

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

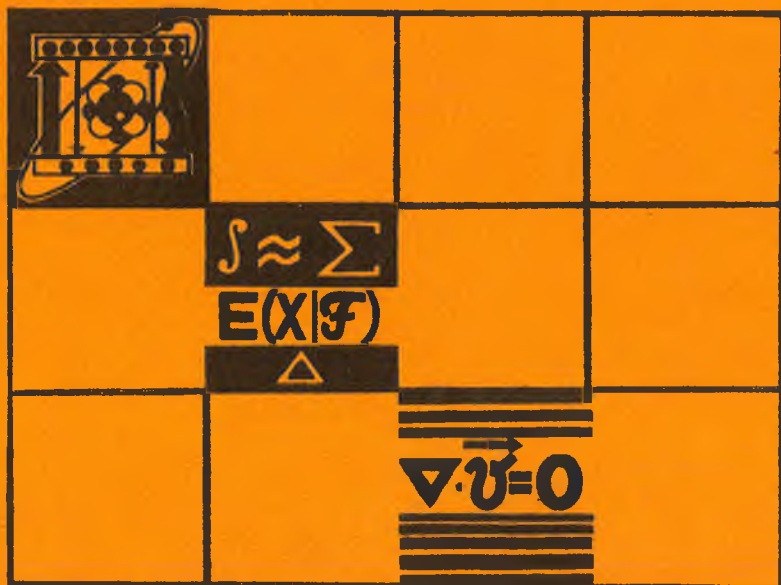
СЕРИЯ 1

Физика

Математика

Механика

2'90



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Ан Чан Мо, Толстик А. Л., Чалей А. В. Учет нелинейного поглощения при четырехволновом взаимодействии в просветляющихся средах	3
Бельский А. М., Красневская Ю. И. О происхождении темных линий в поле пучка, отраженного от волновода с утечкой	6
Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Условия формирования излучения с линейной и круговой поляризацией световозвращателем полного внутреннего отражения ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$)	9
Воропай Е. С., Горбачев С. М., Билан О. Н., Черенда Н. Г. Ультрафиолетовая люминесценция силикатных стекол	13
Ким Зен Хо, Последович М. Р., Малайевич А. М. Комбинационное рассеяние и строение безводных молибдатов уранила	17
Липницкий И. В., Скутов И. К., Липницкий В. И. Колебательные спектры и строение аквакомплексов марганца и кадмия с метилпиразолом	21
Бойков В. Н., Киреева Ю. В., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. Фазовый переход в кристаллах натрийуридилацетата	26
Кислов В. В., Шаронов Г. В. Амплитудная неустойчивость мод излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод	29
Шепелевич В. Г., Зу Хен Чер. Структура и кинетические свойства быстроохлажденных фольг сплавов сурьма-индий	31

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Кирилица В. П. Точные D- и A-оптимальные планы для линий регрессии	36
Забелло Л. Е., Янушаускайте Н. А. Решение одной комбинаторной задачи методом динамического программирования	38
Тагайназаров С. Оптимизация непрерывной системы управления в условиях неопределенности	41
Чурбанов Ю. Д. Индуцированные почти комплексные связности на Ф-пространствах и их подпространствах	44
Липницкий С. Ф. Математическая модель синтаксического анализа непроективных и слабопроективных сообщений в интеллектуальной информационной системе	48
Зубович К. А. Построение преобразователей предикатов и генерация минимальных решений линейных функциональных уравнений в системе функционального программирования	50
Буза М. К., Мощенский В. А. О мощности одного множества программ	54
Гладун О. М. О нелинейных стоячих колебаниях упругой пластины, плавающей на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины	56
Березкина Л. Л. О наилучшей рациональной аппроксимации некоторых функций, аналитических в круге единичного радиуса	58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ушаков Е. А. Томасова прецессия как движение вектора, ассоциированное с циклом, при переносе по Ферми	61
Белявский А. К., Данейко И. К. Распространение волн в неоднородном клине. Метод конформного преобразования	62
Пряхин А. Е., Минько И. Р. Наблюдение прецессии системы ядерных спинов при стационарном методе регистрации ЯМР	64
Сергеенко М. Н. К асимптотике полиномов Лежандра	66
Мощенский А. В. Регулярные булевы функции	68
Бровка Н. В. Решение одной задачи Римана для трехмерного вектора	69
Хритonenko Н. В. Управляемость гамильтониана в терминальной задаче оптимального управления	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Виталий Евгеньевич Ямный	75
Аннотации депонированных статей	76

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Механика

2 '90

МАЙ



МИНСК
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), **А. М. БЕЛЬСКИЙ** (ответственный секретарь), **Е. С. ВОРОПАЙ**, **Р. Ф. ГАБАСОВ**, **В. А. ГАЙСЕНКО**, **В. В. ГРУЗИНСКИЙ**, **Э. И. ЗВЕРОВИЧ**, **В. И. КОРЗЮК**, **Л. Н. КИВАЧ**, **Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ**, **Н. А. ЛУКАШЕВИЧ**, **Г. А. МЕДВЕДЕВ**, **В. И. МИРОНЕНКО**, **И. А. ПРУСОВ**, **В. Ф. СТЕЛЬМАХ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **А. М. ШИРОКОВ**, **С. С. ШУШКЕВИЧ**, **Н. И. ЮРЧУК**

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2

Редактор *И. П. Стрельчя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *Р. В. Кондрад*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 28.02.90. Подписано в печать 11.05.90. АТ 02053. Формат 70×108^{1/16}. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,46. Тираж 700 экз. Заказ 642. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП
Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 535.34

АН ЧАН МО, А. Л. ТОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕЙ

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ПРОСВЕТЛЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ

В настоящее время имеется ряд моделей, с разной степенью точности описывающих процесс обращения волнового фронта (ОВФ) при четырехволновом взаимодействии в резонансных средах. Первоначально распространение получило приближение заданных (неизменных в объеме среды) полей накачки, позволяющее в простых выражениях аналитически описать четырехволновое ОВФ [1—3]. Учет поглощения волн накачки обусловил необходимость рассмотрения системы дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд световых полей, решение которой находилось численными методами [4—6].

В данной работе предлагаются аналитические аппроксимации численных решений, описывающие четырехволновое ОВФ в средах с нелинейным поглощением, и на основе сравнения с точным решением задачи устанавливаются области их применимости.

Процесс формирования обращенной волны в приближении слабых сигнальной E_s и обращенной волн E_c по сравнению с полями накачки $E_{\pm}$ описывается системой укороченных волновых уравнений:

$$\partial E_{s,c} / \partial z = \pm i \frac{k_0}{2} (\psi E_{s,c} + \varphi E_{c,s}^*), \quad (1)$$

где $k_0\psi/2$ — амплитудный нелинейный коэффициент поглощения, учитывающий интерференцию встречных волн накачки; φ — коэффициент параметрической связи волн;

$$\psi = \hat{\alpha} (1 + \alpha (I_+ + I_-)) / \alpha (1 + 2\alpha (I_+ + I_-) + \alpha^2 (I_+ - I_-)^2)^{3/2}, \quad (2)$$

$$\varphi = -2\hat{\alpha} \sqrt{I_+ I_-} / (1 + 2\alpha (I_+ + I_-) + \alpha^2 (I_+ - I_-)^2)^{3/2}; \quad (3)$$

$\hat{\alpha} = \alpha + i\alpha$ — комплексный параметр нелинейности, мнимая часть которого определяет интенсивность насыщения резонансного перехода $I_{\text{нас}} = \alpha^{-1}$ [3].

В общем случае интенсивности волн накачки $I_{\pm}$ изменяются по длине среды, и система дифференциальных уравнений (1) может быть решена лишь численными методами. В приближении заданных интенсивностей накачки решение системы (1) с граничными условиями $E_s(z=0) = E_{s0}$, $E_c(z=L) = 0$ позволяет определить коэффициент отражения обращенной волны:

$$R = |E_c(z=0)/E_{s0}|^2 = |\varphi|^2 [|\text{Im} \psi + (|\varphi|^2 - (\text{Im} \psi)^2)^{1/2} \text{ctg} \{(|\varphi|^2 - (\text{Im} \psi)^2)^{1/2} k_0 L/2\}]^{-2}. \quad (4)$$

Зависимости коэффициента отражения от оптической плотности среды и интенсивности волн накачки, рассчитанные по формулам (2)—(4) при

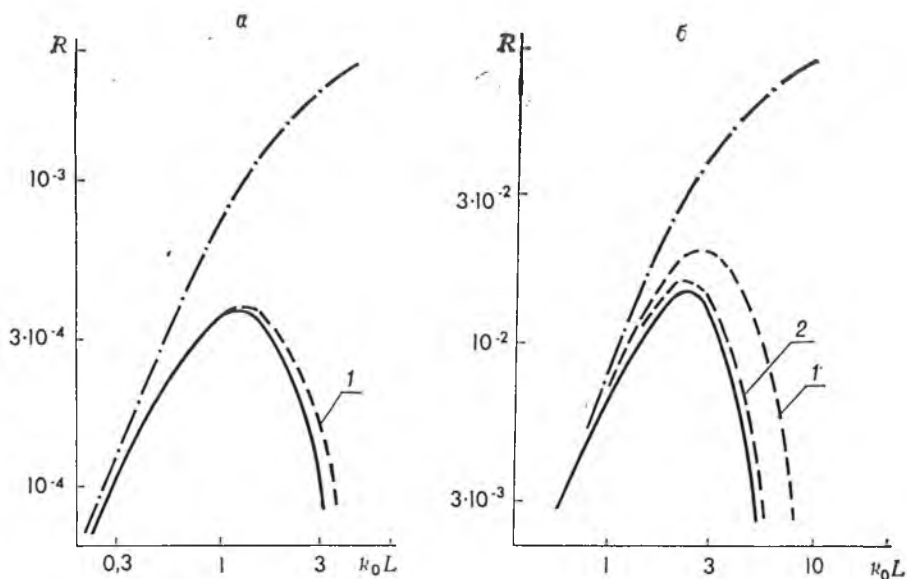


Рис. 1. Зависимости коэффициента отражения обращенной волны R от оптической плотности нелинейного слоя $k_0 L$, рассчитанные по формулам (4)–(7) в нулевом (штрих-пунктирная линия), первом (1) и втором (2) порядке приближения при интенсивности накачки $2\alpha I_0 = 0,1$ (а), 1 (б). Сплошные линии отвечают точному решению задачи

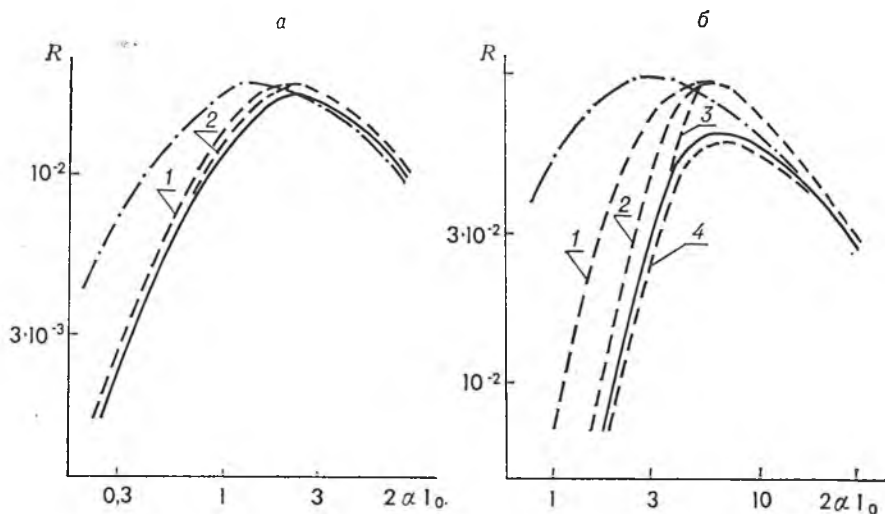


Рис. 2. Зависимости коэффициента отражения R от суммарной интенсивности волн накачки на входе в нелинейную среду $2\alpha I_0$ при оптической плотности $k_0 L = 2$ (а), 6 (б). Кривые 3 и 4 рассчитаны при использовании тройной рекуррентной подстановки (5) в формулах (6), (7) и (8), (9) соответственно. Остальные обозначения те же, что и на рис. 1

равных интенсивностях $I_+ = I_- = I_0$, изображены на рис. 1, 2 штрих-пунктирной линией. Для сравнения сплошной линией представлены зависимости коэффициента отражения, полученные на ЭВМ при решении системы дифференциальных уравнений, учитывающих нелинейное поглощение световых пучков [5, 6]. Как и следовало ожидать, отличия приближенных решений от точных наиболее существенны при интенсивностях излучения, недостаточных для просветления резонансной среды $I_0 < I_{\text{нас}}$, хотя и в этом случае приближение заданной накачки применимо при малой оптической плотности $k_0 L \leq 0,2$. Здесь и далее в качестве количественного критерия оценки допустимости использования приближения принято десятипроцентное расхождение в решениях.

С целью расширения области применимости аналитических аппроксимаций введем эффективную интенсивность волн накачки, играющую роль среднего по длине взаимодействия значения интенсивности. В предположении экспоненциального убывания полей в процессе распространения $I_+(z) = I_0 \exp(-kz)$, $I_-(z) = I_0 \exp[-k(L-z)]$ эффективная интенсивность накачки $\tilde{I} = \sqrt{I_+ I_-} = I_0 \exp(-kL/2)$, где коэффициент поглощения резонансной среды k сам зависит от интенсивности излучения $k = k_0/(1 + aI)$. Учесть указанную взаимосвязь можно, используя рекуррентное соотношение для эффективной интенсивности волн накачки, связывающее n и $n-1$ порядки приближений

$$\tilde{I}_n = I_0 \exp[-k_0 L/2 (1 + 2\alpha \tilde{I}_{n-1})]. \quad (5)$$

В качестве нулевого приближения принимается заданная интенсивность накачки I_0 . Коэффициент отражения обращенной волны для любого порядка приближения определяется выражением (4) с заменой коэффициентов нелинейного поглощения ψ (2) и параметрической связи φ (3) на их эффективные значения:

$$\psi_n = \tilde{\alpha} (1 + 2\alpha \tilde{I}_n) / \alpha (1 + 4\alpha \tilde{I}_n)^{3/2}, \quad (6)$$

$$\varphi_n = -2\alpha \tilde{I}_n / (1 + 4\alpha \tilde{I}_n)^{3/2}. \quad (7)$$

Результаты расчета коэффициента отражения обращенной волны, выполненные по формулам (4)–(7) для первого и второго порядков приближений ($n=1, 2$), иллюстрируются на рис. 1, 2 кривыми 1, 2 соответственно. Простая модернизация формул позволила не только качественно правильно описать концентрационные зависимости коэффициента отражения обращенной волны (см. рис. 1), но и расширить диапазон использования аналитических приближений до величины оптической плотности $k_0 L = 2$ при $n=1$ и $k_0 L = 4$ при $n=2$.

Дальнейшее удлинение цепочки рекуррентных подстановок не позволяет существенным образом продвинуться в область больших оптических плотностей. Как видно на примере (см. рис. 2, б) для оптической плотности $k_0 L = 6$, использование тройной рекуррентной подстановки (5) несколько улучшает поведение коэффициента отражения обращенной волны для малых интенсивностей накачки при сохранении различий в области максимальных значений коэффициента отражения (кривая 3). Такая ситуация объясняется тем, что при переходе от выражений (2), (3) к приближенным соотношениям (6), (7) при равных интенсивностях волн накачки на входе в нелинейную среду пренебрегли слагаемым $\alpha^2(I_+ - I_-)^2$, которое несущественно при малых интенсивностях накачки, но играет заметную роль в условиях сильного поглощения при интенсивностях, превышающих интенсивность насыщения резонансной среды.

Оценив среднее по длине взаимодействия значение указанного слагаемого, запишем более точные выражения для эффективных значений коэффициентов нелинейного поглощения и параметрической связи волн:

$$\psi_n = \tilde{\alpha} (1 + 2\alpha \tilde{I}_n) A^{-3/2} / \alpha, \quad \varphi_n = -2\alpha \tilde{I}_n A^{-3/2}, \quad (8) - (9)$$

где $A = 1 + 4\alpha \tilde{I}_n + 2\alpha^2 \tilde{I}_n^2 [(\exp(k_n L) - \exp(-k_n L)) / 2k_n L - 1]$, $k_n = k_0 / (1 + 2\alpha \tilde{I}_n)$. Результаты расчетов коэффициента отражения обращенной волны, выполненных по формулам (4), (8), (9), практически полностью совпадают с приведенными ранее зависимостями на рис. 1 и 2, а (кривые 1, 2). При оптической плотности $k_0 L = 6$ (см. рис. 2, б) формулы (8), (9) дают более точный результат, причем лучшее согласие с численным решением задачи имеется при использовании тройной рекуррентной подстановки (5) (кривая 4). Анализ, проведенный для различных значений интенсивности волн накачки и оптической плотности среды, показал хорошую точность указанного приближения вплоть до значений $k_0 L = 8$.

Таким образом, различной степени сложности аналитические приближения, приведенные в работе, позволяют описать численные решения задачи четырехволнового ОВФ с учетом нелинейного поглощения взаимодействующих полей в широком диапазоне оптической плотности резонансных сред ($k_0 L \leq 8$), как правило, достаточном для анализа реальных экспериментальных ситуаций.

Список литературы

1. Abrams R. S., Lind R. C. // Opt. Lett. 1978. V. 2. № 4. P. 94.
2. Апанасевич П. А., Афанасьев А. А., Жвавый С. П. // Квантовая электроника. 1980. Т. 7. № 7. С. 1572.
3. Кабанов В. В., Рубанов А. С. Там же. 1982. Т. 9. № 6. С. 1277.
4. Gown W. P. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 5. P. 629.
5. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. Лазеры и оптическая нелинейность / Под ред. П. А. Апанасевича, А. С. Рубанова. Минск, 1984. С. 54.
6. Кабанов В. В., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. Динамические голограммы и четырехволновое фазовое сопряжение в красителях. Минск, 1986. 35 с. (АН БССР. Ин-т физики. Препринт № 411).

Поступила в редакцию 30.11.89.

УДК 621.372.8 : 535

А. М. БЕЛЬСКИЙ, Ю. И. КРАСНЕВСКАЯ

О ПРОИСХОЖДЕНИИ ТЕМНЫХ ЛИНИЙ В ПОЛЕ ПУЧКА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ВОЛНОВОДА С УТЕЧКОЙ

При вводе излучения в оптический планарный волновод с помощью призмы полного отражения в поперечном сечении отраженного от основания призмы пучка наблюдаются провалы (так называемые темные m -линии) [1]. Существует хорошо разработанная теория, объясняющая появление этих линий (см., например, [2, 3]); в настоящее время они широко используются для определения оптических характеристик планарных волноводов. Вместе с тем известно [4], что такие же темные линии наблюдаются и при отражении светового пучка от поверхности квазиволновода, для которого условие полного отражения не выполняется на одной из его поверхностей. Природа этих линий недостаточно ясна, хотя формирование их происходит в более простой ситуации, так как в этом случае отсутствует зазор между основанием призмы и поверхностью волновода.

Данная работа посвящена выяснению причин появления темных линий, наблюдаемых в поперечном сечении пучка, отраженного от поверхности квазиволновода (волновода с утечкой).

Простейшей моделью квазиволновода является плоскопараллельный слой толщиной d , показатель преломления которого меньше показателя преломления одной из сред, граничащих со слоем (рис. 1). Для определенности будем считать, что $n_1 > n_2 > n_3$. Пусть на верхнюю поверхность такой структуры падает двухмерный ($\partial/\partial y = 0$) световой пучок. Ось пучка образует угол Θ_0 с нормалью к поверхности волновода; будем считать, что выполняется условие

$$\sin \Theta_0 > n_3/n_1, \quad (1)$$

так что для луча, совпадающего по направлению с осью падающего пучка, наблюдается полное отражение на нижней границе.

Поле падающего пучка удобно записать в системе координат $x_i y z_i$ (см. рис. 1); в представлении углового спектра плоских волн для электрической компоненты поля пучка имеем (для определенности предполагаем, что пучок имеет s -поляризацию):

$$E_i(x_i, z_i) = \frac{1}{2\pi} \int A(\xi) \exp \{ -ik [x_i \xi + z_i (n_1^2 - \xi^2)^{1/2}] \} d\xi, \quad (2)$$

где $A(\xi)$ — Фурье-образ поля падающего пучка в плоскости $z_i = 0$. В системе координат $x_r y z_r$ поле отраженного пучка запишется:

$$E_r = \frac{1}{2\pi} \int R(\xi) A(\xi) \exp \{ik [x_r \xi - z_r(n_1^2 - \xi^2)^{1/2}] d\xi; \quad (3)$$

здесь $R(\xi)$ — амплитудный коэффициент отражения плоской волны от рассматриваемой структуры. При выполнении условия (1) его можно представить в виде

$$R(\xi) = \frac{R_{12} + \exp(-2i\gamma)}{1 + R_{12} \exp(-2i\gamma)}, \quad (4)$$

$$\gamma = kd(n_2^2 - \rho^2)^{1/2} - \arctg \left(\frac{\rho^2 - n_3^2}{n_2^2 - \rho^2} \right)^{1/2}, \quad \rho = \xi \cos \theta_0 + \sin \theta_0 (n_1^2 - \xi^2)^{1/2}; \quad (5)$$

$R_{12}(\xi)$ — амплитудный коэффициент отражения Френеля на границе между средами 1 и 2.

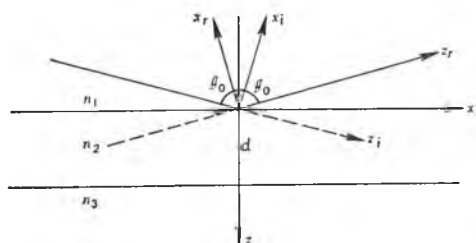


Рис. 1. Системы координат падающего и отраженного пучков для квазиволновода

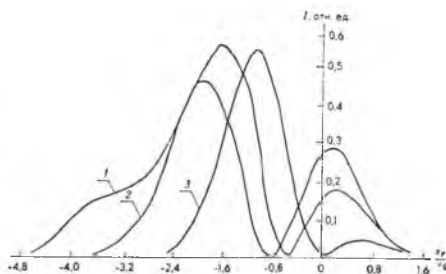


Рис. 2. Распределение интенсивности в поперечном сечении отраженного пучка
1 — $d/a_0 = 0,25$; 2 — $d/a_0 = 0,16$; 3 — $d/a_0 = 0,08$

Выражение (3) является достаточно общим и описывает поле двухмерного пучка, отраженного от произвольной плоскостростой структуры. В частности, оно определяет также и поле пучка, отраженного от основания призмы в случае призмного ввода излучения в волновод [3]. Таким образом, согласно (3), структура поля отраженного пучка полностью определяется видом функции $R(\xi)$. Для призмного ввода функция $R(\xi)$ имеет полюс для некоторого комплексного значения переменной ξ , и наличием полюса подынтегрального выражения (3) объясняется появление темных линий в отраженном пучке. В то же время очевидно, что функция (4) не имеет полюса ни в какой конечной области комплексной плоскости ξ , поэтому причина появления минимумов в распределении $|E_r(x_r)|^2$ в данном случае должна быть иной.

При исследовании поля отраженного пучка (3) удобно воспользоваться представлением поля суперпозицией полей пучков, многократно отраженных от обеих поверхностей слоя. Для перехода к такому представлению разложим в (3) коэффициент отражения $R(\xi)$ в ряд по степеням коэффициента Френеля R_{12} ; в результате получим:

$$E_r = \frac{1}{2\pi} \int A(\xi) R_{12}(\xi) \exp \{ik [x_r \xi - z_r(n_1^2 - \xi^2)^{1/2}] d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int [1 - R_{12}^2(\xi)] R_{12}^m(\xi) A(\xi) \exp \{-2i(m+1)\gamma + \\ + ik [x_r \xi - z_r(n_1^2 - \xi^2)^{1/2}] d\xi. \quad (6)$$

Из-за сложного вида функций $\gamma(\xi)$ и $R_{12}(\xi)$ вычислить в явном виде интегралы в (6) невозможно ни для каких представляющих интерес функций $A(\xi)$. Ниже ограничимся исследованием (6) для слаборасходящихся пучков, удовлетворяющих условию $ka_0 \gg 1$, где a_0 — характерный поперечный размер пучка. В этом случае функция $A(\xi)$ существенно от-

лична от нуля только для малых $|\xi|$, удовлетворяющих условию $|\xi| \leq 1/ka_0$. Поэтому основной вклад в значение интеграла будет давать область малых значений $|\xi|$, и в подынтегральных выражениях ограничимся нулевым приближением по ξ в амплитудных множителях и первым — в фазовых. Используя указанное приближение, из (6) получаем:

$$E_r = R_{12}^0 E_i(-x_r, z_r) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (1 - R_{12}^0) R_{12}^{0m} \exp[-2i(m+1)\gamma_0] E_i(-(x_r + \Delta_m), z_r), \quad (7)$$

где E_i — функция, определяющая структуру поля падающего пучка

$$R_{12}^0 \equiv R_{12}(0), \quad \gamma_0 = \gamma(0), \quad \Delta_m = -\frac{2}{k}(m+1) \cos \theta_0 \left. \frac{d\gamma}{d\rho} \right|_{\rho_0}, \quad \rho_0 = n_1 \sin \theta_0. \quad (8)$$

Выражение (7) представляет поле отраженного пучка как сумму полей пучка, непосредственно отраженного от верхней границы (первое слагаемое), и пучков, $2(m+1)$ раз ($m=0, 1, 2, \dots$) прошедших через пластинку; при этом учитывается фазовая задержка пучков (множитель $\exp[-2i(m+1)\gamma_0]$) и их пространственный сдвиг Δ_m относительно пучка, непосредственно отраженного от верхней границы. Пространственный сдвиг Δ_m равен сумме геометрооптического сдвига:

$$\Delta_m^* = (m+1) \frac{2\rho_0 d \cos \theta_0}{(n_2^2 - \rho_0^2)^{1/2}} \quad (9)$$

и продольного сдвига Госа—Хэнхен из-за полного отражения на нижней границе:

$$\Delta_m'' = \frac{2(m+1)\rho_0 \cos \theta_0}{k[(n_2^2 - \rho_0^2)(\rho_0^2 - n_3^2)]^{1/2}}. \quad (10)$$

Анализ формулы (7) позволяет так представить механизм образования темной линии в поперечном сечении отраженного пучка (предполагается, что в поперечном сечении падающего пучка такие линии отсутствуют): она появляется в результате суперпозиции пучка, отраженного от верхней границы волновода, и пучка, отраженного от нижней границы, если разность фаз колебаний поля этих пучков близка к $(2p+1)\pi$, $p=0, 1, \dots$ и они сдвинуты друг относительно друга в пространстве.

Более точно условия формирования темной линии можно сформулировать следующим образом. Прежде всего для того, чтобы интерферирующие пучки были в противофазе, должно выполняться условие

$$\gamma_0 \simeq \frac{\pi}{2}(2p+1), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Далее, пространственный сдвиг пучков относительно друг друга не должен быть малым:

$$\Delta_0 \geq a_0. \quad (12)$$

И, наконец, амплитуды интерферирующих пучков не должны сильно отличаться, т. е.

$$|R_{12}^0| \sim |1 - R_{12}^0|. \quad (13)$$

Отметим, что дисперсионное уравнение волновода с утечкой можно привести к виду $2\gamma_0 = (2p+1)\pi$ и, следовательно, условие (11) сводится к требованию, чтобы угол падения пучка θ_0 был близок к резонансному углу возбуждения моды волновода с утечкой.

В качестве примера на рис. 2 показано распределение интенсивности в поперечном сечении $z_r = 0$ отраженного пучка для структуры, изображенной на рис. 1, с параметрами $n_1=1,61$; $n_2=1,55$; $n_3=1,00$; $kd=24,41$. В этом случае $\gamma_0=\pi/2$ при $\theta_0=73^\circ,7$, т. е. $\rho_0=1,545$. Падающий пучок имел гауссов профиль интенсивности: $E_i(x_i, 0) = \exp(-x_i^2/a_0^2)$. Для всех изображенных на рис. 2 кривых условия (11) и (13) выполняются, в то

время как условие (13), которое для рассматриваемой структуры сводится к $d \geq 0,1 a_0$, не выполняется для кривой 3.

При выполнении условий (11) и (13) координата x_r^0 темной линии приближенно определяется формулой

$$x_r^{(0)} \simeq \frac{1}{2} \Delta_0 - \frac{a_0^2}{2\Delta_0} \ln \left| \frac{1 - R_{12}^{02}}{R_{12}^0} \right|.$$

В заключение отметим, что условия (11) — (13) достаточно ограничительны, так что наблюдение темных линий при отражении пучка от квазиволновода требует специального подбора параметров квазиволновода и падающего пучка.

Список литературы

1. Tien P. K., Ulrich R., Martin R. J. // Appl. Phys. Lett. 1969. V. 14. № 9. P. 291.
2. Midwinter J. E. // IEEE Journ. Quant. Electron. 1970. V. 6. № 10. P. 583.
3. Бельский А. М., Могильный В. В., Мовчан В. Б. // Опт. и спектр. 1988. Т. 65. № 6. С. 1308.

Поступила в редакцию 13.12.88.

УДК 535.514.2

С. В. ПРОЦКО, А. Д. ТИТОВ,
Б. Ю. ХАНОХ, А. П. ХАПАЛЮК

УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ И КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ СВЕТОВОЗВРАЩАТЕЛЕМ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$)

Световозвращатели (СВ) в форме трехгранных углов ($\pi/2$, $\pi/2$, π/s , где s — целые четные числа) обладают свойством возвратного отражения независимо от направления распространения падающего света [1]. Такие СВ, работающие в режиме полного внутреннего отражения (ПВО), изменяют поляризационные состояния падающего излучения и в общем случае формируют эллиптически поляризованное отраженное излучение. При использовании СВ в качестве отражательных элементов в лазерах, интерферометрах, контрольно-измерительной технике практически важно получить отраженный сигнал, поляризованный линейно или по кругу [2, 3]. Это необходимо, в частности, чтобы достичь максимальной контрастности наблюдаемой интерференционной картины [2]. Условия получения линейной и круговой поляризации света, отражаемого СВ ПВО ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$), проанализированы в [3], собственные состояния поляризации исследованы в [4]. В настоящей работе приведены результаты исследований эллипсометрических характеристик для СВ ПВО ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$), который имеет ряд преимуществ (бóльшие помехоустойчивость и надежность работы, меньшие габариты и масса и т. д.) по сравнению с обычным прямоугольным СВ ПВО [5—7].

В СВ ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$), согласно законам геометрической оптики, реализуется 10 вариантов прохождения исходного падающего пучка света. В соответствии с этим выходная апертура разделяется на 10 секторов, из них выходят пучки с различными поляризационными характеристиками. Эти характеристики математически определяются комплексными матрицами Джонса, которые получаются в результате перемножения матриц поляризующего действия отдельных граней в порядке прохождения их оптическим пучком (рис. 1). Состояние поляризации излучения, падающего на СВ в направлении $\vec{q}_1$ и отраженного $-\vec{q}_1$, описывается в правоповинтовых системах ортогональных векторов $\vec{q}_1$, $\vec{s}$, $\vec{p}$ и $-\vec{q}_1$, $-\vec{s}$, $\vec{p}$ [8].

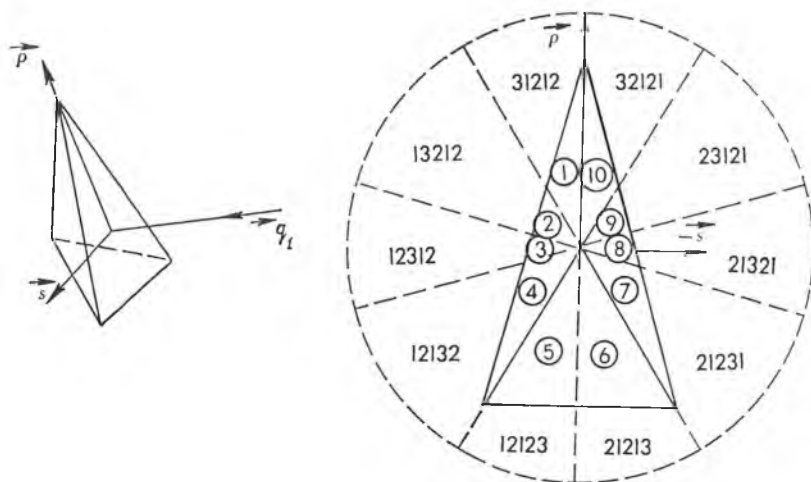


Рис. 1. Система координат и разделение фронтальной грани световозвращателя на 10 зон с различными вариантами прохождения граней

Матрицы Джонса C_{jk}^i исследуемого СВ имеют громоздкий аналитический вид. Они унитарны и их элементы удовлетворяют соотношениям

$$|c_{11}^i|^2 + |c_{21}^i|^2 = 1, |c_{12}^i|^2 + |c_{22}^i|^2 = 1, c_{11}^i c_{12}^i = -c_{21}^i c_{22}^i, \quad (1)$$

где $i=1, \dots, 10$ — номер зоны, из которой выходит отраженный пучок (цифра в кружке на рис. 1), что является необходимым условием для выполнения ПВО. В таблице приведены значения элементов матрицы Джонса:

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ k + il & m + ip \end{pmatrix} \quad (2)$$

n	c_{11}^1		c_{12}^1		c_{21}^1		c_{22}^1	
	a	b	c	d	k	l	m	p
1,361453	-0,5438	0,8316	-0,0264	0,1100	0,0264	-0,1100	0,1080	0,9877
1,40	-0,3695	-0,9231	-0,0519	-0,0934	0,0857	0,0638	-0,8660	-0,4885
1,45	0,5937	-0,7953	0,0699	-0,1007	0,0011	0,1225	-0,0427	-0,9916
1,50	0,9575	-0,2534	0,1343	-0,0321	-0,0776	0,1142	0,5760	-0,8057
1,55	0,9602	0,2346	0,1448	0,0459	-0,1315	0,0761	0,8866	-0,4369
1,60	0,7963	0,5822	0,1220	0,1096	-0,1616	0,0280	0,9840	-0,0703
1,65	0,5728	0,8009	0,0826	0,1537	-0,1734	-0,0201	0,9557	0,2369
1,70	0,3421	0,9215	0,0375	0,1798	-0,1723	-0,0638	0,8605	0,4753
1,75	0,1277	0,9731	-0,0074	0,1916	-0,1627	-0,1015	0,7337	0,6519
1,80	0,0616	0,9781	-0,0489	0,1928	-0,1480	-0,1329	0,5961	0,7779
1,85	-0,2242	0,9527	-0,0856	0,1865	-0,1302	-0,1586	0,4590	0,8644
1,90	-0,3613	0,9083	-0,1174	0,1757	-0,1110	-0,1792	0,3286	0,9206
1,95	-0,4759	0,8526	-0,1442	0,1606	-0,0914	-0,1956	0,2077	0,9541
2,00	-0,5709	0,7909	-0,1669	0,1442	-0,0719	-0,2083	0,0974	0,9705

для пучка, выходящего из 1-й зоны выходной апертуры (вариант прохождения граней 31212) в зависимости от показателя преломления n при распространении падающего пучка в направлении главной оптической оси:

$$\vec{q}_1 = (5 - 2\sqrt{2})^{-1/2} \{1, \sqrt{2} - 1, 1\}. \quad (3)$$

В этом случае падающий пучок образует равные углы с ребрами двугранных углов СВ и при равенстве длин ребер перпендикулярен к фронтальной грани. В каждом из 10 вариантов прохождения падающий пучок по два раза отражается от боковых граней 1 и 2 и один раз от грани 3. В каждом из вариантов прохождения реализуются только два угла падения на боковые грани: $\varphi_1 = 47,265790^\circ$ и $\varphi_2 = 73,675050^\circ$. Причем трижды отражение происходит под углом φ_1 и дважды — φ_2 . Отражение под углом φ_1 определяет в соответствии с формулой $\cos \varphi_1 \leq \sqrt{n^2 - 1/n}$ минимальный показатель преломления, при котором возможно ПВО:

$$n_{\min} = \sqrt{6 + \sqrt{2}}/2 = 1,361453. \quad (4)$$

Исследования показали, что при любом ином, чем (3), направлении падения исходной волны ПВО возможно только при больших, чем (4), показателях преломления. Поэтому направление (3) является главной оптической осью СВ ($\pi/2, \pi/2, \pi/4$) в режиме ПВО. Отметим, что в прямоугольном СВ ПВО при распространении вдоль оптической оси реализуется только один угол падения на боковые грани $\varphi = 54,7356^\circ$, что приводит к $n_{\min} = \sqrt{3}/2 = 1,224745$.

Вектор Джонса, описывающий поляризационное состояние выходного эллиптически поляризованного пучка, соответствующего данному способу переотражения, имеет вид

$$\begin{bmatrix} E_s e^{i\delta} \\ E_p \end{bmatrix} = C_{jk}^i \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где α — азимут поляризации входного линейно-поляризованного света; E_s и E_p — s - и p -ортогональные компоненты напряженности электрического выходного излучения; δ — сдвиг фазы между ними:

$$\delta = \arctg \frac{(b + d \operatorname{tg} \alpha)(k + m \operatorname{tg} \alpha) - (a + c \operatorname{tg} \alpha)(l + p \operatorname{tg} \alpha)}{(a + c \operatorname{tg} \alpha)(k + m \operatorname{tg} \alpha) + (b + d \operatorname{tg} \alpha)(l + p \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (6)$$

Линейная поляризация отраженной волны получается, если $\delta = 0$, что приводит к соотношению

$$(b + d \operatorname{tg} \alpha)(k + m \operatorname{tg} \alpha) = (a + c \operatorname{tg} \alpha)(l + p \operatorname{tg} \alpha). \quad (7)$$

При этом формируется линейно-поляризованная отраженная волна с азимутом поляризации

$$\psi = \arctg \left(\frac{a + c \operatorname{tg} \alpha}{k + m \operatorname{tg} \alpha} \right) = \arctg \left(\frac{b + d \operatorname{tg} \alpha}{l + p \operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (8)$$

Зависимости (7), (8) $\alpha = \alpha(n)$ и $\psi = \psi(n)$ показаны на рис. 2, а (кривые 1, 2 соответствуют варианту прохождения падающего пучка 31212, кривые 3, 4 — 12312).

Для получения отраженного света с круговой поляризацией необходимо выполнение условий:

$$\begin{aligned} (a + c \operatorname{tg} \alpha)(k + m \operatorname{tg} \alpha) + (b + d \operatorname{tg} \alpha)(l + p \operatorname{tg} \alpha) &= 0, \\ (a + c \operatorname{tg} \alpha)^2 + (b + d \operatorname{tg} \alpha)^2 &= (k + m \operatorname{tg} \alpha)^2 + (l + p \operatorname{tg} \alpha)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где первое уравнение определяет для заданного показателя такие азимуты поляризации падающего света, при которых разность фаз между ортогональными компонентами электрического вектора отраженной волны $\delta = \pi/2$ (кривые 1, 3 на рис. 2, б), а второе — при которых ортогональные компоненты электрического вектора отраженной волны равны по абсолютной величине $|E_s| = |E_p|$ (кривые 2, 4 на рис. 2, б). Система (9) разрешима относительно $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a \mp l}{c \mp p} = -\frac{k \pm b}{m \pm d}. \quad (10)$$

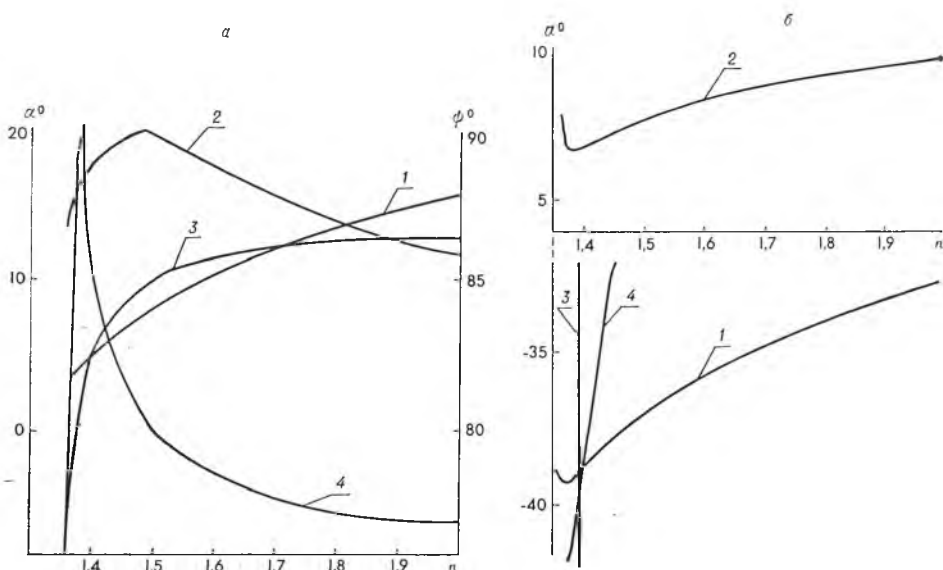


Рис. 2. Зависимости α и ψ от n при преобразовании линейно-поляризованной волны в линейно-поляризованную (а) и α от n при преобразовании линейно-поляризованной волны в волну с круговой поляризацией (б)

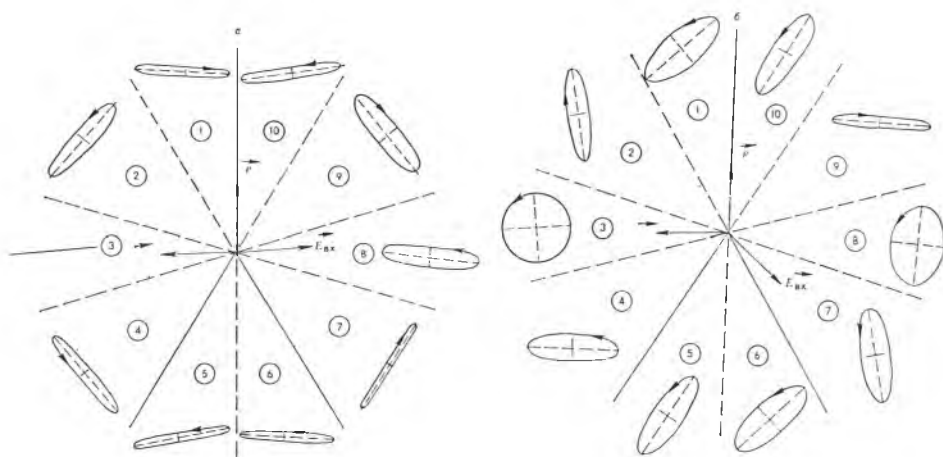


Рис. 3. Взаимная ориентация эллипсов поляризации отраженного излучения при $n = 1,399465$: пучок, выходящий из 3-й зоны, линейно поляризован (а) и циркулярно поляризован (б)

Второе равенство в (10) выражает необходимое условие, накладываемое на величину показателя преломления, при котором падающий линейно-поляризованный свет преобразуется в циркулярно-поляризованный. Из рис. 2, б видно, что система (9) не имеет решения для варианта прохождения пучка 31212, а для варианта прохождения 12312 имеет единственное решение при $n = 1,399465$ и $\alpha = -39,746792^\circ$.

В СВ ПВО ($\pi/2, \pi/2, \pi/2$) при падении линейно-поляризованного света в направлении оптической оси все 6 отраженных пучков поляризованы по кругу при показателе преломления $n = 1,767476$. Однако при этом для каждой циркулярно-поляризованной отраженной волны требуется линейно-поляризованная падающая волна со своим, отличным от других, азимутом поляризации. Для СВ ПВО ($\pi/2, \pi/2, \pi/4$) не существует такого показателя преломления, когда все 10 отраженных пучков поляризованы по кругу. Возможна циркулярная поляризация только двух отраженных

пучков при $n=1,399465$ и разных азимутах поляризации падающего линейно-поляризованного пучка (для варианта 21321 $\alpha=39,746792^\circ$). На рис. 3 показана взаимная ориентация эллипсов поляризации отраженных пучков всех вариантов прохождения при $n=1,399465$ для $\alpha=5,253202^\circ$ (см. рис. 3, а) и $\alpha=-39,746792^\circ$ (см. рис. 3, б). В первом случае пучок, выходящий из 3-й зоны (вариант прохождения 12312), поляризован линейно, во втором — циркулярно.

Список литературы

1. Процко С. В., Хапалюк А. П. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 9. С. 797.
2. Голография — методы и аппаратура / Под ред. В. М. Гинзбурга и Б. М. Степанова. М., 1974.
3. Бондаренко И. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1976. № 3. С. 66.
4. Барковский Л. М., Борздов А. Н., Борздов Г. Н., Камач Ю. Э. Овчинников В. М. // ОМП. 1985. № 6. С. 23.
5. Корнейчик В. В., Процко С. В., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Угловой отражатель: А. с. СССР № 1332422 // БИ. 1987. № 31.
6. Процко С. В., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. // Изв. вузов СССР: Приборостроение. 1987. Т. 30. № 1. С. 65.
7. Процко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Там же. 1988. Т. 31. № 6. С. 62.
8. Коротаев В. В., Панков Э. Д. // ОМП. 1981. № 1. С. 9.

Поступила в редакцию 31.10.88.

УДК 666.22 : 535.37

Е. С. ВОРОПАЙ, С. М. ГОРБАЧЕВ,
О. Н. БИЛАН, Н. Г. ЧЕРЕНДА

УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

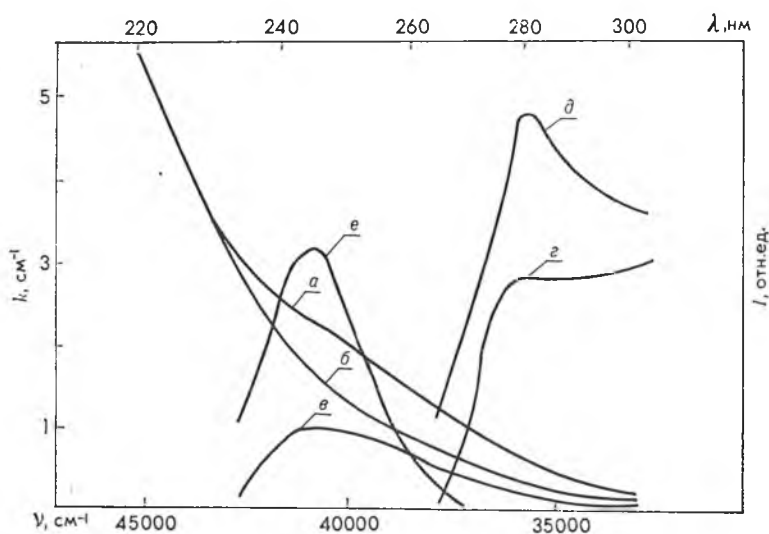
Спектральные характеристики силикатных стекол, наиболее распространенного оптического материала, зависят от примесей и дефектов, присутствующих в исходном материале или возникающих в результате внешних воздействий [1—4]. Основной составной частью силикатных стекол является двуокись кремния, и благодаря определенным успехам в исследовании стеклообразного диоксида кремния (кварцевого стекла) [5] появилась возможность изучения природы и строения центров поглощения и люминесценции силикатных стекол. Знание природы и строения этих центров необходимо для создания как люминесцирующих, так и нелюминесцирующих стеклообразных матриц. Различные виды люминесценции стекол описаны в [4].

Край поглощения простых щелочно-силикатных стекол в ультрафиолетовой области представляет собой суперпозицию края собственного поглощения матрицы и поглощения примесей [1]. Край собственного поглощения основы описывается правилом Урбаха [6]:

$$K(\nu) = K_0 \exp \left[- \frac{\sigma (h\nu_0 - h\nu)}{kT} \right], \quad (1)$$

где K_0 , ν_0 и σ — контакты, характеризующие данную матрицу. Предполагается [2], что длинноволновой край собственного поглощения стекла (170—220 нм) соответствует электронным переходам между уровнями L -центра ($\equiv \text{Si}-\text{O}-\text{Me}^+$, где Me — щелочной металл). При возбуждении данного центра наблюдается люминесценция в области 300—400 нм в зависимости от типа катиона. Что же касается более длинноволнового поглощения (220—300 нм), то оно практически не изучалось. В работах [1—3] предполагалось, что это поглощение обусловлено в основном присутствием технологических примесей железа, а именно: трехвалентными ионами Fe^{3+} .

С целью выяснения особенностей природы дефектных центров, ответственных за поглощение в области 220—300 нм, нами проведены спектрально-люминесцентные и поляризационные исследования особо чистого высококремнеземного стекла состава $93\text{SiO}_2 \cdot 7\text{K}_2\text{O}$ и промышленных силикатных стекол марок ЛК-5 и К-8. Содержание примесей переходных элементов в калиево-силикатном стекле не превышало $5 \cdot 10^{-4}$ мол. %. Толщина полированных образцов варьировала в пределах 0,3—1 мм. Спектры поглощения стекол измерялись на спектрофотометрах Spesord M40 и СФ-26. Спектры люминесценции и возбуждения люминесценции регистрировались на установке Spex-Fluorolog в режиме счета фотонов с автоматической коррекцией на спектральную чувствительность прибора. Поскольку интенсивность свечения очень слабая, измерения спектрально-люминесцентных параметров проводились в режиме многократного сканирования спектра и накопления данных с использованием ЭВМ Techtronix. Регистрация излучения осуществлялась по схеме с «передней грани», т. е. с той же грани, на которую направлялся поток возбуждающего света необходимого спектрального интервала от ксеноновой лампы мощностью 450 Вт. Образцы стекол помещались в азотный криостат, температура в котором изменялась в пределах 77—300 К.



Спектры калиевосиликатного стекла:

a — наблюдаемый спектр поглощения; *b* — край собственного поглощения, аппроксимированный по правилу Урбаха; *v* — разностный спектр поглощения между кривыми *a* и *b*; *e*, *d* — наблюдаемый и рассчитанный спектры люминесценции соответственно; *e* — спектр возбуждения полосы люминесценции 280 нм

На рисунке приведен спектр поглощения калиево-силикатного стекла в области 220—300 нм (кривая *a*). Считая, что край собственного поглощения стекла описывается формулой (1), мы экстраполировали часть спектра экспоненциальной зависимостью коэффициента поглощения от волнового числа (кривая *b*). Вычитая эту кривую из экспериментальной, получаем полосу поглощения (кривая *v*), которую многие авторы связывают с присутствием технологических примесей, главным образом железа. Однако такая интерпретация указанной полосы поглощения, по нашему мнению, неоднозначна, поскольку содержание примесей мало и определенный вклад могут вносить дефектные центры структурной сетки стекла, по аналогии с кварцевыми стеклами, например, дефекты типа кислородной вакансии $\equiv\text{Si} - \text{Si} \equiv$ [7] и др. Для проверки этого предположения мы исследовали спектрально-люминесцентные характеристики стекол при освещении их излучением с длиной волны, соответствующей полученной полосе поглощения. При 77 К у всех исследованных

стекло наблюдается свечение с максимумом в области 280 нм. У силикатных стекол в ультрафиолетовой части спектра имеет место существенная зависимость коэффициента поглощения от частоты. Истинный спектр излучения, регистрируемый от всего объема образца, претерпевает поэтому искажения, связанные с эффектом «внутреннего фильтра», т. е. перепоглощением света образцом. Для определения истинного спектра излучения нами проводился учет этого перепоглощения. При переходе от наблюдаемого спектра излучения к истинному использовали следующую формулу:

$$I_{\text{ист}}(\nu) = I_{\text{набл}}(\nu) \frac{K_{\text{в}}(\nu) + K_{\text{л}}(\nu)}{1 - \exp \{ - [K_{\text{в}}(\nu) + K_{\text{л}}(\nu)] d \}}, \quad (2)$$

где $K_{\text{в}}(\nu)$ и $K_{\text{л}}(\nu)$ — коэффициенты поглощения стекла, зависящие от волновых чисел возбуждения и люминесценции соответственно; d — толщина стекла. Рассчитанный таким образом истинный спектр излучения приведен на кривой δ . Максимум полосы свечения находится у 280 нм. Спектр возбуждения люминесценции состоит из одной полосы с максимумом 246 нм (кривая ϵ).

Исследование анизотропии излучения щелочно-силикатного стекла показало, что при возбуждении линейно-поляризованным светом люминесценция, регистрируемая перпендикулярно к падающему потоку, частично поляризована, а степень поляризации равна +17 %. С повышением температуры до комнатной интенсивность свечения монотонно уменьшается. Обнаруженная анизотропия испускания и характер температурной зависимости интенсивности полосы люминесценции указывают на внутрицентральный характер излучения, т. е. оно обусловлено переходами между локальными электронными уровнями, принадлежащими одному центру свечения.

При облучении гамма-лучами силикатных стекол относительно малыми дозами $10^4 - 10^5$ Р наблюдаемая интенсивность люминесценции $I_{\text{набл}}^{\gamma}(\nu)$ уменьшается. При этом происходит увеличение коэффициентов поглощения стекла в широком спектральном диапазоне за счет наведенного радиацией поглощения, т. е. значения $K_{\text{в}}^{\gamma}(\nu)$ и $K_{\text{л}}^{\gamma}(\nu)$ для облученных стекол на определенной частоте больше, чем значения $K_{\text{в}}(\nu)$ и $K_{\text{л}}(\nu)$, характерные для исходных необлученных образцов. Подставляя значения параметров $I_{\text{набл}}^{\gamma}(\nu)$, $K_{\text{в}}^{\gamma}(\nu)$ и $K_{\text{л}}^{\gamma}(\nu)$ в формулу (2), видим, что истинная интенсивность люминесценции облученных стекол $I_{\text{ист}}^{\gamma}(\nu)$ растет по сравнению с люминесценцией исходных образцов. При увеличении дозы облучения до $5 \cdot 10^5$ Р нам не удалось зарегистрировать излучения в области 270 — 300 нм, что, вероятно, связано с полным поглощением света в образце (очень высокие $K_{\text{в}}^{\gamma}(\nu)$ и $K_{\text{л}}^{\gamma}(\nu)$).

Спектральное расположение полос поглощения, люминесценции и возбуждения люминесценции, значение степени поляризации полосы излучения и характер температурной зависимости интенсивности люминесценции щелочно-силикатного стекла хорошо коррелируют с соответствующими параметрами полос люминесценции и поглощения (возбуждения) кварцевых стекол [5, 7, 8]. В этих стеклах излучение с максимумом 280 нм и полоса возбуждения 248 нм приписываются одному центру, связанному с дефектом структуры. Данный центр находится в особо чистых кварцевых стеклах при облучении быстрыми нейтронами. Относительно природы этого центра высказывалось несколько точек зрения. Одни авторы связывают его с кислородной вакансией типа $\equiv\text{Si} - \text{Si} \equiv$ в сетке стекла [7], другие приписывают соответствующие полосы излучения и возбуждения связанному ионизированному атому кремния $\equiv\text{Si}^{\bullet}$ [9] и т. д. Нами путем спектрально-люминесцентного исследования кварцевых стекол с дефицитом кислорода показано ранее [10], что полоса люминесценции 280 нм обусловлена кислородными вакансиями типа $\equiv\text{Si} - \text{Si} \equiv$. Общим для всех моделей является то, что данный

центр обусловлен нарушениями структуры стекла и не связан с наличием каких-либо примесей. В структурной сетке щелочно-силикатного стекла, как и кварцевого, преобладают кремний-кислородные тетраэдры [11] и отмечен дефицит кислорода. Разумно предположить поэтому, что в случае высококремнеземных силикатных стекол будут иметь место дефекты структуры, связанные с атомами кремния (в том числе кислородные вакансии), аналогичные дефектам в кварцевых стеклах.

Для промышленных силикатных стекол марок ЛК-5 и К-8 также наблюдается слабая полоса излучения с максимумом 280 нм (возбуждение 248 нм). По-видимому, спектральное проявление дефектов, ответственных за соответствующие полосы люминесценции и возбуждения, не зависит от состава стекла. Это может быть связано с тем, что поглощение и люминесценция обусловлены внутрицентровыми процессами и слабо подвержены влиянию окружения. На внутрицентровый характер поглощения и излучения, характеризующих один электронный переход в дефектном центре промышленных силикатных стекол, указывает относительно высокая степень поляризации излучения. О слабом взаимодействии дефектных центров с окружением свидетельствует и сравнительно небольшой стоксов сдвиг поглощения и излучения. Однако спектры поглощения промышленных стекол имеют несколько более сложный характер, чем стекол $93\text{SiO}_2 \cdot 7\text{K}_2\text{O}$. Это, по-видимому, происходит вследствие большего содержания технологических примесей, главным образом ионов Fe^{3+} , которые вносят вклад в спектр поглощения.

Таким образом, можно сделать вывод, что поглощение силикатных стекол в спектральной области 220—300 нм может быть обусловлено как примесными (железо), так и собственными дефектами матрицы стекла типа $\equiv\text{Si} - \text{Si} \equiv$. В литературе отсутствуют сведения о люминесценции железа в данной области. Это связано с тем, что переходы внутри внешней *d*-оболочки ионов железа запрещены. К тому же при облучении стекол образуются свободные электроны, что может приводить к восстановлению ионов Fe^{3+} [12], т. е. их содержание в стекле будет уменьшаться. Однако интенсивность свечения, как указывалось выше, возрастает. Наличие полосы возбуждения 246 нм свидетельствует о том, что в поглощении имеет место суперпозиция спектральных свойств нескольких типов центров стекла как собственных, так и примесных. Первые обуславливают люминесценцию стекол с максимумом 280 нм, для вторых переходы с излучением запрещены. Из сказанного становится понятным, что для увеличения пропускания силикатных стекол в ультрафиолетовой области спектра недостаточно высокой чистоты исходных материалов при синтезе: это уменьшает только содержание технологических примесей. Необходимо также использовать такую технологию приготовления стекол, при которой получаемые образцы имеют минимальный дефицит кислорода, т. е. концентрация дефектов типа кислородной вакансии небольшая.

Список литературы

1. Глебов Л. Б., Попова Л. Б., Толстой М. Н. // Оптико-механич. пром. 1975. № 4. С. 38.
2. Truchin A. N., Tolstoi M. N., Glebov L. B., Savelev V. L. // Phys. Stat. Sol. (b). 1980. V. 99. N 1. P. 155.
3. Арбузов В. И., Витол И. К., Грабовский В. Я., Толстой М. Н. // Физ. Хим. Стекла. 1985. Т. 11. № 6. С. 666.
4. Бреховских С. М. Основы радиационного материаловедения стекла и керамики. М., 1971.
5. Силин А. Р., Трухин А. Н. Точечные дефекты и элементарные возбуждения в кристаллическом и стеклообразном SiO_2 . Рига, 1985.
6. Urbach F. // Phys. Rev. 1953. V. 11. N 3. P. 1324.
7. Амосов А. В., Халилов В. Х., Хитомченко В. С. и др. // ЖПС. 1976. Т. 25. № 6. С. 817.
8. Воропай Е. С., Горбачев С. М., Козлов И. Н., Черенда Н. Г. // ЖПС. 1985. Т. 43. № 2. С. 213.
9. Санаев Б., Икрамов Г. И., Усманова С. Х. // Физ. Хим. Стекла. 1977. Т. 3. № 4. С. 376.

10. Bilan O. N., Cherenda N. G., Gorbachev S. M. et. al. // Radiation Effects. 1988. V. 105. N 3/4. P. 167.
11. Hass M. // Journ. Phys. Chem. Solids. 1970. V. 31. N 3. P. 417.
12. Глебов Л. Б., Попова Л. Б., Толстой М. Н. // Физ. Хим. Стекла. 1975. Т. 1. № 1. С. 87.

Поступила в редакцию 28.07.88.

УДК 535.33

КИМ ЗЕН ХО, М. Р. ПОСЛЕДОВИЧ, А. М. МАЛЯРЕВИЧ

КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ И СТРОЕНИЕ БЕЗВОДНЫХ МОЛИБДАТОВ УРАНИЛА

Исследование свойств и строения молибдатоуранилатов щелочных металлов методами колебательной и электронной спектроскопии проведено в работах [1—3]. Однако приведенных в них данных недостаточно для детального изучения процессов взаимодействия молибдатогрупп с ионами уранила. Совершенно не исследовано влияние вторичных катионов на свойства и строение этого класса веществ. Решение этих вопросов невозможно без детальной интерпретации спектральных линий, проявляющихся в колебательных и электронно-колебательных спектрах этих соединений.

В данной работе проведены исследования спектров комбинационного рассеяния кристаллических порошков димолибдатоуранилатов калия, рубидия и цезия. В качестве модельного соединения использовался молибдат калия. Спектры регистрировались на спектрофотометре Spex-Ramalog.

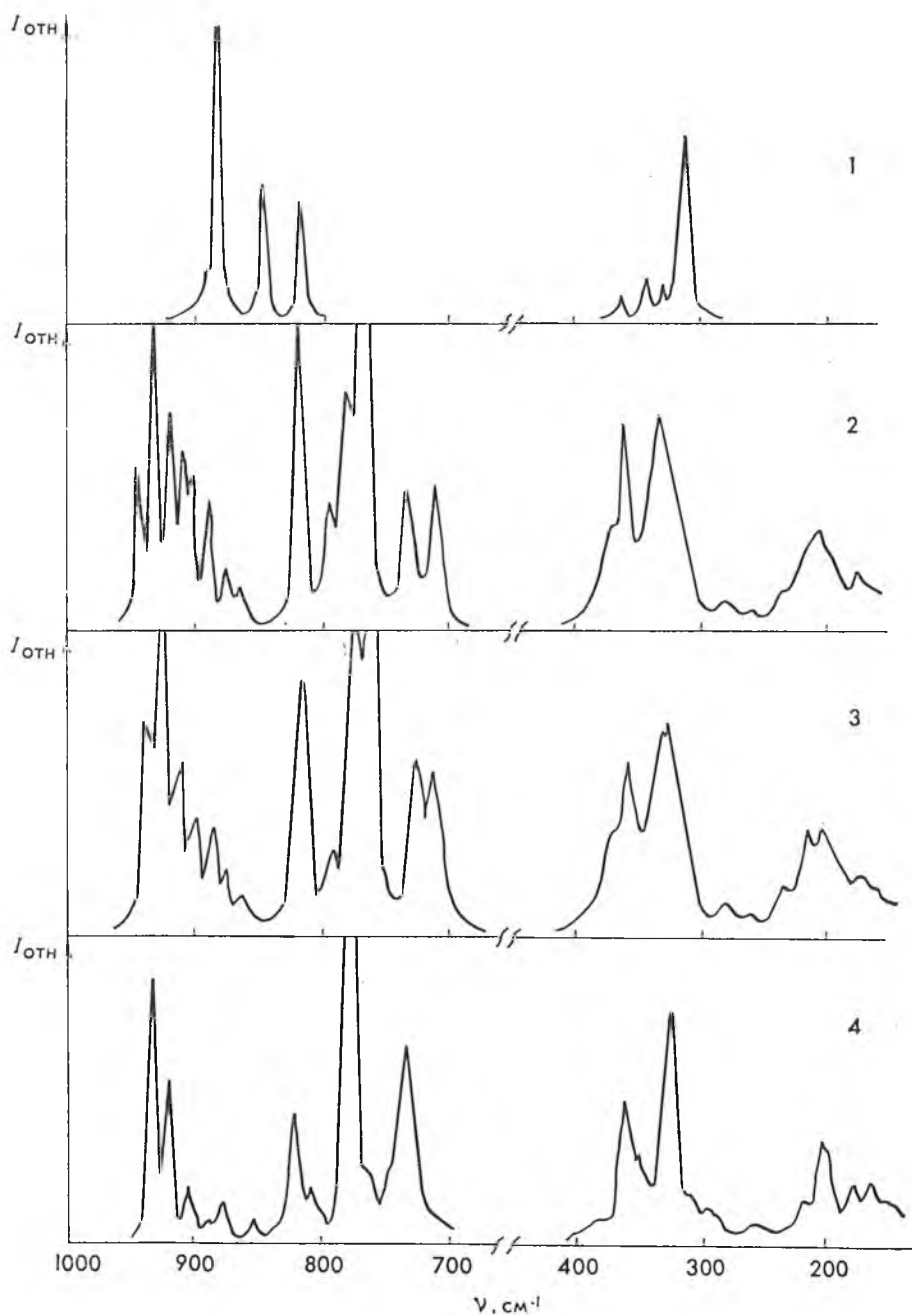
Комбинационное рассеяние возбуждалось линией 647 нм криптонового лазера. Мощность возбуждающего пучка ~ 300 мВт. Регистрация спектров производилась в режиме счета фотонов. Спектральная ширина щели равнялась 4 см^{-1} .

Полученные спектры изображены на рисунке, значение колебательных частот и их отнесение приведены в таблице.

Спектры комбинационного рассеяния димолибдатоуранилатов калия, рубидия и цезия имеют богатую структуру при сравнительно простом химическом составе. Проведенные в работе [3] рентгеноструктурные исследования димолибдатоуранилата калия позволили установить, что в структуре этого кристалла имеются два кристаллографически неэквивалентных иона уранила, к каждому из которых монодентатно координируют пять молибдатогрупп. Ионы нелинейны и несимметричны. Сравнение спектрально-люминесцентных данных с приведенным на рисунке спектром КР $\text{K}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$ позволило отнести две сильно различающиеся по интенсивности линии 762 и 777 см^{-1} к полносимметричным колебаниям неэквивалентных ионов уранила. Длины связей U—O этих ионов отличаются незначительно и не могут служить, по-видимому, критерием отнесения обсуждаемых полос к одному из двух ионов UO_2^{2+} . Но для одной из ураниловых групп угол между связями O—U—O отличается от 180° на $0,8^\circ$ (UO_2^{2+} — I), для другой — на $2,3^\circ$ (UO_2^{2+} — II), т. е. первая из ураниловых групп ближе к линейной, чем вторая. Кроме того, наблюдаются различия и в координационном окружении этих групп. Связи, которые образуют координированные к урану атомы кислорода молибдатных групп в случае UO_2^{2+} — I, располагаются как выше, так и ниже плоскости, перпендикулярной к короткой связи уран — кислород группы уранила; в случае UO_2^{2+} — II все связи уран — лиганд ниже аналогичной плоскости. Таким образом, для UO_2^{2+} — I обе ураниловые связи уран — кислород находятся в одинаковых условиях воздействия координационного окружения, для группы UO_2^{2+} — II короткая связь уран — кислород подвержена большему воздействию координационного окружения.

Таким образом, учитывая особенности строения, первую группу уранила можно считать более симметричной и отнести самую интенсивную линию спектра КР 762 см^{-1} к полносимметричному колебанию $\nu_1\text{UO}_2^{2+}$ — I, а 777 см^{-1} — $\nu_1\text{UO}_2^{2+}$ — II.

Исследование спектра $\text{K}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$ дает возможность установить, что в комбинационном рассеянии не проявляются деформационные (240 см^{-1}) и антисимметричные валентные (888 см^{-1}) колебания иона уранила. Аналогичные результаты получены и для других соединений.



Спектры комбинационного рассеяния кристаллических порошков K_2MoO_4 (1), $\text{K}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$ (2), $\text{Rb}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$ (3), $\text{Cs}_2\text{UO}_2(\text{MoO}_4)_2$ (4)

Частоты колебаний (см⁻¹) молибдатов уранила и их отнесение

K ₂ MoO ₄	K ₂ UO ₂ (MoO ₄) ₂	Rb ₂ UO ₂ (MoO ₄) ₂	Cs ₂ UO ₂ (MoO ₄) ₂	Отнесение
	204 ср. ш.	203 ср. ш.	201 ср. ш.	$\nu_2(A_1) + \nu_2(A_2)$ II
	216 сл.	212 сл.	217 сл.	$\nu_4(B_2)$ II
	234 сл.	231 сл.		$\nu_4(B_1)$ II
	258 сл.	260 сл.	258 сл.	$\nu_4(A_1)$ II
	281 сл.	279 сл.	295 сл.	$\nu_2(E)$ III
	312 сл.	312 сл.	312 сл.	$\nu_4(F)$ III
313 ср. ш.	331 ср. ш.	324 ср. ш.	327 ср. ш.	$\nu_2(A_1) + \nu_2(A_2)$ I
331 сл.		334 сл.	350 сл.	$\nu_4(B_2)$ I
341 сл.	360 ср.	356 ср.	360 ср.	$\nu_4(B_1)$ I
363 сл.	370 сл.	370 сл.	379 сл.	$\nu_4(A_1)$ I
818 ср.	709 ср.	712 ср.	729 ср.	$\nu_3(A_1)$ I
848 ср.	732 ср.	725 ср.	740 о. сл.	$\nu_3(B_1)$ I
	765 о. с.	762 о. с.	772 о. с.	$\nu_1\text{UO}_2^{2+}$ I
	777 ср.	772 ср.	781 сл.	$\nu_1\text{UO}_2^{2+}$ II
	793 ср.	788 ср.	805 ср.	$\nu_3(B_2)$ I
894 с.	819 с.	813 с.	817 с.	$\nu_1(A_1)$ I
885 сл.	866 сл.	860 сл.	849 сл.	$\nu_3(A_1)$ III
	876 сл. }			
	903 сл. }	873 сл.		$\nu_3(E)$ III
	891 ср.	884 ср.	875 ср.	$\nu_1(A_1)$ III
	910 ср.	897 ср.	888 ср.	$\nu_3(A_1)$ II
	920 ср.	909 ср.	900 ср.	$\nu_3(B_1)$ II
	933 с.	924 с.	929 с.	$\nu_1(A_1)$ II
	945 ср.	933 ср.	916 ср.	$\nu_3(B_2)$ II

Примечания. Приняты следующие обозначения интенсивности полос: ср. ш. — средняя широкая, сл. — слабая, с. — сильная, о. с. — очень сильная.

Цифрами I, II, III обозначены кристаллографически неэквивалентные молибдатогруппы.

В области валентных колебаний молибдатных групп спектры КР исследованных соединений содержат большое число линий, что может свидетельствовать о наличии нескольких молибдатогрупп низкой симметрии. Согласно рентгеноструктурным исследованиям K₂UO₂(MoO₄)₂ [3], из пяти координированных к иону уранила молибдатных групп четыре являются кристаллографически независимыми. Две из них — тридентатно- и две бидентатно-мостиковые с локальной симметрией C_{3v} и C_{2v} соответственно. Среднее расстояние Mo—O до кислородов, участвующих в образовании мостиковых связей с ураном, равно 0,1785 нм и превышает расстояние 0,1708 нм до атомов кислорода, связанных с ионами калия. Вследствие этого в одной из молибдатных групп (MoO₄²⁻ — I) внутриионные связи будут сильно ослаблены вследствие образования трех внешних связей с ионами уранила. В бидентатно координированной группе MoO₄²⁻ — II внутриионные связи будут менее ослаблены. Эти структурные особенности дают возможность предположить, что валентные колебания групп MoO₄²⁻ — I будут больше смещены в низкочастотную область спектра, чем валентные колебания MoO₄²⁻ — II. Исходя из этих предположений можно провести интерпретацию спектров КР молибдатов уранила.

В спектрах всех исследованных веществ в высокочастотной области спектра наблюдаются две интенсивные линии, которые по аналогии с наиболее интенсивной линией в спектре K_2MoO_4 могут быть отнесены к полносимметричным колебаниям $\nu_1(A_1)$ молибдатных групп. В спектре комбинационного рассеяния $K_2UO_2(MoO_4)_2$ интенсивную полосу 933 см^{-1} можно отнести к колебанию $\nu_1(A_1)$ бидентатно координированной группы MoO_4^{2-} —II. Низкая симметрия молибдатных групп приводит к снятию вырождения с трижды вырожденных антисимметричных колебаний $\nu_3(F_2)$ молибдатных групп. Положение компонент расщепления этих колебаний для тетраэдрических групп различной симметрии описано в [4—6]. Исходя из результатов этих работ полосу 709 см^{-1} в спектре $K_2UO_2(MoO_4)_2$ можно отнести к компоненте расщепления антисимметричного валентного колебания ν_3 , относящуюся к типу симметрии A_1 , полюсу 732 см^{-1} — к $\nu_3(B_1)$, а полосу 793 см^{-1} — к $\nu_3(B_2)$ группы MoO_4^{2-} —I. Аналогичное расщепление трижды вырожденных антисимметричных колебаний ν_3 наблюдается и для группы MoO_4^{2-} —II (см. таблицу и рисунок). Для этой группы одна из компонент расщепления $\nu_3(B_2)$ MoO_4^{2-} —II имеет большую частоту, чем $\nu_1(A_1)$ MoO_4^{2-} —II.

Наблюдаемое расщепление вырожденных колебаний ν_3 MoO_4^{2-} для кристаллов безводных молибдатов уранила свидетельствует об искажении этих групп. Симметрия их может быть отнесена к точечной группе C_{2v} .

Как видно из рисунка и таблицы, этот вывод подтверждается и наблюдаемой структурой спектров в области деформационных колебаний молибдатных групп. Здесь с наибольшей интенсивностью проявляются близко расположенные дважды вырожденные деформационные колебания ν_2 . Более высокие частоты, чем частота ν_2 , имеют компоненты трижды вырожденного колебания ν_4 .

Наряду с линиями КР, которые мы отнесли к группам MoO_4^{2-} —I и MoO_4^{2-} —II в спектрах всех веществ наблюдается ряд слабых линий, которые могут свидетельствовать о наличии молибдатной группы в решетках этих соединений симметрии C_{3v} , что, по-видимому, связано с поверхностными дефектами.

Изучение полученных данных позволяет установить, что при переходе от калий- к цезийдимолибдатуранилату наблюдается сдвиг частот компонент расщепления вырожденных валентных колебаний групп MoO_4^{2-} . Особенно это характерно для компонент $\nu_3(A_1)$ и $\nu_3(B_1)$ MoO_4^{2-} —I. Следовательно, размеры вторичных катионов K^+ , Rb^+ , Cs^+ играют существенную роль в формировании структуры исследуемых соединений. Для цезиевого комплекса наблюдается существенное уменьшение интенсивности компонент расщепления антисимметричного валентного колебания $\nu_3(B_1)$ и $\nu_3(B_2)$ MoO_4^{2-} —I, что свидетельствует о повышении симметрии этой группы.

Таким образом, проведенные исследования позволили интерпретировать спектры КР молибдатов уранила, определить симметрии молибдатных групп и установить влияние вторичных катионов на строение уранилмолибдатных комплексов.

Список литературы

1. Красовская Т. И., Поляков Ю. А., Розанов И. А. // Изв. АН СССР: Неорганические материалы. 1981. Т. 17. № 4. С. 695.
2. Красовская Т. И., Поляков Ю. А., Розанов И. А. Химия урана / Под ред. Б. Н. Ласкорина. М., 1983. С. 243.
3. Садилов Г. Г., Красовская Т. И., Поляков Ю. А., Николаев В. П. // Изв. АН СССР: Неорганические материалы. 1988. Т. 24. № 1. С. 109.

4. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Минск, 1981. Т. 1. С. 94.

5. Бойко В. В., Кушниренко И. Я., Максимович Х. К., Пенцак Г. М. // ЖПС. 1977. Т. 27. № 1. С. 97.

6. Бойко В. В., Кушниренко И. Ч., Максимович Х. К. // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 50. № 6. С. 1156.

Поступила в редакцию 30.11.89.

УДК 535.33 : 547.772

И. В. ЛИПНИЦКИЙ, И. К. СКУТОВ, В. И. ЛИПНИЦКИЙ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ И СТРОЕНИЕ АКВАКОМПЛЕКСОВ МАРГАНЦА И КАДМИЯ С МЕТИЛПИРАЗОЛОМ

Пятичленные гетероциклические амины типа пиразола $C_3N_2H_4$ (Pz) и его производные в последнее время находятся в поле зрения спектроскопистов, биофизиков, медиков. Прежде всего, этот повышенный интерес вызван тем, что пиразолы, как полигетероциклические амины, весьма широко распространены в веществах природного происхождения, входят в состав многих синтетических и естественных лекарственных препаратов [1] и красителей. Некоторые производные пиразола, например, алкилсодержащие, обладают ярко выраженным антиопухолевым действием в отношении аденокарциномы СА-775, характеризуются фунгицидной активностью [2, 3] и др. Кроме того, пиразолы, как оказалось, имеют высокие адсорбционные свойства в отношении ряда кислых компонент промышленных и выхлопных газов, таких как CO_2 , CO , H_2S и других, и потому могут быть использованы в качестве фильтров в целях экологической защиты среды. Важно отметить, что эти свойства значительно усиливаются при вхождении пиразолов в комплекс. С другой стороны, координируясь к металлам платиновой группы, они изменяют их каталитические свойства [4]. Такой широкий спектр химико-физических свойств пиразолов и их комплексов ставит ряд новых проблем перед физикой и химией координационных соединений. В конечном счете все эти уникальные особенности определяются электронной структурой комплексообразователя и пиразоллигандов.

Нами изучен ряд модельных смешанных комплексов метил-(MPz) и диметилпиразола (ДМРз) с Pd, Cd, Mn, Co, Cu и другие, в состав которых входят также Cl, Br, SO_4 , SCN, H_2O . Соединения изучались методами колебательной спектроскопии (ИКС, СКР) и термогравиметрически.

Пиразол и его производные обладают значительным ароматическим характером, являющимся следствием делокализации трех π -электронов атомов углерода кольца, двух спаренных π -электронов, донором которых является атом азота «пиридинового» типа и одного π -электрона «пиррольного» азота. В результате перераспределения π -электронного облака в цикле «пиридиновый» азот становится формально электроотрицательным, что определяет реакционную способность амина в целом. Благодаря наличию неподеленной электронной пары у «пиридинового» азота, не участвующей в связях в пиразольном кольце, возможно образование донорно-акцепторной связи $Me-N$. Вхождение электронодонорных метильных групп CH_3 в состав этих аминов повышает электронную плотность цикла, усиливает донорную способность электронной пары «пиридинового» азота при комплексообразовании. С другой стороны, «пиррольные» атомы азота являются дополнительными протонакцепторными центрами, так что в определенных условиях Pz, MPz-лиганды могут быть мостиками [5].

В данной работе рассматриваются спектрально-структурные свойства комплексов $Mn(H_2O)_3MPzCl_2$ (комплекс I) и $Cd(H_2O)_3MPzCl_2$ (ком-

плекс II). Среди большого числа комплексов переходных металлов с пиразолом и его производными, например [6, 7], этот класс смешанных аквакомплексов спектроскопически не изучен. Исследования состояния воды в подобных объектах обычно связаны со значительными затруднениями из-за того, что в наиболее информативную часть спектра, далекую ИК область (ДИК), вносят в одинаковой мере вклад все группы атомов, входящих в состав соединений.

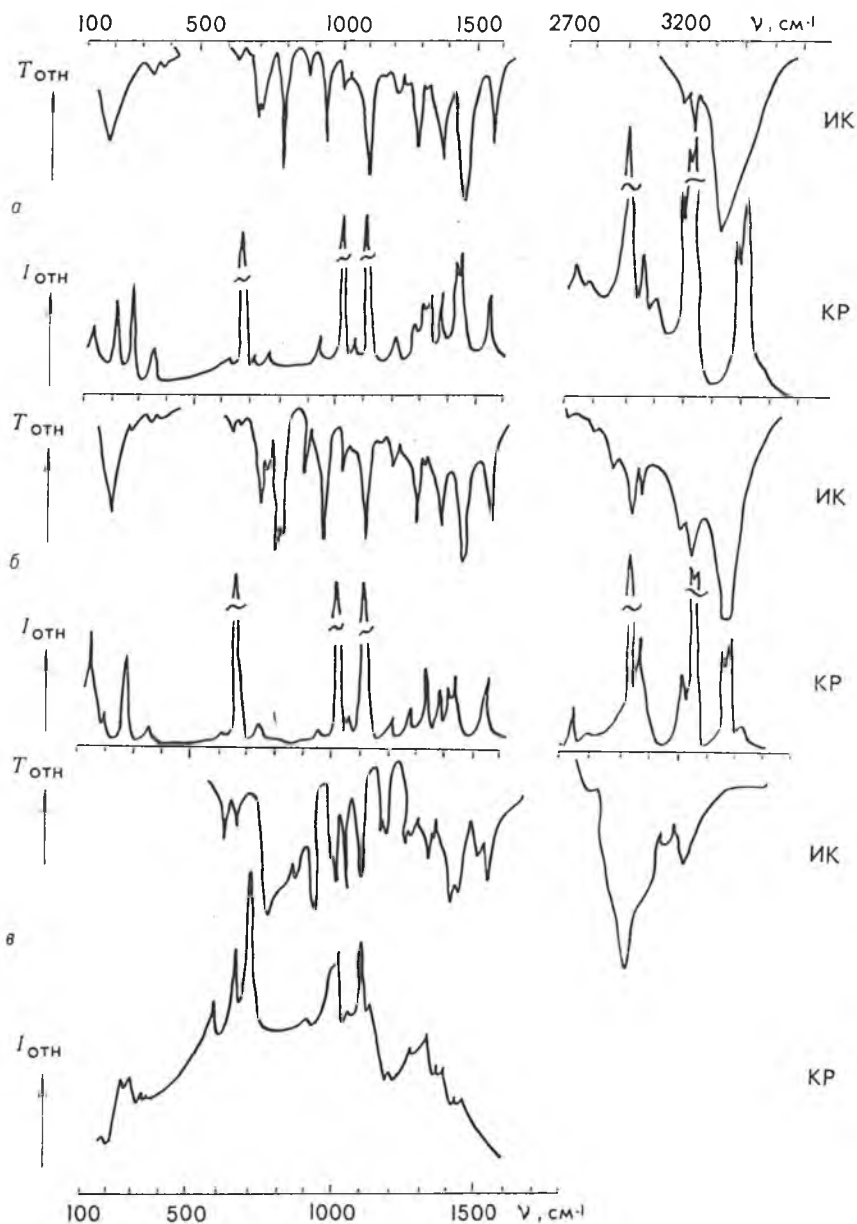


Рис. 1. Спектры ИК поглощения и КР соединений $\text{Cd}(\text{H}_2\text{O})_3\text{MPzCl}_2$ (а), $\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_3\text{MPzCl}_2$ (б) и метилпиразола (в)

ИК спектры поглощения снимались на спектрофотометре Perkin-Elmer-180. Применялась известная методика приготовления образцов в вазелиновом масле и таблетках КВг. Спектры КР регистрировались на спектрометре Spex-Ramalog с использованием линий 632,8 нм He—Ne и 514,5 нм Ar-лазеров (выходная мощность ~ 65 мВт). Параллельно

изучено термическое разложение комплексов методами ДТГ+ДТА+ТГ. Полученные спектры и термограммы приведены на рис. 1,2; колебательные частоты и их отнесение — в таблице.

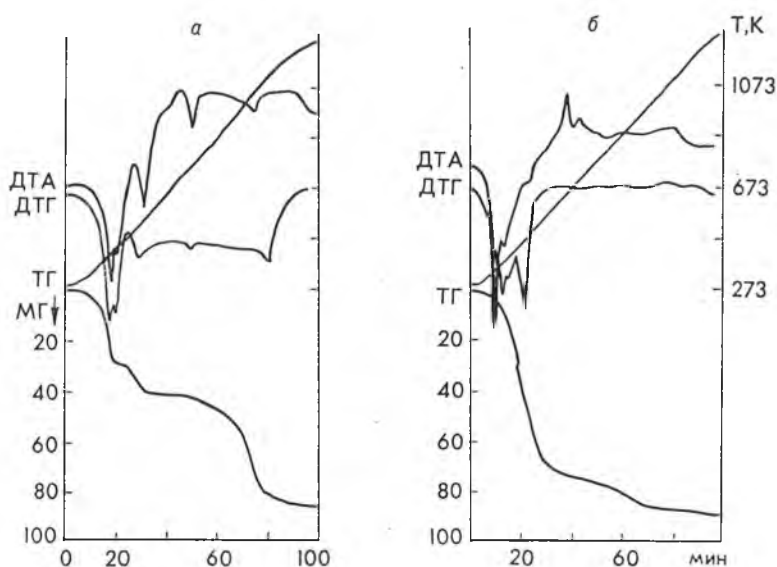


Рис. 2. Кривые термического разложения комплексов $\text{Cd}(\text{H}_2\text{O})_3\text{MPzCl}_2$ (а) и $\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_3\text{MPzCl}_2$ (б)

Ввиду того, что колебания кристаллизационной и координированной воды лежат примерно в одной области, а термогравиметрические методы также не позволяют надежно идентифицировать природу воды в комплексе, модельный расчет и привлечение известных литературных данных родственных соединений позволяют высказать более определенные соображения о составе внутренней координационной сферы комплекса.

Важнейшим критерием координации воды к металлу являются прежде всего ее либрационные колебания. В спектре КР $\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_3\text{MPzCl}_2$ наблюдается слабая дублетная полоса с компонентами 630 и 643 см^{-1} . В комплексе II ей отвечает лишь одна — 646 см^{-1} . Эти полосы характеризуются более высоким значением частот по сравнению с неплюскими деформационными колебаниями координированного пиразольного кольца (612 см^{-1}). В ИК поглощении эти колебания смешиваются с деформационными типа γ (СН). В комплексе I они находятся около 625 см^{-1} , а в II — при 617 см^{-1} . В свободном MPz внеплоскостные колебания кольца лежат около 620 см^{-1} (ИКС) и 625 см^{-1} (СКР). В кристаллическом пиразоле они находятся в той же области (627 см^{-1}). В ИК поглощении гексагидратного соединения $[\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$ и смешанного хлоргидратного $\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_4\text{Cl}_2$ маятниковые (ρ_r) колебания воды проявляются около 655 см^{-1} . Расчетные значения этой частоты составляют 658 см^{-1} . В то время как веерные (ρ_w) колебания, например, октаэдрического аквакомплекса $\text{Mn}(\text{H}_2\text{O})_6 \cdot \text{FSi}$ находятся несколько ниже (560 см^{-1}), а валентные $\nu(\text{Mn}-\text{OH}_2)$ около 395 см^{-1} [8]. Веерные колебания во всех исследуемых образцах с водой экспериментально проявляются весьма слабо. Например, в ИК поглощении образца II имеется лишь одна малоинтенсивная полоса 550 см^{-1} , отвечающая этому типу либрационных колебаний. Что касается валентных колебаний связи $\text{Me}-\text{OH}_2$, то в комплексах M(II) и Cd(II) им отвечают близкие по значениям дублетные полосы 347, 370 см^{-1} и 345, 365 см^{-1} соответственно. В СКР комплекса (I) $\nu(\text{Mn}-\text{OH}_2)$ составляет 346 см^{-1} и дублетная с компонентами 349, 356 см^{-1} в комплексе II. Аналогично в смешанных комплексах

Частоты и формы колебаний метилпиразололатов марганца и кадмия

3-метилпиразол		Cd (H ₂ O) ₃ MPzCl ₂		Mn (H ₂ O) ₃ MPzCl ₂		Отнесение
СКР	ИКС	СКР	ИКС	СКР	ИКС	
		159 сл.		149 о. с. 159 сл.		$t(\text{CH}_3)$, $\gamma(\text{CH}, \text{NH})$
178 сл.	180					
		220	225	197	205	$\nu(\text{Me}-\text{N})$
275 о. с.			245	276 о. с.	280	$\gamma(\text{C}-\text{CH}_3)$
			275			
		349 ср.	345	346	347	$\nu(\text{Me}-\text{OH}_2)$
		356	365		370	$\delta(\text{C}-\text{CH}_3)$
					460 сл.	$\rho_\omega(\text{H}_2\text{O})$
625 ср.	620	550 сл.				$\Gamma, \delta(\text{NH})$
		612 ст.	617	612 сл.	625	
		646 сл.	625	630 сл.		$\rho_r(\text{H}_2\text{O})$
				646 сл.		
665 о.с.	670	662 о. с.	675	663 о. с.	676	Γ
		708 сл.	715	700 сл.		
727 о. с.		752 сл.	725	752 ср.		$\gamma(\text{CH}, \text{NH})$
775 сл.	770					
		800 сл.	795	795 сл.	790	$\Delta, \rho_\omega(\text{H}_2\text{O})$
	830			813 сл.		$\gamma(\text{CH})$
	890	886 сл.	895	886 сл.	895	Δ
932 сл.	950	949 ср.	960	948 ср.	960	$\delta(\text{CH}, \text{NH})$
1004 пл.	1015	1006 сл.		1006 сл.		$\rho_r(\text{CH}_3)$
1020 о. с.	1030	1020 о. с.	1029	1020 о. с.	1026	$\delta(\text{CH}, \text{NH}),$
1050 сл.				1057 ср.		$\rho(\text{CH}_3)$
1056 ср.	1065	1110 о. с.	1108	1105 о. с.	1117	
1100 о. с.	1120	1110 о. с.	1108	1105 о. с.	1117	$\delta(\text{NH})$
1125						
1208 сл.	1205	1218 ср.	1220	1215 ср.	1220	$\nu(\text{C}-\text{CH}_3)$
	1220					
1282 о. с.				1286 ср.		$\omega,$
1296 пл.	1315	1290 ср.	1290	1320 ср.	1300	$\delta(\text{CH}, \text{NH})$
1332 с.	1345	1308 ср.		1336 с.		
1362 с.	1370					$\delta(\text{CH}_3)$
1386 сл.		1385 с.	1385	1384 с.	1385	
1406 сл.		1425 о. с.		1410 пл.		$\delta(\text{CH}_3)$
				1419 о. с.		$\delta(\text{CH}_3)$
1446 ср.	1460	1450 сл.		1448 о. с.		$\omega, \delta(\text{NH})$
	1480		1475		1460	
1575 сл.	1560	1568 с.	1575	1568 с.	1577	$\delta(\text{OH}), \omega$
	1680	1680			1650	
		2748 сл.	2700 сл.			
			2750 сл.	2748 сл.		
	2915 о. с.	2876 пл.	2876	2850 ср.		$\nu(\text{CH}_3)$
		2929 о. с.		2929 о. с.	2920 о. с.	$\nu(\text{CH}_3)$
2960 с.		2970 с.		2966 ср.	2965 ср.	$\nu(\text{CH}_3)$
3030 сл.		3004 пл.		3004		
3090 с.		3122 с.	3135 сл.	3122		$\nu(\text{CH})$
		3134	3140 сл.	3134 о. с.	3140 ср.	
3120 пл.		3144		3144		
		3265 пл.		3265 с.	3270 с.	$\nu(\text{OH})...$
		3284 с.	3290 о. с.	3284 с.		$\nu(\text{NH})...$
		3303	3350 сл.	3313 пл.		$\nu(\text{NH})$
	3536					

Обозначения: ν — валентные колебания; δ — плоские деформационные; ω — валентные плоские кольца; t — торсионные; Δ — деформационные плоские кольца; γ — внеплоскостные; Γ — деформационные внеплоскостные кольца; ρ_r — маятниковые; ρ_ω — веерные

$\text{Ni}(\text{ДМРз})_4(\text{H}_2\text{O})_4\text{X}_2$ ($\text{X}=\text{Cl}, \text{Br}, \text{J}$ и др.) в ДИК эта полоса наблюдается [6] при 350 см^{-1} (широкая, дублетная).

Естественно, эти полосы отсутствуют в колебательных спектрах свободного метилпиразола и пиразола. Интенсивные внеплоскостные колебания кольца малочувствительны к природе металла и наблюдаются в изученных нами образцах при 676 см^{-1} (ИКС) и 663 см^{-1} (СКР). Таким образом, несмотря на то, что невозможно выделить колебания в чистом виде в этой области, обычное повышение частот на $20\text{—}40\text{ см}^{-1}$ является важным критерием координации МРз, так как оно свидетельствует о локализации координационной связи на sp^2 -гибридизированном «пиридиновом» атоме азота [9]. Точно такая же ситуация имеет место и при идентификации спектров комплексов с пиридином. При этом геометрия пиридинового кольца по своей структуре приближается к бензольной с полуторной связью $\text{C}\cdots\text{N}$.

Плоские деформационные Δ колебания кольца МРз находятся около 950 см^{-1} , которые при координации к металлу повышены и наблюдаются около 960 см^{-1} в ИК поглощении обоих комплексов. Аналогично в СКР с 932 см^{-1} (944 см^{-1} в Рз) они смещены к 948 см^{-1} .

Многочисленные данные по колебательным спектрам комплексов с гетероциклическими аминами, в том числе с производными пиразола [10], указывают на то, что валентные колебания $\text{Me}\text{—}\text{N}$ захватывают довольно широкий диапазон $200\text{—}380\text{ см}^{-1}$, тем не менее они не могут быть выше 400 см^{-1} . И это подтверждается теоретическими расчетами [11]. В комплексах с МРз и другими производными частоты $\nu(\text{Me}\text{—}\text{N})$ находятся в интервале $220\text{—}280\text{ см}^{-1}$. В случае комплексов I и II это колебательные полосы 225 см^{-1} (ИКС), 220 (СКР) и 205 см^{-1} (ИКС), 197 см^{-1} (СКР) соответственно.

Широкие сильные полосы валентных колебаний $\nu(\text{OH})$ обоих образцов находятся около 3290 (ИКС), $3265, 3284\text{ см}^{-1}$ (СКР), несколько смещенные в длинноволновую область из-за водородных связей. Что касается колебаний $\nu(\text{NH})$ 3350 (ИКС), 3303 см^{-1} (СКР) комплекса II и 3313 см^{-1} (СКР, комплекс I), то они значительно понижены по сравнению с частотами $\nu(\text{NH})$ свободного метилпиразола (3536 см^{-1}) в нейтральном растворителе CCl_4 . Сдвиг обусловлен участием $\text{N}\text{—}\text{H}$ -связей в более сильных водородных взаимодействиях, чем $\text{O}\text{—}\text{H}$ -связи. Сравнение экспериментальных данных свободного МРз и пиразола позволило частоту 1205 (ИКС) и 1208 см^{-1} (СКР) отнести к валентным колебаниям $\nu(\text{C}\text{—}\text{CH}_3)$. При координации МРз она оказывается повышенной в ИКС и СКР до $1220, 1218\text{ см}^{-1}$ (комплекс II) и $1220, 1215\text{ см}^{-1}$ (комплекс I). Напротив, маятниковые колебания $\rho_r(\text{CH}_3)$ (плоскостное $\rho_{\parallel}$ и $\rho_{\perp}$ — перпендикулярно к плоскости кольца) в комплексах малочувствительны к координации лиганда к металлу и лежат, в принципе, около $1020\text{—}1100\text{ см}^{-1}$, как и в свободном МРз, хотя интенсивность соответствующих колебательных полос при этом заметно возрастает.

Об относительной прочности связей и тем самым и о структуре комплексов можно судить по термогравиметрическим данным (ДТА, ТГА). Процесс термического разложения $\text{Cd}(\text{H}_2\text{O})_3\text{МРзCl}_2$ протекает по довольно четко выраженным стадиям (см. рис. 2), характеризую последовательность разрушения внешней и внутренней координационной сферы соединения. Это отражается эндотермическими эффектами при температурах $200, 230, 330^\circ\text{C}$, сопровождаемых убылью массы. Эндомаксимум 200°C соответствует потере 10% исходной массы, что теоретически отвечает потере одного атома внешнесферного хлора молекулы. Процесс протекает без наличия в этом температурном интервале на ТГ горизонтальной площадки, указывая тем самым на непрерывность процесса термического разложения, и около 230°C фактически теряются обе молекулы хлора и одна H_2O . При 330°C (согласно ТГ) отщепляются оставшиеся две молекулы воды и $1/2$ МРз, иллюстрируя тем самым фактическое разложение исходного комплекса. При этом образуется довольно устойчивый промежуточный продукт вплоть до температуры 560°C , что соот-

ветствует потере оставшейся 1/2 МРз. На основании термогравиметрического анализа можно сказать о более прочной связи молекул H_2O в комплексе по сравнению с ионами Cl . В отличие от Cd -комплекса термическое поведение марганцевого аналога иное. Здесь невозможно вплоть до 340°C выделить промежуточные состояния образца и фактически (по ТГ) процесс идет в одну стадию, хотя на кривой ДТА в интервале $170\text{--}340^\circ\text{C}$ отмечается ряд эндотермических максимумов, в значительной степени налагающихся друг на друга, отражая параллельность процессов разрушения координационной сферы комплекса и указывая на близость кинетических параметров реакции. Потеря массы при 340°C составляет 73 %, что соответствует потере Cl , МРз и $2\text{H}_2\text{O}$. Фактически при 340°C образуется оксид марганца. При 470 и 510°C проявляются два экзоэффекта, первый из которых не сопровождается потерей массы и связан, очевидно, со структурным превращением промежуточного продукта с последующим его дальнейшим упрощением и перестройкой с потерей массы при 510°C .

Список литературы

1. Пюльман Б., Пюльман А. Квантовая биохимия. М., 1985.
2. Phillip N. Gordon, Lume Old. // United States Patent office. 1965. 3, 169, 091. Patented Feb., 9.
3. Dan N. B., Nayak A., Maharapta B. B., Mitta A. S. // Journ. Ind. Chem. Soc. 1981. V. 58. N 4. P. 337.
4. Сафронова Л. А., Шебаидова А. Д., Брюханова О. В., Черкасова Л. В. // Координац. хим. 1987. Т. 13. Вып. 12. С. 1662.
5. Yos I. G., Groeneveld W. L. // Inorg. Chem. Acta. 1978. V. 27. P. 173.
6. Guichelaar M. A., van Hest J. A. M., Reedijk J. // Chemistry and Chemical engineering. 1976. V. 2. P. 51.
7. Van Kralinoen C. G., de Ridder J. K., Reedijk J. // Transit. Metal. Chem. 1980. V. 5. N 2. P. 73.
8. Nakagawa J., Shimouchi T. // Spectrochim Acta. 1964. V. 20. P. 429.
9. Юнусов К. М., Гарновский А. Д., Осипов О. А., Колодяжный Ю. В. // ЖОХ. 1971. Т. 41. Вып. 6. С. 1320.
10. Forquharson S., Lay P. A., Weaver M. J. // Spectrochim. Acta. 1984. V. 40A. P. 907.
11. Березин В. И., Ганин В. В., Ковриков А. Б., Липницкий И. В., Роголевич Н. Л. // ЖПС. 1983. Т. 38. Вып. 3. С. 434.

Поступила в редакцию 26.12.88.

УДК 535.37

В. Н. БОЙКОВ, Ю. В. КИРЕЕВА,
А. Н. КРАСОВСКИЙ, Д. С. УМРЕЙКО

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В КРИСТАЛЛАХ НАТРИЙУРАНИЛАЦЕТАТА

Природе формирования спектров люминесценции кристаллов ураниловых соединений при гелиевой температуре посвящена обширная литература [1—5]. На основе измерений кинетики люминесценции, например, натрийуранилацетата показано, что свечение этих кристаллов является многоцентровым, а их структура при гелиевой температуре не согласуется с данными рентгенографического исследования при комнатной температуре [6], согласно которым все молекулы $\text{Na}[\text{UO}_2(\text{CH}_3\text{COO})_3]$ кристаллографически эквивалентны. В частности, центры свечения с $\nu_0 \approx 21240 \text{ см}^{-1}$ (проявляются лишь на ранних стадиях высвечивания при импульсном возбуждении) и $21102,3 \text{ см}^{-1}$ * авторы [4] относят за счет смещения незначительной части ($\sim 5\%$) катионов натрия в вакантные объемы с линейными размерами $\sim 0,4 \text{ нм}$, разделяющие один из уранильных

* Величины частот в работе [4] занижены приблизительно на 5 см^{-1} по сравнению с [5].

атомов кислорода и атом натрия. К основным центрам поглощения они относят три вибронные серии с частотами $\nu_0 \sim 21140 \text{ см}^{-1}$ (см. также [1—3, 5]).

В настоящем сообщении приводятся данные о фазовом переходе кристаллов натрийурилата при температуре выше 20 К в модификацию, когда отмеченная неэквивалентность молекул кристаллоосновы теряется.

Возбуждение люминесценции осуществлялось линией 21837,2 см^{-1} аргонового лазера мощностью 10 мВт. Спектральная ширина щели при записи спектра люминесценции составляла 0,3—0,5 см^{-1} . Уменьшение интегральной интенсивности люминесценции при регистрации линий, относящихся к одной полосе, в результате фотохимических превращений [7] не превышало 5 %. Точность поддержания температуры образца с помощью оптического гелиевого криостата составляла 0,5 К, локальный разогрев объема возбуждения — не более 1 К. Контроль ошибки измерений частот, зависящей от температуры, влажности и давления атмосферы, осуществлялся по максимумам линий ртутной лампы низкого давления, аргонового и гелий-неонового лазеров.

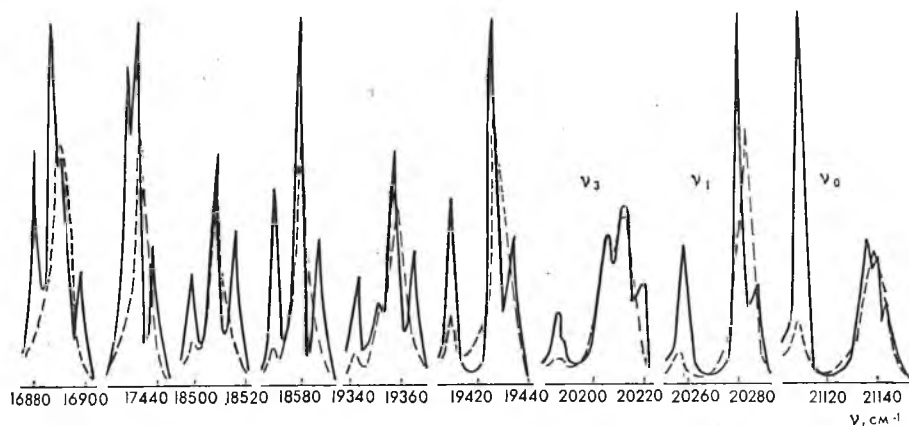


Рис. 1. Участки спектра люминесценции натрийурилата при 15 (сплошная) и 33 К (штриховая линия)

В спектре люминесценции кристаллов $\text{Na}[\text{UO}_2(\text{CH}_3\text{COO})_3]$ при температурах 4—15 К отчетливо выделяются четыре подобные друг другу вибронные серии линий сравнимой интенсивности (рис. 1). Волновые числа их максимумов, соответствующих оптическим переходам на подуровни валентных полносимметричных (ν_1) и антисимметричных (ν_3) колебаний иона UO_2^{2+} , описываются * выражениями:

$$\nu' = \nu_0 - n\nu_1^{01} + \frac{n-1}{2}n\delta; \quad \nu'' = \nu' - \nu_3^{01} + 1,85n\delta.$$

Здесь $\nu_0 = 21139,3; 21141,5$ и $21144,4 \text{ см}^{-1}$; $\nu_1^{01} = 855,4; 856,7$ и $854,8 \text{ см}^{-1}$; $\nu_3^{01} = 927,3; 928,8$ и $926,6 \text{ см}^{-1}$ соответственно (основные центры); $\nu_0 = 21108,5 \text{ см}^{-1}$; $\nu_1^{01} = 848,9 \text{ см}^{-1}$; $\nu_3^{01} = 920,7 \text{ см}^{-1}$ (дефектные центры); $n = 0 \div 5$ — колебательное квантовое число UO_2^{2+} ; $\delta = 2,7 \text{ см}^{-1}$ — поправка, в частности, на ангармоничность.

При увеличении температуры свыше 15 К структура спектра люминесценции постепенно изменяется (см. рис. 1 и 2) за счет появления новой серии линий с частотой $\nu_0 = 21140,8 \text{ см}^{-1}$, $\nu_1^{01} = 855,5 \text{ см}^{-1}$, $\nu_3^{01} = 927,4 \text{ см}^{-1}$ (δ и n прежние). При температуре $\sim 20 \text{ К}$ эта серия окончательно сменяет три рассмотренные ранее серии линий кристаллоосновы. Далее, вплоть до температуры $\sim 35 \text{ К}$, наблюдается сужение компо-

* С точностью 0,3 см^{-1} для первой совокупности линий и $\sim 1 \text{ см}^{-1}$ для второй.

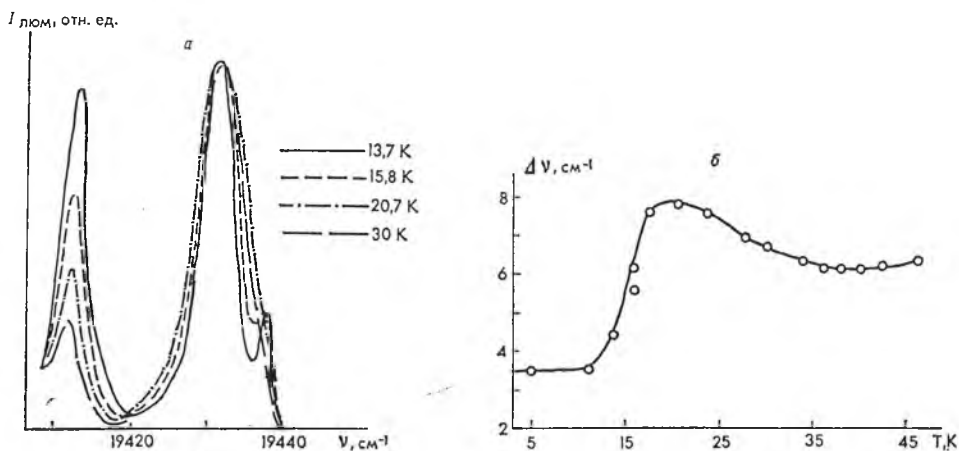


Рис. 2. Температурная зависимость контура (а) и полуширины (б) флуоресцентной линии при 19432 cm^{-1}

нент этой серии при отсутствии существенных изменений колебательных частот и относительных интенсивностей линий, соответствующих переходам на колебательные подуровни ацетатных групп CH_3COO^- (по сравнению с данными для низких температур [1, 4]). Не обнаружено также возникновения каких-либо дополнительных интенсивных линий в прирезонансной области спектра электронного поглощения ($21145\text{--}21350 \text{ cm}^{-1}$).

Рассмотренные температурные изменения спектров обратимы и отражают, по всей видимости, фазовый переход в кристаллах. Низкотемпературная кристаллическая модификация ($T \leq 11 \text{ K}$) характеризуется скорее всего малыми смещениями атомов относительно положений, присущих им при комнатной температуре, благодаря наличию отмеченных вакантных пустот в кристалле. Соответственно сравнительно большая ширина флуоресцентных линий при 20 K свидетельствует о значительном неоднородном разбросе частот ν_0 [8] и отвечает отсутствию строгого порядка в расположении атомов кристалла, а сужение линий при повышении температуры от 20 до 35 K — постепенному их упорядочению с образованием кристаллической структуры, в основном идентичной описанной в [6]. Наиболее существенные локальные отклонения от кристаллической структуры [6] в этой, как и в низкотемпературной, модификации, по-видимому, представляют собой центры с $\nu_0 = 21108,5 \text{ cm}^{-1}$, концентрация которых ($\sim 5\%$) не претерпевает заметных изменений [5] при фазовом переходе (их наличие отмечается также и при 77 K [9]).

Список литературы

1. Абрамов А. П., Разумова И. К. // Опт. и спектр. 1975. Т. 38. № 3. С. 565.
2. Бурков В. И., Кизель В. А., Красилов Ю. И. Там же. 1976. Т. 40. С. 823.
3. Бойков В. Н., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. // ЖПС. 1982. Т. 37. № 5. С. 790.
4. Denning R. G., Ironside C. N., Snellgrove T. R., Stone P. J. // Journ. Chem. Soc. Dalton trans. 1982. V. 56. № 9. P. 1691.
5. Красовский А. Н., Бойков В. Н., Умрейко Д. С. // ЖПС. 1984. Т. 40. № 3. С. 441.
6. Zachariasen W. H., Plettinger H. A. // Acta Cryst. 1959. V. 12. P. 526.
7. Покаташкин В. И., Бойков В. Н., Кулешов Н. В., Красовский А. Н. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 5. С. 418.
8. Бойков В. Н., Красовский А. Н., Кулешов Н. В., Покаташкин В. И. // ЖПС. 1987. Т. 47. № 4. С. 597.
9. Красовский А. Н., Бойков В. Н., Турышев Л. Н. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 4. С. 317.

Поступила в редакцию 28.03.88.

АМПЛИТУДНАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ МОД ИЗЛУЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛАЗЕРОВ С АКТИВНОЙ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ МОД

Использование излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод (СМ) в качестве несущей в сверхширокополосных оптических линиях связи, системах фазовой дальнометрии, аттестации быстродействующих фотоприемных устройств выдвигает повышенные требования к стабильности спектрально-временных и энергетических характеристик выходного излучения. Одной из важнейших характеристик излучения лазеров с СМ, наиболее полно определяющей степень синхронизации мод и шумовые свойства излучения, наряду с шириной спектра межмодовых биений [1], является амплитудная неустойчивость мод в спектре излучения $\Delta A/A$, где ΔA — неустойчивость амплитуды отдельной моды, A — ее среднее значение. Оптимизация режима СМ по минимуму флуктуаций отдельных мод в спектре излучения будет одновременно означать минимум флуктуаций энергии импульса, его длительности и временного положения на периоде следования. Реализация такого контроля режима СМ, учитывающая основные разновидности шумов излучения, ввиду его простоты и надежности, обеспечиваемой высоким отношением сигнал/шум на выходе контрольного фотоприемника, может оказаться более предпочтительной при настройке измерительных генераторов сверхкоротких оптических импульсов на основе лазеров с СМ.

В настоящей работе приводятся результаты исследования амплитудной неустойчивости мод излучения непрерывных лазеров на иттрий-алюминиевом гранате (АИГ: Nd^{3+}), аргоновом (Ar^+), гелий-неоновом (He-Ne) с активной СМ в зависимости от мощности накачки активного элемента, мощности управляющего сигнала на модуляторе, расстройке длины резонатора, позволяющих определить критерии выбора оптимальных режимов работы этих лазеров с целью получения высокой временной и амплитудной стабильности импульсов излучения для решения задач фазовой дальнометрии. Экспериментальная установка собрана по схеме, описанной в [2]. Спектр излучения контролировался сканирующими интерферометрами разрешающей способностью по частоте не более 5 МГц. Точность измерения амплитуды мод составляла 0,1 % и определялась разрешением фотоприемного тракта интерферометра.

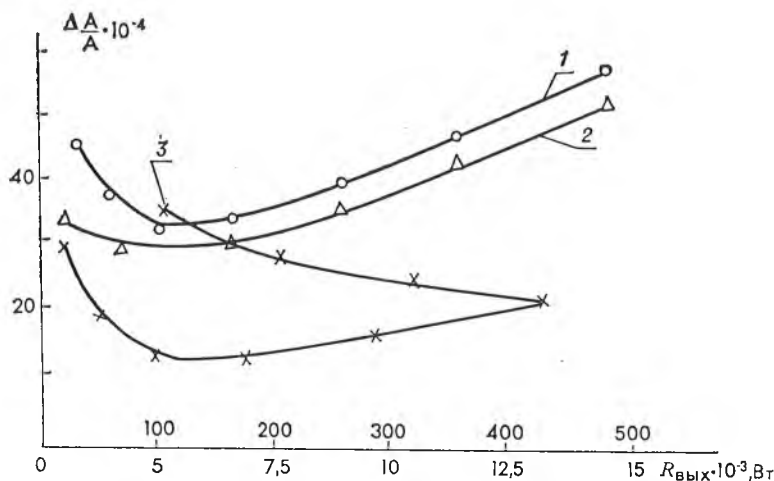


Рис. 1. Зависимость амплитудной неустойчивости мод в спектре излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод (1 — АИГ: Nd^{3+} ; 2 — Ar^+ ; 3 — He-Ne) от средней мощности выходного излучения. По оси абсцисс (снизу) отложены значения для He-Ne -лазера

В качестве источников излучения использовались серийно выпускаемые лазеры: гелий-неоновый-ЛГ-79-2, иттрий-алюминиевый гранат-ЛТН-301М, аргоновый-ЛГ-106М1. Режим СМ осуществлялся у He-Ne и АИГ: Nd^{3+} -лазеров с частотой межмодовых биений ~ 250 МГц, у Ar^+ -лазера ~ 125 МГц. Опорным генератором выбран «ГИАЦИНТ-М» с рабочей частотой 5 МГц и нестабильностью не более 10^{-9} с $^{-1}$. На рис. 1 показана зависимость $\Delta A/A$ от выходной мощности излучения лазеров при подводимой мощности к модулятору $\sim 0,5$ Вт. Если для АИГ: Nd^{3+} и Ar^+ -лазеров выходная мощность является линейной функцией от мощности накачки, то для He-Ne-лазера есть оптимальная мощность накачки, при которой излучение имеет максимальную мощность и после перехода точки максимальной выходной мощности ~ 14 мВт $\Delta A/A$ растет линейно с уменьшением мощности выходного излучения. С повышением уровня накачки вероятность расстройки режима синхронизации мод возрастает (расширяется спектр генерации), что приводит к увеличению $\Delta A/A$. Увеличение $\Delta A/A$ на начальных участках кривых связано с ростом погрешности измерений за счет уменьшения среднего значения амплитуды сигнала вблизи порога генерации на выходе контрольного фотоприемника и для практического применения из-за малой средней мощности выходного излучения интереса не представляет. Поэтому с точки зрения получения минимального отношения $\Delta A/A$ должен существовать оптимальный режим работы для АИГ: Nd^{3+} -лазера (в нашем случае это значение средней выходной мощности ~ 100 мВт). Наличие минимума флуктуаций объясняется выходом на режим лампы накачки и активного элемента, что ведет к стабилизации мощности выходного излучения. Для Ar^+ -лазера это значение ~ 50 мВт, а для He-Ne $\sim 6,5$ мВт.

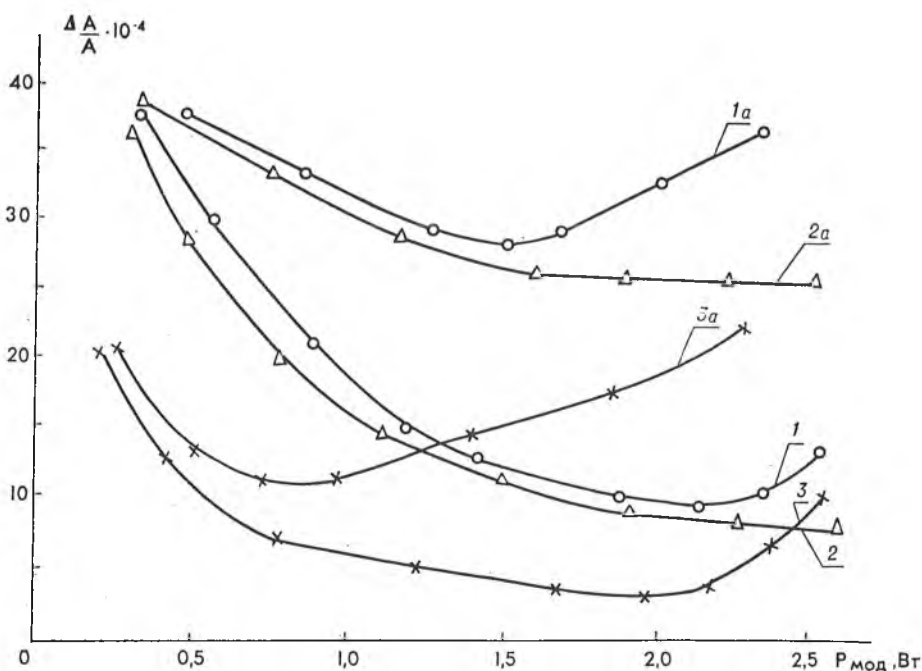


Рис. 2. Амплитудная нестабильность мод в спектре излучения лазеров с СМ при максимальной средней выходной мощности в зависимости от мощности управляющего сигнала на модуляторе и расстройки длины резонатора:

1, 2, 3 — $\Delta L/L = 0$; 1a, 2a, 3a — $\Delta L/L = 10^{-3}$

Следует отметить, что полученные выходные мощности, соответствующие минимальной величине $\Delta A/A$, слишком малы для целого ряда исследований, поэтому представляет значительный интерес вопрос о минимизации отношения $\Delta A/A$ для максимальных значений выходной мощности в режиме СМ, в частности, путем выбора оптимальных режимов

работы модулятора. С этой целью изучена зависимость $\Delta A/A$ от мощности управляющего модулятором сигнала для разных расстроек длины резонаторов при средней мощности выходного излучения у АИГ: Nd^{3+} и Ar^+ — 500 мВт, He-Ne — 14 мВт. Кривые 1, 2, 3 (рис. 2) соответствуют оптимальному режиму СМ и расстройки $\Delta L/L=0$, кривые 1а, 2а, 3а — $\Delta L/L=10^{-3}$. Ход кривых для всех лазеров аналогичен, различаются лишь значения $\Delta A/A$, которые для АИГ: Nd^{3+} больше, чем для Ar^+ и He-Ne -лазеров, что объясняется относительно большими внутренними шумами активного элемента АИГ: Nd^{3+} . Минимальное значение $\Delta A/A$ реализуется при минимальной расстройке резонатора, при этом, однако, требуется увеличение подаваемой на модулятор мощности синхронизирующего сигнала (см. рис. 2). Необходимо отметить, что повышение мощности на модуляторе АИГ: Nd^{3+} и He-Ne -лазеров при $\Delta L/L=0$ после прохождения точки 2 Вт приводит к возрастанию $\Delta A/A$, в то время как для Ar^+ -лазера этого не наблюдается. Это может быть объяснено конструктивными особенностями резонатора и разным характером уширения спектральной линии. Известно, что для получения стабильного режима СМ у Ar^+ -лазера, при сравнимых средних мощностях генерируемого излучения, глубина модуляции должна быть значительно большей, чем для АИГ: Nd^{3+} и He-Ne -лазеров [3].

Таким образом, посредством увеличения мощности управляющего модулятором сигнала при оптимальной расстройке длины резонатора можно добиться уменьшения $\Delta A/A$ для АИГ: Nd^{3+} -лазера на максимальной паспортной мощности 500 мВт не более 10^{-3} , для Ar^+ -лазера при той же мощности — $8 \cdot 10^{-4}$, для He-Ne -лазера (14 мВт) — $5 \cdot 10^{-4}$. Зафиксированное значение нестабильности амплитуды мод в спектре излучения $\sim 10^{-3}$ при максимальной выходной мощности соответствует флуктуациям фазы генерируемых импульсов ~ 20 пс [4].

Предварительная оценка полученных результатов показывает, что путем выбора оптимальных режимов работы лазеров с СМ по мощности накачки, управляющего сигнала на модуляторе, расстройки резонатора можно добиться на серийно выпускаемых лазерах амплитудной и временной нестабильности генерируемых импульсов, приемлемой для использования их в фазовых дальномерах с разрешением $\geq 0,6$ см.

Проведенные исследования свидетельствуют о том, что для каждого типа лазеров существуют оптимальные значения нестабильности мод в режиме генерации последовательности сверхкоротких импульсов, которые необходимо учитывать при разработке измерительных генераторов оптического диапазона на основе лазеров с СМ.

Список литературы

1. Linde D., Wiechert D., Kluge J., Kemmler M. // Материалы III симпозиума: Сверхбыстрые процессы в спектроскопии. Минск, 1984. С. 19.
2. Данилов В. А., Зенченко С. А., Кирсанов А. В., Шаронов Г. В. // Квантовая электроника. 1979. Т. 6. № 12. С. 2659.
3. Бакиновский К. Н., Баранов Г. Н., Шаронов Г. В. // ПТЭ. 1981. № 2. С. 185.
4. Алексеев А. М., Быков И. М., Кислов В. В. // Тез. докл. 3-й Всесоюз. школы по пикосекундной технике. М., 1988. С. 45.

Поступила в редакцию 28.07.88.

УДК 669.76 : 537.3

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ, ЗУ ХЕН ЧЕР

СТРУКТУРА И КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЫСТРООХЛАЖДЕННЫХ ФОЛЫГ СПЛАВОВ СУРЬМА-ИНДИЙ

Сурьма и висмут, находящиеся в V группе периодической таблицы Д. И. Менделеева, а также сплавы на их основе относятся к термоэлект-

рическим материалам, имеющим практическое и научное значение. Известно [1], что олово и теллур действуют в решетке сурьмы как акцептор и донор соответственно. Влияние других легирующих элементов на структуру и свойства изучено недостаточно из-за их низкой равновесной растворимости. Но в последние два десятилетия успешно развиваются методы получения материалов быстрой кристаллизацией из жидкого состояния, позволяющие существенно увеличить растворимость легирующих элементов [2]. В связи с этим в данной работе представлены результаты исследования структуры и электрических свойств фольг сплавов сурьма-индий, полученных быстрым охлаждением из жидкой фазы.

Фольги сурьмы и ее сплавов с индием, содержащих до 12 ат. % In, получали быстрой кристаллизацией капли расплава ($\sim 0,3$ г), выплеснутой на внутреннюю полированную поверхность быстровращающегося медного цилиндра диаметром 20 см. При таких условиях кристаллизации скорость охлаждения достигает $\sim 10^6$ К/с [3].

Металлографические исследования фольг выполнялись с помощью микроскопа ММУ-3. Рентгеноструктурный анализ текстуры проведен на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении. Полюсные плотности дифракционных линий $\{10\bar{1}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$, $\{10\bar{1}5\}$, $\{10\bar{1}7\}$, $\{20\bar{2}5\}$, $\{21\bar{3}0\}$, $\{12\bar{3}5\}$, $\{20\bar{2}2\}$ и (0009) рассчитывались по методу Харриса [4]. Параметр кристаллической решетки вдоль тригональной оси определялся по положению дифракционной линии (0009) . Рентгеноспектральные исследования выполнялись на установке РЭМ-100У. Удельное электросопротивление ρ , коэффициент Холла R и дифференциальная термо-ЭДС α измерялись компенсационным методом в интервале 77—300 К.

Фольги сурьмы и ее сплавов с индием, полученные быстрым охлаждением из жидкого состояния, имели толщину 20—50 мкм. Их ширина и длина достигали 1 и 10 см соответственно.

Микроанализ фольг сплава Sb-2 ат. % In показал равномерное распределение компонентов. В фольгах сплавов, содержащих более 4 ат. % In, наблюдается неравномерное распределение индия. Рентгеноструктурные исследования фольг сплава Sb-8 ат. % In обнаружили дополнительные отражения, которые индифицированы как дифракционные линии $\{220\}$ и $\{311\}$ соединения InSb.

На рис. 1 приведен график относительного изменения параметра кристаллической решетки вдоль тригональной оси c от концентрации x индия

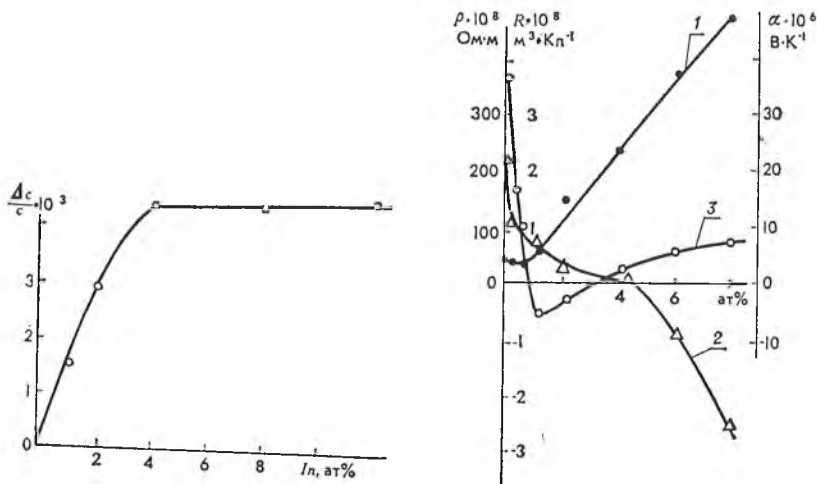


Рис. 1. Зависимость $\frac{\Delta c}{c}$ в фольгах сплавов сурьма-индий от состава

Рис. 2. Зависимость удельного электросопротивления (1), коэффициента Холла (2) и дифференциальной термо-ЭДС (3) фольги при 293 К от концентрации индия в сурьме

в сурьме, который характеризуется изломом при $x = 3$ ат. % In. Излом в графике зависимости $\frac{\Delta c(x)}{c}$, а также рентгеноспектральные исследования позволяют заключить, что неравновесная растворимость индия в сурьме для фольг, полученных быстрым охлаждением из жидкого состояния, достигает 3 ат. %, что значительно превышает равновесную растворимость [5].

Фольги сурьмы характеризуются текстурой $\{10\bar{1}2\} + (0001)$. Легирование сурьмы индием приводит к усилению компоненты $\{10\bar{1}2\}$, но при этом полюсная плотность дифракционной линии (0009) уменьшается.

Формирование компоненты текстуры $\{10\bar{1}2\}$ объясняется зарождением и ростом кристаллитов. Из шести пирамидальных плоскостей $\{10\bar{1}2\}$ три ($(01\bar{1}2)$, $(\bar{1}012)$ и $(1\bar{1}02)$) характеризуются высокой ретикулярной плотностью атомов, которая равна $1,93/a^2$, что выше ретикулярной плотности атомов в плоскости (0001), равной $1,16/a^2$ (a — параметр кристаллической решетки вдоль биссекторной оси). Вследствие этого центры зарождения твердой фазы ориентируются указанными плоскостями параллельно внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

Каждый атом сурьмы в кристаллической решетке связан с тремя другими атомами ковалентными связями. При этом две ковалентные связи каждого атома находятся в плоскостях $(01\bar{1}2)$, $(\bar{1}012)$ и $(1\bar{1}02)$, а третья связывает два атома, расположенные в соседних плоскостях того же типа. Такая ориентировка ковалентных связей способствует сохранению преимущественной ориентировки зародышей в процессе их роста.

Появление компоненты (0001) в текстуре фольг сурьмы можно объяснить переориентацией кристаллитов, вызванной протеканием рекристаллизационных процессов, так как плоскость (0001) является плоскостью спайности и характеризуется низким значением удельной поверхностной энергии. Следует отметить, что текстура такого же типа, обусловленная рекристаллизационными процессами, наблюдалась в фольгах кадмия и цинка, полученных быстрым охлаждением [2]. Легирующие элементы, а также мелкодисперсные выделения второй фазы задерживают протекание рекристаллизационных процессов, что ведет к уменьшению полюсной плотности дифракционной линии (0009) и к увеличению полюсной плотности дифракционной линии $\{10\bar{1}2\}$ с ростом концентрации индия в сурьме в быстроохлажденных фольгах.

Проведены исследования кинетических свойств фольг сплавов Sb-In. На рис. 2 представлены их концентрационные зависимости $\rho(x)$, $R(x)$ и $\alpha(x)$ при 293 К. Повышение концентрации индия в сурьме сначала вызывает небольшое уменьшение удельного электросопротивления, а затем приводит к его резкому увеличению. Коэффициент Холла фольг монотонно уменьшается с увеличением индия в сурьме, а при $x > 4$ ат. % In изменяет знак на противоположный. С увеличением содержания индия в исследуемых фольгах дифференциальная термо-ЭДС сначала уменьшается, а затем дважды меняет знак.

Проведены исследования температурных зависимостей кинетических свойств фольг: удельного электросопротивления $\rho(T)$, коэффициента Холла $R(T)$ и дифференциальной термо-ЭДС $\alpha(T)$. Установлено, что коэффициент Холла незначительно зависит от температуры. Удельное электросопротивление фольг сурьмы и сплавов, содержащих 0,25—2 ат. % In, монотонно растет с увеличением температуры. Для фольг сплавов, содержащих более 4 ат. % In, наблюдается незначительное уменьшение ρ с повышением температуры. При этом абсолютная величина температурного коэффициента электросопротивления для фольг чистой сурьмы выше, чем для ее сплавов.

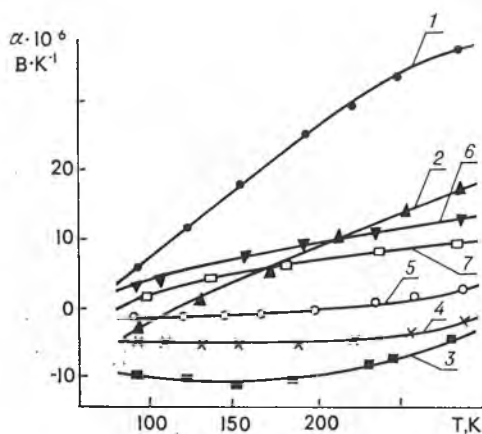


Рис. 3. Температурные зависимости дифференциальной термо-ЭДС фольг сплавов сурьма-индий (1 — 0; 2 — 0,25; 3 — 1; 4 — 2; 5 — 4; 6 — 8; 7 — 12 ат. % In)

лены сложным строением зонной структуры сурьмы, акцепторным действием индия, а также выделениями второй фазы. Индий располагается в III группе периодической таблицы Д. И. Менделеева, а сурьма — в V, поэтому можно предположить, что по аналогии с элементом IV группы оловом индий в кристаллической решетке сурьмы ведет себя как акцептор, т. е. легирование сурьмы индием в области существования твердых растворов должно увеличивать концентрацию дырок и уменьшать концентрацию электронов. Подтверждением высказанного предположения является уменьшение коэффициента Холла фольг с увеличением содержащихся в них In до 4 ат. %.

В сурьме подвижность дырок больше подвижности электронов [6], поэтому повышение концентрации индия до 0,5 ат. % в сурьме приводит к уменьшению удельного электросопротивления фольг. При большей концентрации индия в валентной зоне начинает действовать вторая группа дырок, которая характеризуется меньшей подвижностью. Вследствие этого удельное электросопротивление фольг, содержащих более 0,5 ат. % In, начинает увеличиваться с ростом концентрации индия.

Появление новой группы дырок приводит к их межэкстремумному рассеянию, которое дает отрицательный вклад в дифференциальную термо-ЭДС, что наблюдалось в сплавах висмут-олово [7]. Вследствие межэкстремумного рассеяния дифференциальная термо-ЭДС фольг сплавов Sb-In меняет знак с положительного на отрицательный, несмотря на то, что процессы переноса определяются только дырками. Увеличение рассеяния дырок другими механизмами (тепловыми колебаниями, примесями, включениями второй фазы) приводит к уменьшению относительного вклада межэкстремумного рассеяния в общее рассеяние. Повышение температуры, а также дальнейшее увеличение концентрации индия в сурьме обуславливает поэтому смену знака дифференциальной термо-ЭДС с отрицательного на положительный в ее температурной зависимости $\alpha(T)$ для сплавов Sb-0,25 и 4 ат. % In и концентрационной зависимости $\alpha(x)$.

В фольгах сплавов, содержащих более 4 ат. % In, образуются выделения полупроводниковой фазы InSb, которые влияют на свойства из-за действия двух основных факторов: 1) мелкодисперсные выделения рассеивают дырки; 2) выделения второй фазы, обладая определенными свойствами, изменяют и соответствующие свойства фольги. Эти факторы обуславливают рост удельного электросопротивления. Благодаря второму фактору наблюдается изменение знака коэффициента Холла с положительного на отрицательный, так как для InSb $R < 0$ [8]. Что касается дифференциальной термо-ЭДС, то на ее величину рассмотренные два

Температурные зависимости дифференциальной термо-ЭДС $\alpha(T)$ имеют более сложный характер, чем $\rho(T)$ и $R(T)$ (рис. 3). Дифференциальная термо-ЭДС фольг сурьмы и сплавов Sb-0,25, 4, 8 и 12 ат. % In монотонно увеличивается с повышением температуры. При этом α фольг сплавов, содержащих 0,25 и 4 ат. % In, изменяет знак с отрицательного на положительный. Для фольг сплавов Sb-1 и 2 ат. % In $\alpha(T)$ является отрицательной и характеризуется минимумом вблизи 180 К.

Наблюдаемые концентрационные и температурные зависимости фольг сплавов Sb-In обуслов-

фактора оказывают конкурирующее влияние. Рассеяние дырок на мелко-дисперсных выделениях способствует уменьшению относительного вклада межэкстремумного рассеяния и тем самым приводит к увеличению α . Поэтому для фольг сплава Sb-8 ат. % In $\alpha > 0$ во всем исследуемом интервале температур. Дальнейшее увеличение индия в сурьме приводит к уменьшению дифференциальной термо-ЭДС фольг из-за того, что для InSb $\alpha < 0$.

Исследования фольг сплавов сурьма-индий, полученных быстрым охлаждением из жидкого состояния, позволяют сделать следующие выводы:

Неравновесная растворимость индия в сурьме достигает 3 ат. %. В фольгах формируется текстура $\{10\bar{1}2\} + (0001)$. Индий в кристаллической решетке сурьмы действует как акцептор. Процессы переноса в фольгах сплавов при $x < 4$ ат. % In определяются акцепторным действием индия, а при $x > 4$ ат. % In — дополнительно влиянием выделений InSb.

Список литературы

1. Бубнов Ю. А., Грабов В. М. // Полупроводники и диэлектрики. Л., 1974. С. 47.
2. Физическое металловедение / Под ред. Р. У. Кана и П. Хаазена. М., 1987. Т. 2.
3. Мирошник И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
4. Русаков А. А. Рентгенография металлов. М., 1977.
5. Хансен М., Андерко К. Структура двойных сплавов. М., 1962. Т. 2.
6. Saunders G. A., Ostū O. // Journ. Phys. Chem. Solid. 1968. V. 29. № 9. P. 1589.
7. Бондаренко М. Г., Грабов М. В., Урюпин О. Н. // Материалы для термоэлектрических преобразователей. Л., 1987. С. 29.
8. Стрельченко С. С., Лебедев В. В. Соединения A^3B^5 : Справочник. М., 1984.

Поступила в редакцию 05.06.89.

УДК 519.28

В. П. КИРЛИЦА

ТОЧНЫЕ D - и A -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ДЛЯ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим линейную модель наблюдений

$$y_i = \Theta_0 + \Theta_1 x_{1i} + \dots + \Theta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где $\Theta_0, \dots, \Theta_k$ — неизвестные параметры, $k+1 \leq N$; ε_i — некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Контролируемые переменные $x_{1i}, \dots, x_{ki}$ принадлежат гиперкубу

$$-1 \leq z_j \leq 1, \quad j = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Обозначим через

$$X_{k,N} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix}$$

матрицу планирования эксперимента, соответствующую плану $\varepsilon_k(N) = \{x^{(1)}, m_1; \dots; x^{(r)}, m_r\}$ с N наблюдениями, $m_1 + \dots + m_r = N$, где m_i — количество наблюдений в точке $x^{(i)} = (x_{1i}, \dots, x_{ki})$.

План $\varepsilon_k^0(N)$ называется точным D -оптимальным (A -оптимальным), если соответствующая ему матрица $X_{k,N}^0$ максимизирует определитель информационной матрицы $M_{k,N} = X_{k,N}' X_{k,N}$ (минимизирует след $Sp M_{k,N}^{-1}$) [1, 2].

Точные D -оптимальные линейные планы достаточно хорошо исследованы. Обширная библиография работ по этой проблеме приведена в [3, 4], однако исследований, посвященных построению точных A -оптимальных линейных планов, нет.

Теорема 1. Планы

$$\varepsilon_1^0(2s) = \{-1, s; 1, s\}, \quad \varepsilon_1^0(2s+1) = \{-1, s; 1, s+1\}, \quad \varepsilon_1^0(2s+1) = \{-1, s+1; 1, s\} \quad (3)$$

являются одновременно точными D - и A -оптимальными для линии регрессии ($k=1$).

Доказательство. То, что планы (3) точные D -оптимальные для модели (1), зависящей от одного фактора, следует из теоремы 2 [3]. Покажем, что планы (3) также и точные A -оптимальные. A -оптимальность планов $\varepsilon_1^0(2s)$ следует из теоремы 2.11.1 [1], поскольку для четных $N = 2s$ планы $\varepsilon_1^0(2s)$ являются непрерывными D -оптимальными. Убедимся, что планы $\varepsilon_1^0(2s+1)$ A -оптимальные, т. е. $Sp[M^{-1}(\varepsilon_1^0(2s+1))] \leq Sp[M^{-1}(\varepsilon_1(2s+1))]$. Последнее неравенство в развернутой записи имеет вид:

$$\frac{2(2s+1)}{(2s+1)^2-1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{2s+1} x_{1i}^2 + 2s+1}{(2s+1) \sum_{i=1}^{2s+1} x_{1i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{2s+1} x_{1i} \right]^2}. \quad (4)$$

Так как знаменатели дробей в (4) неотрицательны, то неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$(4s+2) \left[\sum_{i=1}^{2s+1} x_{1i} \right]^2 - (4s^2 + 4s + 2) \sum_{i=1}^{2s+1} x_{1i}^2 + 8s^3 + 12s^2 + 4s \geq 0. \quad (5)$$

Справедливость неравенства (5) на множестве (2) можно легко обосновать, если учесть, что левая часть (5), относительно каждой из переменных x_{1i} , есть полином второй степени с отрицательным коэффициентом $-4s^2$ при старшей степени. Это обстоятельство позволяет легко показать, что минимум левой части (5) на множестве (2) равен нулю и реализуется на точках спектра плана $\varepsilon_1^0(2s+1)$. Теорема 1 доказана.

Для линейной модели наблюдений (1), согласно теореме 2.11.1 [1], непрерывные планы являются одновременно D - и A -оптимальными. Для линии регрессии ($k=1$) теорема 1 обобщает утверждение теоремы 2.11.1 [1] для точных планов. Однако, вообще говоря, утверждение теоремы 1 нельзя обобщить на случай функции отклика, зависящей от нескольких факторов ($k > 1$). Ниже покажем, что не все D -оптимальные планы $\varepsilon_2^0(3)$ являются A -оптимальными.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать модель наблюдений (1) с двумя факторами, $k=2$. Обозначим через $x^{(1)} = (1, 1)'$, $x^{(2)} = (-1, 1)'$, $x^{(3)} = (-1, -1)'$, $x^{(4)} = (1, -1)'$ вершины квадрата (2). Известно [3, 5], что можно построить четыре D -оптимальных плана $\varepsilon_2^0(3)$ с опорными точками в вершинах квадрата (2). Возникает вопрос, существуют ли D -оптимальные планы $\varepsilon_2^0(N)$, у которых не все опорные точки лежат в вершинах квадрата (2)? Используя идею доказательства теоремы 2 [3], покажем, что такие планы существуют. Предположим, что $\varepsilon_2^0(N)$ D -оптимальный план, для которого $|x_{ij}| < 1$ для некоторых i, j . Без потери общности рассуждений, можно считать, что $|x_{11}| < 1$. Оказывается, что относительно x_{11} определитель $M_{2,N}^0$ является полиномом второй степени: $|M_{2,N}^0| = a_{11}x_{11}^2 + b_{11}x_{11} + c_{11}$. Если $a_{11} = b_{11} = 0$, то $|M_{2,N}^0|$ не будет зависеть от величины x_{11} . Непосредственные вычисления показывают, что для произвольного плана $\varepsilon_2(N)$ коэффициенты a_{11} и b_{11} равны:

$$a_{11} = (N-1) \sum_{i=2}^N x_{2i}^2 - \left[\sum_{i=2}^N x_{2i} \right]^2, \quad (6)$$

$$b_{11} = x_{21} \sum_{i=2}^N x_{1i} \sum_{i=2}^N x_{2i} + \sum_{i=2}^N x_{1i} x_{2i} \sum_{i=2}^N x_{2i} - (N-1) x_{21} \sum_{i=2}^N x_{1i} x_{2i} - \sum_{i=2}^N x_{1i} \sum_{i=2}^N x_{2i}^2. \quad (7)$$

Формулу (6) можно записать в виде:

$$a_{11} = \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (x_{2i} - x_{2j})^2. \quad (8)$$

Из формул (7), (8) следует, что коэффициенты a_{11} , b_{11} равны нулю тогда и только тогда, когда

$$x_{2i} = d, \quad i = \overline{2, N}, \quad (9)$$

где d — произвольное число из интервала $[-1, 1]$. Но, согласно [5], для D -оптимальных планов $\varepsilon_1^0(N)$ условие (9) может выполняться лишь для планов $\varepsilon_2^0(N)$, имеющих только три опорные точки: $\varepsilon_2^0(3) = \{x^{(1)}, 1; x^{(3)}, 1; x^{(4)}, 1\}$, $\varepsilon_2^0(3) = \{x^{(2)}, 1; x^{(3)}, 1; x^{(4)}, 1\}$, $\varepsilon_2^0(3) = \{x^{(4)}, 1; x^{(1)}, 1; x^{(2)}, 1\}$, $\varepsilon_2^0(3) = \{x^{(3)}, 1; x^{(1)}, 1; x^{(2)}, 1\}$. Попарная линейная комбинация этих планов приводит к D -оптимальным планам:

$$\varepsilon_2^0(3) = \{\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}, 1; x^{(3)}, 1; x^{(4)}, 1\}, \varepsilon_2^0(3) = \{x^{(1)}, 1; x^{(4)}, 1; \lambda x^{(2)} + (1 - \lambda)x^{(3)}, 1\}, \varepsilon_2^0(3) = \{x^{(1)}, 1; x^{(2)}, 1; \lambda x^{(3)} + (1 - \lambda)x^{(4)}, 1\},$$

$$\varepsilon_2^0(3) = \{\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(4)}, 1; x^{(2)}, 1; x^{(3)}, 1\}, \lambda \in [0, 1],$$

у которых три опорные точки лежат на параллельных ребрах квадрата (2), причем две из них — в вершинах квадрата (2). Резюмируя предыдущие рассуждения, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Для модели наблюдений (1), зависящей от двух факторов, только насыщенные D -оптимальные планы (10) могут иметь опорные точки, не лежащие в вершинах квадрата (2). Для $N > 3$ опорные точки D -оптимальных планов $\varepsilon_2^0(N)$ обязаны лежать в вершинах квадрата (2), структура таких планов описана в [5]. Других D -оптимальных планов $\varepsilon_2^0(N)$, кроме указанных в этой теореме, не существует.

Легко убедиться, что не все планы (10) являются A -оптимальными. След дисперсионных матриц, соответствующих планам (10), является функцией параметра λ , $0 \leq \lambda \leq 1$. Эта функция принимает все значения из интервала $[5/4, 6/4]$. Используя рассуждения, которые использовались при доказательстве теоремы 1, можно показать, что минимальное значение следа матрицы $M_{2,3}^{-1}$ равно $5/4$ и достигается на планах (10) при $\lambda = 1/2$.

Точные A -оптимальные планы построены для частных случаев модели (1). В общем случае, для произвольной модели наблюдений (1), проблема построения точных A -оптимальных планов остается открытой.

Список литературы

1. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М., 1971.
2. Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., 1987.
3. Moysiadis C., Koulias S. // Math. Operationsforsch. u. Statist. Ser. Statist. 1983. N 3. P. 367.
4. Бродский В. З., Голикова Т. И. // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17. Вып. 3. С. 578.
5. Кирлица В. П. // Методы и программное обеспечение обработки информации и прикладного статистического анализа данных на ЭВМ. Минск, 1985. С. 64.

Поступила в редакцию 19.12.87.

УДК 517.977

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, Н. А. ЯНУШАУСКАЙТЕ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Исследуются комбинаторные дискретные задачи оптимального управления, к которым относятся, например, задачи составления очередей на выполнение работ, где все величины измеряются деньгами. Для решения этих задач будем использовать метод динамического программирования [1] и принцип максимума [2].

Рассмотрим многоступенчатую задачу оптимального управления:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_0(x(k), k) \rightarrow \min_{L(k)}, \quad (1)$$

$$x_i(k+1) = f_i(x(k), k), \quad (2)$$

$$i = 0, 1, \dots, L(k), 0 \leq L(k) \leq M, k = \overline{0, N-1},$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) \quad i = L(k) + 1, \dots, M, \quad (3)$$

с начальным условием

$$x_i(0) = p_i, \quad i = \overline{0, M}. \quad (4)$$

Здесь g_0, f_i — заданные скалярные функции, непрерывные по своим переменным вместе с $\frac{\partial g_0}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial x}$, ($i = \overline{0, M}$), p_i, M — фиксированные числа.

Рассмотрим непрерывное по управлению расширение задачи (1) — (4). Для этой цели, применяя принцип погружения, задачу (1) — (4) вкладываем в класс общих задач оптимального управления дискретными системами. Если положить

$$\bar{x}_i(k+1) = \lambda_i(k) \bar{x}_i(k) + (1 - \lambda_i(k)) f_i(\bar{x}(k), k),$$

$$\lambda_i(k) \in [0, 1], \quad i = \overline{0, M}, \quad (5)$$

то ясно, что из (5) вытекает (2) при $\lambda_i(k) = 0$, если $i = 0, 1, \dots, L(k)$, где $0 \leq L(k) \leq M$, из (5) вытекает (3) при $\lambda_i(k) = 1$, если $i = L(k) + 1, \dots, M$.

Обозначим:

$$\bar{x} = (\bar{x}_0(k), \dots, \bar{x}_M(k))', \quad \bar{f} = (f_0, \dots, f_M)',$$

$$u = (u_0(k), \dots, u_M(k))', \quad u_i(k) = \lambda_i(k) \in [0, 1].$$

Тогда систему (2), (3) можно записать в виде:

$$\bar{x}(k+1) = u'(k) D_0 \bar{x}(k) + u'(k) D_0 \bar{f}(\bar{x}(k), k) + \bar{f}(\bar{x}(k), k) =$$

$$= \bar{f}(\bar{x}(k), u(k), k), \quad k = \overline{0, N-1},$$

где D_0 — трехмерная матрица, удовлетворяющая условию

$$u'(k) D_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0(k) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1(k) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_M(k) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_0(\bar{x}(k), k) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (6)$$

$$\bar{x}(k+1) = \bar{f}(\bar{x}(k), u(k), k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (7)$$

$$\bar{x}(0) = p, \quad p = (p_0, \dots, p_M), \quad (8)$$

$$u(k) \in U, \quad U = \{\lambda_i(k) \mid 0 \leq \lambda_i(k) \leq 1, \quad i = \overline{0, M}\}. \quad (9)$$

Для решения задачи (1) — (4) используем ее расширение (6) — (9) и метод динамического программирования.

Рассмотрим случай, когда $L(k), k = \overline{0, N-1}, 0 \leq L(k) \leq M$, задают последовательный набор координат.

Теорема 1. Если управление $\bar{u}(k)$ имеет вид:

$$\bar{u}_i(k) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, \bar{L}(k), \\ 1, & i = \bar{L}(k) + 1, \dots, M, \end{cases} \quad (10)$$

и удовлетворяет уравнению Беллмана:

$$f(\bar{x}(l), l) = \min_{u \in U} [g_0(\bar{x}(l), l) + f(\bar{f}(\bar{x}(l), \bar{u}(l), l), l+1)], \quad (11)$$

$$l = \overline{0, N-1}, f(\bar{x}, N-1) = g_0(\bar{x}, N-1),$$

где $f(\bar{x}, l)$ — функция Беллмана, то оно является оптимальным управлением в задаче (1) — (4).

Доказательство. Для доказательства теоремы используем метод динамического программирования. По условию теоремы $\bar{u}(k)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (11), значит, оно является оптимальным управлением [1] для задачи (6) — (9). Так как задача (6) — (9) является расширением задачи (1) — (4), то управление (10) является оптимальным и для задачи (1) — (4).

Теорема доказана.

Рассмотрим общий случай, когда число стационарных координат может быть непоследовательно и рассчитаем их оптимальное количество. Для этой цели рассмотрим вторую задачу:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_0(\tilde{x}(k), k) \rightarrow \min_{L(k)}, \quad (12)$$

$$\tilde{x}_i(k+1) = \tilde{f}_i(\tilde{x}(k), k), i \in I(k) = \{i_0, i_1, \dots, i_{L(k)}\}, \quad (13)$$

$$0 \leq L(k) \leq M, k = \overline{0, N-1},$$

$$I(k) \subset \{0, 1, \dots, M\},$$

$$\tilde{x}_i(k+1) = \tilde{x}_i(k), i \in \overline{I(k)}, \quad (14)$$

$$x_i(0) = p_i, i = \overline{0, M}. \quad (15)$$

Задачу (12) — (15) погружаем в общий класс задач оптимального управления дискретными системами. Обозначим:

$$\hat{x}_i(k+1) = \lambda_i(k) \hat{x}_i(k) + (1 - \lambda_i(k)) \tilde{f}(\hat{x}(k), k), \quad (16)$$

$$\lambda_i(k) \in [0, 1],$$

$$\hat{x} = (\hat{x}_0(k), \dots, \hat{x}_M(k))', \hat{f} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_M),$$

$$u = (u_0(k), \dots, u_M(k))', u_i(k) \in [0, 1], i = \overline{0, M}.$$

Тогда систему (16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= u'(k) D_0 \hat{x}(k) + u'(k) D_0 \hat{f}(\hat{x}(k), k) + \hat{f}(\hat{x}(k), k) = \\ &= u'(k) D_0 \hat{f}_0(\hat{x}(k), k) + \hat{f}(\hat{x}(k), k), k = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\hat{f}_0(\hat{x}(k), k) = \hat{x}(k) + \hat{f}(\hat{x}(k), k)$.

Таким образом, получили, что задача минимизации функционала

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_0(\hat{x}(k), k) \quad (18)$$

вдоль решений системы (17) с начальным условием

$$\hat{x}(0) = p, p = (p_0, \dots, p_M) \quad (19)$$

является расширением задачи (12) — (15).

Теорема 2. Если управление $u^0 = (u_0^0(k), \dots, u_M^0(k))', k = \overline{0, N-1}$, — решение уравнения Беллмана:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}(l), l) &= \min_{u \in U} [g_0(\hat{x}(l), l) + f(\hat{x}(l+1), l+1)], f(\hat{x}, N-1) = \\ &= g_0(\hat{x}, N-1), \end{aligned} \quad (20)$$

и выполнено условие:

$$\psi'(k) \hat{f}_0(\hat{x}(k), k) \neq 0, \forall k \in \overline{0, N-1}, \quad (21)$$

где

$$\psi(k) = \frac{\partial H(\hat{x}(k), \psi(k+1), u(k), k)}{\partial x}, \quad (22)$$

$$H(\hat{x}(k), \psi(k+1), u(k), k) = g_0(\hat{x}(k), k) + \psi'(k+1) (\hat{f}(\hat{x}(k), k) + u'(k) \hat{D}_0 \hat{f}_0(\hat{x}(k), k)), k = \overline{0, N-1}, \quad (23)$$

то множество $I(k)$ состоит из таких индексов i_s , для которых $u_{i_s}^0(k) = \lambda_{i_s}(k) = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем принцип максимума. Поскольку управление $u^0(k)$ удовлетворяет уравнению (20), то оно является оптимальным для процесса (17) — (19). Из этого следует, что вдоль оптимального процесса $(u^0(k), \hat{x}^0(k))$ и соответствующего решения $\psi^0(k)$ сопряженного уравнения (22) выполняется условие максимума:

$$H(\hat{x}^0(k), \psi^0(k), u^0(k), k) = \max_{u \in U} H(\hat{x}^0(k), \psi^0(k), u, k), k = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

В силу линейности по u гамильтониана (23) и условия (21) следует, что оптимальное управление принимает значение 0 или 1.

Из замечания относительно связи задач (12) — (15) и (17) — (19) следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. Минск, 1975.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

Поступила в редакцию 02.12.88.

УДК 517.977

С. ТАГАЙНАЗАРОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных r -вектор функций $u = u(t) = u_p(t)$, $p \in P$, $t \in T$, рассмотрим задачу оптимального управления: *

$$J(u(\cdot) | \theta, \xi(\cdot), v) = c' x(t^*) \rightarrow \max_{u(\cdot)} \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)\xi(t), \quad (2)$$

$$x(t_*) \in X_* = \{x \in R^n : x = x_0 + G\theta, \theta \in \Theta = \{\theta \in R^l : \theta_* \leq \theta \leq \theta^*\}\}, \quad (3)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R^r : u_* \leq u \leq u^*\}, \quad (4)$$

$$\xi(t) \in \Xi = \{\xi \in R^k : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\}, t \in T = [t_*, t^*], \quad (5)$$

$$\omega(t^*) = Hx(t^*) + Lv, v \in V = \{v \in R^m : v_* \leq v \leq v^*\}, h_* \leq \omega(t^*) \leq h^*. \quad (6)$$

Здесь $A(t) = A(N, N|t)$, $B(t) = B(N, P|t)$, $D(t) = D(N, \Gamma|t)$, $t \in T$, — матричные функции с кусочно-непрерывными элементами; $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $P = \{1, 2, \dots, r\}$, $\Gamma = \{1, 2, \dots, k\}$; $G = G(N, \Lambda)$, $H = H(I, N)$,

* Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Задачи управления Ч. 2.

$L = L(I, \gamma)$ — матрицы; $\Lambda = \{1, 2, \dots, l\}$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\gamma = \{1, 2, \dots, q\}$; $x(t)$ — n -вектор фазовых переменных системы (2) в момент времени t ; $u(t)$, $t \in T$, — g -мерное управляющее воздействие; $\xi(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывная k -вектор-функция неконтролируемых возмущений на входе динамической системы; x_0 — детерминированная составляющая вектора начальных значений фазовых переменных; θ — l -вектор возмущений начальных значений фазовых переменных; v — m -вектор возмущений выходных сигналов; $\omega(t^*)$ — m -вектор терминальных значений выходных сигналов; c — n -вектор параметров критерия качества, $\theta^* \geq 0$, $\theta_* \leq 0$ — l -векторы ограничений на возмущения начальных значений фазовых переменных; u_* , u^* — r -векторы ограничений на управляющие воздействия; $\xi^* \geq 0$, $\xi_* \leq 0$ — k -векторы ограничений на неконтролируемые возмущения на входе динамической системы; $v^* \geq 0$, $v_* \leq 0$ — m -векторы ограничений на возмущения выходных сигналов; h_* , h^* — m -векторы ограничений на выходные сигналы.

Определение 1. Пусть задана совокупность $\mu = (\chi, d_*, d^*)$, где χ — число, d_* , d^* — m -векторы. Кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее неравенствам (4), назовем μ -допустимым (или, кратко, μ -управлением), если

$$W(t^*) \subset W_\mu = \{\omega \in R^m: h_* + \chi d_* \leq \omega \leq h^* + \chi d^*\}.$$

При исследовании задачи оптимального управления динамической системой в условиях неопределенности в рамках принципа получения гарантированного результата естественно качество допустимого управления оценивать по величине гарантированного значения критерия качества: $J^-(u(\cdot)) = \min_{\substack{\theta \in \Theta, v \in V, \xi(t) \in \Xi, t \in T}} J(u(\cdot) | \theta, \xi(\cdot), v)$.

Определение 2. μ -управление $u^0 = u^0(t)$, $t \in T$, называется оптимальным, если $J^-(u^0(\cdot)) = \max_{u(\cdot)} J^-(u(\cdot))$.

Пусть $F(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, — фундаментальная матрица решений одной части $\dot{x} = Ax$ динамической системы (2):

$$F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau), \quad \dot{F} = AF, \quad F(t_*) = E.$$

Обозначим: $\bar{c}'(t) = c'F(t^*, t)B(t)$, $\bar{H}(t) = HF(t^*, t)B(t)$, $\bar{D}(t) = HF(t^*, t)D(t)$, $\bar{G} = HF(t^*, t_*)G$, $\bar{x}_0 = HF(t^*, t_*)x_0$.

Из множества I выделим подмножество $I_{\text{оп}}$. На отрезке выберем конечное множество моментов $T_{\text{оп}} = \{t_j, j \in J_{\text{оп}}\}$, $t_j < t_{j+1}$, $|J_{\text{оп}}| \leq |I_{\text{оп}}|$. Каждому моменту t_j поставим в соответствие такой набор индексов: $P_{\text{оп}}(t_j) = P_{\text{оп}}^j \subset P$, что $|I_{\text{оп}}| = |P_{\text{оп}}^j|$. Обозначим: $P_{\text{оп}} = \{P_{\text{оп}}^j, j \in J_{\text{оп}}\}$, $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, P_{\text{оп}}\}$. Совокупность $M_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, K_{\text{оп}}\}$ назовем опорой задачи (1) — (6), если невырождена опорная матрица $\Phi(M_{\text{оп}}) = \Phi(I_{\text{оп}}, K_{\text{оп}})$.

Определение 3. Пару $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$ из μ -допустимого управления $u(\cdot)$ и опоры $M_{\text{оп}}$ назовем опорным μ -управлением. Будем считать его невырожденным, если $u_{*p} < u_p(t) < u_p^*$, $p \in P_{\text{оп}}(t)$, $t \in T_{\text{оп}}$, и при всех $\theta \in \Theta$, $\xi(t) \in \Xi$, $t \in T$; $v \in V$ выполняются неравенства:

$$h_{*n} + \chi d_{*n} < \int_T \bar{H}(I_n, P|t) u(t) dt + \int_T \bar{D}(I_n, \Gamma|t) \xi(t) dt + \\ + (\bar{x}_0)_n + G(I_n, N) \theta + L(I_n, \gamma) v < h_{*n}^* + \chi d_{*n}^*,$$

где $I_n = I \setminus I_{\text{оп}}$, $h_{*n} = h_*(I_n)$, $h_n^* = h^*(I_n)$, $(\bar{x}_0)_n = \bar{x}_0(I_n)$.

Опорному управлению $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$ поставим в соответствие вектор $Z = \int_T \bar{H}(I, P|t) u(t) dt + \bar{x}_0$, траекторию $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - H'v, \quad (7)$$

где v — вектор потенциалов:

$$v = (c(t_j), j \in J_{\text{оп}})' \Phi^{-1}. \quad (8)$$

Положим

$$\Delta(t) = -B'(t)\psi(t), \quad t \in T. \quad (9)$$

Далее подсчитаем:

$$\alpha_i^- = h_{*i} + \chi d_{*i} - \varphi_i^-, \quad \alpha_i^+ = h_i^* + \chi d_i^* - \varphi_i^+,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i^- &= \min_{\xi(t) \in \Xi, t \in T} \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t) \xi(t) dt + \min_{\theta \in \Theta} \bar{G}(i, \Lambda) \theta + \\ &+ \min_{v \in V} L(i, \gamma) v = \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t) \xi_{(i)}^-(t) dt + \bar{G}(i, \Lambda) \theta_{(i)}^- + L(i, \gamma) v_{(i)}^-, \\ \varphi_i^+ &= \max_{\xi(t) \in \Xi, t \in T} \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t) \xi(t) dt + \max_{\theta \in \Theta} \bar{G}(i, \Lambda) \theta + \\ &+ \max_{v \in V} L(i, \gamma) v = \int_T \bar{D}(i, \Gamma|t) \xi_{(i)}^+(t) dt + \bar{G}(i, \Lambda) \theta_{(i)}^+ + L(i, \gamma) v_{(i)}^+. \end{aligned}$$

2. Перейдем к исследованию субоптимальных управлений.

Определение 4. μ -управление $u^e(t)$, $t \in T$, назовем (строго) ε -оптимальным, если

$$J^-(u^0) - J^-(u^e) < \varepsilon.$$

Для опорного управления $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$ подсчитаем вектор потенциалов $v_{\text{оп}}$ (8); коуправление $\Delta(t)$, $t \in T$, (9). Введем понятия μ -псевдоуправления $\omega(t)$, $t \in T$, и вектор ζ , сопровождающих опору $M_{\text{оп}}$.

Разобьем множества $I_{\text{оп}}$, T на непересекающиеся подмножества:

$$I_{\text{оп}}^+ = \{i \in I_{\text{оп}} : v_i \geq 0\}, \quad I_{\text{оп}}^- = \{i \in I_{\text{оп}} : v_i \leq 0\},$$

$$I_{\text{оп}}^+ \cap I_{\text{оп}}^- = \emptyset, \quad I_{\text{оп}}^+ \cup I_{\text{оп}}^- = I_{\text{оп}};$$

$$T_{(p)}^+ = \{t \in T : \Delta_p(t) \geq 0\}, \quad T_{(p)}^- = \{t \in T : \Delta_p(t) \leq 0\},$$

$$T_{(p)}^+ \cap T_{(p)}^- = \emptyset, \quad T_{(p)}^+ \cup T_{(p)}^- = T, \quad p \in P.$$

Сначала построим $\zeta_{\text{оп}} : \zeta_i = \alpha_i^+$, если $i \in I_{\text{оп}}^+$; $\zeta_i = \alpha_i^-$, если $i \in I_{\text{оп}}^-$. Функцию $\omega(t)$, $t \in T$ построим в виде $\omega(t) = \omega^\pi(t) + \omega^\delta(t)$, $t \in T$. Положим $\omega_p^\pi(t) = u_{*p}$, если $t \in T_{(p)}^+$; $\omega_p^\pi(t) = u_p^*$, если $t \in T_{(p)}^-$; $\omega_p^\delta(t) = \sum_{j \in J_{(p)}} \omega_p^j \delta(t - t_j)$, $t \in T$, $p \in P$, где совокупность $\omega_{\text{оп}} = (\omega_p^j, j \in J_{(p)},$

$p \in P)$ равна $\omega_{\text{оп}} = Q \left(\zeta_{\text{оп}} - \int_T \bar{H}(I_{\text{оп}}, P|t) \omega^\pi(t) dt - (\bar{x}_0)_{\text{оп}} \right)$. В заключение положим $\zeta_{\text{н}} = \int_T \bar{H}(I_{\text{н}}, P|t) \omega(t) dt + (\bar{x}_0)_{\text{н}}$.

Число

$$\beta = \beta(u(\cdot), M_{\text{оп}}) = \int_T \Delta'(t) (u(t) - \omega^\pi(t)) dt + v_{\text{оп}}' (\zeta_{\text{оп}} - Z_{\text{оп}})$$

назовем оценкой субоптимальности опорного μ -управления $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$. Решения $x^*(t)$, $t \in T$ системы $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(t_*) = x_0$ назовем идеальной траекторией соответствующих управлений $u(t)$, $t \in T$. Построим экстремальные траектории $x_{(i)}^+(t)$, $x_{(i)}^-(t)$, $t \in T$, $i \in I_{\text{оп}}$ динамической системы (2), порождаемые соответственно совокупностями:

$$x_{(i)}^+(t_*) = x_0 + G\theta_{(i)}^+, \quad u(t), \quad \xi_{(i)}^+(t), \quad t \in T, \quad i \in I_{\text{оп}}$$

и

$$x_{(i)}^-(t) = x_0 + G\theta_{(i)}^-, \quad u(t), \quad \xi_{(i)}^-(t), \quad t \in T, \quad i \in I_{\text{оп}}.$$

Им соответствуют экстремальные значения выходных сигналов:

$$\omega_{(i)}^+(t^*) = H(i, N) x_{(i)}^+(t^*) + L(i, \Lambda) v_{(i)}^+,$$

$$\omega_{(i)}^-(t^*) = H(i, N) x_{(i)}^-(t^*) + L(i, \Lambda) v_{(i)}^-, \quad i \in I_{\text{оп}}.$$

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon > 0$ для ε -оптимальности в задаче (1)–(6) μ -управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры $M_{\text{оп}}$, при которой оценка субоптимальности опорного μ -управления $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$ удовлетворяла неравенству $\beta(u(\cdot), M_{\text{оп}}) \leq \varepsilon$.

Принцип ε -максимума. При любом $\varepsilon > 0$ μ -управление $u(t)$, $t \in T$, является ε -оптимальным управлением задачи (1)–(6) тогда и только тогда, когда существует такая опора $M_{\text{оп}}$, что вдоль опорного μ -управления $\{u(\cdot), M_{\text{оп}}\}$ и соответствующих ему идеальной траектории $x^*(t)$, $t \in T$ и решений $\psi(t)$, $t \in T$ сопряженной системы (7) выполняется принцип ε -максимума:

1) (условие $\varepsilon(\cdot)$ — максимума):

$$\psi'(t) B(t) u(t) = \max_{u_* \leq u \leq u^*} \psi'(t) B(t) u - \varepsilon(t), \quad t \in T,$$

2) (условие трансверсальности)

$$v_i h'_{(i)} x^*(t^*) = \max_{\bar{\alpha}_i < \omega_i < \alpha_i^+} v_i \omega_i - \varepsilon_i, \quad i \in I_{\text{оп}},$$

$$3) \quad \beta = \int_T \varepsilon(t) dt + \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \varepsilon_i \leq \varepsilon.$$

Поступила в редакцию 03.02.89.

УДК 514.76

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА Φ -ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Пусть G — связная группа Ли с единицей e , Φ — ее аналитический автоморфизм, G^Φ — группа неподвижных точек автоморфизма Φ . Обозначим через M реализацию В. И. Ведерникова [1] однородного Φ -пространства G/G^Φ , через I — действие G на M [1].

$$I_g(x) = \Phi(g) x g^{-1}, \quad (1)$$

$x \in M$, $g \in G$. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и G^Φ соответственно, $\varphi = (d\Phi)_e$, $A = \varphi - id$, $\mathfrak{m} = Ag$ — касательное пространство к M в единице e [2].

Предположим, что на M существует почти комплексная структура J_1 . Она называется G -инвариантной, если для всех $g \in G$

$$dI_g \circ J_1 = J_1 \circ dI_g. \quad (2)$$

Обозначим через J сужение J_1 на $\mathfrak{m}$.

Теорема 1. Предположим, что на M существует почти комплексная G -инвариантная структура J_1 . Пусть ∇ — инвариантная аффинная связность пространства M , Γ — ее функция Вана [2]. Для того чтобы ∇ была почти комплексной связностью относительно J_1 (т. е. $\nabla J_1 = 0$), необходимо и достаточно, чтобы для всех $X \in \mathfrak{g}$

$$J \circ \Gamma_X = \Gamma_X \circ J. \quad (3)$$

Доказательство. Если ∇ — почти комплексная связность, то из равенств $(\nabla_{X^*} J_1 \tilde{Y})_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - \Gamma_X J \tilde{Y}_e$, $J(\nabla_{X^*} \tilde{Y})_e = J[X^*, \tilde{Y}]_e - J\Gamma_X \tilde{Y}_e = [X^*, J_1 \tilde{Y}]_e - J\Gamma_X \tilde{Y}_e$ имеем $J \cdot \Gamma_X = \Gamma_X \cdot J$. Обратно, рассмотрим связность $\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} = -J_1 \nabla_X J_1 \tilde{Y}$ с функцией Вана $\tilde{\Gamma}$. Тогда получаем:

$$\tilde{\Gamma}_X \tilde{Y}_e = -(\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e = J(\nabla_{X^*}, J_1 \tilde{Y})_e + [X^*, \tilde{Y}]_e =$$

$$= -J\Gamma_X J\tilde{Y}_e + J[X^*, J_1\tilde{Y}]_e + [X^*, \tilde{Y}]_e = \Gamma_X \tilde{Y}_e.$$

В силу совпадения функций Вана, имеем совпадение связностей.

Допустим теперь, что $\mathfrak{g}$ обладает комплексной структурой J . Тогда на G существует бинвариантная почти комплексная структура $\tilde{J}$, кручение которой нулевое и $\tilde{J}_e = J$ [3].

Определение. Будем говорить, что почти комплексная структура $\tilde{J}$ индуцирует на M почти комплексную структуру, если на M существует G -инвариантная почти комплексная структура $\tilde{J}$ такая, что $\tilde{J}|_M = J$.

Отметим, что J индуцирует на M почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда $J(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$.

Теорема 2. Пусть $\varphi \circ J = J \circ \varphi$. Тогда $\tilde{J}$ индуцирует на M почти комплексную структуру $\tilde{J}$. Если M — регулярное Φ -пространство [2], то кручение [3] $\tilde{J}$ нулевое.

Доказательство. В этом случае $A \circ J = J \circ A$, а значит, $J(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. Для доказательства второй части теоремы нужно заметить, что $J(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, а поэтому $J[X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X, JY]_{\mathfrak{m}}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Следствие. Если Φ — внутренний автоморфизм группы Ли G , то любая бинвариантная почти комплексная структура группы Ли G индуцирует на M почти комплексную структуру.

Ограничение J на $\mathfrak{m}$ также обозначим через J .

Предположим, что Φ -пространство M допускает инвариантное N -оснащение [2]. В силу (2) получаем, что подпространство JN также будет задавать некоторое инвариантное JN -оснащение, которое будем называть J -сопряженным по отношению к инвариантному N -оснащению. Если $JN \subset N$, то инвариантное N -оснащение будем называть J -самосопряженным.

Теорема 3. Предположим, что инвариантное N -оснащение не является J -самосопряженным, а G^Φ -связность [2] ∇ группы Ли G является почти комплексной связностью относительно $\tilde{J}$. Для того чтобы индуцированная ею связность [2] была почти комплексной связностью относительно $\tilde{J}$, необходимо и достаточно, чтобы ∇ индуцировала одну и ту же связность вдоль инвариантных N - и JN -оснащений.

Доказательство. Условие того, что G^Φ -связность ∇ группы Ли G с функцией Вана Ψ является почти комплексной связностью относительно $\tilde{J}$, имеет вид: $J \circ \Psi_X = \Psi_X \circ J$, $X \in \mathfrak{g}$. Обозначим через P оператор проектирования на $\mathfrak{m}$ вдоль N , а через P_1 — оператор проектирования на $\mathfrak{m}$ вдоль JN , $\Gamma = P\Psi$, $\Gamma^1 = P_1\Psi$. Тогда $P_1 = -JPJ$. Если связности совпадают, то $J \circ \Gamma_X = JP_1\Psi_X = PJ \circ \Psi_X = P\Psi_X \circ J = \Gamma_X \circ J$. Обратно имеем $\Gamma_X^1 = P_1\Psi_X = -JPJ \circ \Psi_X = -JP\Psi_X \circ J = -J \circ \Gamma_X \circ J = \Gamma_X$.

Теорема 4. Предположим, что инвариантное N -оснащение является J -самосопряженным. Для того чтобы G^Φ -связность ∇ группы Ли G с функцией Вана Ψ индуцировала на M почти комплексную связность относительно $\tilde{J}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$J(\Psi_X Y) - \Psi_X(JY) \in N, \quad (4)$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Так как $\Gamma = P\Psi$, то, используя теорему 1, приходим к равенству $J(P\Psi_X Y) = P\Psi_X JY$. В силу J -самосопряженности инвариантного N -оснащения $J \circ P = P \circ J$. Отсюда легко получить (4). Обратное очевидно.

Предположим теперь, что M — регулярное Φ -пространство. Используя [4] и отображение $f: G/G^\Phi \rightarrow M$, $aG^\Phi \rightarrow \Phi(a)a^1$, исходя из G^Φ -связ-

ности ∇ группы G , можно индуцировать на M с помощью отображения $\tilde{f} = \tilde{f} \circ \pi$ связность $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = d\tilde{f} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \quad (5)$$

где $\tilde{X}$ и $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ и $\tilde{Y}$ являются $\tilde{f}$ -связанными векторными полями. Если α , $\tilde{\alpha}$ — функции Номидзу [5] связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно, то из (5) следует, что для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$\tilde{\alpha}(AX, AY) = A\alpha(X, Y). \quad (6)$$

Теорема 5. Для того чтобы индуцированная связность (5) была связностью почти комплексной структуры $\tilde{J}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$J\alpha(X, Y) - \alpha(X, JY) \in \mathfrak{h}. \quad (7)$$

Доказательство. Учитывая биинвариантность $\tilde{J}$ и формулу $\tilde{f} \circ L_g = I_g \circ \tilde{f}$, легко показать, что $d\tilde{f}_g \circ \tilde{J}_g = \tilde{J}_{\tilde{f}(g)} \circ d\tilde{f}_g$. Тогда $(\tilde{J} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{J} \tilde{Y}) \Leftrightarrow (\tilde{J} d\tilde{f} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = d\tilde{f} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{J} \tilde{Y}) \Leftrightarrow (d\tilde{f} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = d\tilde{f} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{J} \tilde{Y})$. Учитывая (6) и регулярность Φ -пространства M , имеем (7). Обратное очевидно.

Пусть теперь M — 3-циклическое пространство [6]. В этом случае оператор $J_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta)$, $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$, задает на $\mathfrak{m}$ комплексную структуру [6].

Теорема 6. Для того чтобы индуцированная связность (5) 3-циклического пространства M была почти комплексной [6], необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$\varphi\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta Y) \in \mathfrak{h}. \quad (8)$$

Доказательство. В силу [6], $\tilde{\nabla}$ является почти комплексной тогда и только тогда, когда $J_0\alpha(X, Y) = \alpha(X, J_0Y)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Учитывая (6), регулярность Φ -пространства M и тождество [6] $\theta^2 + \theta + E = 0$ на $\mathfrak{m}$, приходим к (8).

Обозначим через M_1 подпространство 3-циклического пространства M , причем степень Φ_1 также равна 3 [7].

Теорема 7. На любом подпространстве M_1 3-циклического пространства M существует почти комплексная структура.

Доказательство. Так как $\theta(m_1) \subset m_1$, где m_1 — касательное пространство к M_1 в единице, то можно положить $J_0^1 = J_0|_{m_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta_1^2 - \theta_1)$, $\theta_1 = \theta|_{m_1}$. Тогда тензорное поле $J_x^1 = (dI_g^1)_e J_0^1 (dI_g^1)_x^{-1}$, где $x \in M_1$, $g \in G_1$, $I_g^1(x) = \Phi_1(g) x g^{-1}$, определяет на M_1 почти комплексную структуру, инвариантную относительно G и $D_1 = \Phi_1|_{M_1}$.

Предположим, что M_1 допускает в M инвариантное N -оснащение [7]. Аналогичным образом определим J_0 -сопряженное и J_0 -самосопряженное оснащения на M_1 в M .

Очевидно, что J_0 -самосопряженность оснащения N в M эквивалентна его самосопряженности, т. е. $\theta N \subset N$.

Так как на M_1 существует инвариантное N -оснащение, то инвариантная связность ∇ пространства M индуцирует на M_1 инвариантную связность $\tilde{\nabla}$ [7]. Пусть $\tilde{\alpha}$ — функция Номидзу связности $\tilde{\nabla}$, а α — функция Номидзу связности ∇ .

Аналогично теореме 3 доказывается следующая

Теорема 8. Пусть инвариантное N -оснащение не является самосопряженным, а ∇ — почти комплексная связность относительно канонической почти комплексной структуры 3-циклического однородного пространства M . Для того чтобы она индуцировала на M_1 почти комплексную связность относительно J^1 , необходимо и достаточно, чтобы она индуцировала одну и ту же связность вдоль инвариантных N - и J_0N -оснащений.

Учитывая равенство $\tilde{\alpha}(X, Y) = P\alpha(X, Y)$, где P — оператор проектирования вдоль N на m_1 , аналогично теореме 6 можно доказать следующую теорему.

Теорема 9. Предположим, что инвариантное N -оснащение является самосопряженным. Для того чтобы ∇ индуцировала на M_1 почти комплексную связность $\bar{\nabla}$ относительно J^1 , необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in m_1$ $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta Y) \in N$.

Теорема 10. Пусть инвариантное N -оснащение является самосопряженным. Для того чтобы индуцированная аффинная связность удовлетворяла условиям:

а) $\bar{\nabla}$ является инвариантной относительно D_1 ;

б) $\bar{\nabla}$ является почти комплексной связностью относительно J^1 , необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in m_1$

$$\alpha(X, Y) \in N. \quad (9)$$

Доказательство. Учитывая [8] и теорему 9, запишем условия а) и б) через функцию Номидзу α : $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(\theta X, \theta Y) \in N$, $\theta\alpha(X, Y) - \alpha(X, \theta Y) \in N$. Они влекут включение $\alpha(AX, \theta Y) \in N$, которое в силу регулярности M и произвольности X и Y эквивалентно (9). И наоборот, из (9) следует, что функция Номидзу индуцированной связности $\tilde{\alpha}(X, Y) = P\alpha(X, Y) \equiv 0$. Выполнимость условий а) и б) очевидна.

Следствие. На любом подпространстве 3-циклического пространства существует единственная индуцированная связность $\bar{\nabla}$, обладающая свойствами:

а) $\bar{\nabla}$ инвариантна относительно G_1 ;

б) $\bar{\nabla}$ инвариантна относительно D_1 ;

в) $\bar{\nabla}$ является связностью почти комплексной структуры относительно J^1 .

Замечание. В силу работы [6] на M_1 существует единственная связность ∇_1 , удовлетворяющая условиям а) — в) следствия. Это показывает, что ∇_1 совпадает с $\bar{\nabla}$.

Список литературы

1. Ведерников В. И. Обобщенные симметрические пары: Матер. II Прибалт. геом. конференц. Тарту, 1965. С. 36.
2. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1982. № 2. С. 63.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
4. Егнazarян К. М. // Изв. вузов. Матем. 1979. № 1. С. 79.
5. Nomizu K. // Amer. Journ. Math. 1954. V. 76. № 1. P. 33.
6. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1967. № 12. С. 65.
7. Чурбанов Ю. Д. О подпространствах Ф-пространств: Тез. сообщ. IX Всесоюз. геом. конференц. Кишинев, 1988. С. 352.
8. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1967. № 3. С. 88.

Поступила в редакцию 14.10.88.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИНТАКСИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕПРОЕКТИВНЫХ И СЛАБОПРОЕКТИВНЫХ СООБЩЕНИЙ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Одним из путей совершенствования механизмов общения пользователей с автоматизированной информационной системой (АИС) является снятие ограничений на синтаксическую структуру входных сообщений. В частности, интеллектуальные возможности АИС могут быть существенно расширены, если обеспечить в системе синтаксический анализ непроективных и слабопроективных предложений естественного языка. В данной статье изложены результаты математического моделирования такого анализа, являющиеся развитием предложенного подхода к моделированию анализа проективных сообщений, основанного на исследовании синтагматических отношений на цепочках входного языка *.

Достаточные условия проективности сообщений. Пусть U — словарь входного языка (входной словарь), элементы которого будем называть словами, U^* — множество всех цепочек, а U^+ — множество всех непустых цепочек в U . Определим на цепочках входного словаря отношения парадигматического и синтагматического подчинения и синтагматической эквивалентности *.

Определение 1. Отношением парадигматического подчинения назовем рефлексивное и антисимметричное отношение Δ , если для любых цепочек $a, b, c \in U^+$ и $m, n \in U^*$:

- 1) $(mbn, c) \in \Delta$ и $(a, b) \in \Delta$, то $(man, c) \in \Delta$;
- 2) $(a, mbn) \in \Delta$ и $(b, c) \in \Delta$, то $(a, mcn) \in \Delta$;
- 3) $(a, b) \in \Delta$ и $(c, b) \in \Delta$, то существует цепочка $d \in U^+$ такая, что $(d, a) \in \Delta$ и $(d, c) \in \Delta$.

Определение 2. Отношение δ на множестве U^+ назовем отношением синтагматического подчинения, если $(a, b) \in \delta$ тогда и только тогда, когда:

- 1) существуют цепочки $m, n \in U^+$ такие, что $(m, a) \in \Delta$ и $(n, b) \in \Delta$;
- 2) для m и n , удовлетворяющих соотношениям п. 1, справедливо $(m, mn) \in \Delta$.

Цепочки вида ab , где $(a, b) \in \delta$ или $(b, a) \in \delta$, будем называть синтагматическими структурами, а при $a, b \in U$ — синтагмами. Если $(a, b) \in \delta$, то будем говорить, что a — определяемый, а b — определяющий члены структуры ab и ba .

Определение 3. Отношение ω на множестве U^+ назовем отношением синтагматической эквивалентности, если $(a, b) \in \omega$ тогда и только тогда, когда существует цепочка $l \in U^+$ такая, что $(l, a) \in \Delta$, $(l, b) \in \Delta$, $(l, ab) \in \Delta$ и $(l, ba) \in \Delta$.

Если $(a_i, a_{i+1}) \in \omega$ ($i = \overline{1, n-1}$), то цепочку $a_1, a_2 \dots a_n$ назовем композицией цепочек $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Определение 4. 1) Слово a входного словаря назовем сообщением, если существует цепочка $b \in U^+$ такая, что $(a, b) \in \delta$.

2) Если a и b сообщения, то цепочки ab и ba такие, что $(a, b) \in \delta$ или $(a, b) \in \omega$, будем называть сообщениями. Если число слов в ab и ba больше двух, то эти цепочки назовем проективными сообщениями.

3) Цепочку, являющуюся перестановкой слов проективного сообщения, будем называть непроективным сообщением, если в ней имеется хотя бы одна подцепочка вида $abcd$ такая, что или ac и bd — синтагматические структуры, или одна из этих цепочек — синтагматическая структура, а другая — композиция.

4) Перестановку слов проективного сообщения назовем слабопроективным сообщением, если она не является непроективным сообщением

* С. Ф. Липницкий, В. С. Яковишин // Весті АН БССР. Сер. фіз.-техн. наук. 1987. № 4.

и имеется хотя бы одна подцепочка вида abc или cba такая, что $(b, a) \in \delta$, а $(a, c) \in \delta$ или $(a, c) \in \omega$.

Определение 5. 1) Синтагматическую структуру abc назовем структурой с гнездованием, если: или $(a, bc) \in \delta$ и $(c, b) \in \delta$, или $(c, ab) \in \delta$ и $(a, b) \in \delta$.

2) Композицию abc будем называть композицией с гнездованием, если: или $(a, bc) \in \omega$ и $(c, b) \in \delta$, или $(ab, c) \in \omega$ и $(a, b) \in \delta$.

3) Сообщение назовем сообщением с гнездованием, если в нем содержится хотя бы одна синтагматическая структура или композиция с гнездованием. В противном случае будем говорить о сообщении без гнездования.

Теорема 1. Для всякого сообщения существует перестановка его слов, являющаяся проективным сообщением без гнездования.

Действительно, если сообщение непроективно или слабопроективно, то перестановка его слов, являющаяся проективным сообщением, существует в силу определения 4. Если же сообщение проективно, но для некоторой его подцепочки abc $(a, bc) \in \delta$, а $(c, b) \in \delta$, то транспозицией b и c получим цепочку acb без гнездования. Аналогично поступают и в других случаях гнездования.

Теорема 2. Если $a_1a_2 \dots a_m, b_nb_{n-1} \dots b_1$ — проективные подцепочки без гнездования непроективного сообщения $a_1a_2 \dots a_mb_nb_{n-1} \dots b_1$ такие, что для любых синтагм a_ia_j, b_lb_l ($1 \leq i < j, j \leq m; 1 \leq l < k, k \leq n$) $(a_i, a_j) \in \delta, (b_l, b_k) \in \delta$, то существуют подцепочки $a_1a_2 \dots a_r$ ($r \leq m$), $b_sb_{s-1} \dots b_1$ ($s \leq n$), конкатенация $a_1a_2 \dots a_rb_sb_{s-1} \dots b_1$ которых является проективным сообщением, а подцепочка a_rb_s — синтагмой или композицией.

Существование указанной в условии теоремы 2 синтагмы или композиции следует из того, что цепочка $a_1a_2 \dots a_mb_nb_{n-1} \dots b_1$ является сообщением, а существование проективной подцепочки — из проективности ее компонентов.

Теоремы 1, 2 позволяют реализовать синтаксический анализ непроективных и слабопроективных сообщений путем представления проективных подцепочек этих сообщений в виде синтагматических структур и композиций без гнездования и последовательного их исключения и восстановления. В силу теоремы 2 для анализа таких подцепочек может быть использован алгоритм из указанной работы. Пример анализа непроективного сообщения И ВОЛЧЬЮ ВАШУ Я ДАВНО НАТУРУ ЗНАЮ (И. А. Крылов) приведен в таблице.

На первом этапе анализ проводится в соответствии с алгоритмом из

Пример синтаксического анализа непроективного сообщения					
Этапы синтаксического анализа					
1	2	3	4	5	6
и волчью вашу я давно натуру знаю	и я давно натуру знаю	вашу и я давно натуру знаю	и я давно вашу натуру знаю	волчью и я давно вашу натуру знаю	и я давно вашу волчью натуру знаю

нашей работы*. В результате получим совокупность проективных подцепочек (в нашем случае их четыре). Если исходное сообщение проективно, то этот этап анализа является единственным.

На втором этапе первая и вторая подцепочки упорядочиваются согласно условиям теоремы 2 и ищутся синтагмы*. Если синтагма не найдена, то вторая подцепочка удаляется. Далее процедура повторяется.

На последующих этапах после получения единственной проективной подцепочки поочередно включаются удаленные подцепочки. После каждого включения осуществляется переупорядочение слов сообщения для получения подцепочек без гнездования. Завершается процесс анализа после получения единственной синтагматической структуры.

Алгоритм синтаксического анализа. На входе алгоритма — непроективное или слабoproективное сообщение $a_1 a_2 \dots a_n$ ($n \geq 2$), состоящее из проективных подцепочек a_i ($i = \overline{1, n}$), полученных в результате синтаксического анализа в соответствии с приведенным алгоритмом*, на выходе — синтагматическая структура или композиция. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. $i := 1, j := 2, a := a_i, b := a_j, C = \emptyset$.
2. Упорядочить цепочку ab (в соответствии с достаточными условиями проективности из теоремы 2).
3. Применить для анализа цепочки ab алгоритм*. При успешном завершении процедуры анализа перейти к п. 4, в противном случае — к п. 5.
4. $a := ab$. Если $j < n$, то $j := j + 1, b := a_j$, перейти к п. 2, иначе — к п. 6.
5. $C := C \cup \{a_j\}, j := j + 1, b := a_j$, перейти к п. 2.
6. $i := 2$.
7. Если $C = \emptyset$, то упорядочить a . КОНЕЦ.
8. Если $a_i \in C$, то $b := a_i$, перейти к п. 9, иначе — к п. 10.
9. Упорядочить ab и применить алгоритм из указанной работы С. Ф. Липницкого, В. С. Яковишина. При успешном завершении процедуры анализа $C := C \setminus \{a_i\}, a := ab$, перейти к п. 7. В противном случае перейти к п. 10.
10. Если $i < n$, то $i := i + 1$, перейти к п. 8, иначе — к п. 6.

Очевидно, что алгоритм заканчивает свою работу не более чем за $n-1$ проход шагов 2—5 и $(n-2)$ — кратное выполнение шагов 6—9.

Поступила в редакцию 23.05.88.

УДК 681.3.06

К. А. ЗУБОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРЕДИКАТОВ И ГЕНЕРАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одним из свойств широко обсуждаемых в настоящее время систем функционального программирования (СФП) [1] является упрощение процесса доказательства правильности программ [2—5]. Однако существует необходимость в разработке программных средств поддержки этого процесса [6]. В данной статье предлагается математическое обоснование и описывается программная реализация одного из этапов доказательства правильности программ в СФП — построения минимальных решений функциональных уравнений [2, 4, 6].

Определение 1. Функциональным уравнением в системе функционального программирования называется выражение вида $X_i = E(X_i)$, где X_i —

* С. Ф. Липницкий, В. С. Яковишин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1987. № 4.

функциональная переменная базиса β , $E(X_i)$ — терм, построенный в базисе β .

Определение 2. Базисом β называется множество, представляющее собой объединение следующих множеств: 1) $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ — функциональных переменных; 2) $L = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ — латинских букв; 3) $S = \{=, ., (,)\}$ — специальных символов; 4) $C = \{''\circ'', [,], \text{if}, \rightarrow, ;\}$ — символов функциональных форм; 5) T — термов (функциональных выражений), которое определяется рекурсивно: E есть терм относительно переменной X_i ($E(X_i) \in T$) тогда и только тогда, когда имеет место ровно одно из следующих предложений: а) $E(X_i) \in L$; б) $E(X_i) = X_i$; в) существуют термы $E_1, E_2, \dots, E_k$ такие, что $E(X_i) = E_1(X_i) \circ \dots \circ E_k(X_i)$, или $E(X_i) = [E_1(X_i), \dots, E_k(X_i)]$, или $E(X_i) = \text{if } E_1(X_i) \rightarrow E_2(X_i); E_3(X_i)$.

З а м е ч а н и е. Неформально базис и функциональное уравнение интерпретируются так (формальная интерпретация дана в [3]). Под символами из множества L понимаются функции системы функционального программирования [1, 4] — базисные и ранее определенные. Символы X_i соответствуют определяемым функциям, а элементы множества C — функциональным формам «композиция», «конструкция» и «условие» [1] соответственно. Уравнения используются для задания новых функций, причем все функции определяются над некоторым множеством так называемых объектов $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ [1, 4].

Определение 3. Терм $E(X_i)$ называется линейным относительно переменной X_i , если существует терм (называемый преобразователем предиката) $E_t(X_i)$ такой, что имеет место: 1) для любых функций СФП a, b, c $E(\text{if } a \rightarrow b; c) = \text{if } E_t(a) \rightarrow E(b); E(c)$, 2) для любого объекта $d \in D$, если $E_t(\omega) \neq \omega$, то для любой функции а СФП $E_t(a)$: $d = \text{true}$, где true — объект, определяющий значение «истина», ω — объект «неопределенность», «:» определяет результат применения функции к аргументу.

Определение 4. Уравнение вида $X_i = \text{if } p \rightarrow g; E(X_i)$ называется линейным относительно переменной X_i , если терм $E(X_i)$ линеен по X_i .

Теорема 1. Линейное уравнение $X_i = \text{if } p \rightarrow g; E(X_i)$ имеет наименьшее решение, представимое посредством следующего разложения:

$$X_{i_{\min}} = \text{if } p \rightarrow g; \text{if } E_t(p) \rightarrow E(g); \text{if } E_t^2(p) \rightarrow E^2(g); \dots; \\ \text{if } E_t^n(p) \rightarrow E^n(g); \dots,$$

где $E^2(X_i) = E(E(X_i))$, $\dots$, $E^n(X_i) = E(E(\dots E(X_i) \dots))$; E_t — преобразователь предиката.

В процессе построения минимальных решений функциональных уравнений встает задача выделения классов уравнений, для которых этот процесс может быть упрощен. Далее рассматриваются линейные уравнения с одним включением переменной (неизвестной) в их правых частях.

Имеют место следующие утверждения.

- 1) Терм $E(X_i) = a$ линеен с $E_t(X_i) = \text{true}$.
- 2) Терм $E(X_i) = X_i \circ a$ линеен с $E_t(X_i) = X_i \circ a$.
- 3) Терм $E(X_i) = a \circ X_i$ линеен с $E_t(X_i) = X_i$.
- 4) Терм $E(X_i) = [a, \dots, X_i, \dots, z]$ линеен с $E_t(X_i) = X_i$.
- 5) Терм $E(X_i) = \text{if } a \rightarrow b; X_i$ линеен с $E_t(X_i) = \text{if } a \rightarrow \text{true}; X_i$.
- 6) Терм $E(X_i) = \text{if } a \rightarrow X_i; b$ линеен с $E_t(X_i) = \text{if } a \rightarrow X_i; \text{true}$.
- 7) Терм $E(X_i) = \text{if } X_i \rightarrow a; b$ линеен с $E_t(X_i) = X_i$.

Теорема 2. Если термы $E_1(X)$ и $E_2(X)$ линейны с соответствующими E_{1_t} и E_{2_t} преобразователями предиката, то и их композиции $E_1(E_2(X))$ и $E_2(E_1(X))$ линейны, причем $(E_1(E_2(X)))_t = E_{1_t}(E_{2_t}(X))$ и $(E_2(E_1(X))) = E_{2_t}(E_{1_t}(X))$.

Пример. Функциональное уравнение $X = \text{if } (d \circ e) \rightarrow h; (a \circ [b, (X \circ c)])$ является линейным в силу теоремы 2, так как справедливо следующее: $p = (d \circ e)$, $g = h$, $E(X) = (a \circ [b, (X \circ c)]) = E_1(E_2(E_3(X)))$, где $E_3(X) = (X \circ c)$, $E_2(X) = [b, X]$, $E_1(X) = (a \circ X)$. E_1, E_2, E_3 линейны с $E_{3_t}(X) =$

$= (X \circ c)_t = X \circ c$, $E_{2_t}(X) = [b, X]_t = X$, $E_{1_t}(X) = (a \circ X)_t = X$. Согласно теореме 2, имеет место: $E_t(X) = E_{1_t}(E_{2_t}(E_{3_t}(X))) = E_{1_t}(E_{2_t}(X \circ c)) = E_{1_t}(X \circ c) = X \circ c$.

Алгоритм построения преобразователей предикатов и минимальных решений линейных функциональных уравнений.

1. Первый просмотр.

1.1. Выделение левой части уравнения (символа функциональной переменной).

1.2. Выделение в правой части уравнения функциональных выражений, соответствующих символам p и g .

1.3. Формирование массива символов функциональных форм $MASDOX$, используемых в терме E и встречающихся в нем до символа функциональной переменной.

Пример. Для рассмотренного выше уравнения после первого просмотра имеет место: функциональный символ — X ; $p = d \circ e$; $g = h$;

$masdox_1 = (; masdox_2 = \circ; masdox_3 = [; masdox_4 = ($.

З а м е ч а н и е. Контроль синтаксической правильности функционального уравнения при первом просмотре не производится.

2. Второй просмотр. Просмотр терма E и формирование предиката E_t .

2.1. $I :=$ количество символов в $MASDOX$.

2.2. Пока не все символы функциональных форм слева от X в терме E обработаны (пока $I > 0$), делать следующее.

2.2.1. Взять I -й символ из $MASDOX$.

а) Если $masdox_i = 'o'$, то в соответствии с тем, что $(a \circ X \circ b)_t = (X \circ b)$ (где X соответствует обработанной части терма E , а в самом начале обработки X — символ функциональной переменной), необходимо в терме E просмотреть слева от X все символы, стоящие до символа $'('$, учитывая при этом уровень вложенности скобок. После этого осуществляется выделение в терме E выражения, соответствующего b , и формирование предиката путем переноса выражения « $\circ b$ » в область формирования предиката. При просмотре влево проводится удаление (за счет изменения I) просмотренных символов функциональных форм из массива $MASDOX$.

б) Если $masdox_i = '['$, то, следуя тому, что $([... , X, ...])_t = X$, необходимо, не изменяя области формирования предиката, осуществить просмотр терма E влево и вправо от X , учитывая вложенность квадратных скобок в E и проводя удаление из $MASDOX$ просматриваемых символов функциональных форм.

в) Если $masdox_i = '('$, то проводится обработка терма E , аналогичная обработке пункта а), так как $(X \circ a \circ ...)_t = (X \circ a \circ ...)$.

г) Если $masdox_i = 'if'$, то терм имеет вид: $if a \rightarrow b; X$. В этом случае формируется предикат вида $if a \rightarrow true; X$ и осуществляется просмотр в исходном терме функций a и b . Изменение состояния $MASDOX$ состоит в удалении из него символов функциональных форм, образующих функции a и b , символов $'if'$, $'\rightarrow'$, if .

д) Если $masdox_i = 'if \rightarrow'$, то формируется предикат вида $if a \rightarrow X; true$ (так как исходный терм содержит композицию $if a \rightarrow X; b$). При этом осуществляется просмотр терма E влево и вправо с целью выделения выражений, соответствующих a и b , и проводится «чистка» массива $MASDOX$.

е) Если $masdox_i = 'if'$, то, согласно тому, что $(if X \rightarrow a; b)_t = X$, текущее состояние предиката не меняется, а проводится лишь выделение функций a и b с соответствующим изменением в состоянии $MASDOX$ за счет удаления из этого массива символа функциональной формы if .

З а м е ч а н и е. Параллельно с разбором терма и формированием предиката проводится синтаксический контроль терма на правильность.

Пример. Процесс работы алгоритма при втором просмотре и состоянии используемых при формировании предиката областей для ранее рассмотренного уравнения представлен в таблице.

**Второй просмотр терма алгоритма построения
преобразователя предиката и минимального решения**

Шаг просмотра	Состояние MASDOX	Значения		Состояние терма	Состояние предиката
		i	$masdox_i$		
Вход для 2.2.1.(в)	$(\circ [($	4	$($	$(a \circ [b, (X \circ c)])$	X
Выход для 2.2.1.(в)	$\circ [$	3	$[$	$(a \circ [b, (X \circ c)])$	$\uparrow \uparrow$
Вход для 2.2.1.(б)				$(a \circ [b, (X \circ c)])$	$(X \circ c)$
Выход для 2.2.1.(б)	$\circ$	2	$\circ$	$(a \circ [b, (X \circ c)])$	$\uparrow$
Вход для 2.2.1.(а)				$(a \circ [b, (X \circ c)])$	$(X \circ c)$
Выход для 2.2.1.(а)		0		$(a \circ [b, (X \circ c)])$	$\uparrow$
Выход 2-го просмотра				$\uparrow$	$\uparrow$

3. Генерация минимального решения состоит в подстановке в общий вид линейного разложения выражений, соответствующих выделенному терму и построенному преобразователю предиката.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что вычислительная трудоемкость представленного алгоритма оценивается значением $O(n)$, где n — число символов функциональных форм (элементов множества C), образующих терм E в правой части уравнения.

Описанный алгоритм реализован на языке СР/ТРАН [7]. Программа состоит из 528 строк, записанных на этом языке. С помощью программы проведено построение предикатов и минимальных решений 2058 различных, наиболее часто используемых на практике в СФП уравнений, термы в правых частях которых представляли собой композиции термов базиса β с различными уровнями их вложенности. Для обработки указанного количества уравнений потребовалось 184 мин 52 с машинного времени ЭВМ ЕС 1022. В силу того, что при построении предикатов и линейных разложений вручную на каждое такое уравнение уходит около 10 мин, с очевидностью следует, что использование разработанной программы приводит к значительному сокращению времени нахождения минимального решения. А это, в свою очередь, позволяет ускорить процесс доказательства правильности программ в СФП, так как построение минимального решения является одним из наиболее трудоемких шагов этого процесса [2, 4]. При этом следует отметить, что практически отсутствуют ограничения на вложенность термов в реализации алгоритма — они определяются лишь размерностью массива MASDOX, которая при необходимости может быть увеличена в рамках оперативной памяти используемой ЭВМ.

Список литературы

1. Дробушевич Г. А., Зубович К. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 46.
2. Зубович К. А., Мелешко А. Н. Там же. 1987. № 1. С. 31.
3. Кутепов В. П. // Программирование. 1975. № 4. С. 3; 1976. № 6. С. 3.
4. Backus J. // Lecture Notes in Computer Science. 1981. V. 107. P. 1.
5. Sun G., Ge Z., Geh R. T. // 1st Int. Conf. Computer and Appl. (Beijing, 20—22 June, 1984). Md.: Silver Spring. 1984. P. 848.
6. Дробушевич Г. А., Зубович К. А. // Программирование. 1987. № 2. С. 8.
7. Дробушевич Г. А., То Туан, Зубович К. А. Там же. 1984. № 3. С. 84.

Поступила в редакцию 19.10.88.

О МОЩНОСТИ ОДНОГО МНОЖЕСТВА ПРОГРАММ

В работе оценивается мощность одного подкласса программ на алгоритмическом языке. Этот подкласс характеризуется тем, что в правой части оператора присваивания могут находиться только арифметические выражения, построенные из переменных, цифр 1, 2, ..., 9 и имеющихся в языках типа ПЛ/1 пяти арифметических операций [1. С. 40]; такие арифметические выражения назовем субарифметическими. Кроме того, в этом подклассе программ любые логические формулы строятся только из субарифметических выражений с помощью восьми операций сравнения [1. С. 45]. Будем представлять такие программы в следующем виде [2. С. 207].

Программа состоит из входного вектора $\bar{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, программно (внутреннего) вектора $\bar{y}^m = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, вектора выходных переменных $\bar{z}^l = (z_1, z_2, \dots, z_l)$ и конечного ориентированного графа $G = (V, R)$, где V — конечное множество, а $R \subset V^2$, такого, что выполнены следующие три условия.

1. В графе G имеется ровно одна вершина $s \in V$, называемая стартовой, не являющаяся конечной вершиной никакого ребра; имеется ровно одна вершина $h \in V$, называемая конечной, которая не является начальной вершиной никакого ребра, и каждая вершина $v \in V$ находится на некотором пути от s к h .

2. Каждому ребру a , не входящему в h , поставлена в соответствие логическая форма (выражение [1]) $P_a(\bar{x}^n, \bar{y}^m)$ и присваивание $\bar{y}^m \leftarrow f_a(\bar{x}^n, \bar{y}^m)$; каждому ребру a , входящему в h , — выражение $P_a(\bar{x}^n, \bar{y}^m)$ и присваивание $\bar{z}^l \leftarrow f_a(\bar{x}^n, \bar{y}^m)$.

3. Логические выражения, приписанные ребрам, исходящим из одной и той же вершины, таковы, что для всех значений переменных $\bar{x}^n$ и $\bar{y}^m$ только одно из них истинно.

Из этого представления программы вытекают следующие свойства.

1°. Ориентированный граф (V, R) с двумя отмеченными вершинами состоит из одной компоненты связности и, значит, $\sqrt{|R|} \leq |V| \leq |R| + 1$, ибо максимальное число ребер будет тогда, когда $|R| = |V|^2$.

2°. Число ребер в графе (V, R) равно числу присваиваний в программе.

Теперь ясно, что верхняя оценка количества программ может быть получена, если известны следующие величины.

1. $S(m, r)$ — число неизоморфных связных ориентированных графов с m вершинами и r ребрами, где, согласно 1°, $\sqrt{r} \leq m \leq r + 1$, в которых выбраны стартовая и конечная вершины.

2. Число $A(k, d)$ субарифметических выражений в языке ПЛ/1 от k переменных длины d^* .

3. Число $L(k, d)$ логических выражений в языке ПЛ/1 от k переменных, образованных из субарифметических выражений длины не более d .

Сначала оценим $S(m, r)$ сверху. Известно [3. С. 192], что число $S'(m, r)$ неизоморфных графов, имеющих r неориентированных ребер, m вершин и одну компоненту связности, не превосходит $(8e)^{r+1} m^{r-m+1}$, т. е. $S'(m, r) \leq (8e)^{r+1} \cdot m^{r-m+1}$.

Ориентацию r ребер можно осуществить не более 2^r способами, а выбрать стартовую (или конечную) вершину из m вершин можно не более m способами. Следовательно,

$$S(m, r) \leq S'(m, r) \cdot 2^r \cdot m \leq 2^r m^2 (8e)^{r+1} \cdot m^{r-m+1},$$

т. е.

$$S(m, r) \leq 2^r (8e)^{r+1} m^{r-m+3}, \quad (1)$$

*) Длиной арифметического выражения назовем число символов в его представлении в прямой польской записи.

где, согласно 1°, $\sqrt{r} \leq m \leq r + 1$.

Получим верхнюю оценку для H_a^b — числа сочетаний с повторениями. Используя $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, имеем

$$\begin{aligned} H_a^b &= C_{a+b-1}^b = \frac{(a+b-1)!}{b!(a-1)!} = \frac{a(a+1) \dots (a+b-1)}{b!} < \frac{(a+b-1)^b}{\left(\frac{b}{e}\right)^b} = \\ &= e^b \left(\frac{b+a-1}{b}\right)^b = e^b \left(1 + \frac{a-1}{b}\right)^b \leq e^b \cdot e^{a-1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$H_a^b \leq e^{a+b-1}. \quad (2)$$

Оценим $A(k, d)$. Так как в языке ПЛ/1 имеется 5 арифметических операций [1. С. 40], а в субарифметических выражениях встречаются только переменные и 9 цифр (т. е. всего 14 знаков, не считая переменных), то $A(k, d) \leq (k+14)^d$. Значит,

$$A_0(k, d) = \sum_{i=1}^d A(k, i) \leq (k+14)^{d+1} \quad (3)$$

есть верхняя оценка числа субарифметических выражений в языке ПЛ/1 длины $\leq d$.

В рассматриваемом классе программ логические выражения строятся из субарифметических выражений, между двумя из которых ставится один из 8 знаков сравнения. Следовательно,

$$L(k, d) \leq ((k+14)^{d+1})^2 \cdot 8 = 8(k+14)^{2d+2}. \quad (4)$$

Через $P(n, m, l, d, q)$ обозначим число различных программ в описанном подклассе языка ПЛ/1, в которых имеется n входных переменных, m — внутренних, l — выходных, субарифметических операторов присваивания q и их длины не более d , а в логических выражениях используются субарифметические выражения длины не более d . Значит, в таких программах субарифметические выражения будут строиться из $n+m$ переменных, причем выбор внутренних переменных в этих выражениях может быть сделан не более чем m^q способами. Учитывая, что выбор выходных переменных может быть сделан не более чем 2^l способами, согласно отмеченному выше, имеем:

$$P(n, m, l, d, q) \leq m^q 2^l S(m_1, q) \cdot H_{A_0(n+m, d)}^q \cdot H_{L(n+m, d)}^q,$$

где $\sqrt{q} \leq m_1 \leq q+1$. Используя неравенства (1) — (4), получаем:

$$\begin{aligned} P(n, m, l, d, q) &\leq m^q 2^l 2^q (8e)^{q+1} m_1^{q-m_1+3} e^{(m+n+14)^{d+1}+q-1} \times \\ &\times e^{8(n+m+14)^{2d+2}} \leq m^q 2^{l+q} (8e)^{q+1} (q+1)^{q-\sqrt{q}+3} e^{9(n+m+14)^{2d+2}} + 2q - 2. \end{aligned}$$

Итак,

$$P(n, m, l, d, q) \leq m^q 2^{l+q} (8e)^{q+1} (q+1)^{q-\sqrt{q}+3} e^{9(n+m+14)^{2d+2}} + 2q + 2. \quad (5)$$

Оказывается, в некоторых случаях неравенство (5) дает оптимальную (т. е. по порядку неулучшаемую) оценку числа соответствующих программ. Для этого рассмотрим программы, в которых каждому ребру приписана формула $\xi = a$ и присваивание $y \leftarrow \eta + \delta$, где $\delta \in \{1, 2, 3\}$; $\eta, a \in \{0, 1\}$. Такие программы представляют машины Тьюринга в алфавите $\{0, 1\}$, как это описано в [4. С. 90] (числа 1, 2, 3 означают здесь то, что 0, 1 и 2 в [4]). Значит, в этих программах $m = l = 1$, $d = 3$ (ибо 3 длина выражения $\eta + \delta$), а q равно числу внутренних состояний машины.

Можно убедиться, что, согласно неравенству (5), верхняя оценка величины $P(n, 1, 1, 3, q)$ при $q = \frac{2^n(1-\varepsilon)}{n}$ дает (как и неравенство (3.3) из

[4]) оптимальную оценку числа машин Тьюринга (при $k = 2$), вычисляющих булевы функции от n аргументов.

Следует отметить, что полученные оценки справедливы для любого алгоритмического языка, удовлетворяющего условиям, сформулированным в начале статьи. Язык ПЛ/1, в частности, удовлетворяет им.

Список литературы

1. Скотт Р., Сондак Н. ПЛ/1 для программистов. М., 1977.
2. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.
3. Лупанов О. Б. // Проблемы кибернетики. М., 1965. Вып. 14. С. 31.
4. Кузьмин В. А. Там же. Вып. 13. С. 75.

Поступила в редакцию 02.02.89.

УДК 532.59 : 539.3

О. М. ГЛАДУН

О НЕЛИНЕЙНЫХ СТОЯЧИХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости, на поверхности которой плавает тонкая упругая изотропная пластина толщиной h ; ось x_1 совпадает с поверхностью раздела пластины и жидкости в невозмущенном состоянии, ось z_1 направлена вертикально вверх. Снизу жидкость ограничена горизонтальным дном $z_1 = -H_1$. Исследуем плоское движение жидкости, периодическое по горизонтальной координате x_1 (с периодом λ) и времени t_1 (с периодом τ).

Задача состоит в определении потенциала скорости Φ^* , ординаты поверхности раздела пластины и жидкости ξ^* и частоты колебаний $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$. В безразмерных переменных задача имеет вид [1, 2]:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (-H \leq z \leq \varepsilon\xi, \quad |x| < \infty), \quad (1)$$

$$\xi_t + \varepsilon\xi_x\Phi_x = \varphi_z, \quad z = \varepsilon\xi, \quad (2)$$

$$D \frac{1}{\mu} \xi_{xxxx} + \kappa \xi_{tt} + \Phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \frac{1}{\mu} \xi = F(t), \quad z = \varepsilon\xi, \quad (3)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -H, \quad (4)$$

$$\xi(x + 2\pi, t + 2\pi) = \xi(x, t), \quad \int_0^{2\pi} \xi(x, t) dx = 0, \quad (5)$$

$$x = kx_1, \quad z = kz_1, \quad t = \sigma t_1, \quad H = kH_1, \quad \Phi^* = \frac{\sigma}{k^2} \varepsilon \Phi,$$

$$\xi^* = \frac{1}{k} \varepsilon \xi, \quad F^* = \frac{\varepsilon}{k^2} \sigma^2 \rho F, \quad \varepsilon = ak, \quad \kappa = \frac{\rho_1}{\rho} hk,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g} k^4, \quad \mu = \frac{\sigma^2}{gk}.$$

Здесь E — модуль нормальной упругости пластины; ν — коэффициент Пуассона; ρ, ρ_1 — плотности жидкости и пластины соответственно; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; a — амплитуда линейной волны; ε — малый параметр. Функция $F^*(t)$ также подлежит определению.

Решение задачи ищем методом возмущений [1, 2]. Опуская промежуточные выкладки, с точностью третьего приближения находим (выписываем только выражения для определения профиля волны и частоты колебаний):

$$\xi^* = \frac{\varepsilon}{k} [\cos x \cos t + \varepsilon (\beta_{22} \cos 2x \cos 2t + B \cos 2x) +$$

$$+ \varepsilon^2 (\gamma_{11} \cos x \cos t + \gamma_{31} \cos x \cos 3t + \gamma_{13} \cos 3x \cos t + \gamma_{33} \cos 3x \cos 3t)], \quad (7)$$

$$\sigma = \sigma_0 (1 - \sigma_2 \varepsilon^2), \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon k}{\Theta_0}}, \quad (8)$$

$$\beta_{22} = \frac{1 - 3\text{cth}^2 H}{8(R - 2\text{cth} 2H)}, \quad B = \frac{1 + \text{cth}^2 H}{8\Theta_0(1 + 16D)},$$

$$\gamma_{11} = \frac{1 + \text{cth}^2 H}{16\Theta_0(1 + 16D)} \left[\frac{1 + \text{cth}^2 H}{2(\kappa + \text{cth} H)} - 1 \right] + \frac{1}{64(R - 2\text{cth} 2H)(\kappa + \text{cth} H)} \{5 -$$

$$- 3\text{cth}^4 H - 6\text{cth}^2 H - 2R \text{cth} H - 2\kappa [R(2\text{cth}^2 H + 1) - 4\text{cth} 2H + 4\text{cth}^3 H]\}.$$

$$\gamma_{31} = \frac{-12R \text{cth}^3 H + 21\text{cth}^4 H + 54\text{cth}^2 H - 15}{768(R - 2\text{cth} 2H)(\kappa + \text{cth} H)},$$

$$\gamma_{13} = \frac{3}{32(R - 2\text{cth} 2H)(3P_1 - \text{cth} 3H)} \{4R \text{cth} 2H \text{cth} H (\text{cth} 3H - \text{cth} H) -$$

$$- (\text{cth} 3H + \text{cth} H) [R + 2\text{cth} 2H (\text{cth}^2 H + 2)] + \text{cth} 3H \text{cth} H (3 - \text{cth}^2 H) -$$

$$- 3\text{cth}^2 H + 9\} + \frac{3(1 + \text{cth}^2 H)(1 - \text{cth} 3H \text{cth} H)}{3P_1 - \text{cth} 3H},$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{32(R - 2\text{cth} 2H)(P - \text{cth} 3H)} \{R [3\text{cth} 3H (1 + 2\text{cth}^2 H) + 2\text{cth}^3 H -$$

$$- 9\text{cth} H] + 6\text{cth} 3H \text{cth} 2H (3\text{cth}^2 H - 2) +$$

$$+ 3\text{cth} 3H \text{cth} H (\text{cth}^2 H - 3) + \text{cth}^4 H - 12\text{cth}^2 H + 15\},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2(\kappa + \text{cth} H)} \left\{ \frac{(1 + \text{cth}^2 H)^2}{16\Theta_0(1 + 16D)} + \frac{4R \text{cth}^3 H + 5\text{cth}^4 H - 10\text{cth}^2 H + 1}{32(R - 2\text{cth} 2H)} \right\},$$

$$R = \Theta_0(16D + 1) - 4\kappa, \quad P_1 = \Theta_0(81D + 1) - \kappa,$$

$$P = \Theta_0(81D + 1) - 9\kappa, \quad \Theta_0 = \frac{\kappa + \text{cth} H}{1 + D}.$$

Исходя из (7), (8) можно установить ряд особенностей, присущих стоячим изгибно-гравитационным волнам.

1°. Неподвижных узлов нет (устанавливается аналогично [3]).

2°. Если $\beta_{22} > 0$ ($\beta_{22} < 0$), амплитуда гребня больше (меньше) амплитуды впадины, гребень уже (шире), впадина шире (уже).

3°. Профиль волны в общем случае никогда не распрямляется, колебания происходят около постоянного возмущения:

$$\xi^* = \frac{\varepsilon^2}{k} (B - \beta_{22}) \cos 2x. \quad (9)$$

Заметим, однако, что при определенном значении волнового числа k' , зависящего от исходных параметров задачи, величина $B - \beta_{22} = 0$. Следовательно, профили волн, имеющих длину $\lambda' = \frac{2\pi}{k'}$, в моменты времени

$$t = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ распрямляются.}$$

4°. Частота колебаний может быть как больше, так и меньше, чем соответствующая величина в линейной задаче.

Свойства 2°, 4° связаны с тем, что трансцендентные уравнения $R - 2\text{cth} 2H = 0$ и $P - 3\text{cth} 3H = 0$ имеют по одному положительному действительному корню k_1 и k_2 соответственно. В окрестностях указанных корней решение (7), (8) непригодно, ибо амплитуды соответствующих нелинейных приближений сравнимы с амплитудой линейного приближения.

Заметим, что уравнения $R - 2\text{cth} 2H = 0$ и $P - 3\text{cth} 3H = 0$ эквивалентны равенству $n\sigma_0(k) = \sigma_0(nk)$ при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно. Последнее есть частный случай условия нелинейного волнового синхронизма $n + 1$ взаимодействующих волн, характерного для диспергирующих сред [4, 5]. Нестационарные трехволновые взаимодействия для задачи (1) — (4) исследуются в [6].

Очевидно, что при $k = k_1$ и $k = k_2$ необходимо проводить дополнительные исследования. Так как собственным функциям

$$\Phi_{11} = \mp \left\{ \frac{\sin t}{\cos t} \right\} \cos x \frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H}, \quad \Phi_{jj} = \mp \left\{ \frac{\sin jt}{\cos jt} \right\} \cos jx \frac{\operatorname{ch} j(z+H)}{\operatorname{sh} jH}$$

линейной задачи, соответствующей (1) — (6), отвечают собственные числа μ_{11} и μ_{jj} , равные между собой при $k = k_j$, что следует из (10), то первое (линейное) приближение для φ по методу возмущений при $k = k_1$ и $k = k_2$ ищем в виде:

$$\varphi_0 = -\cos x \sin t \frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H} - \alpha_j \cos j \sin jt \frac{\operatorname{ch} j(z+H)}{\operatorname{sh} jH} \quad (11)$$

при $j = 2$ и $j = 3$ соответственно. Коэффициент α_2 определяем при вычислении второго приближения

$$\alpha_2 = \pm \sqrt{\frac{x + \operatorname{cth} H}{4(2x + \operatorname{cth} 2H)}} \quad (12)$$

Для определения α_3 при вычислении третьего приближения получаем кубическое уравнение, коэффициенты которого являются функциями x, H . Численный анализ этого уравнения показывает, что уравнение имеет три различных действительных корня. Таким образом, при $k = k_1$ и $k = k_2$ происходит ветвление решения задачи. Найденные с точностью до второго приближения решения задачи при $k = k_j$ ($j = 1, 2$) ввиду громоздкости формул не выписываем. Отметим только, что профили резонансных волн имеют форму, существенно отличающуюся от синусоидальной, например, при $k = k_1$ профили волн имеют выраженную двухгорбую форму.

В заключение укажем, что численные расчеты проводились при следующих параметрах задачи: $E = 3 \cdot 10^9 \frac{H}{\text{м}^2}$, $\rho = 1080 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_1 = 870 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $z = 0,34$.

Список литературы

1. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л., 1981.
2. Гладун О. М., Федосенко В. С. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 119.
3. Секерж-Зенькович Я. И. // Изв. АН СССР. Сер. геофизика. 1951. Т. 15. № 1. С. 57.
4. Бломберг Н. Нелинейная оптика. М., 1966.
5. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л., 1980.
6. Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 57.

Поступила в редакцию 05.04.88.

УДК 517.53

Л. Л. БЕРЕЗКИНА

О НАИЛУЧШЕЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ЕДИНИЧНОГО РАДИУСА

Обозначим $C_A = \{f(z)\}$ пространство функций, аналитических в круге $|z| < 1$ и непрерывных в его замыкании, с обычным определением нормы: $\|f\|_{C_A} = \sup_{|z| \leq 1} |f(z)|$, $E_{n,m}(f)$ — наилучшее приближение в равномерной метрике функции f рациональными дробями, степени числителя и знаменателя которых соответственно не превосходят n и m , т. е.

$$E_{n,m}(f) = \inf_{r_{n,m}} \|f - r_{n,m}\|_{C_A}, \quad r_{n,m}(z) = p_n(z)/q_m(z).$$

В этой статье излагаются результаты исследования поведения наилучших равномерных приближений функций, аналитических в круге $|z| < 1/q$, $|q| < 1$, рациональными дробями при условии, что степень m знаменателя приближающей функции фиксирована, а степень n ее числителя стремится к бесконечности. Здесь продолжаются исследования, начатые в [1—5].

Пусть l — фиксированное натуральное число, $\mu \in \{0, 1, \dots, l-1\}$. Обозначим $N = \{n = \mu + lk: k = 0, +\infty\}$. Условимся также считать, что m_0 — фиксированное натуральное число, а комплексные параметры b_k , $k = \overline{1, m_0}$, не зависят от n .

Теорема. Если $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n \in N} c_n z^n$, коэффициенты которого при $n \in N$, $n \rightarrow \infty$, можно записать в виде

$$c_n = \frac{q^n}{n^\alpha} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m_0} \frac{b_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{m_0+1}}\right) \right\}, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $|q| < 1$, то при $m \leq m_0/2$ и $n \rightarrow \infty$, $n \in N$, имет место двойное неравенство:

$$A \frac{|q|^{n+l(m+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^{\alpha+2m} (1 + |q|^l)^{2m+1}} \leq E_{n,lm}(f) \leq A \frac{|q|^{n+l(m+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^{\alpha+2m} (1 - |q|^l)^{2m+1}}, \quad (2)$$

где $A = m!(\alpha)_{(m)} l^{2m}$, $(\alpha)_{(m)} = \alpha(\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+m-1)$.

Доказательство теоремы основано на применении теории аппроксимаций Паде. Сформулируем вначале вспомогательные утверждения. Введем в рассмотрение определители:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} c_{n-l(m-1)} & c_{n-l(m-2)} & \dots & c_{n+l} \\ c_{n-l(m-2)} & c_{n-l(m-3)} & \dots & c_{n+2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+l} & \dots & c_{n+lm} \\ c_{n+l} & c_{n+l(k+1)} & \dots & c_{n+l(k+m)} \end{vmatrix}$$

и Δ_j , $j = \overline{1, m+1}$, получающиеся из $\Delta(k)$ путем вычеркивания последней строки и j -го столбца.

Лемма. Если c_n при $n \in N$ имеет вид (1), то при $m \leq m_0/2$ и $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства:

$$\forall j = \overline{1, m+1}, \forall k = \overline{1, +\infty},$$

$$\Delta_j = B C_m^{j-1} \frac{|q|^{nm-jl}}{n^{m(\alpha+m-1)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (3)$$

$$\Delta(k) = B_1 \frac{|q|^{n(m+1)+l(k-1)}}{n^{(m+1)(\alpha+m)}} (k)_{(m)} (1 + \delta_k(n)), \quad (4)$$

где $B = l^{m(m-1)} \prod_{j=0}^{m-1} j! (\alpha)_{(j)}$, $B_1 = l^{2m} (\alpha)_{(m)} B$,

$$C_m^j = ml/(j!(m-j)!), \quad |\delta_k(n)| \leq \delta(k+2m+3)^{m+1}/n; \quad \delta = \text{const.}$$

Оказывается, что при $m \leq m_0/2$ главные члены определителей $\Delta(k)$ и Δ_j зависят только от первых слагаемых в разложении c_n по степеням n_j . Поэтому

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} (n-l(m-1))^{-\alpha} & \dots & (n-l(\overset{\vee}{m-j}))^{-\alpha} & \dots & (n+l)^{-\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{-\alpha} & \dots & (n-l(j-1))^{-\alpha} & \dots & (n+lm)^{-\alpha} \end{vmatrix} \times \\ \times q^{nm+l(j-m+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(знак $\vee$ означает, что j -й столбец вычеркнут), а последний определитель несложно вычислить, воспользовавшись обобщением теоремы Ролля на систему функций. (См. [6]. С. 66). Аналогично вычисляется и $\Delta(k)$.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы. Обозначим $\pi_{n,lm}(z) = p_n(z)/q_{lm}(z)$ аппроксимацию Паде функции $f(z)$, $R_{n,lm}(z) = f(z)q_{lm}(z) - p_n(z)$. Согласно [7], (с. 16—17),

$$q_{lm}(z) = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{m+1+j} z^{m+1-j} \Delta_j, \quad (5)$$

а

$$R_{n,lm}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(k) z^{n+l(m+k)}. \quad (6)$$

Исходя из (5) и (6) и учитывая (3) и (4), находим

$$\begin{aligned} q_{lm}(z) &= B \frac{q^{nm}}{n^m (\alpha + m - 1)} \sum_{j=1}^{m+1} (-z)^{m+1-j} C_{m-1}^{j-1} |q|^{-il} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \\ &= B \frac{|q|^{nm-l(m+1)}}{n^m (\alpha + m - 1)} (1 - |q|z)^m \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$R_{n,lm}(z) = B_1 \frac{|q|^{n(m+1)} z^{n+l(m+1)}}{n^{(m+1)(\alpha+m)}} (S_1(z) + S_2(z)), \quad (8)$$

где

$$S_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (|q|z)^{l(k-1)} (k)_{(m)} = \frac{m!}{(1 - (|q|z)^l)^{m+1}}, \quad (9)$$

$$S_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (|q|z)^{l(k-1)} (k)_{(m)} \delta_k(n) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (10)$$

На основании (7)—(10) делаем вывод, что

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_{n,lm}(z) &= R_{n,lm}(z)/q_{lm}(z) = \\ &= m! l^{2m} (\alpha)_{(m)} \frac{(|q|z)^{n+l(m+1)}}{n^{\alpha+2m}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{(1 - (|q|z)^l)^{2m+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь (2) вытекает из (11) на основании леммы В. К. Дзядыка ([8], лемма 3.1).

Следствие. При выполнении условий теоремы

$$E_{n,lm}(f) \asymp \frac{1}{n^{2m}} E_{n+l(m+1),0}(f);$$

$$\|f - \pi_{n,lm}\|_{C_A} \leq \left(\frac{1 + |q|^l}{1 - |q|^l} \right)^{2m+1} E_{n,lm}(f) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Примерами функций, коэффициенты Тейлора которых подчинены условиям (1), могут служить $\ln(1+qz)$ и $\operatorname{arctg}(qz)$ при $|q| < 1$, причем для каждой из них $\alpha = 1$, и $l = 1$, $A = (m!)^2$ для первой, $l = 2$, $A = 2^{2m}(m!)^2$ — для второй.

Список литературы

1. Русак В. Н. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. № 11. С. 969.
2. Rusa k V. N. Rational approximation of analytic functions: Third Conference of Numerical methods and approximation theory. Niš, Yugoslavia, 1987. Abstracts. P. 38.
3. Березкина Л. Л. О рациональной аппроксимации 2π -периодических функций, аналитических в горизонтальной полосе / Ред. журн. «Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. навук». Минск, 1987. № 2356-В87. Деп. в ВИНТИ от 13.04.87. № 3. С. 75.
4. Березкина Л. Л. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 75.
5. Русак В. Н. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. навук. 1988. № 6. С. 16.
6. Полна Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., 1956. Ч. II. С. 106.
7. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М., 1986. С. 502.
8. Дзядык В. К. // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 2. С. 248.

Поступила в редакцию 21.02.89.



УДК 530.12

Е. А. УШАКОВ

ТОМАСОВА ПРЕЦЕССИЯ КАК ДВИЖЕНИЕ ВЕКТОРА, АССОЦИИРОВАННОЕ С ЦИКЛОМ, ПРИ ПЕРЕНОСЕ ПО ФЕРМИ

Посредством определения развертки и наложения касательного пространства самого на себя вдоль цикла по Ферми и Ферми — Уолкеру получена формула для движения вектора, ассоциированного с циклом, при переносе его по бесконечно малому замкнутому контуру по Ферми и Ферми — Уолкеру [1]. Эта формула обобщает известное выражение для изменения вектора при параллельном переносе его вдоль инфинитезимального цикла [2].

Вводя естественные обозначения, имеем:

$$dV_{\Phi-Y}^{\lambda} = dV_{\parallel}^{\lambda} + dV_{\Phi-Y, \text{ост}}^{\lambda}, \quad (1)$$

$$dV_{\Phi}^{\lambda} = dV_{\parallel}^{\lambda} + dV_{\Phi, \text{ост}}^{\lambda}, \quad (2)$$

где

$$dV_{\parallel}^{\lambda} = R_{\mu\nu\omega}^{\lambda} V^{\mu} \oint x^{\nu} dx^{\omega}, \quad (3)$$

$$dV_{\Phi-Y, \text{ост}}^{\lambda} = A_{\mu\nu\omega}^{\lambda} V^{\mu} \oint x^{\nu} dx^{\omega}, \quad (4)$$

$$dV_{\Phi, \text{ост}}^{\lambda} = B_{\mu\nu\omega}^{\lambda} V^{\mu} \oint x^{\nu} dx^{\omega}, \quad (5)$$

$$B_{\nu\omega} = (B_{\mu\nu\omega}^{\lambda}) = -\varepsilon_0 \nabla_{\nu} (\bar{A} \nabla_{\omega} A) - \bar{A} (\nabla_{\nu} A) \bar{A} (\nabla_{\omega} A), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_{\nu\omega} = (A_{\mu\nu\omega}^{\lambda}) = & B_{\nu\omega} + \bar{A} (\nabla_{\nu} A) (\nabla_{\omega} \bar{A}) A - \\ & - (\nabla_{\nu} \bar{A}) A (\nabla_{\omega} \bar{A}) A + \varepsilon_0 (\nabla_{\nu} \nabla_{\omega} \bar{A}) A, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{A} = (A^{\nu}), \quad \underline{A} = (A_{\nu}), \quad \varepsilon_0 = A^{\nu} A_{\nu}, \quad A^{\nu} \equiv \frac{dx^{\nu}}{ds}, \quad (8)$$

В качестве приложения формулы (2) рассмотрим изменение вектора спина частицы при обносе его по Ферми вдоль бесконечно малого замкнутого контура.

Пусть частица со спином движется вокруг оси z в плоскости xy по окружности радиуса r с угловой скоростью ω ; $v = \omega r$ — линейная скорость частицы. Пусть $S(t)$ — 4-вектор спина частицы, переносимый по Ферми: $S^{\alpha} A_{\alpha} = 0$. Найдём изменение спина $dS = S(t) - S(0)$ за период при условии, что $r \rightarrow 0$, т. е. 3-цикл бесконечно мал. 4-Траекторию частицы зададим следующим образом:

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad z = 0, \quad t = t. \quad (9)$$

4-Скорость частицы $A^{\alpha}(t) = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\alpha}}{dt} = \gamma(-1, -r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0) = \gamma(-1, -\omega y(t), \omega x(t), 0)$. Гладкое продолжение $A^{\alpha}(t)$ на окрестность 4-траектории:

$$A^\alpha(x) = \gamma(-1, -\omega y, \omega x, 0). \quad (10)$$

Учитывая, что пространство-время плоское, для переноса Ферми имеем:

$$dS^\alpha = B_{\mu\nu\rho}^\alpha S^\mu \int_0^T x^\nu dx^\rho, \quad (11)$$

$$B_{\nu\rho} = (B_{\mu\nu\rho}^\alpha) = (\partial_\nu \bar{A}) (\partial_\rho A) - \bar{A} (\partial_\nu A) \bar{A} (\partial_\rho A). \quad (12)$$

Отличной от нуля в рассматриваемом приближении оказывается лишь компонента

$$B_{112}^2 = -\omega^2 \gamma^2 [1 - v^2 \gamma^2]. \quad (13)$$

Отсюда

$$dS^2 = -\pi r^2 S^1(0) \omega^2 \gamma^2 [1 - v^2 \gamma^2] \xrightarrow{v \rightarrow 0} -\pi v^2 S^1. \quad (14)$$

Угол поворота спина за период

$$\varphi = \frac{dS^2}{S^1} \approx -\pi v^2 \quad (15)$$

соответствует Томасовой прецессии [3]. Знак минус означает, что прецессия спина происходит в сторону, противоположную вращению частицы.

Список литературы

1. Ушаков Е. А. // Гравитация и электромагнетизм. Минск, 1987. С. 156.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1953. С. 507.
3. Thomas L. H. // Nature. 1926. V. 117. P. 514.

Поступила в редакцию 28.03.89.

УДК 534.23

А. К. БЕЛЯВСКИЙ, И. К. ДАНЕЙКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ КЛИНЕ. МЕТОД КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При определенной функциональной зависимости скорости звука $c(x, z)$ от горизонтальной и вертикальной координат метод конформного преобразования позволяет существенно упростить задачу нахождения акустического поля в неоднородном клине [1]. Данный подход неоднократно использовался при решении задач, моделирующих условия прибрежной зоны [2, 3]. При этом основное внимание уделялось двумерным моделям и вид показателя преломления исследуемой среды не конкретизировался. Обобщим полученные ранее результаты на трехмерный случай при наличии в рассматриваемой области произвольного распределенного источника.

Нам предстоит решить уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \Phi + k^2(x, y, z) \Phi = F(x, y, z) \quad (1)$$

при следующих условиях на поверхности ($z = -D$) и на границе раздела жидкость — твердое дно ($z = ax - D$):

$$\Phi|_{z=-D} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{z=ax-D} = 0; \quad \Phi \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} |x| \rightarrow \infty, \\ |y| \rightarrow \infty, \end{matrix} \quad (2)$$

где $k = \omega/c(x, y, z)$; c — скорость звука; a — постоянная, определяющая угол наклона дна. Пусть функция $C(x, z)$, аппроксимирующая c , имеет вид, предложенный в [1]. Предположим также, что изменение скорости звука вдоль оси Oy незначительно и им можно пренебречь. Таким образом, в нашем случае волновое число k является функцией только двух переменных.

Совершим преобразование координат: $x = e^u v \sqrt{1-v^2}$, $y = e^u \sqrt{1-v^2}$, $z = e^u v u - D$. Тогда уравнение (1) в новом базисе примет вид:

$$v^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + (1-v^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - v \frac{\partial \Phi}{\partial v} + (1-v^2) v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^4} + \\ + v(1-2v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} + k_v^2(v) \Phi = e^{2u} v^2 F(u, v, v), \quad (3)$$

а условия (2)

$$\Phi|_{v=0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_{v=A} = 0; \quad \Phi \rightarrow 0, \quad \begin{matrix} |u| \rightarrow \infty, \\ |v| \rightarrow \infty, \end{matrix} \quad (4)$$

причем $A = a/\sqrt{1+a^2}$. Будем искать решение задачи (3), (4) в виде произведения $\Phi(u, v, v) = U(u) V(v) N(v)$. Тогда, если $F=0$, получим

$$\Phi(u, v, v) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_n(v) e^{-\xi u} v^{-\lambda_n} H_n(v^2). \quad (5)$$

Здесь B_n — коэффициент возбуждения n -й моды; $H_n(v^2) = H\left[\frac{1}{2}(1-\lambda_n-\xi), \frac{1}{2}(\xi-\lambda_n), 1-\lambda_n, v^2\right]$ — гипергеометрическая функция, удовлетворяющая уравнению Гаусса: $v^2(v^2-1)H'' + \left[\left(\frac{3}{2}-\lambda_n\right)v^2 + \lambda_n - 1\right]H' + \frac{1}{4}(\xi - \lambda_n + \lambda_n^2 - \xi^2)H = 0$, а φ_n и λ_n — собственные функции и собственные значения граничной задачи Штурма-Лиувилля: $(1-v^2)V'' - vV' + (k_v^2 + \lambda_n^2)V = 0$, $V(0) = 0$, $\frac{dV(A)}{dv} = 0$.

Пусть теперь в рассматриваемой нами области присутствует некоторый распределенный источник, задаваемый функцией

$$F(u, v, v) = \sum_{m=0}^M f_m(u) p_m(v) g_m(v).$$

Тогда вместо разложения (5) получим

$$\Phi(u, v, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^M B_{nm} N_{nm}(v) \varphi_n(v) e^{-\xi u}, \quad (6)$$

$$B_{nm} = \int_0^A p_m(v) \varphi_n(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} f_m(u) \exp[(2+\xi)u - \pi u^2] du,$$

$$N_{nm}(v) = \Psi_n(v) + \Psi_n \int (\int E \Psi_n g_m(v) v^2 dv) dv / (E \Psi_n^2),$$

$$\Psi_n(v) = v^{-\lambda_n} H_n(v^2), E = \exp\left(\int \frac{1-2v^2}{v(1-v^2)} dv\right).$$

Таким образом, выражение (6) задает поле произвольного распределенного источника в неоднородном клине, который может быть принят в качестве приближенной модели прибрежной зоны.

Список литературы

1. Белявский А. К., Данейко И. К. Применение метода конформного преобразования к задаче распространения волн в неоднородном клине / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Минск, 1989. 11 с. Деп. в ВИНТИ 18.04.89. № 2495-B89.
2. Комиссарова Н. Н. // Вопросы судостроения. Сер. Акустика. 1978. Вып. 11. С. 3.
3. Марьин Н. П. // Радиотехника. 1959. Т. 14. № 6. С. 17.

Поступила в редакцию 05.06.89.

НАБЛЮДЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ СИСТЕМЫ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ МЕТОДЕ РЕГИСТРАЦИИ ЯМР

При стационарном методе регистрации ЯМР энергия резонансного поля малой амплитуды подводится к образцу непрерывно и чтобы успевала восстановиться бальмановская разность населенностей и возможность резонансного поглощения энергии, необходимо периодически нарушать условия резонанса. Для этого на постоянное магнитное поле накладывается периодически изменяющееся со звуковой частотой поле модуляции, и резонансная линия проходит дважды за период модуляции.

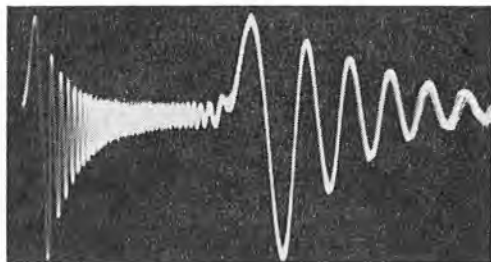


Рис. 1. Сигнал прецессии системы ядерных спинов в виде биений при стационарном методе регистрации (слева — при непрерывной, справа при «стоп-модуляции»)

Так как спиновая система инерционна, возникает эффект быстрого прохождения, называемый «виглями», или биениями. Биения возникают из-за существования в колебательном контуре с образцом двух вращающихся магнитных полей, частоты которых мало отличаются друг от друга. Одно из этих полей создается резонансным полем, а другое — прецессией системы ядерных спинов. Складываясь, эти близкие по частотам переменные поля обуславливают наблюдаемые биения¹.

При непрерывной модуляции частота биений увеличивается в связи с тем, что после резонанса из-за изменения поля модуляции происходит изменение результирующего магнитного поля, действующего на образец. Так как частота биений увеличивается, а полоса пропускания усилителя ограничена, на спад биений влияют постоянная времени поперечной релаксации T_2^* , а также полоса пропускания усилителя. Поэтому для биений с переменной частотой сложно, даже ориентировочно, определять время поперечной релаксации T_2^* .

Чтобы избежать влияния полосы пропускания усилителя на спад биений, требуется стабилизировать частоту биений. Для этого результирующее магнитное поле, действующее на спиновую систему, не должно изменяться из-за поля модуляции и оставаться постоянным в течение времени, большего T_2^* . Добиться этого можно остановкой поля модуляции после прохождения через резонанс. При «стоп-модуляции» резонанс наблюдается в постоянном магнитном поле; частота биений постоянна, и спад их амплитуды происходит с постоянной времени T_2^* (рис. 1). При этом конечность полосы пропускания усилителя на спад биений не влияет.

«Стоп-модулятор» (рис. 2) может быть использован в качестве приставки к серийному измерителю магнитной индукции Ш1-1 для наблюдения в постоянном магнитном поле свободной прецессии системы ядерных спинов в виде биений при стационарном методе регистрации ЯМР и измерения по спаду биений времени поперечной релаксации T_2^* .

Описанный метод наблюдения сигналов ядерного магнитного резонанса используется в лабораторном практикуме по магниторезонансной спектроскопии. На наш взгляд, введение этого упражнения способствует

¹ А. Леше. Ядерная индукция. Пер. с нем. / Под ред. П. М. Бородина. 1963. С. 73.

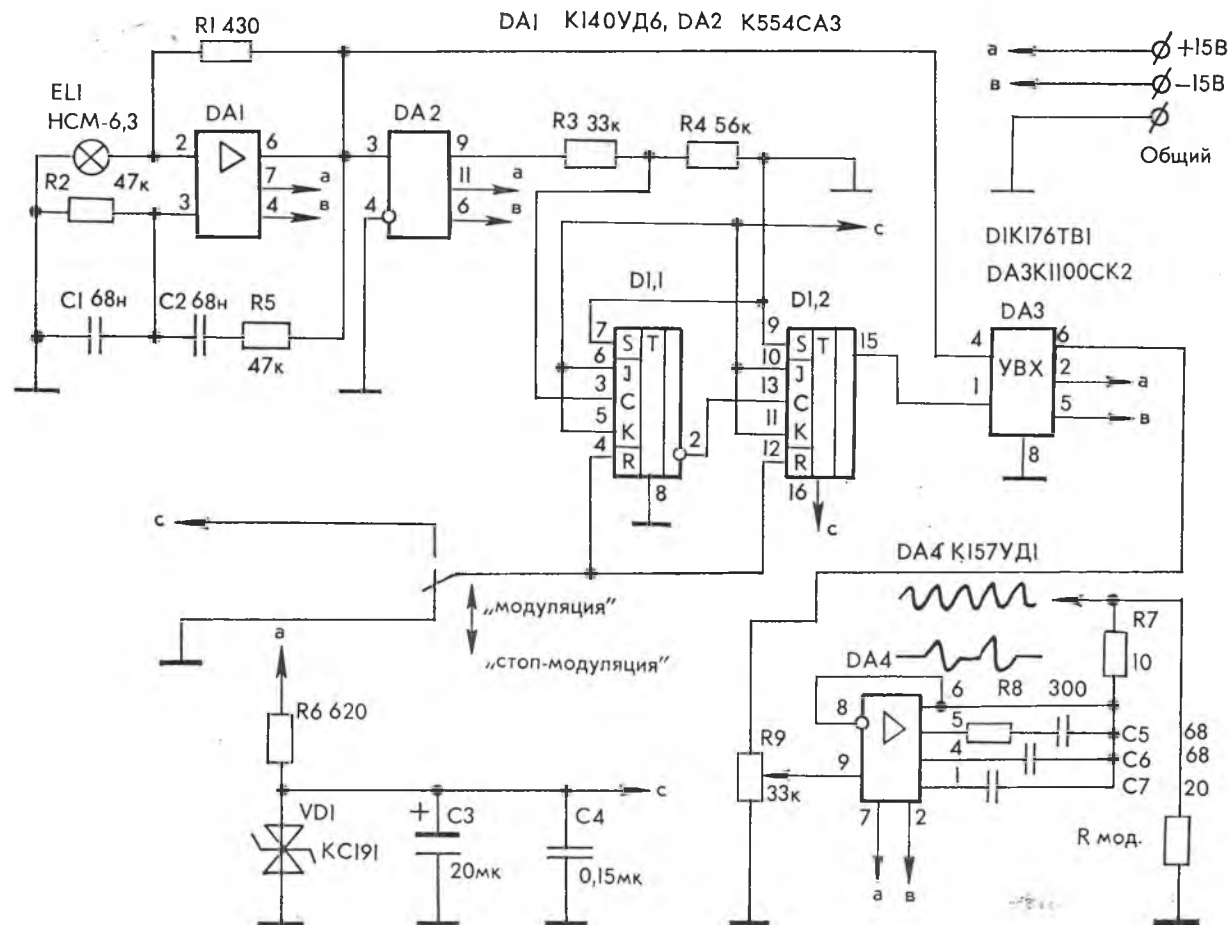


Рис. 2. Схема электрическая принципиальная «стоп-модулятора»

лучшему пониманию процессов и явлений в спиновой системе при воздействии на нее постоянного и переменного магнитных полей.

Поступила в редакцию 05.06.89.

УДК 530.1 : 51-72

М. Н. СЕРГЕЕНКО

К АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

1. Известно, что решение уравнения Шредингера с центрально симметричным потенциалом (в частности, кулоновским) методом ВКБ приводит к правильным собственным значениям энергии, если в радиальном уравнении сделать замену Крамерса $l(l+1) \rightarrow \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$. Трудность с членом, содержащим $l(l+1)$, состоит в том, что в квазиклассическом решении при $r \rightarrow 0$ возникает точка ветвления вида $R(r) \sim \frac{r^{\sqrt{l(l+1)}}}{\sqrt{r}}$, в то время как точное регулярное решение в этой точке $R(r) \sim r^l$ [1].

Замену Крамерса обосновал Лангер [2]. Однако аналогичная трудность возникает в квазиклассическом решении уравнения присоединенных полиномов Лежандра при $\vartheta \rightarrow 0$: $P_l^m(\vartheta) \sim \frac{\vartheta^{\sqrt{m^2-1/4}}}{\sqrt{m^2-1/4}}$, в то время как точное регулярное решение $P_l^m(\vartheta) \sim \vartheta^{\pm m}$. Отсюда делают заключение о неприменимости квазиклассического приближения к уравнению присоединенных полиномов Лежандра.

Нетрудно заметить, что проблему регуляризации $P_l^m(\vartheta)$ в нуле решает замена $m^2 - \frac{1}{4} \rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$, но она приводит, как будет показано ниже, к собственным значениям вида $\nu = j(j+1)$, $j = l + \frac{1}{2}$, где $l = 0, 1, 2, \dots$, отличным от известных $\nu = l(l+1)$, которые можно получить с помощью замены $m^2 - \frac{1}{4} \rightarrow m^2$ в рамках квазиклассического приближения. Таким образом, возникают альтернативные возможности, которые дают либо правильное поведение $P_l^m(\vartheta)$ в нуле с собственными значениями $\nu = j(j+1)$, $j = l + \frac{1}{2}$, либо приводят к собственным значениям вида $\nu = l(l+1)$ и нерегулярным поведением $P_l^m(\vartheta)$ в нуле при $m = 0$.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \nu Y = 0. \quad (1)$$

Выполним разделение переменных в этом уравнении после исключения первой производной, что легко сделать с помощью преобразования

$$\frac{d}{dx} \left(f \frac{dy}{dx} \right) = \left(V \bar{f} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2} V \bar{f} \right) (V \bar{f} y). \quad (2)$$

Тогда получим два уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \left(\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2 \vartheta} \right) \right] (V \sin \vartheta \Theta) = 0, \quad (3)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\mu - \frac{1}{4} \right) \right] \Phi = 0, \quad (4)$$

из которых следует, что квадрат обобщенного импульса по переменной φ есть $p_\varphi^2 = \mu - \frac{1}{4}$, на что указывает также возможность представления (3), (4) в виде уравнения Гамильтона — Якоби $\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 =$

$$= \nu + \frac{1}{4}, \quad \text{в котором обобщенные импульсы имеют вид } \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \\ = \left(- \frac{(V \sin \vartheta \Theta)''}{(V \sin \vartheta \Theta)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \left(- \frac{\Phi''}{\Phi} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнения (3), (4) есть уравнения Штурма — Лнувилля в каноническом виде

$$y'' + [\lambda - U(x)]y = 0. \quad (5)$$

Задача на собственные значения определена только тогда, когда сформулированы условия «регулярности» и граничные условия, которым должна удовлетворять функция y . Определим эти условия, исходя из следующих общих требований для решений в квантовой механике: 1) волновая функция и ее первые производные должны быть непрерывными и ограниченными функциями во всем пространстве; 2) в случае дискретного спектра ограниченное решение (если оно существует) должно обращаться в нуль экспоненциально на обоих концах интервала $(-\infty, \infty)$ [3].

Преобразуем уравнение (5) с помощью (2) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dX^2} + \left(1 - \frac{(V\sqrt{\lambda-U})''_{xx}}{V\sqrt{\lambda-U}} \right) \right] F = 0, \quad F = V\sqrt{\lambda-U} y, \quad (6)$$

где $X = \int^x V\sqrt{\lambda-U(x)} dx$. Квазиклассическое приближение справедливо, как известно, в том случае, если выполняется условие $\frac{(V\sqrt{\lambda-U})'}{\lambda-U} \ll 1$. [3].

Поэтому в уравнении (6) $\frac{(V\sqrt{\lambda-U})''_{xx}}{V\sqrt{\lambda-U}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(V\sqrt{\lambda-U})'}{\lambda-U} \right)'_x + \frac{1}{4} \left(\frac{(V\sqrt{\lambda-U})'}{\lambda-U} \right)^2 \ll 1$, и мы получаем уравнение

$$F''(X) + F(X) = 0, \quad \lambda - U > 0 \quad (7)$$

и, соответственно, $F''(X) - F(X) = 0$ в области, где $\lambda - U < 0$.

Пусть уравнение $\lambda - U(x) = 0$ имеет два корня x_1, x_2 . Потребуем, чтобы осциллирующее решение уравнения (7) непрерывно с непрерывной производной переходило в точках $X_1 = X(x_1), X_2 = X(x_2)$ в экспоненциально затухающие решения в области, где $\lambda - U < 0$. Тогда получим непрерывное во всей области ограниченное решение для функции $F(X)$, условием существования которого является выполнение равенства

$$X_2 - X_1 = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

3. В случае уравнения (3) условие непрерывности (8) принимает вид:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} V \sqrt{\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \pi \left(n_\vartheta + \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

где ϑ_1, ϑ_2 — корни уравнения $\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2 \vartheta} = 0$. Переходя в (9) к новой независимой переменной $\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}$, фазовый интеграл сводим к табличному:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} V \sqrt{\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu - 1/4}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \sqrt{\nu - \mu + \frac{1}{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha}, \quad (10)$$

где $k^2 = \left(\nu + \frac{1}{4} \right) / \left(\nu - \mu + \frac{1}{2} \right)$. После интегрирования получаем уравнение

$$\sqrt{\nu + \frac{1}{4}} = \sqrt{\mu - \frac{1}{4}} + n_\vartheta + \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Альтернативные возможности для собственных значений уравнения (3) заключаются в выборе граничных условий для уравнения (4). Если использовать «условие квантования» $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ (условие периодичности $\Phi(\varphi)$), то получим $\sqrt{\mu - \frac{1}{4}} = m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставив это значение $\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}$ в уравнение (11), будем иметь: $v = l(l+1)$, где $l = n_3 + |m|$. Эти собственные значения совпадают с точными для уравнений (1), (3).

Однако граничные условия для уравнения (4) можно выбрать согласно требованиям 1), 2) п. 2, т. е. допустим, что осциллирующее решение $a \cos \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}} \varphi + \delta \right)$ уравнения (3) на интервале $[0, \pi]$ непрерывно переходит в точках $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ в экспоненциально затухающие решения уравнения $\Phi'' - \left(\mu - \frac{1}{4} \right) \Phi = 0$ вне интервала $[0, \pi]$. В этом

случае условие непрерывности (8) имеет вид $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\mu - \frac{1}{4}} d\varphi = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right)$, откуда $\sqrt{\mu - \frac{1}{4}} = m + \frac{1}{2}$. Подставив это значение $\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}$ в уравнение (11), будем иметь

$$v = j(j+1), \quad (12)$$

где $j = l + \frac{1}{2}$.

В квантовой механике уравнение (1) определяет собственные значения оператора углового момента: $v = l(l+1)$, где l — орбитальное квантовое число. Тогда $j = l + \frac{1}{2}$ — квантовое число полного углового момента, а $1/2$ — спиновое квантовое число; j — всегда полуцелое число.

Список литературы

1. Пономарев Л. И. Лекции по квазиклассике. Киев, 1967.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., 1965.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974.

Поступила в редакцию 10.07.89.

УДК 519.1

А. В. МОЩЕНСКИЙ

РЕГУЛЯРНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

В данной заметке исследуется свойство монотонности регулярных булевых функций. Класс регулярных функций является обобщением класса пороговых функций*.

Рассмотрим единичный n -мерный куб $E^n = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$, $n \geq 1$ с заданным в нем отношением частичного порядка $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in E^n$, если $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \dots, n$. Нормой точки $\alpha \in E^n$

называется величина $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Множество $F_j \subseteq E^n$, состоящее из всех точек с нормой j , назовем j -ым слоем E^n .

Булева функция $f: E^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется монотонной, если для любых $x, y \in E^n$ из того, что $x \leq y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. Монотонная булева функция f называется регулярной, если она удовлетворяет следующему условию:

* Y. Crama. Discrete applied mathematics. 1987. V. 16. P. 79.

если $i < j$, $x_i = 1$, $x_j = 0$ и $f(x) = 0$, то $f(x + e_j - e_i) = 0$, (1)
где e_k — k -й единичный орт.

Предложение 1. Регулярная булева функция f удовлетворяет условию: если $i < j$, $x_i = 0$, $x_j = 1$ и $f(x) = 1$, то $f(x + e_i - e_j) = 1$.

Зададим на множестве точек слоя F_j частичный порядок $<$ следующим образом: $x < y$, $x, y \in F_j$, если $z(x) \geq z(y)$, где $z(a) = (z_1(a), z_2(a), \dots, z_j(a))$ — вектор, i -я координата которого равна номеру координаты i -й единицы вектора $a \in E^n$.

Предложение 2. Если $x < y$, $x, y \in F_j$, то для регулярной булевой функции f выполняется $f(x) \leq f(y)$, т. е. регулярная функция f обладает свойством монотонности на слое F_j относительно порядка $<$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $x < y$, $x, y \in F_j$ и $f(y) = 0$, то $f(x) = 0$. Из определения $z(x) \geq z(y)$. Следовательно, существует цепочка транспозиций вида (1) координат вектора y , приводящая к вектору x , т. е. $f(x) = 0$.

Исследуем структуру частично упорядоченного множества $(F_j, <)$. Будем рассматривать вместо $(F_j, <)$ изоморфное ему частично упорядоченное множество $D(F_j)$, где $D(F_j) = \{z(x) | x \in F_j\}$. Очевидно, что $D(F_j)$ есть подмножество элементов координатной решетки $M^j = \{(x_1, \dots, x_j) | 1 \leq x_i \leq n, x_i \text{ — целое}, i = 1, \dots, j\}$.

Предложение 3. Размерность множества $D(F_j)$ равна j , если $j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $n - j$, если $j > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Здесь под размерностью множества $D(F_j)$ понимается размерность координатной решетки M^j .

Доказательство следует из того, что нулевые компоненты вектора $x \in E^n$ определяют единичные компоненты, и наоборот.

Предложение 4. Следующая система диофантовых неравенств задает множество $D(F_j)$:

$$z_{i+1} - z_i > 0, i = 1, \dots, j-1; i \leq z_i \leq n - j + i, z_i \text{ — целые}, i = 1, \dots, j.$$

Свойство монотонности регулярной булевой функции f на $(F_j, <)$ позволяет построить эффективный алгоритм для задачи поиска максимального верхнего нуля. Напомним, что точка $x^0 \in E^n$ называется верхним нулем монотонной булевой функции f , если $f(x^0) = 0$, а для всех y таких, что $x^0 \leq y$ и $x^0 \neq y$, выполняется $f(y) = 1$. Точка x^0 называется максимальным верхним нулем f , если $f(x^0) = 0$ и для $y \in E^n$, из того, что $f(y) = 0$, следует, что $\|y\| \leq \|x^0\|$.

Для того чтобы определить, есть ли нулевое значение функции f на слое F_j , достаточно вычислить значение функции в минимальном элементе множества $(F_j, <)$. Нетрудно заметить, что минимальные элементы множеств $(F_j, <)$, $j = 0, \dots, n$ образуют цепь в E^n относительно естественного порядка $\leq$ и, следовательно, справедлива

Теорема. Максимальный верхний нуль монотонной регулярной булевой функции $f: E^n \rightarrow \{0, 1\}$ может быть найден за $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ вычислений значения функции.

Поступила в редакцию 01.12.88.

УДК 517.544

Н. В. БРОВКА

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА

Пусть $L = L_1 \cup L_2 = \left] -\frac{1}{k}, -1 \right[\cup \left] 1, \frac{1}{k} \right[$, $0 < k < 1$, $D = \mathbb{C} \setminus L$. Рас-

смотрим задачу: найти вектор $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ кусочно-голоморфный в D , ограниченный в окрестности концов L , предельные значения которого удовлетворяют краевому условию:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t), \quad (1)$$

где $G(t)$ — подстановочная матрица следующего вида:

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in L_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in L_2. \end{cases}$$

Эта задача рассматривалась О. Джураевым [1], но не была решена до конца.

С помощью S -преобразования [2]:

$$S = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, задача (1) сводится к задаче:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(t) \\ \Phi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_2^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in L_1, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(t) \\ \Phi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_2^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in L_2;$$

$$\Phi_3^+(t) = \Phi_3^-(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где введено обозначение $\Phi(z) = S \circ \varphi(z)$.

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи:

$$\psi_1^+(t) = G_1(t) \psi_1^-(t), \quad G_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in L_1 \\ \alpha^{3/2}, & t \in L_2, \end{cases} \quad (4)$$

$$\psi_2^+(t) \psi_2^-(t) = G_2(t), \quad G_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in L_1 \\ \alpha^{-1/2}, & t \in L_2. \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, их решения существуют, и введем, вообще говоря, мероморфную матрицу

$$Z(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x(z) \psi_1(z) \psi_2(z) & \psi_1(z) \psi_2(z) \\ -\frac{1}{2} x(z) \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} & \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $x(z) = \frac{1}{k} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$.

Прямой подстановкой можно проверить, что $Z(z)$ удовлетворяет краевому условию (2). Ограниченное решение задачи (4) имеет вид:

$$\psi_1(z) = \sqrt{(z-1)\left(z-\frac{1}{k}\right)}. \quad (7)$$

Задача (5) в классе функций, ограниченных в окрестности концов и не обращающихся в 0 в D , неразрешима. Она разрешима в классе функций, имеющих один нуль в точке z_1 , которая находится из следующей проблемы обращения Якоби:

$$\int_{(0,1)}^{(z_1, w_1)} \frac{d\tau}{V(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)} = -\frac{k}{3} \int_{(1,0)}^{(\frac{1}{k}, 0)} \frac{d\tau}{V(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)} + 4mK + 2niK',$$

где K, K' — эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра.

Решением проблемы обращения, когда $m = 0$, $n = 0$, будет точка с координатами: $z_1 = \operatorname{sn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)$, $w_1 = \operatorname{cn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)\operatorname{dn}\left(-\frac{k}{3}K'\right)$. Тогда решение задачи (5) в классе ограниченных функций, обращающихся в 0 в точке z_1 , дается формулой [3]:

$$\psi_2(z) = \exp\left\{\frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{3kK_k}K' + k\int_0^z\left(\frac{w_1}{\tau-z_1} - \frac{\pi}{3}K'\tau^2 - A\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} + c\right\},$$

где A — A -период абелева интеграла $\int_0^z \frac{w_1}{\tau-z_1} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$; c — произвольная константа.

Перепишем матрицу (6) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x(z)\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1) & \psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1) \\ -\frac{1}{2}x(z)\frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)} & \frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)} \end{pmatrix},$$

где $\psi_2(z) = \tilde{\psi}_2(z)(z-z_1)$ и $\tilde{\psi}_2(z) \neq 0$. Для того чтобы избавиться от полюсов, нулей элементов матрицы (9) и привести ее к каноническому виду, умножим ее справа на матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z-z_1} & -\frac{z}{z_1x(z_1)(z-z_1)} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x(z_1)}{z-z_1} - \frac{1}{k}\right) & \frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2(z+z_1)-z}{(z-z_1)z_1} \end{pmatrix}.$$

В результате получим:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)\left[x(z)-x(z_1)-\frac{1}{2k}(z-z_1)^2\right] & \frac{1}{2}\psi_1(z)\tilde{\psi}_2(z)\left[\frac{zx(z)}{z_1x(z_1)}-\frac{z}{z_1}+\right. \\ \left.+(z-z_1)^2\left(2-\frac{z}{z_1}\right)\right] & \\ -\frac{1}{2}\frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)}\left[\frac{x(z)+x(z_1)((z-z_1)^2-1)}{(z-z_1)^3}\right] & \frac{\psi_1(z)}{\tilde{\psi}_2(z)}\left[-\frac{1}{2}\frac{x(z)+x(z_1)((z-z_1)^2-1)}{(z-z_1)^2x(z_1)}\times\right. \\ \left.-\frac{1}{k}-x(z_1)\right] & \left.\times\frac{z}{z_1}+1\right] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Порядки ее столбцов на бесконечности равны: -2 , -2 , и их сумма равна порядку определителя. Тогда матрица

$$X = \begin{pmatrix} M & \vdots & 0 \\ \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

удовлетворяет краевым условиям (2), (3), а произведение $S^{-1}X$ является канонической матрицей исходной задачи (1). Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение. Каноническая матрица задачи (1) имеет вид $S^{-1}X$, где X определяется формулой (10), а решения $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ задаются выражениями (7), (8).

З а м е ч а н и е. Используя теорию неоднородной задачи Римана, трудно выписать условия ее разрешимости.

Список литературы

1. Джуряев О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 57.
2. Круглов В. Е. // Сиб. матем. журн. 1981. № 6. С. 87.
3. Чаевский Г. Г. Нелинейные краевые задачи теории аналитических функций на конечных римановых поверхностях: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984. 16 с.

Поступила в редакцию 30.12.88.

УДК 517.977

Н. В. ХРИТОНЕНКО

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГАМИЛЬТониАНА В ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В классе допустимых управлений $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$, рассмотрим задачу

$J(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min$; $\dot{x} = f(x) + Bu$, $x(0) = x_0$; $b_* \leq u(t) \leq b^*$, $t \in T$, (1)
 $x = x(t) = x(J|t)$, $u = u(t) = u(J|t)$; $\varphi(\cdot)$, $f(\cdot) \in C^{(2)}$; $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, r\}$. Градиент $\text{grad}_u H(x, \varphi, u) = (\partial H / \partial u_j, j \in J)$ гамильтониана системы (1) $H(x, \varphi, u) = \psi'(f(x) + Bu)$ вдоль допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, и соответствующих ему траекторий $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, прямой (1) и сопряженной

$$\dot{\psi} = -\partial f'(x(t)) / \partial x \cdot \psi; \quad \psi(t^*) = -\partial \varphi(x(t^*)) / \partial x, \quad (2)$$

систем назовем коуправлением и обозначим $\Delta(t)$, $t \in T$.

Существует обширный класс задач (1), оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, которых релейно. При создании эффективных методов решения таких задач [1] возникает проблема удержания некоторых значений коуправления. В связи с этим представляет интерес изучение локальной управляемости гамильтониана.

На множестве T выберем совокупность точек $T_* = \{t_j, j \in Z\}$. Каждой точке t_j поставим в соответствие набор индексов K_j . Обозначим $K_* = \bigcup_{j \in L} K_j$; $\Delta u(t)$, $\Delta x(t)$, $\Delta \psi(t)$, $\rho(t)$, $t \in T$, — допустимые приращения управления, траектории, котраектории и коуправления.

Определение 1. При выбранном наборе $\{T_*, K_*\}$ динамическая система (1) локально управляема вдоль $u(t)$, $t \in T$, относительно гамильтониана, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для каждой совокупности $\omega = (\omega_l^j, l \in K_j, j \in L)$ существует такая функция $\Delta u(t, \omega, \varepsilon)$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняются равенства:

$$\rho_l(t_j) = \varepsilon \omega_l^j, \quad l \in K_j, \quad j \in L. \quad (3)$$

Введем линеаризованную вдоль $u(t)$, $t \in T$, модель системы (1), (2):

$$\dot{\chi} = A(t)\chi + B\mu, \quad \chi(0) = 0; \quad (4)$$

$$\dot{\zeta} = -A'(t)\zeta + D(t)\chi, \quad \zeta(t^*) = -D_0(t^*)\chi(t^*); \quad (5)$$

где $A(t) = A(x(t))$, $A(x) = \partial f(x) / \partial x$, $D(t) = D(x(t), \psi(t))$,

$$D(x, \psi) = \psi' \partial^2 f'(x) / \partial x^2; \quad D_0(t^*) = D_0(x(t^*)), \quad D_0(x) = \partial^2 \varphi(x) / \partial x^2.$$

При переносе определения 1 на систему (4) число ε_0 считается произвольным. Тогда можно говорить о глобальной или просто управляемости динамической системы (4) относительно гамильтониана $H(\chi, \zeta, \mu, t) = \zeta'(A(t)\chi + B\mu) - \chi'D(t)\chi/2$.

Теорема. Динамическая система (1) локально управляема вдоль функции $u(t)$, $t \in T$, относительно гамильтониана по совокупности $\{T_*, K_*\}$, если управляема ее линеаризованная модель.

Приведем схему доказательства теоремы в трех классах допустимых вариаций.

1. Пусть класс допустимых вариаций состоит из функций Дирака. Согласно [2], динамическая система (4) управляема в классе импульсных функций

$$\mu(t, v) = \sum_{j \in L} v^j \delta(t - t_j), \quad t \in T, \quad (6)$$

тогда и только тогда, когда $\det P_1 \neq 0$, где $P_1 = (B'(I, K_j)F(t_j, t_l) \times \times B(I, K_l), l \in L)$, $F(t_j, t_l) = F'(t^*, t_j)D_0(t^*)F(t^*, t_l) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} F'(\tau, t_1)D(\tau) \times \times F(\tau, t_l) d\tau$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_j$, если $t_l < t_j$; $\tau_1 = t_l$, $\tau_2 = t^*$, если $t_l \geq t_j$; $F(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, определяется из системы $\partial F(t, \tau)/\partial t = A(t)F(t, \tau)$, $F(\tau, \tau) = E$.

Рассмотрим семейство приращений управления $\Delta u(t, v) = \mu(t, v)$, зависящее от произвольного вектора v и соответствующие ему приращения $\Delta x(t, v)$, $\Delta \psi(t, v)$, $t \in T$, траекторий прямой (1) и сопряженной (2) систем. Считая, что в точках t_j , $j \in L$, функции $\kappa(t)$, $\Delta x(t)$ имеют одинаковые скачки $B(I, K_j)v^j$, можно показать, что функции $\kappa(t)$ и $\Delta x(t)$, $\zeta(t)$ и $\Delta \psi(t)$, $t \in T$, связаны соотношениями: $\Delta x(t) = \kappa(t) + 0(\|v\|)$, $\Delta \psi(t) = \zeta(t) + 0(\|v\|)$, $t \in T$. Построим функцию:

$$g(\varepsilon, v) = (\Delta(K_j|t_j) + \varepsilon \omega^j - B(I, K_j)(\psi(t_j) + \Delta \psi(t_j, v))), \quad j \in L). \quad (7)$$

Непосредственным вычислением показывается, что $g(\varepsilon, v)|_{(0,0)} = 0$, $|\partial g(0, 0)/\partial v| = |P_1| \neq 0$. Поэтому, согласно теореме о неявной функции, в окрестности $\varepsilon = 0$ существует такая функция $v = v(\varepsilon)$, что на управлениях $\Delta u(t, v(\varepsilon))$ выполняются равенства $g(\varepsilon, v(\varepsilon)) = 0$, т. е. динамическая система (1) локально управляема вдоль $u(t)$, $t \in T$. Из доказательства следует, что управляемость динамической системы (4) в классе функций (6) эквивалентна невырожденности матрицы Якоби системы функций (7).

2. Пусть класс допустимых вариаций состоит из игольчатых функций, определенных следующим образом: строится зависящее от вектора $v = (v_l^j, l \in K_j, j \in L)$ множество $T^v = \bigcup_{j \in L} \bigcup_{l \in K_j} T_l^{v^j}$; $T_l^{v^j} = [t_j - v_l^j/2, t_j + v_l^j/2]$, если $t_j \in]0, t^*[$; $T_l^{v^j} = [t_j, t_j + v_l^j]$, если $t_j = 0$; $T_l^{v^j} = [t_j - v_l^j, t_j]$, если $t_j = t^*$, выбирается произвольным образом совокупность ξ_l^j , $l \in K_j$, $j \in L$. Функция

$$\mu(t, v) = \xi_l^j, \text{ если } t \in T_l^{v^j}, l \in K_j, j \in L; \mu(t, v) = 0, \text{ если } t \notin T^v, \quad (8)$$

называется игольчатой. Из [2] следует, что система (1) управляема в классе игольчатых функций (8) только тогда, когда $\det P_2 \neq 0$, где $P_2 = (B'(I, K_j)F(t_j, t_l)B(I, K_l)\xi_l^j, l \in L)$. Выбрав в (8) вектор v произвольным, составим семейство приращений управления $\Delta u(t, v) = \mu(t, v)$, $t \in T$, и соответствующие ему функции $\Delta x(t, v)$, $\Delta \psi(t, v)$, $t \in T$, $g(\varepsilon, v)$.

В новом классе допустимых вариаций имеем $g(0, 0) = 0$, $|\partial g(0, 0)/\partial v| = |P_2| \neq 0$. Применив теорему о неявной функции, получаем опять необходимое утверждение.

3. Третий класс допустимых вариаций составим с помощью базисных функций [3]. Пусть K_l^j , $l \in K_j$, $j \in L$, — базисные векторы $|K_*|$ -мерного пространства. Разложим по ним $|K_*|$ -мерный вектор $\omega: \omega = \sum_{j \in L} \sum_{l \in K_j} v_l^j K_l^j$. По предположению, существует функция $\xi_l^j(t)$, $t \in T$, которая обеспечивает разрешимость задачи (4), (5) и выполнение равенств (6) с $\omega_l^j = K_l^j$, $l \in K_j$, $j \in L$. Тогда управление

$$\mu(t, v) = \sum_{j \in L} \sum_{l \in K_j} v_l^j \xi_l^j(t), \quad t \in T, \quad (9)$$

обеспечивает управляемость системы (4) для произвольного вектора ω . Считая в (9) вектор v произвольным, рассмотрим функции $\Delta u(t, v) = \mu(t, v)$; $\Delta x(t, v)$, $\Delta \psi(t, v)$, $t \in T$, и функцию $g(\epsilon, v)$ вида (7). Поскольку динамическая система (4) управляема на семействе (9), то, как показано выше, матрица Якоби $\partial g(0, 0)/\partial v$ системы (7) невырождена. Применяя к (7) теорему о неявной функции, получим необходимый результат.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Выпуклые задачи. Минск, 1987. Ч. 4.
2. Хритonenko Н. В. Управляемость гамильтониана в многомерной линейно-квадратичной задаче оптимального управления / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Минск, 1988. 27 с. Деп. в ВИНТИ № 8369-B88 от 28.11.88.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., 1972.

Поступила в редакцию 22.03.89.

УДК 621.374.44

А. В. Баркова, Е. Д. Карих. Двухканальный делитель частоты. № 4377-В89. Деп. от 03.07.89 в ВИНТИ.

Разработан двухканальный делитель частоты с переменным коэффициентом деления, предназначенный для использования в системах АПЧ, работающих по методу фазовой или частотной автоподстройки. Делитель построен на микросхемах 531-й серии, коэффициент деления может изменяться в пределах от 3 до 4097. Диапазон рабочих частот до 40 МГц. Два канала делителя могут работать независимо, а также в режиме синхронной перезаписи начального кода, устанавливающего величину коэффициента деления.

УДК 538.123+621.3.083.8

В. И. Прокошин, В. А. Ярмолович, Л. А. Андарало, Т. Е. Понетайкина. Проектирование и расчет магнитных систем для датчиков, функционирующих на эффекте Холла. № 6012-В89. Деп. от 26.09.89 в ВИНТИ.

Выявлены аналитические зависимости между распределением индукции магнитного поля и геометрией исследуемой магнитной системы на основе чередующихся прямоугольных уступов. Расчет проведен с учетом свойств ферромагнитной среды.

УДК 538.129+621.3.083.8

В. И. Прокошин, В. А. Ярмолович, Л. А. Андарало, И. В. Бурлыко, И. И. Васильев, Т. М. Рабкевич. Характеристики преобразователей Холла с плоскими концентраторами магнитного поля. № 6457-В89. Деп. от 24.10.89 в ВИНТИ.

Рассмотрено влияние формы плоских концентраторов на величину индукции магнитного поля в зазоре ферромагнитных пластин. Приведены зависимости коэффициентов усиления магнитного потока и температурные характеристики преобразователей Холла с плоскими концентраторами магнитного поля. Экспериментально исследована и теоретически рассчитана структура магнитного поля вблизи плоского концентратора, помещенного в постоянное магнитное поле.

УДК 669.76 : 573.3

В. Г. Шепелевич, Зу Хен Чер. Структура быстрозакаленных фольг сурьмы и сплавов на ее основе. № 6593-В89. Деп. от 31.10.89 в ВИНТИ.

Представлены результаты исследования структуры фольг сурьмы и ее сплавов с висмутом, теллуrom, оловом, индием, кадмием, германием и свинцом, полученных быстрой кристаллизацией капли расплава на внутренней поверхности вращающегося медного цилиндра. Неравновесная растворимость легирующих элементов в сурьме достигает 3—10 ат. %. Фольги имеют поликристаллическую структуру, в них формируется текстура $\{10\bar{1}2\} + (0001)$. Легирование сурьмы усиливает компоненту текстуры $\{10\bar{1}2\}$ и ослабляет компоненту текстуры (0001).

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.34

Ан Чан Мо, Толстик А. Л., Чалей А. В. Учет нелинейного поглощения при четырехволновом взаимодействии в просветляющихся средах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Предложены аналитические аппроксимации численных решений задачи четырехволнового обращения волнового фронта в резонансных средах, позволяющие описать четырехволновое взаимодействие при любых интенсивностях пучков накачки с погрешностью менее 10 % в диапазоне оптической плотности нелинейного слоя $k_0L \leq 8$.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 621.372.8 : 535

Бельский А. М., Красневская Ю. И. О происхождении темных линий в поле пучка, отраженного от волновода с утечкой // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Дана теоретическая интерпретация темных линий, возникающих в поперечном сечении поля пучка, отраженного от волновода с утечкой (квазиволновода). Выяснены условия появления темных линий.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 535.514.2

Прощко С. В., Титов А. Д., Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П. Условия формирования излучения с линейной и круговой поляризацией световозвращателем полного внутреннего отражения ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$) // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Проведены исследования условий формирования света с круговой и линейной поляризацией, отраженного от тетраэдрического призмного отражателя в форме трехгранного угла ($\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/4$). Показано, что только для призмы с показателем преломления $n=1,399465$ имеются определенные ориентации азимута поляризации падающего света, при которых два из десяти отраженных пучков могут быть поляризованы по кругу. Состояние с линейной поляризацией отраженного света можно получить для световозвращателя с любым показателем преломления при определенном для каждого из отраженных пучков азимуте поляризации падающего света.

Библиогр. 8 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 666.22 : 535.37

Воропай Е. С., Горбачев С. М., Билан О. Н., Черенда Н. Г. Ультрафиолетовая люминесценция силикатных стекол // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Поглощение силикатных стекол в области 220—300 нм обусловлено наряду с примесью железа и собственными дефектами стекла. Для примесных дефектов переходы с излучением запрещены, собственные обуславливают люминесценцию стекол с максимумом 280 нм.

Библиогр. 12 назв., ил. 1.

УДК 535.33

Ким Зен Хо, Последович М. Р., Маляревич А. М. Комбинационное рассеяние и строение безводных молибдатов уранила // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Методом спектроскопии комбинационного рассеяния света проведено исследование кристаллических порошков молибдатоуранилатов калия, рубидия и цезия. Установлено наличие в этих соединениях трех структурно неэквивалентных молибдатных групп. Две из них имеют симметрию C_{2v} и одна может быть отнесена к точечной группе C_{3v} . Все три молибдатогруппы различаются характером связей с другими структурными элементами кристаллической решетки.

Библиогр. 6 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 535.33 : 547.772

Липницкий И. В., Скотов И. К., Липницкий В. И. Колебательные спектры и строение аквакомплексов марганца и кадмия с метилпиразолом // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Методами колебательной спектроскопии и термогравиметрии проведено исследование комплексов $Mn(II)$ и $Cd(II)$ с лигандами H_2O , Cl и метилпиразолом. Обоснована плоская структура соединений, в которых внутренняя координационная сфера ионов металлов состоит из трех молекул воды и молекулы метилпиразола, координированного неподеленной электронной парой «пиридинового» атома азота. Ионы хлора находятся во внешней сфере комплексов.

Библиогр. 11 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 535.37

Бойков В. Н., Киреева Ю. В., Красовский А. Н., Умрейко Д. С. **Фазовый переход в кристаллах натрийурилатацетата** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Спектрально-люминесцентным методом обнаружен фазовый переход в кристаллах $\text{Na}[\text{UO}_2(\text{CH}_3\text{COO})_3]$ при температурах 15—35 К. В высокотемпературной модификации натрийурилатацетата молекулы кристаллоосновы относятся к кристаллографически эквивалентным. В низкотемпературной фазе указанная эквивалентность теряется, что выражается в проявлении трех основных типов центров свечения. Переход от одной модификации к другой, судя по ширине флуоресцентных линий, включает состояние малых неупорядоченных смещений атомов в кристаллической решетке. Концентрация дефектных центров с $\nu_0 = 21108,5 \text{ см}^{-1}$ ($\sim 5\%$) при этом не претерпевает заметных изменений.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 621.378.325

Кислов В. В., Шаронов Г. В. **Амплитудная нестабильность мод излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Приведены результаты экспериментального исследования амплитудной нестабильности мод в спектре излучения непрерывных лазеров с активной синхронизацией мод (АИГ: Nd^{3+} , He-Ne , Ag^+) в зависимости от мощности накачки активного элемента, мощности управляющего сигнала на модуляторе, расстройки длины резонатора. Установлены оптимальные режимы работы лазеров с СМ для получения импульсов излучения с минимальной амплитудой и временной нестабильностью.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 669.76 : 537.3

Шепелевич В. Г., Зу Хен Чер. **Структура и кинетические свойства быстроохлажденных фольг сплавов сурьма-индий** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Проведены исследования структуры и кинетических свойств фольг сурьмы и сплавов сурьма-индий, полученных быстрым охлаждением из жидкой фазы. Фольги характеризуются текстурой $\{10\bar{1}2\} + (0001)$. Неравновесная растворимость индия в сурьме достигает 3 ат.%. Индий в кристаллической решетке сурьмы действует как акцептор.

Библиогр. 8 назв., ил. 3.

УДК 519.28

Кирлица В. П. **Точные D- и A-оптимальные планы для линии регрессии** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Показано, что точные D-оптимальные планы являются и A-оптимальными для линии регрессии. Однако это утверждение нельзя перенести на случай линейной регрессии, зависящей от многих факторов. Для линейной регрессии, зависящей от двух факторов, описана структура точных D-оптимальных планов.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977

Забелло Л. Е., Янушаускайте Н. А. **Решение одной комбинаторной задачи методом динамического программирования** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Исследована комбинаторная задача оптимального управления. Решение задачи получено с помощью метода динамического программирования и принципа максимума.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.977

Тагайназаров С. **Оптимизация непрерывной системы управления в условиях неопределенности** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Рассматривается линейная задача оптимального управления в условиях неопределенности. С целью получения гарантированного результата вводятся новые понятия допустимых и оптимальных управлений. С помощью опоры строится специальное решение сопряженной системы и доказывается принцип максимума.

Чурбанов Ю. Д. Индуцированные почти комплексные связности на Φ -пространствах и их подпространствах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Рассмотрена задача индуцирования почти комплексной структуры на Φ -пространстве с помощью бинвариантной почти комплексной структуры группы Ли. Доказан критерий, когда индуцированная аффинная связность Φ -пространства является почти комплексной связностью относительно индуцированной почти комплексной структуры. Выяснено, когда индуцированная связность 3-циклического однородного пространства является почти комплексной связностью относительно канонической почти комплексной структуры. Аналогичная задача решена для произвольного подпространства 3-циклического пространства.

Библиогр. 8 назв.

Липницкий С. Ф. Математическая модель синтаксического анализа непроективных и слабопроективных сообщений в интеллектуальной информационной системе // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Рассматривается математическая модель и построенный на ее основе алгоритм синтаксического анализа непроективных и слабопроективных сообщений на ограниченном естественном языке. Доказаны достаточные условия их проективности.

Табл. 1.

Зубович К. А. Построение преобразователей предикатов и генерация минимальных решений линейных функциональных уравнений в системе функционального программирования // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Предлагается подход к автоматизации одного из шагов процесса доказательства правильности программ в системе функционального программирования — построения минимальных решений функциональных уравнений. Приводится алгоритм построения преобразователей предикатов и генерации решения, описывается его программная реализация.

Библиогр. 7 назв., табл. 1.

Буза М. К., Мощенский В. А. О мощности одного множества программ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Доказана верхняя оценка числа различных программ для одного подмножества языка типа ПЛ/1. Показано, что в некоторых случаях полученная оценка является оптимальной.

Библиогр. 4 назв.

Гладун О. М. О нелинейных стоячих колебаниях упругой пластины, плавающей на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Методом возмущений решается задача о стоячих волнах в идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает тонкая упругая изотропная пластина. Исследуются случаи ветвления решения.

Библиогр. 6 назв.

Березкина Л. Л. О наилучшей рациональной аппроксимации некоторых функций, аналитических в круге единичного радиуса // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Излагаются результаты исследования поведения наилучших рациональных приближений на круге единичного радиуса в равномерной метрике для одного класса функций, аналитических в круге $|z| < 1/q$, $|q| < 1$. При этом предполагается, что степень знаменателя приближающей функции фиксирована, тогда как степень ее числителя стремится к бесконечности. Упомянутому классу функций принадлежат, например, такие функции, как $\ln(1 + qz)$ и $\arctg(qz)$ при условии, что $|q| < 1$.

Библиогр. 8 назв.

Ушаков Е. А. Томасова прецессия как движение вектора, ассоциированное с циклом, при переносе по Ферми // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Посредством полученной ранее автором формулы, выражающей изменение вектора при переносе его по бесконечно малому замкнутому контуру по Ферми и Ферми — Уолкеру, рассмотрен эффект томасовой прецессии как движение вектора, ассоциированное с циклом.

Библиогр. 3 назв.

УДК 534.23

Белявский А. К. Данейко И. К. **Распространение волн в неоднородном клине. Метод конформного преобразования** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Методом конформного преобразования решена трехмерная задача для поля произвольного распределенного источника в неоднородном по трассе распространения клине.

Библиогр. 4 назв.

УДК 538 : 082/083

Пряхин А. Е., Минько И. Р. **Наблюдение прецессии системы ядерных спинов при стационарном методе регистрации ЯМР** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Описывается установка для наблюдения прецессии системы ядерных спинов в виде биений при стационарном методе регистрации ядерного магнитного резонанса (ЯМР), позволяющая измерять время поперечной релаксации T_2^* .

Ил. 2.

УДК 530.1 : 51-72

Сергеенко М. Н. **К асимптотике полиномов Лежандра** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Собственные значения присоединенных полиномов Лежандра получены с помощью асимптотических решений, непрерывных и ограниченных во всей области. Рассматриваются две альтернативные возможности для собственных значений: $\nu = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ и $\nu = j(j+1)$, $j = l + \frac{1}{2}$, где $1/2$ интерпретируется как спиновое квантовое число.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.1

Мощенко А. В. **Регулярные булевы функции** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Исследуется свойство монотонности регулярных булевых функций.

УДК 517.544

Бровка Н. В. **Решение одной задачи Римана для трехмерного вектора** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Рассмотрена однородная векторно-матричная задача линейного сопряжения. С помощью S-преобразования задача для трех функций сводится к задаче для двух функций. В результате построена каноническая матрица исходной задачи и вычислены ее частные индексы.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977

Хритonenko Н. В. **Управляемость гамильтониана в терминальной задаче оптимального управления** // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 2.

Для нелинейной терминальной задачи оптимального управления в трех классах допустимых вариаций доказано достаточное условие локальной управляемости динамической системы $\dot{x} = f(x) + Bu$, $x(0) = x_0$, относительно гамильтониана $H(x, \psi, u) = \psi'(f(x) + Bu)$.

Библиогр. 3 назв.