

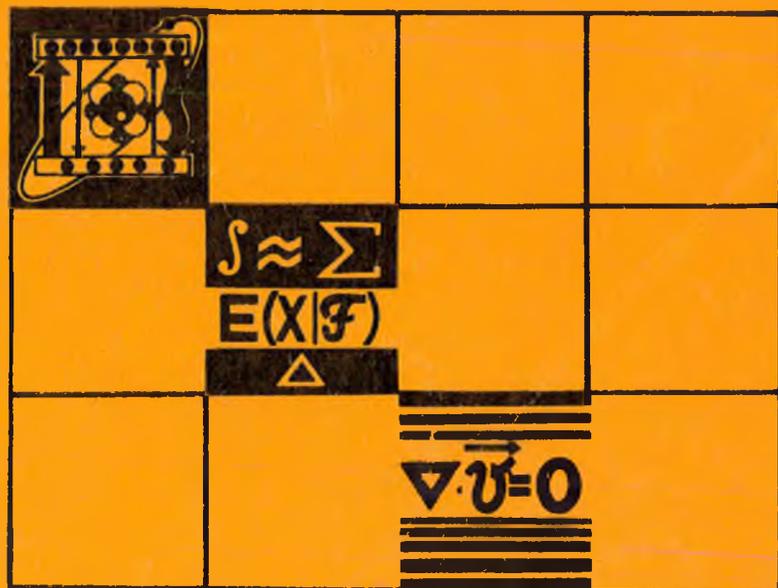
# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ 1

Физика  
Математика  
Механика

3 '90



# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

<i>Сокольский А. А., Белякова А. Я.</i> Классическая модель частицы со спином и дипольными моментами в общерелятивистской теории	3
<i>Москотельников А. А.</i> Параметрическое излучение СВЧ-диапазона в периодической диэлектрической структуре	6
<i>Левкович А. Д., Муайед М. С., Перцев А. Н., Хассан Исмаил Х.</i> Влияние обратного моттовского рассеяния на бета-спектр при прохождении через поглотитель с учетом ионизационных потерь	9
<i>Зажогин А. П., Серафимович А. И., Шапков С. Н.</i> О положении чисто электронного перехода в «свободном» ионе уранила	12
<i>Последович М. Р., Маляревич А. М., Ким Зен Хо, Слепцов Л. Е.</i> Низкотемпературные спектры люминесценции и строение молибдатов уранила	15
<i>Ильяшук Ю. М., Федотов А. К.</i> О природе электрической активности границ зерен в кремнии и германии с разным типом проводимости	20
<i>Гольцев В. П., Ходасевич В. В., Углов В. В., Кулешов А. К.</i> Структурно-фазовые превращения в тонких пленках железа при последовательном облучении ионами азота и бора	23
<i>Буров Л. И., Буцкий В. В., Грузинский В. В., Наумов Н. В., Терещенко А. К.</i> Оптимизация параметров фотоприемных систем со ступенчатой регулировкой усиления	26
<i>Патрин А. А., Суслов В. А.</i> Нестационарность планарного распределения фото-ЭДС в системе <i>p</i> -кремний — электролит	30
<i>Бринкевич Д. И., Фарид Нассур (САР), Петров В. В., Просолович В. С.</i> Влияние предварительной высокотемпературной обработки и металлических геттеров на процессы генерации термодоноров в кремнии	32

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Ковалев М. М., До Зуи Чинь (СРВ).</i> Задача параметрической выпуклой дискретной оптимизации	35
<i>Маляров А. Н., Исаченко А. Н.</i> Логическая спецификация блокировки распределенных информационных ресурсов	38
<i>Тихоненко О. М.</i> Распределение суммарного объема требований в однолинейной системе с ненадежным обслуживающим прибором	41
<i>Меленц Ю. В.</i> Статистический анализ периодических авторегрессий	44
<i>Забелло Л. Е.</i> К теории инерционных управляемых систем с запаздыванием	48
<i>Ле Тьн Зунг (СРВ).</i> Оптимизация нелинейных динамических систем с управляемой структурой	50
<i>Нгуен Тхань Хай (СРВ).</i> К гипергеометрической функции двух переменных Кампе де Ферье	53
<i>Нгуен Дык Фиен (СРВ).</i> Об одном обобщении теоремы И. П. Мысовских	56
<i>Доличанин Ч. (СФРЮ), Забрейко П. П.</i> Матричная теория циклов плоскости Лобачевского	59
<i>Бровка Н. В., Примачук Л. П.</i> Векторно-матричная задача Римана для одного класса подстановочных матриц	61
<i>Лапто П. М.</i> Обнаружение многократных разладок в некоторых бинарных последовательностях	65
<i>Лулева Н. В.</i> О периоде занятости системы <i>M/G/1</i> с гистерезисной стратегией управления	67

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Шичкин Г. В., Ясин Мохамед Али (Ирак).</i> О точном описании дираковской частицы в векторном и тензорном полях	72
<i>Кононова О. А.</i> Об изохронности центра одной системы нелинейных колебаний	73
Аннотации депонированных статей	75

---

# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года  
один раз в четыре месяца

---

**СЕРИЯ 1**

**Физика  
Математика  
Механика**

**3 '90**

**СЕНТЯБРЬ**



МИНСК  
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ

*Главный редактор В. Г. РУДЬ*  
*Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ*

**Редакционная коллегия серии:**

*А. И. КОМЯК (ответственный редактор),*  
*Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),*  
*В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), А. М. БЕЛЬ-*  
*СКИЙ (ответственный секретарь), Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГА-*  
*БАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕ-*  
*РОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕШИН-*  
*СКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРО-*  
*НЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВ-*  
*СКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ, Н. И. ЮРЧУК*

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В. И. ЛЕНИНА

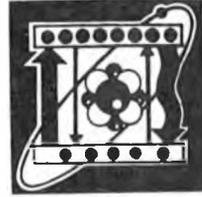
Серия I: Физ. Мат. Мех. 1990 № 3

*Редактор И. П. Стрельченя*  
*Младший редактор Г. М. Добыш*  
*Художественный редактор Р. В. Кондрад*  
*Технический редактор и корректор Г. И. Хмарук*

Сдано в набор 12.07.90. Подписано в печать 07.09.90. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52.  
Уч.-изд. л. 7,23. Тираж 707 экз. Заказ 851. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11.  
Адрес редакции: 220080, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП  
Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 530.12:530.145

А. А. СОКОЛЬСКИЙ, А. Я. БЕЛЯКОВА

## КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ И ДИПОЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ В ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ

Классическим релятивистским моделям частиц, обладающих собственными моментами, посвящена обширная литература (см., например, обзоры [1—3]). Среди методов построения подобных моделей можно выделить вариационный, примененный уже в основополагающей работе [4] и используемый в последующих публикациях, в частности [5—12]. Настоящая работа является развитием исследований [7, 10] и посвящена динамике пробной классической релятивистской частицы, имеющей, кроме обычных (масса, заряд), характеристики, связанные с ее ориентацией и собственным вращением. Рассмотрение проводится в рамках общей теории относительности; вариационный (лагранжев) формализм построен таким образом, что 4-вектор спина появляется непосредственно в процессе варьирования действия как соответствующая динамическая переменная. На основе развитого общего формализма получены конкретные динамические соотношения для модели частицы, обладающей спином, дипольными (магнитным и/или электрическим) моментами, электрическим зарядом, движущейся в произвольных электромагнитном и гравитационном полях, причем рассмотрены два варианта — с изменяющимся и постоянным по модулю спином.

Движение частицы будем описывать с помощью функций  $\xi^\alpha(\tau)$  и  $e^\alpha_k(\tau)$  ( $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$ ;  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ) так, что  $x^\alpha = \xi^\alpha(\tau)$  задает ее мировую линию ( $x^\alpha = (ct, x^i)$ ;  $c = 1$ ;  $d\tau = \sqrt{-g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}$ ;  $g_{\alpha\beta}(x^\lambda)$  — метрический тензор), а тройка ортонормированных чисто пространственных в системе покоя частицы 4-векторов  $e^\alpha_k$  — ее ориентацию. Это означает,

что должны выполняться условия

$$e^\alpha_i e_\alpha_j = \delta_{ij}, \quad u_\alpha e^\alpha_k = 0, \quad (1a)$$

где  $u^\alpha = d\xi^\alpha/d\tau$  — 4-скорость частицы. Очевидно,

$$u^\alpha u_\alpha = -1. \quad (1b)$$

Определим теперь угловую скорость собственного вращения частицы, вводя 4-псевдовектор

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} [e_i \wedge \dot{e}_i]^\alpha. \quad (2)$$

Здесь и далее по любым повторяющимся индексам подразумевается суммирование и используются следующие обозначения:

а) для произведений: 4-скалярного  $(a \cdot b) = a^\alpha b_\alpha$ ,  $a^2 = (a \cdot a)$ ; «собственного» 4-векторного  $[a \wedge b]^\alpha = F^{\alpha\beta\gamma\lambda} a_\beta b_\gamma u_\lambda$ , где  $F^{\alpha\beta\gamma\lambda} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ ;  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$  антисимметричен по всем индексам,  $\varepsilon^{0123} = 1$ ;  $g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$ ;

б) для дифференциальных операций:  $\nabla_\alpha$  — ковариантная производная;  $D$  — абсолютный дифференциал, причем если  $\dot{f} = f(A, B)$ , где  $A = A(x^\alpha)$ ,  $B = B(\tau)$ , то, по определению,

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial A} \nabla_\alpha A; \quad \frac{Df}{d\tau} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial A} u^\lambda \nabla_\lambda A + \frac{\partial f}{\partial B} \frac{DB}{d\tau}.$$

Выбор (2) в качестве 4-угловой скорости обоснован тем, что, как можно проверить,  $\omega^i$ , вычисленные в системе покоя частицы, переходят в нерелятивистском пределе в компоненты обычной угловой скорости, а уравнение  $\omega^\alpha = 0$  эквивалентно условию переноса векторов  $e^\alpha_k$  по Ферми — Уолкеру [13], обобщающему понятие поступательного движения на релятивистский случай. Отметим также, что вектор  $\omega^\alpha$  (2) связан с тензором угловой скорости  $\omega^{\alpha\beta}$  [7, 10] соотношениями  $\omega^\alpha = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\lambda} \omega_{\beta\gamma} u_\lambda$ ,  $\omega^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\lambda} \omega_{\gamma\lambda} u_\alpha$  и в силу своего определения ортогонален 4-скорости:  $\omega^\alpha u_\alpha = 0$ .

Для построения достаточно общих динамических соотношений на основе вариационного принципа зададим интеграл действия частицы в следующем виде:

$$S = \int L(u^\alpha, e^\alpha_k, \omega^\alpha, Q, g_{\alpha\beta}) d\tau, \quad (3)$$

где  $Q(x^\alpha)$  — внешние поля (кроме гравитационного), не конкретизируя на этом этапе функцию Лагранжа, и проварьируем мировую линию и собственное вращение частицы. Возникающие при этом ковариантные [14] вариации величин  $d\tau$ ,  $u^\alpha$  и  $e^\alpha_k$ , совместные со связями (1), как можно убедиться, имеют вид:

$$\delta(d\tau) = -(u \cdot \varepsilon) d\tau, \quad \delta u^\alpha = n_\beta^\alpha \varepsilon^\beta, \quad \delta e^\alpha_k = (e \cdot \varepsilon) u^\alpha + [\zeta \wedge e]^\alpha_k, \quad (4)$$

где  $n_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta$ ;  $\varepsilon^\alpha = \delta \xi^\alpha$ ;  $\zeta^\alpha$  — четыре не зависящих друг от друга и от  $e^\alpha_k$  параметра инфинитезимального поворота триады  $e^\alpha_k$ . Далее, с помощью (4) и принимая во внимание правила перестановки ковариантных производных в римановой геометрии, для ковариантной вариации (2) получим:

$$\delta \omega_\alpha = n_\lambda^\alpha \dot{\zeta}^\lambda + (\zeta \cdot u) \dot{u}_\alpha + [\zeta \wedge \omega]_\alpha + [\varepsilon \wedge u]_\alpha + (\varepsilon \cdot u) \omega_\alpha + (\varepsilon \cdot \omega) u_\alpha + R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^* u^\beta u^\gamma \varepsilon^\lambda,$$

причем  $R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^* = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\mu\nu} R_{\gamma\lambda}^{\mu\nu}$ , где  $R_{\mu\nu\gamma\lambda}$  — тензор римановой кривизны [13]. Наконец, вычисляя вариацию действия

$$\delta S = \int \{ \delta L + L \delta(d\tau) \}$$

и применяя принцип Гамильтона, приходим к следующей системе уравнений поступательного и вращательного движения:

$$\dot{P}_\alpha = F_\alpha, \quad \dot{M}_\alpha = T_\alpha, \quad (5a, б)$$

где обобщенный 4-импульс частицы

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \left( \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} u^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} \omega^\lambda - L \right) u_\alpha + \frac{\partial L}{\partial e^\lambda_k} u^\lambda e_{\alpha k} + \left[ u \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega} \right]_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} u^\lambda \omega_\alpha; \quad (6)$$

обобщенный собственный 4-момент импульса (4-псевдовектор спина)

$$M_\alpha = n_\alpha^\lambda \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda}; \quad (7)$$

обобщенная 4-сила

$$F_\alpha = \frac{\partial L}{\partial Q} \nabla_\alpha Q + R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^* u^\beta u^\gamma M^\lambda; \quad (8)$$

обобщенный 4-момент сил

$$T_\alpha = \left[ \omega \wedge \frac{\partial L}{\partial \omega} \right]_\alpha + \left[ \frac{e}{k} \wedge \frac{\partial L}{\partial e} \right]_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda} \dot{u}^\lambda u_\alpha. \quad (9)$$

Таким образом, выведены общие (т. е. без конкретизации лагранжиана) общерелятивистские динамические соотношения для некоторого класса моделей классической частицы со спином и, вообще говоря, темп или иными мультипольными моментами, взаимодействующей с произвольными внешними полями  $Q$  и  $g_{\alpha\beta}$ , собственное вращение которой описывается с помощью 4-векторных характеристик. При этом для 16 неизвестных функций  $\xi^\alpha(\tau)$  и  $e^\alpha_k(\tau)$  получилось 18 уравнений (1), (5). Однако, как можно проверить, в силу одних лишь связей (1) выполняются два, не зависящих друг от друга, равенства:

$$(\tilde{M}_\alpha - T_\alpha) u^\alpha = 0, \quad (\tilde{P}_\alpha - F_\alpha) u^\alpha + (M_\alpha - T_\alpha) \omega^\alpha = 0, \quad (10)$$

вследствие чего число независимых уравнений оказывается равным числу неизвестных. Если же переменные  $e^\alpha_k$  явно в лагранжиан не входят, то соотношения (5), (16) и  $\omega^\alpha u_\alpha = 0$  дают (с учетом (10)) восемь независимых уравнений для восьми неизвестных функций  $\xi^\alpha(\tau)$  и  $\omega^\alpha(\tau)$ , и замкнутость системы по-прежнему имеет место.

Отметим также, что 4-вектор спина частицы  $M_\alpha$  появляется в процессе варьирования в виде выражения (7) ортогонального 4-скорости и что, как и следует, развитый формализм нечувствителен к тождественным преобразованиям функции Лагранжа с помощью условий (1).

Переходя к конкретной модели релятивистской вращающейся заряженной частицы с дипольными моментами, примем в качестве функции Лагранжа выражение (см. [5, 7, 10]):

$$L = -\tilde{m}_0 + \frac{1}{2} I \omega^\alpha \omega_\alpha + q A_\alpha u^\alpha + \mu^\alpha H_\alpha + \eta^\alpha E_\alpha, \quad (11)$$

где  $\tilde{m}_0$  — масса покоя;  $I$  — момент инерции;  $q$  — электрический заряд;  $\mu^\alpha = \mu^\alpha + \mu^\alpha$ ,  $\mu^\alpha = \kappa I \omega^\alpha$  — магнитный момент, обусловленный вращением ( $\kappa = \text{const}$ ),  $\mu^\alpha = \mu^\alpha e^\alpha_k$  — гипотетический «вмороженный» магнитный момент ( $\mu = \text{const}$ );  $\eta^\alpha = \eta^\alpha e^\alpha_k$  — электрический момент ( $\eta = \text{const}$ );  $E_\alpha = F_{\alpha\beta} u^\beta$ ,  $H_\alpha = \tilde{F}_{\alpha\beta} u^\beta$ ,  $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ ,  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\gamma\lambda} F^{\gamma\lambda}$ .

Подставляя функцию Лагранжа (11) в формулы (6) — (9), получаем

$$P_\alpha = \tilde{m} u_\alpha + q A_\alpha + [\mu \wedge E]_\alpha + [H \wedge \eta]_\alpha + [u \wedge M]_\alpha, \quad (12)$$

$$M_\alpha = I \omega_\alpha - \kappa I H_\alpha, \quad (13)$$

$$F_\alpha = q u^\lambda \nabla_\alpha A_\lambda + \mu^\lambda \nabla_\alpha H_\lambda + \eta^\lambda \nabla_\alpha E_\lambda + R_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma M^\lambda, \quad (14)$$

$$T_\alpha = [\mu \wedge H]_\alpha + [\eta \wedge E]_\alpha + (M \cdot u) u_\alpha, \quad (15)$$

где  $\tilde{m} = \tilde{m}_0 + I \frac{\omega^2}{2} - (\mu \cdot H) - (\eta \cdot E)$ .

Легко проверить, что для рассмотренной модели при наличии внешних полей ни  $\omega^2$ , ни  $M^2$  не являются, вообще говоря, интегралами уравнений движения (5).

Можно, однако, для перехода к модели частицы с постоянным по модулю спином провести следующую процедуру. Во-первых, действуя по аналогии с [7], устремить  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $I \rightarrow 0$ ,  $\tilde{m}_0 \rightarrow -\infty$  с таким расчетом, чтобы величина  $S_\alpha = I \omega_\alpha$  и перенормированная масса  $m_0 = \tilde{m}_0 + M^2/2I$  оставались конечными. В результате этого вместо (13) получим  $M_\alpha = S_\alpha$ , а в (12), (14) и (15) произойдут замены:  $\tilde{m} \rightarrow m = m_0 - (\mu \cdot H) - (\eta \cdot E)$ ,

$M_\alpha \rightarrow S_\alpha$ . Во-вторых, в рассматриваемом пределе в связи с тем, что  $\omega \rightarrow \infty$ , для 4-моментов  $\mu^\alpha$  и  $\eta^\alpha$  естественно принять

$$\mu^\alpha = \kappa S^\alpha, \quad \eta^\alpha = \beta S^\alpha, \quad (16)$$

где  $\kappa$  — скалярная, а  $\beta$  — псевдоскалярная постоянные, характеризующие частицу. После этого спиновое уравнение, которое теперь примет вид

$$S_\alpha = (S \cdot \dot{u}) u_\alpha + \kappa [S \wedge H]_\alpha + \beta [S \wedge E]_\alpha, \quad (17)$$

обеспечивает, очевидно, (с учетом условия  $S_\alpha u^\alpha = 0$ ) выполнение требуемого соотношения  $S^2 = \text{const}$ .

Завершая построение модели частицы с постоянным по модулю спином, представим ее уравнения движения в следующем, удобном для анализа и приложений, виде:

$$m \frac{Du_\alpha}{d\tau} = q E_\alpha + \mu^\lambda \bar{\nabla}_\alpha H_\lambda + \eta^\lambda \bar{\nabla}_\alpha E_\lambda + \frac{\bar{D}}{d\tau} [S \wedge Y]_\alpha + \hat{R}_{\alpha\beta\gamma\lambda} u^\beta u^\gamma S^\lambda, \quad (18)$$

$$\frac{\bar{D}S_\alpha}{d\tau} = [\mu \wedge H]_\alpha + [\eta \wedge E]_\alpha, \quad (19)$$

где  $\bar{D}\{\}_\alpha = n_\alpha^\lambda D\{\}_\lambda$ ,  $\bar{\nabla}_\alpha = n_\alpha^\lambda \nabla_\lambda$ ,  $Y_\alpha = \dot{u}_\alpha - \kappa E_\alpha + \beta H_\alpha$ .

Отметим, что преобразования, приводящие к (18), (19), существенно упрощаются, если воспользоваться тождествами:

$$\mu^\alpha \dot{H}_\alpha = \mu^\alpha u^\lambda \nabla_\lambda H_\alpha - u^\lambda \frac{D}{d\tau} [\mu \wedge E]_\lambda,$$

$$\eta^\alpha \dot{E}_\alpha = \eta^\alpha u^\lambda \nabla_\lambda E_\alpha + u^\lambda \frac{D}{d\tau} [\eta \wedge H]_\lambda.$$

### Список литературы

1. Тернов И. М., Бордовицын В. А. // УФН. 1980. Т. 132. № 2. С. 345.
2. Багров В. Г., Бордовицын В. А. // Изв. вузов. Физика. 1980. № 2. С. 67.
3. Rowe E. G. P., Rowe G. T. // Phys. reports. 1987. V. 149. P. 287.
4. Frenkel J. I. // Zs. Phys. 1926. V. 37. P. 243.
5. Тамм И. Е. // Zs. Phys. 1929. V. 55. P. 199.
6. Bartlum P. C. // Proc. Roy. Soc. A. 1965. V. 284. P. 204.
7. Schild A., Schlosser J. A. // Journ. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1299.
8. Елихин Е. И. // Тез. докл. III Сов. гравит. конференц. Ереван, 1972. С. 63.
9. Bailey I., Israel W. // Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 62.
10. Минкевич А. В., Соколовский А. А. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1975. № 4. С. 72.
11. Соколовский А. А. // Гравитация и электромагнетизм: Сб. трудов Всесоюз. совещ. Минск, 1981. С. 101.
12. Minkevich A. V., Karakura F. // Journ. Phys. A. 1983. V. 16. P. 1409.
13. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С. 22.
14. Минкевич А. В., Федоров Ф. И. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1968. № 5. С. 53.

Поступила в редакцию 05.01.90.

УДК 537.533.7

А. А. МОСКОТЕЛЬНИКОВ

### ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЧ-ДИАПАЗОНА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Дифракция электромагнитных волн в кристаллах приводит к существенному изменению показателя преломления среды. Так, в двухволновом приближении показатель преломления имеет вид (см., например, [1]):

$$n = n_0 \pm \Phi(\alpha), \quad (1)$$

где  $n_0$  — средний показатель преломления среды;  $\Phi(\alpha)$  — некая функция от  $\alpha$ , причем  $\alpha = \vec{\tau}(\vec{\tau} + 2\vec{\kappa})c^2/\omega^2$ , где  $\vec{\tau}$  — фиксированный вектор обратной

решетки, а  $\vec{\kappa} = \vec{n}'\omega/c$  — волновой вектор электромагнитной волны в вакууме,  $\vec{n}'$  — нормаль к поверхности кристалла.

Как отмечено в работах [2, 3], показатель преломления  $n$  в рентгеновском диапазоне спектра в условиях дифракции может принимать значения больше единицы, что дает возможность выполнения условия Черенкова:

$$1 - \beta n(\omega, \Theta) \cos \Theta = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\beta = v/c$ ;  $v$  — скорость заряженной частицы, летящей в среде;  $c$  — скорость света в среде;  $\Theta$  — угол между  $\vec{v}$  и направлением излучения рентгеновского диапазона.

Этот механизм излучения, названный параметрическим рентгеновским излучением (ПРИ), обнаружен экспериментально [4, 5].

В данной работе с помощью методов, развитых в [2, 3], рассматривается излучение электромагнитных волн СВЧ-диапазона при взаимодействии пучка электронов с периодической диэлектрической структурой. Для реализации приближения двухволновой дифракции предполагается, что средний показатель преломления структуры  $n_0$  мало отличается от единицы, и постоянная структура  $d$  имеет величину порядка длины волны рассматриваемого излучения.

Спектральная плотность излучения в единицу телесного угла равна [6]:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \sum_s \left| \int \vec{E}_{\vec{k}}^{(s) (-)}(\vec{r}, \omega) \vec{j}(\vec{r}, \omega) d^3r \right|^2. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{j}(\vec{r}, \omega)$  — плотность тока электрона, имеющая вид:

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = e\vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)), \quad (4)$$

где  $\vec{v}(t)$  — скорость электрона;  $\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$  — дельта-функция.

Напомним, что [6]

$$\vec{E}_{\vec{k}}^{(s) (-)*}(\vec{r}) = \vec{E}_{-\vec{k}}^{(s) (+)}(\vec{r}). \quad (5)$$

$\vec{E}_{-\vec{k}}^{(s) (+)}(\vec{r})$  — амплитуда поля в структуре, которая в двухволновом приближении записывается следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{-\vec{k}}^{(s) (+)}(z) = & E_0^{(s)} \exp(-i\vec{\kappa}\vec{r}) \frac{1}{2(\epsilon_1^{(2,s)} - \epsilon_1^{(1,s)})} \{ e_0^{(s)} [(2\epsilon_1^{(2,s)} - g_0) \times \\ & \times \exp(i\kappa\epsilon_1^{(1,s)}(L-z)/\gamma_0) - (2\epsilon_1^{(1,s)} - g_0) \exp(i\kappa\epsilon_1^{(2,s)}(L-z)/\gamma_0)] - \\ & - \exp(-i\vec{\tau}\vec{r}) e_1^{(s)} \frac{\beta' g_{\tau}}{c^{(s)}} [\exp(i\kappa\epsilon_1^{(1,s)}(L-z)/\gamma_0) - \\ & - \exp(i\kappa\epsilon_1^{(2,s)}(L-z)/\gamma_0)] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $E_0^{(s)}$  — амплитуда электромагнитного поля перед структурой;  $g_0 = \epsilon_0 - 1$  — диэлектрическая восприимчивость;  $g_{\tau} = \epsilon_{\vec{\tau}} = \epsilon_{-\vec{\tau}}$ , где  $\epsilon_{\vec{\tau}}$  и  $\epsilon_{-\vec{\tau}}$  — коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\vec{r}, \omega)$  в ряд Фурье по векторам обратной решетки  $\vec{\tau}$ . Предполагается, что  $g_0$  и  $g_{\tau}$  не зависят от  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{(1,2)} = & \frac{1}{4} (g_0 + \beta' g_0 - \beta' \alpha) \pm \frac{1}{4} \{ g_0 + \beta' g_0 - \beta' \alpha \}^2 + \\ & + 4\beta (g_0 \alpha - \Delta_{\tau}^2) \}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\beta' = \frac{\gamma_0}{\gamma}$ ;  $\gamma_0 = \cos(\vec{\kappa}, \vec{n}')$ ;  $\gamma = \cos(\vec{k}, \vec{n}')$ ;  $c^{(s)} = \vec{e}_0^{(s)} \vec{e}_1^{(s)}$ ;  $\alpha = \vec{\tau}(\vec{\tau} + 2\vec{\kappa})c^2/\omega^2$ ;  $\Delta_{\tau}^2 = g_0^2 - g_{\tau}^2 c^{(s)^2}$ ;  $s = 1, 2$ ;  $\vec{e}_0^{(s)}$  и  $\vec{e}_1^{(s)}$  — векторы поляризации.

При этом  $\vec{e}_0^{(1)}$  и  $\vec{e}_1^{(1)}$  перпендикулярны к плоскости, образованной векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k} + \vec{\tau}$  ( $\sigma$ -поляризация), а векторы  $\vec{e}_0^{(2)}$  и  $\vec{e}_1^{(2)}$  перпендикулярны, с одной стороны, векторам  $\vec{k}$  и  $\vec{k} + \vec{\tau}$ , а с другой стороны, векторам  $\vec{e}_0^{(1)}$  и  $\vec{e}_1^{(1)}$  ( $\pi$ -поляризация).

Далее,  $z$  — координата по оси  $Z$ , направленной перпендикулярно к нашей структуре;  $L$  — толщина структуры.

Проводя интегрирование в (3) для фиксированной дисперсионной ветви, после суммирования по поляризациям имеем следующее выражение для спектрально-угловой плотности фотонов, испущенных в направлении дифракции:

$$dN = \frac{-2e^2 L v^2 g_\tau^2 \sin^3 \Theta d\Theta d\varphi}{\pi c^3 \bar{n} (\alpha^2 + 4g_\tau^2) \beta \cos \Theta |dn/d\omega|_{\omega = \omega_B}} \quad (8)$$

Здесь

$$dn/d\omega = -\frac{1}{4} \alpha'(\omega) + \frac{1}{4} \frac{\alpha \alpha'(\omega)}{V \alpha^2 + 4g_\tau^2}; \quad (9)$$

$\beta = v/c$ ,  $v$  — скорость электрона;  $\alpha'$  — производная от  $\alpha$  по  $\omega$ .

$$\alpha(\omega) = (2|\vec{k}| |\vec{\tau}| (\sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_B - \cos \Theta \sin \Theta_B) - \tau^2) \frac{c^2}{\omega^2}, \quad (10)$$

где  $\Theta_B$  — угол Брэгга;  $\Theta$ ,  $\varphi$  — соответственно полярный и азимутальный углы между вектором  $\vec{k} + \vec{\tau}$  и вектором скорости электронов  $\vec{v}$ , причем  $\Theta$  отсчитывается от направления вектора  $\vec{v}$ , а  $\varphi$  — от плоскости, образованной векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{\tau}$ .

На основе выражения (8) рассчитаны угловые распределения интенсивности  $dN$  параметрического излучения, образованного электроном, пролетающим через периодическую структуру. Постоянная структура  $d=5$  мм,  $\lambda \sim 3$  мм, толщина периодической структуры  $L=0,1$  м (решетка достаточно толстая, так что выполняется неравенство  $|\kappa \varepsilon_1^{(1,2)} L / \gamma_0| \gg 1$ ) Получено, что при энергии электронов  $E_{эл} = 2-5$  МэВ выход параметрического излучения в угловом интервале  $\Delta\Theta \sim 2$  град при  $\varphi = \pi$  составил величину  $10^{-5}-10^{-3}$  фотонов.

На рис. 1 показано угловое распределение интенсивности излучения для энергии электрона 2 МэВ при параметрах периодической структуры  $g_0=0,05$  и  $g_\tau=0,01$ . На рис. 2 — угловое распределение излучения для

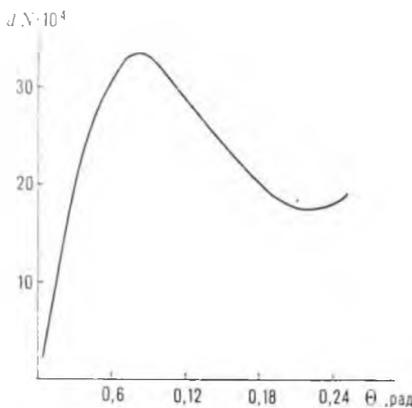


Рис. 1. Угловое распределение параметрического излучения для  $E_{эл} = 2$  МэВ,  $g_0=0,05$ ,  $g_\tau = 0,01$ ,  $\varphi = \pi$

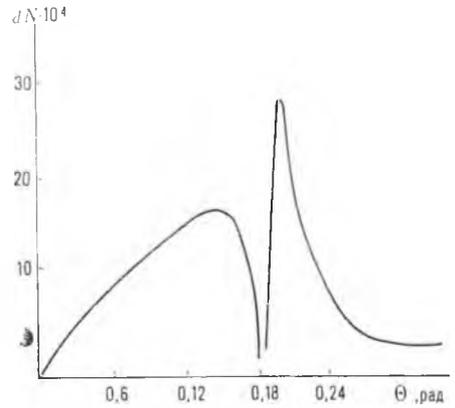


Рис. 2. Угловое распределение параметрического излучения для  $E_{эл} = 2$  МэВ,  $g_0 = 0,1$ ,  $g_\tau = 0,01$ ,  $\varphi = \pi$

той же энергии электрона и  $g_{\tau}$ , но при  $g_0=0,1$ . В обоих случаях  $\varphi=\pi$ ;  
 $\omega_B = \frac{2\pi c}{\lambda} = 6,28 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , а  $\Theta_B$  находится из условия Брэгга:

$$2d \sin \Theta_B = \frac{2\pi c}{\omega_B}, \quad (11)$$

Видно, что при  $g_0=0,1$  в угловом распределении появляется разрыв при углах излучения, для которых выполняется равенство:

$$1 - \beta n_0 \cos \Theta = 0. \quad (12)$$

Максимальный угол параметрического излучения  $\Theta_m$  определяется из условия:

$$\sin \Theta \cos \varphi \cos \Theta_B - \cos \Theta \sin \Theta_B = 0. \quad (13)$$

При углах, больших  $\Theta_m$ , уравнение (2) не имеет положительных решений относительно  $\omega$ .

Данный метод расчета, а также полученные результаты могут быть применены при описании источников СВЧ-излучения.

Автор выражает глубокую благодарность научному сотруднику НИИ ядерных проблем О. Т. Градовскому за постановку задачи и многочисленные полезные советы в ходе обсуждения предлагаемой работы.

### Список литературы

1. Пинскер З. Г. Рентгеновская кристаллооптика. М., 1982.
2. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 944.
3. Барышевский В. Г. Канализование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1982.
4. Адншев Ю. Н., Барышевский В. Г., Воробьев С. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 41. Вып. 7. С. 295.
5. Воробьев С. А., Калинин Б. Н., Пак С., Потылицын А. П. Там же. 1987. Т. 42. Вып. 1. С. 3.
6. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. Минск, 1976.

Поступила в редакцию 02.01.90.

УДК 620.179.153

А. Д. ЛЕВКОВИЧ, М. С. МУАИЕД,  
А. Н. ПЕРЦЕВ, ХАССАН ИСМАИЛ Х.

### ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОГО МОТТОВСКОГО РАССЕЯНИЯ НА БЕТА-СПЕКТР ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ПОГЛОТИТЕЛЬ С УЧЕТОМ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

При прохождении бета-частиц через вещество происходит изменение энергии частиц в основном в результате ионизационных потерь, а также выбывание их из пучка за счет обратного кулоновского рассеяния [1, 2]. Оба процесса обычно рассматриваются раздельно. Сечение кулоновского рассеяния используется в классическом варианте (рассеяние Резерфорда), релятивистском варианте (рассеяние Дарвина — Резерфорда), квантовом варианте (рассеяние Мотта) [1, 3].

Экспериментально наблюдаемая стабилизация энергетических спектров бета-частиц после прохождения слоев поглотителей [4] в случае небольших атомных номеров вещества поглотителей хорошо объясняется с помощью правил преобразования, полученных на основе формулы Бете — Блоха для конечных поглотителей без учета кулоновского рассеяния (граничные энергии бета-спектров меньше 1 МэВ) [5]. С увеличением порядкового номера ядер поглотителя необходимо учитывать влияние кулоновского обратного рассеяния на энергетический спектр бета-частиц, прошедших через слой поглотителя. В работе [6] получено аналитическое выражение, описывающее влияние резерфордовского и дарвин-

резерфордовского обратного рассеяния на энергетический спектр бета-частиц; показано, что дарвиновская поправка ослабляет действие резерфордовского рассеяния. При расчете учитывалось изменение энергии бета-частиц за счет ионизационных потерь.

Цель данной работы — получить аналитическое выражение для обратного моттовского рассеяния, сравнить дарвиновские и моттовские поправки, сохранить совместное рассмотрение ионизационных потерь и обратного кулоновского рассеяния бета-частиц.

Подход к решению задачи аналогичен используемому в [6]. Моноэнергетический пучок бета-частиц с энергией  $E_0$  и интенсивностью  $I_0$  падает на поглотитель; при прохождении поглотителя толщиной  $\chi$  изменяется энергия бета-частиц (ионизационные потери) и их интенсивность (обратное кулоновское рассеяние); частица выбывает из пучка при рассеянии в угле  $\frac{\pi}{2} - \pi$ . Изменение интенсивности пучка в слое  $d\chi$  на глубине  $\chi$ :

$$dI(\chi) = -\sigma \frac{N_A}{A} I(\chi) d\chi, \quad (1)$$

где  $N_A$  — число Авогадро;  $A$  — массовое число для ядер поглотителя;  $\sigma$  — сечение рассеяния в углы  $\pi/2 - \pi$ .

Мотт вычислил квантовое сечение рассеяния электрона на точечном ядре с зарядом  $Z$ , используя релятивистскую теорию Дирака. В результате получились бесконечные ряды. Они оценивались численно или аналитически. Аналитический результат Мак-Кинли и Фешбаха для отношения сечения Мотта к сечению Дарвина — Резерфорда имеет вид [1, 3]:

$$\frac{\sigma_M(\theta)}{\sigma_{\text{ДР}}(\theta)} = 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha\beta\pi \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right), \quad (2)$$

где  $\alpha \cong Z/137$ ;  $Z$  — порядковый номер ядер поглотителя;  $\theta$  — угол рассеяния бета-частицы;  $\beta = v/c$ ;  $c$  — скорость света;  $v$  — скорость бета-частицы.

Отношение (2) справедливо при  $\alpha \ll 1$  с точностью до членов порядка  $\beta^2$  и  $\alpha\beta$  (для элементов с  $Z \leq 30$ ).

Моттовское сечение рассеяния при оговоренных условиях принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_M(\theta) = \frac{Z^2}{4} (1 - \beta^2) \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 & \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \right. \\ & \left. + \alpha\pi \frac{1}{\beta^3} \frac{1}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} - \alpha\pi \frac{1}{\beta^3} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Соответственно } \sigma_M = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_M(\theta) d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Интегрирование (1) с учетом (2) и (3) в результате довольно громоздких преобразований приводит к следующему результату:

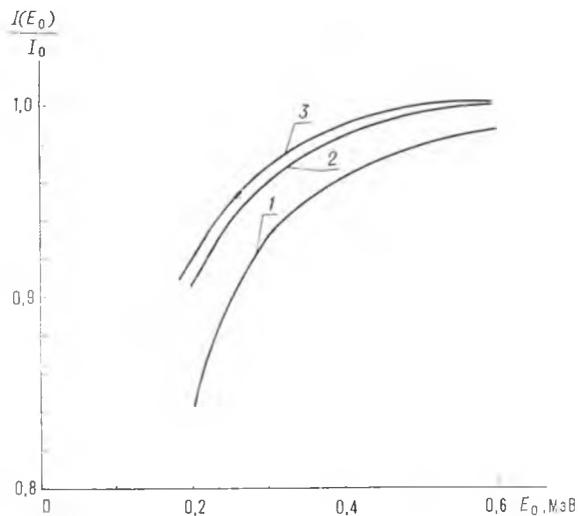
$$\begin{aligned} I(\chi) = I_0 \exp \left[ -\frac{\pi Z^2 e^4}{4} \cdot \frac{N_A}{A} \cdot \frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\rho}{C} \left[ \left( E_0 - \frac{C}{\rho} \chi \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - E_c^{\alpha-2} \right] \right] \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\pi Z^2 e^4}{4} \frac{N_A}{A} \frac{\rho}{C} \left[ \alpha \left( \frac{\left( E_0 - \frac{C}{\rho} \chi \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}}{\left( E_0 - \frac{C}{\rho} \chi \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha} - \frac{E_0^{\alpha-1}}{E_0 + \alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\alpha^{\alpha-2} (3 - \alpha) \ln \frac{a^{\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{E_0^{\alpha} - \frac{C}{\rho} \chi}}{a^{\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{E_0^{\alpha}}} \right] \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \exp \left[ -\frac{\pi Z^2 e^4}{4} \frac{\alpha}{a^{2-\alpha}} \frac{N_A}{A} \frac{\rho}{C} \right] \left[ 3,1 \cdot 10^{-3} Z \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2a}{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \sqrt{\frac{E_0 + 2a}{E_0}} \right] - 3 \left[ \frac{\sqrt{\frac{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2a}{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}}}{\frac{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2a}{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}} - \frac{\sqrt{\frac{E_0 + 2a}{E_0}}}{\frac{E_0 + 2a}{E_0} + 1} \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \left[ \frac{\sqrt{\frac{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2a}{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}}}{\left(\frac{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2a}{\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2} - \frac{\sqrt{\frac{E_0 + 2a}{E_0}}}{\left(\frac{E_0 + 2a}{E_0} + 1\right)^2} \right] \right. \\
 & \left. - 0,693a^2 \left[ \frac{1}{\left[\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + a\right]^2} - \frac{1}{(E_0 + a)^2} \right] \frac{1}{2} + \right. \\
 & \left. + \frac{a}{3} \left[ \frac{1}{\left[\left(E_0^\alpha - \frac{C}{\rho} \chi\right)^{\frac{1}{\alpha}} + a\right]^3} - \frac{1}{(E_0 + a)^3} \right] \right] \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $a = mc^2 = 0,511$  МэВ;  $C$  и  $\alpha$  — постоянные для выбранного поглотителя;  $\rho$  — плотность поглотителя;  $\chi$  — поверхностная плотность поглотителя.

Первый экспоненциальный множитель в (4) представляет резерфордское рассеяние, второй — дарвиновскую, а третий — моттовскую поправку.

Конкретные результаты для никелевого поглотителя толщиной  $0,05$  г/см<sup>2</sup> представлены на рисунке. Можно видеть, что основную поправку к обратному резерфордскому рассеянию вносит дарвиновский коэффициент; учет квантового характера рассеяния для рассматриваемых энергий бета-частиц (менее  $1$  МэВ) и порядковых номеров ядер поглотителя (менее  $30$ ) приводит к изменению функции пропускания менее чем на  $1\%$ .



Функция пропускания поглотителя (никель, массовая толщина  $0,05$  г/см<sup>2</sup>) в зависимости от энергии бета-частиц для резерфордского (1), дарвин-резерфордского (2), моттовского (3) рассеяния

Небольшое значение моттовской поправки для моноэнергетических бета-частиц обуславливает такие же небольшие изменения непрерывных спектров бета-частиц, испускаемых ядрами при бета-распаде, при переходе от рассеяния Дарвина — Резерфорда к рассеянию Мотта.

Таким образом, в рассматриваемом случае учет моттовского рассеяния вносит незначительные поправки по сравнению с дарвин-резерфоровским рассеянием при описании влияния обратного кулоновского рассеяния на энергетический спектр бета-частиц, прошедших через поглотитель.

### Список литературы

1. Стародубцев С. В., Романов А. М. Прохождение заряженных частиц через вещество. Ташкент, 1962.
2. Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия / Под ред. К. Зигбана. Пер. с англ. М., 1969. Т. 1.
3. Лейман К. Взаимодействие излучения с твердым телом и образование элементарных дефектов / Пер. с англ. М., 1979.
4. Перцев А. Н., Ходасевич В. В., Касько И. В., Ермолкевич Е. Э. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-энерг. навук. 1984. № 2. С. 29.
5. Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 27.
6. Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н., Муайед М. С. Там же. 1989. № 3. С. 24.

Поступила в редакцию 30.11.89.

УДК 535.33

*А. П. ЗАЖОГИН, А. И. СЕРАФИМОВИЧ, С. Н. ШАШКОВ*

### О ПОЛОЖЕНИИ ЧИСТО ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕХОДА В «СВОБОДНОМ» ИОНЕ УРАНИЛА

Анализ описанного в литературе большого экспериментального материала по электронным спектрам поглощения и люминесценции соединений уранила [1—3] и исследованных нами спектров [4—6] позволяет предположить, что большинство ураниловых комплексов, независимо от симметрии координационной сферы и природы лигандов, в целом сохраняют неизменной систему электронных уровней. Следует, правда, отметить, что нет единого мнения о природе электронных уровней [7]. В основном ураниловые соединения в видимой области спектра характеризуются сравнительно слабым поглощением с более или менее выраженной колебательной структурой.

Положение полос и их интенсивность в спектрах в общем случае зависят от состава и строения комплекса, однако до сих пор не ясен вопрос, какими параметрами лигандов в целом определяются частота и интенсивность электронных переходов.

В связи с этим нам представилось разумным предпринять попытку установить зависимость положения наиболее длинноволнового (первого) чисто электронного перехода от структуры комплекса и свойств лигандов. Для решения поставленной задачи нами измерены спектры поглощения гексагидрата уранилнитрата в различных растворителях [8] и впервые найдены количественные соотношения между положением чисто электронного перехода  $\nu_{0-0}$  иона уранила в зависимости от донорно-акцепторных свойств окружающих его лигандов и молекул растворителя. Для определения указанной зависимости использован эмпирический параметр, характеризующий растворитель, донорное число по Гутману (DN). Полученные результаты позволили предположить, что такая же зависимость  $\nu_{0-0}$  от DN должна наблюдаться и для растворов других солей уранила, а связь спектральных характеристик комплексов со структурой окружения и природой лигандов должна найти свое более полное отра-

жение в спектрах люминесценции, поскольку известно, что спектры люминесценции растворов при низких температурах (77 К) более чувствительны к изменениям состава координационной сферы иона уранила. Лучшее разрешение спектров люминесценции позволяет к тому же с большей точностью определить положение перехода  $\nu_{0-0}$ .

В настоящей работе на основании исследования низкотемпературных ( $T = 77\text{K}$ ) спектров люминесценции растворов солей  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{UO}_2(\text{ClO}_4)_2 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  в ряде органических растворителей (ДМФА, ДМАА, ДМСО) и воде изучена зависимость положения чисто электронного перехода  $\nu_{0-0}$  в ионе уранила от донорной способности указанных растворителей, а также проведены теоретические расчеты положения перехода в «свободном» ионе уранила и сопоставление расчетов с экспериментально полученным значением частоты  $\nu_{0-0}$ .

На рис. 1 приведены спектры люминесценции  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  в указанных растворителях. Параметры, характеризующие растворитель, — донорное число и значения соответствующих частот  $\nu_{0-0}$  комплексов уранила в этих растворителях — даны в таблице. Наблюдается практически линейная зависимость между положениями переходов и значениями донорных чисел (рис. 2), что позволяет для указанного ряда растворителей записать уравнение для определения положения первого электронного перехода в комплексах уранила в зависимости от величины донорного числа растворителя в следующем виде:

$$\nu_{0-0}(\text{DN}) = \nu_{0-0}(\text{DN} = 0) - k\text{DN},$$

где  $\nu_{0-0}(\text{DN} = 0)$  ( $21562 \text{ см}^{-1}$ ) — частота  $\nu_{0-0}$  перехода в комплексе уранила при значении донорного числа, равного нулю;  $k = 57,54 \text{ см}^{-1}$ . Определение значений  $\nu_{0-0}(\text{DN} = 0)$  и  $k$  проведено в рамках метода наименьших квадратов.

Следует отметить, что выбор указанных растворителей был преднамеренным, так как наши предварительные исследования показали, что в этих растворителях спектры люминесценции солей  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{UO}_2(\text{ClO}_4)_2 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , где последняя взята в качестве эталона некоординированного ацидолигандами комплекса уранила, практически полностью

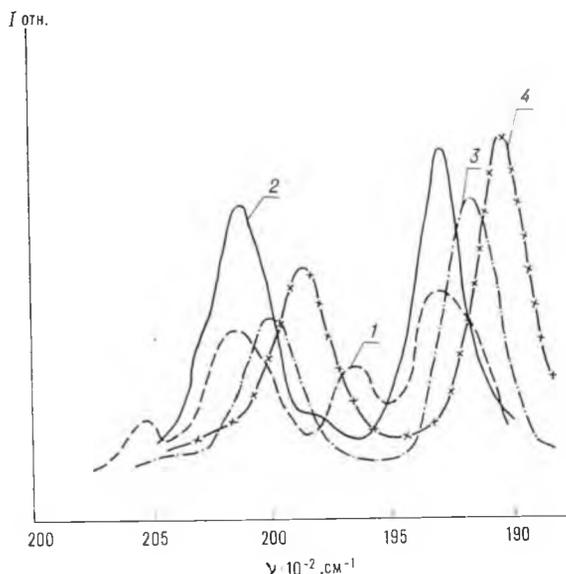


Рис. 1. Спектры люминесценции растворов  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  в растворителях: 1 — вода; 2 — ДМФА; 3 — ДМАА; 4 — ДМСО

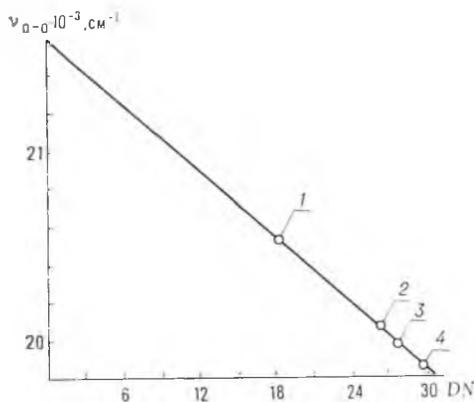


Рис. 2. График зависимости частоты  $\nu_{0-0}$  в комплексах уранила от величины донорного числа DN растворителя (номера точек согласно таблице)

Частоты  $\nu_{0-0}$  из спектров люминесценции растворов в растворителях и донорные числа растворителей

№ пп	Растворитель	$\nu_{0-0}$ , см <sup>-1</sup>	Донорное число
1	Вода	20525	18
2	ДМФА	20070	26,6
3	ДМАА	19970	27,8
4	ДМСО	19840	29,8

совпадают, тогда как для ацетона, диоксана, ТБФ и т. д. [8] спектры указанных солей довольно существенно различаются. В первом случае можно сделать заключение, что первая координационная сфера состоит полностью из молекул растворителя. С использованием указанного предположения нами в работе [9] установлено количество молекул растворителя, координирующих ион уранила ( $\Sigma\text{CN}=5$ ). Во втором случае первичная сфера частично остается, но ее также можно рассчитать, используя понятие о суммарном донорном числе окружающих ион уранила лигандов [10]. Соответствующая формула имеет вид  $\nu_{0-0}(\Sigma\text{DN}) = \nu_{0-0}(\Sigma\text{DN}=0) - m\Sigma\text{DN}$ , где  $\nu_{0-0}(\Sigma\text{DN}=0)$ , как и прежде, равно 21 562 см<sup>-1</sup>, а значение коэффициента  $m$  зависит от координационного числа иона уранила.

Таким образом, можно сделать вывод, что, независимо от КЧ, частота  $\nu_{0-0}$  перехода в «свободном» ионе уранила одна и та же, и это значение может быть принято за основу при сравнении экспериментальных и теоретических результатов.

Теоретическое рассмотрение взаимодействий в комплексах уранила, их проявлений в вибронных спектрах можно провести, применив методы квантовой химии. В связи с тем, что детальному описанию методик расчета иона уранила методами квантовой химии посвящен ряд монографий [11, 12] и обзоров [13—15], мы ограничимся лишь кратким изложением главных положений общей теории МО, лежащей в основе примененного нами при анализе электронной структуры иона уранила полуэмпирического метода расчета.

Используя приближения Малликена [16] и работы [17, 18], матричные элементы матрицы Фока можно записать следующим образом:

$$H_{\mu\mu}^A = -I_{\mu}[A] - \sum_{B \neq A} Z_B/R_{AB} \cdot 14,4 \text{ (эВ);}$$

$$H_{\mu\nu}^{AB} = (2 - |S_{\mu\nu}|) S_{\mu\nu} (H_{\mu\mu}^A + H_{\nu\nu}^B)/2,$$

где  $I_{\mu}[A]$  — энергия валентного электрона, находящегося в  $\chi_{\mu}$  состоянии с учетом конфигурации и заряда остальных валентных электронов атома  $A$ ;  $Z_B$  — эффективный заряд на атоме  $B$ , вычисленный по Малликену;  $R_{AB}$  — расстояние между атомами  $A$  и  $B$ , нм. ( $B$  в выражении для  $H_{\mu\mu}^A$  фигурируют члены, учитывающие влияние заряженного поля лигандов — члены «кристаллического поля»).

Используя для решения вековых уравнений приведенные матричные элементы  $H_{\mu\nu}$ , а также данные по радиальным частям хартрифовских атомных орбиталей из работы [19] и энергий атомных орбиталей урана в его различных электронных состояниях из [20], можно получить данные по электронной структуре катиона  $\text{UO}_2^{2+}$ . Из этих расчетов, в частности, следует, что электронная конфигурация иона урана —  $6p^{5,2975}5f^{2,7106}d^{0,734}7s^{0,114}$ , а для кислорода —  $2s^{1,692}2p^{4,831}$ . Теоретическое значение первого чисто электронного перехода, соответствующего переходу  $\dots (2\sigma_u)^2 \rightarrow \dots (2\sigma_u)^1(\varphi_u)^1$  или  $\dots (2\sigma_u)^2 \rightarrow \dots (2\sigma_u)^1(1d_u)$  и запрещенного по четности, равно 20 150 см<sup>-1</sup>. Различие между экспериментальным и теоретическим значениями (теоретическое значение очень близко к значению, полученному в работе [7]) может быть объяснено приближением используемого метода [11, 12]. В работе [7] показано, что для улуч-

шения точности расчетов может быть использована концепция «переходного состояния», предложенная Слейтером. В нашем случае приблизить результаты теоретического расчета к экспериментальным данным, по-видимому, можно, введя в выражение для недиагональных элементов матрицы  $H_{\mu\nu}^{AB}$  варьируемого коэффициента вместо выражения  $(2 - |S_{\mu\nu}|)$ .

### Список литературы

1. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Минск, 1981.
2. Рабинович Е., Белфорд Р. Спектроскопия и фотохимия соединений уранила. М., 1968.
3. Dieke G. H., Duncanson A. V. F. Spectroscopic properties of Uranium Compounds. N. Y., 1949.
4. Зажогин А. П., Комяк А. И., Серафимович А. И., Титков Е. Ф. // ЖПС. 1986. Т. 44. № 3. С. 415.
5. Зажогин А. П., Комяк А. И., Серафимович А. И., Титков Е. Ф. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1983. № 1. С. 102.
6. Зажогин А. П., Комяк А. И., Серафимович А. И., Титков Е. Ф. // ЖПС. 1989. Т. 51. № 1. С. 129.
7. Ионова Г. В., Першина В. Г., Сураева Н. И. // Радиохимия. 1989. № 4. С. 19.
8. Зажогин А. И., Комяк А. И., Титков Е. Ф., Серафимович А. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 24.
9. Зажогин А. П., Комяк А. И., Серафимович А. И. // Тез. докл. Всесоюз. совещ. по молекуляр. люминесценции. Караганда, 1989. С. 33.
10. Зажогин А. П., Комяк А. И., Серафимович А. И. Там же. С. 186.
11. Ионова Г. В., Спицын В. И. Эффективные заряды в соединениях актиноидов. М., 1989.
12. Ионова Г. В., Першина В. Г., Спицын В. И. Электронное строение актиноидов. М., 1986.
13. Глебов В. А. Электронное строение уранильных соединений. М., 1986.
14. Борковский Н. Б. Электронная структура и спектроскопические свойства простейших комплексов уранила. Минск, 1985.
15. Gorller-Walrand C., De Jaire S. // Journ. Chem. Phys. 1972. V. 69. P. 726.
16. Mulliken R. S. Ibid. 1949. V. 46. № 9/10. P. 497.
17. Cusachs L. C., Cusachs V. B. // Journ. Phys. Chem. 1967. V 71. № 4. P. 1060.
18. Берсукер И. Б. Электронное строение и свойства координационных соединений. Л., 1976.
19. Шашков С. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. С. 22.
20. Шашков С. Н. Там же. 1989. № 2. С. 67.

Поступила в редакцию 23.04.90.

УДК 541.65

М. Р. ПОСЛЕДОВИЧ, А. М. МАЛЯРЕВИЧ,  
КИМ ЗЕН ХО, Л. Е. СЛЕПЦОВ

### НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СПЕКТРЫ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ И СТРОЕНИЕ МОЛИБДАТОВ УРАНИЛА

Среди комплексных соединений уранила безводные молибдатные соединения уранила наименее изучены, что связано с трудностями синтеза этого класса веществ [1]. Молибдат уранила и димолибдатуранил калия наиболее полно исследованы с помощью структурного анализа и спектроскопическими методами [2—4]. Спектральные исследования других безводных соединений димолибдатуранилатов щелочных металлов, выполненные в этих работах, в общем подтверждают идентичность строения координационной сферы атомов урана для всех изученных веществ, которая представляет собой искаженную пентагональную бипирамиду. Однако при интерпретации спектров люминесценции авторы не учитывали установленной ими неравноценности строения координационных полиэдров соседних атомов урана в элементарной ячейке кристалла.

Изучение структурных низкотемпературных спектров люминесценции указанного класса веществ необходимо проводить на основе предположения о наличии нескольких центров свечения, различающихся геометрическим строением. Каждый из таких центров должен иметь свою частоту чисто электронного перехода  $\nu_0$  и набор колебательных частот, комбинирующих с  $\nu_0$ . С учетом изложенного нами проведено исследование спектров люминесценции безводных молибдатов уранила.

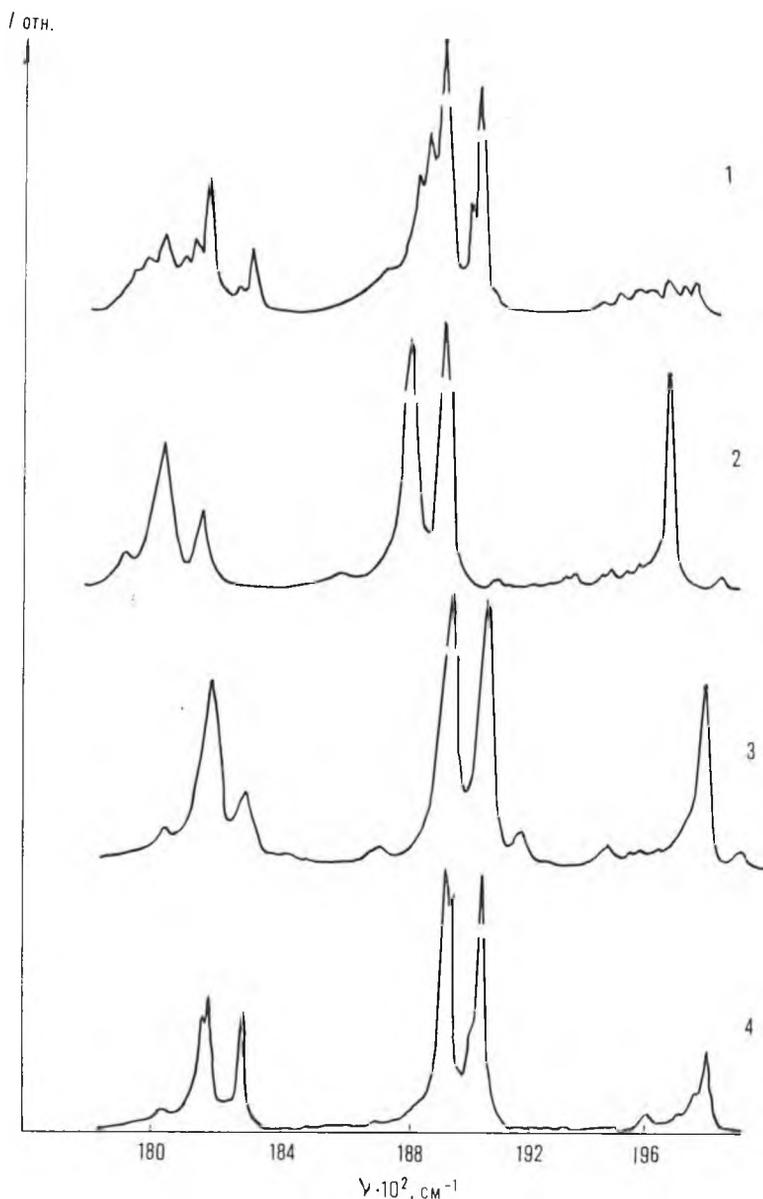
Спектры люминесценции кристаллических порошков регистрировались при 77 К на установке, собранной на базе двойного дифракционного монохроматора ДФС-12. Спектральная ширина щели устанавливалась в пределах  $0,4 \div 2$  см<sup>-1</sup>. Люминесценция возбуждалась излучением ртутной лампы ДРШ-1 000 на длине волны 365 нм.

Димолибдатуранилаты калия, рубидия и цезия обладают сильной люминесценцией при комнатной температуре, простой молибдат уранила — заметной люминесценцией при 77 К.

Из анализа спектров люминесценции указанных соединений (см. рисунок) можно заключить, что их строение (повторяющиеся гомологичные группы линий) подчиняется общим закономерностям, характерным для ураниловых соединений [5]. Следует отметить, что электронно-колебательные полосы, принадлежащие полностью симметричному и антисимметричному колебаниям ионов уранила, во всех спектрах обладают сложной структурой и состоят из нескольких близкорасположенных линий различной интенсивности. Аналогичная структура возникает и в области электронного перехода. Сопоставление ее со структурой в области проявления полностью симметричного валентного колебания  $\nu_1 \text{UO}_2^{2+}$  позволяет сделать вывод об их сходстве. Это подтверждает предположение о том, что структура полосы в области электронного перехода обусловлена несколькими близко расположенными электронными переходами, принадлежащими различным центрам.

Среди исследованных нами низкотемпературных спектров люминесценции молибдатов уранила спектр простого соединения  $\text{UO}_2\text{MoO}_4$  (см. рисунок) отличается богатой структурой, которая сохраняется во всех гомологичных группах линий. Можно отчетливо заметить уже со второй группы, что каждая интенсивная линия сопровождается менее заметным спутником, расположенным на расстоянии  $33$  см<sup>-1</sup> со стороны меньших частот. Анализ разности частот идентичных линий в различных группах позволил выделить две линии в коротковолновой области спектра ( $19\ 816$  и  $19\ 783$  см<sup>-1</sup>), которые можно идентифицировать как электронные переходы в двух центрах. На расстояниях  $742$  и  $887$  см<sup>-1</sup> от электронного перехода  $19\ 816$  см<sup>-1</sup> проявляются две самые интенсивные линии спектра, которые хорошо совпадают с частотами  $744$  и  $884$  см<sup>-1</sup>, отмеченными в спектре комбинационного рассеяния [6]. В других гомологичных полосах эти линии остаются наиболее интенсивными и узкими, причем при переходе от одной полосы к другой значения частот указанных колебаний сохраняются практически постоянными, а интенсивность линий падает при увеличении номера гомологичной полосы. Повторение других линий этого центра с частотой  $742$  см<sup>-1</sup> позволяет отнести ее к полностью симметричным валентным колебаниям  $\nu_1$  иона уранила, а частоту  $887$  см<sup>-1</sup> — к антисимметричным  $\nu_3 \text{UO}_2^{2+}$ .

Выделение в коротковолновой части спектра люминесценции  $\text{UO}_2\text{MoO}_4$  линий, относящихся к комбинации чисто электронного перехода с деформационным колебанием иона уранила, затруднено из-за отсутствия характерных признаков проявления этого колебания и перекрытия с очень интенсивными линиями, обусловленными электронно-колебательными переходами на подуровни энергии решеточных колебаний и колебаний молибдатных групп. Однако, начиная с третьей гомологичной полосы, деформационное колебание проявляется в спектре люминесценции достаточно узкой линией, интенсивность которой сравнима с интенсивностью линий, вызванных валентными колебаниями  $\text{UO}_2^{2+}$ . В четвертой



Спектры люминесценции ( $T = 77$  K) кристаллических порошков  $\text{UO}_2\text{MoO}_4$  (1),  $\text{K}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$  (2),  $\text{Rb}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$  (3),  $\text{Cs}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$  (4)

и пятой полосах картина меняется: становится выше интенсивность линий, связанных с валентными колебаниями  $\text{UO}_2^{2+}$ . Частота деформационных колебаний иона уранила колеблется в пределах  $271 \div 280 \text{ см}^{-1}$  при переходе от одной группы линий к другой. Интенсивность этой линии возрастает от первой до третьей гомологичной группы, затем резко падает, хотя остается достаточно высокой по сравнению с интенсивностями линий, обусловленных валентными колебаниями  $\text{UO}_2^{2+}$ . Такое своеобразное распределение относительных интенсивностей линий валентных и деформационных колебаний иона уранила, наблюдаемое в спектре люминесценции молибдатуранила для первого центра свечения, подтверждает его низкосимметричное пространственное строение и сильное искажение самой группы уранила. Большая величина отношения  $\nu_3/\nu_1$  иона уранила

(1,195 для первого центра свечения) также подтверждает рентгеноструктурные данные [2, 3] о значительном отступлении этой группы от линейной и симметричной модели.

В спектре излучения первого центра уранилмолибдата  $UO_2MoO_4$  во всех зарегистрированных нами гомологичных группах линий проявляется полносимметричное валентное колебание  $\nu_1(A)$  молибдатной группы, частота которого в первой полосе спектра люминесценции ( $954\text{ см}^{-1}$ ) хорошо совпадает с частотой ( $955\text{ см}^{-1}$ ) в спектре КР. При переходе к другим группам линий частота этого колебания постепенно возрастает до  $970\text{ см}^{-1}$ , а интенсивность резко уменьшается.

Следует отметить, что в спектре люминесценции уранилмолибдата интенсивность линий, обусловленных электронно-колебательными переходами на подуровни валентного колебания  $\nu_1(A)MoO_4$ , приблизительно в три раза меньше, чем в первой группе линий переходов на подуровни валентных колебаний иона уранила. С увеличением номера гомологичных групп интенсивности линий, обусловленные колебаниями молибдато-группы и валентными колебаниями иона уранила, практически сравниваются. Этот факт заслуживает особого внимания, так как в спектрах люминесценции димолибдатуранилатов щелочных металлов линии, связанные с колебаниями молибдатных групп, имеют очень малую интенсивность по сравнению с переходами на подуровни энергии валентных колебаний иона уранила. В димолибдатуранилатах щелочных металлов существует определенная конкуренция между ионами щелочных металлов и уранила в образовании координационных связей с молибдато-ионами, что ослабляет силу связи между лигандами и центральным атомом — комплексообразователем. Отсутствие такой конкуренции в простом уранилмолибдате приводит к образованию прочных координационных связей между центральным атомом урана и молибдатными группами. Вследствие такой сильной связи полносимметричное колебание лиганда в спектре люминесценции проявляется линией, интенсивность которой во второй, третьей и четвертой группах сравнима с интенсивностью линий, обусловленных переходами на подуровни энергии полносимметричного валентного колебания иона уранила.

Результаты анализа низкотемпературного спектра люминесценции  $UO_2MoO_4$  (см. таблицу) подтверждают вывод о наличии в элементарной ячейке этого соединения двух кристаллографически неэквивалентных молибдато-групп  $MoO_4^{2-}$  I и  $MoO_4^{2-}$  II, которые участвуют в образовании координационных связей с четырьмя ураниловыми группами [6].

Второй центр свечения, наблюдаемый в спектре люминесценции молибдата уранила с меньшей интенсивностью, обнаруживает сравнительно несложную структуру. Здесь наиболее четко проявляются линии, принадлежащие электронно-колебательным переходам на подуровни энергии валентных и деформационных колебаний иона уранила.

Спектры люминесценции димолибдатуранилатов щелочных металлов обусловлены электронно-колебательными переходами в трех центрах. Как видно из таблицы, во всех центрах свечения в комбинации с электронными переходами проявляются частоты валентных и деформационных колебаний иона уранила, а также частоты трижды вырожденных деформационных колебаний молибдатных групп. Наблюдается изменение численных значений колебательных частот при переходе от молибдата уранила к димолибдатуранилатам. Значения частот деформационных колебаний ионов уранила димолибдатуранилатов калия, рубидия, цезия ( $245, 238, 230\text{ см}^{-1}$ ) меньше значения аналогичной частоты  $UO_2MoO_4$ . Частота же полносимметричных колебаний иона уранила повышается при переходе от молибдата уранила к димолибдатуранилатам щелочных металлов. Эти зависимости свидетельствуют о значительно меньшем взаимодействии ионов  $UO_2^{3+}$  с молибдатными группами вследствие конкурирующего влияния ионов щелочных металлов. Влияние вторичных катионов сказывается не только на колебательных

Частотные интервалы (см<sup>-1</sup>) в первой гомологичной группе линий спектров люминесценции молибдатов уранила и их отнесение (T = 77 К)

UO <sub>2</sub> MoO <sub>2</sub>	K <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> (MoO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	Rb <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> (MoO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	Cs <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> (MoO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	Отнесение
1 центр				
19816 ( 8,3)	19726 (18,0)	19809 (19,0)	19824 (15,0)	ν <sub>0</sub> —электр. переход
91 ( 8,7)	66 ( 3,0)	61 ( 5,4)		
198 ( 7,6)			132 ( 4,0)	
271 ( 6,4)	245 ( 3,1)	238 ( 2,0)	230 ( 3,7)	ν <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
327 ( 4,9)				ν <sub>4</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> II?
	332 ( 3,3)			ν <sub>3</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> I
358 *	356 ( 3,3)	333 ( 2,6)	359 ( 2,3)	} ν <sub>4</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> I
	375 ( 2,7)			
742 (81,0)	774 (52,7)	764 (29,0)	773 ( 7,1)	ν <sub>1</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
887 (86,8)	879 (42,7)	867 (40,0)	895 (39,0)	ν <sub>3</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
954 (29,5)				ν <sub>1</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> II
2 центр				
19783 ( 8,0)	19741 ( 7,0)	19835 (14,0)	19791 (10,0)	ν <sub>0</sub> —электр. переход
99 ( 7,1)				
			132 ( 3,0)	
270 ( 4,9)	235 ( 4,0)			ν <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
	331 ( 2,8)			ν <sub>2</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> I
		359 ( 2,6)		ν <sub>4</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> I
747 (21,8)	743 ( 4,5)	772 (21,0)	763 (19,0)	ν <sub>1</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
884 (36,4)	909 (42,7)		847 ( 3,5)	ν <sub>3</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
3 центр				
	19908 ( 6,0)	19945 ( 1,9)	19857 ( 3,0)	ν <sub>0</sub> —электр. переход
			132 ( 5,0)	
			246 ( 4,6)	
	338 ( 4,0)	334 ( 2,5)		ν <sub>2</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>
	780 ( 1,7)	760 ( 4,5)	779 ( 6,0)	ν <sub>4</sub> MoO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> I
				ν <sub>1</sub> UO <sub>2</sub> <sup>2+</sup>

Примечания: 1) в скобках приведены относительные интенсивности линий;  
2) звездочкой \* отмечена частота, проявляющаяся в других гомологичных группах линий.

частотах групп MoO<sub>4</sub><sup>2-</sup> и UO<sub>2</sub><sup>2+</sup>, но и на электронных состояниях комплексов. Об этом свидетельствуют наблюдаемые сдвиги частот ν<sub>0</sub> в различных центрах свечения при переходе от калиевого к рубидиевому и цезиевому соединениям.

В соответствии с данными по дифракции рентгеновских лучей димольбдатууранилата калия [4] в его элементарной ячейке есть два структурно-неэквивалентных уранилмолибдатных комплекса, которые можно отождествить с двумя центрами свечения, проявляющимися в спектре люминесценции сравнительно узкими линиями.

За третий центр, наблюдаемый в спектрах K<sub>2</sub>UO<sub>2</sub>(MoO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>, Rb<sub>2</sub>UO<sub>2</sub>(MoO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>, Cs<sub>2</sub>UO<sub>2</sub>(MoO<sub>4</sub>)<sub>2</sub> слабоинтенсивными широкими полосами, видимо, ответственны дефекты в кристаллической решетке, в том числе и поверхностные, или более симметричный центр по сравнению с первыми двумя. Этот вопрос однозначно можно решить при исследовании монокристаллических образцов.

Таким образом, удалось установить наличие в безводных димоллибдатах уранила трех центров свечения, два из которых связаны со структурно различными уранилмолибдатными комплексами. Для выяснения возможности усложнения структуры спектров люминесценции за счет переходов с колебательных подуровней возбужденного электронного состояния изучены температурные зависимости и частотные сдвиги линий этих спектров.

### Список литературы

1. Красовская Т. И., Поляков Ю. А., Розанов И. А. // Химия урана / Под ред. Б. Н. Ласкорина. М., 1983. С. 243.
2. Сережкин В. Н., Ковба Л. М., Трунов В. К. // Кристаллография. 1972. Т. 17. № 6. С. 1127.
3. Сережкин В. Н., Трунов В. К., Макаревич Л. Г. Там же. 1980. Т. 25. № 4. С. 858.
4. Садиков Г. Г., Красовская Т. И., Поляков Ю. А., Николаев В. П. // Неорг. материалы. 1988. Т. 24. № 1. С. 109.
5. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Минск, 1981.
6. Ким Зен Хо, Последович М. Р., Маляревич А. М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2. С. 17.

Поступила в редакцию 30.11.89.

УДК 548.55

Ю. М. ИЛЬЯШУК, А. К. ФЕДОТОВ

### О ПРИРОДЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ГРАНИЦ ЗЕРЕН В КРЕМНИИ И ГЕРМАНИИ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРОВОДИМОСТИ

Электрическая активность границ зерен (ГЗ) в полупроводниках определяется не только типом ГЗ, т. е. их кристаллографией, но и типом проводимости соседствующих зерен [1—3]. При этом активность ГЗ обычно связывается с наличием потенциального барьера (ПБ) вокруг границы, который и обуславливает характер движения носителей заряда поперек плоскости ГЗ. При описании механизмов проникновения носителей заряда (НЗ) сквозь ПБ на ГЗ обычно используется зонная диаграмма приграничной области (рис. 1) [1]. Такое представление о зонной структуре ГЗ в полупроводнике позволило Тейлеру и др. [4] свести задачу о преодолении носителями ПБ на границе к задаче об их движении через двойной (симметричный) барьер Шоттки (СБШ). В то же время изображенная на рис. 1 модель не отражает классического представления о СБШ как контакте полупроводник — металл — полу-

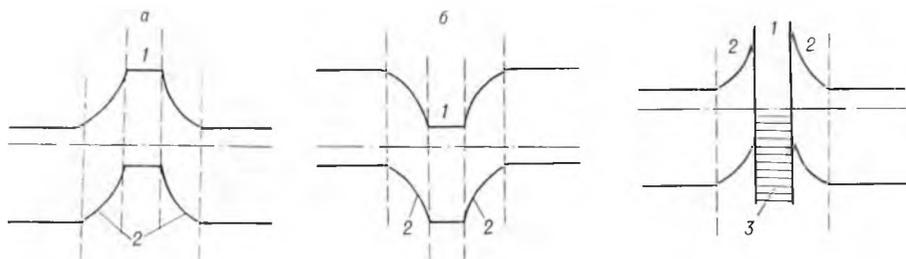


Рис. 1. Зонная структура вблизи ГЗ для полупроводника *n*- (а) и *p*-типа (б) проводимости:

1 — «ядро» ГЗ; 2 — изгиб зон в области объемного пространственного заряда (ОПЗ)

Рис. 2. Зонная структура ГЗ в виде двойного СБШ для полупроводника *n*-типа:

1 — металлическое «ядро» ГЗ; 2 — область ОПЗ; 3 — заполненные носителями пограничные состояния в «ядре» ГЗ

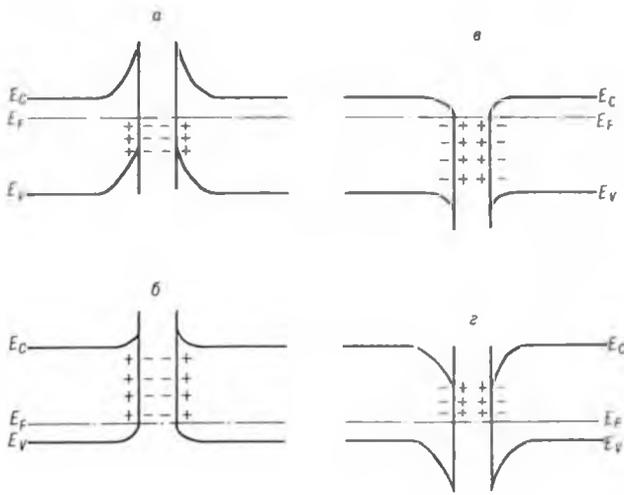


Рис. 3. Форма изгиба краев энергетических зон вблизи ГЗ в зависимости от соотношения работ выхода из «ядра» ГЗ  $\Phi_M$  (металла) и из объема зерен  $\Phi_\Pi$  (полупроводника):

*a* —  $\Phi_M > \Phi_\Pi$  для полупроводника *n*-, *б* —  $\Phi_M > \Phi_\Pi$  — *p*-; *в* —  $\Phi_M < \Phi_\Pi$  — *n*- и *г* —  $\Phi_M < \Phi_\Pi$  для полупроводника *p*-типа

проводник, потому что неверно представляет «ядро» ГЗ [5], являющееся фактически металлической частью СВШ. Более точно зонная диаграмма ГЗ должна изображаться так, как показано на рис. 2. С ее помощью, в частности, легко объясняется наличие значительной продольной («полосовой») проводимости ГЗ [1]. Но и такое представление зонной структуры вблизи ГЗ (лишь как области отталкивания НЗ) не является полным, так как нельзя описать некоторые ситуации, возникающие в конкретных полупроводниках. К примеру, неясно, почему ГЗ в германии *n*-типа проводимости могут быть активными, а в *p*-Ge всегда неактивны, тогда как в кремнии электрическая активность ГЗ не зависит от типа проводимости соседствующих зерен. Объяснить это можно, рассматривая «ядро» ГЗ и сами зерна как материалы с разной зонной структурой, а систему зерно—ГЗ—зерно как гетеропереход. В этом переходе каждый элемент (зерно и ГЗ) обладает своей собственной шириной запрещенной зоны  $E_g$  (в частном случае возможно и нулевой) и характеризуется своим расположением уровня Ферми  $E_F$  (т. е. своей работой выхода  $\Phi$ ). При этом параметры  $E_g$ ,  $E_F$  и  $\Phi$  для «ядра» ГЗ не зависят от типа проводимости соседствующих зерен, а определяются лишь типом решетки этих зерен, кристаллографической структурой самой ГЗ и дефектно-примесной атмосферой вокруг нее.

Рассмотрим подробнее модель ГЗ как СВШ, учитывая то, что контакт металл—полупроводник является частным случаем гетеропереходов.

Если полупроводник *n*-типа и работа выхода из металла («ядра» ГЗ)  $\Phi_M$  больше работы выхода из полупроводника (зерна)  $\Phi_\Pi$ , то в месте контакта металл заряжается отрицательно, а полупроводник положительно [5]. Это приводит к изгибу краев энергетических зон полупроводника вверх относительно уровня Ферми (рис. 3, *a*), а значит, к уменьшению концентрации электронов в зоне проводимости по сравнению с их числом в объеме зерна. Возникает слой с пониженной удельной проводимостью (обогащенный неосновными носителями заряда (ННЗ))—запирающий слой.

У дырочного полупроводника при  $\Phi_M > \Phi_\Pi$  концентрация дырок в приповерхностном слое будет больше, чем в объеме образца [5] (см. рис. 3, *б*). Возникает слой с повышенной удельной проводимостью (обо-

гащенный основными носителями заряда (ОНЗ)) — антизапирающий слой. В случае  $\Phi_M < \Phi_P$  запирающий слой возникает в  $p$ -полупроводнике, а антизапирающий в  $n$ -полупроводнике [5] (см. рис. 3, в, г). Следует отметить, что при сильном обогащении приконтактной области ННЗ, приводящей к инверсии электропроводности, возникает физический  $p$ — $n$ -переход, а сильное обогащение ОНЗ может привести к вырождению полупроводника.

Итак, на ГЗ в полупроводниках могут реализоваться две наиболее вероятные ситуации: работа выхода электронов из «ядра» ГЗ выше, чем из обоих зерен (см. рис. 3, а, б), и работа выхода из монокристаллических зерен полупроводника выше, чем из «ядра» ГЗ (см. рис. 3, в, г). Возможен еще и третий вариант: работа выхода из одного зерна выше, чем из «ядра» ГЗ.

При этом, если приграничная область обогащается ННЗ ( $\Phi_M > \Phi_P$  для  $n$ -полупроводника и  $\Phi_M < \Phi_P$  для  $p$ -полупроводника), ГЗ характеризуется наличием с обеих сторон запирающих слоев (см. рис. 3, а, г). Тогда электрический перенос будет полностью определяться активацией носителей через потенциальный барьер ГЗ (электрически активная ГЗ).

Такой подход к рассмотрению ГЗ (см. рис. 3, а, г) наиболее традиционен и распространяется на все типы границ, а их электрическая активность связывается только с величиной потенциального барьера и совершенно не учитывается форма изгиба границ энергетических зон вблизи «ядра» ГЗ.

Если же с обеих сторон ГЗ находятся антизапирающие области (в  $n$ -полупроводнике при  $\Phi_M < \Phi_P$  и в  $p$ -полупроводнике при  $\Phi_M > \Phi_P$ ), то такая ГЗ не будет оказывать заметного влияния на поперечный перенос НЗ (неактивная граница). Продольная проводимость при этом все равно будет существовать.

Исходя из понимания ГЗ как гетероперехода, можно объяснить, почему в  $n$ -Ge существуют электрически активные ГЗ, а в  $p$ -Ge нет. Это возможно, если предположить, что в германии «ядро» ГЗ всегда имеет работу выхода выше, чем в зерне (см. рис. 3, а, б). В этом случае уровень Ферми металлического «ядра» ГЗ должен лежать ниже самых мелких акцепторов (возможно даже в валентной зоне). Такая ГЗ будет проявлять акцепторные свойства независимо от типа самого полупроводника, а значения величин барьеров на ГЗ в  $n$ -Ge должны доходить до значений порядка величины запрещенной зоны. Все это хорошо подтверждается результатами экспериментальных исследований различных авторов [1, 2, 4].

Для кремния, у которого ГЗ проявляют активность в  $n$ - и  $p$ -типе проводимости, должны реализовываться ситуации, изображенные на рис. 3, а, г, т. е. в электронном кремнии  $\Phi_M > \Phi_P$ , а в дырочном —  $\Phi_M < \Phi_P$ . Уровень Ферми «ядра» ГЗ здесь смещен ближе к середине запрещенной зоны зерен. Это дает величину пограничного барьера порядка  $E_g/2$ , что соответствует литературным данным [2]. Эксперимент подтверждает также донорный тип ГЗ в  $p$ -Si и акцепторный в  $n$ -Si [2].

Из сопоставления величин барьеров для  $n$ -Ge,  $n$ -Si и  $p$ -Si, полученных разными авторами (см. табл. в [2]), следует, что и в Ge, и в Si уровень Ферми ГЗ лежит ниже дна зоны проводимости примерно на одной и той же глубине  $E_c = (0,70—0,75)$  эВ. С этой точки зрения различие электрической активности ГЗ в германии и кремнии можно связать с различием величин  $E_g$  в них.

Таким образом, электрическая активность и тип проводимости ГЗ (донорный или акцепторный) в полупроводниках определяются соотношением работ выхода носителей заряда из объема полупроводника и из области «ядра» ГЗ. При этом работа выхода из «ядра» ГЗ не зависит от типа проводимости зерен и определяется лишь кристаллографией «ядра» ГЗ. Следовательно, область вблизи ГЗ полупроводника можно рассматривать как гетеропереход.

## Список литературы

1. Матаре Г. Электроника дефектов в полупроводниках. М., 1974.
2. Groverog C. R. M. // Journ. Phys. C: Solid St. Phys. 1985. V. 18. P. 4079.
3. Горелик С. С., Евтодий Б. Н., Ильяшук Ю. М. и др. Электрическая активность границ зерен в профилированном поликристаллическом кремнии / Ин-т проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов АН СССР. Черноголовка. Препр. 1989.
4. Taylor W. E., Odell N. H., Fan H. J. // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 867.
5. Шалимова К. В. Физика полупроводников. М., 1976.

Поступила в редакцию 12.04.90.

УДК 621.039

*В. П. ГОЛЬЦЕВ, В. В. ХОДАСЕВИЧ,  
В. В. УГЛОВ, А. К. КУЛЕШОВ*

### СТРУКТУРНО-ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ ЖЕЛЕЗА ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОБЛУЧЕНИИ ИОНАМИ АЗОТА И БОРА

Метод ионной имплантации как наиболее перспективный способ модификации свойств рабочих поверхностей деталей машин и механизмов получает широкое распространение в промышленности. С его помощью при высоких концентрациях внедренных ионов можно формировать в поверхностном слое структуры, элементный и фазовый состав которых, состояние кристаллической решетки будут определять высокие физико-химические свойства облученного материала. Использование последовательной или одновременной имплантации ионов различных типов позволяет создавать структуры со сложным фазовым составом, по своим характеристикам приближающиеся, а во многих случаях и превосходящие свойства высоколегированных сталей. Однако для успешного применения этого метода в промышленности необходимо знать особенности протекания структурно-фазовых превращений в материале при его облучении несколькими сортами ионов.

В настоящей работе с помощью просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) исследованы фазовые превращения в тонких пленках железа, последовательно облученных ионами азота и бора.

Тонкие пленки железа осаждались на свежие сколы NaCl при 280 °С с помощью метода электронно-лучевого напыления на установке ВУ-1А в вакууме  $10^{-5}$  Торр. Эффективная толщина пленок, определенная из спектров резерфордского обратного рассеяния ионов гелия с энергией 1,4 МэВ, составила 70 нм. Энергия внедряемых ионов азота и бора выбиралась таким образом, чтобы положение максимумов выделенной энергии для азота и бора в железе совпадали. Она составила для молекулярных ионов азота 100, бора — 40 кэВ. Дозы однократного облучения варьировались в пределах от  $10^{16}$  до  $6 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>.

В дальнейшем предварительно облученные до доз  $10^{16}$  и  $3 \cdot 10^{16}$  N<sup>+</sup>/см<sup>2</sup> образцы облучались затем ионами бора в интервале доз  $1 \div 6 \cdot 10^{16}$  B<sup>+</sup>/см<sup>2</sup>.

В результате проведенных экспериментов методом ПЭМ установлено, что исходные пленки железа имеют мелкокристаллическую структуру с размером кристаллитов от 15 до 30 нм, которая не изменяется при однократном облучении ионами азота до дозы  $10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>. При имплантации ионов азота до дозы  $3 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup> на электронограмме, полученной от облученной пленки, помимо колец  $\alpha$ -Fe, появляются три дополнительных кольца слабой интенсивности (рис. 1, а). Расчет межплоскостных расстояний показывает, что эти дифракционные рефлексы соответствуют нитриду железа переменного состава с химической фор-

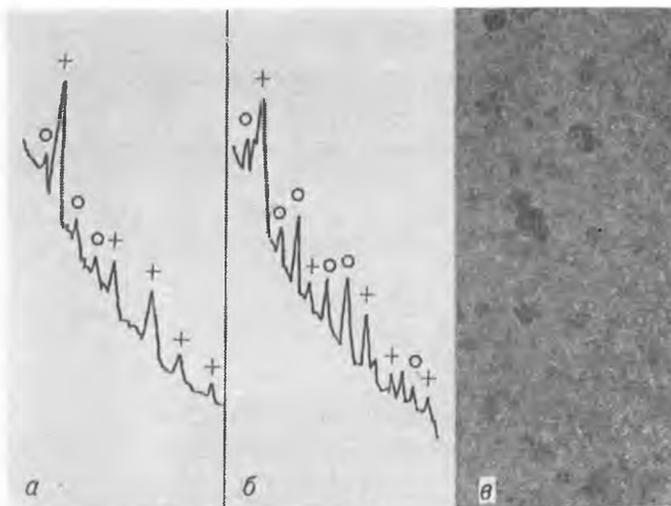


Рис. 1. Денситограмма от пленки железа, облученной ионами азота дозой  $3 \cdot 10^{16}$  (а);  $6 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>, (б):

+ — α — Fe; o — ε — Fe<sub>2+x</sub>N; в — структура поверхности пленки железа, облученной ионами азота дозой  $6 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>, увеличение 96 000

мулой ε-Fe<sub>2+x</sub>N. Эта фаза, как показано в работе [1], имеет гексагональную структуру, в которой  $c/a$  зависит от концентрации азота в соединении. Значения этого отношения, полученные на образцах, облученных до дозы  $3 \cdot 10^{16}$  N<sub>2</sub><sup>+</sup>/см<sup>2</sup>, указывают на возможность наличия высокой (около 20 ат.%) концентрации азота [1]. Следовательно, можно предположить, что образовавшийся нитрид близок по стехиометрическому составу к Fe<sub>3</sub>N.

При облучении пленок Fe до дозы  $6 \cdot 10^{16}$  N<sub>2</sub><sup>+</sup>/см<sup>2</sup> интенсивность и количество колец на электронограмме, соответствующих химическому соединению ε-Fe<sub>2+x</sub>N, увеличивается (см. рис. 1, б), и определенное значение отношения  $c/a$  позволяет предположить, что концентрация азота достигает 30 ат.%, т. е. фаза ε-Fe<sub>2+x</sub>N более близка по содержанию азота к Fe<sub>2</sub>N. Помимо изменения фазового состава, при имплантации азота претерпевает изменение и структура пленок железа. Так, при дозе облучения  $6 \cdot 10^{16}$  N<sub>2</sub><sup>+</sup>/см<sup>2</sup> становятся различимы выделения фазы ε-Fe<sub>2+x</sub>N, размер которых колеблется в интервале от 20 до 50 нм (см. рис. 1, в).

Полученные результаты хорошо коррелируют с данными, приведенными в работах [1, 2]. Так, установлено [2], что в результате облучения тонких пленок железа ионами азота с энергией 40 кэВ до доз  $10^{17}$  и  $6 \cdot 10^{17}$  N<sup>+</sup>/см<sup>2</sup> наблюдается формирование нитрида железа переменного состава с общей химической формулой ε-Fe<sub>2+x</sub>N, обладающего гексагональной структурой. При имплантации азота с энергией до 60 кэВ в пленки Fe толщиной до 200 нм образуется, помимо ε-Fe<sub>2+x</sub>N фазы, еще γ'-Fe<sub>4</sub>N — нитрид железа с гранецентрированной кубической решеткой, а также α' — мартенсит нитрида железа и фаза α''-Fe<sub>16</sub>N<sub>2</sub> [1]. Причем увеличение дозы внедрения ведет к повышению концентрации атомов азота в ε-Fe<sub>2+x</sub>N. Средний диаметр образовавшихся кристалликов ε-Fe<sub>2+x</sub>N при максимальной дозе внедренных ионов азота составляет 80 нм.

В результате облучения тонких пленок железа ионами бора наблюдается образование при дозах  $10^{16}$  и  $3 \cdot 10^{16}$  B<sup>+</sup>/см<sup>2</sup> фазы Fe<sub>2</sub>B (рис. 2, а). Это химическое соединение имеет объемно-центрированную решетку Бравэ, характерную для Al<sub>2</sub>Cu [3]. Дальнейшее увеличение дозы облучения бором до дозы  $6 \cdot 10^{16}$  B<sup>+</sup>/см<sup>2</sup> приводит к формированию тонкого, порядка 5 нм, углеродного слоя на поверхности пленки (рис. 2, б, в).

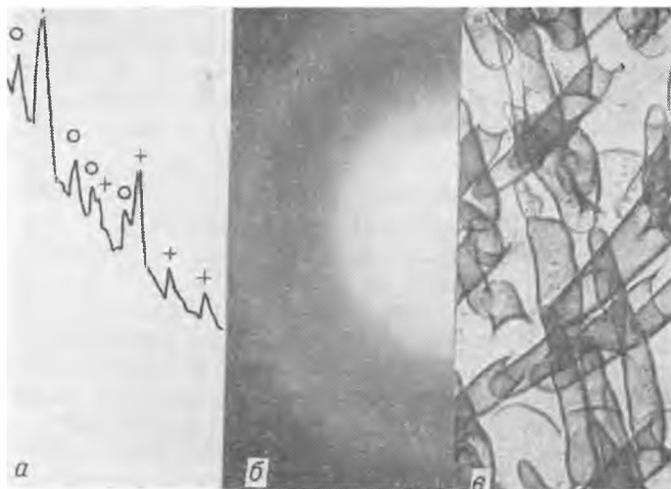


Рис. 2. Денситограмма от пленки железа, облученной ионами бора дозой  $10^{16}$  ион/см<sup>2</sup> (а):

+ —  $\alpha$  — Fe; o — Fe<sub>2</sub>B; б — электронограмма; в — структура пленки железа, имплантированной дозой бора  $6 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup>, увеличение 6 000

Этот вывод сделан на основании результатов, полученных с помощью вторично-ионной масс-спектропии и ПЭМ.

Структурно-фазовые изменения в тонких пленках железа, облученных ионами бора с энергией 60 кэВ, исследовались в работе [3]. Приведенные в этой работе экспериментальные результаты показывают, что в интервале доз  $10^{16} \div 4 \cdot 10^{16}$  В<sup>+</sup>/см<sup>2</sup> происходит формирование фазы Fe<sub>2</sub>B. Наряду с обнаруженными фазовыми изменениями замечено, что при дозах, больших  $4 \cdot 10^{16}$  В<sup>+</sup>/см<sup>2</sup>, происходит переход пленки Fe из кристаллического в аморфное состояние. Аналогичные результаты при изучении фазообразования получены на массивных поликристаллических образцах [4]. Образование фазы Fe<sub>2</sub>B, согласно данным работы [4], так же, как и в [3], происходит в интервале доз  $10^{16} \div 4 \cdot 10^{16}$  В<sup>+</sup>/см<sup>2</sup>,

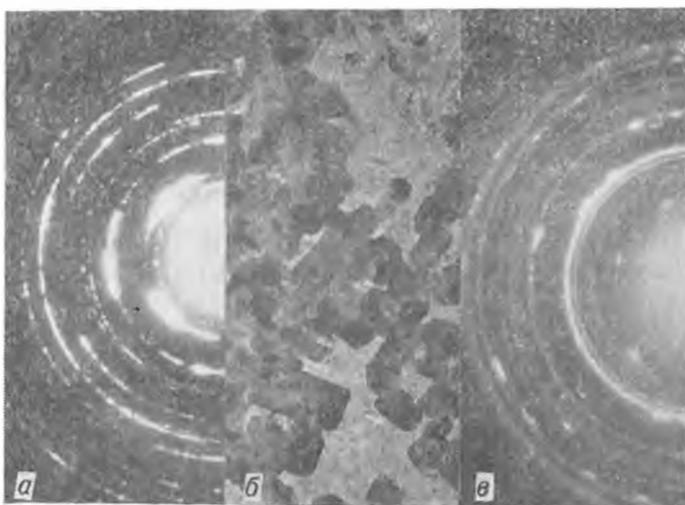


Рис. 3. Электронограмма (а) и структура (б) от пленки железа, последовательно облученной ионами азота и бора дозой  $10^{16} \text{N}_2^+/\text{см}^2 + 3 \cdot 10^{16}$  В<sup>+</sup>/см<sup>2</sup>, увеличение 10 000. Электронограмма (в) от пленки железа, последовательно облученной ионами азота и бора дозой  $3 \cdot 10^{16} \text{N}_2^+/\text{см}^2 + 6 \cdot 10^{16}$  В<sup>+</sup>/см<sup>2</sup>

хотя приведенные в [4] значения межплоскостных расстояний, согласно [5], близки к значениям, характерным для фазы  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ .

Последовательное облучение вначале ионами азота, а затем бора приводит к формированию структуры, фазовый состав которой не является простой суперпозицией фаз, получаемых в результате однократной имплантации. Для соотношения доз  $3 \cdot 10^{16} \text{ N}_2^+/\text{см}^2$  и  $10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2$  мы наблюдаем на электронограммах кольца, соответствующие  $\alpha\text{-Fe}$ , и слабые рефлексы  $\text{FeB}$ . Для соотношения доз  $10^{16} \text{ N}_2^+/\text{см}^2$  и  $3 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2$  происходит значительное усиление интенсивности рефлексов, принадлежащих фазе  $\text{FeB}$ , что указывает на возрастание концентрации фазы. Соответствующая дифракционная картина и микроструктура показаны на рис. 3, а, б. Это соединение представлено на микрофотографии в виде мелких светлых выделений размером 110—140 нм. Состав более крупных темных выделений точно не определен, имеется только несколько межплоскостных расстояний, позволяющих предположить, что эти выделения принадлежат  $\text{B}_2\text{O}_3$  [5]. Кристаллическую фазу  $\text{FeB}$  (при имплантации ионов бора с дозой  $5 \cdot 10^{17} \text{ B}^+/\text{см}^2$  в аустенитную хромоникелевую сталь, температура облучаемой поверхности  $500^\circ\text{C}$ ) удалось идентифицировать авторам работы [6]. Дозы облучения  $3 \cdot 10^{16} \text{ N}_2^+/\text{см}^2$  и  $3 \cdot 10^{16} \text{ B}^+/\text{см}^2$  приводят к формированию только  $\varepsilon\text{-Fe}_{2+x}\text{N}$ , а максимальная доза облучения бором  $6 \cdot 10^{16}$  ион/см<sup>2</sup> стимулирует образование сложной структуры, состоящей из фаз  $\alpha\text{-Fe}$ ,  $\varepsilon\text{-Fe}_{2+x}\text{N}$  и  $\text{FeB}$  (см. рис. 3, в).

### Список литературы

1. Rauschenbach B., Kolitsch A. // Phys. Stat. Solid., 1983. V. 80. № 2. P. 211.
2. Fayeelle S., Treneux D., Esrouf C. // Nucl. Instrum. and Meth. Phys. Res. 1985. V. B7-B8. Part 1. P. 171.
3. Kolitsch A., Rauschenbach B., Richter E. // Rad. Eff. Lett. 1983. V. 76. № 6. P. 193.
4. Mei L., Zhang Y., Guo X., Kuo Y. // Journ. Magn. and Magn. Mater. 1986. V. 59. № 3—4. P. 346.
5. Powder Diffraction File // International Centre for Diffraction Data. Pennsylvania. USA. 1977.
6. Никитин А. А., Травина Н. Т., Гусева М. И., Рыжков И. А. и др. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1988. № 7. С. 101.

Поступила в редакцию 08.02.90.

УДК 621.317.795; 621.383.98

Л. И. БУРОВ, В. В. БУЦКИЙ, В. В. ГРУЗИНСКИЙ,  
Н. В. НАУМОВ, А. К. ТЕРЕЩЕНКО

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ФОТОПРИЕМНЫХ СИСТЕМ СО СТУПЕНЧАТОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ УСИЛЕНИЯ

При исследовании световых потоков с динамическим диапазоном изменения интенсивности более трех-четырёх порядков в пределах одного импульса все более широкое применение находит метод ступенчатого регулирования усиления (СТРУ) фотоприемного устройства [1]. К сожалению, большие потенциальные возможности метода СТРУ на практике используются далеко не полностью, что связано главным образом с отсутствием простой и надежной математической модели метода. В настоящей работе рассмотрена подобная модель для схемы с ФЭУ в качестве фотоприемного устройства. Такая схема является в настоящее время наиболее распространенной, обеспечивая в силу малой инерционности ФЭУ квазистационарный режим (КСР) работы всей системы регистрации даже для достаточно коротких импульсов длительностью  $10^{-7} \div 10^{-8}$  с.

Итак, рассмотрим идеальный ФЭУ, СТРУ которого достигается путем регистрации выходных сигналов не только с анодного, но и диодных резисторов нагрузки. Такая методика может быть реализована с помощью схемы (см. рисунок), основное отличие которой от реально используемых [2, 3] связано лишь с идентичностью каскадов, что определяется удобством расчета и не имеет принципиального значения. Реализация КСР происходит при выполнении следующих условий.

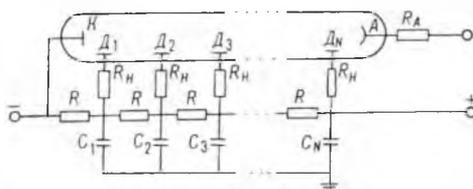


Схема ступенчатой регулировки усиления ФЭУ

1. Все существенные изменения амплитуды импульса происходят за времена значительно большие времени пролета электрона через ФЭУ в процессе усиления сигнала.

2. Шунтирующие емкости  $C_n$  обеспечивают малые изменения междиодных напряжений для любого момента времени в течение регистрации импульса.

Условие, при котором отношение изменения напряжения на резисторе  $R$  к его стационарному значению  $U_0$  не превосходит заданной величины  $\alpha$ , будет:

$$C_n \geq \frac{(i_n)_{\max} T}{2\alpha U_0} = \frac{(Q_n)_{\text{эф}}}{\alpha U_0} \quad (1)$$

Соотношение (1) по форме совпадает с общепринятой оценкой [2], где под  $Q_n$  понимается заряд, создаваемый на  $n$ -ом диоде внешним импульсом и, следовательно, пропорциональный его площади. В нашем случае  $(Q_n)_{\text{эф}}$  определяется максимальным значением диодного тока  $i_n$  и растет линейно с увеличением  $T$  (фактически — времени измерения). Различия в оценках проявляются наиболее отчетливо именно в случае большого динамического диапазона, когда мы фактически работаем на «хвосте импульса». В этом случае оценка (1) дает значительно большие значения, что, впрочем, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

В принятой нами схеме полезный сигнал на резисторах нагрузки  $R_n$  определяется диодными токами  $i_n$ , которые можно выразить следующим образом [2]:

$$i_n = i_0 \left( \prod_{k=1}^{n-1} \eta_k \sigma_k \right) \eta_n (\sigma_n - 1), \quad (2)$$

где  $i_0$  — ток катода, обусловленный входным сигналом;  $\eta_k$  — коэффициент сбора электронов на  $k$ -й диод;  $\sigma_k$  — коэффициент вторичной электронной эмиссии (ВЭЭ) с  $k$ -го диода.

Величины  $\eta_k$  для большинства типов ФЭУ для различных диодов отличаются незначительно [3], поэтому для удобства расчетов их можно положить одинаковыми. Однако при значительном нарастании входного сигнала (и постоянном междиодном напряжении) накапливающийся у диода пространственный заряд начинает ограничивать величину выходного тока, т. е. система выходит на нелинейный режим усиления. Можно считать [4], что эффект имеет характер, близкий к пороговому, и его описание вести через параметры  $\eta_k$ , считая их постоянными вплоть до некоторого критического значения диодного тока с последующим резким падением.

Для большинства ФЭУ значения  $\sigma_n$  практически одинаковы для всех диодов и лишь несколько увеличены (как правило, вследствие повышенного междиодного напряжения) для первого. Однако для выбранной схемы этим различием можно пренебречь. Зависимость же  $\sigma_n$  от междиодного напряжения  $U_{n-1, n}$  подробно описана в литературе [2, 3, 5].

Итак, теперь можно окончательно сформулировать задачу. Входной сигнал вызывает появление диодных токов  $i_n$ , которые определяют полезный сигнал на резисторах нагрузки  $R_n$ , но в то же время меняют междиодные напряжения, что должно отражаться на самих величинах  $i_n$ . Таким образом, работу схемы должна описывать система самосогласованных уравнений, которые в условиях КСР являются алгебраическими. Правильный выбор величин  $C_n$  и соотношения между  $R$  и  $R_n$  позволяет добиться относительной малости изменения междиодных напряжений  $\Delta U_{n-1, n}$ , что позволяет искать решение системы методом последовательных приближений. Тогда в первом приближении соотношение (2) может быть представлено в виде:

$$i_n \simeq i_n^0 \left( 1 + \sigma_0^{-1} \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k \right), \quad (3)$$

где  $i_n^0$  и  $\sigma_0$  — диодный ток и коэффициент ВЭЭ при равновесных значениях междиодного напряжения  $U_0$ , а  $\Delta \sigma_k$  — отклонения  $\sigma_k$  вследствие изменения междиодных напряжений.

Такие изменения определяются двумя процессами — наличием сигналов на диодных резисторах нагрузки  $R_n$  и перераспределением напряжения на сопротивлениях делителя  $R$ . Вклад последних величин может быть всегда сделан относительно малым при соответствующем выборе шунтирующих емкостей  $C_n$  (т. е. при соответствующем задании величины  $\alpha$ ).

Порожденные изменением междиодных напряжений соответствующие изменения коэффициентов  $\sigma_n$  для ФЭУ с токоустойчивыми диодами (а именно такие ФЭУ, как правило, и применяются в системах с СТРУ) хорошо описываются соотношением [5]:

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \left( \frac{1}{U} - \frac{1}{U_m} \right) \Delta U, \quad (4)$$

где  $U_m$  — некоторое фиксированное напряжение, лежащее в области  $600 \div 800$  В [5]. Минимальные изменения  $\sigma$  должны наблюдаться в случае  $U \sim U_m$ , однако при таких значениях междиодных напряжений резко возрастают шумы ФЭУ. При снижении  $U$  до обычно используемых  $120 \div 150$  В должен, казалось бы, возрасти относительный разброс  $\sigma$ . Однако это не совсем так, если оценивать максимальный разброс для предела линейности, где  $\Delta U_{\max}$  определяется критическим током, для которого выполняется закон трех вторых [2]. Но тогда величина  $\frac{\Delta \sigma}{\sigma}$  должна иметь максимум в области  $U \sim \frac{1}{3} U_m$ , т. е. в указанном рабочем диапазоне максимальный разброс (максимальная погрешность) уже снижается.

Тогда с учетом всего сказанного соотношение (3) можно трансформировать к виду:

$$i_n \simeq i_n^0 \left( 1 + \left( \frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_m} \right) R_n (i_n^0 - i_0) \right), \quad (5)$$

причем для больших  $n$  величиной  $i_0$  можно пренебречь.

Максимальная систематическая погрешность при измерении сигналов на резисторах нагрузки  $R_n$  может быть выражена:

$$\varepsilon_n \simeq (i_n)_{\max} R_n \left( \frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_m} \right). \quad (6)$$

Величина  $(i_n)_{\max}$  определяется пределом линейности диодного тока, т. е. является в принципе величиной известной. Поэтому при выборе величин  $R_n$  можно добиться, чтобы величина  $\varepsilon_n$  была достаточно малой.

Теперь условие пренебрежения перераспределением напряжений делителя можно сформулировать как  $\epsilon_n \gg \alpha$ .

Следует отметить, что фактически в нашем рассмотрении уже заложен критерий переключения рабочих диапазонов системы: как только данный каскад выходит на нелинейный режим, съём сигнала начинается в каскаде с меньшим ускорением.

Для математической формулировки этого критерия рассмотрим отношение сигналов в двух соседних каскадах

$$k_n = \frac{i_n}{i_{n-1}}. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что при выходе на нелинейный режим

$$k_n^{\text{нел}} = k_n^0 \frac{\eta_n}{\eta}, \quad (8)$$

где  $k_n^0$  — значение  $k_n$  для линейного режима, а  $\eta_n$  описывает нелинейность его. Поскольку погрешность в измерениях  $k_n^0$  порядка  $\epsilon_n$ , то изменения  $k_n$  вследствие нелинейности практически сразу выходят за рамки систематической погрешности. Но тогда удобно задать некоторую величину  $\delta_n$  и, как только  $\left| \frac{k_n}{k_n^0} - 1 \right| > \delta_n$ , можно считать установленным выход каскада на нелинейный режим.

Теперь на основании предложенной теории проведем оценку параметров реального ФПУ на основе ФЭУ-84. Согласно паспортным данным, предел линейности диодного тока для этого ФЭУ составляет  $4 \cdot 10^{-2}$  А. Тогда, принимая в качестве максимальной систематической погрешности  $(\epsilon_n)_{\text{max}} = 0,015$ , получаем  $R_{\text{н}} \approx 56$  Ом. Чтобы пренебречь перераспределением напряжений делителя, примем  $\alpha = 10^{-3}$ , что при паспортном значении напряжения питания ФЭУ-84 в 1,6 кВ дает, например, для шунтирующей емкости в последнем каскаде 5,5 мкФ при длительности импульса  $T = 33$  мкс (например, при зондировании атмосферы на глубину 5 км). ФПУ с очень близкими к рассчитанным значениями параметров реализован нами на практике и используется в системе обработки лазерных сигналов. Снимаемые с диодных резисторов нагрузки сигналы оцифровываются и записываются в памяти ЭВМ с последующим анализом на основе использования предложенного критерия переключения диапазонов. Проведенные экспериментальные исследования с учетом набора статистики для уменьшения случайной погрешности показали, что система регистрации с таким ФПУ обеспечивает суммарную погрешность менее 2,5 %.

### Список литературы

1. Агишев Р. Р., Ильин Г. И., Польский Ю. Е. // II Всесоюз. науч.-техн. конференц. Проблемы разработки автоматизированных систем наблюдения, контроля и оценки состояния окружающей среды: Тез. докл. Казань, 1983. С. 181.
2. Берковский А. Г., Веретенников А. И., Козлов О. В. Вакуумные фотоэлектронные приборы. М., 1982.
3. Ветохин С. С., Гулаков И. Р., Перцев А. Н., Резников И. В. Одноэлектронные фотоприемники. М., 1979.
4. Стысин В. В., Хатырев Н. П. // Современное состояние и перспективы развития высокоскоростной фотографии и кинематографии и метрология быстропотекающих процессов: Тез. докл. М., 1978. С. 125.
5. Анисимова И. И., Глуховский Б. М. Фотоэлектронные умножители. М., 1974.

Поступила в редакцию 30.11.89.

## НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ ПЛАНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТО-ЭДС В СИСТЕМЕ *p*-КРЕМНИЙ — ЭЛЕКТРОЛИТ

Методика контроля однородности полупроводников, основанная на измерении топограмм поверхностной фото-ЭДС, предполагает наличие устойчивой связи между распределениями локальных значений фото-ЭДС и электрофизических параметров кремния. Измерения выполняются в ряде случаев в системе полупроводник — электролит. Применение электролитического контакта к поверхности позволяет реализовать однородный токосъем со всей поверхности и обеспечивает неразрушающий характер контроля [1, 2]. Нами установлено, что планарное распределение фотоотклика не является стационарной характеристикой пластины. Оно может существенно изменяться во времени даже при отсутствии специальных воздействий на планарную поверхность пластины, а в случае контроля однородности пластины непосредственно после выполнения операций химической обработки поверхности кремния нестационарность распределения является закономерной. Исследование нестационарности распределения фото-ЭДС по площади пластин Si и составило предмет данной работы. Измерения фото-ЭДС выполнялись в 0,5—1 %-ном водном растворе фтористого аммония непосредственно после обработки пластины в течение 2—3 мин в концентрированной плавиковой кислоте. Ранее нами показано [3], что эти условия позволяют выполнять воспроизводимые исследования, связанные с долговременной релаксацией второго рода, на кремнии *p*-типа.

Измерения топограмм фото-ЭДС осуществлялись по схеме, аналогичной [2], при следующих параметрах зондирующего излучения: длина волны 0,63 мкм, мощность около 2 мВт, частота модуляции 180 Гц, диаметр зонда 1 мм, скорость сканирования зонда по поверхности пластины 6 мм/с. Эксперименты выполнены на пластинах кремния, выращенного по методу Чохральского, удельное сопротивление 10 Ом · см, легирующая смесь — бор, толщина пластины 400 мкм, диаметр 76 мм. Контроль за кинетическим изменением распределения фото-ЭДС выполнялся путем непрерывного сканирования зондом вдоль одного из диаметров пластины.

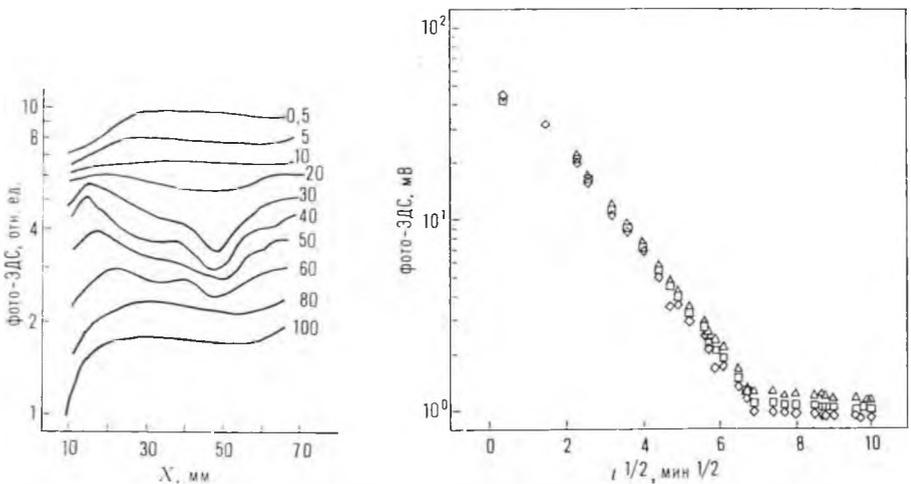


Рис. 1. Изменение во времени распределения фото-ЭДС по пластине *p*-Si

Рис. 2. Релаксация фото-ЭДС полупроводник — электролит для трех выбранных точек линии сканирования:

$\tau = 2,3$  мин ( $\Delta$ );  $1,9$  ( $\square$ ) и  $1,7$  ( $\diamond$ )

Типичная динамика изменения профилограммы фото-ЭДС для использованных режимов подготовки поверхности проиллюстрирована на рис. 1. Время начала записи каждой профилограммы, начиная от момента погружения пластины в электролит, приведено в минутах справа от каждой из профилограмм. Приведенные результаты характерны для кремния *p*-типа с различным удельным сопротивлением. Особенностью релаксационных характеристик для трех локальных областей, выбранных на линии сканирования для этой же пластины (рис. 2), является то, что за время до 60 мин исходная профилограмма с относительно равномерным распределением фото-ЭДС трансформируется в профилограмму с четко выраженными локальными экстремумами. Дальнейшее изменение профилограммы со временем приводит к сглаживанию ее формы.

Релаксационные характеристики локальных значений фото-ЭДС подчиняются общему закону долговременной релаксации второго рода [4]:

$$U = U_0 \exp(-t/\tau), \quad (1)$$

где  $U$ ,  $U_0$  — текущее и начальное значения фото-ЭДС в  $j$ -й локальной области;  $t$  — время релаксации, мин;  $\tau$  — параметр релаксации, мин.

Параметр  $\tau$  различен для локальных областей пластины, так что наблюдаемые кинетические изменения распределения фото-ЭДС можно связать с неодинаковой скоростью релаксации фото-ЭДС в областях пластины. Эти различия могут отражать структурное совершенство данных областей кремния или качество обработки поверхности кремния в указанных областях.

Распределения по диаметру одной из исследуемых пластин параметра  $\tau$ , а также локальных значений плотности дислокаций  $N_d$  и примесных комплексов  $N_k$  приведены на рис. 3. Значения  $N_d$ ,  $N_k$  определялись по результатам оптической микроскопии поверхности пластин кремния после их обработки в селективном травителе Сиртла (примесные комплексы идентифицировались как мелкие ямки травления). Следует отметить заметное снижение параметра  $\tau$  в областях пластины с высокой плотностью структурных дефектов, т. е. структурно несовершенные области пластины кремния характеризуются ускоренной релаксацией фото-ЭДС, а это, в свою очередь, приводит к кинетическим изменениям распределения локального фотоотклика.

Долговременная релаксация фото-ЭДС полупроводник — электролит в конкретных условиях эксперимента вызвана дрейфом величины поверхностного потенциала кремния, а значит, и величины межфазного барьера на границе полупроводник — электролит. Указанный дрейф обусловлен перезарядкой медленных поверхностных состояний, характерных для поверхности кремния после обработки в плавиковой кислоте [4, 5]. Химическая природа поверхностных центров, обуславливающих наличие таких состояний, может быть связана с фторированием поверхности и

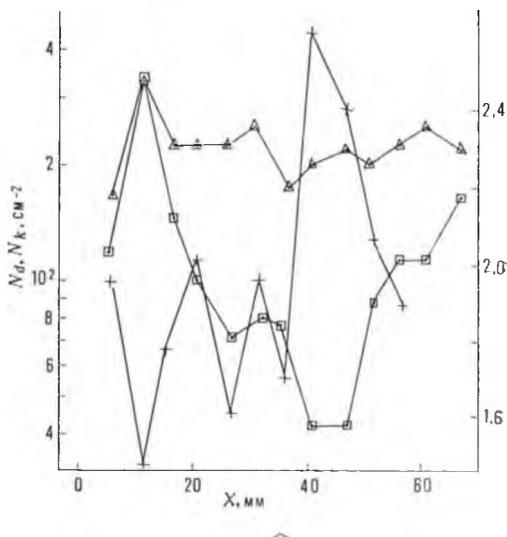


Рис. 3. Распределение  $\tau$ ,  $N_d$  и  $N_k$  по диаметру одной из исследуемых пластин

последующей ее гидратацией при измерении фото-ЭДС в водном электролите [4, 5].

Нестационарность планарного распределения фото-ЭДС, измеряемой в системе полупроводник — электролит, необходимо учитывать при реализации контроля однородности полупроводниковых материалов. Объективно оправданным является поиск способа предварительной обработки поверхности пластин и состава измерительного электролита, стабилизирующих поверхностный потенциал полупроводника на период измерений в наивыгоднейших условиях (максимальный контраст по структурным дефектам и т. п.). Возможен также анализ планарной однородности полупроводника по распределению параметра релаксации  $\tau$ , в этом случае обработка поверхности и состав электролита должны стимулировать устойчивую долговременную релаксацию поверхностного потенциала.

### Список литературы

1. Lile D. L., Davis N. M. // Solid. State Electron. 1975. V. 18. № 7—8. P. 699.
2. Патрин А. А., Сернов С. П. Микроэлектроника. 1982. Т. 11. Вып. 5. С. 402.
3. Суслов В. А., Хоанг Суан Хонг, Хоанг Шон // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 14.
4. Киселев В. Ф., Крылов О. В. Электронные явления в адсорбции и катализе на полупроводниках и диэлектриках. М., 1979.
5. Моррисон С. Химическая физика поверхности твердого тела. М., 1980. С. 488.

Поступила в редакцию 08.02.90.

УДК 621.315.592

Д. И. БРИНКЕВИЧ, ФАРИД НАССУР (САР),  
В. В. ПЕТРОВ, В. С. ПРОСОЛОВИЧ

## ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОБРАБОТКИ И МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ГЕТТЕРОВ НА ПРОЦЕССЫ ГЕНЕРАЦИИ ТЕРМОДОНОРОВ В КРЕМНИИ

Использование термообработок (ТО) в производстве приборов на основе кремния предъявляет повышенные требования к его термической стабильности и определяет необходимость поиска новых путей управления процессами термического дефектообразования. В настоящей работе исследованы процессы генерации термодоноров (ТД) в пластинах кремния, на поверхность которых наносились пленки Au и W или создавались имплантированные иттербием слои. В качестве контрольных использовались *n*-Si (111) пластины с исходным удельным сопротивлением  $\rho = 20 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ .

Параметры образцов приведены в таблице. Содержание кислорода ( $N_0$ ) в междоузельном положении определялось по полосе ИК поглощения при  $1106 \text{ см}^{-1}$  [1], концентрация Na ( $N_{\text{Na}}$ ), Cu ( $N_{\text{Cu}}$ ) и Au ( $N_{\text{Au}}$ ) — методом нейтронно-активационного анализа [2]. Количество углерода в положении замещения, измеренное по полосе ИК поглощения при  $607 \text{ см}^{-1}$ , во всех исследовавшихся образцах  $\leq 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Концентрация ТД рассчитывалась путем измерения эффекта Холла и проводимости при 300 К. На поверхность части образцов методом магнетронного распыления наносились пленки W и Au (образцы 3, 6—8) толщиной  $\sim 80 \text{ нм}$ , другая часть имплантировалась ионами Yb (образец 4) с энергией 35 кэВ дозой  $200 \text{ мкКл} \cdot \text{см}^{-2}$ . Предварительная высокотемпературная обработка (ПВО) в диапазоне температур 850—1200 °С осуществлялась в протоке водорода. Диффузия Au из нанесенных пленок осуществлялась в процессе ПВО длительностью 10—24 ч при 850—900 °С, последующее охлаждение осуществлялось со скоростью  $< 1 \text{ К} \cdot \text{мин}^{-1}$ . После ПВО приповерхностный слой толщиной 50 мкм сошлифовывался,

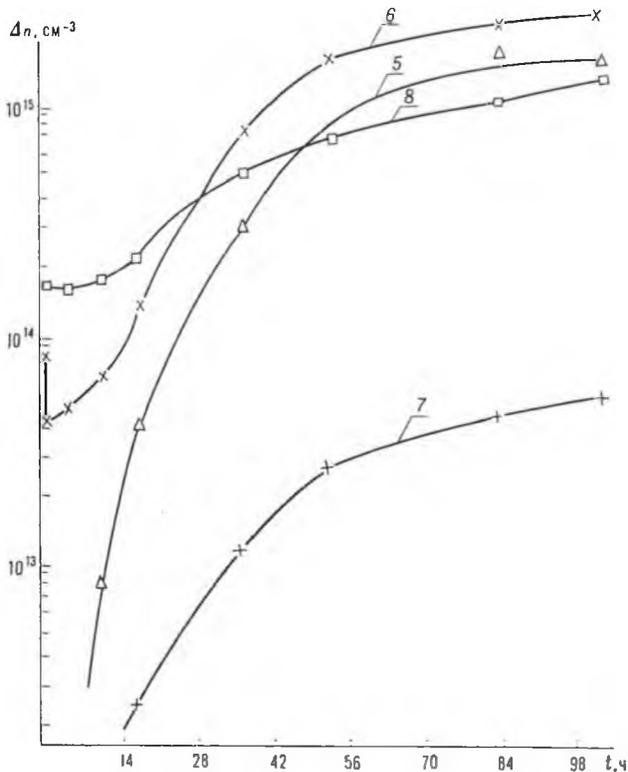
№№ п.п	Вид ПВО	$N_0 \cdot 10^{-17}$	$N_{Na} \cdot 10^{-15}$	$N_{Cu} \cdot 10^{-14}$	$N_{Au} \cdot 10^{-13}$	$N_{TД}^{max} \cdot 10^{15-15}$	$N_{TД650}^{max} \cdot 10^{-14}$
		см <sup>-3</sup>					
1	Исходный	16,54	17,0	5,9	2,9	12,1	26,7
2	1200 °С, 70 ч	9,96	14,8	4,9	2,5	2,0	13,6
3	2100 °С, 70 ч (W)	10,54	5,1	0,5	1,0	1,2	7,0
4	1200 °С, 70 ч (Yb)	10,52	6,5	0,6	0,9	1,2	6,9
5	875 °С, 20 ч	12,83	17,1	6,2	2,6	0,9	14,0
6	875 °С, 20 ч (Au)	13,62	11,9	1,9	42,0	2,8	20,6
7	1100 °С, 70 ч (W)	8,46	11,8	3,8	1,6	0,3	0,7
8	+875 °С, 20 ч	9,52	—	—	3800	4,4	11,0
	1100 °С, 70 ч (W)						
	+875 °С, 20 ч (Au)						

Примечания:  $N_{TД650}^{max}$  = максимальная концентрация ТД, введенных при 650 °С; предварительная ТО включала ПВО + ТО при 450 °С длительностью 100 ч.

чтобы удалить область, обогащенную Au, W или Yb. Присутствие W или Yb в объеме пластин обнаружено не было. ТО для генерации термодоноров длительностью ( $t_{ТО}$ ) до 100 ч осуществлялось на воздухе при температурах 450 и 650 °С.

Из анализа данных (см. таблицу) видно, что после ПВО в образцах 3, 4  $N_{Na}$ ,  $N_{Cu}$  и  $N_{Au}$  значительно ниже, чем в контрольном (1), что свидетельствует о геттерирующих свойствах W и Yb. Характерно, что наличие металлических пленок и имплантированного слоя замедляло преципитацию кислорода, происходящую в процессе ПВО: удаление кислорода в образцах 3, 4 происходило менее эффективно, чем в образце 2; аналогичные результаты дает сравнение величин  $N_0$  для образцов 5 и 6, 7 и 8.

По виду кинетические кривые генерации ТД не отличались от известных по литературным источникам [3—5]. Отметим основные



Изменение концентрации электронов в процессе ТО при 650 °С в образцах, подвергнутых нагреву при 450 °С длительностью 100 ч. Номера кривых соответствуют номерам образцов в таблице. Здесь  $\Delta n = n_{ТО} - n_{ПВО}$ , где  $n_{ПВО}$ ,  $n_{ТО}$  — концентрации электронов, измеренные непосредственно после ПВО и в ходе ТО при 650 °С

особенности генерации ТД, характерные для прошедших ПВО пластины с металлическими пленками и имплантированными слоями.

1. В образцах, легированных с помощью диффузии золотом (Si : Au), обнаружено ускорение процессов образования ТД при 450 °С (образцы 5, 6 и 7, 8). Эффект возростал с увеличением  $N_{Au}$ .

2. В пластинах с пленкой W и слоем Yb (образцы 3, 4) в отличие от образца 2, не имевшего геттерирующего покрытия, наблюдалось подавление генерации ТД как при 450, так и при 650 °С.

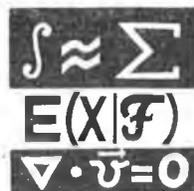
3. В ходе нагрева при 650 °С длительностью  $t_{ТО} \leq 5$  ч образцов Si : Au, предварительно термообработанных в течение 100 ч при 450 °С, исходное значение концентрации носителей заряда не восстанавливалось (см. рисунок). При указанных  $t_{ТО}$  удельное сопротивление обоих образцов Si : Au (6, 8) было близко к 20 Ом · см — его значению до проведения диффузии Au, что можно связать с «потерей» в процессе ТО электрической активности Au вследствие распада его пересыщенного твердого раствора. Численные значения концентрации термодоноров в таблице приведены с учетом этого обстоятельства. Отметим, что в Si : Au введение ТД ускорялось и в ходе ТО при 650 °С.

Как известно, процесс генерации ТД обусловлен распадом пересыщенного твердого раствора кислорода в кремнии. Максимально достижимая концентрация центров, вводимых при 450 °С ( $N_{ТД450}^{max}$ ), согласно модели Кайзера [3], пропорциональна  $N_0^3$ . Полученные экспериментальные данные не могут быть описаны в рамках данной модели. Так, несмотря на то, что после ПВО в образцах 3, 4 с геттерирующими пленками (слоями) концентрация кислорода больше, чем в контрольном (2), но  $N_{ТД450}^{max}$  в них ниже. Легирование кремния Au также приводит к нарушению соотношения  $N_{ТД450}^{max} \sim N_0^3$  (образцы 5 и 6, 7 и 8).

Результаты экспериментов можно объяснить с учетом зависимости эффективности введения ТД от присутствия центров их зародышеобразования [6]. По всей вероятности, металлические примеси (Cu, Au и т. д.) являются центрами зарождения ТД, что способствует ускорению процесса формирования термодоноров в Si : Au и подавлению его в образцах, содержащих указанные примеси в меньших концентрациях (3, 4). С другой стороны, известно, что примеси Fe и Cu ускоряют процесс диффузии кислорода [7], причем такую возможность нельзя исключить и для Au. По-видимому, в данном случае ускорение генерации ТД в Si : Au обусловлено суперпозицией обоих возможных механизмов.

## Список литературы

1. Ильин М. А., Коварский В. А., Орлов А. В. // Заводская лаборатория. 1984. Т. 50. № 1. С. 24.
2. Кузнецов Р. А. Активационный анализ. М., 1974.
3. Kaizer W., Frisch H. L., Reiss H. // Phys. Rev. 1958. V. 112. N 5. P. 1546.
4. Kanamori A., Kanamori M. // Journ. Appl. Phys. 1979. V. 50. N 12. P. 8095.
5. Gaworzewski P., Schmalz K. // Phys. stat. sol. 1983. V. A77. N 2. P. 571.
6. Markewich V. P., Murin L. I. // Phys. stat. sol. 1989. V. A111. N 2. P. K149.
7. Tipping A. K., Newman R. C., Newton D. C., Tucker J. H. // Mater. Sci Forum. 1986. V. 10—12. N 3. P. 887.



УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, ДО ЗУИ ЧИНЬ (СРВ)

## ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Рассматривается параметрическая задача  $P(\lambda)$ :

$$\varphi(\lambda) = \min \{F(x, \lambda); x \in D \subseteq Z_+^n\},$$

где  $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ ,  $\lambda$  — неотрицательный параметр;  $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ ;  $g(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x_j)$ ;  $f_j(x_j)$ ,  $g_j(x_j)$  — выпуклые функции;  $D$  —

координатно-выпуклое множество в  $Z_+^n$ ,  $Z_+^n$  — множество неотрицательных целочисленных векторов. Напомним понятие координатно-выпуклого множества [1]. Окрестностью вектора  $x \in D$  называется множество  $O(x) =$

$$= \{x' \in D: d(x, x') \leq 1\}, \text{ где } d(x, y) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| + \sum_{j=1}^n |x_j| - \sum_{j=1}^n |y_j| \right).$$

Множество  $D \subseteq Z_+^n$  назовем координатно-выпуклым, если для любых  $x, y \in D$  существует последовательность  $x = x^0, x^1, \dots, x^k = y$  точек из множества  $D$ , обладающая свойством  $x^{i+1} = x^i + \xi^i$ , где  $\xi^i = \xi^i + x \in O(x)$ ,  $\xi^i = e_i$ , или  $-e_i$ ,  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k = d(x, y)$ .

Задача  $P(\lambda)$  при фиксированном  $\lambda$  есть задача минимизации сепарабельной выпуклой функции на координатно-выпуклом множестве и для ее решения существует эффективный метод [1]. Функция  $\varphi(\lambda)$  является вогнутой кусочно-линейной с конечным числом точек излома  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ . Каждому интервалу  $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$  соответствует решение  $x^k$  задачи  $P(\lambda)$ , которое является оптимальным для всех  $\lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ . В работе предложен алгоритм вычисления точек  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и соответствующих оптимальных решений. Частный случай задачи, когда координатно-

выпуклое множество  $D$  имеет вид  $D = \{x \in Z_+^n: \sum_{j=1}^n x_j = M, v_j \leq x_j \leq u_j, x_j \text{ — целое, } j = 1, \dots, n\}$ , рассмотрен в [2].

2. Для функции  $f(x)$ , определенной на  $Z_+^n$ , введем разностные операторы, так называемые градиенты [1]:  $\nabla_+^i f(x) = f(x + e_i) - f(x)$ ,  $\nabla_-^i f(x) = f(x - e_i) - f(x)$ ,  $\nabla_+^i f(x) = \nabla_+^i(\nabla_- f(x))$ .

Введем также операторы, определяющие допустимые направления в точке  $x$ :

$$\text{fes}^+(x, D) = \{i: x + e_i \in D\}, \text{ fes}^-(x, D) = \{i: x - e_i \in D\},$$

$$\text{fes}^{+-}(x, D) = \{(i, j): x + e_i - e_j \in D\}.$$

**Критерий оптимальности [1].** Точка  $x^0$  есть оптимальное решение задачи  $P(\lambda)$  тогда и только тогда, когда

$$\nabla_i^+ F(x, \lambda) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^+(x^0, D), \quad (1)$$

$$\nabla_i^- F(x, \lambda) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^-(x^0, D), \quad (2)$$

$$\nabla_{ij}^{+-} F(x, \lambda) \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \text{fes}^{+-}(x^0, D). \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\text{fes}_{-(\pm)}^+(x, D) = \{i: i \in \text{fes}^+(x, D), \nabla_i^+ g_i(x) < 0 (> 0)\},$$

$$\text{fes}_{-(\pm)}^-(x, D) = \{i: i \in \text{fes}^-(x, D), \nabla_i^- g_i(x) < 0 (> 0)\},$$

$$\text{fes}_{-(\pm)}^{+-}(x, D) = \{i, j \in \text{fes}^{+-}(x, D): \nabla_{ij}^{+-} g(x) < 0 (> 0)\},$$

$$\lambda^1(i, x) = -\nabla_i^+ f(x) / \nabla_i^+ g(x), \quad (4)$$

$$\lambda^2(i, x) = -\nabla_i^- f(x) / \nabla_i^- g(x), \quad (5)$$

$$\lambda^3(i, j, x) = -\nabla_{ij}^{+-} f(x) / \nabla_{ij}^{+-} g(x). \quad (6)$$

Для оптимального решения  $x^\lambda$  задачи  $P(\lambda)$  найдем границы:

$$\lambda_+^1(x^\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \text{fes}_{-(\pm)}^+(x^\lambda, D) = \emptyset, \\ \min \{\lambda^1(i, x^\lambda) \geq \lambda, i \in \text{fes}_{-(\pm)}^+(x^\lambda, D)\} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\lambda_-^1(x^\lambda) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \text{fes}_{-(\pm)}^-(x^\lambda, D) = \emptyset, \\ \max \{\lambda^1(i, x^\lambda) \leq \lambda, i \in \text{fes}_{-(\pm)}^-(x^\lambda, D)\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично определим  $\lambda_+^2(x^\lambda)$ ,  $\lambda_-^2(x^\lambda)$ ,  $\lambda_+^3(x^\lambda)$ ,  $\lambda_-^3(x^\lambda)$ .

Пусть далее

$$\lambda_+(x^\lambda) = \min \{\lambda_{\pm}^i(x^\lambda): i = 1, 2, 3\}, \quad (7)$$

$$\lambda_-(x^\lambda) = \max \{\lambda_{\pm}^i(x^\lambda): i = 1, 2, 3\}. \quad (8)$$

**Теорема 1.** Пусть  $x^\lambda$  — оптимальное решение задачи для некоторого  $\lambda \geq 0$ . Тогда

а)  $x^\lambda$  — оптимальное решение задач  $P(\lambda^1)$  для любого  $\lambda^1 \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda_+(x^\lambda)]$ ;

б) если  $\lambda_-(x^\lambda) > 0$ , то точка

$$x_-^\lambda = \begin{cases} x^\lambda + e_{i^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^1(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda - e_{i^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^2(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda + e_{i^*} + e_{j^*}, & \text{если } \lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^3(i^*, j^*, x^\lambda) \end{cases} \quad (9)$$

является также оптимальным решением задачи  $P(\lambda_-(x^\lambda))$ ;

в) если  $\lambda_+(x^\lambda) < +\infty$ , то точка

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda + e_{i^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^1(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda - e_{i^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^2(i^*, x^\lambda), \\ x^\lambda + e_{i^*} - e_{j^*}, & \text{если } \lambda_+(x^\lambda) = \lambda_+^3(i^*, j^*, x^\lambda) \end{cases} \quad (10)$$

является оптимальным решением задачи  $P(\lambda_+(x^\lambda))$ .

**Доказательство.** а) Из того, что  $x^\lambda$  — оптимальное решение задачи  $P(\lambda)$ , и из критерия оптимальности следует

$$\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D). \quad (11)$$

Отсюда и из (7) вытекает  $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda^1) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}_{-(\pm)}^+(x^\lambda, D)$ ,  $\forall \lambda^1 \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$ .

Следовательно, для каждого  $i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D) \setminus \text{fes}_{-(\pm)}^+(x^\lambda, D)$  имеем  $\Delta_i^+ g(x) \geq 0$ . Отсюда для  $\lambda' \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$  из (11) вытекает  $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda') = \nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda) + (\lambda' - \lambda) \nabla_i^+ g(x^\lambda) \geq 0$ .

Таким образом, условие (1) критерия оптимальности выполняется для точки  $x^\lambda$  и параметра  $\lambda'$ . Аналогично доказывается выполнение условий (2) и (3). Откуда следует, что  $x^\lambda$  — оптимальное решение задачи  $P(\lambda')$  для  $\lambda' \in [\lambda, \lambda_+(x^\lambda)]$ .

Далее, из (8) и (11) следует  $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D)$   
 $\forall \lambda' \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda]$ , а для  $\forall i \in \text{fes}^+(x^\lambda, D) \setminus \text{fes}^+(x^\lambda, D)$  имеем  $\nabla_i^+ g(x^\lambda) \leq 0$ . Отсюда для  $\lambda' \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda]$  из (11) следует  $\nabla_i^+ F(x^\lambda, \lambda') = \Delta_i^+ F(x^\lambda, \lambda) + (\lambda' - \lambda) \nabla_i^+ g(x^\lambda) \geq 0$ . Таким образом, условие (1) критерия оптимальности выполняется для точки  $x^\lambda$  и параметра  $\lambda'$ . Аналогично доказывается выполнение условий (2), (3). Откуда следует оптимальность решения  $x^\lambda$  задачи  $P(\lambda')$  для  $\lambda' \in [\lambda_-(x^\lambda), \lambda]$ .

б) Если  $\lambda_-(x^\lambda) > 0$ , то из (8) и определений  $\lambda_-^i(x^\lambda)$ ,  $i=1, 2, 3$ , следует, что  $\lambda_-(x^\lambda)$  вычислен по одной из формул (4), (5), (6). Рассмотрим случай, когда  $\lambda_-(x^\lambda) = \lambda_-^1(i^*, x^\lambda)$ . В двух остальных случаях доказательство аналогично. Имеем  $\lambda_-^1(i^*, x^\lambda) = -\nabla_i^+ f(x^\lambda) / \nabla_i^+ g(x^\lambda)$  или  $\nabla_i^+ f(x^\lambda) + \lambda_-(x^\lambda) \nabla_i^+ g(x^\lambda) = 0$ . Отсюда  $F(x^\lambda, \lambda_-(x^\lambda)) = F(x^\lambda, \lambda_-(x^\lambda))$ . Но мы только что доказали (случай а):  $x^\lambda$  — оптимальное решение задачи  $P(\lambda_-(x^\lambda))$ . Таким образом,  $x^\lambda$  также оптимальное решение задачи  $P(\lambda_-(x^\lambda))$ .

Часть в) доказывается аналогично части б).

3. Из теоремы вытекает алгоритм вычисления  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$ .

**Алгоритм 1.**

1) Найдем оптимальное решение  $x^1$  задачи  $P(0)$ . Положим  $k := 1$ ,  $\lambda_0 := 0$ .

2) Если  $\nabla_i^+ g(x^k) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^-(x^k, D)$ , то  $\lambda_k = \infty$  и перейти к 3, иначе вычислить  $\lambda_-^1(x^k)$  и положить  $\lambda_k = \lambda_-^1(x^k)$ .

3) Если  $\nabla_i^+ g(x^k) \geq 0 \quad \forall i \in \text{fes}^-(x^k, D)$ , то перейти к (4), иначе вычислить  $\lambda_-^2(x^k)$  и положить  $\lambda_k = \lambda_-^2(x^k)$  при  $\lambda_k > \lambda_-^2(x^k)$ .

4) Если  $\nabla_{ij}^+ g(x^k) \geq 0 \quad \forall i, j \in \text{fes}^{+-}(x^k, D)$ , то перейти к 5, иначе вычислить  $\lambda_-^3(x^k)$  и положить  $\lambda_k = \lambda_-^3(x^k)$  при  $\lambda_k > \lambda_-^3(x^k)$ .

5) Если  $\lambda_k < \infty$ , то  $x^{k+1}$  определяется по формуле (9). Положить  $k := k + 1$  и перейти к 2.

4. Рассмотрим задачу дробно-выпуклой дискретной оптимизации:

$$\min \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : x \in D \subseteq Z^n \right\}, \quad (12)$$

где  $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ ,  $g(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x_j)$ ,  $f_j(\cdot)$ ,  $g_j(\cdot)$  — выпуклые функции, принимающие только положительные значения на  $D$ ;  $D$  — координатно-выпуклое множество в  $Z^n$ .

Принцип параметризации [3]. Задача (12) эквивалентна нахождению корня уравнения

$$\psi(\lambda) = 0, \quad (13)$$

где значение функции  $\psi(\lambda)$  вычисляется в точке  $\lambda$  в результате решения следующей задачи:  $Q(\lambda): \psi(\lambda) = \min \{Z(x, \lambda) : x \in D\}$ , где  $Z(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ .

В силу положительности функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  на  $D$  корень уравнения (13) также положителен. Поэтому достаточно рассмотреть только случай  $\lambda > 0$ . Здесь из-за вогнутости  $g(x)$  и выпуклости  $f$  задача  $Q(\lambda)$  относится к классу задач, рассмотренных в 2.

Принцип параметризации позволяет по каждому методу решения уравнения (13) строить метод решения задачи (12). Когда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  линейны, для решения задачи (13) предложены последовательный, дихотомический, параметрический методы и методы, основанные

на их сочетании [3—5]. Однако когда  $f(x)$  и  $g(x)$  нелинейны, для задачи (12) предложены лишь последовательный и дихотомический методы [4, 5]. На основании полученного результата для задачи (12) можно разработать параметрический метод, который заключается в следующем. Сначала для задачи  $Q(\lambda)$  найти все точки излома  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  функции  $\psi(\lambda)$ . Затем, аналогично [5], применив дихотомию по индексам этих точек, можно получить оптимальное решение задачи (12), решив не более  $[\log_2 N] + 1$  задач типа  $Q(\lambda)$ . Обычно для нахождения всех  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  требуется много времени (пропорционально числу  $N$ ). Поэтому при решении задачи (12) эффективно сочетать параметрический метод с последовательным или дихотомическим методами. В качестве примера ниже излагается метод, основанный на сочетании параметрического и дихотомического методов.

#### Алгоритм 2.

0) Найдем оптимальное решение  $x^1$  задачи  $Q(0)$ . Положим  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = f(x^1)/g(x^1)$ .

1) Положим  $\lambda = (\lambda + \bar{\lambda})/2$ . Найти оптимальное решение  $x^\lambda$  задачи  $Q(\lambda)$ . Если  $\psi(\lambda) = 0$ , то перейти к 4. Если  $\psi(\lambda) > 0$ , найти  $\lambda_-(x^\lambda)$  по формуле (7) и перейти к 2. Если  $\psi(\lambda) < 0$ , найти  $\lambda_+(x^\lambda)$  по формуле (8) и перейти к 3.

2) Если  $Z(x^\lambda, \lambda_-(x^\lambda)) \leq 0$ , то перейти к 4; иначе положить  $\lambda = \lambda_-(x^\lambda)$  и перейти к 1.

3) Если  $Z(x^\lambda, \lambda_+(x^\lambda)) \geq 0$ , то перейти к 4; иначе положить  $\lambda = \lambda_+(x^\lambda)$  и перейти к 1.

4) Положим  $x^* = x^\lambda$ .

**Теорема 2.** Решение  $x^*$ , полученное алгоритмом 2, является оптимальным в задаче (13).

### Список литературы

1. Ковалев М. М. Матрицы в дискретной оптимизации. Минск, 1987. С. 222.
2. Kato H., Ibaraki T. // Discrete appl. Math. 1985. V. 10. P. 261.
3. Dinkelbach W. // Management Science. 1967. V. 13. P. 492.
4. Stodran M. // EDF Bull. Direct. Etudes Recherches. Ser. C. Math. Informat. 1982. N 3. P. 49.
5. До Зуи Чинь. // Тр. национал. матем. конференц. Ханой, 1986. Т. 1. С. 80 (на вьетнамском языке).

Поступила в редакцию 25.02.88.

УДК 519.71.72

А. Н. МАЛЯРОВ, А. Н. ИСАЧЕНКО

### ЛОГИЧЕСКАЯ СПЕЦИФИКАЦИЯ БЛОКИРОВКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

Одним из известных подходов к формальной спецификации и верификации взаимодействия процессов является рассмотрение их в терминах математической логики. Определенное свойство выражается логической формулой и проверяется путем ее вывода из аксиом с помощью формальных правил. Достоинство такого подхода для описания и доказательства свойств протоколов информационных сетей (ИС) состоит в его высокой абстрактности и гибкости [1, 2].

Для отражения будущих свойств процессов в модальных языках первого порядка вводятся операторы  $\square$  (всегда) и  $\diamond$  (однажды), а также правило образования: если  $\omega$  — модальная формула, то  $\square\omega$  и  $\diamond\omega$  также являются модальными формулами. Формула вида  $\square\omega$  означает, что  $\omega$  истинна для текущего и всех будущих состояний процесса, а формула  $\diamond\omega$ , что  $\omega$  истинна в текущем или же в некотором будущем состоя-

нии процесса. Связь модальных операторов определяется тождеством  $\square \neg \omega \equiv \neg \diamond \omega$ . Понятие абсолютного времени отсутствует.

Используются следующие аксиомы:

$$\begin{aligned} \square (a \rightarrow b) &\rightarrow \square a \rightarrow \square b, & \text{next } \neg a &\equiv \neg \text{next } a, \\ \square (a \wedge b) &\equiv \square a \wedge \square b, & \diamond (a \vee b) &\equiv \diamond a \vee \diamond b, \\ ((a \rightarrow \diamond b) \wedge (b \rightarrow \diamond c)) &\rightarrow (a \rightarrow \diamond c), & \square a &\rightarrow a \wedge \text{next } a, \\ ((a \rightarrow \diamond c) \wedge (b \rightarrow \diamond c)) &\rightarrow ((a \vee b) \rightarrow \diamond c), \\ \text{next } (a \rightarrow b) &\rightarrow (\text{next } a \rightarrow \text{next } b), \\ a \wedge \square (a \rightarrow \text{next } a) &\rightarrow \square a, \end{aligned}$$

где оператор  $\text{next}$  характеризует следующее событие в последовательности.

Двойной оператор  $\square \diamond$  используется для отражения рекуррентных свойств процессов, а  $\diamond \square$  — для описания постоянства свойств; для идентификации состояний процессов и точек управления вводятся выражения вида  $\text{at } s$ ,  $\text{after } s$ , где  $s$  — логические переменные. Предикат  $\text{at } s$  истинен для управления в начале выполнения операции  $s$ ,  $\text{after } s$  — для управления в конце операции  $s$ . Свойство завершения процесса отражается формулой  $\text{at } s \rightarrow \diamond \text{after } s$ , а его циклическое повторение формулой  $\text{at } s \rightarrow \square \diamond \text{at } s$ .

Рассмотрим основные формулы логической спецификации централизованной блокировки протокола обновления элементов данных (ЭД) из распределенного информационного фонда ИС [3]. Протокол обновления включает последовательные этапы блокировки, распределенного обновления и разблокировки. В каждом узле ИС содержится система управления (СУ) обновлением, соответствующая локальной компоненте прикладного уровня в архитектуре взаимосвязи открытых систем [4].

Будем рассматривать сеть передачи, которая имеет средства для обеспечения доставки сообщений без искажений, дублирования и их перепорядочения. Сама СУ предоставляет услуги локальной системе управления базой данных определенного узла ИС. Будем считать, что очередь запросов в центральной СУ отсутствует и производятся повторные запросы из периферийных СУ при отказах в блокировке.

Общее поведение протокола определяется взаимодействующими событиями, рассматриваемыми как последовательности передаваемых в ИС сообщений и сообщений тайм-аутов, при этом внутренняя структура компонент протокола не рассматривается. Утверждения о последовательностях задаются логическими формулами. Спецификация протокола представляет собой ограничение на множество последовательностей взаимодействий.

Запросы пользователей на обновление ЭД в  $i$ -ом периферийном узле ИС образуют входную последовательность  $X_i = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ig}, \dots$  в  $SU_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Запросы на блокировку  $L_{ig}$  и разблокировку  $U_{ig}$  образуют выходную последовательность сообщений  $a_i$  для каждой  $SU_i$ . Входная последовательность  $\delta_i$  содержит разрешения обновления  $A_{ig}, A_{ds}$  для запросов из  $SU_i$  и  $SU_d$  соответственно. Входной для центральной  $SU_0$  является последовательность  $\beta$ , формируемая по запросам всех  $SU_i$ , а выходной — последовательность разрешений  $\gamma$ , пересылаемых во все  $SU_i$ . Фактические блокировки и разблокировки ЭД в  $SU_0$  образуют выходную последовательность записей в системный журнал  $Y = y_1, y_2, \dots, y_r, \dots$ .

Спецификация свойств безопасности протокола задается инвариантами. Для  $SU_i$  выбор запроса пользователя на блокировку из входной очереди при завершении обработки предыдущего запроса определяется формулой:

$$\forall i: |X_i| \geq g \rightarrow U_{ig-1} \in a_i, \quad (1)$$

где  $|X_i|$  — число выбранных запросов из входной очереди,  $U_{ig-1} \in a_i$  определяет разрешение чтения очередного  $g$ -го запроса из очереди.

Если в  $SU_i$  получена  $g$ -я квитанция с разрешением  $A_{ig}$ , то ей предшествует передача одного или последовательности из нескольких запросов на блокировку:

$$\forall i: |A_i| \geq g \rightarrow \langle L_{ig} \rangle \in \alpha_i, \quad (2)$$

где  $|A_i|$  — длина входной последовательности разрешений  $\langle A_{ig} \rangle \in \delta_i$ . Для центральной  $SU_0$  имеем инварианты:

$$y_r = U_{ig} \rightarrow U_{ig} \in \beta; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} y_r = L_{ig} \rightarrow L_{ig} \in \beta \wedge y_{r-1} = U_{jl} \\ (j = i) \wedge (g = l) = \text{false} \end{aligned} \right\}; \quad (4)$$

$$A_{ig} \in \gamma \rightarrow \exists r (y_r = L_{ig}). \quad (5)$$

Если сообщение  $U_{ig}$  записано в  $Y$ , то входная последовательность  $\beta$  содержит это сообщение (3). Если запрос  $L_{ig}$  записан в  $r$ -й элемент  $Y$ , то он появляется на входе  $\beta$   $SU_0$  и в предыдущем элементе  $Y$  записано сообщение о разблокировке (4). Если разрешение на блокировку появляется в выходной последовательности, то соответствующий ему запрос записан в  $Y$  (5).

Свойства живости протокола для источника запросов определяются логическими утверждениями:

$$\forall i, n: \diamond |X_i| > n. \quad (6)$$

$$\forall n: (U_{ig} \in \alpha_i \rightarrow |X_i| \geq g) \rightarrow \forall j (U_{ij} \in \alpha_i \rightarrow c(L_{ij+1} \in \alpha_i) > n) \vee$$

$$\vee \diamond ((A_{ij+1} \in \delta_i) \vee \diamond (A_{ds} \in \delta_i)) \quad (7)$$

$$\text{at } UP_{ig} \wedge A_{ig} \in \delta_i \rightarrow \diamond (\text{after } UP_{ig} \wedge U_{ig} \in \alpha_i) \quad (8)$$

$$\text{at } UP_{ds} \wedge A_{ds} \in \delta_i \rightarrow \diamond (\text{after } UP_{ds}) \quad (9)$$

$$\text{at } |X_i| = g \wedge \square \diamond A_{ds} \in \delta_i \rightarrow \square \diamond \text{at } |X_i| = g, \quad (10)$$

где  $c(\cdot)$  — число последовательно возникающих событий, отраженных в скобках,  $i \neq d$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Формула (6) определяет неограниченный рост размера последовательности  $X_i$ . Гипотеза формулы (7) утверждает, что сообщение о разблокировке  $U_{ig}$  передается в  $SU_0$  после  $g$ -го запроса пользователя из входной очереди  $X_i$ . Правая часть (7) утверждает, что  $SU_i$  после пересылки  $U_{ig}$  начинает неограниченно часто передавать сообщение о блокировке  $L_{ij+1}$  по следующему  $(j+1)$ -му запросу до тех пор, пока не будет принята квитанция  $A_{ij+1}$  из  $SU_0$  или же не будет принято сообщение о блокировке для запроса из другой  $SU_d$ . Если  $A_{ds} \in \delta_i$ , то начинается фаза обновления по  $s$ -му запросу  $SU_d$ . Формулы (8), (9) определяют завершение фазы обновления  $UP_{ig}$  или  $UP_{ds}$  при наличии разрешения по запросам из  $SU_i$  или  $SU_d$  соответственно. Формула (10) определяет повторный выбор запроса из очереди  $X_i$  при наличии обновления ЭД по запросам из других узлов  $d \neq i$ .

Для определения свойств живости  $SU_0$  справедливо утверждение:

$$\exists r: \square \diamond (L_{ig} \in \beta) \rightarrow \diamond (y_r = L_{ig}), \quad (11)$$

т. е. многократное поступление одного и того же сообщения в  $SU_0$  обязательно приведет к блокировке ЭД. Это означает завершение процесса обновления и потенциальную возможность заблокировать ресурс при любом числе  $SU_i$  и входном потоке запросов в  $SU_0$ .

Спецификация свойства безопасности всего протокола блокировки задается тремя инвариантами:

$$\forall r (y_r = L_{ig}) \wedge |Y| \geq r + 1 \rightarrow y_{r+1} = U_{ig}; \quad (12)$$

$$\forall i: \langle A_{ig} \rangle \preceq X_i; \quad (13)$$

$$| \langle U_{ig} \rangle | = m, \quad (14)$$

где  $|\langle U_{ig} \rangle|$  — длина последовательности сообщений из СУ<sub>i</sub> о завершении  $g$ -го обновления по запросу  $x_{ig}$ ;  $m$  — число копий ЭД и ИС; знак  $\leq$  означает совпадение номеров запросов в последовательностях  $\langle A_{ig} \rangle$  и  $X_i$ ,  $|A_i| \leq |X_i|$ .

Инвариант (12) утверждает, что в выходной последовательности  $Y$  отсутствует последовательность из нескольких сообщений блокировки. Он отражает свойство целостности распределенного информационного фонда при управлении методом блокировки, а именно: в любой момент времени только одна из СУ может владеть правом обновлять ЭД в ИС. В соответствии с (13) очередность обновлений соответствует очередности запросов пользователей для каждой СУ. Выполнение формулы (14) гарантирует свойство атомарности транзакций обновления ЭД и непротиворечивости всех копий ЭД до и после обновления.

Критерием живости всего протокола является утверждение о неограниченности размера последовательности  $\langle A_{ig} \rangle$  для каждого СУ<sub>i</sub> при неограниченном размере  $X_i$ :

$$\forall i, n: \diamond |X_i| > n \rightarrow \diamond |A_i| \geq n. \quad (15)$$

Аналогично в качестве критерия живости можно использовать свойство безграничности роста выходной последовательности сообщений  $U_{ig} \in \alpha_i$ .

Для индуктивного доказательства живости необходимо установить, что  $\square (|A_i| = k \rightarrow \diamond |A_i| = k + 1)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ .

Для доказательства корректности протокольных программ вначале производится независимо друг от друга их проверка с использованием утверждений о свойствах СУ на языке логики. Затем осуществляется доказательство свойств всего протокола, которое основано на формальном описании компонент и среды передачи данных внутри данной логической системы аксиоматическим методом. Другой подход состоит в генерации графа состояний протокола на основе изучения параллельных программ. Тогда общие свойства протокола проверяются на графе состояний.

### Список литературы

1. Venkatraman R. C., Piattkowski T. F. A Formal Comparison of Formal Protocol Specification Techniques // Protocol Specification, Testing and Verification, V / Ed. by M. Diaz. North Holland Publ. 1986. P. 401.
2. Mal'yarov A. N. Temporal Logic Usage in the Protocols of Distributed Data Bases // Proc. 4th Int. Conf. of Program Designers / Ed. by A. Iványi. Budapest, 1988. P. 49.
3. Зиновьев Э. В. Управление сетевыми информационными ресурсами. Рига, 1987.
4. Якубайтис Э. А. Информационно-вычислительные сети. М., 1984.

Поступила в редакцию 12.11.88.

УДК 65.012.122

О. М. ТИХОНЕНКО

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММАРНОГО ОБЪЕМА ТРЕБОВАНИЙ В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМ ОБСЛУЖИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ

Рассмотрим систему  $M|G|1|_\infty$  с неоднородными требованиями. Каждое требование характеризуется некоторой случайной длиной  $\xi$ , независимой от длин других требований. Время обслуживания  $\xi$  будем считать зависящим только от длины обслуживаемого требования. Задача совместная функция распределения  $F(x, t) = P\{\xi < x, \xi < t\}$ . Под суммарным объемом  $\sigma(t)$  будем понимать [1, 2] полную сумму длин требований, находящихся в системе в момент времени  $t$ .

Будем считать, что обслуживающий прибор (ОП) в свободном состоянии может выйти из строя. Пусть  $T$  — момент времени, в который система освободилась от требований, и на промежутке  $[T, T + t]$  новые требования в систему не поступали. Тогда на этом промежутке ОП выйдет из строя с вероятностью  $E(t)$ . Вышедший из строя ОП восстанавливается в течение некоторого случайного промежутка времени, функция распределения (ф. р.) которого равна  $H(t)$ . В период восстановления ОП требования, поступившие в систему, не обслуживаются. В занятом состоянии ОП работает надежно.

Целью работы является определение функции

$$\delta(s, q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} M e^{-s\sigma(t)} dt$$

в предположении, что начальные условия работы системы — нулевые, т. е.  $\sigma(0) = 0$ .

Обозначим через  $\lambda$  интенсивность входного потока, пусть  $B(t) = F(\infty, t)$  — ф. р. времени обслуживания,  $L(x) = F(x, \infty)$  — ф. р. длин требований. Через  $\alpha_{ij}$  обозначим смешанный момент порядка  $i + j$  ф. р.  $F(x, t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ). Моменты порядка  $i$  ф. р.  $L(x)$ ,  $B(t)$  и  $H(t)$  обозначим соответственно через  $\varphi_i$ ,  $\beta_i$  и  $h_i$ . Преобразования Лапласа — Стильтеса (ПЛС) функций  $F(x, t)$ ,  $L(x)$ ,  $B(t)$ ,  $E(t)$ ,  $H(t)$  обозначим соответственно  $\alpha(s, q)$ ,  $\varphi(s)$ ,  $\beta(q)$ ,  $\varepsilon(q)$ ,  $h(q)$ . В [1, 2] определяется функция  $\delta(s, q)$  для случая надежного ОП, т. е. при  $E(t) \equiv 0$ .

Для определения  $\delta(s, q)$  воспользуемся модифицированным методом введения дополнительного события, считая, что независимо от процесса функционирования системы происходят катастрофы, которые образуют простейший поток интенсивности  $q$ , и каждое требование независимо от других окрашивается либо в синий, либо в красный цвет. В отличие от известного метода [3] будем считать, что вероятность того, что произвольное требование окажется красным, зависит от его длины. Вероятность того, что требование длины  $x$  красное, положим равной  $e^{-sx}$ . Тогда, легко видеть,  $\varphi(s)$  имеет смысл вероятности того, что произвольное требование — красное,  $\alpha(s, q)$  — вероятность того, что произвольное требование — красное и за время его обслуживания не происходили катастрофы.

Пусть известно, что требование, занимающее в произвольный момент времени ОП, к данному моменту обслуживалось в течение времени  $y$ . Тогда вероятность того, что это требование красное, равна [2]:

$$e_y(s) = [1 - B(y)]^{-1} \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u). \quad (1)$$

Обозначим через  $\pi(q)$  ПЛС ф. р. периода занятости системы  $M|G|1|\infty$  при  $E(t) \equiv 0$ . Пусть  $\pi_n(q) = [\pi(q)]^n$  — ПЛС ф. р. так называемого  $n$ -периода, т. е. периода занятости, начинающегося с того момента, когда в системе находится  $n$  требований. Пусть  $\Pi^n(x, y, t) dx dy$  — вероятность того, что через промежуток времени длины  $t$  после начала  $n$ -периода (в предположении, что к этому моменту он не завершился) суммарный объем равен  $x$ , а с последнего момента окончания обслуживания прошло время  $y$ . Обозначим:

$$\pi_n(s, y, q) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-sx - qt} \Pi^n(x, y, t) dx dt,$$

$$\pi_n(s, q) = \int_0^{\infty} \pi_n(s, y, q) dy.$$

Через  $P(s, y, q)$  обозначим преобразование Лапласа по  $t$  ПЛС условной ф. р. суммарного объема требований, находящихся в системе через  $t$  единиц времени после начала периода регенерации (момента прихода

требования в пустую систему) при условии, что с последнего момента окончания обслуживания прошло время  $y$ .

Пользуясь модифицированным методом введения дополнительного события с учетом (1) легко по аналогии с [4] получить следующие утверждения.

**Лемма 1.** Функции  $\pi_n(s, y, q)$ ,  $\pi_n(s, q)$  соответственно определяются по формулам:

$$\pi_n(s, y, q) = \frac{e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} [(\varphi(s))^n - (\pi(q))^n]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u),$$

$$\pi_n(s, q) = \frac{[(\varphi(s))^n - (\pi(q))^n] [\varphi(s) - \alpha(s, q+\lambda-\lambda\varphi(s))]}{[\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))] [q+\lambda-\lambda\varphi(s)]}.$$

**Лемма 2.** Функция  $P(s, y, q)$  определяется соотношением

$$P(s, y, q) = (1 - E(y)) e^{-(q+\lambda)y} + \frac{\varepsilon(q+\lambda)}{q+\lambda} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\times \frac{\varphi(s) - \pi(q)}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(q+\lambda) [h(q+\lambda-\lambda\varphi(s)) - h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\times \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u) + \varepsilon(q+\lambda) [1 - H(y)] e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y}.$$

Известно [4], что ПЛС ф. р. периода регенерации рассматриваемой системы имеет вид

$$r(q) = \frac{\lambda}{q+\lambda} [1 - \varepsilon(q+\lambda)] \pi(q) + \varepsilon(q+\lambda) h(q+\lambda - \lambda\pi(q)). \quad (2)$$

Через  $\delta(s, y, q)$  обозначим преобразование Лапласа по  $t$  от ПЛС условной ф. р. случайной величины  $\sigma(t)$  при условии, что с последнего момента восстановления ОП или окончания обслуживания прошло время  $y$ . Очевидно,

$$\delta(s, g) = \int_0^{\infty} \delta(s, y, q) dy.$$

Из леммы 2 и (2) следует

**Теорема. а)** Функция  $\delta(s, y, q)$  вычисляется по формуле

$$\delta(s, y, q) = \left[ 1 - \frac{\lambda}{q+\lambda} (1 - \varepsilon(q+\lambda)) \pi(q) - \varepsilon(q+\lambda) h(q+\lambda - \lambda\pi(q)) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ [1 - E(y)] e^{-(q+\lambda)y} + \frac{\lambda e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} [1 - \varepsilon(q+\lambda)] [\varphi(s) - \pi(q)]}{(q+\lambda) [\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]} \times \right.$$

$$\times \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u) + \varepsilon(q+\lambda) [1 - H(y)] e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(q+\lambda) [h(q+\lambda-\lambda\varphi(s)) - h(q+\lambda-\lambda\pi(q))]}{\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))} e^{-(q+\lambda-\lambda\varphi(s))y} \times$$

$$\left. \times \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{u=y}^{\infty} dF(x, u) \right\}.$$

б) Функция  $\delta(s, q)$  имеет вид

$$\delta(s, q) = \left[ 1 - \frac{\lambda}{q+\lambda} (1 - \varepsilon(q+\lambda)) \pi(q) - \varepsilon(q+\lambda) h(q+\lambda - \lambda\pi(q)) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 - \varepsilon(q+\lambda)}{q+\lambda} + \frac{\lambda [1 - \varepsilon(q+\lambda)] [\varphi(s) - \alpha(s, q+\lambda-\lambda\varphi(s))] [\varphi(s) - \pi(q)]}{(q+\lambda) (q+\lambda-\lambda\varphi(s)) [\varphi(s) - \beta(q+\lambda-\lambda\varphi(s))]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon(q+\lambda) [\varphi(s) - \alpha(s, q+\lambda - \lambda\varphi(s))] [h(q+\lambda - \lambda\varphi(s)) - h(q+\lambda - \lambda\pi(q))]}{[q+\lambda - \lambda\varphi(s)] [\varphi(s) - \beta(q+\lambda - \lambda\varphi(s))]} \right\} + \frac{\varepsilon(q+\lambda) [1 - h(q+\lambda - \lambda\varphi(s))]}{q+\lambda - \lambda\varphi(s)} \quad (3)$$

*Следствие 1.* Преобразование Лапласа среднего суммарного объема в момент  $t$  задается выражением

$$\delta_1(q) = \left[ 1 - \frac{\lambda}{q+\lambda} (1 - \varepsilon(q+\lambda)) \pi(q) - \varepsilon(q+\lambda) h(q+\lambda - \lambda\pi(q)) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[ \varepsilon(q+\lambda) (h(q) - h(q+\lambda - \lambda\pi(q))) + \frac{\lambda(1 - \varepsilon(q+\lambda))(1 - \pi(q))}{q+\lambda} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\alpha_s(s, q)|_{s=0}}{q(1 - \beta(q))} + \frac{\lambda\varphi_1}{q^2} \left[ \varepsilon(q+\lambda) (1 - h(q+\lambda - \lambda\pi(q))) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \varepsilon(q+\lambda))(q+\lambda - \lambda\pi(q))}{q+\lambda} \right] \right\}.$$

*Следствие 2.* При  $\lambda\beta_1 < 1$  имеем  $\sigma(t) \Rightarrow \sigma$  при  $t \rightarrow \infty$  в смысле слабой сходимости. ПЛС ф. р. случайной величины  $\sigma$  имеет вид

$$\delta(s) = \lim_{q \downarrow 0} q \delta(s, q) = \frac{1 - \lambda\beta_1}{1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1} \left\{ \left[ 1 - \varepsilon(\lambda) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon(\lambda)(1 - h(\lambda - \lambda\varphi(s)))}{1 - \varphi(s)} \right] \left[ 1 + \frac{\varphi(s) - \alpha(s, \lambda - \lambda\varphi(s))}{\beta(\lambda - \lambda\varphi(s)) - \varphi(s)} \right] \right\}. \quad (4)$$

*Следствие 3.* Первые два момента случайной величины  $\sigma$  определяются по формулам:

$$\delta_1 = \lambda\alpha_{11} + \frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1}{2(1 - \lambda\beta_1)} + \frac{\lambda^2h_2\varepsilon(\lambda)\varphi_1}{2(1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}, \quad (5)$$

$$\delta_2 = \lambda(\alpha_{21} + \lambda\varphi_1\alpha_{12}) + \frac{\lambda^2\beta_2\varphi_1\alpha_{11}}{1 - \lambda\beta_1} + \frac{\lambda^2\beta_2\varphi_2}{2(1 - \lambda\beta_1)} + \frac{\lambda^3\beta_3\varphi_1^2}{3(1 - \lambda\beta_1)} + \\ + \frac{\lambda^4\beta_2^2\varphi_1^2}{2(1 - \lambda\beta_1)^2} + \frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_1\alpha_{11}}{1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1} + \frac{\lambda^2\varepsilon(\lambda)h_2\varphi_2}{2(1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1)} + \\ + \frac{\lambda^3\varepsilon(\lambda)h_3\varphi_1^2}{3(1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1)} + \frac{\lambda^4\varepsilon(\lambda)h_2^2\varphi_1^2}{2(1 - \lambda\beta_1)(1 - \varepsilon(\lambda) + \lambda\varepsilon(\lambda)h_1)}. \quad (6)$$

Легко убедиться, что в случае абсолютно надежного прибора формулы (3) — (6) дают известные соотношения [2].

### Список литературы

1. Тихоненко О. М. Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111.
2. Тихоненко О. М. // Journ. Inf. Process. Cybern. ETK. 1987. V. 23. № 7. P. 339.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., 1966.
4. Приоритетные системы обслуживания / Гнеденко Б. В. и др. М., 1973.

Поступила в редакцию 23.11.88.

УДК 519.24

Ю. В. МЕЛЕНЕЦ

### СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОРЕГРЕССИЙ

Пусть  $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$  — нестационарный случайный процесс, математическое ожидание и ковариации которого ограничены и являются периодическими функциями. Возможность описания такого процесса уравнениями авторегрессии с постоянными коэффициентами весьма проблематична [1]. В связи с этим предлагается рассмотреть модель

авторегрессии, параметры которой являются периодическими функциями:

$$X_t = \sum_{k=1}^n a_k(t) X_{t-k} + \xi_t, \quad (1)$$

где  $\xi_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  — нестационарная последовательность независимых случайных величин с  $M\xi_t = 0$ ,  $D\xi_t = \sigma_t^2$ ,  $\sigma_t^2 = \sigma_{\tau+jT}^2$ ;  $a_k(\tau) = a_k(\tau + jT)$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq \tau \leq T$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $T$  — натуральное число, имеющее смысл периода.

Вопросам исследования свойств временного ряда  $X_t$ , получаемого при помощи (1), посвящен ряд работ [2—4]. В настоящей статье предполагается, что период  $T$  известен, и рассматриваются две задачи.

1. В ситуации, когда  $\xi_t$  есть гауссовская последовательность, необходимо по наблюдениям  $x_1, x_2, \dots, x_N$  оценить  $nT$  коэффициентов  $a_k(\tau)$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq \tau \leq T$ ,  $T$  дисперсий  $\sigma_t^2$ ,  $1 \leq \tau \leq T$  и исследовать свойства получаемых оценок.

2. Построить оценку одного из пропущенных значений в выборке  $x_1, x_2, \dots, x_N$  по известным значениям  $X_t$  до и после пропуска и исследовать свойства этой оценки.

Отметим, что задача оценивания коэффициентов  $a_k(\tau)$  в модели (1) рассматривалась в [2]. Здесь использовалась система уравнений, аналогичных уравнениям Юла — Уолкера для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами. Замена теоретических ковариаций на выборочные и решение получившейся системы относительно коэффициентов  $a_k(\tau)$  давало оценки этих параметров. Но практическая реализация этой процедуры малоэффективна и требует асимптотически больших объемов выборки.

Для решения первой задачи применим метод максимального правдоподобия. Первые  $n$  элементов выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  считаем начальными значениями авторегрессии. Запишем плотность распределения случайных величин  $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_N$  в виде:

$$(2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left( \prod_{t=n+1}^N \sigma_t \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^N \sigma_t^{-2} \xi_t^2 \right\} \quad (2)$$

и перейдем в (2) от переменных  $\xi_{n+1}, \dots, \xi_N$  к переменным  $x_{n+1}, \dots, x_N$ . Из (1) получаем, что якобиан этого преобразования равен 1, и совместная плотность значений  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N$  есть:

$$f(x_{n+1} = x_{n+1}, \dots, x_N = x_N / \{a_k(\tau), \sigma_t^2, 1 \leq \tau \leq T, 1 \leq k \leq n\}) = \\ = (2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left( \prod_{t=n+1}^N \sigma_t \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^N \sigma_t^{-2} \left( x_t - \sum_{k=1}^n a_k(t) x_{t-k} \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Введем обозначения:  $\alpha_T = \left[ \frac{N-n}{T} \right]$  — целое число циклов, содержащихся в наблюдаемой реализации  $x_{n+1}, \dots, x_N$ ;  $N-n = \alpha_T T + \beta_T$ ,  $0 \leq \beta_T < T$ ;

$$m_t = \begin{cases} \alpha_T + 1, & \text{если } 1 \leq t \leq \beta_T, \\ \alpha_T, & \text{если } \beta_T < t \leq T. \end{cases}$$

Из (3) и введенных обозначений следует, что логарифм функции правдоподобия оцениваемых параметров записывается в виде:

$$l(\{a_k(\tau), \sigma_t^2, 1 \leq \tau \leq T, 1 \leq k \leq n\}) = \frac{n-N}{2} \ln 2\pi - \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^{m_\tau} \sigma_{n+\tau+(j-1)T}^{-2} \times \\ \times \left( x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^n a_k(n+\tau+(j-1)T) \times \right. \\ \left. \times x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2. \quad (4)$$

Используя (4) и свойство периодичности параметров  $\{a_k(\tau), \sigma_\tau^2\}$ , получаем, что задача оценивания совокупности этих параметров распадается на  $T$  однотипных задач. При фиксированном значении  $\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq T$  оценки коэффициентов  $a_k(\tau)$ ,  $1 \leq k \leq n$  находятся как решение задачи:

$$\sum_{j=1}^{m_\tau} \left( x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^n a_k(n+\tau) x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2 \rightarrow \min_{\{a_k(\tau)\}}, \quad (5)$$

а дисперсия  $\sigma_{\tau+n}^2$  по найденным оценкам  $\hat{a}_k(\tau)$  определяется по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}_{\tau+n}^2 = \frac{1}{m_\tau - 1} \sum_{j=1}^{m_\tau} \left( x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^n \hat{a}_k(n+\tau) x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2. \quad (6)$$

Решение задачи (5) записывается в виде:

$$\hat{A}_\tau = (Z_\tau^* Z_\tau)^{-1} Z_\tau^* X_\tau, \quad (7)$$

где обозначено:  $\hat{A}_\tau = [\hat{a}_k(n+\tau), 1 \leq k \leq n]^*$ ,  $X_\tau = [x_{n+\tau+(j-1)T}, 1 \leq j \leq m_\tau]^*$ ,  $Z_\tau = \|x_{n+(i-1)T+\tau-j}, 1 \leq i \leq m_\tau, 1 \leq j \leq n\|$ .

Для исследования свойств оценок (6) и (7) введем в рассмотрение матрицу  $B(r) = \|b_{ij}(r)\|$ ,  $1 \leq i, j \leq T$ , где

$$b_{ij}(r) = \begin{cases} r^n, & i = j, \\ -a_{i-j}(i) r^{n-(i-j)}, & i > j, \\ -a_{T+i-j}(i) r^{n-(T+i-j)}, & i < j, \end{cases}$$

и предположим, что корни уравнения  $\det B(r) = 0$  ограничены по модулю единицей. Для этого случая в [3] показано, что

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(t) \xi_{t-j}, \quad (8)$$

где коэффициенты  $\delta_j(t)$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$  и ряд в правой части (8) сходится в среднеквадратическом смысле. При выполнении (8) удается доказать, что оценки (6) и (7) являются состоятельными. Доказательство проводится аналогично тому, как это делается в [5] для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами, и не приводится из-за громоздкости.

Алгоритм оценивания параметров периодических авторегрессий по методу максимального правдоподобия реализован на ЭВМ, и исследование возможности его применения проводилось методами статистического моделирования. Приведем в качестве примера результаты просчетов для авторегрессии порядка  $n = 1$  с периодом  $T = 5$  и с объемами выборок  $N = 500$  и  $N = 1000$ . Обработке подвергалось по 50 реализаций. Значения параметров, их оценки и доверительные интервалы с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  приведены в таблице, анализ данных которой свидетельствует о работоспособности рассматриваемого алгоритма.

Во второй задаче предполагается, что в выборке  $x_1, x_2, \dots, x_N$  имеется  $[l, l+s]$  — интервал пропущенных значений,  $1 \leq l \leq N-s$ , и требуется восстановить одно из этих значений, относящихся к моменту  $l+m$ ,  $0 \leq m \leq s$ . Интерполяционную формулу для оценки представим в виде:

$$\hat{x}_{l+m} = \sum_{j=1}^{N_1} d_j x_{l-j} + \sum_{j=1}^{N_2} h_j x_{l+s+j}, \quad (9)$$

где  $1 \leq N_1 \leq l-1$ ,  $1 \leq N_2 \leq N-s-l$ . Качество ошибки (9) будем характеризовать средним квадратом оценки:  $M(x_{l+m} - \hat{x}_{l+m})^2$ , т. е. па-

Результаты численных экспериментов

Параметры	N=500		N=1000	
	Оценки	Доверительные интервалы	Оценки	Доверительные интервалы
$a_1(1)=0,2$	0,2026	[0,1976, 0,2076]	0,1989	[0,1958, 0,2019]
$a_1(2)=0,8$	0,7906	[0,7856, 0,7956]	0,7942	[0,7913, 0,7970]
$a_1(3)=-1,5$	-1,4935	[-1,5141, -1,4729]	-1,5075	[-1,5177, -1,4974]
$a_1(4)=1,2$	1,1936	[1,1727, 1,2145]	1,2015	[1,1853, 1,2177]
$a_1(5)=2,0$	1,9888	[1,9731, 2,0045]	2,0087	[1,9986, 2,0188]
$\sigma_1^2=0,5$	0,4698	[0,4584, 0,4812]	0,4948	[0,4890, 0,5006]
$\sigma_2^2=1,0$	0,9584	[0,9331, 0,9827]	1,0213	[0,9203, 1,1223]
$\sigma_3^2=0,8$	0,8314	[0,8114, 0,8514]	0,7926	[0,7830, 0,8022]
$\sigma_4^2=3,5$	3,7001	[3,6670, 3,7232]	3,5206	[3,5100, 3,5312]
$\sigma_5^2=2,4$	2,2602	[2,2498, 2,2706]	2,4013	[2,3957, 2,4069]

параметры  $\{d_1, \dots, d_{N_1}, h_1, \dots, h_{N_2}\}$  должны определяться как решение задачи:

$$M \left( x_{t+m} - \sum_{j=1}^{N_1} d_j x_{t-j} - \sum_{j=1}^{N_2} h_j x_{t+s+j} \right)^2 \rightarrow \min_{\{d_j, h_j\}} \quad (10)$$

Обозначим  $R_\tau(k) = M(x_\tau x_{\tau+k})$  — ковариации длины  $k$  процесса  $x_t$  в точке  $t = \tau$ . Из (10) следует, что искомые коэффициенты  $\{d_j, h_j\}$  удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j R_t(j-k) + \sum_{j=1}^{N_2} h_j R_t(s+j+k) = R_t(m+k), \quad 1 \leq k \leq N_1, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} d_j R_t(s+j+k) + \sum_{j=1}^{N_2} h_j R_t(j-k) = R_t(m-s-k), \quad 1 \leq k \leq N_2,$$

решение которой не представляет труда. Если коэффициенты  $\{a_k(\tau), 1 \leq k \leq n, 1 \leq \tau \leq T\}$  и дисперсии  $\{\sigma_\tau^2, 1 \leq \tau \leq T\}$  известны, то ковариации  $R_t(k)$  процесса  $X_t$  из (1) могут быть найдены из системы уравнений Юла — Уолкера [2], в противном случае теоретические ковариации могут быть заменены их выборочными оценками.

Численные эксперименты восстановления пропущенных значений для модели (1) реализованы на ЭВМ и их работоспособность доказана методами имитационного моделирования.

Список литературы

1. Меленец Ю. В. Представление квазипериодических случайных процессов уравнениями авторегрессии // Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Минск, 1982. Деп. в ВИНТИ 25.11.82. № 5833-82.
2. P a g a n o M. // Ann. Statist. 1978. V. 6. N. 1. P. 1310.
3. T r o u t m a n B. M. // Biometrika. 1979. V. 66. N. 2. P. 219.
4. T i a o G. C., G r u p e M. R. Ibid. 1980. V. 67. N. 2. P. 365.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976. С. 220.

Поступила в редакцию 28.03.89.

## К ТЕОРИИ ИНЕРЦИОННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Получены необходимые условия оптимальности для систем с запаздыванием в обобщенной задаче Майера с учетом инерционности в функциональных ограничениях на управление.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h), u(t), t), t \in [t_0, t_1] = T, \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{\gamma_0(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0], x(t_0) = x_0\}, \quad (2)$$

с ограничениями на управление

$$g_i(u(t), \dot{u}(t)) = 0, i = \overline{1, p}, g_i(u(t), \dot{u}(t)) \leq 0, i = \overline{p+1, q}, \quad (3)$$

$$u(t) \in U, t \in T, u(t_0) \in U_1, u(t_1) \in U_2. \quad (4)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -вектор фазовых переменных;  $u$  —  $m$ -вектор управления;  $h > 0$  — постоянное запаздывание; скалярные функции  $g_i$  могут обладать неидеальностями любого рода по  $u$  (негладкость, размытость информации, неоднозначность и т. д.) и должны быть положительно однородными [1] по  $\dot{u}$  степени  $p \geq 0$  ( $g_i(u, \lambda \dot{u}) = \lambda^p g_i(u, \dot{u})$ ) для любого  $\lambda > 0$ ; множество  $U$  — компакт,  $U_i \subset U, i = 1, 2$ . Предполагаем, что функция  $f$  непрерывна по совокупности своих переменных вместе с частными производными  $\partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial y^2, \partial^2 f / \partial x \partial y, \partial^2 f / \partial u^2, y(t) = x(t-h)$ ;  $\gamma_0(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0], x_0$  — заданные кусочно-непрерывная вектор-функция и вектор. Всякую непрерывно дифференцируемую функцию  $u(t), t \in T$ , удовлетворяющую (3), (4), будем называть допустимым управлением.

Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$I(u) = \varphi(x(t_1 + \cdot), x(t_1)), \varphi: C(R^n, [t_1 - h, t_1]) \times R^n \rightarrow R, \quad (5)$$

где  $\varphi(z(\cdot), x)$  — непрерывный функционал вместе с производными  $\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial z(s), \partial \delta \varphi / \partial s \delta z(s), s \in [-h, 0]$ , по совокупности своих переменных.

Предположим, что  $\{u^0(t), x^0(t), t \in T\}$  — оптимальное управление и траектория в задаче (1) — (5) соответственно, которые назовем ее решением. Найдем необходимые условия оптимальности управления  $u^0(t), t \in T$ .

**2. Внутренняя вариация.** Введем в рассмотрение управление

$$\tilde{u}(t) = u^0(t + \varepsilon \delta_1(t)), \delta_1(t) = \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau, t \in T, \quad (6)$$

где  $|\varepsilon|$  — достаточно малое число, функция  $\delta(\tau)$  выбирается из класса непрерывных на  $T$ , удовлетворяющих условиям

$$\delta_1(t_1) = 0, \delta^2(\tau) \leq L, L > 0, \tau \in T. \quad (7)$$

**Лемма 1.** Управление  $\tilde{u}(t), t \in T$ , является допустимым в задаче (1) — (5).

**Доказательство.** Положим  $v_\varepsilon(t) = t + \varepsilon \delta_1(t), t \in T$ , и для нее справедливо

$$v_\varepsilon: T \rightarrow T, \quad (8)$$

так как  $v_\varepsilon(t_0) = t_0, v_\varepsilon(t_1) = t_1, d/dt v_\varepsilon(t) > 0, t \in T$ , при достаточно малом  $|\varepsilon|$ . Из (8) и определения  $\delta_1(t), t \in T$ , следует выполнение (4).

В силу предположения относительно  $g_i$  имеем:

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{u}(t), \dot{\tilde{u}}(t)) &= g_i(u^0(v_\varepsilon(t)), (1 + \varepsilon \delta(t)) d/dv_\varepsilon u^0(v_\varepsilon(t)) = \\ &= (1 + \varepsilon \delta(t))^p g_i(u^0(v_\varepsilon(t)), d/dv_\varepsilon u^0(v_\varepsilon(t))). \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (8), из (9) следует, что  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет (3). Лемма доказана.

Пусть  $\tilde{x}(t)$  — решение системы (1), (2), соответствующее управлению  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{x}(t) = x^0(t) + \Delta_u x^0(t)$ ,  $t \in T$ . Справедлива

**Лемма 2.** Для вариации управления  $\Delta u^0(t) = \bar{u}(t) - u^0(t)$ ,  $t \in T$ , имеет место оценка

$$|\Delta_u x^0(t)| \leq (t_1 - t_0)K \|\varepsilon\| \delta_1(t), \quad K = \text{const}, \quad t \in T, \quad |x|^2 = x'x. \quad (10)$$

Доказательство проводится по традиционной схеме с использованием представления

$$\Delta u^0(t) = \varepsilon \dot{u}^0(t) \delta_1(t) + o_1(\varepsilon), \quad t \in T, \quad (11)$$

и здесь опускается.

Поскольку  $\bar{u}(t)$  принимает те же значения, что и  $u^0(t)$ , то вариацию  $\Delta u^0(t)$ ,  $t \in T$ , назовем внутренней.

3. Необходимое условие оптимальности первого порядка. Пусть  $\psi^0(t)$ ,  $\psi^0(t, s)$ ,  $t \in T$ ,  $s \in [-h, 0]$ , — решение следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^0(t) = & -\frac{\partial f^0}{\partial x}[t] \psi^0(t) - \frac{\partial f^0}{\partial y}[t+h] \psi^0(t+h) - \psi^0(t, 0) - \\ & - \psi^0(t+h, -h), \quad \psi^0(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1+\cdot), x^0(t_1))}{\partial x}, \quad \psi^0(t) \equiv 0, \quad t > t_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^0(t, s)}{\partial t} = \frac{\partial \psi^0(t, s)}{\partial s}, \quad \psi^0(t_1, s) = -\frac{\delta \varphi(x^0(t_1+\cdot), x^0(t_1))}{\delta x(t_1+s)}, \\ \psi^0(t, s) \equiv 0, \quad t > t_1, \quad f^0[t] = f(x^0(t), y^0(t), u^0(t), t). \end{aligned} \quad (13)$$

После ряда преобразований, используя (10), (11), получаем

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t \frac{\partial H^{0'}}{\partial u}[\tau] \dot{u}^0(\tau) d\tau \delta(t) dt + \\ + o_2(\varepsilon) \geq 0, \quad H^0(t) = \psi^{0'}(t) f^0[t]. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку неравенство (14) должно выполняться для любого достаточно малого  $|\varepsilon|$ , то из него следует равенство нулю определенного интеграла при любом  $\delta(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющем (7). Применяя к этому равенству лемму Дюбуа — Раймона [2], имеем:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial H^{0'}}{\partial u}[\tau] \dot{u}^0(\tau) d\tau \equiv \text{const}, \quad t \in T,$$

что эквивалентно тождеству

$$\frac{\partial H^{0'}}{\partial u}[t] \dot{u}^0(t) \equiv 0, \quad t \in T. \quad (15)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Если  $\{u^0(t), x^0(t), t \in T\}$  — решение задачи (1)–(5),  $\psi^0(t)$ ,  $\psi^0(t, s)$ ,  $t \in T$ ,  $s \in [-h, 0]$ , — решение сопряженной системы (12), (13), то выполняется тождество (15).

4. Необходимое условие оптимальности второго порядка. Сузим множество допустимых управлений до дважды непрерывно дифференцируемых функций  $u(t)$ ,  $t \in T$ . В качестве вариации управления  $\Delta u^0(t)$ ,  $t \in T$ , рассмотрим

$$\Delta u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon], \\ u^0(t + \varepsilon \delta_1(t)) - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon] \subset T, \end{cases} \quad (16)$$

$$\delta_1(t) = \int_{\theta}^t \delta(\tau) d\tau, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \quad \delta^{(i)}(\theta) = \delta^{(i)}(\theta + \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{0, 1},$$

$$\delta(\tau) \in C^{(1)}[\theta, \theta + \varepsilon], \quad \delta^2(\tau) \leq L, \quad L > 0, \quad \tau \in [\theta, \theta + \varepsilon],$$

где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое. Неравенство (10) в этом случае заменяется на

$$|\Delta_{\sim} x^0(t)| \leq K_1 \varepsilon^3, \quad K_1 = \text{const}, \quad t \in T. \quad (17)$$

Используя (16), (17), (11) с заменой  $T$  на  $[\Theta, \Theta + \varepsilon]$ , а также теорему 1, можно получить неравенство

$$\Delta I(u^0) = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Theta}^{\Theta + \varepsilon} \left( -\frac{\partial H^{0'}}{\partial u} [t] \dot{u}^0(t) + \dot{u}^{0'}(t) \frac{\partial^2 H^0 [t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t) \right) \times \\ \times \delta_1(t) dt + o_3(\varepsilon^5) \geq 0. \quad (18)$$

**Теорема 2.** Если  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное управление в задаче (1) — (5), то имеет место неравенство:

$$-\frac{\partial H^{0'}}{\partial u} [t] \dot{u}^0(t) + \dot{u}^{0'}(t) \frac{\partial^2 H^0 [t]}{\partial u^2} \dot{u}^0(t) \leq 0, \quad t \in T. \quad (19)$$

Доказательство неравенства (19) нетрудно получить из (18) с использованием теоремы о среднем.

Нетрудно заметить, что условия (15), (19) по своей сути напоминают известные уравнение Эйлера и условие Лежандра соответственно из классического вариационного исчисления [1, 2].

**З а м е ч а н и е.** Все результаты сохраняются, если в качестве допустимых управлений рассматривать дважды кусочно-дифференцируемые на  $T$ -вектор функции.

Следует также сказать, что подобные результаты имелись ранее лишь для обыкновенных линейных управляемых систем [3—5].

### Список литературы

1. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск, 1981.
3. Вельов В. М. // Годичн. ВУЗ. Прилож. мат. 1979 (1980). Т. 15. № 1. С. 83.
4. Гичев Т. Р. Оптимально управление. I. София, 1980.
5. Силин Д. Б. // Вестн. МГУ. Вычислит. матем. и кибернетика. 1982. № 3. С. 44.

Поступила в редакцию 12.12.88.

УДК 517.977

ЛЕ ТЪИ ЗУНГ (СРВ)

### ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМОЙ СТРУКТУРОЙ

В [1] исследована задача оптимизации динамической системы

$$\dot{x} = A_0 x + a_0 f_1(x) + bu, \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

по функционалу качества

$$I(u) = c'x(t^*) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Там получен опорный принцип максимума и изложена процедура доводки. С целью обобщения результатов на системы, охватывающие более широкий класс физических и технических задач, в данной работе вместо (1), (2) рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u, \quad t \in T, \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

и функционал

$$I(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $x = x(t)$  —  $n$ -вектор состояния;  $u = u(t)$  — значение скалярного управления;  $x_0$  — заданный вектор начального состояния.

Допустимым управлением назовем каждую кусочно-непрерывную функцию  $u = u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$ ,  $t \in T$ , если соответствующее ей решение системы (3) удовлетворяет ограничению

$$g(x(t^*)) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $n$  — вектор-функция  $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$ ;  $m$  — вектор-функция  $g(\cdot)$  и скалярная функция  $\varphi(\cdot)$  предполагаются непрерывными вместе с их производными до второго порядка.

Математической моделью (3) — (5) описываются, в частности, переходные процессы в ядерном реакторе (см., например, [2], [3]).

**1. Опорный принцип максимума.** Вдоль допустимого управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующей ему траектории системы (3) построим сопряженную систему:

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad t \in T, \quad (6)$$

$$\psi(t^*) = G'y - c, \quad (7)$$

$$\text{где } A(t) = \frac{\partial f_1(x(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x(t))}{\partial x} u(t), \quad t \in T,$$

$$G = \frac{\partial g(x(t^*))}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial \varphi'(x(t^*))}{\partial x}.$$

Будем использовать также обозначения  $b(t) = f_2(x(t))$ ,  $c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b(t)$ ,  $G(t) = GF(t^*)F^{-1}(t)b(t)$ ,  $t \in T$ , где  $F = A(t)F$ ,  $t \in T$ ,  $F(0) = E$  — единичная матрица.

Допустим, что  $\text{rank } G = m < n$ . На отрезке  $T$  выделим множество  $T_{\text{оп}} = \{t_1, \dots, t_s\}$ . Каждой точке  $t_k \in T$  поставим в соответствие конечное множество  $I_k$ ,  $k = \overline{1, s}$ , с элементами вида  $p^+$ ,  $p^-$ ,  $p^0$ . Включение  $p^+ \in I_k$  ( $p^- \in I_k$ ) означает, что в точке  $t_k$  рассматривается правая (левая) производная  $p$ -го порядка от функции  $G(t)$ . Запись  $p^0 \in I_k$  подразумевает, что  $G(t)$  в точке  $t_k$  имеет непрерывную производную  $p$ -го порядка и эта производная находится в рассмотрении. Положим  $I_{\text{оп}} = \{I_1, \dots, I_s\}$ .

Совокупность  $S_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}\}$  назовем (локальной) опорой ограничений (вдоль  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $t \in T$ ), матрицу  $P = (G^{(p)}(t_k))$ ,  $p \in I_k$ ,  $k = \overline{1, s}$  опорной, если  $\text{rank } P = m$  и

$$\text{rank} \left\{ \begin{pmatrix} c^{(p)}(t_k) \\ G^{(p)}(t_k) \end{pmatrix}, p \in \overline{I_k}, k = \overline{1, s} \right\} = m, \quad j_k = \max_{I_k} j.$$

Пара  $\{u, S\}$  из допустимого управления и опоры ограничений называется опорным управлением. Если  $s = m$ ,  $I_i = \{0\}$ ,  $k = \overline{1, m}$  и  $|(u(t-0) + u(t+0))/2| < 1$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ , то опорное управление называется невырожденным.

Опорному управлению поставим в соответствие решение системы (6) — (7) с  $m$ -вектором потенциалов

$$y = (P^{-1})' c_{\text{оп}}, \quad c_{\text{оп}} = (c^{(p)}(t_k)), \quad p \in I_k, \quad k = \overline{1, s}. \quad (8)$$

Как известно, оптимальное управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , задачи (3) — (5) называют нормальным, если не существует таких чисел  $\lambda_0 = 0$  и  $m$ -вектора  $\lambda \neq 0$ , что

$$\psi'(t)b(t)u(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi'(t)b(t)u, \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решение системы (6) с условием  $\psi(t^*) = \lambda_0 c + G'\lambda$ .

Следует [1], можно доказать следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\{u, S_{\text{оп}}\}$  — невырожденное опорное управление,  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — соответствующие траектории систем (3) и (6) — (8),  $H(x, \psi, u) = \psi'(f_1(x) + f_2(x)u)$ .

Условие максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{|u| \leq 1} H(x(t), \psi(t), u), \quad t \in T \quad (9)$$

является необходимым условием оптимальности допустимого управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

**Теорема 2.** Для нормального оптимального управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , существует такая локальная опора ограничений  $S_{\text{оп}}$ , что на опорном управлении  $\{u, S_{\text{оп}}\}$  и соответствующих ему решениях  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , прямой (3) и сопряженной (6)–(8) систем выполняется (9).

**2. Доводка.** Численный пример. Рассмотрим совокупность  $T_{\text{оп}}^3 = \{T_i, i \in N\} \subset T$ ,  $T_i = [\tau_i, \tau^1]$ ,  $\tau_i \leq \tau^i < \tau_{i+1}$ ,  $i \in N = \{1, \dots, p\}$ ,  $\tau^0 = 0$ ,  $\tau_{p+1} = t^*$ .

Введем обозначения:  $N_* = \{i \in N : \tau_i < \tau^i\}$ ,  $\xi = (\xi_i, i \in K) = (\tau_i, i \in N; \tau^i, i \in N_*)$ ,  $K = \{1, 2, \dots, |N| + |N_*|\}$ ,  $\theta = (\psi_0, \xi)$ .

Пусть  $x(\theta, t)$ ,  $\psi(\theta, t)$ ,  $t \in T$ , — решения систем (3), (6),  $\psi(0) = \psi_0$ , при управлении  $u(t) = \omega(\theta, t)$ ,  $t \in T$ , сопровождающем  $\theta$ ,

$$\omega(\theta, t) = 1 \vee -1, \quad t \in T_{\text{н}} = T \setminus \bigcup T_i,$$

$$\omega(\theta, t) = \psi'(t) R(x(t)) / \psi'(t) S(x(t)), \quad t \in \bigcup_{i \in N_*} T_i.$$

Последняя формула получается из тождеств  $\frac{d}{dt} [\psi'(t) b(t)] \equiv 0$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} \times \times [\psi'(t) b(t)] \equiv 0$ ,  $t \in \bigcup_{i \in N_*} T_i$  в предположении  $\psi' S(x) > 0$ .

Здесь

$$R(x) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 f_2 + \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_1 \right) f_2 - \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} f_1 \right) f_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1,$$

$$S(x) = - \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_2 \right) f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} f_2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 f_1 + \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_2 \right) f_1.$$

Подсчитаем:

$$\zeta_0(\theta, y) = \psi(\theta, t^*) - \frac{\partial g'(x(\theta, t^*))}{\partial x} y + \frac{\partial \varphi'(x(\theta, t^*))}{\partial x},$$

$$\zeta_*(\theta, y) = g(x(\theta, t^*)), \quad \zeta_j(\theta, y) = \psi'(\theta, \xi_j) b(\xi_j), \quad j \in K.$$

Процедура доводки заключается в решении системы уравнений:

$$\zeta_0(\theta, y) = 0; \quad \zeta_*(\theta, y) = 0; \quad \zeta_j(\theta, y) = 0, \quad j \in K. \quad (10)$$

**Пример.** Рассмотрим задачу  $I(u) = x_2(3) \rightarrow \min$ ,

$$\dot{x}_1 = x_1 u; \quad \dot{x}_2 = (x_1 - 1)^2, \quad t \in T = [0, 3], \quad x_1(0) = x_1(3) = 2, \quad x_2(0) = 0. \quad (11)$$

Для нее  $H(x, \psi, u) = \psi_1 x_1 u + \psi_2 (x_1 - 1)^2$ ,

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 u - 2\psi_2 (x_1 - 1); \quad \dot{\psi}_2 = -1, \quad t \in T. \quad (12)$$

Пусть  $T_0 = [\tau_1, \tau^1]$  — опорный промежуток. На нем особое управление равно  $\omega(t) \equiv 0$ ,  $t \in T_0$ .

Решив системы (11), (12) с начальным условием  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\psi_1(0) = \psi_{10}$  при управлении

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1]; \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau^1]; \\ 1, & t \in [\tau^1, 3], \end{cases}$$

составим систему уравнений доводки (10).

Здесь имеем:

$$\theta = (\psi_{10}, \tau_1, \tau^1),$$

$$\zeta_*(\theta) = 2 \exp(3 - \tau_1 - \tau^1) - 2,$$

$$\zeta_1(\theta) = \psi_{10} (\exp(\tau_1) - 2 \exp(-\tau_1)) + 2,$$

$$\zeta_2(\theta) = \psi_{10} \exp(\tau_1) - (2 \exp(-\tau_1) - 1) (1 + 2\tau_1 - 2\tau^1) + 1.$$

Ее решение:  $\psi_{10} = -\frac{1}{2}$ ,  $\tau_1 = \ln 2$ ,  $\tau^1 = 3 - \ln 2$ .

**З а м е ч а н и е.** Во многих примерах процедура доводки может быть реализована сразу после выявления структуры оптимального управления без дополнительных предварительных вычислений. В ряде задач оптимизации переходных процессов в ядерном реакторе, как известно, нетрудно выявить структуру оптимального управления. Доводка в таких случаях является эффективным способом получения точных результа-

тов. Однако достижение высокой точности связано с трудоемкими вычислениями, поэтому мы ограничились только простым примером. Решение прикладных задач будет проведено в дальнейшем.

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Покатаев А. В. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1989. Ч. 5: Нелинейные задачи.
2. Рудик А. П. Оптимизация физических характеристик в ядерном реакторе. М., 1979.
3. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., 1978.

Поступила в редакцию 15.05.89.

УДК 517.38

НГУЕН ТХАНЬ ХАИ (СРВ)

### К ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КАМПЕ ДЕ ФЕРЬЕ

1. Функция Кампе де Ферье впервые определена в [1] через двойной ряд вида

$$F_{C:D;D'}^{A:B;B'} \left[ \begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m+n} \prod_{j=1}^B (b_j)_m \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_n}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m+n} \prod_{j=1}^D (d_j)_m \prod_{j=1}^{D'} (d'_j)_n} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!},$$

где  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+k-1)$ ,  $\Gamma(a)$  — Гамма-функция. (Причем в [1] рассматривался случай  $B' = B$ ,  $D' = D$ .)

Для ряда (1) в [2] показано, что он сходится при любых  $x, y \in \mathbb{C}$ , если  $A+B < C+D+1$ ,  $A+B' < C+D'+1$ . Если же  $A+B = C+D+1$ ,  $A+B' = C+D'+1$ , то область сходимости ряда (1) соответственно имеет вид

$$\max\{|x|, |y|\} < 1 \text{ при } A \leq C \text{ или} \\ |x|^{\frac{1}{A-C}} + |y|^{\frac{1}{A-C}} < 1 \text{ при } A > C.$$

Изучение этой функции представляется очень важной задачей, так как ее частным случаем являются известные функции Аппеля  $F_1, F_2, F_3, F_4$  и Горна  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Xi_1, \Xi_2$  (их определения см. в [3]). При  $A = C = 0$  ряд (1) превращается в произведение двух обобщенных гипергеометрических рядов Гаусса [3]:

$$F_{0:D;D'}^{0:B;B'} \left[ \begin{matrix} - : (b); (b') \\ - : (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = {}_B F_D(b_1, \dots, b_B; d_1, \dots, d_D; x) {}_{B'} F_{D'}(b'_1, \dots, b'_{B'}; d'_1, \dots, d'_{D'}; y). \quad (2)$$

В настоящей работе устанавливаются различные интегральные представления функции Кампе де Ферье и ее приложения к вычислению интегралов.

2. Интегральные представления и аналитическое продолжение функции Кампе де Ферье.

**Теорема 1.** Пусть выполняются указанные условия сходимости ряда (1) и, кроме того,

$$\begin{cases} |\arg x| < \pi(A - B - 1 - C - D)/2, \\ |\arg y| < \pi(A - B' - 1 - C - D')/2, \\ |\arg x - \arg y| < \pi(B + B' + 2 - D - D')/2. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда справедливо следующее представление через двойной интеграл Меллина — Барнса:

$$\begin{aligned} F_{C;D;D'}^{A;B;B'} \left[ \begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] &= \frac{\prod_{j=1}^C \Gamma(c_j) \prod_{j=1}^D \Gamma(d_j) \prod_{j=1}^{D'} \Gamma(d'_j)}{\prod_{j=1}^A \Gamma(a_j) \prod_{j=1}^B \Gamma(b_j) \prod_{j=1}^{B'} \Gamma(b'_j)} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \times \\ &\times \int_{L_t} \int_{L_s} \frac{\prod_{j=1}^A \Gamma(a_j + s + t) \prod_{j=1}^B \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^{B'} \Gamma(b'_j + t)}{\prod_{j=1}^C \Gamma(c_j + s + t) \prod_{j=1}^D \Gamma(d_j + s) \prod_{j=1}^{D'} \Gamma(d'_j + t)} \Gamma(-s) \Gamma(-t) (-x)^s \times \\ &\times (-y)^t ds dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L_s, L_t$  — некоторые вертикальные контуры вида  $(\gamma - i\infty, \delta + i\infty)$ , которые отделяют полюса функции  $\Gamma(-s) \Gamma(-t)$  от полюсов функции

$$\prod_{j=1}^A \Gamma(a_j + s + t) \prod_{j=1}^B \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^{B'} \Gamma(b'_j + t).$$

Формула (4) доказывается с помощью теории вычетов, а условия (3) обеспечивают сходимость интеграла в правой части (4).

Замечание 1. Если в (3) знак неравенства ( $<$ ) заменить на противоположный ( $>$ ) хотя бы для одного неравенства, то интеграл в (4) станет расходящимся.

Замечание 2. Представление (4) дано также в работах [1], [4], [5], однако в [1] отсутствуют условия (3), в [4] опущено условие  $|\arg x - \arg y| < \pi(B + B' + 2 - D - D')/2$ , а в [5] вместо этого неравенства требуется лишь  $0 < B + B' + 2 - D - D'$ .

Замечание 3. Из определения (1) и представления (4) сразу вытекает следующее асимптотическое разложение:

$$F_{C;D;D'}^{A;B;B'} \left[ \begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = \begin{cases} O(1), \max\{|x|, |y|\} \rightarrow 0, \\ O(|x^\alpha||y^\beta|), A \equiv 0, \min\{|x|, |y|\} \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \alpha = -\min\{\operatorname{Re} b_j\}, j = 1, \dots, B; \\ \beta = -\min\{\operatorname{Re} b'_j\}, j = 1, \dots, B'. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Для частных значений функции Кампе де Ферье (1) справедливы следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} 1) \quad & F_{A;B;B'}^{A;B+1;B'+1} \left[ \begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = \\ & = \prod_{j=1}^A \Gamma \left[ \begin{matrix} c_j \\ a_j \ c_j - a_j \end{matrix} \right] \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^A [u_j^{a_j-1} (1-u_j)^{c_j-a_j-1}] \times \\ & \times {}_{B+1}F_B((b); (d); u_1 \dots u_A x) {}_{B'+1}F_{B'}((b'); (d'); u_1 \dots u_A y) du_1 \dots du_A, \quad (5) \\ & \max\{|x|, |y|\} < 1, \operatorname{Re} c_j > \operatorname{Re} a_j > 0, j = 2, 2, \dots, A, \text{ а } \Gamma \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)};$$

2)

$$F_{A:1;1}^{A+1;1;1} \left[ \begin{matrix} (a): b; b' \\ (c): d; d' \end{matrix} \middle| x, y \right] = \\ = \Gamma \left[ \begin{matrix} d, d' \\ b, b', d-b, d'-b' \end{matrix} \right] \int_0^1 \int_0^1 u^{b-1} v^{b'-1} (1-u)^{d-b-1} (1-v)^{d'-b'-1} \times \\ \times {}_{A+1}F_A((a); (c); ux + vy) du dv, \quad (6) \\ |x| + |y| < 1; \operatorname{Re} b, \operatorname{Re} b', \operatorname{Re} (d-b), \operatorname{Re} (d'-b') > 0;$$

3)

$$F_{1;B;B'}^{0;B+2;B'+2} \left[ \begin{matrix} -: (b), \alpha; (b'), \alpha' \\ c: (d); (d') \end{matrix} \middle| x, y \right] = \\ = \Gamma \left[ \begin{matrix} c \\ \alpha, \alpha', c-\alpha-\alpha' \end{matrix} \right] \int_{u>0} \int_{v>0} u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1} (1-u-v)^{c-\alpha-\alpha'-1} \times \\ \times {}_{B+1}F_B((b); (d); ux) \cdot {}_{B'+1}F_{B'}((b'); (d'); vy) du dv, \quad (7) \\ \max\{|x|, |y|\} < 1; \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \alpha', \operatorname{Re} (c-\alpha-\alpha') > 0.$$

Доказательство получается путем разложения подынтегральных функций в гипергеометрические ряды и их почленного интегрирования.

Заметим, что все представления (5), (6), (7) дают возможность аналитически продолжить ряд (1) за пределы области сходимости.

3. Вычисление интегралов через функцию Кампе де Ферье.

Здесь приведем вычисление одного интеграла и его частные случаи, а именно: при  $x \in \mathbf{R}^+$ ,  $k \in \mathbf{N}^+$  имеем

$$\int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\beta-1} F_{C:D;D'}^{A:B;B'} \left[ \begin{matrix} (a): (b); (b') \\ (c): (d); (d') \end{matrix} \middle| px^k, q(x-t)^k \right] dt = x^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \times \\ \times F_{C+k;D;D'}^{A+B+k;B'+k} \left[ \begin{matrix} (a): (b), \Delta(k, \alpha); (b'), \Delta(k, \beta) \\ (c), \Delta(k, \alpha+\beta): (d); (d') \end{matrix} \middle| px^k, qx^k \right], \quad (8)$$

где  $A+B < C+0+1$ ,  $A+B' < C+D'+1$ ,  $0 < \operatorname{Re} \alpha$ ,  $0 < \operatorname{Re} \beta$ ,  $\Delta(k, \alpha) = \frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha+1}{k}, \dots, \frac{\alpha+k-1}{k}$ .

Если учесть свойство (2) функции Кампе де Ферье и богатый список частных значений обобщенной гипергеометрической функции Гаусса  ${}_A F_B$ , то можно получить множество частных случаев формулы (8). Например, для функции Бесселя  $J_\nu(z)$  имеем:

$$\int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\beta-1} J_\nu(at) J_\mu(b(x-t)) dt = \Gamma \left[ \begin{matrix} \alpha + \nu, \beta + \mu \\ \alpha + \beta + \mu + \nu, \mu + 1, \nu + 1 \end{matrix} \right] \times \\ \times \left( \frac{a}{2} \right)^\nu \left( \frac{b}{2} \right)^\mu x^{\alpha+\beta+\nu+\mu-1} F_{2;1;1}^{0;2;2} \left[ \begin{matrix} \frac{\alpha + \beta + \nu + \mu}{2}, \frac{\alpha + \beta + \nu + \mu + 1}{2} \\ \frac{\alpha + \nu}{2}, \frac{\alpha + \nu + 1}{2}; \frac{\beta + \mu}{2}, \frac{\beta + \mu + 1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{-(ax)^2}{4}, \frac{-(bx)^2}{4} \right], \quad (9)$$

$\operatorname{Re}(\alpha + \nu) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta + \mu) > 0$ ;

$$\int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\beta-1} J_\nu(a\sqrt{t}) J_\mu(b\sqrt{x-t}) dt = \Gamma \left[ \begin{matrix} \alpha + \frac{\nu}{2}, \beta + \frac{\mu}{2} \\ \alpha + \beta + \frac{\nu + \mu}{2}, \nu + 1, \mu + 1 \end{matrix} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu/2} \left(\frac{b}{2}\right)^{\mu/2} x^{\alpha+\beta+(\nu-\mu)/2-1} F_{1:1:1}^{0:1:1} \left[ \begin{matrix} - \\ \alpha + \beta + (\nu + \mu)/2: \nu + 1; \\ \beta + \mu/2 \\ \mu + 1 \end{matrix} \middle| -\frac{a^2 x}{4}, -\frac{b^2 x}{4} \right], \quad (10)$$

$$\operatorname{Re}\left(\alpha + \frac{\nu}{2}\right) > 0, \operatorname{Re}\left(\beta + \frac{\mu}{2}\right) > 0.$$

В заключение отметим, что асимптотические разложения интегралов (9) и (10) при  $x \rightarrow +\infty$  следуют из общей асимптотики функции Кампе де Ферье (см. замечание 3).

### Список литературы

1. Appell P., Kampe de Fariet M. T. Fonctions hypergeometricques et hyperspheriques polynomes D'Hermite. Paris, 1926.
2. Srivastava H. M., Daoust M. C. // *Nath. Nachr.* 1972. V. 53. P. 151.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т. 1.
4. Шагма В. Л. // *Ann. Soc. Scb. Bruxelles.* 1965. V. 79. N 1. P. 26.
5. Ву Ким Туан. Некоторые вопросы теории и приложений функций гипергеометрического типа: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1985.

Поступила в редакцию 09.01.89.

УДК 518:517.948

НГУЕН ДЫК ФИЕН (СРВ)

### ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ И. П. МЫСОВСКИХ

Пусть  $X$  и  $Y$  — два банаховых пространства.  $B(x_0, R)$  — шар в  $X$  с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $R$ . Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, x) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(x, y)$  — нелинейный непрерывный оператор из  $X \times X$  в  $Y$ , имеющий частные производные по первому аргументу в шаре  $B(x_0, R)$ . Приближенные решения уравнения (1) будем искать в виде

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1} \cdot \Phi(x_n, x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $\Phi'_x(x, y)$  — частная производная оператора  $\Phi(x, y)$  по первому аргументу.

В случае, когда  $\Phi(x, y) = f(x)$ , процесс (2) и есть процесс Ньютона — Канторовича, рассмотренный впервые Канторовичем [1] в предположении, что производная  $f'(x)$  имеет непрерывный обратный в точке  $x_0$ . В работе [2] Мысовских дал некоторое уточнение в случае, когда производная  $f'(x)$  имеет непрерывный обратный во всем шаре  $B(x_0, R)$ . В настоящей работе предпринята попытка получения аналогичного утверждения для рассматриваемого случая.

1. Допустим, что частная производная  $\Phi'_x(x, x)$  при всех  $x$  из шара  $B(x_0, R)$  является непрерывно обратимым линейным оператором из  $X \times X$  в  $Y$  и пусть выполнены неравенства

$$\|[\Phi'_x(x_0, x_0)]^{-1} \cdot \Phi(x_0, x_0)\| \leq a, \quad (3)$$

$$\|[\Phi'_x(x, x)]^{-1}\| \leq b, \quad (4)$$

$$\|\Phi'_x(x, y) - \Phi'_x(x, x)\| \leq \omega(\|x - y\|), \quad (5)$$

$$\|[\Phi'_x(x, x)]^{-1}(\Phi(x, y) - \Phi(x, x))\| \leq \varphi(\|x - y\|), \quad (6)$$

где  $\omega(r)$ ,  $\varphi(r)$  и  $\varphi'(r)$  неотрицательные, монотонно возрастающие функции, обращающиеся в нуль при  $r = 0$ . Пусть  $r_*$  — наименьший положительный корень уравнения

$$\Omega(r) - r = 0, \quad (7)$$

где  $\Omega(r)$  определяется по формуле

$$\Omega(r) = b \int_0^r \omega(t) dt + \varphi(r), \quad (8)$$

если оно имеет решение, и  $r_* = R$  в противном случае.

**Лемма 1.** При выполнении предыдущих предположений функция

$$W(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}(r), \quad \Omega^{(0)}(r) = r, \quad \Omega^{(n+1)}(r) = \Omega(\Omega^{(n)}(r)) \quad (9)$$

на интервале  $(0, r_*)$  корректно определена.

**Доказательство.** В силу выпуклости функции  $\Omega(r)$  выполняется неравенство

$$\Omega^{(n+1)}(r) \leq q \Omega^{(n)}(r) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (10)$$

где

$$q = \frac{\Omega(r)}{r}, \quad (11)$$

и поэтому

$$\Omega^{(n)}(r) \leq q^n \cdot r \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

Из равенства (11), а также из того, что  $r_*$  — наименьший корень, следует, что  $q < 1$ , и из неравенств (12) следует, что члены ряда (9) мажорируются членами геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ , поэтому ряд (9) сходится.

Лемма доказана.

Пусть  $D$  — множество точек шара  $B(x_0, R)$ , расположенных от множества всех последовательных приближений (2) (лежащих в шаре  $B(x_0, R)$ ) на расстоянии, меньшем чем  $r_*$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены неравенства (3)—(6) и неравенства

$$a < r_*, \quad W(a) \leq R. \quad (13)$$

Тогда уравнение (1) имеет в шаре  $B(x_0, R)$  решение  $x_*$ , единственное в  $D$ . Кроме того, последовательные приближения (2) определены при всех  $n$ , сходятся к решению  $x_*$ , и верны оценки

$$\|x_* - x_n\| \leq W(\Omega^{(n)}(a)). \quad (14)$$

**Доказательство.** Из равенства

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -[\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1} ((\Phi(x_n, x_n) - \Phi(x_n, x_{n-1})) + \\ &+ \Phi(x_n, x_{n-1}) - \Phi(x_{n-1}, x_{n-1}) - \Phi'_x(x_{n-1}, x_{n-1})(x_n - x_{n-1})) = \\ &= -[\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1} \int_0^1 (\Phi'_x((1-t)x_{n-1} + tx_n; x_{n-1}) - \\ &- \Phi'_x(x_{n-1}, x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) dt - [\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1} (\Phi(x_n, x_n) - \\ &- \Phi(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|[\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1}\| \int_0^1 \|\Phi'_x((1-t)x_{n-1} + tx_n, x_{n-1}) - \\ &- \Phi'_x(x_{n-1}, x_{n-1})\| \|x_n - x_{n-1}\| dt + \|[\Phi'_x(x_n, x_n)]^{-1}\| (\Phi(x_n, x_n) - \\ &- \Phi(x_n, x_{n-1})) \leq b \int_0^1 \omega(t \|x_n - x_{n-1}\|) \cdot \|x_n - x_{n-1}\| dt + \\ &+ \varphi(\|x_n - x_{n-1}\|) = \Omega(\|x_n - x_{n-1}\|). \end{aligned}$$

Так как  $\|x_1 - x_0\| = a$ , то отсюда следует, что  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \Omega^{(n)}(a)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Тем самым, при  $m > n$  имеем

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \Omega^{(k)}(a), \quad (15)$$

отсюда вытекает, что последовательность (2) фундаментальна и что она сходится к некоторому элементу  $x_*$ , который является решением уравнения (1). Переходя в неравенствах (15) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем оценки (14).

Пусть теперь  $x_{**}$  — еще одно решение уравнения (1) в  $D$ . Покажем, что  $x_{**} = x_*$ .

Допустим, что  $\|x_{**} - x_0\| < r_*$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_{**} - x_{n+1} &= x_{**} - x_n - [\Phi_x^*(x_n, x_n)]^{-1} (\Phi(x_{**}, x_{**}) - \\ &\quad - \Phi(x_{**}, x_n) + \Phi(x_{**}, x_n) - \Phi(x_n, x_n)) = \\ &= -[\Phi_x^*(x_n, x_n)]^{-1} \int_0^1 (\Phi_x^*((1-t)x_n + tx_{**}, x_n) - \Phi_x^*(x_n, x_n)) \times \\ &\quad \times (x_{**} - x_n) dt - [\Phi_x^*(x_n, x_n)]^{-1} (\Phi(x_{**}, x_n) - \Phi(x_n, x_n)), \end{aligned}$$

откуда

$$\|x_{**} - x_{n+1}\| \leq \Omega(\|x_{**} - x_n\|) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

и, следовательно,

$$\|x_{**} - x_{n+1}\| \leq \Omega^{(n)}(\|x_{**} - x_0\|) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Отсюда нетрудно видеть, что  $x_{**} = x_*$ .

Аналогично показывается равенство  $x_{**} = x_*$  в случае, если  $\|x_{**} - x_n\| < r_*$  при каком-либо  $n = 1, 2, \dots$  или  $\|x_{**} - x_*\| < r_*$ .

Тем самым теорема доказана.

2. В качестве примера рассмотрим систему нелинейных вещественных уравнений:

$$f_i(t_1, t_2, \dots, t_m) = 0 \quad i = \overline{1, 2, \dots, m}. \quad (16)$$

Итерационный процесс записывается в виде

$$t_i^{(n+1)} = t_i^{(n)} - \alpha \frac{f_i(t_1^{(n+1)}, \dots, t_{i-1}^{(n+1)}, t_i^{(n)}, \dots, t_m^{(n)})}{f_{it_i}^{\prime}(t_1^{(n+1)}, \dots, t_{i-1}^{(n+1)}, t_i^{(n)}, \dots, t_m^{(n)})}, \quad (17)$$

где  $f_{it_i}^{\prime} = \frac{\partial f_i}{\partial t_i}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Будем рассматривать уравнение (16) как операторное уравнение

$$\Phi(x, x) = 0, \quad (18)$$

где  $\Phi(x, y)$  определен на пространстве  $R^m \times R^m$ ,

$$\Phi(x, y) = \left( \frac{1}{\alpha} f_i(Z_i(x, y)) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) f_i(Z_i(y, y)) \right), \quad i = \overline{1, m}; \quad (19)$$

здесь  $x = (t_1, \dots, t_m)$ ,  $y = (s_1, \dots, s_m)$  и

$$Z_i(x, y) = (v_1(y), \dots, v_{i-1}(y), t_i, s_{i+1}, \dots, s_m), \quad i = \overline{1, m}, \quad (20)$$

$$v_i(y) = s_i - \alpha \frac{f_{it_i}(Z_i(y, y))}{f_{it_i}^{\prime}(Z_i(y, y))}, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что итерационный процесс (17) для уравнения (16) совпадает с процессом (2) для уравнения (18). Пусть норма в  $R^m$  имеет вид  $\|x\| = \max_{i=\overline{1, m}} |t_i|$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие отношения:

а. Для начального приближения  $x_0 = (t_i^{(0)})$

$$|\alpha| \left| \frac{f_i(Z_i(x_0, x_0))}{f_{it_i}^{\prime}(Z_i(x_0, x_0))} \right| \leq a \quad i = \overline{1, m}.$$

б. Для всех  $x$  и  $y$  из шара  $B(x_0, R)$  выполняются неравенства:

$$\frac{|\alpha|}{|f'_{ii}(Z_i(x_0, x_0))|} \leq b,$$

$$\frac{1}{|\alpha|} |f'_{ii}(Z_i(x, y)) - f'_{ii}(Z_i(y, y))| \leq \omega(\|x - y\|),$$

$$\left| \frac{1}{\alpha} (f_i(Z_i(x, x)) - f_i(Z_i(x, y)) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (f_i(Z_i(x, x)) - f_i(Z_i(x, y)) \times (x, y))) \right| \leq \frac{1}{b} \varphi(\|x - y\|).$$

в. Уравнение (7) имеет решение и  $r_*$  — наименьший положительный корень (7).

г.  $a < r_*$  и  $W(a) \leq R$ .

Тогда уравнение (16) имеет в шаре  $B(x_0, R)$  решение  $(t_i^*)$ , единственное в  $D$ . Кроме того, итерационный процесс (17) сходится к этому решению и верны оценки  $|t_i^* - t_i^{(n)}| \leq (W \Omega^{(n)}(a))$ .

Доказательство этой теоремы сразу следует из теоремы 1 и того факта, что

$$(\Phi_x^*(x, y))_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} f'_{ii}(Z_i(x, y)), & i=j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

$$(|\Phi_x^*(x, x)|^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha}{f'_{ii}(Z_i(x, x))}, & i=j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

### Список литературы

1. Канторович Л. В. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 1. С. 17.
2. Мысовских И. П. // Вестн. Ленинград. ун-та. 1953. № 11. С. 25.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
4. Шилов Г. Е. Дифференцирование функций: Высшие производные и вариационное исчисление. Ярославль, 1980. С. 65.

Поступила в редакцию 17.03.89.

УДК 515.16

Ч. ДОЛИЧАНИН (СФРЮ), П. П. ЗАБРЕЙКО

### МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЦИКЛОВ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В работах [1—3] окружности евклидовой плоскости представлялись комплексными матрицами второго порядка. В настоящей статье получены аналогичные представления для циклов плоскости Лобачевского.

**1. Матричное представление циклов.** Для получения матричных представлений циклов (т. е. окружностей, эквидистант и орициклов) плоскости Лобачевского  $H_2$  рассмотрим интерпретацию Пуанкаре плоскости Лобачевского  $H_2$  на евклидовой плоскости  $E_2$ , при которой абсолют плоскости  $H_2$  изображается единичной окружностью

$$z\bar{z} = 1. \quad (1)$$

В этой интерпретации окружности плоскости  $H_2$  изображаются окружностями, целиком лежащими внутри круга, ограниченного окружностью (1), орициклы — окружностями, лежащими внутри этого круга и касающимися окружности (1), а две дуги эквидистанты изображаются той дугой окружности, пересекающейся с окружностью (1), которая находится внутри круга, ограниченного этой окружностью, и той дугой, которая получается из второй дуги окружности, лежащей вне круга,

ограниченного окружностью (1), при помощи инверсии относительно окружности (1); при этом прямые плоскости  $H_2$  изображаются дугами окружностей, ортогональными к окружности (1), а углы между циклами — в натуральную величину.

**Теорема 1.** Угол между двумя циклами, изображающимися окружностями,

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0, \quad (2)$$

$$A'z\bar{z} + B'\bar{z} + \bar{B}'z + C' = 0, \quad (3)$$

равный углу между этими окружностями, определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{\text{sp}(MM')}{2\sqrt{\det(MM')}} \quad (4)$$

где  $M = \begin{pmatrix} -\bar{B} & -A \\ C & B \end{pmatrix}$ ,  $M' = \begin{pmatrix} -\bar{B}' & -A' \\ C' & B' \end{pmatrix}$ .

Условие, что цикл, изображаемый окружностью (2), является прямой плоскости  $H_2$ , имеет вид

$$A = C. \quad (5)$$

Действительно, прямые плоскости  $H_2$  изображаются на плоскости  $E_2$  окружностями, ортогональными к окружности (1), а условие ортогональности окружностей (1) и (2) в плоскости  $E_2$  имеет вид  $\cos \varphi = 0$ , где  $\varphi$  — угол между этими окружностями. Так как для окружности (1)  $A = -C = 1$ ,  $B = 0$ , то в силу (4) это условие может быть записано в виде  $\text{sp}(MM') = C - A = 0$ , что совпадает с (5).

### 2. Изображения окружностей, орициклов и эквидистант.

**Теорема 2.** Цикл плоскости  $H_2$ , изображаемый окружностью (2) плоскости  $E_2$ , является соответственно окружностью, орициклом или эквидистантой плоскости  $H_2$  в том и только в том случае, когда справедливо соответствующее из приведенных ниже неравенств:

$$\left| \frac{C - A}{2\sqrt{B\bar{B} - AC}} \right| > 1, \quad \left| \frac{C - A}{2\sqrt{B\bar{B} - AC}} \right| = 1, \quad \left| \frac{C - A}{2\sqrt{B\bar{B} - AC}} \right| < 1. \quad (6)$$

В самом деле, эти условия состоят в том, что угол  $\varphi$  между окружностью (2), изображающей этот цикл, и окружностью (1) удовлетворяет соответственно условиям

$$|\cos \varphi| > 1, \quad |\cos \varphi| = 1, \quad |\cos \varphi| < 1. \quad (7)$$

**3. Центр окружности и база эквидистантности.** Для того, чтобы найти центр окружности или базу эквидистанты, изображаемых окружностью (2), следует рассмотреть пучок окружностей, определяемый окружностями (1) и (2). Тогда центр окружности будет окружностью эллиптического пучка, определяемого окружностями (1) и (2), являющейся точкой, находящейся внутри круга, ограниченного окружностью (1), а база эквидистанты будет окружностью гиперболического пучка окружностей, определяемого окружностями (1) и (2), являющейся прямой линией.

Пучок окружностей, определяемый окружностями (1) и (2), имеет вид:

$$(A + \lambda)z\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + (C - \lambda) = 0. \quad (8)$$

Радиус окружности (8) равен нулю в том и только в том случае, когда параметр  $\lambda$  является корнем уравнения

$$\lambda^2 + (A - C)\lambda + (B\bar{B} - AC) = 0. \quad (9)$$

Аналогично, окружность (8) является прямой в плоскости  $H_2$  в том и только в том случае, когда  $\lambda = \frac{A - C}{2}$ , т. е. эта окружность задается уравнением

$$\frac{A + C}{2}z\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + \frac{A - C}{2} = 0. \quad (10)$$

**Теорема 3.** Центр окружности плоскости Лобачевского  $H_2$ , изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости  $E_2$ , совпадает с центром окружности пучка (8), соответствующей тому из корней  $\lambda$  уравнения (9), модуль которого меньше 1.

**Теорема 4.** База эквидистанты плоскости Лобачевского  $H_2$ , изображаемой окружностью (2) евклидовой плоскости  $E_2$ , совпадает с прямой линией плоскости  $H_2$ , которая в евклидовой плоскости  $E_2$  изображается окружностью (10):

### Список литературы

1. Schwerdtfeger G. Geometry of complex numbers. New York, 1979.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Доличанин Ч. // Математички радови. Приштина, 1988. С. 147.

Поступила в редакцию 15.05.89.

УДК 517.544

Н. В. БРОВКА, Л. П. ПРИМАЧУК

## ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОДСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

Пусть  $L = \bigcup_{v=1}^m L_v$ ,  $L_v = \widehat{a_0 a_v}$  — простые, гладкие, ориентированные кривые, не имеющие других общих точек, кроме  $a_0$ ,  $D = \widehat{C \setminus L}$ ,  $(\sigma_v)$ ,  $v = \overline{1, m}$  — совокупность отличных от единичной подстановок, таких, что  $\sigma_v$ ,  $v = \overline{1, m}$  не коммутируют между собой, группа, ими порожденная, действует транзитивно, и взятое в надлежащем порядке произведение  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m = e$ .

Рассмотрим задачу: найти кусочно-голоморфный вектор  $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$  по следующему краевому условию:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где  $G(t)$  — подстановочная матрица следующего вида:

$$G(t) = \begin{pmatrix} f_{1v}(t) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & f_{nv}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,iv_1} & \dots & \delta_{n,iv_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1,iv_n} & \dots & \delta_{n,iv_n} \end{pmatrix} = (f_v)(\sigma_v), \quad t \in L_v, \quad v = \overline{1, m},$$

$f_{iv}(t)$  — гёльдеровские, не обращающиеся в 0, имеющие конечные односторонние пределы при  $t \rightarrow a_i$ ,  $i = \overline{0, m}$  функции;  $\delta_{iv}$  — символ Кронекера,  $\mu = \overline{1, n}$ ,  $v = \overline{1, m}$ ;  $g(t)$  —  $H$ -непрерывный  $n$ -мерный вектор-столбец. Задачу будем решать в классе ограниченных функций.

Если  $f_{iv}(t) \equiv 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $v = \overline{1, m}$ , то решение задачи (1) эквивалентно построению основных функционалов римановой поверхности  $R$ , заданной в виде  $n$ -листной поверхности наложения расширенной комплексной

плоскости  $\widehat{C}$ . При этом точки  $a_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  — точки ветвления данного накрытия, а подстановки  $\sigma_v$  описывают закон склеивания листов данного накрытия в окрестностях точек  $a_v$  [1]. Пусть  $\lambda_{1v}, \dots, \lambda_{kv}$  — кратности циклов, на которые распадается подстановка  $\sigma_v$ . Четное число  $\omega_2 = \sum_{v=1}^m \sum_{\mu=1}^{kv} \times$

$\times (\lambda_{\mu v} - 1)$  равно индексу разветвления поверхности  $R$ , а ее род  $\rho$  вычисляется по формуле Римана — Гурвица [2]:  $\rho = \frac{\omega_2}{2} - n + 1$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $\rho = 0$ . В работе [1] показано, что в этом случае существует решение однородной задачи (1), удовлетворяющее при  $z \rightarrow \infty$  следующим условиям:

$$\omega_1(z) = c_1 z + O(1), \quad c_1 \neq 0; \quad \omega_2(z) = O(1); \quad \dots, \quad \omega_n(z) = O(1). \quad (2)$$

*Утверждение 1.* Каноническая матрица  $\chi(z)$  однородной задачи (1) при  $f_{iv}(t) \equiv 1$  в классе ограниченных функций дается формулой:

$$\chi(z) = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -e_1 z & -e_2 z & \dots & -e_{n-2} z & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -c_1 z \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где постоянные  $c_1, \dots, e_{n-2}$  определяются формулами:

$$\omega_1(z) = c_1 z + O(1) := c_1 z + \omega_{11}(z) \quad (4)$$

$$\omega_1(z) \omega_{11}(z) = c_2 z + O(1) := c_2 z + \omega_{12}(z)$$

$$\dots$$

$$\omega_1(z) \omega_{1n-3}(z) = c_{n-2} z + O(1) := c_{n-2} z + O(1).$$

Частные индексы равны соответственно:  $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = \kappa_3 = \dots = \kappa_n = -1$ .

Доказательство следует из того, что матрица (3) удовлетворяет крайнему условию и сумма порядков столбцов на бесконечности равна порядку определителя.

Пусть

$$(x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)) \quad (5)$$

некоторое фиксированное решение задачи (1) при  $g(t) \equiv 0$ . Из общей теории задачи Римана следует, что каноническая матрица однородной задачи (1) необходимо будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(z) & & 0 \\ & x_2(z) & \\ & & \dots \\ 0 & & & x_n(z) \end{pmatrix} \chi(z) R(z), \quad (6)$$

где  $R(z)$  — некоторая рациональная матрица.

Таким образом, задача сводится к построению фиксированного решения (5) и матрицы  $R(z)$ . Для построения решения (5) рассмотрим вспомогательную неоднородную задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^+(t) &= (\sigma_v) \tilde{\varphi}^-(t) + \ln f_v(t), \quad t \in L_v, \quad v = \overline{1, m}, \\ \ln f_v(t) &= (\ln f_{1v}(t), \dots, \ln f_{nv}(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Ограниченное на бесконечности частное решение этой задачи дается в виде [3]:

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{L_1} [\chi + (t)]^{-1} \ln f(t) \frac{dt}{t-z}. \quad (8)$$

Здесь каждая компонента вектора-решения  $\varphi(z)$  выражается формулой:

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(t) dt}{t-z} + \frac{\omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(t) dt}{t-z} + \dots + \\ &+ \frac{\omega_j^{n-1}(z) - c_1 z \omega_j^{n-2}(z) - \dots - c_{n-2} z \omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_n(t) dt}{t-z}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $(F_1, F_2, \dots, F_n) = [\chi^+]^{-1} (\ln f_1, \ln f_2, \dots, \ln f_n)$ .

Из свойств интеграла типа Коши и существования односторонних пределов у функций  $f_{iv}(t)$  при  $t \rightarrow a_k$  следует, что  $\tilde{\varphi}_j(z)$  в окрестности точки  $a_k, k = \overline{0, m}$  имеет следующее представление [3]:

$$\tilde{\varphi}_j(z) = \frac{r_{kj}}{2\pi i} \ln(z - a_k) + \Phi_{kj}(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, m},$$

$\Phi_{kj}(z)$  — ограниченные функции;  $r_{kj}$  — некоторые константы из  $\mathbb{C}$ .

З а м е ч а н и е. Для практического нахождения констант  $r_{kj}$  необходимо знать разложения функций  $\omega_j(z)$  в окрестности каждой точки  $a_k$ . Выберем целые числа  $\gamma_{kj}$  из условий:

$$0 \leq \gamma_{kj} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} r_{kj} < 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, m}. \quad (10)$$

Обозначим  $\alpha_k = \max_{1 \leq j \leq n} \gamma_{kj}$ ,  $k = \overline{0, m}$ .

Тогда вектор  $(X_1(z), \dots, X_n(z))$ , задаваемый формулой

$$X_j(z) = \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{\alpha_k} \exp \varphi_j(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

является решением однородной задачи (1) в классе ограниченных функций. Матрица

$$X(z) = \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{\alpha_k} \begin{pmatrix} \exp \varphi_1(z) & 0 \\ & \exp \varphi_2(z) \\ & & \ddots \\ 0 & & & \exp \varphi_n(z) \end{pmatrix} \chi(z), \quad (12)$$

где  $\chi(z)$  определяется формулой (3), является искомой канонической матрицей. Доказано следующее

*Утверждение 2.* Матрица  $X(z)$ , определяемая формулой (12), является канонической матрицей решений однородной задачи (1). Ее частные индексы равны соответственно:

$$\kappa_1 = - \sum_{k=0}^m \alpha_k, \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \dots = \kappa_n = - \sum_{k=0}^m \alpha_k - 1. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е. Изменяя обычным образом выбор постоянных  $\gamma_{ki}$  в неравенствах (10), можно получить решение задачи (1) в других классах Н. И. Мухелишвили [3].

Если  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_i < 0$ ,  $i = \overline{2, n}$ , для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L Q(t) [X^+(t)]^{-1} g(t) dt = 0, \quad (14)$$

где  $Q(t) = (0, t, \dots, t)$ .

Если  $\kappa_i < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , задача (1) разрешима при выполнении условий (14), где  $Q = (Q_{-\kappa_1-1}, Q_{-\kappa_2-1}, \dots, Q_{-\kappa_n-1})$ .

При  $\kappa_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  задача (1) безусловно разрешима. Во всех случаях ее решение задается формулой

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L [X^+(t)]^{-1} g(t) \frac{dt}{t-z} + P(z) X(z),$$

где матрица  $X(z)$  определяется формулой (12);  $P(z)$  — полиномиальный вектор  $P(z) = (P_{\kappa_1-1}(z), \dots, P_{\kappa_n-1}(z))$ , причем  $P_{\kappa_j-1} \equiv 0$  при  $\kappa_j \leq 0$ . Рассмотрим пример. Пусть  $n = 3$ . Матрица  $G(t)$  имеет вид:

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(t) \\ 0 & f_3(t) & 0 \end{pmatrix}, & -1 < t < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & f_1(t) & 0 \\ f_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3(t) \end{pmatrix}, & 0 < t < 1, \end{cases} \quad (15)$$

контур  $L$  изображен следующим образом:

Для случая, когда  $f_i(t) \equiv 1$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , каноническая матрица однородной задачи имеет вид [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_1(z) & \omega_1^2(z) - 3z\omega_1(z) \\ 1 & \omega_2(z) & \omega_2^2(z) - 3z\omega_2(z) \\ 1 & \omega_3(z) & \omega_3^2(z) - 3z\omega_3(z) \end{pmatrix},$$

где  $\omega_i(z)$  — ветви решений уравнения  $\omega^3 - 3z\omega^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}z\omega - \frac{z}{2} = 0$ , удовлетворяющие условиям:  $\omega_1(\infty) = \infty$ ,  $\omega_2(\infty) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\omega_3(\infty) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Фиксированное решение задачи (7) возьмем в виде  $\tilde{\varphi}(z) = (\tilde{\varphi}_1(z), \tilde{\varphi}_2(z), \tilde{\varphi}_3(z))$ , где

$$\tilde{\varphi}_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(t) dt}{t-z} + \frac{\omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_2(t) dt}{t-z} + \frac{\omega_j^2(z) - 3z\omega_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{F_3(t) dt}{t-z}, j = \overline{1, 3},$$

$$F_1 = \frac{\omega_2\omega_3(\omega_3 - \omega_2) \ln f_1 - \omega_1\omega_3(\omega_3 - \omega_1) \ln f_2 + \omega_1\omega_2(\omega_2 - \omega_1) \ln f_3}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_1)},$$

$$F_2 = \frac{[\omega_2^2 - \omega_3^2 + 3t(\omega_3 - \omega_2)] \ln f_1 + [\omega_3^2 - \omega_1^2 - 3t(\omega_3 - \omega_1)] \ln f_2 + [\omega_1^2 - \omega_3^2 + 3t(\omega_3 - \omega_1)] \ln f_3}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_1)}$$

$$F_3 = \frac{(\omega_3 - \omega_2) \ln f_1 + (\omega_1 - \omega_3) \ln f_2 + (\omega_2 - \omega_1) \ln f_3}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_1)}$$

Используя разложение функций  $\omega_i(z)$  в окрестностях точек  $z = -1, 0, 1$ , получим следующие выражения:

$$r_{0j} = c_{01}^j \ln f_1(\pm 0) + c_{02}^j \ln f_2(\pm 0) + c_{03}^j \ln f_3(\pm 0),$$

$$r_{1j} = c_{11}^j \ln f_1(1^-) + c_{12}^j \ln f_2(1^-) + c_{13}^j \ln f_3(1^-),$$

$$r_{-1j} = c_{-11}^j \ln f_1(-1^+) + c_{-12}^j \ln f_2(-1^+) + c_{-13}^j \ln f_3(-1^+),$$

где коэффициенты  $c_{ik}^j$  задаются таблицей.

$j = \overline{1, 3}$	Коэффициенты при $\ln f_k(z)$		
$\tilde{\varphi}_1(z)$	1/2	1	1/3
	1/2	0	1/3
	0	0	1/3
$\tilde{\varphi}_2(z)$	1/2	0	1/3
	1/2	1/2	1/3
	0	1/2	1/3
$\tilde{\varphi}_3(z)$	0	0	1/3
	0	1/2	1/3
	1	1/2	1/3

Целые числа  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$  выбираем из условий:

$$0 \leq \gamma_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\arg g_1(1) + \arg g_2(1)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leq \gamma_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\arg g_2(-1) + \arg g_3(-1)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leq \gamma_3 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\arg g_i(+0) - \arg g_i(-0)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leq \gamma_4 - \frac{\arg g_1(-1)}{2\pi} < 1,$$

$$0 \leq \gamma_5 + \frac{\arg g_3(i)}{2\pi} < 1.$$

Обозначим  $\alpha_1 = \max(\gamma_1, \gamma_5)$ ,  $\alpha_2 = \gamma_3$ ,  $\alpha_3 = \max(\gamma_2, \gamma_4)$ . Тогда матрица

$$X(z) = \begin{pmatrix} \exp \tilde{\varphi}_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \exp \tilde{\varphi}_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & \exp \tilde{\varphi}_3(z) \end{pmatrix} (z-1)^{\alpha_1} z^{\alpha_2} (z+1)^{\alpha_3} \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 - 3z\omega_1 \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 - 3z\omega_2 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 - 3z\omega_3 \end{pmatrix}$$

будет канонической матрицей однородной задачи (15), частные индексы ее будут вычисляться по формуле (13).

### Список литературы

1. Зверович Э. И. // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 6. С. 32.
2. Чеботарев Н. И. Теория алгебраических функций. М., 1947.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 30.12.88.

УДК 519.21

П. М. ЛАППО

## ОБНАРУЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ РАЗЛАДКОВ В НЕКОТОРЫХ БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Задачи обнаружения разладков в случайных последовательностях различной структуры исследовались многими авторами. Наиболее полный обзор материала содержится в работе [1]. В настоящей заметке рассматривается задача обнаружения многократных разладков в бинарных последовательностях. По методам исследования работа близка к статьям [2—3].

**Постановка задачи.** Введем понятие альтернирующей последовательности случайных величин (АПСВ). Будем называть АПСВ такую последовательность случайных величин  $\{\Theta_j, j=1, 2, \dots\}$ , которая обладает следующими свойствами:  $\{\Theta_j\}$  — последовательность независимых случайных величин, причем элементы с нечетными номерами имеют распределение  $G_1(x)$ , а элементы с четными номерами —  $G_2(x)$ . Положим  $\bar{i}=1$ , если  $i=2$ , и  $\bar{i}=2$ , если  $i=1$ . Будем предполагать, что с вероятностью  $1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}$ .

$0 < g_i < 1, i=1, 2, G_1(x)$  является геометрическим распределением с параметром  $g_i$ . При этом условии  $P(\Theta_{2j+1}=k) = g_i(1-g_i)^{k-1}$ , а распределение  $G_2(x)$  является геометрическим с параметром  $g_{\bar{i}}$  и  $P(\Theta_{2j}=k) = g_{\bar{i}}(1-g_{\bar{i}})^{k-1}; k=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots$ . Введем случайные величины  $\tau_m = 1 + \sum_{j=1}^m \theta_j; m=1, 2, \dots$ , которые будем называть моментами разладки.

Определим теперь случайную бинарную последовательность  $\{x_t, t=1, 2, \dots\}$  со следующим свойством. Если  $t \in \left[ \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j, \sum_{j=1}^m \theta_j \right]$ , то  $x_t$  являются независимыми бернуллиевскими случайными величинами с параметрами  $p_i = P(x_t=1) = 1 - P(x_t=0)$ , где индекс  $i$  совпадает с индексом распределения случайной величины  $\Theta_m, i \in \{1, 2\}$ .

Будем говорить, что АПСВ в момент времени  $t$  находится в состоянии  $d_t \in \{1, 2\}$ , если случайная величина  $x_t$  имеет бернуллиевское распределение с параметром  $p_{d_t}$ . Требуется по выборке  $X_1^N = (x_1, \dots, x_N)$  оценить

моменты разладки таким образом, чтобы минимизировать средний суммарный штраф:

$$M\{c\} = M\left\{\sum_{t=1}^N c_{ij}(t)\right\}, \quad (1)$$

где  $c_{ij}(t)$  — величина штрафа, который мы платим, если в момент времени  $t$  относим АПСВ в состояние  $j$ , а она находится в состоянии  $i$ ;  $i, j \in \{1, 2\}$ .

### 1. Случай известных параметров.

**Теорема.** Если параметры  $p_i, g_i, i=1, 2$  известны, то оценки моментов разладки  $\tau_k$ , минимизирующие (1), задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\tau_1 = \min_{t>1} \{t: \delta_{d_{t-1} d_t} \neq 0\}, \quad \tau_k = \min_{t>\tau_{k-1}} \{t: \delta_{d_{t-1} d_t} \neq 0\},$$

где оценки состояний АПСВ  $\hat{d}_t$  имеют вид:

$$\hat{d}_t = \begin{cases} 1, & \text{если } c_{11}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{21}(t)P(d_t = 2/X_1^N) < \\ < c_{12}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{22}(t)P(d_t = 2/X_1^N), \\ 2 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Вероятности  $P(d_t = i/X_1^N)$  вычисляются по приводимым ниже формулам (4) — (6);  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

**Доказательство.** Заметим, что сумма минимальна, если каждое слагаемое минимально. Поэтому задача минимизации (1) состоит в том, чтобы минимизировать по  $j$   $M\{c_{ij}(t)\}$  для каждого  $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Но

$$M\{c_{ij}(t)\} = \sum_{x_1, \dots, x_N=0}^1 P(X_1^N) (c_{1j}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{2j}(t)P(d_t = 2/X_1^N)). \quad (3)$$

Сумма в правой части (3) будет минимальной, если мы минимизируем по  $j$  выражение

$$c_{1j}(t)P(d_t = 1/X_1^N) + c_{2j}(t)P(d_t = 2/X_1^N).$$

Таким образом, оценка состояния АПСВ в момент  $t$  имеет вид (2).

Получим формулы для вычисления  $P(d_t = i/X_1^N)$ . Так как распределения элементов АПСВ геометрические, то последовательность состояний  $d_1, d_2, \dots$  образует цепь Маркова с матрицей вероятностей одношаговых переходов  $(b_{ij})$ , где  $b_{ii} = 1 - g_i$ , а  $b_{ij} = g_i, i \neq j, i, j = 1, 2$ , и начальным распределением  $P(d_1 = i) = 1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}$ . Тогда

$$P(d_t = i/X_1^N) = \frac{P(d_t = i, X_1^N)}{P(X_1^N)} = \frac{P(X_{t+1}^N/d_t=i)P(d_t = i/X_1^t)}{P(X_1^t)}, \quad (4)$$

где мы положили  $X_{t_1}^{t_2} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_2})$ ,  $t_1 \leq t_2$ . Для  $P(d_t = i, X_1^t)$  справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} P(d_1 = i, X_1^1) &= \left(1 - \frac{g_i}{g_1 + g_2}\right) p_i^{x_1} (1 - p_i)^{1-x_1}, \quad i = 1, 2; \\ P(d_t = i, X_1^t) &= p_i^{x_t} (1 - p_i)^{1-x_t} (P(d_{t-1} = i, X_1^{t-1}) (1 - g_i) + \\ &+ P(d_{t-1} = \bar{i}, X_1^{t-1}) g_i), \quad 2 \leq t \leq N, \quad i = 1, 2; \\ P(X_1^t) &= P(d_t = 1, X_1^t) + P(d_t = 2, X_1^t), \quad 1 \leq t \leq N. \end{aligned} \quad (5)$$

По формулам (4) осуществляют так называемый «прямой ход». Вероятности  $P(X_{t+1}^N/d_t = i)$  находят с помощью «обратного хода»:

$$P(X_N^N/d_{N-1} = i) = p_i^{x_N} (1 - p_i)^{1-x_N} (1 - g_i) + p_{\bar{i}}^{x_N} (1 - p_{\bar{i}})^{1-x_N} g_i,$$

$$P(X_{N-t+1}^N/d_{N-t} = i) = p_i^{x_{N-t+1}} (1 - p_i)^{1-x_{N-t+1}} (1 - g_i) \times \quad (6)$$

$$\times P(X_{N-t+2}^N/d_{N-t+1} = i) + p_{\bar{i}}^{x_{N-t+1}} (1 - p_{\bar{i}})^{1-x_{N-t+1}} P(X_{N-t+2}^N/d_{N-t+1} = \bar{i}) \times \\ \times g_{\bar{i}}, \quad 2 \leq t \leq N - 1.$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислить вероятности (4). Теорема доказана.

**2. Случай неизвестных параметров.** Если параметры неизвестны, то предлагается вначале найти их оценки по методу максимального правдоподобия, а затем использовать их для оценки моментов разладки в формулах (4) — (6). Однако получение аналитических выражений для оценок максимального правдоподобия затруднительно в связи с громоздким видом функции правдоподобия  $P(X_1^N)$ . Поэтому будем решать задачу оценивания параметров численно. Для этого пригодны прямые методы поиска экстремума функции. Функция правдоподобия  $P(X_1^N)$  в любой точке вычисляется по формулам (5).

**3. Экспериментальное исследование.** Проверка работоспособности предложенного алгоритма оценивания моментов разладки осуществлялась на модельных реализациях бинарных последовательностей. Результаты, полученные с помощью ЭВМ, показывают, что алгоритм работает удовлетворительно при  $0 \leq p_1 \leq 0,3$ ;  $0,7 \leq p_2 \leq 1$ ;  $0 \leq g_i \leq 0,25$ ;  $c_{ij}(t) = 1 - \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $50 \leq N \leq 1000$ . При этом предполагалось, что параметры  $p_1, p_2, g_1, g_2$  неизвестны. Относительный штраф, равный отношению числа неверно определенных состояний АПСВ к объему выборки  $N$ , не превышал 0,15.

### Список литературы

1. К лигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5.
2. Харин Ю. С. // Статистические проблемы управления. 1984. Вып. 65. С. 225.
3. Моттль В. В., Мучник И. Б., Яковлев В. Г. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 84.

Поступила в редакцию 24.04.89.

УДК 519.872

Н. В. ЛУНЕВА

### О ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ M/G/1 С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

Имеется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием, в которую поступает простейший поток требований интенсивности  $\lambda > 0$ . Прибор может работать в двух режимах. При работе в  $l$ -ом режиме время обслуживания требования имеет функцию распределения (ф. р.)  $B_l(t)$  ( $l = 1, 2$ ). Предполагается, что  $\beta_2^1 < \lambda^{-1}$ , где  $\beta_l^1 =$

$$= \int_0^{\infty} (1 - B_l(t)) dt. \quad \text{Изменение режима работы может происходить в мо-}$$

мент окончания обслуживания очередного требования. Фиксируются натуральные числа  $m_1$  и  $m_2$ , называемые порогами,  $0 \leq m_1 \leq m_2 < +\infty$ . Если число  $i$  требований в системе в момент окончания обслуживания удовлетворяет неравенству  $i \leq m_1$ , следующее требование может обслужиться только в первом режиме. Если  $i > m_2$ , обслуживание осуществляется во

втором режиме. В случае  $m_1 < i \leq m_2$  сохраняется прежний режим обслуживания. Такая стратегия управления режимом работы называется гистерезисной. Существует ряд работ, в которых исследуется СМО с гистерезисной стратегией управления скоростью обслуживания, например, в [1] получены производящие функции распределения числа требований в системе в моменты окончания обслуживания очередного требования.

В данной работе решается задача нахождения преобразования Лапласа — Стильеса (ПЛС) ф. р. периода занятости, который является одной из основных характеристик исследуемой системы. Периодом занятости системы называется промежуток времени с момента поступления требования в свободную систему и до первого последующего момента освобождения системы от требований. Пусть в некоторый момент окончания обслуживания очередного требования в системе находится  $k$  требований. Под  $k$ -периодом занятости будем понимать период с момента начала обслуживания требования, когда в системе находится  $k$  ( $k \geq 1$ ) требований, и до первой готовности к обслуживанию, когда в системе находится  $k-1$  требование. Очевидно, что 1-период совпадает с периодом занятости. Назовем  $k$ -период  $k$ -периодом первого типа, если он начинается с использования первого режима обслуживания  $B_1(t)$ , в противном случае —  $k$ -периодом второго типа.

**Лемма 1.** Для  $\forall k > m_1$  ПЛС ф. р.  $k$ -периода второго типа  $h(s)$  является единственным решением функционального уравнения

$$h(s) = \beta_2(s + \lambda(1 - h(s))), \quad |h(s)| \leq 1, \quad (1)$$

аналитическим при  $Res > 0$ .

Доказательство леммы является очевидным, поскольку  $k$ -период второго типа совпадает по распределению с периодом занятости системы  $M/B_2(t)/1/\infty$  и, следовательно, удовлетворяет (1) [2].

**Лемма 2.** Пусть  $P(k)$  — вероятность непрерывной работы в первом режиме в течение  $k$ -периода первого типа. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$P(k) = \beta_1(\lambda) \left( 1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} P(k+i) \right)^{-1}, \quad 0 < k \leq m_2. \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $\xi$  — длительность  $k$ -периода первого типа. Тогда  $\xi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \xi_i$ , где  $\xi_0$  — время обслуживания  $k$ -го требования в первом режиме;  $\alpha$  — количество требований, поступивших за время  $\xi_0$ ,  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, \alpha}$ ) — периоды занятости, порожденные требованиями, поступившими за время ( $\xi_0$ ). Будем использовать запись ( $\eta \leq m_2$ ) для обозначения события, состоящего в том, что в течение случайного времени  $\eta$  количество требований в системе ни разу не превысило порога  $m_2$ , ( $\eta > m_2$ ) — хотя бы один раз превысило. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(k) = P(\xi \leq m_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \leq m_2 | \alpha = n) P(\alpha = n) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(\xi_i \leq m_2, i = \overline{0, n} | \alpha = n) P(\alpha = n).$$

С учетом формул:

$$P(\xi_0 \leq m_2 | \alpha = n, n \leq m_2 - k + 1) = 1,$$

$$P(\xi_j \leq m_2 | \alpha = n, \xi_0 \leq m_2, \xi_i \leq m_2, i = \overline{j+1, n}) = P(k-1+j),$$

имеем

$$P(k) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(\alpha = n) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) = \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} dB_1(y) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) =$$

$$= \beta_1(\lambda) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i). \quad (3)$$

Разрешив уравнение (3) относительно  $P(k)$ , получаем (2).

**Лемма 3.** Пусть  $h_{k,H}(s)$  — ПЛС ф. р.  $k$ -периода первого типа, при условии, что в течение этого периода не произошло ни одного переключения режима. Тогда

$$h_{k,H}(s) = \frac{\beta_1(s+\lambda)}{P(k)} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} P(k+i) h_{k+i,H}(s) \right]^{-1}, \quad 0 < k \leq m_2. \quad (4)$$

**Доказательство.** Имеем

$$h_{k,H}(s) = M(e^{-s\xi}/\xi \leq m_2) = \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty M(e^{-s\xi} I_{(\xi < m_2)}/\xi_0 = y) dB_1(y), \quad (5)$$

где  $I_{(A)}$  — индикатор множества  $A$ . Определим следующие события  $B_n = (\alpha = n) \cap \bigcap_{i=1}^{\alpha} (\xi_i \leq m_2)$ ,  $n = 0, m_2 - k + 1$ . Очевидно, что  $B_i \cap B_j = \emptyset$  и

$\bigcup_{n=0}^{m_2-k+1} B_n = (\xi \leq m_2)$ . Из (5) получаем:

$$h_{k,H}(s) = \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{m_2-k+1} P(B_n/\xi_0 = y) M(e^{-s\xi}/B_n, \xi_0 = y) dB_1(y). \quad (6)$$

При фиксированном  $\alpha = n$  случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  и  $\xi_0$  являются независимыми, следовательно,

$$\begin{aligned} P(B_n/\xi_0 = y) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{\alpha} (\xi_i \leq m_2)/\alpha = n, \xi_0 = y\right) P(\alpha = n/\xi_0 = y) = \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \leq m_2)\right) P(\alpha = n/\xi_0 = y) = \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i). \end{aligned}$$

Если в течение всех  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , переключение ни разу не произошло случайные величины  $\xi_i$  являются независимыми  $(k-1+i)$ -периодами первого типа, в которых не произошло переключения, поэтому

$$\begin{aligned} h_{k,H}(s) &= \frac{1}{P(k)} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) e^{-sy} \prod_{i=0}^{n-1} h_{k+i,H}(s) dB_1(y) = \\ &= \frac{1}{P(k)} \sum_{n=0}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=0}^{n-1} P(k+i) h_{k+i,H}(s). \end{aligned}$$

Отсюда легко получить (4). Лемма доказана.

**Теорема.** Преобразование Лапласа — Стильтеса  $\pi(s)$  ф. р. периода занятости исследуемой системы определяется из соотношений:

$$\pi(s) = h_1(s), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h_k(s) &= \beta_1(s+\lambda) \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) Q_{k,n}(s) + \zeta(s) [\beta_1(s+\lambda) - \right. \\ &- \beta_1(s+\lambda(1-h(s)))] - \sum_{n=m_1-k+2}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=k+1}^{m_1} h_i(s) \sum_{j=m_1+1}^{n-k-1} \times \\ &\left. \times (h_j(s) - h(s)) h(s) \prod_{i=j+1}^{n+k-1} h_{i,H}(s) P(i) \right\}^{-1}, \quad 0 < k \leq m_1, \quad (8) \end{aligned}$$

$$h_k(s) = \left( \beta_1(s+\lambda(1-h(s))) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \left[ \sum_{j=k+1}^{n+k-1} (h_j(s) - h(s)) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times h(s) \prod_{i=j+1}^{j-k} h_{i,H}(s) P(i) \dots h(s) \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_{i,H}(s) P(i) \Big] \left( 1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \times \right. \\ & \left. \times \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_{i,H}(s) P(i) \right)^{-1}, \quad m_1 < k \leq m_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\zeta_k(s) = \prod_{i=k+1}^{m_1} h_i(s) h(s), \quad Q_{k,H}(s) = \prod_{i=k+1}^{n+k-1} h_i(s) - h^n(s) \zeta_k(s), \quad (10)$$

функция  $h(s)$  определяется как решение уравнения (1).

Доказательство. Вычислим  $h_k(s) = M e^{-s\xi}$ , где  $\xi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \xi_i$  — длительность  $k$ -периода первого типа:

$$\begin{aligned} M(e^{-s\xi}) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M(e^{-s\xi/\xi_0} = y, \alpha = n) P(\alpha = n, \xi_0 = y) dB_1(y) = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-y(s+\lambda)} M(e^{-s \sum_{i=1}^n \xi_i}) dB_1(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть  $m_1 < k \leq m_2$ . В этом случае длительность  $k$ -периода первого типа складывается из: 1) времени обслуживания вызова, начавшего  $k$ -период при условии, что система функционирует в первом режиме; 2) времени  $n$  независимых  $i$ -периодов ( $i = \overline{k, k+n-1}$ ) второго типа, если  $n+k-1 > m_2$ , или времени одного  $(n+k-1)$ -периода первого типа и  $(n-1)$   $i$ -периодов ( $i = \overline{k, k+n-2}$ ), тип которых зависит от того, произошло ли переключение режима обслуживания в предыдущих периодах (случай  $0 \leq n \leq m_2 - k + 1$ ). Таким образом, из (11) получаем:

$$\begin{aligned} h_k(s) &= \beta_1(s+\lambda) + \int_0^{\infty} e^{-y(s+\lambda)} \left[ \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(\lambda y)^n}{n!} M(e^{-s \sum_{i=1}^n \xi_i}) + \sum_{n=m_2-k+2}^{\infty} \frac{(\lambda y)^n}{n!} \times \right. \\ & \left. \times h^n(s) \right] dB_1(y) = \beta_1(s+\lambda) (1 - h(s)) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(s+\lambda) \times \\ & \times [M(e^{-s \sum_{i=1}^n \xi_i}) - h^n(s)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Для дальнейшего доказательства необходимо вычислить  $M(e^{-s \sum_{i=1}^n \xi_i})$  при  $1 \leq n \leq m_2 - k + 1$ . Пусть  $h_{k,\Pi}(s)$  — ПЛС ф. р.  $k$ -периода первого типа, в течение которого хотя бы один раз произошло переключение на второй режим, т. е.  $h_{k,\Pi}(s) = M(e^{-s\xi/\xi} > m_2)$ . С помощью метода математической индукции нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} M(e^{-s \sum_{i=1}^n \xi_i}) &= \sum_{j=1}^{n-1} h_{k+j,\Pi}(s) (1 - P(k+j)) h^j(s) \prod_{i=j+1}^{n-1} h_{k+i,H}(s) P(k+i) + \\ & + h_k(s) \prod_{i=1}^{n-1} h_{k+i,H}(s) P(k+i), \quad 1 \leq n \leq m_2 - k + 1, \quad m_1 < k \leq m_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что  $h_{k,\Pi}(s) (1 - P(k)) = h_k(s) - h_{k,\Pi}(s) P(k)$ , подставим выражение (13) в формулу (12). Разрешим полученное уравнение относительно  $h_k(s)$ . После несложных преобразований получаем (9).

Теперь рассмотрим случай  $1 \leq k \leq m_1$ . При этом предположении длительность  $k$ -периода первого типа состоит из времени обслуживания требования, начавшего  $k$ -период при условии, что система функционирует в первом режиме, а также времени  $n$   $i$ -периодов ( $i = \overline{k, n+k-1}$ ), если на протяжении обслуживания  $k$ -го требования в систему поступило еще  $n$  требований. Тип этих периодов зависит от величины  $n$ . Если  $0 \leq n \leq m_1 - k + 1$ , имеем  $n$   $i$ -периодов первого типа. В случае  $m_1 - k + 1 < n \leq m_2 - k + 1$  поступившие требования порождают один  $(n+k-1)$ -период первого типа,  $(n+k-2-m_1)$   $i$ -периодов ( $i = \overline{m_1+1, n+k-2}$ ), тип которых зависит от того, произошло ли переключение режима обслуживания в предыдущих периодах и  $(m_1 - k + 1)$   $i$ -периодов ( $i = \overline{k, m_1}$ ) первого типа. При  $n > m_2 - k + 1$  возникает  $m_1 - k + 1$   $i$ -периодов ( $i = \overline{k, m_1}$ ) первого типа и  $(n - m_1 + k - 1)$   $i$ -периодов второго типа. Учитывая независимость в совокупности случайных величин  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при фиксированном  $n$  и однозначно определенном типе периода, порожденного каждой  $\xi_i$ , из (11) после несложных преобразований получаем (8). Заметим, что в ходе вычислений используется формула, аналогичная (13):

$$M \left( \exp \left\{ -s \sum_{i=m_1-k+2}^n \xi_i \right\} \right) = \sum_{j=m_1-k+2}^{n-1} h_{k+j, \Pi}(s) (1 - P(k+j))^{k+j-m_1-1} h(s) \times \\ \times \prod_{i=j+1}^{n-1} h_{i+k, \Pi}(s) P(k+i) + h_{m_1+1}(s) \prod_{i=m_1-k+2}^{n-1} h_{k-i, \Pi}(s) P(k+i). \quad (14)$$

*Следствие.* Если  $\lambda \beta_2^1 < 1$ , то средняя длина периода занятости  $\pi^1$  определяется из следующих соотношений:

$$\pi^1 = h_1^1, \quad (15)$$

$$h_k^1 = \beta_1^{(1)}(\lambda) \left[ -\zeta_k^1(\beta_1(\lambda) - 1) + \beta_1^1(1 + \lambda h^1) + \sum_{n=1}^{m_1-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \theta_{k, n}^1 + \right. \\ \left. + \sum_{n=m_1-k+2}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \sum_{j=m_1+1}^{n+k-1} (h_j^1 - h^1) \prod_{i=j+1}^{n+k-1} P(i) \right]^{-1}, \quad 0 < k \leq m_1, \quad (16)$$

$$h_k^1 = (\beta_1^1(1 + \lambda h^1) + \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \left( \sum_{j=k+1}^{n+k-1} (h_j^1 - h^1) \prod_{i=j+1}^{n+k-1} P(i) - \right. \\ \left. - \gamma_k^1 \sum_{i=k+1}^{n+k-1} P(i) \right) \left( 1 - \sum_{n=1}^{m_2-k+1} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \beta_1^{(n)}(\lambda) \prod_{i=k+1}^{n+k-1} P(i) \right)^{-1}, \quad m_1 < k \leq m_2, \quad (17)$$

где  $h^1 = \beta_2^1 / (1 - \lambda \beta_2^1)$ ,  $\zeta_k^1 = \sum_{i=k+1}^{m_1} h_i^1 - (k - m_1 - 1) h^1$ ,

$$\theta_{k, n}^1 = \sum_{i=m_1+1}^{n+k-1} h_i^1 - (n+k-m_1-1) h^1.$$

### Список литературы

1. Дудин А. Н., Халаф Иксан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 35.
2. Гнеденко Б. В. и др. Приоритетные системы обслуживания. М., 1973.

Поступила в редакцию 04.09.89.



УДК 530.12

Г. В. ШИШКИН, МОХАМЕД АЛИ ЯСИН (ИРАК)

## О ТОЧНОМ ОПИСАНИИ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЕКТОРНОМ И ТЕНЗОРНОМ ПОЛЯХ. I

На сегодняшний день имеется лишь одно точное решение уравнения Дирака в присутствии сразу двух полей — электромагнитного и гравитационного. Это известное решение Чандрасекара, полученное им для метрики Керра [1]. Потребность же в такого рода решениях несомненна. Достаточно сказать, что точное описание взаимодействия аномального магнитного момента с внешним полем могло бы пролить свет на многие аспекты сверхтонкой структуры атомных спектров. В связи с этим рассмотрим разделение переменных в уравнении Дирака во внешнем векторном и тензорном полях.

Записывая уравнение Дирака в виде

$$\left\{ \sum_k \gamma^k (\partial_k - iA_k^V) + \sum_{k,l} \gamma^k \gamma^l A_{kl}^T + m_0 \right\} \Psi = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где  $A_k^V$ ,  $A_{kl}^T$  — компоненты векторного и тензорного полей соответственно, и используя алгебраический метод разделения переменных, подробно описанный в [2], ограничиваясь полями «плоской» симметрии (декартовы координаты), можем указать на следующие возможности полного разделения переменных в уравнении (1).

При последовательном разделении —  $x^i$  от  $x^j$ ,  $x^m$ ,  $x^n$ , затем  $x^j$  от  $x^m$ ,  $x^n$  и, наконец,  $x^m$  от  $x^n$  — полное разделение переменных осуществимо при следующих условиях на полевые функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^V = \tilde{A}_i^V(x^i), \quad A_j^V = \tilde{B}_j^V(x^j) + \tilde{C}_j^V(x^j), \quad A_m^V = \tilde{C}_m^V(x^m), \quad A_n^V = \tilde{D}_n^V(x^n); \\ \text{отличны от нуля } A_{jm}^T = \tilde{C}_{jm}^T(x^m) + \tilde{D}_{jm}^T(x^n); \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{D}_i^V, \quad A_j^V = \tilde{B}_j^V + \tilde{D}_j^V, \quad A_m^V = \tilde{C}_m^V + \tilde{D}_m^V, \quad A_n^V = \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{kl}^T = \tilde{D}_{kl}^T; \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{C}_i^V, \quad A_j^V = \tilde{B}_j^V + \tilde{C}_j^V, \quad A_m^V = \tilde{C}_m^V, \quad A_n^V = \tilde{C}_n^V - \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{kk}^T = \tilde{D}_{kk}^T; \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{C}_i^V, \quad A_j^V = \tilde{B}_j^V + \tilde{D}_j^V, \quad A_m^V = \tilde{C}_m^V, \quad A_n^V = \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{kk}^T = \tilde{C}_{kk}^T, \quad A_{im}^T = \tilde{C}_{im}^T + \tilde{D}_{im}^T; \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{B}_i^V, \quad A_j^V = \tilde{B}_j^V, \quad A_m^V = \tilde{C}_m^V + \tilde{D}_m^V, \quad A_n^V = \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{kk}^T = \tilde{B}_{kk}^T, \quad A_{ij}^T = \tilde{D}_{ij}^T; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\begin{cases} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{D}_i^V, A_j^V = \tilde{B}_j^V, A_m^V = \tilde{C}_m^V + \tilde{D}_m^V, A_n^V = \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{kk}^T = \tilde{B}_{kk}^T, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_i^V = \tilde{A}_i^V + \tilde{B}_i^V, A_j^V = \tilde{B}_j^V + \tilde{C}_j^V, A_m^V = \tilde{C}_m^V, A_n^V = \tilde{C}_n^V + \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{jm}^T = \tilde{B}_{jm}^T, A_{jn}^T = \tilde{B}_{jn}^T, A_{mn}^T = \tilde{B}_{mn}^T + \tilde{C}_{mn}^T. \end{cases} \quad (8)$$

Мы не приводим возможностей разделения переменных, соответствующих обращению в нуль всех компонент одного из полей  $A_k^V$  или  $A_{kl}^T$ .

Если начать с попарного разделения —  $x^i, x^j$  от  $x^m, x^n$ , затем разделить  $x^i$  от  $x^j$  и  $x^m$  от  $x^n$  — для полного разделения переменных в уравнении (1) имеем следующие условия на полевые функции:

$$\begin{cases} A_i^V = \tilde{A}_i^V, A_j^V = \tilde{A}_j^V + \tilde{B}_j^V, A_m^V = \tilde{C}_m^V + \tilde{D}_m^V, A_n^V = \tilde{D}_n^V; \\ \text{отличны от нуля } A_{ij}^T = \tilde{A}_{ij}^T. \end{cases} \quad (9)$$

Условия разделения переменных существенно упрощаются, если векторное поле подчинить калибровке Лоренца, а тензорное считать антисимметричным. Полученные критерии полного разделения переменных в уравнении (1) могут быть полезны при получении точных решений уравнения Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем через вектор-потенциал  $A_k^V$ , а также через напряженности  $F_{kl}$ .

### Список литературы

1. Chandrasekhar S. // Proc. R. Soc. London, 1976. V. A349. P. 571.
2. Shishkin G. V., Villalba V. M. // Journ. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2132.

Поступила в редакцию 26.04.90.

УДК 517.916

О. А. КОНОНОВА

### ОБ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается система нелинейных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + c_0 x^2 + d_0 x^3 + l_0 x^4 + y(b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3) + \\ &+ y^3(a_3 + b_3 x) + a_4 y^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Для системы (1) И. С. Куклесом найдены девять условий, при которых точка  $O(0, 0)$  является центром [1].

В данной работе рассматривается вопрос об изохронности центра в седьмом случае, когда  $a_2 = a_3 = a_4 = d_1 = 0$ ;  $3\beta + 5c_0\alpha = c_0^2 + c_0\beta = \delta = \zeta = 0$  и либо  $b_1(b_1 b_2 + 3b_3) \neq 0$ , либо  $b_3 c_0 = b_2 c_0 + c_2 = c_0 l_0 = 3l_0 + 5c_0 d_0 = 0$ , где  $\alpha = d_0 b_1^2$ ,  $\beta = l_0 b_1^2$ ,  $\zeta = c_0 b_1 + c_1$ ,  $\delta = 3b_1 b_3 c_1 - c_2 b_1^3 + b_2 b_1^2 c_1$ .

Некоторые случаи центра рассмотрены автором в [2, 3].

**Теорема.** Система (1) в седьмом случае центра изохронна, когда  $d_0 = -\frac{1}{9} b_1^2$ ,  $c_0 = c_1 = c_2 = b_2 = l_0 = 0$  и в линейном случае.

Седьмой случай центра можно разбить на два подслучая:

$$7_1 \quad b_1(b_1b_2 + 3b_3) \neq 0;$$

$$7_2 \quad b_1(b_1b_2 + 3b_3) = 0.$$

Подслучай  $7_1$ , в свою очередь, можно разбить на два подслучая:

$$7_{1,1} \quad c_0 = c_1 = c_2 = l_0 = 0;$$

$$7_{1,2} \quad d_0 = l_0 = 0, \quad c_1 = -c_0b_1, \quad 3b_3c_0 + b_1b_2c_0 + c_2b_1 = 0.$$

Система (1) в подслучае  $7_{1,1}$  изохронна только при  $d_0 = -\frac{1}{9}b_1^2$ ,  $b_2 = b_3 = 0$  [3, 4].

Система (1) в подслучае  $7_{1,2}$  имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + c_0x^2 + b_1(x - c_0x^2)y + b_2xy^2 + b_3xy^3 + c_2x^2y^2.$$

Непосредственные вычисления дают следующие необходимые условия изохронности центра  $O(0, 0)$  для системы (2) [5]:

$$1) \quad b_1^2 + 3b_2 + 10c_0^2 = 0;$$

$$2) \quad 5c_0^4 - 4b_1^2c_0^2 + 48c_0c_2 = 0; \tag{3}$$

$$3) \quad 253504b_1^6 + 32911550c_0^6 - 13637505c_0^4b_1^2 + 530930c_0^2b_1^4 = 0.$$

Обозначим  $\left(\frac{c_0}{b_1}\right)^2 = \mu$ ,  $b_1 \neq 0$ .

Тогда третье условие (3) имеет вид:

$$32911550\mu^3 - 13637505\mu^2 + 530930\mu + 253504 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет два комплексных корня и один отрицательный,  $\mu = -0,1071$ .

Следовательно, условие (3) выполняется при  $c_0 = b_1 = b_2 = 0$ . Так как  $b_1 \neq 0$ , система (2) неизохронна.

Простые вычисления показывают, что в подслучае  $7_1$  новых случаев изохронного центра системы (1) не возникает.

Теорема доказана.

### Список литературы

1. Куклес И. С. // Докл. АН СССР. 1944. Т. 57. № 4. С. 166.
2. Кононова О. А. // Тез. докл. 5-й Республ. конференц. математиков Белоруссии. Гродно, 1980. С. 54.
3. Кононова О. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 4: Физ. Мат. Мех. 1989. № 2. С. 71.
4. Плешкан И. И. // Об изохронности одной системы нелинейных колебаний: V Всесоюз. конференц. по качественной теории дифференциальных уравнений. Кишинев, 1979. С. 137.
5. Воробьев А. П. // Докл. АН БССР. 1958. Т. 7. № 3. С. 155.

Поступила в редакцию 13.02.89.

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ\*

УДК 543.422:546.791

Т. А. Днк, Д. С. Умрейко. **Спектральные особенности поведения нитратолигандов и фосфиноксидов в соединениях уранила с нейтральными фосфорорганическими основаниями.** № 692-В89. Деп. от 31. 01. 89 в ВИНИТИ.

Исследованы колебательные спектры ряда полнокристаллических нитратных комплексов уранила с третичными алифатическими фосфиноксидами. Исходя из брутто-формулы соединений, экспериментальных спектров ИК поглощения и КР и основываясь на данных расчета частот и форм нормальных колебаний, предложены возможные структуры упомянутых комплексов. Сопоставлены колебательные спектры твердофазных образцов и их растворов в неполярном и полярном растворителях. Изучено влияние нейтральных лигандов на спектральные признаки присоединения бидентатного нитратного лиганда к центральному атому.

УДК 621.318:538.36

В. Г. Шепелевич, С. В. Гусакова, Т. А. Худницкая. **Исследование квадрупольной магнитной системы.** № 6009-В89. Деп. от 26. 09. 89 в ВИНИТИ.

Проведен расчет напряженности магнитного поля четырехполюсной магнитной системы. Рассчитаны параметры квадрупольной магнитной системы с полюсными наконечниками цилиндрического профиля. Исследована индукция магнитного поля рассматриваемой магнитной системы. Определена область постоянства градиента индукции. Рассмотрено влияние размеров магнитов и магнитной системы на величину градиента индукции магнитного поля. Магнитная система может быть положена в основу создания двухкомпонентного датчика линейного перемещения.

УДК 621.318:538.36

В. Г. Шепелевич, С. В. Гусакова. **Преобразователи линейных перемещений на основе эффекта Холла.** № 6010-В89. Деп. 26. 09. 89 в ВИНИТИ.

Предложена конструкция и проведены исследования преобразователя линейных перемещений на основе эффекта Холла, в котором изменение выходного сигнала осуществляется при перемещении постоянного магнита вдоль управляюще-концентрирующих пластин. В зазоре между пластинами расположен ДХ. Определено влияние формы и размера пластин, а также материала, габаритов и геометрии ПМ на технические характеристики преобразователя. Оптимизация параметров преобразователя позволила получить базу перемещения до 30 мм, чувствительность до 100 мВ/мм, линейность закона преобразования до 2 %.

УДК 519.21

Н. М. Зув, П. М. Лаппо. **Оценки смешанных семинвариантов, зависящие от коэффициентов  $\rho$ -перемешивания.** № 7546-В89. Деп. от 20.12.89 в ВИНИТИ.

Получены оценки смешанных семинвариантов, зависящие от коэффициентов  $\rho$ -перемешивания. Оценки семинвариантов порядка  $n$  найдены в предположении конечности  $u$  случайного процесса моментов порядка  $n + \delta$ ,  $\delta \geq 0$ .

УДК 539.1.03

А. М. Люцко, Вади Пати Хан. **Источник мягкого тормозного излучения на основе трития.** № 7483-В89. Деп. от 19. 12. 89 в ВИНИТИ.

Описан изотопный источник мягкого тормозного излучения большой интенсивности, изготовленный напылением тонкого слоя алюминия на тритиевую мишень. Наличие квантов определено радиографически в воздухе и тканезквивалентной среде. Источник может быть использован в биологических экспериментах с клеточными структурами и для исследования кристаллических решеток.

\* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, отдел распространения.

А. В. Сидоренко. **Волоконно-оптические линии передачи для радиолокационных применений.** № 880-В90. Деп. от 14. 02. 90 в ВИНИТИ.

Рассматриваются волоконно-оптические линии передачи двух типов, основанные на прямой и внешней модуляции СВЧ сигналом оптического излучения полупроводникового лазера. Особое внимание уделено вопросу обеспечения фазовой стабильности передаваемых СВЧ сигналов в волоконно-оптических линиях передачи. Приводятся ограничения на режим работы полупроводникового лазера, оптического волокна, фотоприемника на лавинном фотодиоде для обеспечения заданного среднеквадратичного фазового сдвига. В результате проведенного анализа литературных и экспериментальных данных, в том числе полученных автором, можно заключить, что в качестве элементов волоконно-оптической линии передачи с прямой модуляцией для применений в области радиолокации могут быть использованы одночастотные полупроводниковые лазеры, одномодовые волокна и фотоприемники на лавинных фотодиодах.

УДК (537+548.5):(669.75+669.76)

В. Г. Шепелевич. **Быстрозакаленные фольги полуметаллов.** № 1626-В90. Деп. от 26. 03. 90 в ВИНИТИ.

Сообщены результаты исследования структуры и кинетических свойств фольг висмута, сурьмы и сплавов на их основе, полученных сверхбыстрой закалкой из расплава. Рассмотрены зеренная структура, распределение компонентов, неравновесная растворимость легирующих элементов и формирование текстуры в быстрозакаленных фольгах. Проанализированы электрические свойства фольг полуметаллов и сплавов на их основе с учетом электрической активности легирующих элементов. Выявлены причины нестабильности быстрозакаленных фольг исследуемых материалов.

УДК (537+548.5):669.75

В. Г. Шепелевич, Зу Хен Чер. **Отжиг быстрозакаленных фольг сурьмы и сплавов сурьма — теллур.** № 1624-В90. Деп. от 26. 03. 90 в ВИНИТИ.

Представлены результаты исследования по влиянию изохронного и изотермического отжига на текстуру, параметр кристаллической решетки и дифференциальную термо-ЭДС фольг сурьмы и сплавов сурьма — теллур. Установлено, что текстура и дифференциальная термо-ЭДС фольг сурьмы не изменяются при отжиге до 380 °С. Нагрев фольг сплавов сурьма — теллур, содержащих более 1 ат. % Те, выше 140 °С вызывает распад пересыщенного твердого раствора.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12:530.145

Сокольский А. А., Белякова А. Я. Классическая модель частицы со спином и дипольными моментами в общерелятивистской теории // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

В рамках классической общерелятивистской теории вариационным путем выведены основные соотношения лагранжевой динамики для класса моделей частицы, обладающей, вообще говоря, мультипольными моментами и собственным вращением, описываемым 4-векторными характеристиками. На основе развитого общего формализма рассмотрены два варианта конкретных моделей дипольной частицы — с изменяющимся и постоянным по модулю 4-вектором спина.

Библиогр. 14 назв.

УДК 537.533.7

Москотельников А. А. Параметрическое излучение СВЧ-диапазона в периодической диэлектрической структуре // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

На основе решения дифракционной задачи теоретически рассчитаны спектрально-угловые характеристики параметрического излучения в области СВЧ. Получено выражение для интенсивности излучения электрона, пролетающего в периодической диэлектрической структуре с постоянной структуры  $d = 5$  мм и показателем преломления, удовлетворяющим условию  $n - 1 \ll 1$ .

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 620.179.153

Левкович А. Д., Муайед М. С., Перцев А. Н., Хассан Исмаил Х. Влияние обратного моттовского рассеяния на бета-спектр при прохождении через поглотитель с учетом ионизационных потерь // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Получено аналитическое выражение для описания ослабления пучка бета-частиц, проходящего через поглотитель, за счет обратного моттовского рассеяния. Результат ограничен энергиями бета-частиц в 1 МэВ и порядковыми номерами ядер поглотителя 30. Показано, что моттовская поправка изменяет функцию пропускания, обусловленную дарвин-резерфордовским рассеянием, менее чем на 1 %.

Библиогр. 6 назв., ил. 1.

УДК 535.33

За жогин А. П., Серафимович А. И., Шашков С. Н. О положении чисто электронного перехода в «свободном» ионе уранила // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Спектрально-люминесцентным методом исследована зависимость положения чисто электронного перехода (первого)  $\nu_{0-0}$  в ионе уранила от донорных свойств лигандов. Установлено экспериментальное значение  $\nu_{0-0}$  в «свободном» ионе уранила. Проведено сопоставление теоретически рассчитанного значения  $\nu_{0-0}$  с экспериментальным.

Библиогр. 20 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 541.65

Последович М. Р., Маляревич А. М., Ким Зен Хо, Слепцов Л. Е. Низкотемпературные спектры люминесценции и строение молибдатов уранила // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Проведены исследования спектров люминесценции молибдата уранила и димолибдатуранилатов калия, рубидия, цезия. Установлено наличие в этих соединениях трех центров свечения, два из которых связаны со структурно различающимися уранил-молибдатными комплексами, а третий может быть приписан дефектам кристаллической решетки, в том числе поверхностным.

Библиогр. 6 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 548.55

Ильяшук Ю. М., Федотов А. К. О природе электрической активности границ зерен в кремнии и германии с разным типом проводимости // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат.-Мех. 1990. № 3.

Предлагается новый подход к объяснению различия во влиянии типа проводимости зерен на формирование барьера на границах этих зерен в кремнии и германии. Новизна подхода основана на рассмотрении системы зерно — граница — зерно как гетероперехода.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.039

Гольцев В. П., Ходасевич В. В., Углов В. В., Кулешов А. К. Структурно-фазовые превращения в тонких пленках железа при последовательном облучении ионами азота и бора // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

С помощью электронной микроскопии исследованы фазовые и структурные изменения, происходящие в тонких пленках железа при однократной и последовательной имплантации ионов азота и бора. Последовательная имплантация приводит к формированию фазового состава, который не является простой суперпозицией фаз, образовавшихся при отдельном облучении ионами азота или бора.

Библиогр. 6 назв., 3 ил.

УДК 621.317.795; 621.383.98

Буров Л. И., Буцкий В. В., Грузинский В. В., Наумов Н. В., Терещенко А. К. Оптимизация параметров фотоприемных систем со ступенчатой регулировкой усиления // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Проведено теоретическое описание работы фотоприемной системы со ступенчатой регулировкой усиления на основе ФЭУ. Получены соотношения, позволяющие оптимальным образом выбирать параметры системы для регистрации сигналов с заданной погрешностью. Предложен критерий переключения рабочих диапазонов, обеспечивающий автоматический режим регистрации. Проведен конкретный расчет параметров для схемы с ФЭУ-84.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 621.315

Патрин А. А., Суслов В. А. Нестационарность планарного распределения фото-ЭДС в системе р-кремний — электролит // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Исследована нестационарность распределения фото-ЭДС по площади пластин р-кремния, сопутствующая долговременной релаксации локального фотоотклика. Установлено, что нестационарность распределения фото-ЭДС обусловлена различием скоростей релаксации фото-ЭДС в различных областях пластины. Отмечено ускорение релаксации и наличие кинетических изменений в распределении для областей пластины, содержащих структурные нарушения.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.315.592

Бринкевич Д. И., Нассур Ф. (САР), Петров В. В., Просолович В. С. Влияние предварительной высокотемпературной обработки и металлических геттеров на процессы генерации термодоноров в кремнии // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Методами измерения эффекта Холла и проводимости исследованы процессы накопления термодоноров (ТД) при 450 и 650 °С в Si, легированном Au, и кремнии, прошедшем высокотемпературную геттерирующую обработку. Обнаружено ускорение генерации ТД в Si: Au. Показано, что в кремнии с геттерирующими поверхностными слоями W и Yb имеет место подавление генерации ТД. Полученные результаты интерпретированы с учетом влияния технологических примесей (Au, Cu и т. д.) на процессы термического дефектообразования.

Библиогр. 7 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 519.1

Ковалев М. М., До Зуи Чинь (СРВ). Задача параметрической выпуклой дискретной оптимизации // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Излагается конструктивный подход к построению одной траектории оптимальных решений в задаче минимизации выпуклой параметрической функции на множестве целых точек обобщенного полиматроида. Рассматриваются приложения предложенного подхода к задачам с дробно-выпуклой функцией.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.71.72

Маляров А. Н., Исаченко А. Н. Логическая спецификация блокировки распределенных информационных ресурсов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

На основе рассмотрения формальной спецификации и верификации взаимодействия процессов в терминах математической логики исследуется протокол блокировки распределенного информационного фонда. Описаны критерии безопасности и живости протокола блокировки.

Библиогр. 4 назв.

УДК 65.012.122

Тихоненко О. М. Распределение суммарного объема требований в однолинейной системе с ненадежным обслуживающим прибором // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Для системы обслуживания  $M|G|1|_{\infty}$  с произвольной зависимостью времени обслуживания от длины требования и ненадежным обслуживающим прибором определяются статистические характеристики суммарного объема требований.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.24

Меленец Ю. В. Статистический анализ периодических авторегрессий // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Нестационарный случайный процесс с периодическими математическими ожиданиями и ковариациями описывается уравнением авторегрессии. Рассматриваются задачи оценивания параметров авторегрессии и восстановления пропущенных значений выборки.

Библиогр. 5 назв., табл. 1.

УДК 517.977

Забелло Л. Е. К теории инерционных управляемых систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

На основе новой, введенной автором, внутренней вариации управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков для задачи терминального управления в нелинейных системах с запаздыванием при функциональных ограничениях на управление и его производную.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977

Ле Ть и Зунг (СРВ). Оптимизация нелинейных динамических систем с управляемой структурой // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Исследована задача оптимизации динамической системы  $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u$ ,  $t \in T = [0, t^*]$ ,  $x(0) = x_0$ , с ограничением  $g(x(t^*)) = 0$  по функционалу качества  $J(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min$ . Получен опорный принцип максимума и изложена процедура доводки.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.38

Нгуен Тхань Хай (СРВ). К гипергеометрической функции двух переменных Кампе де Ферье // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Исследуется двойной гипергеометрический ряд Кампе де Ферье, который является естественным обобщением гипергеометрических рядов одной переменной Гаусса и Куммера. Для этого ряда установлены различные интегральные представления, позволяющие аналитически продолжить его за пределы области сходимости. В качестве приложения вычислены два интеграла через ряд Кампе де Ферье.

Библиогр. 5 назв.

УДК 518:517.948

Нгуен Дык Фиен (СРВ). Об одном обобщении теоремы И. П. Мысовских // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Исследуется сходимость некоторых аналогов метода Ньютона — Канторовича для уравнений с недифференцируемыми операторами. Даются оценки скорости сходимости типа известных оценок И. П. Мысовских.

Библиогр. 4 назв.

УДК 515.16

Долличанин Ч. (СФРЮ), Забрейко П. П. Матричная теория циклов плоскости Лобачевского // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Описывается аналитическое построение различных характеристик циклов в плоскости Лобачевского в классической интерпретации Пуанкаре.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.544

Бровка Н. В., Примачук Л. П. Векторно-матричная задача Римана для одного класса подстановочных матриц // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Рассматривается неоднородная задача Римана для  $n$ -мерного вектора в классе ограниченных в окрестностях концов контура функций. Построена в явном виде каноническая матрица решений исходной задачи. Рассмотрен пример.

Библиогр. 3 назв., табл. 1.

УДК 519.21

Лаппо П. М. Обнаружение многократных разладок в некоторых бинарных последовательностях // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Рассмотрена задача обнаружения многократных разладок в бинарных последовательностях специальной структуры. В случае известных параметров предложен алгоритм обнаружения разладок, минимизирующий средний штраф.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.872

Лунева Н. В. О периоде занятости системы  $M/G/1$  с гистерезисной стратегией управления // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Находится система соотношений для вычисления преобразования Лапласа — Стильтеса функции распределения периода занятости системы массового обслуживания  $M/G/1$  с гистерезисной стратегией управления.

Библиогр. 2 назв.

УДК 530.12

Шишкин Г. В., Ясин Мохамед Али (Ирак). О точном описании дираковской частицы в векторном и тензорном полях. I // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

На основе алгебраического метода разделения переменных рассматривается уравнение Дирака для частицы в присутствии векторного и тензорного полей; указаны конфигурации этих полей, допускающие полное разделение переменных в уравнении Дирака.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.916

Кононова О. А. Об изохронности центра одной системы нелинейных колебаний // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 3.

Рассматривается вопрос об изохронности центра одной системы нелинейных колебаний, для которой И. С. Куклесом найдены девять условий, когда точка  $O(0, 0)$  является центром в седьмом случае.

Библиогр. 5 назв.