(x)$ влечет, как правило, выпуклость функции невязки $g(x)$.

Докажем, что в принятой нами модели порядковой выпуклости при l_1-аппроксимации функция невязки является также порядково-выпуклой.

Теорема 1. Если $a(x)$ — неубывающая (невозрастающая) порядково-выпуклая функция, то функция $a^+(x) = \max\{0, a(x)\}$ также порядково-выпуклая.

Схема доказательства. Пусть $a(x)$ — неубывающая функция (доказательство для невозрастающей функции полностью аналогично). Необходимо доказать, что $\nabla_{ij} a^+(x) \geqslant 0$, или что то же

$$a^+(x + e_i + e_j) - a^+(x + e_i) \geqslant a^+(x + e_j) - a^+(x). \tag{6}$$

В силу порядковой выпуклости функции $a(x)$ справедливо

$$a(x + e_i + e_j) - a(x + e_i) \geqslant a(x + e_j) - a(x). \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1) $a(x) > 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ неравенство (6) в этом случае эквивалентно неравенству (7).

2) $a(x + e_i + e_j) \leqslant 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ справедливо $a^+(x + e_i + e_j) = a^+(x + e_i) = a^+(x + e_j) = a^+(x) = 0$ и, следовательно, неравенство (6) в этом случае справедливо.

3) $a(x+e_i+e_j)>0$, $a(x+e_i)>0$, $a(x+e_j)>0$, $a(x)\leqslant 0$. Неравенство (7) можно заменить на $a(x+e_i+e_j)-a(x+e_i)\geqslant a(x+e_j)$, которое при сделанных предположениях влечет (6).

4) $a(x+e_i+e_j)>0$, $a(x+e_j)>0$, $a(x+e_i)\leqslant 0$, $a(x)\leqslant 0$. В силу монотонности функции $a(x)$ имеем $a(x+e_i+e_j)\geqslant a(x+e_j)$. Откуда с учетом, что $a^+(x+e_i)=0$, $a^+(x)=0$, имеем (6).

Лемма 2. Сумма порядково-выпуклых функций — функция порядково-выпуклая.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 2. Функция $g(x)$ невязки системы (1) порядково-выпуклая.

Точку $x\in Z^n$, обладающую свойством $g(x)=0$, назовем нулем функции $g(x)$.

Следствие 1. В случае совместимости системы (1) в Z^n множество ее решений совпадает с множеством нулей порядково-выпуклой функции.

Теорема 2 указывает простой метод построения совместной аппроксимации системы неравенств (1), близкой к l_1-аппроксимации. Пусть x^g — градиентное решение задачи (4), построенное алгоритмом координатного спуска. Известно [3], что x^g является хорошим приближением для точки x^* минимума функции невязки (в случае, если порядково-выпуклая функция g является сепарабельной $x^g=x^*$).

Пример. Рассмотрим систему линейных диофантовых неравенств $0\leqslant x_1\leqslant 6$, $1\leqslant x_2\leqslant 2$, $x_1+4x_2\leqslant 10$, $32\leqslant 3x_1+8x_2$. Функция невязки имеет вид $g(x_1, x_2)=\max\{0, x_1-6\}+\max\{0, x_2-2\}+\max\{0, x_1+4x_2-10\}+\max\{0, -x\}+\max\{0, 1-x_2\}+\max\{0, 32-3x_1-8x_2\}$. Алгоритм координатного спуска дает точку $x^g=(0, 4)$, $g(x^g)=8$. Строим вектора возмущений $\Delta b'=(0, 2, 6)$, $\Delta b''=(0, 0, 0)$. Совместная система имеет вид $0\leqslant x_1\leqslant 6$, $1\leqslant x_2\leqslant 4$, $x_1+4x_2\leqslant 16$, $32\leqslant 3x_1+8x_2$.

Минимум функции невязки равен 4 и достигается в нескольких точках, например в точках $x_1^*=(8, 1)$, $x_2^*=(6, 2)$, $x_3^*=(5, 2)$. Соответствующие им вектора возмущений для построения l_1-аппроксимации имеют вид: $\Delta b_1'=(8, 0, 2)$, $\Delta b_1''=(0, 0, 0)$, $\Delta b_2'=(0, 0, 4)$, $\Delta b_2''=(0, 0, 0)$, $\Delta b_3'=(0, 0, 3)$, $\Delta b_3''=(0, 0, 1)$.

Список литературы

1. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. М., 1979.
2. Еремин И. М., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М., 1983.
3. Ковалев М. М. Кибернетика. 1985. № 6. С. 77.

Поступила в редакцию 25.02.88.

УДК 519.1

И. Э. ЗВЕРОВИЧ, А. СИЛЛА (ГВИНЕЯ)

P-УНИГРАФИЧНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

Мы используем терминологию [1] за исключением терминологии, относящейся к степенным последовательностям [2]. Последовательность целых чисел

$$\pi=(d_1, d_2, \ldots, d_p), \text{ где } d_1\geqslant d_2\geqslant\ldots\geqslant d_p>0, \qquad (1)$$

называется графической, если существует граф G с множеством вершин $VG=\{v_1\ldots v_p\}$. Степень вершины v_i равна d_i: $\deg v_i=\deg v_i=d_i$, $i=\overline{1, p}$. В этом случае G называется реализацией последовательности π. Обозначим через $I(\pi)$ соответственно $I_P(\pi)$ множество всех реализаций последовательности π (обладающих свойством P). Последовательность π называется вынужденно P-графической (соответственно P-униграфической), если $\varnothing\neq I(\pi)\subseteq I_P$ (соответственно $|I(\pi)\cap I_P|=1$), где I_P обо-

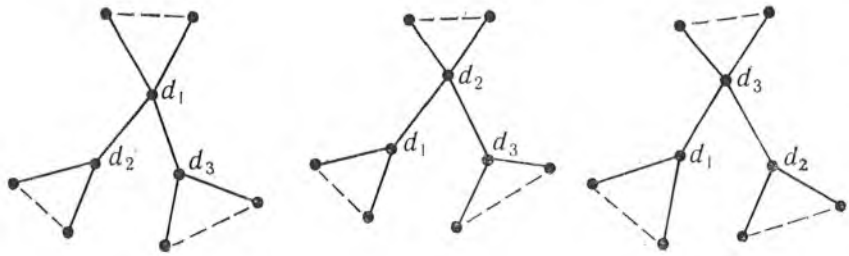


Рис. 1

значает класс всех графов, обладающих свойством P. В случае, когда свойство P тривиально (ему удовлетворяют все графы), понятия вынужденной P-графичности и P-униграфичности превращаются в обычные понятия графичности и униграфичности.

Условия P-графичности и униграфичности широко изучаются (см., напр., обзор [2]). В то же время характеризационных результатов, касающихся P-униграфической последовательности, практически нет, хотя рассмотрение таких последовательностей довольно естественно. Класс P-униграфических последовательностей U_P в ряде случаев шире, чем $U \cap I_P$, где U — множество всех униграфических последовательностей (включение $U_P \supseteq U \cap I_P$ очевидно). Расширение множества униграфов в классе I_P имеет практическое значение при генерировании графов с заданным свойством, изучении изомеров некоторых химических соединений и т. д. При этом наиболее широко рассматриваются свойства, отражающие циклическую структуру графа [3].

Обозначим через T множество всех деревьев.

Теорема 1. Графическая последовательность (1) является T-униграфической тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = 2(p-1) \tag{2}$$

и π удовлетворяет хотя бы одному из условий:

(i) $p = 2$ или $d_3 = 1$;

(ii) $d_1 = d_2 = d_3 > 1$, $d_4 = 1$;

(iii) $d_1 = 2$.

Доказательство. Необходимость. При $p = 2$ утверждение очевидно. Пусть $p \geqslant 3$ и π является T-униграфической. Тогда по теореме 6.3 [1] имеет место равенство (2).

Предположим, что ни одно из условий (i) — (iii) не выполняется. Тогда $d_1 \geqslant 3$, $d_3 > 1$, а при $d_4 = 1$, кроме того, хотя бы одно из равенств $d_1 = d_2 = d_3$ не выполняется. Обозначим $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $V' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$, где $m = \max\{k \setminus d_k > 1\} \geqslant 3$. При $m \geqslant 4$ построим деревья T, T' с множеством вершин V и V' соответственно: $ET = \{(v_i, v_{i+1})/i = \overline{1, m-1}\}$; $ET' = \{(v_1v_2), (v_1v_3)\} \cup \{(v_i, v_{i+1})/i = \overline{3, m-1}\}$. Далее рассмотрим попарно непересекающиеся множества U_i, $i = \overline{1, m}$, $\bigcup_{i=1}^{m} U_i \cap V = \varnothing$. Построим дерево $\tilde{T}$ с множеством вершин $VT \cup (\bigcup_{i=1}^{m} U_i)$ и множеством ребер $ET \cup \{v_iu_{i_j})/i = \overline{1, m}, u_{i_j} \in U_i\}$. Совершенно аналогично строится $\tilde{T}'$. Корректность построения следует из неравенств $d_1 \geqslant 3$ и $m \geqslant 4$. Легко видеть, что $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ — два неизоморфных дерева, реализующих π. Это противоречит условию. Поэтому $m = 3$. Но тогда, по крайней мере, два из трех деревьев (рис. 1) не изоморфны, что также противоречит условию.

Достаточность. Условие (2) обеспечивает существование дерева T со степенной последовательностью π. Если выполняется условие (i), то последовательность униграфична и реализуется деревом [1]. При выполне-

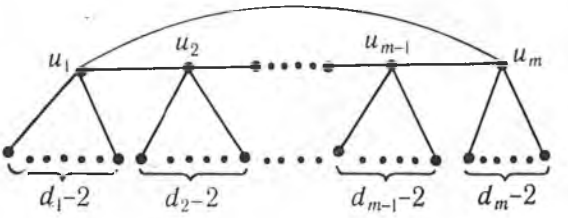


Рис. 2

нии условия (*ii*) или (*iii*) существует реализация (дерево $\widetilde{T}$), построенная выше. Докажем единственность. Пусть $\widetilde{T}'$ — другая реализация — дерево. Удалим из $\widetilde{T}'$ все висячие вершины. Из условий (*ii*), (*iii*) следует, что получится простая цепь $u_1 \ldots u_m$. Остается воспользоваться равенством $\deg u_i = \deg u_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$; степени рассматриваются в $\widetilde{T}'$, из которого получаем $\widetilde{T} \cong \widetilde{T}'$.

Теорема доказана.

Отметим, что из включения $P \subseteq P'$ не следует включение $U_p \subseteq U_p$. Действительно, $\pi = (2^4 1^2) \in U_т$, но $\pi \notin U_D$, где D означает двудольность.

Ниже через U обозначается класс связанных унициклических графов.

Теорема 2. Последовательность (1) является U-униграфической тогда и только тогда, когда π удовлетворяет одному из условий:

$$(i)\ p \geqslant 3 \text{ и } d_1 = d_p = 2;$$

$$(ii)\ p = d_1 + d_2 + d_3 - 3 \geqslant 4,\ d_3 \geqslant 2 \text{ и } d_4 = 1.$$

Доказательство. Необходимость. Так как π реализуется в классе U, то, согласно [1], $p \geqslant 3$ и

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = 2p. \tag{3}$$

Обозначим $m = \max\{k/d_k \geqslant 2\}$. Ясно, что $m \geqslant 3$. Из (3) следует, что

$$p - m = \sum_{i=1}^{m} (d_i - 2). \tag{4}$$

Равенство (4) вместе с условием $m \geqslant 3$ гарантирует существование реализации $G_\pi \in U$ последовательности π (рис. 2).

Предположим, что $m = p$. Тогда, учитывая неравенство $d_m \geqslant 2$ из (3), получаем, что π удовлетворяет условию (*i*). Предположим, что $m = 3$, тогда, очевидно, π удовлетворяет условию (*ii*).

Таким образом, для доказательства необходимости остается показать, что при $3 < m < p$ последовательность (1) имеет не менее двух унициклических реализаций. Для этого преобразуем G_π в другую реализацию $G'_\pi \in U$. В графе $(G_\pi - u_m) + u_1 u_{m-1}$ произведем подразбиение одного висячего ребра новой вершиной v. Далее, вершину v соединим с каждой вершиной множества $N_{G_\pi}(u_m) \setminus \{u_1, u_{m-1}\}$. (Здесь $N_{G_\pi}(u_m)$ обозначает окружение вершины u_m в графе G_π). Граф G'_π построен.

Корректность построения G'_π. Во-первых, ребро u, u_{m-1} не является кратным, поскольку $m \geqslant 4$. Во-вторых, в графе $(G_\pi - u_m) + u_1 u_{m-1}$ имеется хотя бы одно висячее ребро, поскольку иначе $d_1 = 2$ и, согласно (3), $\pi = (2^p)$, $m = p$, противоречит предположению $m < p$.

Очевидно, что граф G'_π действительно реализует π в классе U.

Достаточность. Последовательность (1), удовлетворяющая (*i*), имеет только одну унициклическую реализацию — C_p. Если π удовлетворяет условию (*ii*), то она является униграфической [5], причем единственная реализация — граф G_π — принадлежит U. Теорема доказана.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Тышкевич Р. И., Черняк А. А., Черняк Ж. А. // Кибернетика. 1987. № 6. С. 12; 1988. № 2. С. 1.
3. Зверович В. Э., Зверович И. Э., Силла А. Несколько результатов о вынужденно n-раскрашиваемых и вынужденно i-циклических последовательностях. Минск, 1988. Деп. в ВИНИТИ 12.04.88. № 2790-388.
4. Зверович И. Э. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 55.
5. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1979. № 2. С. 5.

Поступила в редакцию 15.03.89.

УДК 519.832.3

Н. Н. ПИСАРУК, В. С. РЕДДИ (ИНДИЯ)

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ С ЗАВИСИМЫМИ СТРАТЕГИЯМИ

Рассмотрим матричную игру размера $m \times n$ с матрицей A выигрышей первого игрока. Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множества стратегий первого и второго игроков соответственно. Смешанные стратегии $p \in S_m$ и $q \in S_n$ есть наборы вероятностей применения игроками их чистых стратегий. Здесь $S_k = \left\{ x \in R^k : \sum_{i=1}^{k} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k \right\}$ — симплекс. В классической постановке решением матричной игры в смешанных стратегиях является пара стратегий p^0, q^0, которые образуют седловую точку функции

$$M(p, q) = pAq = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \tag{1}$$

среднего выигрыша (математического ожидания) первого игрока, т. е.

$$M(p, q^0) \leqslant M(p^0, q^0) \leqslant M(p^0, q)\ \forall p \in S_m,\ q \in S_n. \tag{2}$$

Условия $p \in S_m$ и $q \in S_n$ фактически означают, что стратегии не зависимы между собой. На практике встречаются задачи, для которых данное условие не выполняется. Проиллюстрируем это на примере задачи о планировании посева [1].

Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать три культуры на участке $F = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 4\}$. Матрица доходов предприятия с единицы площади посевов в зависимости от состояний погоды имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если в качестве модели задачи выбора оптимальной стратегии планирования посевов рассматривать матричную игру, то его оптимальной стратегией будет $p_0^0 = (2/3,\ 1/3,\ 0)$. Таким образом, сельскохозяйственному предприятию рекомендуется 2/3 площади посевов занять под первую культуру и 1/3 — под вторую, т. е. первую культуру можно сеять только на 2/5 всей площади, а суммарная площадь, отведенная под первую и вторую культуры, не превосходит 14. Однако возможны дополнительные ограничения типа: первую культуру можно сеять на участке $F_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 4\}$, вторую — на $F_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2\}$ и третью — на $F_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 1 \leqslant x_1 \leqslant 5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 4\}$. В таком случае математическая модель задачи в виде матричной игры не описывает реальную ситуацию.

Рассмотрим игровую модель, которая позволит устранить указанный недостаток. А именно, построим модель смешанного расширения матричной игры с ограничениями на выбор стратегий. Предположим, что заданы функции

$$\rho_1 : 2^M \to R_+ \text{ и } \rho_2 : 2^N \to R_+,$$

где ρ_k — верхняя граница вероятности применения k-м игроком стратегий из множества I, $k = 1, 2$. Как показано в [2], функции ρ_1 и ρ_2 как функции меры субмодулярны. Напомним, что функция $\rho : 2^M \to R_+$ называется субмодулярной, если выполняется следующее условие:

$$\rho(I) + \rho(J) \geqslant \rho(I \cup J) + \rho(I \cap J) \; \forall I, \; J \in 2^N.$$

В задаче планирования посева

$$\rho_1(I) = \mu\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) \Big\backslash \mu(F),$$

$$\rho_2(I) = \begin{cases} 0, & I = \varnothing \\ 1, & I \neq \varnothing, \end{cases}$$

где μ — функция меры, например, площадь.
Функциям ρ_1 и ρ_2 соответствуют базовые многогранники

$$P_1 = \left\{ x \in S_m : \sum_{i \in I} x_i \leqslant \rho_1(I), \; I \in 2^M \right\},$$

$$P_2 = \left\{ x \in S_n : \sum_{i \in I} x_i \leqslant \rho_2(I), \; I \in 2^M \right\}.$$

Стратегии $p \in P_1$, $q \in P_2$ будем называть допустимыми. В качестве решения матричной игры рассмотрим пару допустимых стратегий p^0, q^0, которые образуют седловую точку функции $M(p, q)$, т. е.

$$M(p, q^\circ) \leqslant M(p^\circ, q^\circ) \leqslant M(p^\circ, q) \; \forall \; p \in P_1, \; q \in P_2. \tag{3}$$

В соответствии с принципом гарантированного результата, принятого в теории игр, функции выигрышей первого игрока $f(p)$ и проигрышей второго $g(q)$ определяются следующим образом:

$$f(p) = \min_{q \in P_2} M(p, q) = \min_{q \in \operatorname{vert} P_2} M(p, q),$$

$$g(q) = \max_{p \in P_1} M(p, q) = \max_{p \in \operatorname{vert} P_1} M(p, q).$$

Отметим, что $g(q)$ — выпуклая, а $f(p)$ — вогнутая функции. Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш:

$$\max_{p \in P_1} f(p), \tag{4}$$

а второй — минимизировать свой проигрыш:

$$\min_{q \in P_2} g(q). \tag{5}$$

В силу теоремы о совпадении min max и max min (см. [3]), точки p^0 и q^0 оптимума в задачах (4), (5) будут удовлетворять условию (3), а следовательно, являются решением матричной игры в допустимых смешанных стратегиях.

Покажем теперь, как можно решить задачу (4). Задача (5) решается аналогично с учетом того, что матрица выигрышей второго игрока $-A^T$. Так как $f(p)$ — кусочно-линейная вогнутая функция, то (4) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} & v \to \max \\ & v - p(Aq) \leqslant 0 \quad \forall \, q \in \operatorname{vert} P_2, \\ & \sum_{i \in I} p_i \leqslant \rho_1(I) \quad \forall \, I \in 2^M, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

$$p_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, m,$$

в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p, v) с максимальной координатой v. Запишем двойственную задачу к задаче (6):

$$\begin{gathered}
\sum_{I \in 2^M} \rho_1(I) \ z_I \to \min, \\
\sum_{I \in 2^M, i \in I} z_I - \sum_{q \in \operatorname{vert} P_2} (A_i q) \, y_q - s_i = \theta, \ i = 1, \ldots, m, \\
\sum_{q \in \operatorname{vert} P_2} y_q = 1, \\
y_q \geqslant 0 \quad \forall \, q \in \operatorname{vert} P_2, \\
z_I \geqslant \theta \quad \forall I \in 2^M \setminus M \\
s_i \geqslant \theta \ \ i = 1, \ldots, m.
\end{gathered} \tag{6D}$$

Для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ через $q^\sigma \in P_2$ будем обозначать вектор с координатами

$$q^\sigma_{\sigma_i} = \rho_2(\sigma[i]) - \rho_2(\sigma[i-1]), \ i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где $\sigma[i] = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma[0] = \varnothing$.

Теорема 1. Базисное допустимое решение (z, y, s) задачи (6D) является оптимальным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{8_1}$$

$$\min\left(\rho_1(I) - \sum_{i \in I} \pi_i\right) \geqslant 0, \tag{8_2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \rho_1(N), \tag{8_3}$$

$$\pi A_q^{\text{Б}i} \geqslant \pi_{n+1}, \tag{8_4}$$

где $\pi = (\pi, \ \pi_{n+1}) = B^{-1} C_{\text{Б}}$ — вектор потенциалов; B и $C_{\text{Б}}$ — базисная матрица и вектор целевой функции, соответствующие решению (z, y, s). Здесь перестановка $\sigma \in S_n$ удовлетворяет условию

$$(\pi A)_{\sigma_1} \leqslant (\pi A)_{\sigma_2} \leqslant \ldots \leqslant (\pi A)_{\sigma_n}. \tag{9}$$

Доказательство. Столбцы матрицы ограничений задачи (6D) имеют один из следующих трех типов:

$$1) \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}^I \quad 2) \begin{pmatrix} -A_q^i \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -e_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

где χ^I — характеристический вектор множества $I \in 2^N$ имеет координаты $(\chi^I)_i = 1$, если $i \in I$ и $\chi^I_i = 0$, если $i \notin I$, e_i — i-й единичный орт в R^n. В принятых обозначениях условие оптимальной задачи линейного программирования (6D) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}
\rho(I) - \pi x^I \geqslant 0, \ \forall I \in 2^N \setminus N, \\
\rho(I) - \pi x^N = 0, \\
\pi A_q - \pi_{n+1} \geqslant 0 \ \ \forall q \in \operatorname{vert} P_2, \\
\pi \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так как оптимум в задаче $\max\limits_{q \in \operatorname{vert} P_2} \pi A_q$ достигается в точке q^σ, где перестановка σ удовлетворяет условию (9) (см. [2]), то справедливость теоремы непосредственно следует из (10).

Все условия теоремы 1, за исключением (8_2), проверяются просто. Чтобы проверить условие (8_2), необходимо решить задачу о минимизации субмодулярной функции. Один из алгоритмов ее решения предложен в [4].

В заключение вернемся к нашему примеру. Чтобы найти оптимальные стратегии сельскохозяйственного предприятия, нужно решить следующую задачу:

$$\begin{gathered} v \to \max \\ v - 5p_1 - 3p_2 - p_3 \leqslant 0, \\ v - 7p_1 - 2p_2 - 3p_3 \leqslant 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $P_1 = \left\{ p \in S_3 : \sum\limits_{i \in I} p_i \leqslant \mu\left(\bigcup\limits_{i \in I} F_i\right)/\mu(F),\ \mu(D) \text{ — площадь участка } D \subseteq F. \right.$ Решением задачи (11) будет точка $p^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right)$. Нетрудно убедиться, что предприятие может реализовать стратегию p^*, т. е. занять 2/5 площади под первую культуру, 3/10 — под вторую и 3/10 — под третью.

Список литературы

1. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М., 1981.
2. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987.
3. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971.
4. Писарук Н. Н.// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1989. № 9.

Поступила в редакцию 09.11.89.

УДК 532.516

М. М. ЧЕПИНОГА, А. Е. ЗЛЕБОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Постановка задачи. Математические модели различных волновых процессов обычно строятся с помощью уравнений Стокса. Краевые задачи, описываемые этими моделями, представляют собой довольно сложные системы дифференциальных уравнений при определенных граничных и начальных условиях и решаются приближенно [1, 2].

В настоящей статье предлагается модель, в основу которой положены обобщенные уравнения Рейнольдса [3], позволяющая исследовать распространение длинных волн в тонких слоях вязкой жидкости. Решены задачи: а) о плоских свободных волнах на поверхности раздела двух вязких жидкостей, ограниченных снизу и сверху бесконечными горизонтальными плоскостями; б) аналогичная задача, отличающаяся от первой наличием свободной поверхности вместо твердой крышки.

Обозначим через h_1, ρ_1, ν_1, h_2, ρ_2, ν_2 глубину, плотность и вязкость верхней и нижней жидкостей соответственно. Ось z направим вертикально вверх, а x расположим на невозмущенной поверхности раздела. Обобщенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкостей, получаются из уравнений Стокса путем разложения по малому параметру $\xi = H^2/\lambda^2$, $H = h_1 + h_2$, λ — длина волны. Для более общей задачи б) получим:

$$\frac{1}{h_1} \int\limits_0^{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dz = -g\, \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \nu_1\, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{h_2}\int\limits_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial t}dz = -\frac{\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} - \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}g\frac{\partial\xi_2}{\partial x} + \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} + \int\limits_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial x}dz = 0, \quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial t} - \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} + \int\limits_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz = 0,$$

где u_1, u_2 — горизонтальные составляющие скорости в верхней и нижней жидкостях соответственно; ζ_1, ζ_2 — профиль свободной поверхности и поверхности раздела; g — ускорение свободного падения. Вертикальные составляющие скорости $w_{1,2} \equiv 0$. Давление внутри жидкостей определяется по квазигидростатическому закону.

Система уравнений (1) решается с граничными условиями частичного скольжения на дне и поверхности раздела [4]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1;$$

$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z}; \quad \tau_1\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = u_1 - u_2 \text{ при } z = 0; \tag{2}$$

$$u_2 = \tau\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z} \text{ при } z = -h_2,$$

где μ_1, μ_2 — динамические вязкости; τ, τ_1 — коэффициенты частичного скольжения на дне и поверхности раздела соответственно.

Задача а) ставится аналогично:

$$\frac{1}{h_1}\int\limits_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}dz = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_0}{\partial x} - g\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \nu_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},$$

$$\frac{1}{h_2}\int\limits_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial t}dz = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_0}{\partial x} - g\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz + \int\limits_{-h_2}^{0}\frac{\partial u_2}{\partial x}dz = 0; \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \int\limits_{0}^{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}dz.$$

$$\tau\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = -u_1 \text{ при } z = h_1,$$

$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial z}; \quad \tau_1\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = u_1 - u_2 \text{ при } z = 0, \tag{4}$$

$$\tau\mu_3\frac{\partial u_2}{\partial z} = u_2 \text{ при } z = -h_2,$$

где ζ — возвышение поверхности раздела; τ — коэффициент частичного скольжения на верхней и нижней твердых стенках; τ_1 — на поверхности раздела; $p_0(x, t)$ — неизвестное давление на поверхности раздела.

Внутренние волны (задача а). Интегрируя по z первые два уравнения системы (3) и используя граничные условия (4), получим телеграфное уравнение для профиля поверхности раздела:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \varkappa\frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0, \tag{5}$$

причем $\varkappa = gh_1h_2(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)^{-1} > 0$; b — положительная константа, пропорциональная вязкости и выражающаяся через:

$$h_1,\ h_2,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \tau,\ \tau_1. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) для свободных волн запишем:

$$\zeta = ae^{-bt}\cos\sigma t\cdot\cos kx, \quad \sigma = \sqrt{\varkappa k^2 - b^2}. \tag{7}$$

Скорости и давление определяются по формулам:

$$u_i = -ak^{-1}F_i(z)e^{-bt}(b\cos\sigma t + \sigma\sin\sigma t)\sin kx, \quad i = 1,\ 2,$$
$$p_0 = -a\rho_1k^{-2}h_1^{-1}e^{-bt}[bN_1 + (\varkappa + gh_1)k^2)\cos\sigma t + \sigma N_1\sin\sigma t]\cos kx, \tag{8}$$

где $F_i(z)$ — квадратичные функции от z; N_1 — постоянная величина, зависящая об параметров (6).

Можно рассмотреть прогрессивные волны:

$$\zeta = ae^{-bt}\cos(kx + \sigma t), \tag{9}$$

фазовая скорость которых:

$$c = \frac{\sigma}{k}\sqrt{\varkappa - \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \lambda^2}. \tag{10}$$

Двухслойная жидкость со свободной поверхностью. Задача б) решается так же, как а). В результате получаем систему уравнений относительно $\zeta_{1,2}(x, t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} - U\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} - M\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} + R\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = 0,\\ \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} - V\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} - W\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2} + N\frac{\partial\zeta_2}{\partial t} - S\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $U = gh_1$; $V = g\rho_1\rho_2^{-1}h_2$; $W = (\rho_2 - \rho_1)\rho_2^{-1}gh_2$; M, R, N, S — положительные константы, выражающиеся через величины (6).

Для свободных волн решение ищем в виде:

$$\zeta_i = aT_i(t)\cos kx, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно $T_i(t)$ сведена к системе четырех ОДУ первого порядка, которая решена методом Эйлера. Общее решение:

$$\begin{gathered}T_1(t) = C_1e^{-b_1t}\cos\sigma_1t + C_2e^{-b_1t}\sin\sigma_1t + C_3e^{-b_2t}\cos\sigma_2t + C_4e^{-b_2t}\sin\sigma_2t,\\ T_2(t) = C_1\delta_1e^{-b_1t}\cos(\sigma_1t + \varphi_1) + C_2\delta_1e^{-b_1t}\sin(\sigma_1t + \varphi_1) +\\ + C_3\delta_2e^{-b_2t}\cos(\sigma_2t + \varphi_2) + C_4\delta_2e^{-b_2t}\sin(\sigma_2t + \varphi_1),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\beta = -b \pm i\sigma$ — корень уравнения четвертой степени:

$$\begin{gathered}\beta^4 + a_1\beta^3 + (a_2k + a_3)\beta^2 + a_4k^2\beta + a_5k^4 = 0,\\ a_1 = R + N - S > 0;\ a_2 = U + V + W;\ a_3 = NR - MS > 0;\\ a_4 = NU + RW + MV;\ a_5 = UW.\end{gathered} \tag{14}$$

Для каждой пары (b, σ) величины δ и φ вычисляются следующим образом:

$$\begin{gathered}\delta = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_I^2};\ \cos\varphi = \delta_R/\delta;\ \sin\varphi = \delta_I/\delta,\\ \delta_R = \operatorname{Re}\Delta^*,\ \delta_I = \operatorname{Im}\Delta^*;\\ \Delta^* = \frac{-Sb - Vk^2 + i\sigma S}{Wk^2 - Nb + b^2 - \sigma^2 + i\sigma(N - 2)},\ i = \sqrt{-1}.\end{gathered} \tag{16}$$

Анализ решения. Скорость затухания волнового процесса определяется коэффициентом b, который выражается через величины (6). В табл. 1 приводятся данные, характеризующие зависимость декремента затухания b от параметров жидкостей для трех различных случаев: 1 — $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\rho_1 = 900$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$; 2 — $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\rho_2 = 1000$; 3 — $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\rho^2 = 900$, $h_1 + h_2 = 1$. Здесь и далее размерность дается в системе СИ: $[\mu] =$ кг · м$^{-1}$ · с$^{-1}$; $[\rho] =$ кг · м$^{-3}$; $[\nu] =$ м^2 · с$^{-1}$; $[h] =$ м; $[\tau] =$ м^2 · с · кг$^{-1}$; $[b] =$ с$^{-1}$ и для краткости записи опускается. Зависимость декремента затухания от коэффициентов частичного скольжения τ, τ_1 на примере двух жидкостей с параметрами: $\nu_1 = 0{,}02$, $\rho_1 = 900$, $h_1 = 0{,}2$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$, $h_2 = 0{,}8$ дана в табл. 2.

Для двухслойной жидкости со свободной поверхностью декремент затухания зависит от длины волны λ или волнового числа k. В табл. 3 приводится зависимость декрементов затухания b_1, b_2 от волнового числа k для жидкости с параметрами: $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\rho_1 = 800$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^{-6}$, $\rho_2 = 1000$; $h_1 = 0{,}2$, $h_2 = 0{,}8$ и $h_1 = 2$, $h_2 = 8$; b_1, b_2 — модули действитель-

Таблица 1

Зависимость декремента затухания от параметров жидкостей

№№ пп	h_1/h_2		
	1/9	1	9
1	2,67	$5,6\cdot10^{-2}$	$4,65\cdot10^{-3}$
2	$5,75\cdot10^{-3}$	$6,67\cdot10^{-2}$	2,75
3	$5,37\cdot10^{-3}$	$6,36\cdot10^{-2}$	2,73

Таблица 2

Зависимость декремента затухания от коэффициентов частичного скольжения

τ_1, $м^2\cdot с\cdot кг^{-1}$	τ, $м^2\cdot с\cdot кг^{-1}$		
	0	100	∞
0		$5,55\cdot10^{-5}$	$2,55\cdot10^{-5}$
100	$5,87\cdot10^{-1}$	$4,00\cdot10^{-5}$	$1,45\cdot10^{-5}$
∞		$2,23\cdot10^{-5}$	0

Таблица 3

Зависимость декрементов затухания от волнового числа

k, $м^{-1}$	$h_1=0,2$ м; $h_2=0,8$ м		$h_1=2$ м; $h_2=8$ м	
	b_1, $с^{-1}$	b_2, $с^{-1}$	b_1, $с^{-1}$	b_2, $с^{-1}$
10^{-1}	$4,51\cdot10^{-5}$	$9,10\cdot10^{-3}$		
10^{-2}	$4,51\cdot10^{-5}$	—	$4,508\cdot10^{-7}$	$8,96\cdot10^{-5}$
10^{-3}	$4,51\cdot10^{-5}$	—	$4,508\cdot10^{-7}$	$8,97\cdot10^{-5}$
10^{-4}	$4,51\cdot10^{-5}$	—	$4,508\cdot10^{-7}$	$1,06\cdot10^{-4}$
10^{-5}	—	—	$4,508\cdot10^{-7}$	—
10^{-6}	—	—	$4,509\cdot10^{-7}$	—
10^{-7}	—	—	—	—

ных частей двух различных корней уравнения (14), т. е. в отличие от задачи а) одна и та же волна, характеризуемая длиной λ, может затухать по-разному в зависимости от начальных условий — либо с декрементом b_1, либо с b_2.

Длина волны ограничена снизу и сверху: $\lambda_1 \leqslant \lambda < \lambda_0$. Нижний предел — следствие того, что волны длинные ($\lambda \gg H$), верхний — что ζ — решение телеграфного уравнения $\left(k=\frac{2\pi}{\lambda}>\frac{b}{\sqrt{x}}\right)$. Для двухслойной жидкости со свободной поверхностью верхний предел может быть найден только численно (см. табл. 3). Для реальных жидкостей λ_0 составляет несколько десятков км (идеальные жидкости верхнего предела не имеют).

Решение задачи с условиями частичного скольжения является наиболее общим, так как при $\tau = \tau_1 = 0$ имеем случай полного прилипания, а при $\tau \to \infty$, $\tau_1 \to \infty$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ получаем решение, соответствующее идеальным жидкостям. Расчеты на ЭВМ показали, что

$$\tau,\ \tau_1 < 10^{-6} - 10^{-4} \Leftrightarrow \tau,\ \tau_1 = 0,$$

$$\tau,\ \tau_1 > 10^{4} - 10^{6} \Leftrightarrow \tau,\ \tau_1 = \infty.$$

Решениями задачи б) могут быть как поверхностные, так и внутренние волны. Действительно, уравнение (14) имеет два комплексно-сопряженных корня: $-b_1 \pm i\sigma_1$, $-b_2 \pm i\sigma_2$; пусть, например, $0 < \delta_1 < 1$, $\delta_2 > 1$ (см. (15)). Тогда первая волна, характеризуемая параметрами b_1, σ_1, будет поверхностной: поверхности ζ_1, ζ_2 колеблются в одной фазе, причем амплитуда колебания поверхности раздела меньше амплитуды колебания свободной поверхности $a\delta_1 < a$. Волна с параметрами b_2, σ_2 — внутренняя: ζ_1, ζ_2 колеблются в противофазе и $a\delta_2 > a$.

Список литературы

1. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны. Киев, 1970.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, 1976.
3. Слезкин Н. А. Динамика низкой несжимаемой жидкости. М., 1955.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л., 1947.

Поступила в редакцию 23.11.89.

УДК 519.6

В. А. ДРАГУН, Н. П. ФЕДЕНКО

О МЕТОДЕ ЧЕБЫШЕВА

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : D \subset X \to Y$, X и Y — банаховы пространства. Для решения уравнения (1) применим метод Чебышева, по которому для заданного начального приближения x_0 последующие приближения определяются по формуле

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1}\left[F(x_k) + \frac{1}{2}F''(x_k)(-(F'(x_k))^{-1}F(x_k))^2\right], \tag{2}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Среди работ по исследованию метода Чебышева в случае функциональных пространств отметим работы [1—4]. В данной статье приведены достаточные условия сходимости метода Чебышева и оценка погрешности, а с помощью параметризации задачи (1) ослаблены условия на выбор начального приближения x_0.

В дальнейшем x_{k+1} будем определять по формулам

$$x_{k+1} = \tilde{x}_k - \frac{1}{2}\Gamma_k F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2, \tag{3}$$

где

$$\tilde{x}_k = x_k - \Gamma_k F(x_k), \quad \Gamma_k = [F'(x_k)]^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть оператор F определен в шаре $S = \{x : \|x - x_0\| \leqslant 2\delta\}$ банахова пространства X, действует в банахово пространство Y и удовлетворяет условиям:

1) существует решение x^* уравнения (1) такое, что $\|x^* - x_0\| \leqslant \delta$;
2) для любого $x \in S$ существует $\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}$ и $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$;
3) $\|F''(x_0)\| \leqslant M$;
4) $\|F''(x) - F''(y)\| \leqslant K\|x - y\|$ для любых x и $y \in S$;
5) $h = \delta a < 1$, где $a = \sqrt{\frac{1}{2}BK + \frac{1}{8}B^3M_1^3\delta + \frac{1}{2}B^2M_1^2}$, $M_1 = 2K\delta + M$.

Тогда последовательность $\{x_k\}$, образованная по (3), (4), начиная с x_0, содержится в S, сходится к x^* и имеет место оценка

$$\|x_k - x^*\| \leqslant \delta h^{3^k - 1}. \tag{5}$$

Доказательство. Применим метод индукции. Предположим, что $x_k \in S$, $k > 1$, и покажем, что $x_{k+1} \in S$. То, что $x_1 \in S$, доказывается

аналогично. Сначала оценим $\|F''(x)\|$ для $\forall x \in S$: $\|F''(x)\| = \|F''(x) - F''(x_0) + F''(x_0)\| \leqslant 2K\delta + M = M_1$. Далее, используя (4), имеем

$$\|\tilde{x}_k - x^*\| \leqslant \frac{1}{2} BM_1 \|x^* - x_k\|^2 < \delta. \tag{6}$$

Наконец, оценим $\|x_{k+1} - x^*\|$:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \left\| x_k - x^* - \Gamma_k F(x_k) - \frac{1}{2} \Gamma_k F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Gamma_k\| \cdot \left\| F(x^*) - F(x_k) - F'(x_k)(x^* - x_k) - \frac{1}{2} F''(x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} B (K\|x_k - x^*\|^3 + M_1 \|\tilde{x}_k - x^*\|^2 + 2M_1 \|x^* - x_k\| \cdot \|\tilde{x}_k - x^*\|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} BK + \frac{1}{8} B^3 M_1^3 \delta + \frac{1}{2} B^2 M_1^2 \right) \|x_k - x^*\|^3 \leqslant a^2 \|x_k - x^*\|^3.$$

Следовательно, по условию 5) теоремы имеем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant a^2 \|x_k - x^*\|^3 < \delta, \tag{7}$$

или

$$\|x_{k+1} - x_0\| < 2\delta.$$

Из неравенства (7) получим оценку

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leqslant \frac{1}{a} (a\|x_k - x^*\|)^3 \leqslant \delta h^{3^{k+1}-1},$$

из которой вытекает сходимость $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$ и единственность решения x^*, удовлетворяющего условию $\|x^* - x_0\| \leqslant \delta$. Очевидно, что условие 5) теоремы 1 можно обеспечить за счет достаточно хорошего начального приближения x_0, т. е. за счет малости δ. Поэтому имеют значения способы, позволяющие ослабить условия на выбор начального приближения x_0. К таким методам относится метод параметризации задачи (1), или метод продолжения.

Рассмотрим семейство уравнений $H(x, t) = 0$, где

$$H(x, t) = F(x) + (t - 1) F(x^0), \quad t \in [0, 1]. \tag{8}$$

Воспользуемся следующей леммой [5].

Лемма. Пусть отображение $F: X \to Y$ (X, Y — банаховы пространства) непрерывно дифференцируемо в X и $\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant B$ для $\forall x \in X$. Тогда для $\forall x^0 \in X$ существует единственное непрерывно-дифференцируемое отображение $x(t)$: $[0, 1] \to X$ такое, что для (8) выполняется условие

$$H(x(t), t) = 0 \text{ для любого } t \in [0, 1]. \tag{9}$$

Очевидно, что $x(1)$ является решением уравнения (1).

Возьмем равномерное разбиение $t_i = i/N$ отрезка $[0, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Комбинированный алгоритм метода Чебышева с методом параметризации имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}_k^i = x_k^i - \Gamma_k^i [F(x_k^i) + (t_i - 1) F(x^0)], \\ &x_{k+1}^i = \tilde{x}_k^i - \frac{1}{2} \Gamma_k^i F''(x_k^i)(\tilde{x}_k^i - x_k^i)^2, \\ &x_0^1 = x^0, \ x_0^{i+1} = x_{m_i}^i, \ k = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \ i = \overline{1, N-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}_k^N = x_k^N - \Gamma_k^N F(x_k^N), \\ &x_{k+1}^N = \tilde{x}_k^N - \frac{1}{2} \Gamma_k^N F''(x_k^N)(\tilde{x}_k^N - x_k^N)^2, \\ &x_0^N = x_{m_{N-1}}^{N-1}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\Gamma_k^i = [F'(x_k^i)]^{-1}$.

Теорема 2. Пусть оператор $F: X \to Y$, $X = Y = R^n$, трижды непрерывно дифференцируем и существует константа B, что $\|[F'(x)\|^{-1}\| \leqslant B$.

Тогда для $\forall x^0 \in X$ существует такое целое $N_0 \geqslant 1$, что при $\forall N \geqslant N_0$ комбинированный процесс (10)—(11) сходится к единственному решению x^* уравнения (1), причем $m_i = m = 1$, $i = \overline{1, N-1}$.

Доказательство. Так как выполняются условия леммы, то оператор F является гомеоморфизмом, существует единственное решение x^* уравнения (1), которое можно единственным образом связать с x^0 непрерывно-дифференцируемой кривой $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (9). Множество точек $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, образует в X компакт C. Выберем в X выпуклый компакт D такой, что $C \subset \operatorname{int} D$. Тогда

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant B, \quad \|F''(x)\| \leqslant M_1 < \infty,$$

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leqslant K\|x - y\|, \quad K < \infty \quad \text{для } \forall\, x, y \in D.$$

Образуем константу a, как в теореме 1, и выберем $\delta > 0$ таким, чтобы $h = a\delta \leqslant \frac{1}{2}$ и шар $S(x(t), \delta) \subset D$ для $\forall t \in [0, 1]$. Тогда для любого фиксированного $t \in [0, 1]$, если $x_0 \in S_t = S(x(t), \delta)$, то последовательность (3, 4) сходится к $x(t)$ и имеет место оценка

$$\| x_k - x(t) \| \leqslant \delta h^{3^k - 1}, \quad \| x_1 - x(t) \| \leqslant \frac{1}{4}\delta.$$

Покажем, что для $\forall N \geqslant N_0$, $N_0 \geqslant 2B\|F(x^0)\|\delta^{-1}$, $x_1^i \in S_{t_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots N-1$.

Действительно,

$$\| x_1^i - x(t_{i+1}) \| \leqslant \| x_1^i - x(t_i) \| + \| x(t_i) - x(t_{i+1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\delta + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\, dt \right\| = \frac{1}{4}\delta + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [F'(x(t))]^{-1} F(x^0)\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\delta + B \cdot \|F(x^0)\| \cdot \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{2}\delta < \delta.$$

Наконец, получим

$$x_0^N = x_1^{N-1}, \quad \| x_1^{N-1} - x(t_N) \| = \| x_1^{N-1} - x^* \| < \delta.$$

По теореме 1 последовательность $\{x_k^N\}$ сходится к x^* при $k \to \infty$.

Список литературы

1. Мираков В. Е. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 5. С. 977.
2. Ульм С. // Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук. 1959. Вып. 8. № 4. С. 296.
3. Нечепуренко М. И. // УМН. 1954. Вып. 2. Т. 9. С. 163.
4. Черныщенко В. М. Теоремы о сходимости итерационных процессов высоких порядков. Днепропетровск, 1981. С. 17.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975. С. 226.

Поступила в редакцию 11.01.90.

УДК 517.956.3

Л. Г. ТРЕТЬЯКОВА

К ЗАДАЧЕ ОБ ω-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу об ω-периодических решениях квазилинейного телеграфного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + cu = f(t, x, u), \tag{1}$$

удовлетворяющих дополнительным граничным условиям

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \tag{2}$$

где функция $f(t, x, u)$ является ω-периодической по переменной t.

Один из основных методов построения таких решений основан на обращении в том или ином пространстве определенных на $\Omega = \{(t, x)/0 \leqslant t \leqslant \omega,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ вещественных или комплексных функций линейного дифференциального оператора

$$L_c u = u_{tt} - u_{xx} + cu \tag{3}$$

и последующем переходе к нелинейному операторному уравнению

$$u = G_c F u \tag{4}$$

в этом пространстве; здесь G_c — обратный к оператору L_c оператор, а F — нелинейный оператор суперпозиции

$$Fu(t, x) = f(t, x, u(t, x)). \tag{5}$$

П. П. Забрейко и Л. Г. Третьяковой была предложена новая схема исследования функции Грина дифференциального оператора L_c, позволяющая установить, что обратный оператор G_c существует и действует в пространстве $C(\Omega)$ в случае $c > 0$ и $\omega = 2l$. В настоящей работе предложенная схема распространяется на случай произвольного c и $\omega(2l)^{-1} \in \mathrm{N}$. Кроме того, показывается, что если оператор G_c существует, то его можно представить в виде композиции двух операторов, действующих в пространстве $C(\Omega)$. Далее получаем оценку для нормы оператора G_c в этом пространстве, что позволяет к уравнению (4) применить специальный вариант [1, 2, 3] принципа мажорируемых отображений Л. В. Канторовича.

Описанная схема позволяет получить условия существования и единственности ω-периодических решений задачи (1)—(2) не только при достаточно малых c (как это сделано в [4]), но и при сколь угодно больших c, для которых существует оператор G_c.

1. Пусть H — гильбертово пространство комплекснозначных интегрируемых с квадратом на $[0, l]$ функций $H = L_2(0, l)$ и A — линейный в H оператор, область определения которого состоит из абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций u, удовлетворяющих, кроме того, условиям $u'' \in H$ и $u(0) = u(l) = 0$, и который в области определения задается равенством

$$Au = -u_{xx} + cu. \tag{6}$$

Рассмотрим в H линейное дифференциальное уравнение

$$u'' + Au = f(t), \tag{7}$$

где $f(t)$ заданная ω-периодическая функция со значениями в H. Как известно, (см., напр., [5]) произвольное обобщенное решение этого уравнения может быть записано в виде

$$u(t) = \cos Bt u_0 + B^{-1} \sin Bt u_1 + \int_0^t B^{-1} \sin B(t - \tau) f(\tau)\, d\tau; \tag{8}$$

здесь $u_0 = u(0)$, $u_1 = u'(0)$, оператор B определен равенством $Bu = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\,(u, e_n)\, e_n$, где

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + c, \tag{9}$$

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}; \tag{10}$$

значение корня $\sqrt{\lambda_n}$ выбирается положительным, если $\lambda_n > 0$ и $i\sqrt{-\lambda_n}$, если $\lambda_n < 0$; операторы $\cos Bt$ и $\sin Bt$ определены равенствами

$$\cos Bt u = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t\, (u, e_n)\, e_n,$$

$$\sin Btu = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\,(u,\ e_n)\, e_n.$$

В предположении, что функция $f(t)$ является ω-периодической, решение (8) уравнения (7) также будет ω-периодическим в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$u(0) = u(\omega),\ \ u'(0) = u'(\omega). \tag{11}$$

Расписывая подробно условия (11) и производя несложные преобразования, получим, что произвольное ω-периодическое решение $u(t)$ дифференциального уравнения (7) удовлетворяет тождеству

$$2B \sin B\frac{\omega}{2}\, u(t) = \int_0^{\omega} \cos B\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right) f(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Ниже нам удобно по стандартным схемам (см., напр., [6]) отождествлять функции $u(t,\ x)$ из $L_2(\Omega)$ с соответствующими им вектор-функциями от $t \in [0,\ \omega]$ со значениями в H. Тогда из проведенных рассуждений следует

Лемма 1. Линейный дифференциальный оператор L_c, определенный равенством (3), непрерывно обратим в пространстве $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда в H непрерывно обратим оператор $2B \sin B\frac{\omega}{2}$; при этом справедливо равенство

$$u(t) = \left(2B \sin B\frac{\omega}{2}\right)^{-1} \int_0^{\omega} \cos B\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right) f(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Отметим, что в этих равенствах действующий в H оператор $\left(2B \sin B\frac{\omega}{2}\right)^{-1}$ применяется к элементам из $L_2(\Omega)$ по переменной x.

Утверждение леммы 1 означает, что если обратный оператор G_c существует, то его можно представить в виде композиции двух операторов T_c и W_c, которые оопределяются равенствами

$$T_c = \left(2B \sin B\frac{\omega}{2}\right)^{-1}, \tag{14}$$

$$W_c f(t,\ x) = \int_0^{\omega} \cos B\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right) f(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Будем изучать их свойства в пространстве $C(\Omega)$. Используя аналог классической формулы Даламбера для телеграфного уравнения (см., напр., [7]), получаем следующую лемму.

Лемма 2. При любом $c \neq 0$ оператор W_c представим в виде:

$$W_c f(t,\ x) = \int_0^{\omega} \frac{1}{2}\left(\tilde{f}\left(\tau,\ x + \frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right) + \tilde{f}\left(\tau,\ x - \frac{\omega}{2} + |t-\tau|\right)\right) d\tau -$$
$$- \int_0^{\omega} \left(\int_{x-\frac{\omega}{2}+|t-\tau|}^{x+\frac{\omega}{2}-|t-\tau|} \tilde{f}(\tau,\ y) \frac{c\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right) I_1\left(\sqrt{c\left(\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right)^2 - (y-x)^2\right)}\right)}{\sqrt{c\left(\left(\frac{\omega}{2} - |t-\tau|\right)^2 - (y-x)^2\right)}}\, dy \right) d\tau; \tag{16}$$

здесь $I_1(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\tilde{f}$ — нечетное, $2l$ — периодическое продолжение функции f по переменной x. Кроме того, оператор W_c определен и непрерывен в пространстве $C(\Omega)$ и его норма удовлетворяет неравенству

$$\|W_c\|_{C\to C} \leqslant \omega + \frac{\pi}{2}\sqrt{|c|}\,\omega^2 \max_{0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\omega} |I_1(\sqrt{c}\, z)|. \tag{17}$$

По определению значение оператора T_c на функции $f(t, x)$ определяется равенством

$$T_c f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}}{2 \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} + c} \sin \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} + c}}; \tag{18}$$

здесь

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, y) \sin \frac{\pi n y}{l} dy. \tag{19}$$

Для исследования свойств оператора T_c положим

$$\tilde{c} = \frac{c l^2}{\pi^2}, \tag{20}$$

$$\theta = \frac{\omega}{2l}, \tag{21}$$

$$\Pi(\theta) = \{n^2 - k^2 \theta^{-2} \mid n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{Z}\}, \tag{22}$$

$$\delta_n(\theta) = \frac{(-1)^{\theta n} l \left(1 - \frac{2\sqrt{n^2 + \tilde{c}}}{\theta \tilde{c} \pi} \cdot \sin \frac{\pi \tilde{c} \theta}{n + \sqrt{n^2 + \tilde{c}}}\right)}{2\pi \sqrt{n^2 + \tilde{c}} \cdot \sin \frac{\pi \tilde{c} \theta}{n + \sqrt{n^2 + \tilde{c}}}}, \tag{23}$$

тогда справедлива

Лемма 3. Пусть $\theta \in \mathbf{N}$, $\tilde{c} \notin \overline{\Pi(\theta)}$. Тогда оператор T_c, определенный равенством (18), представим в виде

$$T_c f(t, x) = \frac{1}{\theta c l} f(t, x) + \int_0^l W_\theta(x, y) f(t, y) dy, \tag{24}$$

если θ — четное число, и

$$T_c f(t, x) = \frac{1}{2\theta c l} (\tilde{f}(t, x + l) + \tilde{f}(t, x - l)) + \int_0^l W_\theta(x, y) f(t, y) dy, \tag{25}$$

если θ — нечетное число; здесь $\tilde{f}$ — нечетное, $2l$ — периодическое продолжение функции f по переменной x и ядро $W_\Theta(x, y)$ является непрерывной функцией, которая при $\tilde{c} > -1$ определяется равенством

$$W_\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \delta_n(\theta) \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l}, \tag{26}$$

а при $\tilde{c} < -1$ задается формулой

$$W_\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{2(-1)^{\theta n + 1}}{\theta \tilde{c} \pi^2} + \frac{1}{\pi \sqrt{-n^2 - \tilde{c}} \operatorname{sh}(-\pi\theta \sqrt{-n^2 - \tilde{c}})} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n y}{l} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{l} \delta_n(\theta) \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l}, \tag{27}$$

где $N \geqslant 2$ такое натуральное число, что $-N^2 < \tilde{c} < -(-N + 1)^2$. Кроме того, оператор T_c определен и непрерывен в пространстве $C(\Omega)$ и его норма удовлетворяет неравенствам

$$\| T_c \|_{C \to C} \leqslant \frac{1}{\theta c l} + \frac{l}{2\pi\theta} \left(1 + \frac{|c| \theta^2 l^2}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{\pi^2 n^2 + c l^2}, \tag{28}$$

если $\tilde{c} > -1$, или

$$\| T_c \|_{C\to C} \leqslant \frac{2N-1}{\theta |c| l} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{-\pi^2 n^2}{l^2} - c \cdot \operatorname{sh} \pi\theta} \sqrt{-n^2 - \frac{cl^2}{\pi^2}}} +$$

$$+ \frac{l}{2\pi\theta}\left(1 + \frac{\theta^2 l^2 |c|}{3}\right) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\pi^2}{\pi^2 n^2 + cl^2}, \qquad (29)$$

если $\tilde{c} < -1$.

На основании вышеизложенного справедлива

Теорема 1. Пусть $\theta \in \mathbf{N}$, $\tilde{c} \notin \overline{\Pi(\theta)}$. Пусть, кроме того, уравнение

$$\| G_c \|_{C\to C} \| Fo \| + \int_0^r a(\rho)\, d\rho = r \qquad (30)$$

имеет на отрезке $[0, R]$ единственное решение r^*. Тогда уравнение (1) имеет единственное ω-периодическое обобщенное решение $u(t, x)$, удовлетворяющее граничным условиям (2) и лежащее в шаре $B[0, R]$ пространства $C(\Omega)$. Это ω-периодическое обобщенное решение, более того, лежит в шаре $B[0, r^*]$ пространства $C(\Omega)$ и является пределом в $C(\Omega)$ последовательных приближений

$$u_{n+1} = G_c F u_n \quad (u_0 = 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots);$$

здесь $a(r)$ взято из условия: существует такая монотонно возрастающая функция $a(r)$, что для всех $(t, x) \in \Omega$ и $|u_1|, |u_2| \leqslant r$ выполняется неравенство

$$|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)| \leqslant a(r) |u_1 - u_2|.$$

Автор выражает глубокую признательность профессору П. П. Забрейко за постановку и обсуждение задачи.

Список литературы

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1983.
2. Забрейко П. П., Злепко П. П. // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1983. С. 67.
3. Абдурахманов А. А., Забрейко П. П. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 22. № 12. С. 1061.
4. Жестков С. В. Итерационные методы решения периодических краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных. Минск, 1986. (АН БСРР. Ин-т физики. Препринт № 144).
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1968.
7. Вебстер А., Сёге Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.; Л., 1933. Ч. 1.

Поступила в редакцию 25.01.90.

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ, Н. А. БОБКОВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

В случае задачи Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u' = f(t, u),\ u = (u_1, \ldots, u_n)^T,\ f = (f_1, \ldots, f_n)^T,$$
$$u_i = u_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

при разработке вычислительных алгоритмов часто бывает оправданной предварительная аппроксимация на каждом шаге сетки исходной задачи последовательностью линейных задач. Величина шага сетки при этом

с необходимостью должна предопределяться условиями требуемого уровня адекватности исходной и аппроксимирующей задач. Для численного решения каждой из полученных линейных задач Коши, опираясь на известный прием «замораживания коэффициентов», можно использовать специализированные методы, ориентированные на системы вида

$$u' = Au + b \tag{2}$$

с постоянными матрицей A и вектором b. Основное внимание будет уделено последнему этапу такого процесса. В отличие, например, от [1] предлагаемые здесь численные методы не будут сопряжены с операцией умножения квадратных матриц, а в качестве наиболее трудоемкой предполагается сохранить лишь естественную для (2) процедуру умножения матрицы на вектор.

Опираясь на известный [2] прием пошагового выделения и точного обращения главной части дифференциального оператора (1), применительно к (2) можно записать интегральное соотношение

$$\hat{u} = u + \tau\rho(\mu u + a) + \int_t^{t+\tau} [Au(x) + b - \mu u(x) - a] \exp[\mu(t + \tau - x)]dx, \tag{3}$$

где $\rho = [\exp(\mu\tau) - 1]/(\mu\tau)$, $u = u(t)$, $\hat{u} = u(t + \tau)$, $\tau > 0$,
а правила выбора значений скалярного μ и векторного a параметров будут определены позже. Заменив в (3) интеграл простейшей квадратурной суммой с экспоненциальным весом и вводя корректирующий множитель $1/(1 + \alpha\tau)$ с числовым параметром $\alpha \geqslant 0$, приходим к приближенному равенству $\hat{u} \approx u + \tau\rho[(\mu u + a) + (Au + b - \mu u - a)/(1 + \alpha\tau)]$, лежащему в основе предлагаемых методов вида

$$\hat{y} = Sy + g = y + Qy + g, \tag{4}$$

где $y \approx u$, $\hat{y} \approx \hat{u}$, $Q = S - E = \tau\rho[\mu E - (A + \mu E)/1 + \alpha\tau)]$, $g = \tau\rho[a + (b - a)/(1 + \alpha\tau)]$.

Подчиним выбор α требованию спектральной согласованности матриц S и A. Одно из условий такой согласованности может быть получено, например, из следующих соображений. Если метод вида (4) применить к системе (2), скажем, в случае нормальной матрицы A, то один шаг вычислений при $y = -A^{-1}b + \sum_{i=1}^{n} c_i \xi^i \exp(\lambda_i t)$ приводит к равенству

$$\hat{y} = g - SA^{-1}b + \sum_{i=1}^{n} c_i \xi^i s_i \exp(\lambda_i t), \tag{5}$$

где $A\xi^i = \lambda_i \xi^i$, $S\xi^i = s_i \xi^i$, $s_i = \exp(\mu\tau) + \tau\rho(\lambda_i - \mu)/(1 + \alpha\tau)$.

Обычно для явного типа методов применительно к (2) обременительные ограничения на шаг τ, связанные с обеспечением согласованности в качественном поведении решений дифференциальной и соответствующей разностной задач, возникают в случае $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Рассмотрим здесь для простоты лишь случай вещественного спектра. Тогда к множителям s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в (5) можно предъявить требования

$$0 < s_i < 1, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Непосредственно проверяется, что при $\mu < 0$ условия (6) могут быть обеспечены для любого $\tau > 0$, если выбор параметра α подчинить ограничениям

$$\alpha > \rho(\|A\| + \mu)\exp(-\mu\tau) - 1/\tau, \ \alpha \geqslant 0. \tag{7}$$

В общем случае $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ вместо (6) естественно выдвинуть требования $|s_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые также могут быть выполнены при любом $\tau > 0$ за счет выбора α, подобно (7).

Заметим, что в (5) вектор $g - SA^{-1}b$ отличается от истинного положения равновесия системы (2) слагаемым

$$\tau^2\rho\alpha(a - \mu A^{-1}b)/(1 + \alpha\tau),$$

которое зануляется при $\alpha = 0$ для любых μ и a, а при $\alpha > 0$ — лишь в случае $Aa = \mu b$. Для однородной системы ($b = 0$) выполнение последнего условия может быть обеспечено без обращения матрицы A выбором $a = 0$ (при любом μ). Вычисляя в этом случае, как и в [3], значения μ через отношение Релея на приближенном решении, мы не только обеспечим свойство точности метода на гармониках системы, но и гарантируем для случая симметричной матрицы A монотонное поведение этого отношения вдоль разностных траекторий, приближающих, согласно данному методу, отличные от гармоник нетривиальные решения. Последнее легко проверить непосредственно, если учесть, что выбор α в соответствии с (7) обеспечивает выполнение естественного условия $s_j < s_k$ для $\lambda_j < \lambda_k$. Отметим также, что монотонный характер поведения отношения Релея в случае $A = A^T$, в отличие от [3], обеспечивается здесь как следствие выбора α на основании требований (6), не предполагающих симметричность матрицы A.

Так как в случае неоднородной системы (2) производная $u'(t)$ является решением соответствующей (2) однородной системы, а для однородного случая выбор параметров, обеспечивающий выдвинутый набор требований согласованности, выше был обсужден, то тем самым принципиально описан вычислительный алгоритм для приближенного нахождения значений $u'(t)$, которые могут быть использованы при конструировании соответствующих численных методов для случая исходной неоднородной системы.

Так как $s_i \to 0$ при $\tau \to \infty$ для $\alpha > 0$, то при выборе способа задания a ориентироваться на выполнение условия $Aa = \mu b$ естественно лишь в тех случаях, когда построенный метод будет точным (скажем, на решениях типа $u(t) = u^i(t) = -A^{-1}b + c_i\xi^i \exp(\lambda_i t)$). Поскольку для решений такого вида справедливо соотношение $u(t) - u'(t)/\lambda_i = -A^{-1}b$, то выбор в качестве a вместо $\mu A^{-1}b$ величины типа $u' - \mu u$ становится естественным, по крайней мере, для систем, моделирующих процессы с регулярным режимом [4]. Тем самым один из вариантов методов рассматриваемого класса может, скажем, базироваться на формулах

$$\hat{y} = y + \tau\rho\,[v + (Ay + b - v)/(1 + \alpha\tau)],\ \rho = [\exp(\mu\tau) - 1]/(\mu\tau),$$

$$\hat{v} = v + \tau\rho\,[\mu + (A - \mu E)/(1 + \alpha\tau)]\,v,\ v^0 = Ay^0 + b,$$

$$\mu = (Av,\ v)/(v,\ v),\ \alpha > \rho\,(\|A\| + \mu)\exp(-\mu\tau) - \frac{1}{\tau}\ (\alpha \geqslant 0).$$

Возможен, конечно, и иной выбор параметров в (4). Отталкиваясь, например, от идеи минимизации евклидовой нормы разности $Aa - \mu b$, для задания μ в только что выписанных формулах можно предложить вариант $\mu = (Av, Av)/(Av, v)$. Свойство точности метода на решениях вида $u^i(t)$ при этом сохраняется.

Список литературы

1. Бобков В. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 72.
2. Бобков В. В. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 7. С. 1115.
3. Бобков В. В. Там же. 1985. Т. 21. № 7. С. 1117.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.

Поступила в редакцию 27.10.89.

УДК 516.72

С. В. ВЕДЕРНИКОВ

ИНВАРИАНТНЫЕ ЧАСТИ ОБЛАСТИ СИММЕТРИИ

В [1] введено понятие области симметрии, которая обозначена через $S(\Phi)$, Φ — инволютивный автоморфизм группы Ли G.

В настоящей статье исследуется частный случай, когда $\Phi = J(a)$ — внутренний инволютивный автоморфизм, причем в $S(\Phi)$ выделяется инвариантная часть Q_0.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении линейчатой геометрии в биаксиальных пространствах.

Рассмотрим группу $G = GL(n, R)$, для которой определен внутренний инволютивный автоморфизм $\Phi = J(a)$. Соответственно определится G-пространство $G(\Phi)$ и его инвариантная часть

$$S(\Phi) = \{x \in G \mid x\Phi(x) = xaxa^{-1} = e\}.$$

Так как $J(a)$ — инволютивный автоморфизм, то $a^2 \in C$, где C — центр группы $GL(n, R)$, состоящий из скалярных матриц $\pm\sigma^2 E$, так как $J(a) = J(\sigma a)$, то

$$S(\Phi) = \{y = xa \mid y^2 = \pm E,\ a \in G\}.$$

Это G-пространство, очевидно, изоморфно G-пространству $S(\mathrm{Id}) = \{y \mid y^2 = \pm E\}$, в котором структура G-пространства определяется отображением $\alpha : (a, y) \to T_a(y) = aya^{-1}$.

В данном G-пространстве имеется инвариант

$$\mathrm{tr} : S(\mathrm{Id}) \times S(\mathrm{Id}) \to R : (y_1, y_2) \to \mathrm{tr}(y_1, y_2).$$

Рассмотрим орбиты в $S(\mathrm{Id})$, которые выделяются условием

$$\mathrm{tr}(y) = 0,$$

что возможно только в случае четного $n = 2m$. Этому условию удовлетворяют только две орбиты

$$M = \{y \mid y^2 = -E\} = \left\{ y = aIa^{-1} \mid J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},\ a \in G \right\},$$

$$N = \left\{ z = a\varepsilon_0 a^{-1} \mid \varepsilon_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},\ a \in G \right\},\ z^2 = E.$$

Однородное пространство M является пространством комплексных структур. Элементами однородного пространства N являются инволютивные операторы с нулевым следом, имеющие собственные подпространства размерности m. Подпространство, которое состоит из собственных векторов, соответствующих собственному значению $+1(-1)$, обозначим через $V^+(V^-)$. Оператор z полностью определяется заданием пары подпространств (V^+, V^-) одинаковой размерности.

Определим инвариантную часть Q в G-пространстве $Q_0 \times Q_0$ следующими инвариантными условиями:

$$Q = \{(y, z) \in Q_0 \times Q_0 \mid y^2 = -E,\ z^2 = E,\ yz + zy = 0\}.$$

Теорема 1. Q является однородным пространством-орбитой $Q_0 \times Q_0$ с начальным элементом (J, ε_0), где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как $z \in Q_0$, то $\mathrm{tr}\, z = 0$, и тогда это условие вместе с условием $z^2 = E$ влечет

$$z = a \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} a^{-1} = a\varepsilon_0 a^{-1},\ a \in G.$$

Положив $y = ay_1a^{-1}$, из условий $y^2 = -E$, $yz = zy$ получим:

$$y_1\varepsilon_0 + \varepsilon_0 y_1 = 0, \quad y_1^2 = -E,$$

откуда $y_1 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $B \in GL(m, R)$.

Положив $b = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$, будем иметь:

$$y_1 = b \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} b^{-1} = bJb^{-1} \Rightarrow y = abJ(ab)^{-1},$$

а также $z = ab\varepsilon_0(ab)^{-1}$, где $b\varepsilon_0 b^{-1} = \varepsilon_0$.
Отсюда следует, что (y, z) принадлежит одной орбите с начальным элементом $(J, \varepsilon_0) \in Q_0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается и

Теорема 2. G-пространство

$$Q' = \{(z, u) \in Q_0 \times Q_0 \mid z^2 = E,\ u^2 = E,\ zu + uz = 0\}$$

является орбитой в $Q_0 \times Q_0$ с начальным элементом $(\varepsilon_0, \varepsilon)$, где $\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_m \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$.
Для однородного пространства

$$Q = \{(y, z) \mid y = aJa^{-1},\ z = a\varepsilon_0 a^{-1},\ a \in GL(n, R)\}$$

определится полиномиальный морфизм (см. [2])

$$P : Q \to G(Jd) : (y, z) \to P(y, z).$$

В силу условий $y^2 = -E$, $z^2 = E$, $yz = -zy$ полиномиальный морфизм имеет вид: $P(y, z) = \alpha u + \beta y + \gamma z + \delta E$, где введено обозначение

$$u = -yz = zy = a\varepsilon a^{-1}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко подсчитать, что $-uy = yu = -z$, $-uz = zu = y$.

Отметим также равенства

$$\operatorname{tr}(zy) = \operatorname{tr}(u) = 0, \quad \operatorname{tr}(yu) = \operatorname{tr}(zu) = 0.$$

Если потребовать $P(y, z) \in Q_0$, то получим $\alpha = 0$.

Кроме того, введем естественное требование перестановочности автоморфизмов, определенных элементами y, z и $P(y, z)$, что эквивалентно условиям:

$$(\alpha u + \beta y + \gamma z)y = \sigma y(\alpha u + \beta y + \gamma z),$$
$$(\alpha u + \beta y + \gamma z)z = \sigma_1 z(\alpha u + \beta y + \gamma z).$$

Из первого равенства в силу линейной независимости элементов yz, $u = zy = -yz$ получим

$$\alpha(1 + \sigma) = 0, \quad \beta(1 - \sigma) = 0, \quad \gamma(1 + \sigma) = 0,$$

откуда $\beta = 0$ или $\alpha = \gamma = 0$. Аналогично, из второго равенства имеем: $\gamma = 0$ или $\alpha = \beta = 0$. Далее следует, что

$$P(x, y) = \alpha u,\ P(x, y) = \beta y,\ P(x, y) = \gamma z.$$

Можно считать, что существенно новым будет только морфизм

$$P : Q \to Q_0 : (y, z) \to u = zy.$$

Образом отображения P будет однородное пространство

$$M_0 = \{u = a\varepsilon a^{-1} \mid a \in G\}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

которое в силу $u^2 = zy \cdot zy = -zy^2z = E_{2n}$ совпадает с N.

Отметим, что в частном случае $m=2$ $(n=4)$ однородное пространство N можно рассматривать как однородное пространство пар двумерных подпространств четырехмерного векторного пространства, которые также можно интерпретировать как пространство пар прямых (общего положения) в трехмерном проективном пространстве.

Если определить G-пространство

$$\bar{Q}=\{(y, z, u)\,|\,y=aJa^{-1},\ z=a\varepsilon_0 a^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\},$$

то из равенств $u=yz$, $y=uz$, $z=uy$ получим три изоморфных пространства:

$$Q_0=\{(y, z)\,|\,y=aJa^{-1},\ z=a\varepsilon_0 a^{-1}\},$$
$$Q_1=\{(y, u)\,|\,y=aJa^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\},$$
$$Q_2=\{(z, u)\,|\,z=a\varepsilon_0 a^{-1},\ u=a\varepsilon a^{-1}\}.$$

Соответствующие отображения изоморфизма имеют вид:

$$Q_0\to\bar{Q}:(y, z)\to(y, z, yz),$$
$$Q_1\to\bar{Q}:(y, u)\to(y, uy, u),$$
$$Q_2\to\bar{Q}:(z, u)\to(uz, z, u).$$

В частности, в случае $n=4$ при интерпретации элементов z и u парами прямых проективного трехмерного пространства получим, что задание двух пар y, z влечет за собой задание комплексной структуры.

Отметим, что две пары прямых, определенных инволюциями y и z, отличаются тем, что соответствующие пары не имеют общих точек, и задание пары (при условии, что пара y задана) сводится к заданию одной из прямых пары. В самом деле, из условия $zu+uz=0$ следует, что собственные векторы $\bar{x}$ инволюции u, удовлетворяющие условию $u\bar{x}=\pm\bar{x}$, удовлетворяют также условию $u(z\bar{x})=-zu\bar{x}=-z\bar{x}$. Следовательно,

$$z[V^+]=V^-,\ z[V^-]=V^+,$$

где через V^+ (V^-) обозначено линейное подпространство, состоящее из собственных векторов оператора u, соответствующих собственному значению $+1$ (-1).

Таким образом, пара подпространств (V^+, V^-) имеет вид: $(V^+, z[V^+])$, и в случае задания пары (z, u) достаточно задать одно из подпространств, например, V^+. Аналогичное утверждение имеет место и в случае задания пары (y, u) (что эквивалентно заданию тройки (y, z, u)), т. е. $(V^+, V^-)=(V^+, y(V^+))$.

Это верно в случае $n=4$, т. е. для задания пары прямых, определенных u, достаточно определить одну из прямых (считая, что задан элемент $(z, u)\in Q_2$).

Список литературы

1. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии. 1983. Т. 15. С. 165.
2. Ведерников С. В. Там же. 1975. Т. 7. С. 49.

Поступила в редакцию 07.02.90.

УДК 517.9

О. А. МОРОЗ

К ВОПРОСУ О НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Проблема неасимптотической устойчивости положений равновесия является одной из сложных задач качественной теории динамических систем. Это отчетливо проявляется в таких вопросах, как теория критических случаев [1], [2], устойчивость множества неизолированных положений равновесия [3]. Этой же проблеме посвящены работы [4] и [5].

Продолжая исследование устойчивости по Ляпунову неизолированных состояний равновесия, рассмотрим существенно нелинейные системы

дифференциальных уравнений в ситуации, когда множество точек покоя системы образует поверхность, размерность которой на единицу меньше размерности фазового пространства.

Пусть R^k означает вещественное евклидово пространство размерности k, R — вещественная прямая. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать одну из норм пространства R^k. Вектор $x \in R^k$ означает вектор-столбец, x' — вектор-строка, т. е. «$'$» — операция транспонирования. Далее, пусть $\varkappa : R \to R$ непрерывная функция такая, что $\varkappa(0) = 0$ и $\varkappa(r) \neq 0$, если $r \neq 0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [5], [6]

$$\dot{x} = \varkappa(\varphi(x)) \cdot Ax, \quad x \in R^{2n}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая голоморфная функция переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, разлагающаяся в ряды по степеням x в некоторой окрестности $\|x\| \leqslant \rho$, $\rho > 0$; A — $(2n \times 2n)$ постоянная матрица. Предполагаем, что каждое решение $x(p, t)$ системы (1) с начальным условием $\|p\| < \sigma$ определено при всех значениях $t \in R$.

Наряду с системой (1) рассмотрим следующую

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in R^{2n}, \tag{2}$$

с той же матрицей A.

Пусть вещественная матрица A имеет лишь комплексные собственные значения, которые обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$.

Так как решение линейной системы (2) с начальным условием $y(p, 0) = p$ имеет вид $y(p, t) = e^{At} \cdot p$, запишем функцию $\xi(t) = c'y(p, t)$ следующим образом:

$$\xi(t) = c'e^{At}p = c'e^{At}\frac{p}{\|p\|} \cdot \|p\| = c'e^{At}d \cdot \|p\|, \quad \|d\| = 1,$$

где c — постоянный вектор из R^{2n}.

В [5] доказано следующее утверждение.

Лемма. Если $c \neq 0$ и выполняется условие

$$\operatorname{Im} \mu_j \neq 0, \quad \forall_j = \overline{1, 2n}, \tag{3}$$

то найдутся такие положительные числа $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, что для любого начального состояния d, $\|d\| = 1$, функция $\psi(t) = c'e^{At} \cdot d$ в некоторых точках как отрезка $[0, T]$, так и отрезка $[-T, 0]$ принимает значения больше ε и меньше $-\varepsilon$.

Будем считать, что функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = c'x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x), \tag{4}$$

где $P_k(x) = \sum\limits_{i_1 + \ldots + i_s = k} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_s^{i_s}$ — однородные полиномы степени k с вещественными коэффициентами $\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$, и ряд в правой части (4) абсолютно сходится в шаре $\|x\| \leqslant \rho$, $\rho > 0$.

Обозначим через a_k сумму модулей чисел $\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$, т. е.

$$a_k = \sum_{i_1 + \ldots + i_s = k} |\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_s}|, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi : R^{2n} \to R$ определяется соотношением (4), причем $c \neq 0$ и выполняется условие

$$R = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \sqrt[k]{a_k} < +\infty, \tag{6}$$

где a_k задаются формулой (5). Тогда, если собственные числа μ_j, $j = \overline{1, 2n}$ удовлетворяют условию (3), то существуют такие положительные числа $\sigma > 0$ и $T > 0$, что всякое решение $y(p, t)$ уравнения (2) при норме $\|p\| < \sigma$ попадает на поверхность

$$c'x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x) = 0 \tag{7}$$

как при $0 \leqslant t \leqslant T$, так и при $-T \leqslant t \leqslant 0$.

Доказательство теоремы проводится с учетом вышеуказанной леммы и известной оценки (см. [7]).

Сформулируем основной результат об устойчивости.

Теорема 2. Если $c \neq 0$, выполняются условия (3) и (6), то нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть требования теоремы выполняются. Тогда из теоремы 1 следует, что для любого начального состояния p с нормой $\|p\| < \sigma$ решение $y(p, t)$ системы (2) попадает на поверхность (7) при некотором значении $t \in [0, T]$, а также и при $t \in [-T, 0]$, где $T > 0$ не зависит от p.

Обозначим через $t_p^+ > 0$ и $t_p^- < 0$ моменты времени, в которые решение $y(p, t)$, $\varphi(p) \neq 0$, первый раз (считая от точки $t = 0$ соответственно вправо и влево) попадает на поверхность (7). Выберем число $\sigma_1 < \min(\sigma, \rho)$, $\sigma_1 > 0$. Учитывая неравенства (см. [7])

$$\|y(p, t)\| \leqslant h \cdot \exp(\bar{\alpha} \cdot T) \cdot \|p\|, \ \forall t \in [0, T]$$

и

$$\|y(p, t)\| \leqslant h_1 \cdot \exp(-\underline{\alpha} \cdot T) \cdot \|p\|, \ \forall t \in [-T, 0],$$

где $\bar{\alpha} = \max_j |\operatorname{Re} \mu_j|$, $\underline{\alpha} = \min_j |\operatorname{Re} \mu_j|$; h, h_1 — некоторые положительные постоянные, будем иметь:

$$\|y(p, t)\| \leqslant \beta \cdot \|p\| \text{ для } \|p\| < \sigma_1, \ \forall t \in [t_p^-, t_p^+],$$

где $\beta = \beta(T) > 0$ некоторое число.

Выделим на интервале $[t_p^-, t_p^+]$ два отрезка траекторий системы (2) $y^+(p, t) = \{y \in R^{2n} \mid y(p, t) = y, \ t \in (0, t_p^+)\}$ и $y^-(p, t) = \{y \in R^{2n} \mid y(p, t) = y, \ t \in (t_p^-, 0)\}$. Тогда, поскольку система (1) получена из системы (2) методом «замораживания» [5], отрезки траектории $y^+(p, t)$, $y^-(p, t)$ будут совпадать с одной из полутраекторий $x(p, R^+)$ или $x(p, R^-)$ системы (1) в зависимости от того, совпадают или противоположны направления движений (см. [5]) систем (1) и (2).

Отсюда следует, что для решения $x(p, t)$ системы (1) при $\|p\| < \sigma_1$ справедлива оценка

$$\|x(p, t)\| \leqslant \beta \|p\|, \ \forall t \geqslant 0.$$

Так как постоянная β не зависит от числа σ_1, то это означает, что нулевое решение уравнения (1) устойчиво на множестве начальных состояний и, следовательно, устойчиво по Ляпунову.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1956. Т. 2.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Матросов В. М. // Тр. Авиац. ин-та. Мат. и мех. 89. Казань, 1965. С. 20.
4. Абаньшин А. М. // Вестн. ЛГУ. 1968. № 7. С. 5.
5. Калитин Б. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 3. С. 39.
6. Мороз О. А. К устойчивости неизолированной точки покоя в критическом случае / Редкол. журн. «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск, 1988. С. 6. Деп. в ВИНИТИ 13.10.88. № 7401-В88.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. С. 57.

Поступила в редакцию 21.06.89.

Краткие сообщения

УДК 535.372 : 541.65

А. П. ЗАЖОГИН, А. И. СЕРАФИМОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЛИГАНДОВ НА ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА КОМПЛЕКСОВ УРАНИЛХЛОРИДА

Изучение влияния нейтральных заместителей на электронные свойства комплексов уранила необходимо для понимания большого класса химических реакций с участием этих соединений, протекающих через стадию образования промежуточных комплексов. Кроме того, хлоридные комплексы уранила имеют важное спектроскопическое свойство — линии люминесценции многих соединений уже при температуре жидкого азота очень узкие, порядка нескольких см$^{-1}$ [1], что позволяет выявить особенности их строения и характер взаимодействия уранила с лигандами.

В настоящей работе для изучения общих закономерностей изменения спектроскопических свойств уранилхлорида под влиянием нейтральных лигандов исследованы спектры люминесценции комплексов UO_2Cl_2nL с некоторыми нейтральными лигандами (вода, диметилформамид (ДМФА), диметилацетамид (ДМАА), диметилсульфоксид (ДМСО), гексаметилфосфортриамид (ГМФТА)). Спектры мелкокристаллических образцов UO_2Cl_2nL регистрировались на установке (см. [2]) при температуре жидкого азота; начальные участки их приведены на рис. 1. Основные частоты, характеризующие ион уранила, и интегральные интенсивности полос, определенные из спектров, представлены в таблице. Там же даны значения донорных чисел нейтральных лигандов. Из сравнения спектров исходного образца $UO_2Cl_2 3 H_2O$ и других образцов видно, что при замене молекул воды в первой координационной сфере иона уранила молекулами нейтральных лигандов, имеющих значения DN значительно большие, чем у воды, все спектры сдвигаются в более длинноволновую сторону. Полосы становятся очень узкими и их можно скорее назвать линиями, так как ширина равна примерно 5—10 см$^{-1}$. Наибольшей интенсивностью обладает вибронное полносимметричное колебание иона уранила. Из данных таблицы следует, что интенсивность полос,

Частоты и интенсивности полос в спектрах UO_2Cl_2 с нейтральными лигандами

Лиганд	ν_{00}, см$^{-1}$	I, отн. ед.	$\nu_{00}-\nu_1$ см$^{-1}$	I, отн. ед.	$\nu_{00}-\nu_3$, см$^{-1}$	I, отн. ед.	DN
3 H_2O	20540	48	19665	100	19587	61	18
3 ДМФА	20195	22	19345	100	19270	62	26,6
2 ДМСО	20248	50	19384	100	19312	15	29,8
3 ДМСО	20110	25	19260	100	19176	41	29,8
3 ГМФТА	19814	20	18982	100	18900	22	38,8

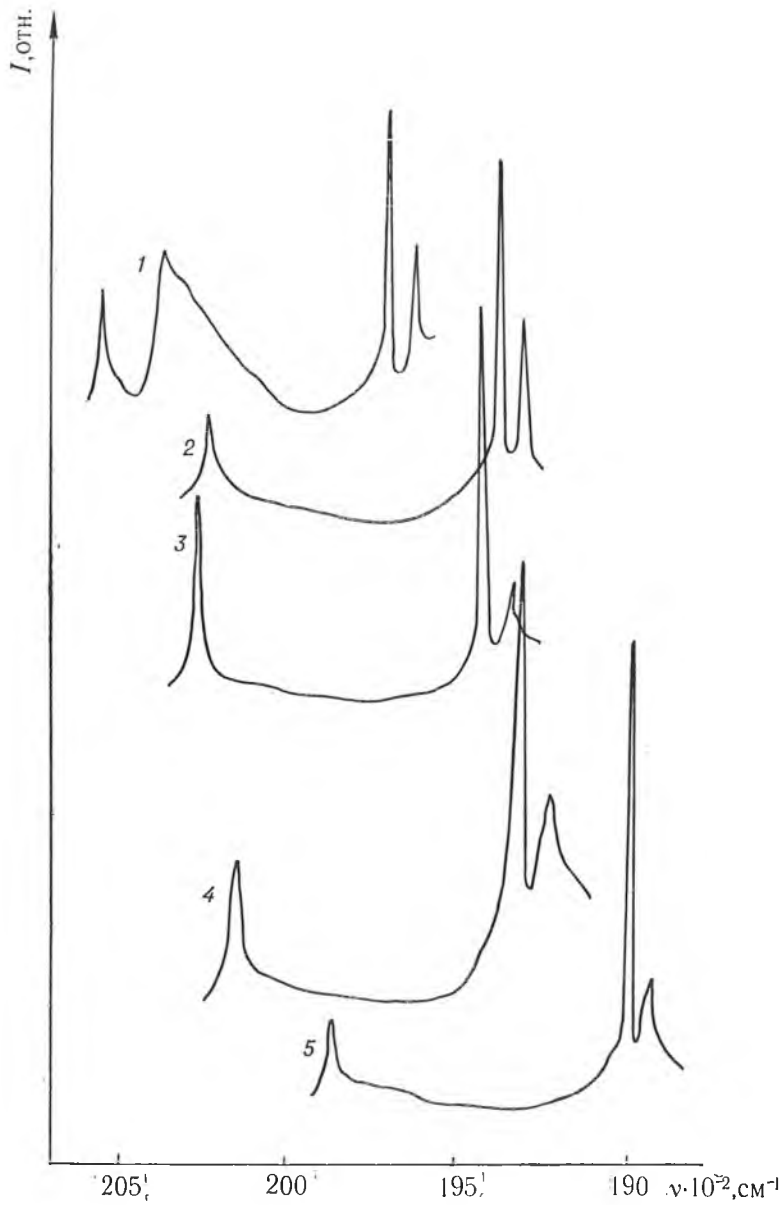


Рис. 1. Начальные участки спектров люминесценции комплексов с нейтральными лигандами:

1 — вода; *2* — ДМФА; *3* — ДМСО (соотношение UO_2^{2+} : ДМСО = 1 : 2); *4* — ДМСО (1 : 3); *5* — ГМФТА

принадлежащих этому типу колебаний, в несколько раз превышает не только интенсивность полос чисто электронного перехода, но и полос, принадлежащих вибронному антисимметричному колебанию ν_3. Деформационное колебание иона уранила проявляется очень слабо. Такое распределение интенсивностей в спектрах люминесценции в какой-то мере свидетельствует о высокой симметрии комплексов уранилхлорида с тремя нейтральными лигандами. Для образца UO_2Cl_2 с двумя молекулами ДМСО степень симметрии еще выше (см. рис. 1 и таблицу). Поскольку видно, что полоса ν_1 интенсивнее не только вибронной полосы ν_3, но также и полосы чисто электронного перехода.

Наиболее существенный сдвиг частоты чисто электронного перехода (~ на 725 см$^{-1}$) наблюдается для комплекса уранилхлорида с ГМФТА. Смещения частот хорошо коррелируют со значениями донорных чисел

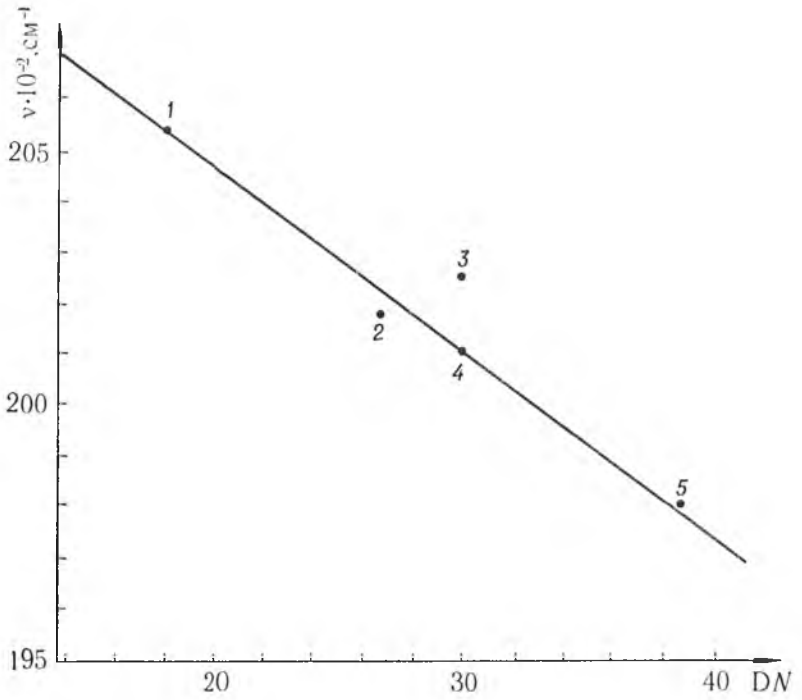


Рис. 2. График зависимости частоты чисто электронного перехода в комплексах $UO_2Cl_2 3L$ от величины донорного числа DN нейтрального лиганда L

нейтральных лигандов. Наблюдается практически линейная зависимость между частотой чисто электронного перехода ν_{00} и значением донорного числа нейтрального лиганда (см. рис. 2), что позволяет записать уравнение для определения частоты чисто электронного перехода в комплексе UO_2Cl_2 с тремя нейтральными лигандами в следующем виде:

$$\nu_{00}(DN) = \nu_{00}^0 - kDN = (21155 - 35{,}07\,DN)\ \text{см}^{-1},$$

где ν_{00}^0 — частота чисто электронного перехода в комплексе уранилхлорида с нейтральными лигандами при нулевом значении донорного числа. Определение параметров уравнения проведено методом наименьших квадратов.

В результате спектрально-люминесцентных исследований установлено, что практически для всех рассматриваемых комплексов наиболее устойчивыми являются комплексы с тремя молекулами растворителей, выступающими в качестве нейтральных лигандов, и только для ДМСО получены образцы с тремя и двумя лигандами. Положение ν_{00} в спектре комплекса с двумя молекулами ДМСО сдвинуто на 290 $см^{-1}$ по сравнению с исходным образцом, а с тремя молекулами — еще на 140 $см^{-1}$. Таким образом, парциальность вклада каждого лиганда в положение полосы ν_{00} соблюдается достаточно строго. Следует отметить также, что наблюдается очень существенное различие в эмиссионных свойствах комплексов $UO_2Cl_2 \cdot 2ДМСО$ и $UO_2Cl_2 \cdot 3ДМСО$. Комплекс $UO_2Cl_2 \cdot 2ДМСО$ хорошо люминесцирует при комнатной температуре, а $UO_2Cl_2 \cdot 3ДМСО$ — очень слабо.

Список литературы

1. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Минск, 1981. Т. 1.
2. Новицкий Г. Г., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Там же. Т. 2.

Поступила в редакцию 28.05.90.

УДК 538 : 082/083

А. Е. ПРЯХИН, И. Р. МИНЬКО

ИМПУЛЬСНЫЙ СПЕКТРОМЕТР-РЕЛАКСОМЕТР ЯМР

Известные импульсные ЯМР спектрометры-релаксометры [1—3] обладают высокой степенью автоматизации за счет применения встроенных микропроцессоров и математических методов обработки спектров, но сложны конструктивно и дороги. В данной работе описывается недорогой спектрометр, созданный на основе стандартной аппаратуры, элементов и материалов, позволяющий наблюдать протонный ЯМР при импульсном возбуждении — сигнал спада свободной индукции (ССИ) и спиновое эхо, измерять время спин-решеточной и спин-спиновой релаксации различными импульсными методами. Точность измерения времени релаксации без стабилизации постоянного магнитного поля и температуры датчика и образца ±5 %.

В спектрометре (рис. 1) применяются следующие приборы: электромагнит (магнитный зазор 30 мм, диаметр полюсных наконечников 100 мм, сопротивление катушек при последовательном включении 5 Ом), источник питания магнита ТЭС-18, осциллограф С1-76, приемно-передающее устройство (ППУ) с датчиком, цифровой программатор (ЦП). Для создания контролируемого градиента поля служат катушки, которые крепятся на полюсных наконечниках.

Основные технические данные цифрового программатора

T — задержка между сериями импульсов	10 мс — 9 с
τ_1 — задержка между первым и вторым импульсами в последовательности	1 мс — 0,9 с
τ_2 — задержка между вторым и третьим импульсами последовательности	1 мс — 0,9 с
Длительность первого импульса	60 — 200 мкс
Длительность второго импульса	40 — 225 мкс

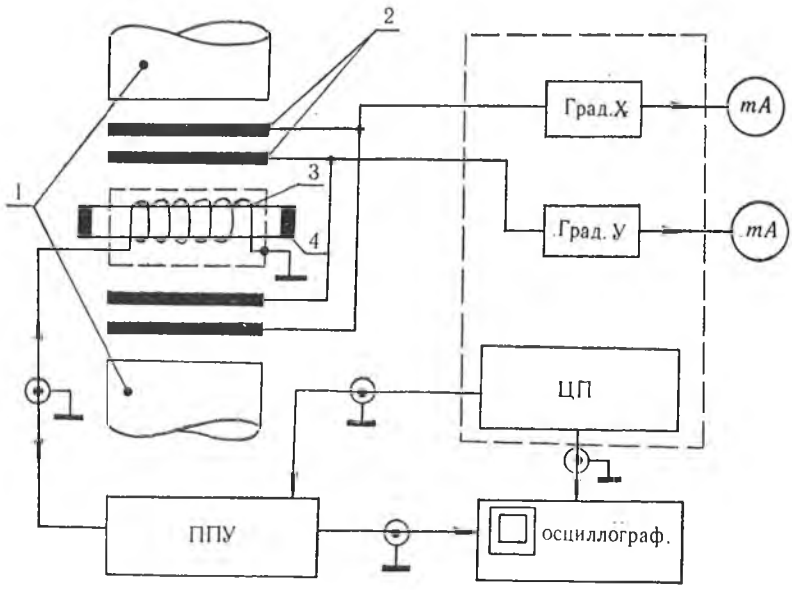


Рис. 1. Блок-схема спектрометра:
1 — полюсные наконечники электромагнита; 2 — градиентные катушки; 3 — катушка датчика; 4 — ампула с исследуемой жидкостью

Цифровой программатор вырабатывает периодические последовательности управляющих импульсов. В каждой из них может быть установлено 1, 2, 3, 4, 7, 19 или 67 импульсов. Имеется возможность регулировки длительности отдельных импульсов, задержки между ними и частоты повторения серии. ЦП позволяет реализовать различные импульсные методы, в том числе Хана, Карра-Парселла, прогрессивного насыщения, инверсии-восстановления (рис. 2).

Приемно-передающее устройство включает два функциональных блока: передатчик и приемник. Передатчик состоит из работающего в непрерывном режиме задающего кварцевого генератора на 12,9 МГц, выполненного на элементах *D*1.1 — *D*1.2 микросхемы К531ЛА4П (рис. 3). Сигнал с генератора подается на вход цифрового ключа *D*1.3. На второй его вход поступает сигнал управления от цифрового программатора. Таким образом, на выходе ключа формируются пачки высокочастотных колебаний, которые через последовательный контур *L*2, *C*19, *C*20, *C*21 подаются на усилитель мощности, собранный на транзисторах *VT*3, *VT*4, и на последовательный контур *L*3, *C*24, *C*25, *C*26. Последний, в свою очередь, нагружен на параллельный колебательный контур *L*4, *C*9, *C*10, в катушку индуктивности которого помещается ампула с исследуемой жидкостью. При правильном согласовании всех резонансных контуров напряжение на катушке датчика составляет около 30 В.

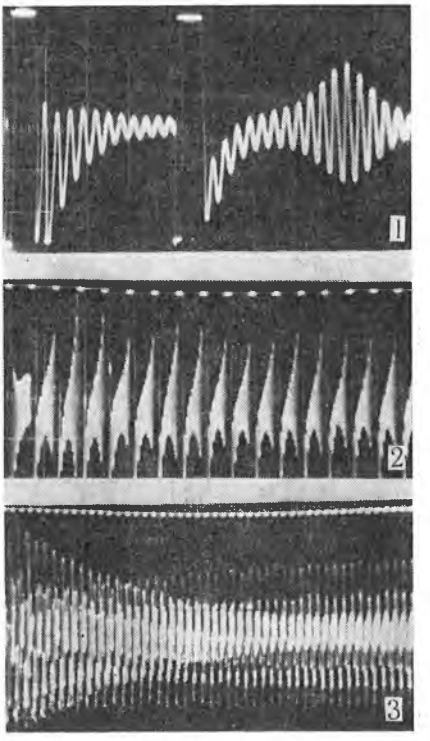


Рис. 2. Основные импульсные методы, реализуемые спектрометром.
Сверху вниз: двухимпульсный метод спинового эха Хана (образец — глицерин, длительность первого импульса 60 мкс, второго — 120 мкс, задержка между импульсами 4 мс, амплитуда сигнала спинового эха 15 В); метод прогрессивного насыщения (задержка между импульсами 3 мс); многоимпульсная последовательность Карра-Парселла (раствор $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ в воде; $\tau_1 = 2$ мс; $\tau_2 = 4$ мс; m — 67 импульсов)

Сигнал ЯМР, индуцированный в катушке датчика, подается на резонансный предусилитель с полосой пропускания 1 МГц и коэффициентом усиления 20 дБ, выполненный на полевом транзисторе *VT*1 [4]. При поступлении мощного высокочастотного импульса коэффициент усиления предусилителя минимален, так как встречно-параллельные диоды *VD*1 и *VD*2 шунтируют его вход, а диоды *VD*3 и *VD*4 — резонансный контур *L*1, *C*2, *C*3, включенный в цепь стока полевого транзистора *VT*1. В отсутствии импульса диоды закрыты и коэффициент усиления первого каскада максимален. После истокового повторителя происходит амплитудное детектирование и усиление сигналов ССИ и спинового эха.

Основные технические данные спектрометра

Диапазон измеряемых времен релаксации	20 мс — 2 с
Рабочая частота	12,9 МГц
Амплитуда высокочастотных импульсов	30 В
Длительность высокочастотных импульсов	40—225 мкс
Напряжение питания	+5 В; ±15 В

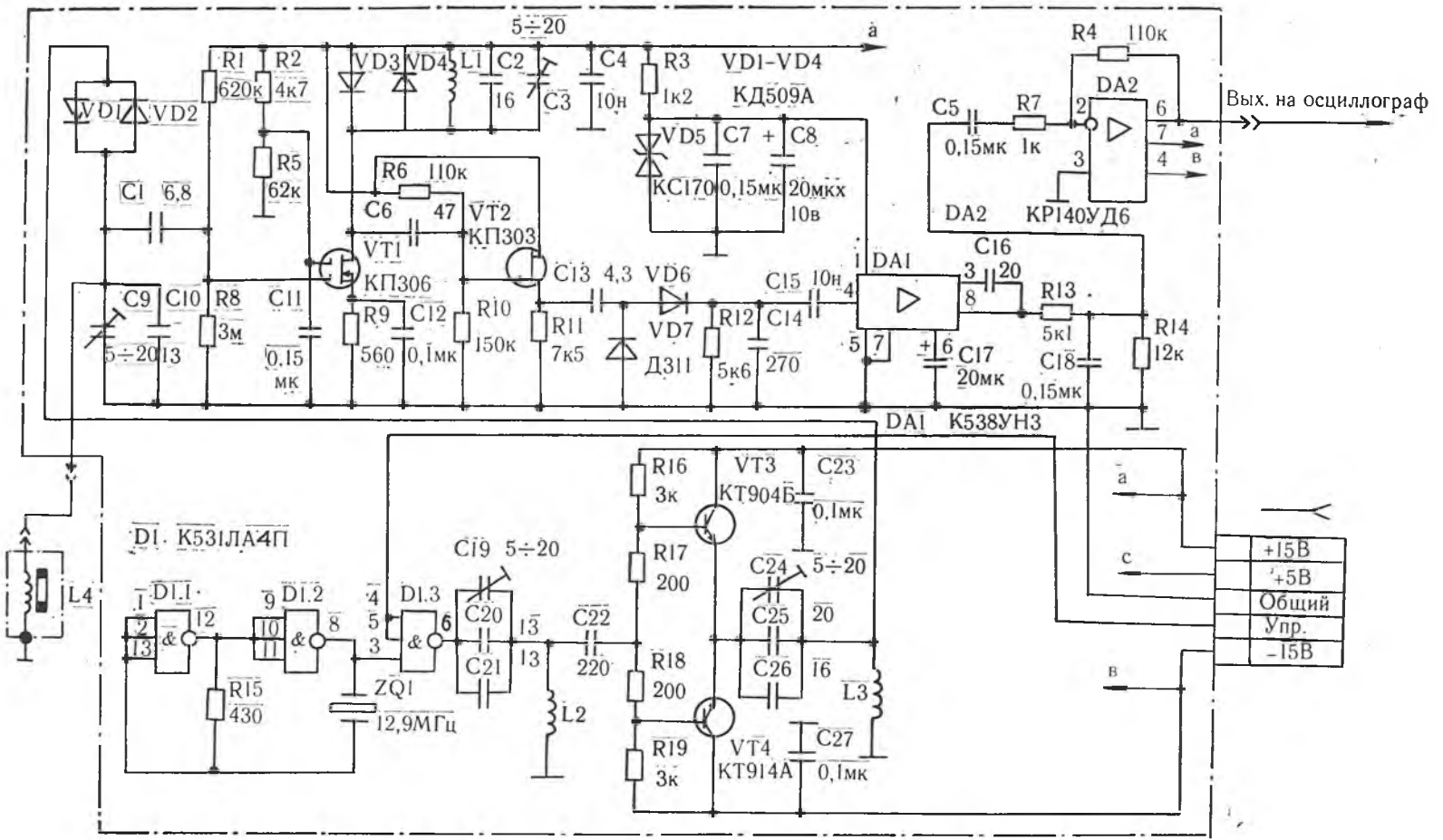


Рис. 3. Схема приемно-передающего устройства

Индукция постоянного магнитного поля порядка . .	0,35 Тл
Диаметр ампулы	8 мм
Время восстановления приемника от перегрузки после действия высокочастотного импульса (мертвое время)	2 мс

Список литературы

1. Сороко Л. М. Интроскопия на основе ядерного магнитного резонанса. М., 1986.
2. Вашман А. А., Пронин И. С. Ядерная магнитная релаксационная спектроскопия. М., 1986. С. 31.
3. Лундин А. Г., Федин Э. И. ЯМР-спектроскопия. М., 1986. С. 53.
4. Muller B. H., Noble J. D., Burnett L. J., Harmon J. F., Mckay D. R.// Amer. Journ. Phys. 1974. V. 48. P. 58.

Поступила в редакцию 15.02.90.

УДК 517.535.3+517.55

С. В. РОГОЗИН, ЛЕ МАЮ ХАЙ (СРВ)

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В КОМПАКТНОМ КЭЛЕРОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Задача продолжения голоморфных и мероморфных отображений в Римановы области над многообразием Штейна на ее оболочку голоморфности в случае, когда областью значений отображений являются различные комплексные многообразия, рассмотрена многими авторами [1—7].

В данной статье исследуется задача продолжения мероморфных отображений, когда областью значений отображений является компактное кэлерово многообразие. Подобная задача изучалась в [5 и 6], однако настоящая работа придает их результатам более совершенный вид.

Определение 1 [5]. Пусть N и M — комплексные многообразия; M — компактно.

Отображение f: $N \to M$ называется мероморфным, если существует собственное аналитическое множество $P(f) \subset N$ такое, что $f|_{N \setminus P(f)}$ является голоморфным отображением и $\Gamma(f)$ (замыкание графика голоморфного отображения $f|_{N \setminus P(f)}$) — аналитическим множеством в $N \times M$. Множество $P(f)$ называется множеством особенностей мероморфного отображения f. Если σ: $N \times M \to N$ — каноническая проекция на первую компоненту, то $\sigma : \Gamma(f) \setminus \sigma^{-1}(P(f)) \to N \setminus P(f)$ является биголоморфным.

В работе [6] дано определение мероморфных отображений в смысле Реммерта для аналитических пространств. Определение 1 есть определение в смысле Реммерта, применимое в случае, когда N и M — комплексные многообразия, M — компактно.

В случае, когда $N = D \subset C^n$ и $M = CP^1$, определение 1 есть классическое определение мероморфных функций [3. С. 281].

При получении основного результата будем использовать следующее дополнительное ограничение на многообразие M, называемое условием дисков.

Определение 2 [3]. Пусть $\bar{U} = \{\xi : |\xi| \leqslant 1\}$ — замкнутый круг и $A_r = \{r \leqslant |z| \leqslant 1\}$ — кольцо в нем. Рассмотрим произвольную последовательность $\{f^\nu\}$ голоморфных отображений $\bar{U}$ в комплексное многообразие M и через $f^\nu|_{A_r}$ обозначим сужение f^ν на кольцо A_r для некоторого $r < 1$. Будем говорить, что M удовлетворяет условию дисков, если из равномерной сходимости $f^\nu|_{A_r}$ в A_r к отображению $f \in O(A_r, M)$ следует, что f^ν равномерно сходится в $\bar{U}$ к некоторому отображению $\bar{f} \in O(\bar{U}, M)$.

В [7] доказано, что если многообразие M удовлетворяет условию дис-

ков, то любое голоморфное отображение $f: D \to M$ продолжается до голоморфного отображения $\widetilde{f}: \widehat{D} \to M$, где $\widehat{D}$ — оболочка голоморфности D. Условие дисков позволяет получить аналогичный результат и в случае мероморфных отображений.

Теорема. Пусть D — риманова область над многообразием Штейна R; M — компактное кэлерово многообразие, удовлетворяющее условию дисков. Тогда любое мероморфное отображение $f: D \to M$ продолжается до мероморфного отображения $\widetilde{F}: \widehat{D} \to M$, где $\widehat{D}$ — оболочка голоморфности D.

Доказательство. Пусть $f: D \to M$ — заданное мероморфное отображение. Рассмотрим множество особенностей $P(f)$. Можно записать: $P(f) = H \cup K$, где H и K — аналитические множества в D с $\operatorname{codim} H = 1$, $\operatorname{codim} K \geqslant 2$. Тогда имеем равенство:

$$\widehat{(D \setminus H \cup K)} = \widehat{D \setminus H}. \tag{1}$$

В силу единственности и локальности задачи продолжения можно считать, что H — гиперповерхность в D. Рассмотрим голоморфное отображение $f_0 = f|_{D \setminus P(f)}: D \setminus H \cup K \to M$.

Согласно [7] и равенству (1), отображение f_0 продолжается до голоморфного отображения $\widehat{f}_0: \widehat{D \setminus H} \to M$. Так как H — гиперповерхность в D, то существует гиперповерхность H' в $\widehat{D}$ такая, что $\widehat{D \setminus H} = \widehat{D} \setminus H'$. Таким образом, голоморфное отображение $\widehat{f}_0: \widehat{D} \setminus H' \to M$ является голоморфным продолжением отображения f_0. Заметим, что $\operatorname{codim} H' = 1$. Рассмотрим следующие случаи: а) Пусть $H' \cap D = \varnothing$, т. е. $D \subset \widehat{D} \setminus H'$, тогда $\widehat{f}_{0|D}$: $D \to M$ является голоморфным отображением и, согласно [7], $f_{0|D}$ продолжается до голоморфного отображения $\widetilde{f}_0: \widehat{D} \to M$. Рассмотрим отображение $\widetilde{F}: \widehat{D} \to M$, определенное следующим образом:

$$\widetilde{F} = \begin{cases} f \text{ на } D, \\ \widetilde{f}_0 \text{ на } \widehat{D}. \end{cases}$$

Ввиду единственности продолжения и мероморфности f отображение $\widetilde{F}: \widehat{D} \to M$ будет мероморфным и продолжением мероморфного отображения f.

б) Пусть $H' \cap D \neq \varnothing$, тогда строим отображение F: $(\widehat{D} \setminus H') \cup D \to M$ следующим образом:

$$F = \begin{cases} f \text{ на } D, \\ \widehat{f}_0 \text{ на } \widehat{D} \setminus H'. \end{cases}$$

Согласно [6], отображение F продолжается до мероморфного отображения $\widetilde{F}: \widehat{D} \to M$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 1. При изучении задачи продолжения мероморфных отображений наиболее трудным представляется случай, когда коразмерность особенностей равна единице. Поэтому основным моментом в доказательстве является рассмотрение случая $\operatorname{codim} H = 1$.

Так как $\widehat{B_1 \setminus \overline{B}_{1/2}} = B_1$, из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Пусть M — компактное кэлерово многообразие, удовлетворяющее условию дисков. Тогда любое мероморфное отображение $f: B_1 \setminus \overline{B}_{1/2} \to M$ продолжается до мероморфного отображения $\widetilde{F}: B_1 \to M$, где $B_r = \{z \in \boldsymbol{C}^n \mid \|z\| < r\}$.

Замечание 2. В теореме вместо требования, чтобы M удовлетворяло условию дисков, можно использовать одно из следующих ограничений:

а) M удовлетворяет условию продолжения Леви;

б) M удовлетворяет условию продолжения Гартогса;

в) M — выпуклое кэлерово многообразие, не содержащее рациональной кривой.

Это вытекает из того, что данные условия достаточны для следующего утверждения [2, 7]: любое голоморфное отображение $f: D \to M$ продолжается до голоморфного отображения $\hat{f}: \hat{D} \to M$, где $\hat{D}$ — оболочка голоморфности D. При доказательстве теоремы фактически использовано только последнее.

Авторы выражают благодарность С. М. Ивашковичу за постановку задачи и полезные указания.

Список литературы

1. Ивашкович С. М. // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 197.
2. Ивашкович С. М. // Там же. 1986. Т. 50. № 4. С. 866.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1985. Т. 2.
4. Andreotti A., Stoll W. // Ann. Math. 1960. V. 72. № 2. P. 312.
5. Griffith P. A. // Invent. Math. 1971. V. 14. № 1. P. 27.
6. Siu Y. T. Ann. Math. 1975. V. 102. № 3. P. 421.
7. Shiffman B. // Math. Ann. 1971. V. 194. № 4. P. 249.
8. Shiffman B. // Ibid. 1976. V. 222. № 2. P. 171.

Поступила в редакцию 04.10.89.

УДК 517.968.23

А. П. ШИЛИН

ДВА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

Будем использовать введенные в [1] операторы I^+ и I^R. Сохраним из [1] все предположения на функции и соглашения об обозначениях (см. также [2]).

Рассмотрим уравнения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-s)\,ds\left[\int_0^{+\infty} k_2(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} k_3(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k_1(-t-s)}\,ds\left[\int_0^{+\infty} \overline{k_2(s-\tau)}\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} \overline{k_3(s-\tau)}\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau\right] =$$

$$= g(t) - \overline{g(-t)}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_4(t-s)\,ds\left[\int_0^{+\infty} k_2(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} k_3(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right] = f(t),\ t<0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-s)\,ds\left[\int_0^{+\infty} k_2(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} k_2(s+\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau -\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{0} k_3(s-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} k_3(s+\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau\right] - \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{k_1(-t-s)}\,ds\left[\int_0^{+\infty} \overline{k_2(s-\tau)}\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} \overline{k_2(s+\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau -\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{0} \overline{k_3(s-\tau)}\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} \overline{k_3(s+\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau\right] = g(t) - \overline{g(-t)}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_4(t-s)\,ds\left[\int_0^{+\infty} k_2(s-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{0} k_2(s+\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{0} k_3(s-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{0} k_3(s+\tau)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\tau\right]=f(t),\ t<0. \qquad (4)$$

Это парные уравнения: соотношения (1), (2) задают одно уравнение, а соотношения (3), (4) — другое уравнение.

Преобразования Фурье приводят соотношения (1)—(4) соответственно к следующим соотношениям:

$$K_1(x)K_2(x)\Phi^+(x)+K_1(x)K_3(x)\Phi^-(x)=G(x)+R(x), \qquad (5)$$

$$K_4(x)K_2(x)\Phi^+(x)+K_4(x)K_3(x)\Phi^-(x)=F(x)+\Psi^+(x), \qquad (6)$$

$$K_1(x)K_2(x)\,(I^+\Phi)\,(x)+K_1(x)K_3(x)\,(I^R\Phi)\,(x)=G(x)+R(x), \qquad (7)$$

$$K_4(x)K_2(x)\,(I^+\Phi)\,(x)+K_4(x)K_3(x)\,(I^R\Phi)\,(x)=F(x)+\Psi^+(x), \qquad (8)$$

где $R(x)$ — действительная, а $\Psi^+(x)$ — аналитически продолжимая в верхнюю полуплоскость функции, являющиеся неизвестными наряду с $\Phi(x)$, $-\infty<x<+\infty$.

Соотношения (5), (6) выражают последовательность краевой задачи Гильберта и краевой задачи Римана:

$$K_1(x)\Psi^+(x)=K_4(x)R(x)+H_1(x), \qquad (9)$$

$$K_2(x)\Phi^+(x)=-K_3(x)\Phi^-(x)+H_2(x),$$

а соотношения (7), (8) — последовательность двух краевых задач Гильберта: (9) и $K_2(x)\,(I^+\Phi)\,(x)=-K_3(x)\,(I^R\Phi)\,(x)+H_2(x)$, где $H_1(x)=$ $=K_4(x)\,G(x)-K_1(x)\,F(x)$, $H_2(x)=\dfrac{F(x)+\Psi^+(x)}{K_4(x)}=\dfrac{G(x)+R(x)}{K_1(x)}$.

После решения краевых задач решение уравнений (1), (2) и (3), (4) получим, взяв обратное преобразование Фурье от функций $\Phi^+(x)-\Phi^-(x)$ и $(I^+\Phi)\,(x)-(I^R\Phi)\,(x)$ соответственно.

Не станем здесь приводить вопросы разрешимости и формулы решений исходных уравнений, находящиеся в несложной зависимости от известных [2, 3] вопросов разрешимости и формул решения краевых задач Римана и Гильберта.

Список литературы

1. Шилин А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 1. С. 54.
2. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
3. Шилин А. П. Краевая задача Гильберта для полуплоскости // Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.». Минск, 1984. 18 с. Деп. в БелНИИНТИ 06.03.84. № 839Бе-84.

Поступила в редакцию 11.06.90.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1990 году в «Вестнике Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина», серия 1 (физика, математика и механика)

ФИЗИКА

Ан Чан Мо, Толстик А. Л., Чалей А. В. Учет нелинейного поглощения при четырехволновом взаимодействии в просветляющихся средах 2 3

Бельский А. М., Красневская Ю. И. О происхождении темных линий в поле пучка, отраженного от волновода с утечкой 2 6

Бойков В. Н., Киреева Ю. В., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. Фазовый переход в кристаллах натрийуранилацетата 2 26

Бринкевич Д. И., Фарид Нассур (САР), *Петров В. В., Просолович В. С.* Влияние предварительной высокотемпературной обработки и металлических геттеров на процессы генерации термодоноров в кремнии 3 32

Буров Л. И., Буцкий В. В., Грузинский В. В., Наумов Н. В., Терещенко А. К. Оптимизация параметров фотоприемных систем со ступенчатой регулировкой усиления 3 26

Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П. Пассивная синхронизация мод в непрерывном лазере на АИГ: Nd^{3+} с помощью кристаллов LiF с F_2^- 1 15

Войтович Д. А. Дополнительные потери резонатора газового лазера при быстром изменении его оптической длины 1 17

Воропай Е. С., Горбачев С. М., Билан О. Н., Черенда Н. Г. Ультрафиолетовая люминесценция силикатных стекол 2 13

Гольцев В. П., Ходасевич В. В., Углов В. В., Кулешов А. К. Структурно-фазовые превращения в тонких пленках железа при последовательном облучении ионами азота и бора 3 23

Зажогин А. П., Серафимович А. И., Шашков С. Н. О положении чисто электронного перехода в «свободном» ионе уранила 3 12

Ильяшук Ю. М., Федотов А. К. О природе электрической активности границ зерен в кремнии и германии с разным типом проводимости 3 20

Качарская Л. В., Чан Зуй Фыонг. Измерение β-активности водных растворов, содержащих изотопы ^{241}Pu, ^{90}Sr—^{90}Y, ^{137}Cs 1 30

Ким Зен Хо, Последович М. Р., Маляревич А. М. Комбинационное рассеяние и строение безводных молибдатов уранила 2 17

Кириленко А. И. О показателях преломления для неоднородных волн 1 5

Кислов В. В., Шаронов Г. В. Амплитудная нестабильность мод излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод 2 29

Ключников А. С., Кондратенко В. И., Алешкевич Н. И. К вопросу об управлении фазовой структурой световых пучков 1 12

Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Петров С. А. Изменение структуры поверхности кремния при облучении высокими дозами ионов C^+ и N_2^+ 1 27

Ле Тхань Хоах, Серафимович А. И., Тимощенко Т. Н., Титков Е. Ф. Об отнесении колебаний в области 200 $см^{-1}$ в комплексных соединениях уранила . . 1 24

Левкович А. Д., Муайед М. С., Перцев А. Н., Хассан Исмаил Х. Влияние обратного моттовского рассеяния на бета-спектр при прохождении через поглотитель с учетом ионизационных потерь 3 9

Липницкий И. В., Скутов И. К., Липницкий В. И. Колебательные спектры и строение аквакомплексов марганца и кадмия с метилпиразолом 2 21

Москательников А. А. Параметрическое излучение СВЧ-диапазона в периодической диэлектрической структуре 3 6

Нгуен Тхай Хонг, Барковский Л. М. Изменение степени поляризации частично поляризованного света в слоистых анизотропных структурах 1 3

Патрин А. А., Суслов В. А. Нестационарность планарного распределения фото-ЭДС в системе *p*-кремний — электролит 3 30

Последович М. Р., Маляревич А. М., Ким Зен Хо, Слепцов Л. Е. Низкотемпературные спектры люминесценции и строение молибдатов уранила . . . 3 15

Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Условия формирования излучения с линейной и круговой поляризацией световозвращателем полного внутреннего отражения ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) 2 9

Семененя В. А. Задача излучения ФАР круглых волноводов 1 20

Сокольский А. А., Белякова А. Я. Классическая модель частицы со спином и дипольными моментами в общерелятивистской теории 3 3

Урбанович А. И., Подлипко Ю. А., Шалима В. Н. Температурные поля при облучении кристаллов ионными пучками переменной мощности 1 9

Шепелевич В. Г., Шакер Хашем Ф. Структура и процессы переноса в быстроохлажденных фольгах сплавов висмут-галлий 1 29

Шепелевич В. Г., Зу Хен Чер. Структура и кинетические свойства быстроохлажденных фольг сплавов сурьма-индий 2 31

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Басик В. А. О модификации метода полной редукции для разностных граничных задач с переменными коэффициентами 1 37

Березкина Л. Л. О наилучшей рациональной аппроксимации некоторых функций, аналитических в круге единичного радиуса 2 58

Бровка Н. В., Примачук Л. П. Векторно-матричная задача Римана для одного класса подстановочных матриц 3 61

Буза М. К., Мощенский В. А. О мощности одного множества программ . . 2 54

Василевич Ю. В. Контактная задача термоупругости для ортотропного полупространства 1 40

Гладун О. М. О нелинейных стоячих колебаниях упругой пластины, плавающей на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины 2 56

Доличанин Ч. (СФРЮ), *Забрейко П. П.* Матричная теория циклов плоскости Лобачевского 3 59

Забелло Л. Е., Янушаускайте Н. А. Решение одной комбинаторной задачи методом динамического программирования 2 38

Забелло Л. Е. К теории инерционных управляемых систем с запаздыванием 3 48

Зверович В. Э., Зверович И. Э. О связывающем числе графов 1 52

Зубович К. А. Построение преобразователей предикатов и генерация минимальных решений линейных функциональных уравнений в системе функционального программирования 2 50

Калинин А. И. Асимптотические методы построения оптимальных управлений с релейными и особыми участками 1 58

Кирлица В. П. Точные *D*- и *A*-оптимальные планы для линии регрессии 2 36

Ковалев М. М., Нгуен Нгиа. Порядково-выпуклые разложения функций на целочисленной решетке 1 46

Ковалев М. М., До Зуй Чинь (СРВ). Задача параметрической выпуклой дискретной оптимизации 3 35

Кулешова И. Ф., Монастырный П. И. Вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с пограничным слоем 1 33

Куренок В. П. Существование решения стохастического дифференциального уравнения без сноса при локальной интегрируемости коэффициента a^{-2} . . . 1 43

Лаппо П. М. Обнаружение многократных разладок в некоторых бинарных последовательностях 3 65

Ле Тьи Зунг (СРВ). Оптимизация нелинейных динамических систем с управляемой структурой 3 50

Липницкий С. Ф. Математическая модель синтаксического анализа непроективных и слабопроективных сообщений в интеллектуальной информационной системе 2 48

Лунева Н. В. О периоде занятости системы $M/G/I$ с гистерезисной стратегией управления 3 67

Маляров А. Н., Исаченко А. Н. Логическая спецификация блокировки распределенных информационных ресурсов 3 38

Меленец Ю. В. Статистический анализ периодических авторегрессий . . 3 44

Нгуен Тхань Хай (СРВ). К гипергеометрической функции двух переменных Кампе де Ферье 3 53

Нгуен Дык Фиен (СРВ). Об одном обобщении теоремы И. П. Мысовских 3 56

Рубашко Н. К., Совпель И. В. Автоматический контроль текстов естественных языков. II 1 49

Тагайназаров С. Оптимизация непрерывной системы управления в условиях неопределенности 2 41

Тихоненко О. М. Распределение суммарного объема требований в однолинейной системе с ненадежным обслуживающим прибором 3 41

Чурбанов Ю. Д. Индуцированные почти комплексные связности на Ф-пространствах и их подпространствах 2 44

Штин С. Л. Об одной гипотезе В. Е. Круглова 1 55

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Апанасович В. В., Гулаков И. Р., Чудовская Е. А. Моделирование процессов фотоэлектрического преобразования в одноэлектронном фотоприемнике 1 62

Белявский А. К., Данейко И. К. Распространение волн в неоднородном клине. Метод конформного преобразования 2 62

Бровка Н. В. Решение одной задачи Римана для трехмерного вектора . . 2 69

Булатов В. И. К управляемости одного класса систем с запаздыванием 1 66

Ветохин С. С. Отношение сигнал/шум счетчика фотонов при гармонической модуляции регистрируемого светового потока 1 64

Кононова О. А. Об изохронности центра одной системы нелинейных колебаний 3 73

Макаревич Т. А. Спектральный *K*-радиус линейных операторов в пространствах последовательностей 1 67

Мощенский А. В. Регулярные булевы функции 2 68

Пряхин А. Е., Минько И. Р. Наблюдение прецессии системы ядерных спинов при стационарном методе регистрации ЯМР 2 64
Сергеенко М. Н. К асимптотике полиномов Лежандра 2 66
Ушаков Е. А. Томасова прецессия как движение вектора, ассоциированное с циклом, при переносе по Ферми 2 61
Хритоненко Н. В. Управляемость гамильтониана в терминальной задаче оптимального управления 2 72
Шишкин Г. В., Ясин Мохамед Али (Ирак). О точном описании дираковской частицы в векторном и тензорном полях 3 72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Александр Сергеевич Михалев 1 72
Виталий Евгеньевич Ямный 2 75
Аннотации депонированных статей 1 70
Аннотации депонированных статей 2 76
Аннотации депонированных статей 3 75

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.925

Хапалюк А. П. **О решениях уравнения Бесселя** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

С помощью комплексного преобразования Фурье дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 \widehat{Z}(x)}{dx^2} + x \frac{d \widehat{Z}(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2) \widehat{Z}(x) = 0 \qquad (1)$$

преобразуется в другое дифференциальное уравнение

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 \breve{Z}(\xi)}{d\xi^2} + 3\xi \frac{d\breve{Z}(\xi)}{d\xi} + (1 - \nu^2) \breve{Z}(\xi) = 0, \qquad (2)$$

все четыре линейно независимые решения которого просты и являются трансформантами более сложных решений уравнения (1). Это дало возможность сравнительно сложные решения уравнения Бесселя (1) представить единым образом как обратные преобразования Фурье простых решений уравнения трансформант (2).

В результате получено четыре линейно независимых решения уравнения Бесселя, которые отличаются от двух известных классических решений. В частности, оказалось, что функции Бесселя второго рода целого порядка (функции Неймана) не являются решениями уравнения Бесселя.

Библиогр. 6 назв.

УДК 530.12 : 530.145

Тимощенко А. И. **Уравнение Даффина — Кеммера для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Проведено полное разделение переменных в уравнении Даффина — Кеммера для частицы со спином 0 в поле Керра — Ньюмена. Показано, что операторы симметрии этого уравнения не образуют полного набора в данном поле, хотя разделение переменных произведено полностью. Найдены некоторые операторы условной симметрии.

Библиогр. 8 назв.

УДК 535.34

Ан Чан Мо (КНДР), Толстик А. Л., Чалей А. В. **Приближенные методы расчета отражательной способности ОВФ-голограмм в растворах красителей** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Предложены аналитические аппроксимации численных решений, позволяющие рассчитать отражательную способность динамических ОВФ-голограмм в растворах красителей, моделируемых трех- и четырехуровневыми схемами. Учитывается резонансная и тепловая нелинейность при переходах как в основном синглетном S_0—S_1, так и возбужденном синглетном S_1 — S_2 либо триплетном T_1 — T_2 каналах.

Библиогр. 8 назв., ил. 3.

УДК 535.513

Титов А. Д. **Поляризационные свойства зеркального и металлизированного световозвращателей в форме трехгранного угла** ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Поляризационное состояние излучения, отраженного от зеркального и металлизированного световозвращателей в форме трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) при линейно-поляризованном падающем излучении, исследовано с помощью матричного метода Джонса. Изучены случаи серебрёных, алюминированных, золочёных и меднёных отражающих граней при различных длинах волн.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 620.179.153

Левкович А. Д., Муайед М. С. (Ирак), Перцев А. Н. **Экспериментальное сравнение методов измерения распределения поглощенных бета-частиц по глубине поглотителя** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Методами пропускания и гамма-гамма совпадений в одинаковых условиях измерений определены массовый коэффициент поглощения μ и закон распределения поглощенных позитронов ^{22}Na по глубине поглотителя для алюминия. Согласованность получен-

ных значений μ — (0,035±0,005) и (0,032±0,003) см²/мг — и экспоненциальный закон распределения поглощенных позитронов по глубине алюминия свидетельствуют об эквивалентности обоих методов при одинаковых условиях измерений.

Библиогр. 7 назв., ил. 3.

УДК 548.5 : 669.76

Шепелевич В. Г. **Структура и кинетические свойства фольг сплавов висмут-сурьма** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Фольги сплавов на основе Bi-Sb, полученные скоростным охлаждением из расплава, имеют поликристаллическую структуру и характеризуются текстурой $\{10\bar{1}2\}$. Приводятся результаты исследования электросопротивления, коэффициента Холла с дифференциальной термо-ЭДС быстрозакаленных фольг в интервале 77—300 К.

Библиогр. 9 назв., ил. 1.

УДК 538.123+621.3.083.8

Прокошин В. И., Ярмолович В. А., Рабкевич Т. М. **Функциональная модель пленочного преобразователя Холла в неоднородном магнитном поле.** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Предлагается модель реального пленочного преобразователя Холла. Рассмотрены вопросы влияния технических характеристик преобразователя, его геометрии и других параметров на функционирование в неоднородном магнитном поле. Проведен расчет остаточного напряжения выходного сигнала реального пребразователя в магнитном поле.

Библиогр. 7 назв., ил. 2.

УДК 539.062

Лопатик А. Р., Мисевич О. В., Хаджо А. К. (САР), Холмецкий А. Л. **МСКЭ при полном внешнем отражении мессбауэровского излучения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Разработан метод мессбауэровской спектроскопии конверсионных электронов (МСКЭ) в условиях полного внешнего отражения резонансного излучения, основанный на применении воздушного сцинтилляционного детектора. С помощью этого метода исследована структура пленки на основе соединения $Co^{57}Fe_2O_4$, нанесенной на стеклянную подложку. Сравнение спектров, полученных в условиях полного внешнего отражения и обычной регистрации конверсионных электронов, показало существенное различие объемной и поверхностной структуры пленки.

Библиогр. 8 назв., ил. 4.

УДК 534.23

Белявский А. К., Данейко И. К. **Обобщение метода конформного преобразования для задачи распространения волн в произвольном волноводе** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

С помощью перехода от декартовой к специальным неортогональным системам координат получено решение уравнения Гельмгольца в произвольном горизонтально-стратифицированном клине и неоднородном плоскопараллельном волноводе.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32 : 517.544

Зверович Э. И. **О возможности явного построения глобальной униформизации алгебраического соответствия** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Анонсирован следующий результат: любое алгебраическое соответствие $F(z, w)=0$ между комплексными переменными z и w допускает глобальную униформизацию, такую, что хотя бы одна из униформизирующих функций — рациональная.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.1

Ковалев М. М., Топчишвили А. Л. **Несобственные задачи выпуклой дискретной оптимизации** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Предлагается способ аппроксимации несовместной системы выпуклых линейных неравенств с целочисленными переменными совместной системой.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.1

Зверович И. Э., Силла А. (Гвинея). **P-униграфичность в некоторых классах графов** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Последовательность неотрицательных целых чисел называется P-униграфической, если ровно одна ее реализация обладает свойством P. Класс P-униграфических последовательностей содержит как подкласс все униграфические последовательности, реализации которых обладают свойством P. Охарактеризованы T- и U-униграфические последовательности, где T и U означают свойства «быть деревом» и «быть связным унициклическим графом» соответственно.

Библиогр. 5 назв., ил. 2.

УДК 519.832.3

Писарук Н. Н., Редди В. С. (Индия). **Матричные игры с зависимыми стратегиями** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Рассматривается матричная игра, смешанная стратегия в которой есть произвольное вероятностное распределение, ограниченное частотой использования подмножеств чистых стратегий. Предложен метод поиска оптимальных стратегий с помощью линейного программирования минимизации кусочно-линейной вогнутой функции. Указано одно из возможных применений игры в сельском хозяйстве.

Библиогр. 4 назв.

УДК 532.516

Чепинога М. М., Злебова А. Е. **Исследование длинных внутренних волн с помощью обобщенных уравнений Рейнольдса** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Построена математическая модель длинных волн, в основу которой положены обобщенные уравнения Рейнольдса. С ее помощью решены некоторые плоские задачи о поверхностных и внутренних волнах как при условии прилипания, так и при частичном скольжении на дне и поверхности раздела двух жидкостей.

Библиогр. 4 назв., табл. 3.

УДК 519.6

Драгун В. А., Феденко Н. П. **О методе Чебышева** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат .Мех. 1991. № 1.

Для решения нелинейных операторных уравнений

$$F(x)=0 \tag{1}$$

в банаховых пространствах рассмотрен метод Чебышева

$$x_{n+1}=x_n-(F'(x_n))^{-1}\left(F(x_n)+\frac{1}{2}F''(x_n)(-(F'(x_n))^{-1}F(x_n))^2\right).$$

Получены условия сходимости метода, оценка погрешности. Метод Чебышева рассмотрен также в комбинации с методом параметризации задачи (1).

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.956.3

Третьякова Л. Г. **К задаче об ω-периодических решениях квазилинейного телеграфного уравнения** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Получена теорема о существовании и единственности ω-периодических решений граничной задачи для квазилинейного телеграфного уравнения в пространстве непрерывных функций.

Библиогр. 7 назв.

УДК 519.62

Бобков В. В., Бобкова Н. А. **Об одном классе численных методов решения задачи Коши** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Для задачи с начальными условиями в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, предлагается семейство вычислительных алгоритмов модульного типа. Методы ориентированы на

асимптотически устойчивый случай линейной системы и характеризуются улучшенными свойствами согласованности дифференциальной и соответствующей разностной задач.

Библиогр. 4 назв.

УДК 516.72

Ведерников С. В. **Инвариантные части области симметрии** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Изучена геометрия области симметрии в случае, когда порождающий автоморфизм — внутренний. Работа выполнена методом полиномиальных морфизмов.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.9

Мороз О. А. **К вопросу о неасимптотической устойчивости** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Исследуется неасимптотическая устойчивость по Ляпунову нулевого решения автономной системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, множество точек покоя которой является $(2n-1)$-мерной поверхностью.

Библиогр. 7 назв.

УДК 535.372 : 541.65

Зажогин А. П., Серафимович А. И. **Исследование влияния нейтральных лигандов на электронные свойства комплексов уранилхлорида** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Спектрально-люминесцентным методом исследовано влияние нейтральных лигандов на электронные свойства комплексов уранилхлорида. Установлена линейная зависимость частоты чисто электронного перехода в комплексах уранилхлорида от донорного числа нейтральных лигандов. Показано, что наиболее устойчивой формой комплексов уранилхлорида является комплекс с тремя молекулами нейтрального лиганда.

Библиогр. 2 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 538 : 082/083

Пряхин А. Е., Минько И. Р. **Импульсный спектрометр-релаксометр ЯМР** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Описывается спектрометр для наблюдения спинового эха системы ядерных спинов при импульсном методе регистрации ядерного магнитного резонанса (ЯМР), позволяющий измерять время спин-спиновой (T2) и спин-решеточной (T1) релаксации протоносодержащих жидкостей в диапазоне 0,2—2 с.

Библиогр. 4 назв., ил. 3.

УДК 517.535.3+517.55

Рогозин С. В., Ле Маю Хай (СРВ). **Продолжение мероморфных отображений со значениями в компактном кэлеровом многообразии** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Исследуется задача продолжения мероморфных в смысле Реммерта отображений со значениями в компактном кэлеровом многообразии в случае, когда последнее удовлетворяет так называемому условию дисков.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.968.23

Шилин А. П. **Два парных интегральных уравнения типа свертки** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 1.

Указаны два уравнения, допускающие решение в квадратурах с помощью преобразования Фурье и последующего сведения к краевым задачам для аналитических функций.

Библиогр. 3 назв.