

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

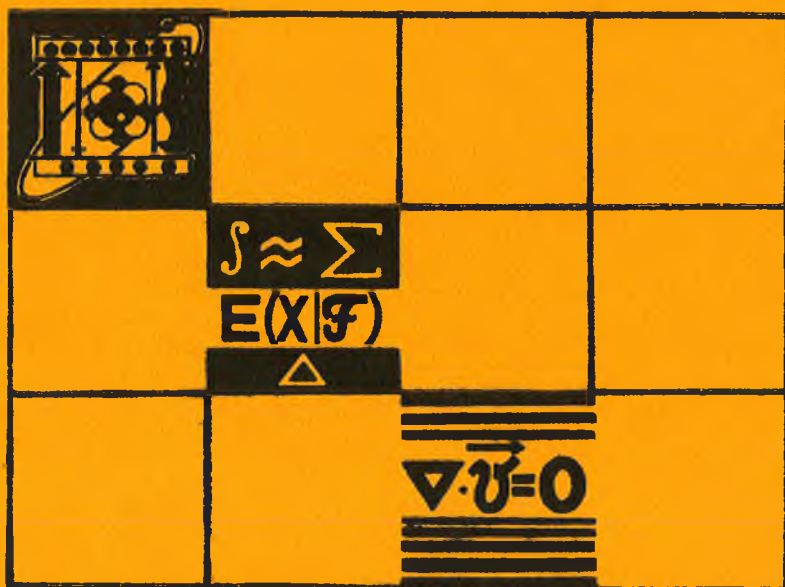
СЕРИЯ 1

Физика

Математика

Механика

1'90



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Нгуен Тхай Хонг, Барковский Л. М.</i> Изменение степени поляризации частично поляризованного света в слоистых анизотропных структурах	3
<i>Кириленко А. И.</i> О показателях преломления для неоднородных волн	5
<i>Урбанович А. И., Подлипко Ю. А., Шалима В. Н.</i> Температурные поля при облучении кристаллов ионными пучками переменной мощности	9
<i>Ключников А. С., Кондратенко В. И., Алешкевич Н. И.</i> К вопросу об управлении фазовой структурой световых пучков	12
<i>Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П.</i> Пассивная синхронизация мод в непрерывном лазере на АИГ: Nd^{3+} с помощью кристаллов LiF с F_2^-	15
<i>Войтович Д. А.</i> Дополнительные потери резонатора газового лазера при быстром изменении его оптической длины	17
<i>Семененя В. А.</i> Задача излучения ФАР круглых волноводов	20
<i>Ле Тхань Хоах, Серафимович А. И., Тимошенко Т. Н., Титков Е. Ф.</i> Об отнесении колебаний в области 200 см^{-1} в комплексных соединениях уранила	24
<i>Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Петров С. А.</i> Изменение структуры поверхности кремния при облучении высокими дозами ионов C^+ и N_2^+	27
<i>Шепелвич В. Г., Шахер Хашем Ф.</i> Структура и процессы переноса в быстроохлажденных фольгах сплавов висмут-галлий	29
<i>Кахарская Л. В., Чан Зуй Фыонг.</i> Измерение β -активности водных растворов, содержащих изотопы ^{241}Pu , ^{90}Sr , ^{90}Y , ^{137}Cs	30

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Кулешова И. Ф., Монастырный П. И.</i> Вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с пограничным слоем	33
<i>Басик В. А.</i> О модификации метода полной редукции для разностных граничных задач с переменными коэффициентами	37
<i>Василевич Ю. В.</i> Контактная задача термоупругости для ортотропного полупространства	40
<i>Куренко В. П.</i> Существование решения стохастического дифференциального уравнения без сноса при локальной интегрируемости коэффициента a^{-2}	43
<i>Ковалев М. М., Нгуен Нгуа.</i> Порядково-выпуклые разложения функций на целочисленной решетке	46
<i>Рубашко Н. К., Совпель И. В.</i> Автоматический контроль текстов естественных языков. II	49
<i>Зверович В. Э., Зверович И. Э.</i> О связывающем числе графов	52
<i>Штин С. Л.</i> Об одной гипотезе В. Е. Круглова	55
<i>Калинин А. И.</i> Асимптотические методы построения оптимальных управлений с релейными и особыми участками	58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Апанасович В. В., Гулаков И. Р., Чудовская Е. А.</i> Моделирование процессов фотоэлектрического преобразования в одноэлектронном фотоприемнике	62
<i>Ветохин С. С.</i> Отношение сигнал/шум счетчика фотонов при гармонической модуляции регистрируемого светового потока	64
<i>Булатов В. И.</i> К управляемости одного класса систем с запаздыванием	66
<i>Макаревич Т. А.</i> Спектральный K -радиус линейных операторов в пространствах последовательностей	67
Аннотации депонированных статей	70

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Александр Сергеевич Михалев</i>	72
------------------------------------	----

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

**Физика
Математика
Механика**

1'90

ЯНВАРЬ



МИНСК
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ

Главный редактор Г. В. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (*ответственный редактор*),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*),
В. В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), А. М. БЕЛЬ-
СКИЙ (*ответственный секретарь*), Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГА-
БАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕ-
РОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕ-
ШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ,
В. И. МИРОНЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ,
А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ,
Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

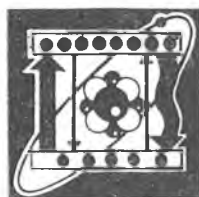
Серия I: Физ. Мат. Мех. 1990, № 1

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *Р. В. Кондрад*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 19.10.89. Подписано в печать 02.01.90. АТ 04502. Фор-
мат 70×108^{1/16}. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0.
Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,35. Тираж 540 экз. Заказ 438. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048. Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080. Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП
Белоруссии. 220041. Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 535.56

НГУЕН ТХАЙ ХОНГ, Л. М. БАРКОВСКИЙ

ИЗМЕНЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА В СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

В настоящей работе дается оценка изменения степени поляризации частично поляризованного света при его прохождении через некоторые слоистые анизотропные структуры. Приводятся численные результаты для систем, состоящих из одноосных кристаллов KDP, кварца, ниобата лития, управляемых внешними электрическими полями.

Рассмотрим нормальное падение частично поляризованного света на анизотропную оптическую систему, состоящую из слоев с параллельными границами. Предположим, что слои немагнитные ($\mu = 1$) и непоглощающие ($\epsilon = \epsilon^*$). В кристаллах при $\mu = 1$ удобно использовать тензор пучка падающего светового потока [1] $\Phi_0 = \langle \underline{H}_0 \cdot \underline{H}_0^* \rangle$, построенный для напряженности магнитного поля $\underline{H}_0$, поскольку вектор $\underline{H}_0$ в отличие от вектора напряженности электрического поля $\underline{E}_0$ всегда трансверсален по отношению к волновой нормали $\underline{n}$, где $\underline{H}_0$ — напряженность магнитного поля на входе системы. Угловые скобки обозначают усреднение по времени. Тензор Φ_0 можно представить [2] в виде суперпозиции полностью поляризованной части $\Phi_0^p = k_1 \underline{a} \cdot \underline{a}^*$ и естественного света $\Phi_0^n = -k_2 \underline{n}^2$;

$$\Phi_0 = \Phi_0^p + \Phi_0^n = k_1 \underline{a} \cdot \underline{a}^* - k_2 \underline{n}^2, \quad (1)$$

где k_1, k_2 — положительные постоянные; $\underline{n}$ — антисимметричный тензор, дуальный вектору волновой нормали $\underline{n}$; $\underline{a}$ — комплексный единичный вектор и $\underline{a}^*$ — комплексно сопряженный вектор; $\underline{a} \cdot \underline{a}^*$ — диада. Векторы $\underline{n}$ и $\underline{a}$ удовлетворяют условиям $\underline{n} \underline{a} = 0, \underline{a} \underline{a}^* = 1$.

Степень поляризации на входе системы определяется соотношением [2]:

$$p_0 = \frac{(\Phi_0^p)_t}{(\Phi_0)_t} = \frac{\sqrt{2(\Phi_0^2)_t - (\Phi_0)_t^2}}{(\Phi_0)_t}. \quad (2)$$

Здесь индексы t обозначают следы тензоров.

Из (1) и (2) получаем: $p_0 = \frac{k_1}{k_1 + 2k_2}$.

На выходе системы без учета флуктуаций диэлектрических свойств слоев имеем [1]: $\Phi = D \Phi_0 D^+$, где D — тензор пропускания многослойной системы [3]; D^+ — эрмитово сопряженный тензор. В отсутствие отражения $D = D^{(n)} D^{(n-1)} \dots D^{(2)} D^{(1)}$, где $D^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — тензор пропускания i -го слоя.

Для степени поляризации p на выходе системы имеем:

$$p = \frac{\sqrt{2(\Phi^2)_t - (\Phi_t)^2}}{\Phi_t} = \frac{\sqrt{2[(D\Phi_0 D^+)^2]_t - [(D\Phi_0 D^+)_t]^2}}{(D\Phi_0 D^+)_t} \quad (3)$$

В отсутствие поглощения и отражения волн на границах раздела тензор D является унитарным ($DD^+ = 1$). Из (3) тогда следует, что степень поляризации p постоянна и совпадает с p_0 в (2). При учете же отражения волн на границах раздела тензор пропускания D становится в отсутствие диссипации нормальным [1], т. е. $DD^+ = D^+D$. В этом случае его можно представить в виде

$$D = D_{++} + D_{--} \quad (4)$$

где $D_{\pm}$ — комплексные амплитудные коэффициенты пропускания для волн с собственными поляризациями $\rho_{\pm}$, задаваемыми средой. Они обладают свойствами:

$$\rho_{\pm}^2 = \rho_{\pm} = \rho_{\pm}^+, (\rho_{\pm})_t = 1, n\rho_{\pm} = \rho_{\pm}n = 0. \quad (5)$$

Используя спектральное разложение (4) и свойства (5) проекторов $\rho_{\pm}$, можно находить степени p (3) на выходе систем с любым количеством слоев. Мы ограничимся здесь рассмотрением некоторых простейших случаев.

Для анизотропной пластинки [1]:

$$D_{\pm} = \frac{4n_{\pm}n \exp(i\varphi_{\pm})}{(n_{\pm} + n)^2 - (n_{\pm} - n)^2 \exp(2i\varphi_{\pm})}, \quad (6)$$

$$\varphi_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm} d,$$

где n — показатель преломления окружающей изотропной среды, $n_{\pm}$ — показатель преломления слоя с толщиной d ; ω — частота волны; c — скорость света в вакууме.

В случае периодической слоистой системы из двух чередующихся слоев (рис. 1):

$$\Phi = (D^{(2)}D^{(1)})^m \Phi_0 (D^{(1)+}D^{(2)+})^m, \quad (7)$$

где m — число периодов.

Подстановка (7) в (3) дает соответствующие p .

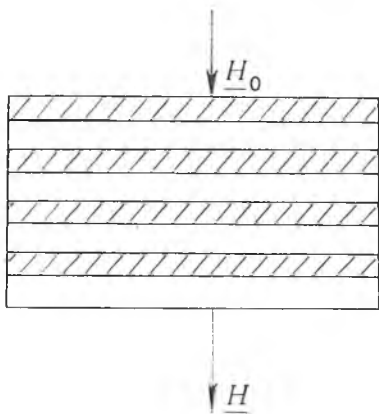


Рис. 1.

Известно, что внешнее электрическое поле воздействует на диэлектрическую проницаемость кристалла, изменяет тензоры показателей преломления, отражения и пропускания. Тензор пучка Φ и, в свою очередь, степень поляризации светового потока на выходе системы должны поэтому изменяться. Этот вопрос исследован нами для некоторых слоистых анизотропных структур, состоящих из одноосных кристаллов KDP, кварца, ниобата лития.

На рис. 2 показана зависимость степени поляризации светового потока на выходе системы при отсутствии и в присутствии моделирующего электрического поля. Вычисления проводились с показателями преломления $n_{\pm}$ и электрооптическими коэффициентами r_{ij} , взятыми соответственно из таблиц в [4–6], при комнатной температуре и длине волны $\lambda = 0,6$ мкм. Модулирующее электрическое поле приложено по направлению оси Z для кристаллов KDP, ниобата лития и по X для кристалла кварца.

Из рис. 2 видно, что в обоих случаях ($E=0$ и $E=755$ В/м) степень поляризации светового потока на выходе системы увеличивается с ростом

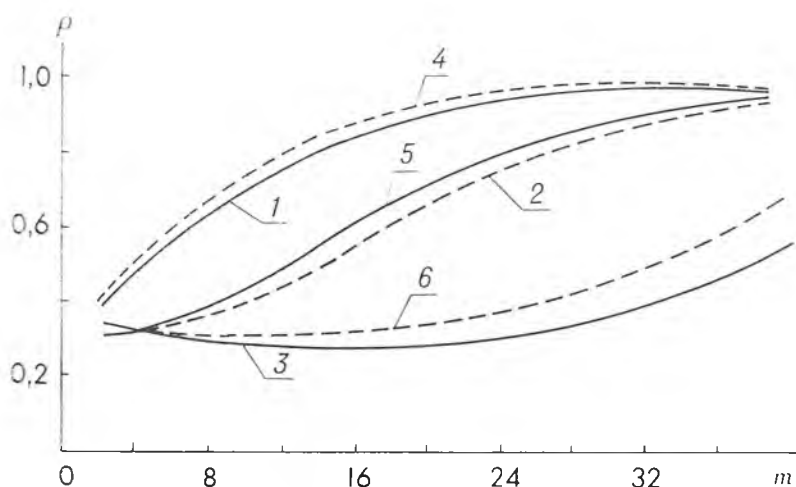


Рис. 2. Зависимость степени поляризации светового потока на выходе периодической системы от количества периодов слоев при отсутствии и в присутствии модулирующего электрического поля.

Кристалл KDP: 1 — $E = 0$, 2 — $E \parallel Z$, $E = 755$ В/м; кварца: 3 — $E = 0$, 4 — $E \parallel X$, $E = 755$ В/м; LiNbO₃: 5 — $E = 0$, 6 — $E \parallel Z$, $E = 755$ В/м

количества периодов слоев. Для непериодической системы с одинаковыми срезами степень поляризации на выходе медленно повышается с ростом количества слоев и она меньше, чем степень поляризации на выходе периодической системы. Характерно, что степень поляризации на выходе системы осциллирует. Но в присутствии модулирующего электрического поля амплитуда осцилляций больше, чем в отсутствие модуляции.

Список литературы

1. Барковский Л. М., Федоров Ф. И. // Опт. и спектр. 1974. Т. 36. Вып. 6. С. 1140.
2. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, 1976.
3. Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // ЖПС. 1975. Т. 23. Вып. 1. С. 143.
4. Сонин А. С., Василевская А. С. Электрооптические кристаллы. М., 1971.
5. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. М., 1976.
6. Справочник по лазерам. М., 1978. Т. 2.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1957.

Поступила в редакцию 07.04.87.

УДК 535.132

А. И. КИРИЛЕНКО

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

Широкое внедрение в практику поглощающих веществ, например полупроводников, диктует необходимость детального изучения распространения светового излучения в них прежде всего с целью расширения возможностей контроля за их параметрами. Однако при этом приходится переосмысливать, казалось бы, установившиеся понятия электромагнитной теории [1]. Мы рассматриваем прохождение границы раздела между двумя поглощающими средами электромагнитной волной, которая в общем случае неоднородна [2]. В таких задачах одним из важнейших понятий является показатель преломления (ПП), позволяющий наглядно пред-

ставить закономерности прохождения волны через границу. Для неоднородных волн необходимо вводить два ПП, характеризующих преломление фазовой $\vec{h}$ и амплитудной $\vec{\tau}$ нормалей [3]. По определению [4],

$$N_3 = \frac{|\vec{h}|}{|\vec{h}|} = \frac{1}{|N|} \frac{\sqrt{\text{ch}^2 \vartheta' - \sin^2 \delta_2}}{\sqrt{\text{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \delta_1}}; \quad K_3 = \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{1}{|N|} \frac{\sqrt{\text{ch}^2 \vartheta' - \cos^2 \delta_2}}{\sqrt{\text{ch}^2 \vartheta - \cos^2 \delta_1}}. \quad (1)$$

Формулы (1) гораздо сложнее известных для компланарного случая, поскольку параметр неоднородности преломленной волны зависит не только от параметров (угла) падения α и неоднородности ϑ , но и от угла некомпланарности η падающей волны. Цель нашей работы — рассмотреть частные, предельные случаи формул (1), что поможет ориентироваться при численных расчетах и в постановке эксперимента. Примем

следующие обозначения: $\vec{m} = N_1 \vec{e} = N_1 (\vec{e}_1 + i \vec{e}_2) = \vec{h} + i \vec{\tau}$ — вектор рефракции; $N_1 = n_1 - i \chi_1 = n_1 (1 - i \text{tg } \delta_1)$ — комплексный ПП первой среды; во второй среде с $N_2 = n_2 - i \chi_2$ распространяется преломленная волна, ее параметры обозначаем штрихами. Относительный показатель преломления $N = N_1 / N_2$. Фазовый множитель рассматриваемых волн берем в виде

$\exp i[\omega t - k(\vec{m}, \vec{r})]$; нормаль $\vec{q} = \{0, 0, 1\}$ направлена из первой среды во вторую. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ задаем в виде: $\vec{e}_1 = \text{ch } \vartheta \{\sin \alpha, 0, \cos \alpha\}$, $\vec{e}_2 = \text{sh } \vartheta \{\cos \alpha \cos \eta, \sin \eta, -\sin \alpha \cos \eta\}$. Из (1) видно, что N_3 и K_3 , хотя и характеризуют различные стороны преломления, не являются независимыми. Между ними существует взаимосвязь $N_3 (\text{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \delta_1) = K_3 (\text{ch}^2 \vartheta - \cos^2 \delta_1) + |N|^{-2} \cos 2\delta_2$, в которую входит единственный волновой параметр — неоднородность падающей волны ϑ , и эта связь одинакова как при компланарном, так и при некомпланарном падении.

Обычно считается, что чем больше мнимая часть ПП, ответственная за затухание, тем больше N_3 и K_3 [3]. Для неоднородных волн затухание зависит еще и от неоднородности ϑ и растет с ее увеличением. Казалось бы, что поведение N_3 и K_3 от ϑ должно быть таким же. Однако можно показать, что при больших неоднородностях ($\vartheta \rightarrow \infty$) N_3 и K_3 стремятся к единице, причем независимо от значений α и η и оптических постоянных граничащих сред. Этим подчеркивается отличие параметра неоднородности ϑ от коэффициента поглощения χ . Вероятно, экспериментально трудно получить волны с большими неоднородностями, но этот случай не единственный, когда одновременно $N_3 = 1$ и $K_3 = 1$. Физически его можно интерпретировать как прохождение границы раздела «без преломления» [4], хотя при таком подходе не учитывается, что N_3 и K_3 определены как положительные величины, т. е. углы преломления отсчитываются от нормали к границе в обе стороны. На самом деле преломление, конечно, происходит, но при этом длины векторов $\vec{h}$ и $\vec{\tau}$ в первой и во второй средах не меняются, хотя взаимная их ориентация может изменяться. Из закона Снелла и соотношения Максвелла $m^2 = N^2$ следует: $m'_z = h'_z + i \tau'_z = \sqrt{N_2^2 - N_1^2 + (h_z + i \tau_z)^2}$. Для того, чтобы длины векторов $\vec{h}$ и $\vec{\tau}$ в первой и во второй средах остались неизменными, нормальные компоненты векторов рефракции m_z и m'_z в падающей и преломленной волнах должны быть, например, комплексно сопряженными, что возможно, если

$$n_1^2 - \chi_1^2 = n_2^2 - \chi_2^2. \quad (2)$$

Взаимная ориентация векторов $\vec{h}$ и $\vec{\tau}$ в каждой среде различна (рис. 1), что следует из равенств $(\vec{h}, \vec{\tau}) = n_1 \chi_1$; $(\vec{h}', \vec{\tau}') = -n_2 \chi_2$. Отметим, что случай $N_3 = 1$ изучался ранее, в том числе экспериментально (опыты Шн и Вильс). Описанный здесь эффект включает случай $N_3 = 1$ как частный.

Положим, что условие (2) выполняется и на границу раздела падает каноническая волна: $\vec{E} = A_s [\vec{q}, \vec{e}] - A_p [\vec{e}, [\vec{q}, \vec{e}]]$, $\vec{H} = N A_s [\vec{e}, [\vec{q}, \vec{e}]] +$

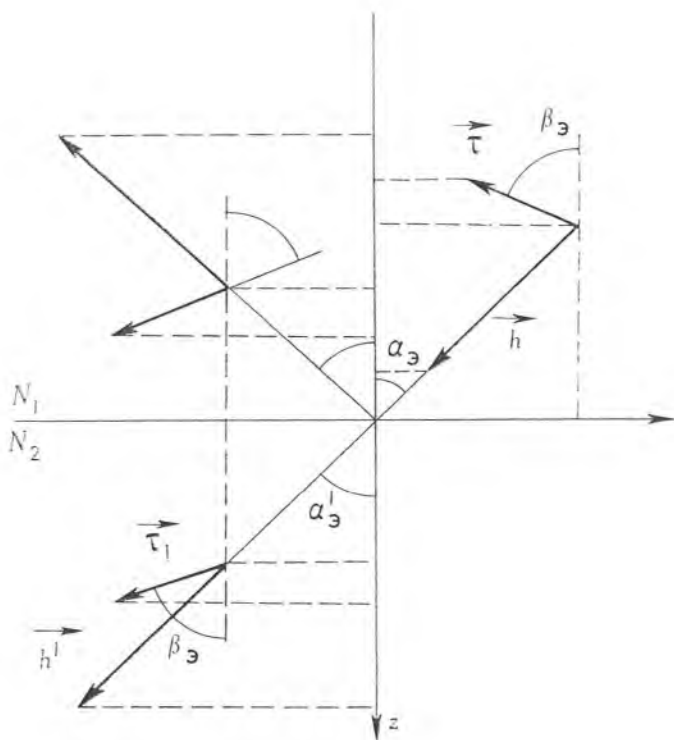


Рис. 1. Взаимная ориентация фазовых h и амплитудных τ векторов в падающей, отраженной и преломленной волнах при прохождении границы раздела «без преломления»

$+NA_p[\vec{q}, \vec{e}]$, которая отражается и преломляется с соответствующими френелевскими коэффициентами [6]. При прохождении границы двух сред, в силу закона преломления $N_1[\vec{q}, \vec{e}] = N_2[\vec{q}, \vec{e}']$, волна типа «s» не меняет свою поляризацию по вектору $\vec{E}$ и изменяет ее по вектору $\vec{H}$, а волна типа «p» — наоборот. Коэффициенты отражения можно представить в виде

$$R_s = i \frac{\tau_z}{h_z}; \quad R_p = -\frac{A + R_s}{1 + AR_s}, \quad (3)$$

где $A = (N_2^2 - N_1^2)/(N_2^2 + N_1^2)$, причем здесь h_z и τ_z связаны соотношением

$$2h_z\tau_z = n_1\kappa_1 - n_2\kappa_2. \quad (4)$$

Если N_1 и N_2 различаются не сильно ($A \rightarrow 0$, т. е. при условии (4) еще должно быть $n_1\kappa_1 \approx n_2\kappa_2$), то R_s и R_p становятся одинаковыми, причем, как видно из (3), отражение происходит со сдвигом фаз равным $\pm\pi/2$, а модуль коэффициента отражения может быть очень малым, если мало τ_z .

Проанализируем вариант $\alpha = 0$, когда фазовая нормаль $\vec{e}_1$ перпендикулярна к границе раздела. При этом векторы $\vec{h}$, $\vec{\tau}$ и нормаль к границе раздела $\vec{q}$ лежат в одной плоскости (компланарное падение). Здесь N_3 и K_3 не зависят от угла некомпланарности η , причем всегда выполняются неравенства:

$$N_3^2 \leq \frac{|N|^2 \operatorname{sh}^2 \theta + n_1^2}{|N|^2 \operatorname{sh}^2 \theta + n_2^2}; \quad K_3^2 \leq \frac{|N|^2 \operatorname{sh}^2 \theta + \kappa_1^2}{|N|^2 \operatorname{sh}^2 \theta + \kappa_2^2}. \quad (5)$$

Равенство имеет место для согласованных сред $\delta_1 = \delta_2$.

Особый случай реализуется, когда $\vec{e}_1$ направлен вдоль границы раздела ($\alpha = \pi/2$). Хотя векторы $\vec{h}$, $\vec{\tau}$ и $\vec{q}$ при этом некомпланарны, зависимости N_0 и K_0 от η легко изучить, особенно в важном случае малых неоднородностей ϑ . Оказывается, что N_0 и K_0 не зависят от ориентации амплитудной нормали, т. е. волны с различной некомпланарностью преломляются одинаково. Это следует из закона преломления для параметра неоднородности ϑ , входящего в (1) [5]: $2\text{ch}^2\vartheta' = 1 + |N|^2(1 - G - 2\text{sh}^2\vartheta) + \sqrt{[1 - |N|^2(1 + G)]^2 + 4\chi^2 + (1 + G)}$, где $\chi = \text{Im}N$, $G = \text{sh}^2\vartheta \cos^2\eta$. Каким бы ни было η , при достаточно малых ϑ параметр преломленной волны ϑ' практически не зависит от η , что находит отражение в поведении N_0 и K_0 . При больших неоднородностях ϑ ПП зависят от угла некомпланарности η существенным образом. Некоторые типичные зависимости N_0 и K_0 от параметров α и η представлены на рис. 2, а ($\vartheta = 0,1$) и б ($\vartheta = 1,0$) для границы раздела железо ($N_1 = 3,03 - i1,78$) — серебро ($N_2 = 0,35 - i1,79$).

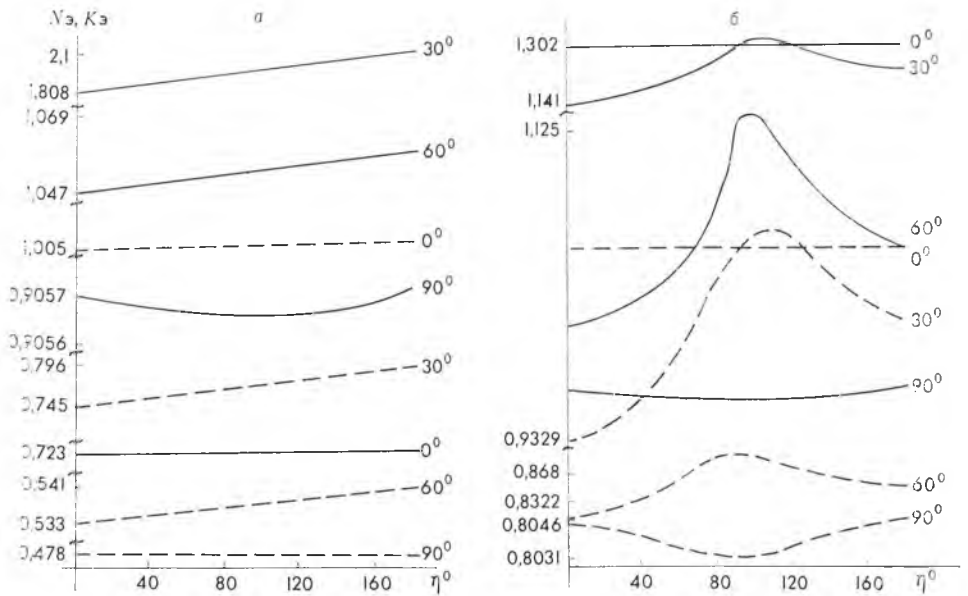


Рис. 2. Зависимости эффективных показателей преломления для фазовых N_0 (-----) и амплитудных K_0 (—) нормалей от параметра некомпланарности η . Справа указаны углы падения α

Практически важным является нормальное падение $h_z = |\vec{h}|$. В этом компланарном случае мы имеем главные значения N_0 и K_0 . Волна падает нормально к границе раздела, если ($\alpha \neq \pi/2$, $\vartheta \neq 0$, $\delta \neq \pi/2$) $\eta = \pi$ и $\text{tg } \alpha = \text{th } \vartheta \text{ tg } \delta_1$. При этом вектор $\vec{\tau}$, характеризующий затухание, составляет с нормалью $\vec{q}$ угол ψ такой, что

$$\text{tg } \psi = \text{ch}^2\vartheta \text{ tg } \alpha / \sin^2\delta_1. \quad (6)$$

Для ПП имеем:

$$N_0 = (\cos 2\delta_2 + L + \sqrt{(1 + L)^2 - 4L \sin^2\delta_2}) / 2 |N|^2 (\text{ch}^2\vartheta - \sin^2\delta_1), \quad (7)$$

$$K_0 = (-\cos 2\delta_2 + L + \sqrt{(1 + L)^2 - 4L \sin^2\delta_2}) / 2 |N|^2 \left(\text{ch}^2\vartheta - \frac{n_1}{|N|^2} \right),$$

где $L = |N|^2 \text{ch}^2\vartheta \sin^2\alpha / \sin^2\delta_1$.

С помощью соотношений (4) и (5) формулы (7) легко выразить через угол ψ , если подставить $\text{ch}^2\vartheta = (1 - \text{tg}^2\delta_1 \text{tg}^2\alpha)^{-1}$, где $\text{tg } \alpha = (-1 + \sqrt{1 + 4 \sin^4\delta_1 \text{tg}^2\delta_1 \text{tg}^2\psi}) / 2 \sin^2\delta_1 \text{tg}^2\delta_1 \text{tg } \psi$.

Таким образом, при нормальном падении эффективные ПП зависят от ориентации амплитудной нормали относительно нормали к границе раздела сред и эти зависимости удается представить в явном виде.

Рассмотренные здесь эффекты, связанные с прохождением границ раздела неоднородными волнами, могут оказаться полезными как для экспериментальной проверки самих законов отражения и прохождения, так и для уточнения оптических постоянных поглощающих веществ.

Список литературы

1. Минков И. М. // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 58. Вып. 2. С. 466.
2. Богуславский С. А. Избранные труды по физике. М., 1961.
3. Кизель В. А. Отражение света. М., 1973.
4. Кириленко А. И. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 8. С. 486.
5. Хапалюк А. П., Кириленко А. И. // ЖПС. 1976. Т. 24. Вып. 6. С. 1044.
6. Кириленко А. И., Хапалюк А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1980. №1. С. 17.

Поступила в редакцию 23.03.88.

УДК 621.315.592:546.28

А. И. УРБАНОВИЧ, Ю. А. ПОДЛИПКО, В. Н. ШАЛИМА

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ КРИСТАЛЛОВ ИОННЫМИ ПУЧКАМИ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Взаимодействие ионных пучков с мишенями, как правило, сопровождается сильным разогревом их. Динамика и конфигурация температурного поля в мишени при этом сильно зависят от параметров пучка: его интенсивности, пространственного профиля и степени фокусировки [1]. Расчеты температурных полей в произвольный момент времени представляют большой интерес для технологии ионного легирования полупроводниковых кристаллов. В частности, зная градиенты температур, можно судить о вызываемых нагревом напряжениях в кристалле, ответственных за образование нарушений на его поверхности, а также об эффективности отжига радиационных нарушений, образующихся в ходе облучения, и перехода внедренных частиц в равновесное состояние. Анализ температурных полей в начальный период облучения показывает, что в центре пятна нагружения температура резко возрастает, в то время как периферийная часть мишени остается практически холодной [2]. В рамках простейшей модели, описывающей линейную связь между термонапряжениями и градиентом температуры, исследован характер зависимости возникающих напряжений от времени в случае мощности пучка, постоянной во времени [1, 2]. Нами проведен расчет температурных полей для пучков с переменной мощностью. Для тонких пластин, т. е. в случае, если толщина пластины d значительно меньше диаметра пучка $2a$, уравнение, описывающее температурное поле $T(r, t)$ мишени в радиальном направлении, может быть записано в виде [1]:

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\chi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \mu \frac{I(t)}{d} e^{-\frac{r^2}{a^2}} - 2\alpha\sigma \frac{T^4 - T_0^4}{d} = 0, \quad (1)$$

где χ , ρ и C — коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость мишени соответственно; $I(t)$ — плотность мощности падающего пучка, зависящая от времени; μ — коэффициент, учитывающий долю энергии падающего иона на разогрев мишени; σ — постоянная Стефана — Больцмана; α — эмиссионная способность мишени; T_0 — температура окружающей среды.

Для иллюстрации влияния временной зависимости мощности пучка на характер температурных полей в тонких пластинках $I(t)$ будем аппроксимировать следующим образом: $I(t) = I_0 \cdot F(t)$, где

$$F(t) = \begin{cases} 1 & (2) \\ C_1(1 - e^{-t/t_u}); & (3) \\ C_2 t/t_u e^{-t/t_u}; & (4) \\ C_3 (t/t_u)^2 e^{-t/t_u}. & (5) \end{cases}$$

Величина t_u — время облучения пучком мишени. При расчетах предположим, что энергия, получаемая мишенью (доза облучения), остается постоянной. Для этого должно выполняться соотношение

$$\int_0^{t_u} F(t) dt = \text{const}, \quad (6)$$

из которого легко определяются постоянные C_j .

Значение времени облучения выберем, исходя из условия: $t_u \geq t_x$, где $t_x = \rho C a^2 / \chi$ — характерное время, за которое мишень после начала облучения можно характеризовать температурой, относящейся к макроскопическим ее участкам [1].

В безразмерных переменных $\xi = r/a$; $\tau = t/t_x$ и с учетом обозначений

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_0}; \quad \gamma = \frac{\mu J_0 a^2}{\chi T_0 d}; \quad \beta = \frac{8\sigma T_0^3 a^2}{d\chi} \quad \text{уравнение (1) принимает вид:}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \gamma e^{-\frac{\tau}{2}} F(\tau) + \beta [1 - (1 + \Theta)^4] \frac{\alpha}{4} = 0. \quad (7)$$

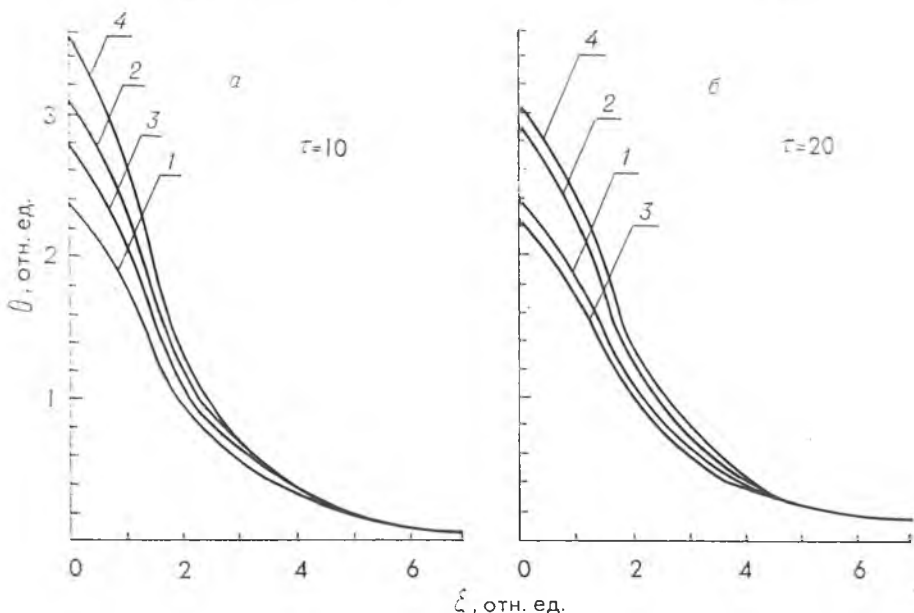


Рис. 1. Распределение температуры по поверхности кристалла для временных профилей ионного импульса, описываемых зависимостью:

1 — (2); 2 — (3); 3 — (4); 4 — (5). Длительность импульса $t_u = 10 t_x$ (а); $t_u = 20 t_x$ (б)

Будем решать (7) при начальном условии:

$$\Theta|_{\tau=0} = 0. \quad (8)$$

Результаты решения задачи (7) — (8) представлены на рисунках 1, 2. Из сравнения распределения температуры по поверхности кристалла для различных временных профилей ионного импульса (рис. 1, а) видно, что температура кристалла в центре пятна нагружения существенно зависит от характера изменения во времени мощности падающего пучка ионов. Эти различия в температуре разогрева мишени уменьшаются с удалением от центральной части облучаемой области к периферии и практически не наблюдаются для $\xi > 5$. Характер изменения температуры кристалла

по поверхности пластины позволяет судить о радиальных градиентах температур, возникающих в кристалле в процессе облучения. Анализ зависимостей (см. рис. 1) позволяет заключить, что использование пучков с формой профиля (3)—(5) приводит к появлению больших градиентов температур на конечном этапе облучения по сравнению с пучками с формой профиля в виде ступеньки (2). Для импульсов с временной зависимостью (2) (рис. 2, а) температура в центре пятна нагружения выходит на насыщение, что соответствует виду функции $F(t)$. Более высокая температура для кривой 4 объясняется медленным нарастанием функции $F(t)$ на начальной стадии облучения. Тем самым вся доза облучения практически выделяется на конечной стадии импульса, приводя к сильному разогреву мишени с возникновением больших градиентов температур.

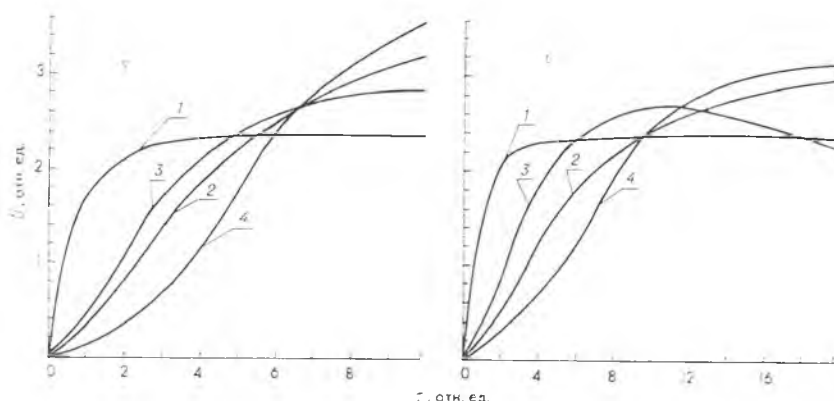


Рис. 2. Динамика разогрева облучаемого кристалла в центре пятна нагружения для временных профилей пюнного импульса. Пояснения те же, что и на рис 1

Для того чтобы проследить за динамикой разогрева облучаемой пластины в ходе более длительного пюнного облучения, проведен расчет при $t_n = 20t_x$. Доза облучения сохранялась прежней, т. е. выполнялось условие (6).

Как и в предыдущем случае, для $\xi < 5$ наблюдается существенная зависимость температуры кристалла от характера изменения мощности пучка во времени (см. рис. 1, б). Вместе с тем наблюдается уменьшение градиента температуры в центре облучаемой области для импульса с формой профиля (4). Увеличение времени облучения при сохранении дозы приводит к уменьшению разогрева пластины в центре облучаемой области в случае пучков с переменной мощностью (см. рис. 2, б). Для пучка с временной зависимостью мощности вида (4) наблюдается прохождение температуры через максимум в момент времени $t = 10t_x$, что согласуется с зависимостью $F(t)$.

Таким образом, из приведенных расчетов следует, что, задавая зависимость мощности пучка от времени, можно получать температурное поле определенного профиля, варьировать температуру на оси пучка, не меняя при этом дозы облучения.

В заключение авторы выражают благодарность А. П. Новикову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Глушцов А. И., Комаров Ф. Ф., Корзюк В. И., Новиков А. П., Урбанович А. И., Шалима В. Н. // МЭ. 1986. Т. 15. № 6. С. 548.
2. Zhukova S. I., Komarov F. F., Novikov A. P., Samojlyuk T. T., Urbanovich A. I. // Rad. Eff. 1987. V. 102. P. 7.

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ ФАЗОВОЙ СТРУКТУРОЙ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

В СВЧ-диапазоне методами пространственной фазировки излучающих систем решается задача управления диаграммой направленности фазированных антенных решеток практически во всем телесном угле без изменения положения излучателя в пространстве, что позволяет осуществлять локацию нескольких целей одновременно, фокусировку излучения в любой заранее заданной точке дальней зоны антенны и т. д.

Применение методов СВЧ-техники к оптическому диапазону электромагнитных волн наталкивается на серьезные затруднения ввиду того, что размер фазировочного элемента излучающей системы должен иметь поперечный размер порядка длины волны фазировочного излучения [1, 2]. В связи с малостью длины волны электромагнитного излучения оптического диапазона ($\sim 10^{-6}$ м) создание излучателей или фазировочных элементов со столь незначительными линейными размерами представляется задачей практически невыполнимой. Непосредственный перенос методов СВЧ-техники на оптический диапазон поэтому хотя теоретически и возможен, но практически не реализуем, что обуславливает необходимость принципиально иного подхода к проблеме фазировки световых пучков.

Цель настоящей работы — обоснование возможности построения управляющих оптических систем, позволяющих производить фазирование световых пучков с шагом дискретизации порядка длины волны.

Известно, что тонкая сферическая линза осуществляет над световым полем двумерное преобразование Фурье [3]:

$$U_2(\xi) = F[U_1(x)], \quad (1)$$

где $U_2(\xi)$, $U_1(x)$ — распределение поля в задней и передней фокальной плоскостях линзы соответственно; $\xi = \{\xi, \eta\}$ — текущие координаты в плоскости пространственных частот; $x = \{x, y\}$ — координаты в плоскости объекта.

При согласованной пространственной фильтрации применяются линзы с одинаковыми фокусными расстояниями и при этом оптическое преобразование Фурье, осуществляемое тонкой линзой над световым полем, отличается от своего математического аналога параметрической зависимостью от фокусного расстояния.

В связи с этим выражение (1) следовало бы записать:

$$U_2(\xi) = F_f\{U_1(x)\}, \quad (2)$$

где индекс « f » указывает, что преобразование осуществляется линзой с фокусным расстоянием f .

Нетрудно показать, что двойное преобразование Фурье, выполняемое конфокальной оптической системой линз с различным фокусным расстоянием над полем, изменяет его поперечный масштаб, сохраняя подобие между распределением поля в передней и задней фокальной плоскостях первой и второй линзы соответственно:

$$U_3(x) = F_{f_2}\{F_{f_1}[U_1(x)]\} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 U_1\left(-\frac{f_1}{f_2}x'\right). \quad (3)$$

Изложенное позволяет сделать вывод о возможности применения для фазировки световых пучков управляемых фазовых транспарантов макроскопических размеров с последующим сжатием поперечного масштаба распределения поля конфокальной двухлинзовой системой. Для дискретного транспаранта функция распределения поля разрывна и в общем случае может не быть преобразуемой по Фурье. Таким образом, вопрос о применимости соотношения (3) к дискретным системам требует отдельного рассмотрения.

Пусть фазированный световой пучок расширяется с помощью коллима-

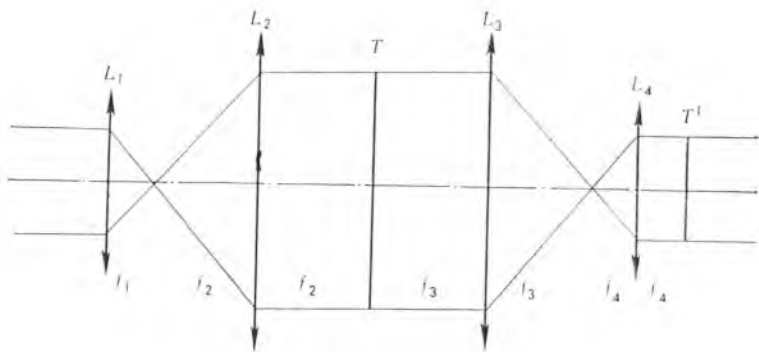


Схема построения фазированной системы

тора L_1L_2 (см. рисунок), модулируется транспарантом T и вновь сжимается системой линз L_3L_4 .

Комплексное пропускание дискретного транспаранта можно представить в виде:

$$T(x, y) = \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} T_{mn} \left[U\left(x - L_x \frac{m}{M+1}\right) - U\left(x - L_x \frac{m+1}{M+1}\right) \right] \times \\ \times \left[U\left(y - L_y \frac{n}{N+1}\right) - U\left(y - L_y \frac{n+1}{N+1}\right) \right],$$

где $U(x)$ — ступенчатая функция (4),

$$U(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0; \end{cases} \quad (4)$$

L_x, L_y — размер транспаранта T в направлении осей x и y соответственно; $M+1, N+1$ — число элементов дискретизации по оси x и y соответственно; T_{mn} — комплексное пропускание ячейки транспаранта с координатами центра $m\Delta x$ и $n\Delta y$ по осям x и y соответственно. Функция $T(x, y)$ имеет конечное число разрывов первого рода и обращается в 0 на краях интервала, т. е. абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, для нее выполняются условия леммы Римана для бесконечного промежутка и оказывается возможным применение преобразования Фурье. Распределение поля в фокальной плоскости с учетом (2) и (3) представим в виде:

$$U_3(x_3) = U_1\left(\frac{f_1 f_3}{f_2 f_4} x_3\right) \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} T_{mn} \left\{ U\left[-\frac{f_3}{f_4} \left(x_3 - L'_x \frac{m}{M+1}\right)\right] - \right. \\ \left. - U\left[-\frac{f_3}{f_4} \left(x_3 - L'_x \frac{m+1}{M+1}\right)\right] \right\} \left\{ U\left[-\frac{f_3}{f_4} \left(y_3 - L'_y \frac{n}{N+1}\right)\right] - \right. \\ \left. - U\left[-\frac{f_3}{f_4} \left(y_3 - L'_y \frac{n+1}{N+1}\right)\right] \right\},$$

где

$$L'_x = -\frac{f_4}{f_3} L_x, \quad L'_y = \frac{f_4}{f_3} L_y.$$

Используя (4), легко показать, что $U[a(x - x')] = U(x - x')$ откуда, при выполнении соотношения между фокусами линз $\frac{f_1 f_3}{f_2 f_4} = 1$, приходим к следующему выражению: $U_3(x_3) = U_1(x_3) T'(x_3)$, где

$$T'(x_3) = \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} T_{mn} \left[U\left(x_3 - L'_x \frac{m}{M+1}\right) - U\left(x_3 - L'_x \frac{m+1}{M+1}\right) \right] \times \\ \times \left[U\left(y_3 - L'_y \frac{n}{N+1}\right) - U\left(y_3 - L'_y \frac{n+1}{N+1}\right) \right].$$

Таким образом, воздействие на световое поле четырехлинзовой конфокальной системы с модулирующим транспарантом T эквивалентно воздействию на него транспаранта T' с линейными размерами, уменьшенными в $n = \frac{f_3}{f_4}$ раз по сравнению с размерами исходного транспаранта, что позволяет использовать транспарант макроскопических размеров для фазировки узких световых пучков. Условия отсутствия побочных максимумов в продифрагировавшем на транспаранте излучении вытекают из ограничения на шаг дискретизации, который не должен превышать половину периода наивысшей пространственной частоты поля [7].

Следовательно, требование к размеру элемента дискретизации транспаранта запишется $\Delta x, \Delta y \leq \frac{f_3}{f_4} \cdot \frac{\lambda}{2}$, а число элементов дискретизации определится из соотношения: $M \geq 2 \frac{L'_x}{\lambda}$; $N \geq 2 \frac{L'_y}{\lambda}$. Так, для фазировки пучка с поперечным сечением $L' \sim 10^{-3}$ м и $\lambda = 1 \cdot 10^{-6}$ м необходимое количество фазирющих элементов составит $2 \cdot 10^3$ ед., что при сечении фазирющего элемента 0,2 мм вполне реально для транспарантов, изготовляемых фотолитографическими методами, $n = 2 \cdot 10^2$, а поперечные размеры транспаранта — 200×200 мм.

Длина фазирющей системы определяется в основном фокусным расстоянием длиннофокусных линз и может достигать существенной величины. Эти затруднения можно частично преодолеть, применяя трехлинзовую систему преобразования масштаба, состоящую из двух преобразующих линз и расположенной между ними соосно корректирующей.

Пусть распределение поля в плоскости входной линзы описывается функцией $U_1(x_1)$. Тогда распределение поля в плоскости выходной линзы системы в параксимальном приближении с точностью до постоянного множителя примет вид:

$$U_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x_1) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \left[\frac{(x_1 - x_2)^2}{l_1} + \frac{(x_2 - \xi)^2}{l_2} - \frac{x_1^2}{f_1} - \frac{x_2^2}{f_2} - \frac{\xi^2}{F} \right] \right\} dx_1 d\xi.$$

Условию отсутствия фазовых искажений отвечает соотношение между фокусами линз и расстояниями между ними:

$$l_1 = f_1, \quad l_2 = f_2, \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad (5)$$

где f_1, f_2 — фокусные расстояния передней и задней преобразующих линз; F — фокусное расстояние корректирующей линзы; l_1, l_2 — расстояние между первой, второй преобразующей и корректирующей линзами.

При этом связь между полями в плоскости $P_1(x_1)$ и $P_2(x_2)$ преобразуется к виду:

$$U_2(x_2) = U_1\left(\frac{-f_1}{f_2} x_2\right).$$

Итак, при выполнении условия (5) трехлинзовая система осуществляет между полями преобразование масштаба с одновременным поворотом на π . Линейный размер трехлинзовой оптической фазирющей системы тогда уменьшается вдвое по сравнению с двухлинзовой. Дальнейшего ограничения можно достичь, используя в качестве выходной отрицатель-

ную линзу. При этом длина системы равна фокусному расстоянию передней преобразующей линзы, и поворот координат не происходит.

Следует отметить, что в трехлинзовой оптической системе апертурные ограничения имеют место лишь в плоскости корректирующей линзы, в то время как в двухлинзовой с расположением транспаранта в фокальной плоскости первой линзы искажение создают обе Фурье-преобразующие линзы в силу ограниченности апертуры. Кроме того, трудновыполнимы взаимопротивоположные требования к короткофокусной преобразующей линзе, которая одновременно должна иметь минимальное фокусное расстояние, для того чтобы при заданном масштабе преобразования размер системы был минимальным, и максимальную апертуру, чтобы вносить как можно меньше искажений в преобразованное изображение за счет ограничения пределов интегрирования в плоскости, где они предполагаются бесконечными. В трехлинзовой системе транспарант находится непосредственно в плоскости передней линзы, поэтому размер передней линзы может не превышать размеров транспаранта и аналогично — размер второй линзы ограничивается размерами преобразованного изображения, т. е. сечением фазированного пучка. Таким образом, требование максимальной размера накладывается только на корректирующую линзу.

Список литературы

1. Голуб М. А. и др. // Компьютерная оптика. М., 1987. Вып. 1. С. 35.
2. Наумов А. Ф. // Голографические методы в науке и технике. Л., 1985. С. 139.
3. Передача и обработка информации голографическими методами // Под ред. С. Б. Гуревича. М., 1978. С. 204.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1974. С. 790.
5. Гурский С. Н., Петросян Ф. Н., Шкодин В. Н. // Радиофизические измерения в диапазонах высоких частот (ВЧ) и сверхвысоких частот (СВЧ). Новосибирск, 1984. С. 66.

Поступила в редакцию 14.02.88.

УДК 621.373.325

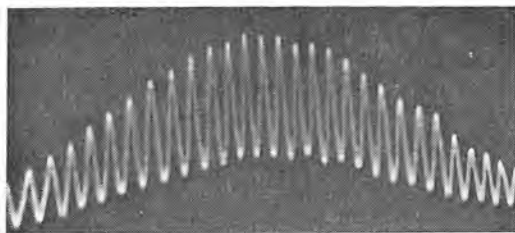
Н. Н. ВАСИЛЬЕВ, Г. И. РАЙ,
Г. В. ШАРОНОВ, А. П. ШКАДАРЕВИЧ

ПАССИВНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ МОД В НЕПРЕРЫВНОМ ЛАЗЕРЕ НА АИГ: Nd^{3+} С ПОМОЩЬЮ КРИСТАЛЛОВ LiF С F_2^- ЦО

Для получения мощных пикосекундных импульсов в АИГ: Nd^{3+} -лазерах с непрерывной накачкой в работах [1, 2] впервые использован метод активной синхронизации мод (СМ) с пассивной модуляцией добротности (МД) нелинейно поглощающим кристаллом LiF с F_2^- центрами окраски (ЦО). В работе [3] впервые наблюдался режим пассивной СМ, однако вследствие большого времени релаксации верхнего возбужденного уровня F_2^- центров в таком затворе он получен при больших длинах резонатора, причем стабильность режима СМ была очень критична к начальному поглощению в затворе. Высказывалось предположение о наличии у исследуемых кристаллов LiF : F_2^- ЦО синхронизирующих свойств [2], но чистый режим пассивной СМ осуществлен не был.

В настоящей работе получен и исследуется режим пассивной СМ с одновременной МД непрерывного АИГ: Nd^{3+} -лазера с помощью термически обработанных кристаллов LiF : F_2^- независимо от длины резонатора. Экспериментальная установка, описанная в [2], собрана на базе промышленного квазинепрерывного лазера ЛТИ-502 с удлиненным до 1,5 м резонатором. Резонатор неустойчивого типа образован плоским выходным зеркалом с коэффициентом пропускания 17 % и выпуклым глу-

хим зеркалом с радиусом кривизны 400 мм. Активный элемент $\varnothing 5 \times 100$ мм размещался на расстоянии 400 мм от глухого зеркала. Следует отметить, что в разработанном варианте резонатора с использованием акустооптического модулятора стоячей волны при подводимой к нему мощности 25 Вт на рабочей частоте 50 МГц получен устойчивый режим СМ со средней выходной мощностью 17 Вт в одномодовом режиме. В качестве ПЛЗ применялись кристаллы фтористого лития LiF:F_2^- , полу-



Временная структура выходного излучения непрерывного АИГ: Nd^{3+} -лазера в режиме пассивной синхронизации мод и модуляции добротности. Период следования импульсов 10 нс

ченные при радиационном окрашивании γ -излучением, с начальным пропусканием $\approx 75-85\%$ на длине волны генерации 1,064 мкм, что приводило к генерации последовательности импульсов с длительностью ≈ 400 нс и периодом следования 200—680 мкс в зависимости от интенсивности излучения внутри резонатора. Величина параметра δ , определяющего эффективность работы затвора [4] и равного отношению показателя погло-

щения ПЛЗ в просветленном состоянии (K_n) к показателю начального поглощения (K_0) на длине волны генерации лазера 1,064 мкм, составляла 0,08. Термообработка ПЛЗ вызывала рост величины K_n и распад F_2^- ЦО, значение δ возрастало при этом до 0,5—0,6. Природа центров, ответственных за неактивное поглощение в кристаллах LiF:F_2^- , однозначно не объяснена [5]. Нами найдено, что при термообработке образцов из LiF с F_2^- ЦО образуется ряд сложных центров с временем релаксации возбужденного состояния 200—500 пс, причем концентрация этих центров хорошо коррелирует с величиной неактивных потерь. Использование ПЛЗ с большой концентрацией быстро релаксирующих центров ($\delta > 0,5$), в отличие от ПЛЗ с F_2^- ЦО ($\delta < 0,1$), позволяет получить режим генерации последовательности ультракоротких импульсов. Длительность цугов импульсов и период следования при этом не изменялся. Устойчивый режим СМ и МД наблюдался лишь при незначительном превышении усиления над порогом генерации лазера. При токе накачки 30 А и применении кристалла LiF:F_2^- с начальным пропусканием 82 % получена средняя мощность выходного излучения 0,4 Вт. Дальнейшее увеличение уровня накачки вело к росту неустойчивости режима СМ. Для сравнения исследована также генерация лазера с активной МД, осуществляемой модулятором МЗ-301, и СМ термообработанных ПЛЗ из LiF:F_2^- . Режим МД с СМ наблюдался как при работе с одним фильтром в резонаторе, так и в режиме активной МД на МЗ-301 с пассивной СМ на LiF:F_2^- . Эффективность синхронизации продольных мод принято характеризовать глубиной модуляции импульса генерации. Полученная в нашем случае генерация, имеющая характер излучения промодулированного высокочастотной составляющей с глубиной модуляции $< 100\%$, свидетельствует о частичном режиме СМ (см. рисунок). Минимальная зарегистрированная длительность одиночного импульса в цуге составила ~ 3 нс. Длительность пиков импульсов, полученная рассматриваемым способом, значительно короче времени релаксации F_2^- ЦО, но сравнима с величиной 0,5 нс, что подтверждает факт образования в кристалле быстро релаксирующих центров. Концентрация этих центров играет важную роль в обеспечении устойчивого режима СМ в непрерывных АИГ: Nd^{3+} -лазерах. Использование термообработанных кристаллов LiF:F_2^- с быстро релаксирующими центрами в качестве дополнительных устройств для МД и СМ в АИГ: Nd^{3+} -лазерах с непрерывной накачкой

позволяет расширить возможности управления временными и энергетическими характеристиками таких лазеров.

В заключение авторы благодарят В. Гадониса за измерение времен релаксации центров окраски.

Список литературы

1. Баснев Т. Т., Конюшкин В. А., Лысой Б. Т., Миров С. Б., Осико В. В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51. № 8. С. 1440.
2. Бакиновский К. Н., Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 25.
3. Корниенко Л. С., Кравцов Н. В., Сидоров В. А., Сусов А. М., Яценко Ю. П. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. С. 2369.
4. Бураков В. С., Кононов В. А., Корочкин П. С., Михнов С. А., Хулугуров В. М., Хюппенен В. Н., Чепурной В. А., Шкадаревич А. П. // ЖПС. 1982. Т. 36. С. 494.
5. Иванов Н. А., Иншаков Д. В., Парфеанович И. А., Хулугуров В. М. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. С. 831.

Поступила в редакцию 14.03.88.

УДК 621.373.826.038.823

Д. А. ВОЙТОВИЧ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОТЕРИ РЕЗОНАТОРА ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА ПРИ БЫСТРОМ ИЗМЕНЕНИИ ЕГО ОПТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ

Управление параметрами лазерного излучения — одна из основных задач квантовой электроники. Методы управления параметрами лазерного излучения, основанные на быстром изменении фазового условия стационарного режима генерации, предложены и теоретически обоснованы в работе [1]. Результаты экспериментов, описанных в [2], дали основание утверждать, что сканирование оптической длины резонатора уменьшает его добротность. Это было использовано в опытах с лазером на рубине для достижения режима генерации, аналогичного режиму с модулированной добротностью [2].

Однако необходимо отметить, что в известной нам литературе сведений о дополнительных потерях, возникающих при сканировании оптической длины лазерного резонатора, нет. Настоящая работа поставлена с целью измерения дополнительных потерь резонатора гелий-неонового лазера, возникающих при быстрой внутрирезонаторной фазовой модуляции излучения, а также для выяснения возможности применения такой модуляции в управлении энергетическими характеристиками лазера.

Экспериментальная установка для изучения влияния быстрого изменения фазового условия генерации ($2\pi nL/\lambda_m = m\pi$, где n — усредненное значение показателя преломления внутри резонатора; L — длина резонатора; $m \sim 10^6$ — целое положительное число; λ_m — длина волны генерации) на мощность лазерного излучения состояла из гелий-неонового лазера ЛГ-126 с выносным выходным зеркалом, генерирующего излучение с длиной волны $\lambda = 1,15$ мкм. Для измерения положительных потерь в резонатор лазера помещались две плоскопараллельные кварцевые пластины с изменяющимся углом наклона к оптической оси резонатора. Фазовая модуляция излучения осуществлялась фазовым элементом, в качестве которого использовался электрооптический кристалл ДКДР ($x=y=6$ мм, $z=40$ мм), также помещенный внутрь резонатора лазера. Оптическая ось ОZ кристалла совпадала с оптической осью резонатора. Торцы кристалла просветлены для $\lambda = 1,15$ мкм. Для изменения оптической длины резонатора использовался продольный электрооптический эффект. Кристалл мог устанавливаться в двух положениях. В одном из них ось

ОХ параллельна ориентации электрического вектора генерируемой волны в отсутствие напряжения на кристалле. В этом случае при подаче на кристалл напряжения изменялись и фаза, и поляризация генерируемого излучения. В другом положении кристалл располагался так, что параллельно ориентации электрического вектора излучения была направлена наведенная ось ОХ' [3]. При этом модулировалась только фаза излучения.

Питание фазового элемента осуществлялось генератором треугольных импульсов со следующими выходными характеристиками: амплитуда напряжения импульсов 0—1 кВ, рабочая частота $f = 2,00 \pm 0,18$ МГц (отстройка частоты от $f = 2,00$ МГц изменялась дискретно через 0,02 МГц). Регистрирующей системой служили ФЭУ-28 и микровольтметр.

Изучение зависимости интенсивности I генерируемого излучения от частоты модулирующего напряжения (рис. 1) продемонстрировало, что при некоторых частотах модуляции интенсивность резко падает. Сравнение подобных зависимостей для кристаллов различных размеров дало основание предположить, что на частотах резкого изменения интенсивности излучения большую роль играет акустический резонанс в кристалле. Наблюдаемые на опыте резонансы являются следствием проявления его высших гармоник.

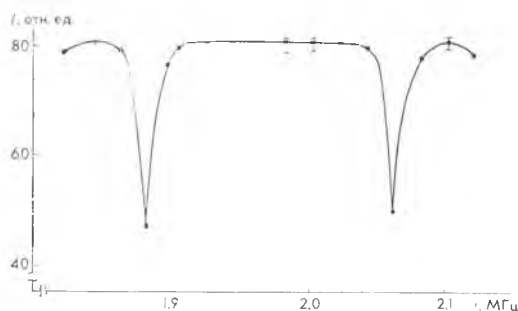


Рис. 1. Зависимость интенсивности генерируемого излучения от частоты модулирующего сигнала

Описанная методика позволила изучить поведение такой важной характеристики лазера, как интенсивность генерируемого излучения при различных модулирующих напряжениях, а следовательно, и при различных дополнительных потерях в лазерный резонатор. Интенсивность генерации падает с ростом напряжения на электрооптическом кристалле, причем при используемых напряжениях не наблюдается насыщения этих зависимостей (рис. 2).

Дополнительные потери резонатора лазера, возникающие при быстром изменении его оптической длины, находились методом введения калиброванных потерь. Для этого проведен расчет потерь, вносимых в резонатор двумя плоскопараллельными кварцевыми пластинами при различных углах их наклона к оптической оси резонатора (две пластины брались для того, чтобы луч при изменении их наклона не менял своего пространственного положения). При вычислении полагалось, что поглощение в пластине пренебрежимо мало и потери происходят главным образом за счет отражения от ее граней. Прошедшее сквозь одну пластину излучение в этом случае будет иметь интенсивность $I = I_0 e^{-k_1}$, где k_1 — потери за счет отражения в одной пластине. Долю прошедшего через пластину излучения можно выразить как $I/I_0 = 1 - R$, где R — энергетический коэффициент отражения с учетом многократного прохождения излучения в пластине. Очевидно, что $1 - R = e^{-k_1}$ и, следовательно, $k_1 = -\ln(1 - R)$. Так как в нашем случае в резонатор лазера помещались две пластины, общие потери в них: $k = -2\ln(1 - R)$.

Коэффициент R для угла φ падения излучения на пластину определялся через амплитудный френелевский коэффициент r_φ [4] следующим образом: $R = 2r_\varphi^2 / (1 + r_\varphi^2)$, где [5] $r_\varphi = \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\psi}{\sin 2\varphi + \sin 2\psi}$, а ψ — угол преломления.

Представляет интерес экспериментальное изучение зависимости дополнительных потерь, возникающих при изменении оптической длины резонатора, от скорости такого изменения, поскольку подобная зависимость исследована в [1] теоретически. В связи с этим возникла необходимость

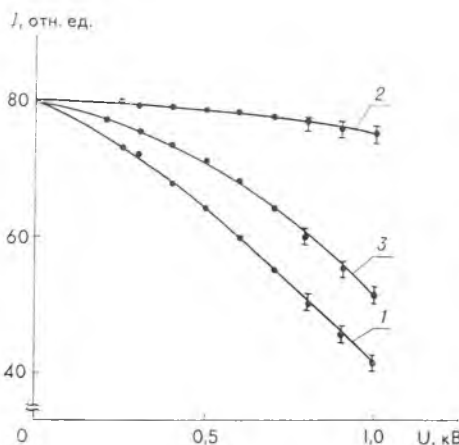


Рис. 2. Зависимость интенсивности генерируемого излучения от напряжения U модулирующего сигнала с частотой 1,88 (1), 2,00 (2) и 2,06 (3) МГц

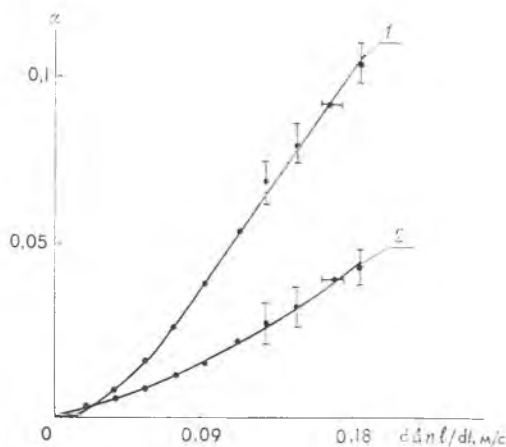


Рис. 3. Зависимость величины дополнительных потерь резонатора от скорости изменения его оптической длины:

1 — случай одновременной модуляции фазы и поляризации, 2 — чисто фазовой модуляции

определения скорости изменения оптической длины $d\Delta nl/dt$ кристалла, соответствующей любой заданной амплитуде импульсов U_0 , подаваемых на него.

Как известно, изменение оптической длины кристалла типа КДР для случая продольного электрооптического эффекта и линейно поляризованного вдоль наведенной оси OX' излучения определяется следующим образом:

$$\Delta nl = \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} U, \quad (1)$$

где Δnl — изменение оптической длины кристалла; n_0 — показатель преломления для обыкновенного луча; r_{63} — электрооптический коэффициент кристалла; U — напряжение, подаваемое на кристалл. Если падающее на кристалл излучение линейно поляризовано вдоль оси OX , эллипс поляризации излучения на выходе описывается формулой [3]

$$\frac{E_{X'}^2}{E^2 \cos^2 \frac{\Gamma}{2}} + \frac{E_{Y'}^2}{E^2 \sin^2 \frac{\Gamma}{2}} = 1, \quad (2)$$

где E — амплитуда падающей волны; $E_{X'}$ и $E_{Y'}$ — составляющие вектора напряженности электрического поля волны вдоль осей OX' и OY' ; Γ — разность фаз этих составляющих на выходе кристалла:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 r_{63} U. \quad (3)$$

Учитывая (1) — (3), а также то, что в случае треугольной формы импульсов напряжения, подаваемых на кристалл, усредненный по времени электрооптический эффект в два раза меньше эффекта, наблюдаемого при амплитудном значении напряжения, легко получить следующее выражение для скорости изменения оптической длины кристалла:

$$d\Delta nl/dt = \frac{2f\lambda}{\pi} \arctg(\overline{E_{\min}}/\overline{E_{\max}}), \quad (4)$$

где f — частота модуляции; λ — длина волны излучения; $\overline{E_{\min}}/\overline{E_{\max}}$ — отношение усредненных по времени полуосей эллипса модуляции излучения на выходе кристалла. Таким образом, измерив экспериментально отношение $\overline{E_{\min}}/\overline{E_{\max}}$ для любого значения U_0 амплитуды импульсов, питающих

кристалл, можно было в соответствии с (4) определить скорость изменения оптической длины кристалла, а следовательно, и резонатора лазера.

Измерения величины $\overline{E_{\min}}/\overline{E_{\max}}$ проводились следующим образом. Излучение лазера пропусклось через поляризатор и регистрировалось ФЭУ. Вращением поляризатора вокруг оси луча устанавливались минимальное и максимальное значения сигнала на выходе ФЭУ, отношение которых давало квадрат искомой величины.

На рис. 3 изображены экспериментальные зависимости величины дополнительных потерь резонатора от скорости изменения его оптической длины. Как упоминалось, экспериментальная установка позволяла производить как модуляцию фазы и поляризации одновременно, так и чисто фазовую модуляцию излучения внутри резонатора. Сопоставление кривых рис. 3 позволяет сделать вывод, что, хотя дополнительные потери, вносимые в лазерный резонатор при одновременной модуляции фазы и поляризации, больше, чем дополнительные потери при чисто фазовой модуляции излучения, те и другие, тем не менее, являются величинами одного порядка. Это подтверждает вывод, что для управления параметрами генерации лазера можно успешно использовать не только модуляцию поляризации [3], но и модуляцию фазы [1].

Таким образом, полученные результаты позволили оценить дополнительные потери для резонатора газового лазера, возникающие при скоростях изменения его оптической длины: $d\Delta n/dt \sim 0,1-0,2$ м/с, что качественно согласуется с результатами расчета, полученными на основании формул работы [1] при использовании исходных данных, близких к реализуемым в условиях опытов. В принципе возможно достижение много больших скоростей $d\Delta n/dt$, при этом, исходя из полученных экспериментальных данных, следует ожидать увеличения эффективности использования фазовых методов для управления параметрами генерируемого излучения.

Список литературы

1. Войтович А. П. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 9. С. 798.
2. Войтович А. П., Овсячук С. И., Рунец Л. П. 1984. Т. 28. № 10. С. 883.
3. Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М., 1970.
4. Войтович А. П., Кацев И. Л. // ЖПС. 1965. Т. 3. Вып. 1. С. 38.
5. Ландсберг Г. С. Оптика. М., 1976.

Поступила в редакцию 17.11.87.

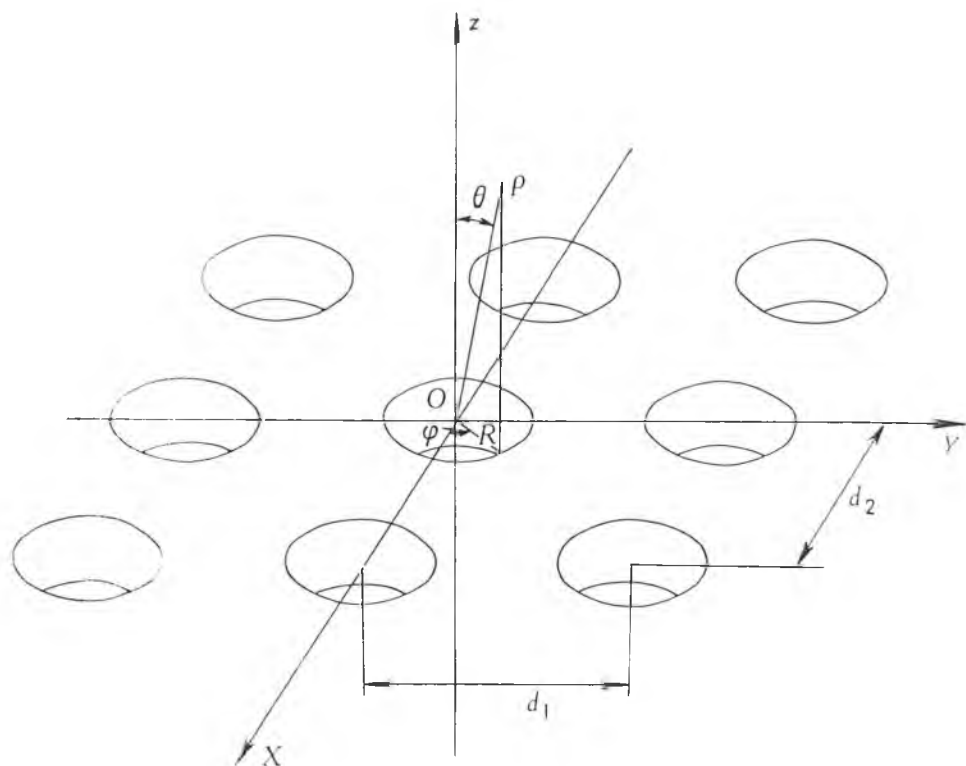
УДК 621.396.677

В. А. СЕМЕНЕНЯ

ЗАДАЧА ИЗЛУЧЕНИЯ ФАР КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию фазированных антенных решеток (ФАР), использующих в качестве излучателей открытый конец круглого волновода [1, 2]. Такие ФАР расширяют возможность реализации требуемых характеристик и отличаются простотой в изготовлении.

Постановка задачи. Рассматриваемая модель ФАР представляет собой плоскую бесконечную двумерную периодическую структуру из идентичных излучателей, расположенных в узлах прямоугольной сетки с периодами d_1 по оси X и d_2 по оси Y (см. рисунок). В качестве излучателя ФАР используется раскрыт круглого волновода с радиусом R , который выбирается так, чтобы в волноводе распространялась волна только основного типа. Возбуждение антенной решетки осуществляется системой падающих волн в волноводах, соответствующих режиму ФАР, когда ам-



Геометрия задачи

плитуды волн равны, а фазы изменяются линейно от излучателя к излучателю. Учитывая характер возбуждения и периодичность бесконечной структуры, в соответствии с теоремой Флоке, решение граничной задачи с периодическими граничными условиями можно записать для единичной ячейки антенной решетки, и для расчета электродинамических характеристик ФАР достаточно установить распределение излучающих токов в пределах ячейки. За известные величины будем считать падающие поля в волноводах-излучателях, геометрические размеры излучателя и их расположение.

Найдем электрические составляющие электромагнитного поля в раскрывах волноводов (магнитные токи). Излучающие отверстия волноводов, в соответствии с теоремой эквивалентности, представим круглыми листками магнитного тока на металлической плоскости, размеры которых совпадают с размерами круглого раскрыва волновода. Поверхностная плотность магнитного тока определяется электрической составляющей электромагнитного поля в раскрыве волновода по формуле:

$$\vec{J}_m = [\vec{E} \times \vec{n}], \quad (1)$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль.

Для определения неизвестных токов применяем метод интегрального уравнения, причем периодичность структуры возбуждения и граничных условий позволяет получить периодическое решение для единичной ячейки ФАР. Для составления интегрального уравнения относительно неизвестных токов используем условие непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля в раскрыве волновода, при этом учитываем влияние проводящего экрана, над которым расположены излучающие магнитные токи.

Интегральное уравнение относительно неизвестных токов запишем в следующем виде:

$$H_r^{\text{внеш}}(2J_r^m) - H_r^{\text{внеш}}(2J_\varphi^m) = H_r^{\text{внут}}(-2J_r^m) - H_r^{\text{внут}}(-2J_\varphi^m) = H_{\text{внут. пад}}, \quad (2)$$

где $H_r^{\text{внеш}}(2J_r^m)$, $H_r^{\text{внеш}}(2J_\varphi^m)$ — r -составляющие магнитного поля, образованные всеми магнитными токами над проводящим экраном; $H_r^{\text{внут}}(-2J_r^m)$, $H_r^{\text{внут}}(-2J_\varphi^m)$ — r -составляющие магнитного поля, образованные всеми магнитными токами, излучающими внутрь волновода;

$H_{\text{внут. пад}}$ — r -составляющая известного возбуждающего поля в волноводе.

Для записи в явном виде составляющих электромагнитного поля, входящих в уравнение (2), используем соотношения, связывающие векторы поля и электродинамические векторные потенциалы [4]. Векторный потенциал представляет интеграл действия токов на данную точку:

$$\vec{A}^m(p) = \int_{S_B} \vec{J}^m(q) G(p, q) dS_B, \quad (3)$$

где $\vec{J}^m(q)$ — поверхностная плотность магнитного тока; S_B — излучающая поверхность раскрыва волновода.

Функция Грина $G(p, q)$ записывается в виде суммы по пространственным гармоникам Флоке [3]:

$$G(p, q) = \frac{1}{2i d_1 d_2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{1}{\gamma_{\nu\mu}} J_n(\kappa r_q) H_n^{(2)}(\kappa r_p) \exp[-in(\varphi_p - \varphi_q) - \gamma_{\nu\mu}|z_p - z_q|],$$

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_1}{d_1}, \quad \alpha_\nu = \zeta - 2\pi\nu, \quad \zeta = k_0 d_1 \sin \theta \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\kappa_2 = \frac{\beta_\mu}{d_2}, \quad \beta_\mu = \eta - 2\pi\mu, \quad \eta = k_0 d_2 \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\gamma_{\nu\mu} = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2}, \quad \kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Выражения, входящие в правую часть уравнения (2), определим при решении внутренней задачи, которое проведем в два этапа: первый — излучение круглого листка магнитного тока из закороченного (в пл. $z=0$) волновода; второй — возбуждение закороченного (в пл. $z=0$) волновода известным падающим полем (волной магнитного типа H_{11}). Поле будем искать в виде наложения электрических и магнитных волн, являющихся решением неоднородных волновых уравнений, где продольные составляющие напряженности электрического и магнитного поля записываются в ряд Фурье по собственным типам волн поперечного сечения круглого волновода [4]. После проведения преобразований, учитывая связь продольных и поперечных составляющих электромагнитного поля, получаем выражения:

$$H_r^{\text{внут}}(r_p, \varphi_p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\chi_m r_p) e^{-in\varphi_p} \tilde{h}_{rnm}^{\text{внут}} T_{nm} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} J'_n(\chi_l r_p) e^{-in\varphi_p} \tilde{h}_{rnl}^{\text{внут}} T_{nl}, \quad (5)$$

где при записи (5) использованы следующие обозначения:

$$\tilde{h}_{rnm}^{\text{внут}} = \frac{\omega \varepsilon_a n}{2\pi R J_n'^2(\chi_m R) \chi_m \gamma_{nm} r_p}, \quad (6)$$

$$\tilde{H}_{nl}^{\text{внут}} = \frac{i}{\omega \mu_a' 2\pi R^2 \left(1 - \frac{n^2}{\chi_l^2 R^2}\right) J_n^2(\chi_l R) \chi_l}, \quad (7)$$

$$T_{nm} = \int_{\varphi_q=0}^{2\pi} \int_{r_q=0}^R \left[(-J_q^M) \chi_m J_n'(\chi_m r_q) - \frac{in}{r_q} J_n(\chi_m r_q) (-J_r^M) \right] \times \\ \times e^{in\varphi_q} r_q dr_q d\varphi_q, \quad (8)$$

$$T_{nl} = \int_{\varphi_q=0}^{2\pi} \int_{r_q=0}^R \left[(-J_q^M) \frac{in}{r_q} J_n(\chi_l r_q) + \chi_l J_n'(\chi_l r_q) (-J_r^M) \right] e^{in\varphi_q} r_q dr_q d\varphi_q. \quad (9)$$

Запишем r — компоненту магнитной составляющей поля в плоскости $z=0$, входящую в интегральное уравнение (2):

$$H_r^{\text{внут,пад}}(r_p, \varphi_p)|_{z=0} = -\frac{E_0}{W_{11}^0} J_1'(\chi_{11} r_p) \sin \varphi_p, \quad (10)$$

где E_0 — известная амплитуда электрической составляющей возбуждающего поля типа H_{11} в волноводе; W_{11}^0 — волновое сопротивление, определяемое по формуле:

$$W_{11}^0 = \frac{120\pi}{V 1 - \left(\frac{\chi_{11}}{k_0}\right)^2}, \quad Y_{11} = V k_0^2 - \chi_{11}^2. \quad (11)-(12)$$

Для решения интегрального уравнения (2) используем метод Галеркина. Базисные функции в этом методе определяют вид выражений, описывающих взаимодействие магнитных и электрических токов. Поскольку выражение (3) содержит двойное интегрирование по поверхности излучателя от произведения тока и функции Грина, то выбор базисных функций определяет как возможность аналитического вычисления, так и точность полученных результатов. Представим искомые токи, входящие в интегральное уравнение (2), в виде разложения в ряд по системе базисных функций:

$$J_r^M(q) = \sum_{s'=1}^S I_{rs'} f_{rs'}(r_q, \varphi_q) \delta(z_q - 0), \\ J_\varphi^M(q) = \sum_{t'=1}^T I_{\varphi t'} f_{\varphi t'}(r_q, \varphi_q) \delta(z_q - 0), \quad (13)$$

где $I_{rs'}$, $I_{\varphi t'}$ — неизвестные амплитуды; $f_{rs'}$, $f_{\varphi t'}$ — базисные функции; S, T — число базисных функций.

В качестве базисных функций, аппроксимирующих магнитный ток, используем собственные функции круглого волновода:

$$f_{r1}(r_q, \varphi_q) = J_1'(\chi_{11} r_q) r_q \cos \varphi_q, \\ f_{r2}(r_q, \varphi_q) = J_2'(\chi_{21} r_q) r_q \cos \varphi_q, \quad (14)$$

$$f_{r3}(r_q, \varphi_q) = J_3'(\chi_{31} r_q) r_q \cos \varphi_q, \\ f_{\varphi 1}(r_q, \varphi_q) = J_1(\chi_{11} r_q) r_q \sin \varphi_q, \\ f_{\varphi 2}(r_q, \varphi_q) = J_2(\chi_{21} r_q) r_q \sin \varphi_q, \\ f_{\varphi 3}(r_q, \varphi_q) = J_3(\chi_{31} r_q) r_q \sin \varphi_q, \quad (15)$$

где $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_1'(x)$, $J_2'(x)$, $J_3'(x)$ — функции Бесселя первого, второго и третьего порядка и их производные.

Отметим, что так как все базисные функции непрерывны в области существования решения, то решение задачи определения тока ищется

в классе непрерывных функций. Вид базисных функций определяется и граничными условиями, которым должны удовлетворять некие токи.

Для построения алгоритма численного решения приравниваем проекции левой и правой частей каждого уравнения системы на пространство базисных функций и получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд токовых гармоник, решение которой осуществляется на ЭВМ:

$$\sum_{s'=1}^3 I_{rs'} Y_{ss'}(\xi, \eta) + \sum_{t'=1}^3 I_{qt'} Y_{st'}(\xi, \eta) = - \sum_{s'=1}^3 I_{rs'} Y_{st's'} + \sum_{t'=1}^3 I_{qt'} \bar{Y}_{t't'} + U^{\text{возб}} \delta_{1s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (16)$$

δ_{1s} — символ Кронекера, $\delta_{1s} = \begin{cases} 1, & \text{при } s = 1 \\ 0, & \text{при } s \neq 1 \end{cases}$, где коэффициенты, стоящие

при неизвестных амплитудах, представляют проводимости взаимной связи между гармониками токов, которые записываются в виде двойных интегралов по области, занимаемой источниками, например, проводимость между гармониками магнитных токов запишется в виде:

$$Y_{ss'}(\xi, \eta) = \frac{(d_1 d_2 R)^{-1}}{i \omega \mu_a} \left[\int_{\varphi_p=0}^{2\pi} \int_{r_p=0}^R \left(k_0^2 + \frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1}{r_p} \cdot \frac{\partial}{\partial r_p} r_p \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r_p} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_p} \right) f_{rs}(p) \int_{\varphi_q=0}^{2\pi} \int_{r_q=0}^R f_{rs'}(q) G(p, g) r_q dz_q d\varphi_q r_p dr_p d\varphi_p \right]. \quad (17)$$

Таким образом, решение задачи излучения ФАР круглых волноводов сведено к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд токовых гармоник (16) и получен явный вид всех выражений, входящих в эту систему.

Автор признателен С. А. Войнову за помощь в постановке задачи.

Список литературы

1. Старк Л. // Теория фазированных антенных решеток СВЧ-диапазона: Обзор. ТИИЭР. 1974. Т. 62. № 12. С. 55.
2. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток / Пер. с англ.; Ред. А. Ф. Чаплин. М., 1974.
3. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. М., 1987.
4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М., 1983.

Поступила в редакцию 12.09.88.

УДК 535.375.55

ЛЕ ТХАНЬ ХОАХ, А. И. СЕРАФИМОВИЧ,
Т. Н. ТИМОЩЕНКО, Е. Ф. ТИТКОВ

ОБ ОТНЕСЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В ОБЛАСТИ 200 см⁻¹ В КОМПЛЕКСНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ УРАНИЛА

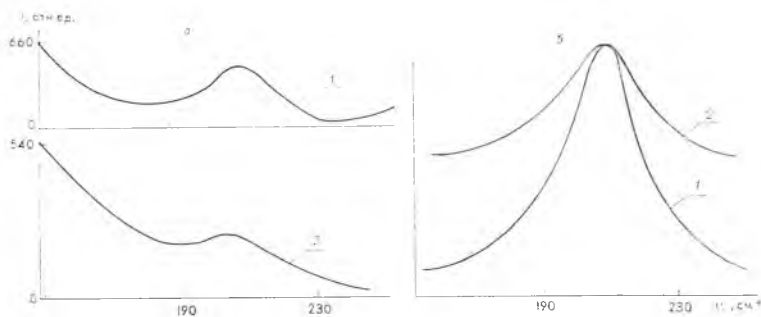
Отождествление фундаментальных частот в колебательных спектрах комплексных соединений уранила имеет большое значение как при спектроскопическом изучении молекулярной динамики этих соединений, так и при исследовании возможностей управления химическими процессами. Особую трудность отнесения полос поглощения и комбинационного рассеяния комплексных соединений уранила (нет достаточно точных крите-

риев) представляют колебания молекул, проявляющиеся в области 190—300 см^{-1} . Встречающиеся в литературе данные весьма противоречивы. Так, в [1, 2] исследовались спектры ИК поглощения и люминесценции рубидия уранилнитрата с бидентантной координацией нитратных групп. В низкочастотной области наблюдались три полосы 212, 223 и 262 см^{-1} , первая была приписана деформационному колебанию иона UO_2^{2+} , остальные — колебанию уранил-лиганд. В результате сравнительного анализа ИК и КР спектров в области низких частот нитратных и некоторых других комплексов уранила авторы [3], основываясь на данных по интенсивности спектров, сделали вывод, что линии в интервале частот 248—274 см^{-1} относятся к деформационному колебанию ν_2 группы UO_2 , а в области 190—235 см^{-1} , вероятнее всего, принадлежат к валентным колебаниям уранил-лиганд. Приведено аналогичное отнесение низких частот колебаний комплекса рубидийтринитратуранила [4]. По спектрам КР водных растворов нитрата уранила авторы [5] относят полосу $\sim 200 \text{ см}^{-1}$ к деформационному колебанию $\nu_2(\text{UO})_2^{2+}$ в связи с тем, что по их данным эта полоса деполаризована.

С целью выяснения природы колебаний в низкочастотной области нами исследованы спектры КР гексагидрата уранилнитрата в расплаве, водном и органических растворах, в которых проявляется полоса умеренной интенсивности в интервале частот 200—212 см^{-1} . Так как при деформационных дважды вырожденных колебаниях уранила возникает переменный дипольный момент, эти колебания активны в ИК и могут проявляться в КР лишь при нелинейности группы UO_2 . Но тогда в КР должно проявиться и антисимметричное валентное колебание $\nu_3(\text{UO}_2)$. В случае линейности группы UO_2 наблюдаемое в КР в низкочастотной области $\sim 200 \text{ см}^{-1}$ колебание может быть отнесено к лигандному, которое в силу своего валентного происхождения поляризовано. Нашей задачей являлось определение линейности группы уранила, для чего отыскивался надежный след антисимметричного валентного колебания $\nu_3=940 \text{ см}^{-1}$, а также измерение степени поляризации полосы $\rho_{\perp}$ в области 200 см^{-1} .

Возбуждение спектров КР производилось в перпендикулярной геометрии рассеяния с помощью линейно поляризованной линии 514,5 нм (300 мВт) аргонового лазера ILA 120-1. Спектры КР регистрировались на спектрометре RAMANOR-U1000 с последующей их обработкой на персональном компьютере LOGABAX. Для данного прибора подавление рассеянного света в 20 см^{-1} от релеевской линии составляет величину 10^{-14} , что улучшает возможность точного измерения контуров колебания группы уранила в области 200 см^{-1} . Рассеянное излучение пропусклось через ахроматическую пластинку $\lambda/4$, так как коэффициент поляризующего действия прибора $k=I_{\parallel}/I_{\perp}$ из-за наличия голографических решеток составляет величину 6,4 в области 200 см^{-1} и линейно возрастает с ростом частоты. Контрольное измерение степени поляризации полосы КР CCl_4 в области 459 см^{-1} дало значение $0,0044 \pm 0,0005$, что хорошо согласуется с данными литературы. Для уменьшения случайных (шумовых) флуктуаций интенсивности полос время накопления каждой точки спектра устанавливалось 3—5 с. Каждый контур записывался несколько раз, и затем с помощью компьютера проводилось суммирование полученных данных с последующим усреднением.

На рис. (а) приведены усредненные контуры $I_{\parallel}$ и $I_{\perp}$ колебания группы уранила в области 200 см^{-1} в растворе $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ в ТБФ. Чтобы избавиться от искажающего действия фона, спектр растворителя записывался в том же диапазоне частот, а затем вычитался из исходного. В результате такой обработки, облегчающей нахождение точного значения степени деполаризации полос, получены нормированные на $I_{\max}$ контуры (см. рисунок, б). В таблице приведены степени поляризации полос колебания группы уранила в области 200 см^{-1} в исследованных нами растворах, а также значения частот колебаний. Видно, что только в расплаве обнаруживается след антисимметричного валентного колебания группы



Усредненные контуры колебания группы уранила в области 200 см^{-1} в растворе $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ в ТБФ (а). Нормированные на I_{10} ах контуры колебания группы уранила без искажающего влияния фона растворителя (б):
 $1 - I_{11}$; $2 - I_{12}$

Степень поляризации полос колебания группы уранила в области 200 см^{-1} в исследованных растворах и значения частот валентных колебаний группы уранила

Соединение	$\nu_{\text{U-L}}, \text{ см}^{-1}$	$p_{\perp}(\nu_{\text{U-L}})$	$\nu_1(\text{UO}_2), \text{ см}^{-1}$	$\nu_3(\text{UO}_2), \text{ см}^{-1}$
Расплав	203	0,8	873	940
Водный раствор	200	0,85	873	—
МЭК	212	0,7	867	—
Ацетонитрил	212	0,65	867	—
ТБФ	210	0,2	858	—
ДМСО	200	0,45	835	—

уранила ν_3 , интенсивность которого на два порядка меньше интенсивности колебания $\nu_1(\text{UO}_2)$. С полной определенностью поэтому можно говорить о том, что группа UO_2 в исследованных растворах является линейной, а деформационное колебание $\nu_2(\text{UO}_2)$ в спектре КР проявляться не должно. Следовательно, поляризованная полоса в области 200 см^{-1} (см. таблицу) принадлежит валентному колебанию уранил-лиганд.

Список литературы

1. Topping G. // Spectrochimica Acta. 1965. V. 21. № 9. P. 1743.
2. Dieke G., Duncan A. B. F. Spectroscopic Properties of Uranyl Compounds. New York, 1949.
3. Bullock J. L., Parrett F. W. // Can. Journ. Chem. 1970. V. 48. № 19. P. 3095.
4. Будаев Л. И., Ковриков А. Б., Комяк А. И. // ЖПС. 1973. Т. 18. Вып. 2. С. 293.
5. Brooker M. H., Huang C. H., Sylweshowicz J. // Journ. Inorg. Nucl. Chem. 1980. V. 42. № 10. P. 1431.

Поступила в редакцию 23.05.88.

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ КРЕМНИЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ВЫСОКИМИ ДОЗАМИ ИОНОВ C^+ И N_2^+

Развитие микроэлектроники влечет за собой изменения в требованиях к ионно-лучевой технологии. Под этим собирательным термином подразумевается использование ионных пучков для получения, обработки и направленного изменения свойств материалов, изготовления различных изделий и улучшения их параметров. В последние годы одной из актуальных задач стала разработка новых способов имплантации полупроводниковых материалов. В этом плане перспективным методом представляется высокоинтенсивная ионная имплантация (ВИИ) — одношаговый режим, позволяющий заменить две технологические операции: внедрение атомов примеси и термический отжиг радиационных дефектов. С помощью техники ВИИ можно получать скрытые изолирующие слои кремний-на-изоляторе (КНИ) на нужной глубине, оставляя ненарушенной структуру кристалла вблизи поверхности [1—3]. При этом поверхностный кристаллический слой кремния может служить основой для конструирования многослойных приборных структур.

В настоящей работе проведен структурный анализ поверхности монокристаллов кремния (001)-ориентации после высокоинтенсивного облучения ионами углерода и азота. Кремниевые пластины марки КДБ-4,5 имплантировались пучком ионов C^+ с энергией 36 кэВ при плотности ионного тока ~ 300 мкА/см². Подводимая ионным пучком мощность обеспечивала разогрев образцов во время облучения до температуры $\sim 850^\circ\text{C}$. Внедрение стехиометрических доз ионов N_2^+ осуществлялось с энергией 140 кэВ в кремний (001)-ориентации. В этом случае плотность тока ионного пучка составляла 100 мкА/см². Подводимая ионным пучком мощность разогревала мишень в процессе имплантации до $\sim 800^\circ\text{C}$. В отличие от облучения углеродом имплантация ионов азота в кремний проводилась на установке, обеспечивающей высокий вакуум путем безмасляной откачки. Для процесса ВИИ пластины кремния 1×1 см² устанавливались на две тонкие иглы и поддерживались в вертикальном положении с углом наклона $\sim 7^\circ$. Площадь контакта с держателем составляла менее 0,01 % площади поверхности образца. Структурный анализ имплантированных кремниевых пластин проводился методами просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) и электронографии «на отражение» при последовательном травлении слоев способом анодного окисления. Установлено (рис. 1), что при облучении ионами C^+ дозой 5×10^{17} ат/см² на электронограмме наряду с матричными рефлексами Si присутствуют рефлексy карбида кремния кубической модификации (β -SiC). Электронографические исследования обратной стороны облученных кремниевых пластин выявили существование включений β -SiC на их поверхности. Из ПЭМ-исследований следует, что скрытые имплантационные слои карбида кремния, синтезируемые в глубине образца, имеют также кубическую структуру. После снятия анодным окислением тонкого 5—10 нм поверхностного слоя дифракционные пятна от включений β -SiC на электронограммах исчезали. Таким образом, в данном случае образование включений карбида кремния может быть связано с влиянием остаточных газов в камере имплантатора. Это, однако, не исключает возможности роста части включений β -SiC на облучаемой поверхности за счет диффузии внедренных атомов углерода к поверхности. При имплантации малых доз N_2^+ на дифракционных картинах от приповерхностных слоев наблюдались матричные рефлексy Si и Кикучи-линии. Наличие последних свидетельствует о высокой степени совершенства поверхности монокристаллов кремния. При времени облу-

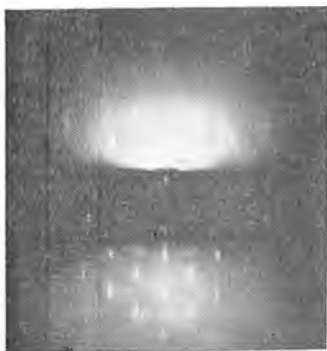


Рис. 1. Дифракция на отражение от монокристаллов кремния (001)-ориентации, облученных ионами углерода с энергией 36 кэВ при плотности тока ионного пучка ~ 300 мкА/см²

ционных картинах (см. рис. 2, б) рефлексы нитрида кремния отсутствовали. Для $D \approx 2 \times 10^{18}$ ат/см² ($t=30$ мин) дифракционная картина (см. рис. 2, в) качественно отличается от предыдущей. На электронограммах, помимо матричных рефлексов монокристаллического кремния, наблюдаются кольца от поликристаллических Si и от поликристаллического β -Si₃N₄. Электроно-микроскопические исследования «на просвет» для данного времени имплантации показали, что в глубине образца сформирован раздробленный кристаллический слой β -Si₃N₄. Таким образом, образование на поверхности включений нитрида кремния β -модификации обусловлено увеличением размеров и приближением к поверхности синтезируемого в глубине образца слоя.

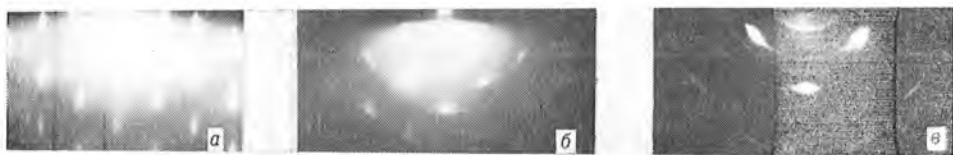


Рис. 2. Дифракция на отражение от монокристаллов кремния (001) ориентации, имплантированных стехиометрическими дозами ионов азота с энергией 140 кэВ при плотности тока ионного пучка 100 мкА/см²:

а — время имплантации 4,5, б — 17, в — 30 мин

В результате проведенных электронографических и электроно-микроскопических исследований «на просвет» можно заключить, что при облучении ионами углерода в режиме ВИИ на поверхности монокристаллических образцов кремния формируется тонкая пленка карбида кремния кубической модификации. В случае высокоинтенсивной имплантации малых доз ионов азота ($3,5 \times 10^{17}$ — $6,9 \times 10^{17}$ ат/см²) на поверхности кремния появляются пластинчатые включения нитрида кремния α -модификации. С увеличением дозы облучения ($D = 9,7 \times 10^{17}$ ат/см²) происходит дробление поверхностного слоя кремния на отдельные крупные кристаллиты с углом разориентации $\alpha \approx 15$ — 19° . Повышение дозы облучения до 2×10^{18} ат/см² приводит к дальнейшему дроблению кристаллитов, что проявляется на электронограммах в виде дополнительных поликристаллических колец.

Предполагается, что при высокоинтенсивной имплантации ионных пучков углерода и азота в кремниевую подложку идет диффузия свободного углерода и азота к поверхности, где их концентрация мала из-за образования преципитатов SiC и Si₃N₄ в глубине кристалла.

чения $t=4$ — 9 мин, когда достигались дозы ионов $D=3,5 \times 10^{17}$ — $6,9 \times 10^{17}$ ат/см², на электронограммах обнаружено наличие дифракционных пятен нитрида кремния α -модификации (α -Si₃N₄) (рис. 2, а). Но после снятия тонкого 5—10 нм поверхностного слоя указанные рефлексы исчезали. Для выяснения механизма образования данной фазы были также проведены электронографические исследования обратной стороны облученных монокристаллических образцов кремния. В этом случае рефлексы α -Si₃N₄ не были обнаружены.

Формирование включений нитрида кремния α -модификации на поверхности кремния связано, по-видимому, с диффузией части имплантированных атомов азота к поверхности [4—6]. При дозе облучения $9,7 \times 10^{17}$ ат/см² ($t=17$ мин) на электроно-дифрак-

Список литературы

1. Holland O. W., Sjoreen T. P., Fathy D., Narayan J. // Appl. Phys. Lett. 1984. V. 45. № 10. P. 1081.
2. Komarov F. F., Novikov A. P., Samoilyuk T. T., Solov'yev V. S., Shiryayev S. Yu. // Rad. Eff. 1985. V. 90. P. 307.
3. Александров П. А., Баранова Е. К., Демаков К. Д., Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Ширяев С. Ю. // Физика и техника полупроводников. 1986. Т. 20. Вып. 1. С. 149.
4. Komarov F. F., Rogalevich I. A., Tishkov V. S. // Rad. Eff. 1978. V. 39. P. 163.
5. Pavlov P. V., Kruze T. A., Tetelbaum D. I., Shitova E. V., Zorin E. I., Gudkova N. V. // Phys. Stat. Sol.(a). 1976. V. 36. P. 81.
6. Dexter R. J., Watelski S. B., Picraux S. T. // Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. P. 455.

Поступила в редакцию 18.01.88.

УДК 669.76:537.3

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ, Ф. ШАКЕР ХАШЕМ

СТРУКТУРА И ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В БЫСТРООХЛАЖДЕННЫХ ФОЛЬГАХ СПЛАВОВ ВИСМУТ-ГАЛЛИЙ

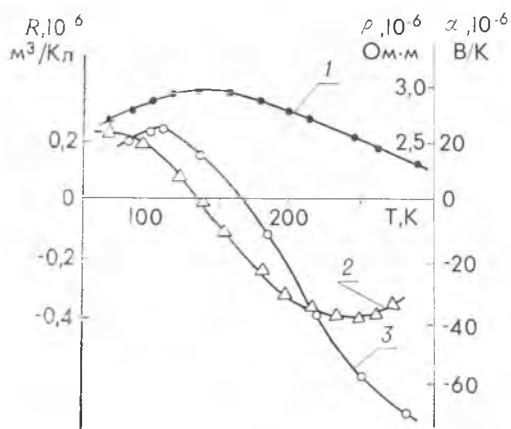
В работах [1—3] установлено, что в висмуте свинец и олово являются акцепторами, теллур и селен — донорами, а остальные элементы (As, Sb, Zn, In, Cd, Ga и др.) не оказывают влияния на электрофизические свойства из-за их малой растворимости. Но в последние двадцать лет успешно развиваются методы получения фольг скоростным охлаждением из жидкой фазы, благодаря которым удается существенно увеличить растворимость легирующих элементов в матрице. В настоящей статье представлены результаты исследования структуры и кинетических свойств фольг сплавов системы висмут-галлий, полученных скоростным охлаждением из расплава.

Для приготовления сплавов Bi-Ga, в которых концентрация галлия изменялась до 2 ат.%, использовались висмут чистотой 99,9999 % и галлий — 99,999 %. Исходные компоненты сплавлялись в кварцевой ампуле. Для получения фольги капля сплава (~0,3 г) выбрасывалась на внутреннюю полированную поверхность медного цилиндра, вращающегося с частотой 3000 об/мин. Скорость охлаждения, как показал расчет, достигала 10^6 К/с [4]. Измерения удельного электросопротивления ρ коэффициента Холла R и дифференциальной термо-ЭДС α проводились в интервале температур 77—300 К. Рентгеноструктурные исследования текстуры осуществлялись на дифрактометре ДРОН-3.

Толщина фольг сплавов висмут-галлий, полученных скоростным охлаждением из расплава, находилась в пределах 20—50 мкм, их ширина достигала 10 мм. Фольги имели поликристаллическую структуру; размер зерен фольг сравним с их толщиной.

Большинство зерен фольг, как показали рентгеноструктурные исследования, ориентировано плоскостью $\{10\bar{1}2\}$ параллельно поверхности фольги. Формирование текстуры такого типа связано с условиями зарождения и роста кристаллитов [5]. Плоскости $(10\bar{1}2)$, $(1\bar{1}02)$ и $(01\bar{1}2)$ характеризуются высокой ретикулярной плотностью атомов, что способствует зарождению кристаллитов данной ориентировки. То, что две ковалентные связи каждого атома находятся в плоскостях рассматриваемого типа, а третья принадлежит двум атомам, расположенным в соседних плоскостях, способствует сохранению образовавшейся ориентировки кристаллитов в процессе их роста.

Зависимость $\rho(T)$ фольги сплава Bi-0,5 ат.% Ga характеризуется максимумом при 140 К. Дифференциальная термо-ЭДС и коэффициент Холла в области низких температур имеют положительный знак (см. рисунок). Подобные зависимости наблюдаются для висмута, легированного



Температурные зависимости ρ (1), R (2) и α (3) фольг сплава Bi-0,5 ат. % Ga

акцепторами [3]. Положительный знак R и α фольг сплава Bi-0,5 ат. % Ga указывает на то, что их кинетические свойства в области низких температур определяются дырками. В фольгах чистого висмута, полученных быстрым охлаждением из расплава [6], межкристаллитные границы не влияют на концентрацию электронов и дырок, поэтому появление дырок в фольгах сплавов Bi-Ga может быть обусловлено тем, что галлий в висмуте ведет себя как акцептор. Межкристаллитные границы в исследуемых материалах могут лишь незначи-

чительно изменить их кинетические свойства, так как длина свободного пробега дырок в рассматриваемом интервале температур меньше размера зерен и определяющим механизмом рассеяния носителей тока является рассеяние на акустических колебаниях решетки.

Повышение температуры приводит к термическому возбуждению электронов из валентной зоны в зону проводимости. Подвижность электронов значительно больше подвижности дырок в висмуте, поэтому с ростом температуры происходит смена знака коэффициента Холла и дифференциальной термо-ЭДС. Аналогичные зависимости $\rho(T)$, $R(T)$ и $\alpha(T)$ наблюдались и для фольг сплавов Bi-Ga, содержащих 1,0 и 2,0 ат. % Ga.

Галлий в меньшей мере изменяет свойства висмута, чем другие — олово и свинец. Сравнение температурных зависимостей дифференциальных термо-ЭДС фольг сплавов Bi-Ga и Bi-Sn позволяет заключить, что величина коэффициента отдачи галлия в висмуте достигает $-0,02$.

Список литературы

1. Иванов Г. А., Регель А. Р. // ЖТФ. 1955. Т. 25. № 1. С. 39.
2. Макневский Л. А., Иванов Г. А. Там же. 1957. Т. 27. № 8. С. 1695.
3. Иванов Г. А., Попов А. М., Чистяков Б. И. // ФММ. 1963. Т. 16. № 2. С. 184.
4. Мирошниченко Н. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
5. Шелепевич В. Г., Шакер Хашем Ф. Структура быстроохлажденных тонких фольг висмута и его сплавов / Редкол. журн. «Изв. вузов СССР: Физ.». Томск, 1986. 9 с. Деп. в ВНИИТИ 08.10.86. № 7954-86В.
6. Прокошн В. Н., Шелепевич В. Г., Шакер Хашем Ф. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 5. С. 434.

Поступила в редакцию 07.07.87.

УДК 539.16.08

Л. В. КАЧАРСКАЯ, ЧАН ЗУЙ ФЫОНГ

ИЗМЕРЕНИЕ β -АКТИВНОСТИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ИЗОТОПЫ ^{241}Pu , ^{90}Sr — ^{90}Y , ^{137}Cs

Взаимное расположение β -радиоактивного образца, кюветы, в которую он помещен (изображено только дно кюветы), и сцинтилляционного детектора, регистрирующего β -излучение образца, показано на рисунке. Очевидно, что только часть электронов, рожденных в объеме образца, будет зарегистрирована: во-первых, по геометрическим условиям (часть электронов распада пролетит мимо детектора); во-вторых, из-за погло-

щения излучения дном кюветы, а также самим образцом. Следовательно, для решения вопроса о соотношении числа зарегистрированных детектором электронов и удельной активности образца необходимо рассчитать следующие величины или функции: коэффициент прохождения электронов через дно кюветы κ ; оптимальную по самопоглощению толщину образца; функцию $f(x_0, S)$, учитывающую геометрические условия регистрации. В качестве образца используются водные растворы радиоактивных препаратов: ^{90}Sr — ^{90}Y , ^{137}Cs , ^{241}Pu .

Коэффициент прохождения через алюминиевую кювету. Кривая поглощения электронов сплошного спектра в веществе близка к экспоненте, что позволяет ввести понятие коэффициента поглощения электронов μ в данном веществе:

$$N = N_0 e^{-\mu x}. \quad (1)$$

Как показывает эксперимент, μ/ρ почти не зависит от атомного веса поглотителя и слабо увеличивается с ростом Z (ρ — плотность вещества).

В работе С. В. Стародубцева, А. М. Романова (Прохождение заряженных частиц через вещество. Ташкент, 1962. С. 208.) предлагается полуэмпирическая формула для расчетов μ/ρ ($\text{см}^2/\text{г}$); $\mu/\rho = 22/E_0^{1,33}$, где E_0 — граничная энергия β -спектра.

Зная E_0 для каждого из β -излучателей, можно рассчитать μ по отношению к алюминию, так как при измерении β -активности обычно используется алюминиевая кювета, а затем по (1) определить $\kappa = N/N_0$ — коэффициент прохождения электронов через кюветы с толщиной дна 0,01 и 0,1 см (табл. 1).

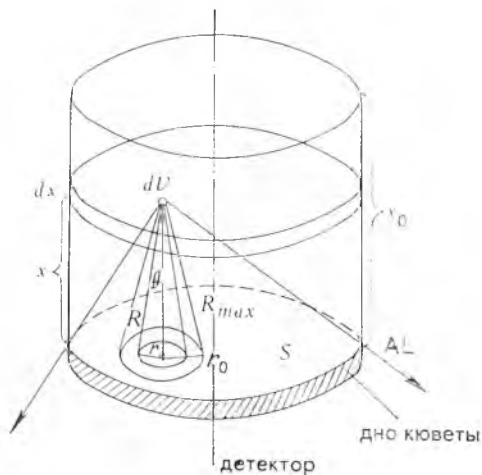
Таблица 1

Коэффициенты μ и κ для алюминия

Ядро	$T_{1/2}$	E_0 , МэВ	μ_{Al} , см^{-1}	$x=0,01$ см		$x=0,1$ см	
				κ	$1/\kappa$	κ	$1/\kappa$
^{90}Sr	28,5 лет	0,546	132,84	0,26	3,77	$2 \cdot 10^{-6}$	10^6
^{137}Cs	30,17 лет	1,173	48,04	0,62	1,62	0,01	122,02
^{241}Pu	15,2 года	0,021	10121,20	0	∞	0	∞
^{90}Y	61,4 года	2,274	19,92	0,82	1,22	0,14	7,33

Из табл. 1 видно, что κ близок к нулю для всех изотопов, кроме ^{90}Y , при использовании стандартной кюветы (толщина дна 0,1 см). Следовательно, β -активность ^{90}Sr в ней можно измерять по сопутствующему ему изотопу ^{90}Y ; при этом вклад от β -излучения других изотопов будет пренебрежимо мал. В кювете с толщиной дна 0,01 см (алюминиевая фольга) можно измерять суммарную активность ^{90}Sr , ^{90}Y , ^{137}Cs либо активность каждого изотопа по их вкладам в энергетическое распределение электронов с помощью β -спектрометра.

Самопоглощение в образце. Используя тот факт, что отношение μ/ρ практически одинаково для всех поглотителей, можно рассчитать μ для воды, а также водоподобных тканей (биологических объектов), полагая $\rho = 1 \text{ г/см}^3$: $\mu_i = \mu_{\text{Al}} \rho / \rho_{\text{Al}}$.



Взаимное расположение образца, кюветы и детектора:

x — высота, S — площадь основания

Толщина дна кюветы x_{100} , x_{50} и коэффициент μ для воды

Ядро	$\mu_{Al}, \text{см}^{-1}$	$\mu_{\text{воды}}, \text{см}^{-1}$	$x_{50}, \text{см}$	$x_{100}, \text{см}$
^{90}Sr	132,84	49,20	0,08	0,09
^{137}Cs	48,04	17,79	0,22	0,26
^{241}Pu	10121,20	3748,61	0,001	$4 \cdot 10^{-5}$
^{90}Y	19,92	7,38	0,53	0,62

Оценим также толщину слоя воды (ткани) x_n , ослабляющего β -излучение в n раз, например: $x_{50} = \ln 50/\mu$, $x_{100} = \ln 100/\mu$. Получаем (табл. 2), что слой воды или водоподобной ткани толщиной 6 мм почти полностью (с ошибкой до 1 %) экранирует излучение от расположенных выше слоев. Примем эту толщину образца оптимальной.

Излучение толстого образца (учет геометрических условий). Пусть β -активный образец толщиной $x_0 = x_{100}$ в алюминиевой кювете установлен на сцинтилляционном детекторе площадью S (см. рисунок). Толщиной дна кюветы для расчетов геометрических факторов пренебрегаем, однако ее поглощающие свойства учтем с помощью коэффициента κ . Выделим элемент объема dV на высоте x в пределах образца. Если $A_0 (\text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3})$ — удельная активность образца, то $A_0 (dV/4\pi) d\Omega$ — число частиц, вылетающих за секунду из объема dV в телесный угол $d\Omega$. Вылетевшие частицы поглощаются на пути R по экспоненциальному закону $e^{-\mu R}$, где R изменяется в пределах от 0 до $R_{\max}$, определяемого максимальной толщиной слоя поглощения электронов в данном веществе. Для упрощения будем считать, что $R = x_{100}$. Площадь основания конуса с образующей x_0 обозначим s_0 . Тогда число частиц, вылетевших из объема dV и зарегистрированных детектором в секунду, определится выражением:

$$dN = A_0 \kappa \eta \frac{dU}{4\pi} \int_0^{s_0} \frac{e^{-\mu R}}{R^2} \cos \theta ds = A_0 \kappa \eta \frac{dU}{4\pi} \int_0^{x_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\mu R}}{R^2} \cos \theta r dr d\varphi,$$

где η — эффективность регистрации детектором электронов. Так как $r^2 = r^2 + x^2$, $R dr = r dr$, $\cos \theta = x/R$, то

$$dN = A_0 \kappa \eta \frac{dU}{2} x \int_x^{x_0} \frac{e^{-\mu R}}{R^2} dR.$$

Используя интегральную показательную функцию, имеем:

$$dN = A_0 \kappa \eta \frac{dV}{2} x \left[\mu E_1(\mu x_0) - \mu E_1(\mu x) + \frac{e^{-\mu x}}{x} - \frac{e^{-\mu x_0}}{x_0} \right].$$

Интегрируя по объему радиоактивного образца, получаем число частиц, зарегистрированных в секунду детектором:

$$N = \frac{1}{4} A_0 \kappa S \eta \frac{1 - e^{-\mu x_0}}{\mu};$$

для $x_0 = x_{100}$ $e^{-\mu x_0} = 0,01$, тогда

$$N = A_0 \kappa S \eta / 4\mu.$$

Положим $\eta = 1$, $\kappa = 0,14$, $\mu = 7,38 \text{ см}^{-1}$, $S = 12,56 \text{ см}^2$, откуда удельная активность A_0 , выраженная в Ки/л, будет:

$$A_0 (\text{Ки/л}) = 4,5 \cdot 10^{-7} N.$$

Благодарим доцента В. А. Чудакова за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Поступила в редакцию 21.12.87.



УДК 519.624

И. Ф. КУЛЕШОВА, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

ВАРИАНТ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Значительное число прикладных граничных задач с малым параметром при старшей производной, описывающих диффузионно-конвективные процессы или родственные явления в физике, механике и других областях науки, являются такими математическими моделями, численное решение которых сопряжено с преодолением существенных трудностей, обусловленных неустойчивостью процесса [1]. До сих пор многие методы решения задач с пограничным слоем нельзя считать строго обоснованными, и успех их применения часто бывает связан с использованием эвристических приемов, а также глубоким и неформальным проникновением в суть задачи. Поэтому проблема создания вычислительных методов для упомянутого класса задач с такими свойствами, как универсальность, высокая степень общности, устойчивость и удобная реализуемость на ЭВМ, по-прежнему актуальна.

Рассмотрим два примера типичных граничных задач с пограничным слоем [1] и фиксированным малым параметром ($\epsilon \geq \epsilon_0 > 0$) при старшей производной:

$$Ly(x) \equiv \epsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$B_0 y(0) \equiv y(0) = A, \quad B_1 y(1) \equiv y(1) = B, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq 0, \quad (2)$$

$$Ly(x) \equiv -\epsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$B_0 y(0) \equiv y(0) = A, \quad B_1 y(1) \equiv y(1) = B, \quad b(x) \geq \beta > 0. \quad (4)$$

Для решения задач вида (1)–(4) использовались различные численные методы [1]. Во всех случаях вводились постоянные и переменные подгоночные параметры $\sigma(\rho)$, чтобы придать методу желаемые свойства. Можно, например, потребовать, чтобы асимптотическое разложение решения дискретной задачи давало хорошее представление асимптотического разложения решения непрерывной задачи. Однако уже при наличии двух пограничных слоев возникают трудности, и на задачу необходимо накладывать довольно обременительные условия. Возникает вопрос о построении универсальных методов для задач с более естественными предположениями относительно данных. Эта цель может быть в известной мере достигнута с помощью модификаций метода прогонки [2–5].

Рассмотрим граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.):

$$y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (5)$$

$$y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6)$$

с условиями вида

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad (7)$$

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (8)$$

Зависимость $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ от $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ здесь и далее не помечается. Будем считать, что $a_{ik}(x)$, $(i, k=1, 2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и существует единственное решение задачи. Суть предлагаемого метода в следующем. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — искомое решение рассматриваемой граничной задачи. Введем вспомогательную функцию $\Theta(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ по формулам [2, 3]:

$$u = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \sin \Theta(x) + m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \cos \Theta(x), \quad (9)$$

$$v = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \cos \Theta(x) - m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \sin \Theta(x), \quad (10)$$

где $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$; $m_1(x, \varepsilon) > 0$ и $m_2(x, \varepsilon) > 0$ — функции, выбор которых в зонах пограничных слоев должен быть согласован с поведением функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и должен быть таким, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon) y_1(x)$ и $m_2(x, \varepsilon) y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Можно, например, подобрать их таким образом, чтобы выполнялись условия $m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \approx \text{const}$, $m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \approx \text{const}$. Из соотношений (9), (10) получим выражения для $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$m_1(x, \varepsilon) y_1(x) = \sin \Theta(x) u(x) + \cos \Theta(x) v(x), \quad (11)$$

$$m_2(x, \varepsilon) y_2(x) = \cos \Theta(x) u(x) - \sin \Theta(x) v(x). \quad (12)$$

Продифференцировав (9), (10) и заменив в полученных выражениях $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ по формулам (5), (6), а $y_1(x)$, $y_2(x)$ — (11), (12), можно получить следующие уравнения для $u(x)$ и $v(x)$:

$$u' = b_{11}(x) u + b_{12}(x) v + c_1(x), \quad (13)$$

$$v' = b_{21}(x) u + b_{22}(x) v + c_2(x). \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$b_{11} = \left(\frac{m_1'}{m_1} + a_{11} \right) \sin^2 \theta + \left(\frac{m_1}{m_2} a_{12} + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \left(\frac{m_2'}{m_2} + a_{22} \right) \cos^2 \theta,$$

$$b_{12} = \theta' + \left[a_{11} - a_{22} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \cos^2 \theta - \\ - \frac{m_1}{m_2} a_{12} \sin^2 \theta,$$

$$b_{21} = \left[a_{11} - a_{22} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{m_2}{m_1} a_{21} \sin^2 \theta + \frac{m_1}{m_2} a_{12} \cos^2 \theta - \theta',$$

$$b_{22} = \left(a_{11} + \frac{m_1'}{m_1} \right) \cos^2 \theta + \left(a_{22} + \frac{m_2'}{m_2} \right) \sin^2 \theta - \left[\frac{m_1}{m_2} a_{12} + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \right] \cos \theta \cdot \sin \theta,$$

$$c_1 = m_1 \cdot f_1 \cdot \sin \theta + m_2 \cdot f_2 \cdot \cos \theta,$$

$$c_2 = m_1 \cdot f_1 \cdot \cos \theta - m_2 \cdot f_2 \cdot \sin \theta,$$

где аргументы у всех функций опущены для простоты записи.

Метод осуществим, если систему уравнений (13), (14) удастся разделить. Предполагаем, что функция $\Theta(x)$ известна на $[a, b]$. Эти уравнения можно разделить, положив, например, $b_{12}(x) = 0$. Тогда для $\Theta(x)$:

$$\theta' + \left[a_{11} - a_{12} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \cos^2 \theta - \\ - \frac{m_1}{m_2} a_{12} \sin^2 \theta = 0. \quad (15)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения для функций $\Theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ таковы, что их можно численно решать последовательно, вначале уравнение (15), затем (13) и, наконец, (14). Формулы вычисления начальных условий для (15) и (13) даны в [2]. Обратная прогонка для (14) будет осуществляться следующим образом. Начальное условие для функции $v(x)$ определим в точке $x=b$. Потребуем, чтобы значения $y_1(b)$

и $y_2(b)$, определяемые по формулам (11), (12), удовлетворяли граничному условию (8). Это будет иметь место при

$$v(b) = \frac{1}{\Delta} \left[\gamma_2 - \left(\frac{\alpha_2}{m_1(b, \varepsilon)} \sin \theta(b) + \frac{\beta_2}{m_2(b, \varepsilon)} \cos \theta(b) \right) u(b) \right] \quad (16)$$

в предположении, что $\Delta = \frac{\alpha_2}{m_1(b, \varepsilon)} \cos \theta(b) - \frac{\beta_2}{m_2(b, \varepsilon)} \sin \theta(b) \neq 0$. Теперь функцию $v(x)$ можно найти на $[a, b]$ как решение задачи Коши для д. у. (14) с начальным условием (16) в точке $x = b$. Это и будет обратная прогонка. После определения функций $\Theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$ искомое решение — функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ — находится по (11), (12). Проверкой легко устанавливается, что найденные таким образом функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются искомым решением. Исследование устойчивости рассмотренного алгоритма проводится обычным путем [2, 3].

Для демонстрации достоинств изложенного метода приведем численное решение на ЭВМ трех задач [1]:

$$-\varepsilon y''(x) + (1+x)^2 y(x) = 4(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1), \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,0078125, \quad h = 1/16, \quad (18)$$

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2) y'(x) - (x - 1/2)^2 y(x) = -(e^x + x^2), \quad (19)$$

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,03125, \quad h = 1/16, \quad (20)$$

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2) y'(x) - (x - 1/2)^2 y(x) = 4(3x^2 - 3x + 1)(x + 1)^2, \quad (21)$$

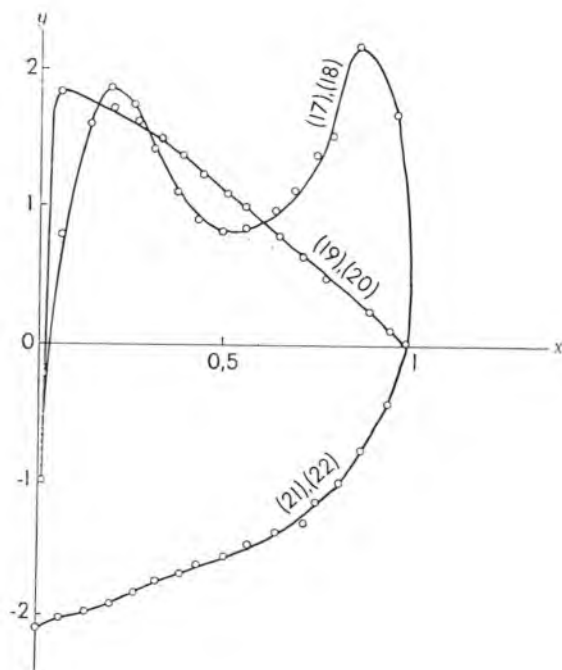
$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,0625, \quad h = 1/16. \quad (22)$$

Значения функций $\Theta(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $y(x)$ для граничных задач (17) — (22)

№ п. п.	x_i	$\Theta(x)$	$u(x)$	$v(x)$	$y(x)$
(17), (18)	2/16	1,64174	1,37888	-4,68451	1,70751
	3/16	1,64638	1,93038	1,07378	1,84378
	4/16	1,64411	1,92147	2,97650	1,69829
	13/16	1,62064	1,85969	-3,91031	2,05224
	14/16	1,61892	2,31192	-2,24281	2,30937
	15/16	1,61732	2,86214	1,64229	2,09522
(19), (20)	0	$\pi/2$	-1	-104,285	-1
	1/16	1,76364	-0,828229	-13,8776	1,84670
	2/16	2,51363	0,355856	-1,33407	1,68864
(21), (22)	0	$-\pi/4$	0	-4,06801	-2,87653
	1/16	-0,451854	2,15522	-1,97181	-2,71496
	2/16	-0,266897	2,95240	-1,90015	-2,61156

Наиболее интересные моменты численного решения этих задач (см. таблицу) получены с точностью $\delta = 1/2 \cdot 10^{-5}$; полностью решения схематично изображены на рисунке, где кружочками помечены численные значения решений в соответствующих точках сетки.

Во всех известных методиках, предназначенных для решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2), (3), (4), используются подгоночные коэффициенты, содержащие экспоненты [1, 4, 6, 7]. В изложенном методе роль подобных коэффициентов принадлежит функциям $m_1(x, \varepsilon) > 0$ и $m_2(x, \varepsilon) > 0$, которые, хотя и моделируют профили пограничных слоев, но могут быть в достаточной мере произвольными. Численные результаты решения задач (17) — (22) получены при $m_1(x, \varepsilon) \equiv m_2(x, \varepsilon) \equiv 1$. Здесь не было необходимости вводить моделирующие



Графики решений задач (17)—(22)

множители. Сравнение аналогичных результатов [1] с полученными говорит о существенном преимуществе варианта метода ортогональной прогонки. Эти результаты значительно лучше даже при $m_1 = m_2 = 1$, чем аналогичные в [1, ч. III, § 2].

Итак, традиционный подход к решению граничных задач с пограничным слоем [1], основанный на использовании трехточечных разностных схем с введением подгоночных коэффициентов, предлагается заменить универсальной и достаточно гибкой процедурой, основным этапом которой является численное решение ряда задач Коши с вполне определенными начальными значениями [9]. Для этих целей может быть эффективно использован широкий арсенал численных методов, обладающих высокой гибкостью, в том числе и равномерной сходимостью [8, 9], возможностью применения переменного шага интегрирования, а также выбора практически любого порядка точности метода, реализуемого на ЭВМ.

Список литературы

1. Дулан Э., Миллер Ж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М., 1983.
2. Монастырный П. И. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 2. С. 284.
3. Монастырный П. И. Там же. 1971. Т. 11. № 4. С. 925.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
5. Абрамов А. А. Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349.
6. Ильин А. М. // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237.
7. Шишкин Г. И. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 804.
8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1988.
9. Кулешова И. Ф. Устойчивость и оценки погрешности метода дифференциальной ортогональной прогонки в случае задач с пограничным слоем / Редкол. журн. «Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». Минск, 1987. 13 с. Деп. в ВИНТИ 24.07.87. № 5354-В-87.

Поступила в редакцию 24.04.86.

О МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПОЛНОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Пусть V_k — векторы размерности N , удовлетворяющие системе уравнений:

$$A_i V_{i-1} - B_i V_i + C_i V_{i+1} = F_i, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$V_0 = F_0, \quad V_M = F_M, \quad (2)$$

где B_i — квадратные трехдиагональные матрицы; A_i, C_i — диагональные матрицы; F_i — известные векторы. В дальнейшем будем ориентироваться на свойства систем вида (1), (2), возникающих при применении метода ссток к решению задачи Дирихле для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа [1, 2]. Будем полагать $M = 2^m$, где m — положительное целое число.

Ниже для решения разностной граничной задачи (1), (2) строится итерационный алгоритм, в основу которого положены идеи неявных итерационных методов [3—5] и метода полной редукции [2]. По аналогии с [4] этот алгоритм можно назвать методом неявной полной редукции. В построении алгоритма, как и в [5], используется плавность изменения коэффициентов разностных граничных задач. При выполнении этого предположения метод неявной полной редукции имеет высокую скорость сходимости, не зависящую от числа узлов сетки, но по сравнению с алгоритмом из [5] требует меньшего объема вычислений.

2. Решая задачу (1), (2), исключим неизвестные V_i в такой же последовательности, что и в методе полной редукции. При этом в правую часть уравнений включим V_i с небольшими коэффициентами. После проведения k этапов исключения неизвестных из (1) получаем систему:

$$A_{j-2^{k+1}} V_{j-2^k} - B_j^{(k)} V_j + C_{j+2^{k-1}} V_{j+2^k} = B_j^{(k)} p_j^{(k)}(V) + q_j^{(k)}(V), \quad j = 2^k \cdot i, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{m-k} - 1. \quad (3)$$

Из (1) и (3) имеем $p_j^{(0)}(V) = 0$, $q_j^{(0)}(V) = F_j$, $B_j^{(0)} = B_j$. Получим рекуррентные формулы для вычисления $p_j^{(k)}(V)$, $q_j^{(k)}(V)$. С этой целью умножим (3) слева на B_j :

$$B_j^{(k)} A_{j-2^{k+1}} V_{j-2^k} - B_j^{(k)} B_j^{(k)} V_j + B_j^{(k)} C_{j+2^{k-1}} V_{j+2^k} = B_j^{(k)} B_j^{(k)} p_j^{(k)}(V) + B_j^{(k)} q_j^{(k)}(V).$$

Предполагая $B_j^{(k)} \approx B_{j-2^k}^{(k)}$, $B_j^{(k)} \approx B_{j+2^k}^{(k)}$, $A_j \approx E$, $C_j \approx E$ и используя (3) при $j - 2^k$ и $j + 2^k$, преобразуем последнее уравнение к виду:

$$A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} - B_j^{(k+1)} V_j + C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}} = B_j^{(k)} \Omega_j^{(k)}(V) + B_j^{(k+1)} p_j^{(k)}(V) + 2p_j^{(k)}(V) + A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} + 2V_j + C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}}, \quad (4)$$

где $B_j^{(k+1)} = B_j^{(k)} \cdot B_j^{(k)} - 2E$;

$$\Omega_j^{(k)}(V) = A_{j-2^{k+1}} (p_{j-2^k}^{(k)}(V) - W_{j-2^k}^{(k)}(V)) + C_{j+2^k-1} (p_{j+2^k}^{(k)}(V) - W_{j+2^k}^{(k)}(V)) + q_j^{(k)}(V);$$

$$W_j^{(k)}(V) = [B_j^{(k)}]^{-1} (A_{j-2^{k+1}} V_{j-2^k} + C_{j+2^k-1} V_{j+2^k} - q_j^{(k)}(V)).$$

Так как $B_j^{(k)} = [B_j^{(k)}]^{-1} (B_j^{(k+1)} + 2E)$, то (4) можно переписать:

$$A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} - B_j^{(k+1)} V_j + C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}} = B_j^{(k+1)} p_j^{(k+1)}(V) + q_j^{(k+1)}(V), \quad j = 2^{k+1}i, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{m-k-1} - 1,$$

где

$$p_j^{(k+1)}(V) = p_j^{(k)}(V) + [B_j^{(k)}]^{-1} \Omega_j^{(k)}(V), \quad (5)$$

$$q_j^{(k+1)}(V) = G_j^{(k+1)}(V) + 2(V_j + p_j^{(k+1)}(V)), \quad (6)$$

$$G_j^{(k)}(V) = A_{j-2^k+1} V_{j-2^k} + C_{j+2^k-1} V_{j+2^k}.$$

Формулы (3), (5), (6) дают возможность построить итерационный алгоритм, в котором вычисление $V_j^{(s+1)}$ — $s+1$ -го приближения к V_j^* — решению задачи (1), (2) происходит по следующей схеме.

1). Задаем $p_j^{(0)}(V^{(s)}) = 0$, $q_j^{(0)}(V^{(s)}) = F_j$, $j = 1, 2, \dots, M-1$.

2). Последовательно при $k=0, 1, \dots, m-2$ для $j = 2^{k+1}i$, $i = 1, 2, \dots, 2^{m-k-1} - 1$ находим:

$$T_j^{(k)}(V^{(s)}) = [B_j^{(k)}]^{-1} \Omega_j^{(k)}(V^{(s)}), \quad (7)$$

$$p_j^{(k+1)}(V^{(s)}) = p_j^{(k)}(V^{(s)}) + T_j^{(k)}(V^{(s)}), \quad (8)$$

$$q_j^{(k+1)}(V^{(s)}) = G_j^{(k+1)}(V^{(s)}) + 2(V_j^{(s)} + p_j^{(k+1)}(V^{(s)})). \quad (9)$$

3). Задаем $V_0^{(s+1)} = F_0$, $V_M^{(s+1)} = F_M$ и последовательно при $k = m-1, m-2, \dots, 0$ по формулам:

$$V_j^{(s+1)} = -p_j^{(k)}(V^{(s)}) - [B_j^{(k)}]^{-1} (q_j^{(k)}(V^{(s)}) - G_j^{(k)}(V^{(s+1)})) \quad (10)$$

находим $V_j^{(s+1)}$, $j = 2^k \cdot i$, $i = 1, 3, \dots, 2^{m-k} - 1$.

В (7) — (10) под $p_j^{(k)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k)}(V^{(s)})$, $\Omega_j^{(k)}(V^{(s)})$, $W_j^{(k)}(V^{(s)})$, $G_j^{(k)}(V^{(s)})$ понимаются векторы $p_j^{(k)}(V)$, $q_j^{(k)}(V)$, $\Omega_j^{(k)}(V)$, $W_j^{(k)}(V)$, $G_j^{(k)}(V)$, в которых V_j заменены на $V_j^{(s)}$. При вычислении $W_j^{(k)}(V^{(s)})$, $T_j^{(k)}(V^{(s)})$, $V_j^{(s+1)}$ требуется находить $X = [B_j^{(k)}]^{-1}L$, где L — некоторый вектор. Для этой цели можно использовать алгоритмы из [2], согласно которым вычисление вектора X сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с матрицами такой же структуры, что и B_j . Поэтому для вычисления $V_j^{(s+1)}$, $j = 0, 1, \dots, M$ требуется выполнить $O(M \cdot N \cdot \log_2 M)$ арифметических операций.

Отметим, что, как и в методе полной редукции, векторы $p_j^{(k+1)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k+1)}(V^{(s)})$ можно запоминать в ячейках памяти, в которые ранее заносились $p_j^{(k)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k)}(V^{(s)})$. Следовательно, для запоминания этих величин при всех k достаточно $2(M-1) \cdot N$ ячеек памяти.

3. Изучим сходимость предлагаемого алгоритма. Будем полагать выполненным условие

$$\|B_j^{-1}\| \leq 1/2, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \quad (11)$$

из которого следуют неравенства:

$$\|[B_j^{(k)}]^{-1}\| \leq 1/2, \quad \|[B_j^{(k+1)}]^{-1} B_j^{(k)}\| \leq 1, \quad \|[B_j^{(k+1)}]^{-1} (B_j^{(k)})^2\| \leq 2. \quad (12)$$

Если при этом $\|B_j - B_{j-1}\| \leq \tau$, $j = 2, 3, \dots, M-1$, то

$$\|[B_j^{(k)}]^{-1} - [B_{j-1}^{(k)}]^{-1}\| \leq 4^{k-1} \tau. \quad (13)$$

Обозначим $\varepsilon_j^{(s)} = V_j^* - V_j^{(s)}$, $A = \max\{\|A_j\|, \|C_j\|, 1\}$, $\omega = \max\{\|E - A_j\|, \|E - C_j\|\}$. Вычитая (10) из (3), получаем уравнение для $\varepsilon_j^{(s+1)}$: $\varepsilon_j^{(s+1)} = [B_j^{(k)}]^{-1} (A_{j-2^k+1} \varepsilon_{j-2^k}^{(s+1)} + C_{j+2^k-1} \varepsilon_{j+2^k}^{(s+1)}) - Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})$, $Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) = p_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) + [B_j^{(k)}]^{-1} q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})$. Отсюда

$$\max_j \|\varepsilon_j^{(s+1)}\| \leq A \cdot \max_j \{ \|\varepsilon_{j-2^k}^{(s+1)}\|, \|\varepsilon_{j+2^k}^{(s+1)}\| \} + \max_j \|Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})\|, \quad (14)$$

$$j = 2^k \cdot i, \quad i = 1, 3, \dots, 2^{m-k} - 1.$$

Так как $\varepsilon_0^{(s+1)} = \varepsilon_M^{(s+1)} = 0$, то, рассматривая (14) последовательно при $k = m-1, m-2, \dots, 0$, приходим к неравенству:

$$\max_{0 \leq j \leq M} \|\varepsilon_j^{(s+1)}\| \leq A^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\max_j \|Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})\|). \quad (15)$$

Оценим $\|Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})\|$. Из (8) и (9) имеем:

$$Q_j^{(k+1)}(\varepsilon^{(s)}) = [B_j^{(k+1)}]^{-1} B_j^{(k)} \{ S_j^{(k)} \varepsilon_{j-2^{k+1}}^{(s)} + L_j^{(k)} \varepsilon_j^{(s)} + P_j^{(k)} \varepsilon_{j+2^{k+1}}^{(s)} + \\ + B_j^{(k)} Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) + A_{j-2^{k+1}} Q_{j-2^k}^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) + C_{j+2^{k+1}} Q_{j+2^k}^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) \}, \quad (16)$$

где $S_j^{(k)} = ([B_j^{(k)}]^{-1} - A_{j-2^k} [B_{j-2^k}^{(k)}]^{-1}) A_{j-2^{k+1}+1}$,

$$L_j^{(k)} = 2 [B_j^{(k)}]^{-1} - A_{j-2^k+1} [B_{j-2^k}^{(k)}]^{-1} C_{j-1} - C_{j+2^k-1} [B_{j+2^k}^{(k)}]^{-1} A_{j+1},$$

$$P_j^{(k)} = ([B_j^{(k)}]^{-1} - C_{j+2^k-1} [B_{j+2^k}^{(k)}]^{-1}) C_{j+2^{k+1}-1}.$$

Из (13) следует: $\|S_j^{(k)}\| \leq A(8^k \tau/4 + \omega/2)$, $\|L_j^{(k)}\| \leq A(8^k \tau/2 + 2\omega)$, $\|P_j^{(k)}\| \leq A(8^k \tau/4 + \omega/2)$. Учитывая (12), из (16) получаем: $\|Q_j^{(k+1)}(\varepsilon^{(s)})\| \leq A(8^k + 3\omega) \max_j \|\varepsilon_j^{(s)}\| + 4A \max_j \|Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})\|$. Поскольку $Q_j^{(0)}(\varepsilon^{(s)}) = 0$, то

$$\max_j \|Q_j^{(l)}(\varepsilon^{(s)})\| \leq A^l \sum_{v=0}^{l-1} 4^{l-v-1} (8^v \tau + 3\omega) \max_j \|\varepsilon_j^{(s)}\|. \quad (17)$$

Т а б л и ц а 1

Погрешность решения задачи (20) из [5] на s -й итерации

N	4	8	16	32	64
$\varepsilon^{(1)}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon^{(2)}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 2

Число итераций для решения задачи (21) из [5] с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

c_2/c_1	$N=4$	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
2	3	3	4	4	4
8	3	4	4	5	5
32	3	3	5	5	6
128	3	3	5	5	6
512	3	3	4	5	6

Неравенства (15) и (17) дают возможность получить окончательную оценку:

$$\max_j \|\varepsilon_j^{(s+1)}\| \leq A^{2(m-1)} \left(\frac{\tau}{28} M^3 + \frac{\omega}{3} M^2 \right) \max_j \|\varepsilon_j^{(s)}\|,$$

которая показывает, что в случае решения по методу сеток задачи Дирихле для дифференциальных уравнений, близких к уравнению Пуас-

сона, предлагаемый алгоритм будет сходиться со скоростью, не зависящей от числа узлов сетки.

4. Численные эксперименты по решению разностных граничных задач с помощью предлагаемого алгоритма на ЭВМ проводились аналогично численным экспериментам по алгоритму из [5]. Некоторые результаты приводятся в табл. 1 и 2.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
3. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М., 1985.
4. Ильин В. П. // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 83.
5. Басик В. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 38.

Поступила в редакцию 03.12.87.

УДК 539.3

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе [1] изложен метод решения термоупругой задачи для ортотропного полупространства, на граничной плоскости которого задано неравномерное распределение стационарного температурного поля. Настоящая статья посвящена решению контактной задачи термоупругости. В основу его положено новое представление общих формул для компонентов напряжений и перемещений, полученных в [1].

Пусть на ортотропное полупространство $D^+ (z > 0)$, обладающее прямолинейной тепловой и упругой анизотропией, действует абсолютно жесткий, произвольной формы в плане плоский штамп. Трение между штампом и полупространством по области контакта S_1 отсутствует. Положим, что поверхность штампа имеет температуру $T = T_0(x, y)$; тепловой контакт штампа и полупространства в S_1 , а также полупространства и среды ($T_{cp} = 0$) в $S_2 = S - S_1$ совершенный, т. е. температурный скачок на поверхности соприкасающихся тел и среды не возникает. Граничная плоскость полупространства S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, параллельных осям декартовых координат x, y, z , которые образуют правую тройку.

Граничные условия для стационарного температурного поля в S имеют вид $T = T_0(x, y)$ в S_1 , $T = 0$ в S_2 .

Как известно, в области D^+ квазигармоническая функция температуры $T(x, \bar{y}, \bar{z})$ определяется по формуле

$$T(x, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{\bar{z} T(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\bar{y}-\beta)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

где $\bar{y} = \bar{\mu}y$, $\bar{z} = \bar{\lambda}z$, $\bar{\mu} = \sqrt{k_1/k_2}$, $\bar{\lambda} = \sqrt{k_1/k_3}$, $k_i (i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты теплопроводности в главных направлениях упругости тела.

Запишем граничные условия для контактной задачи:

$$\begin{aligned} \tau_{xz1} + \tau_{xz2} &= 0, \quad \tau_{yz1} + \tau_{yz2} = 0 \quad \text{в } S, \\ \sigma_{z1} + \sigma_{z2} &= 0 \quad \text{в } S_2, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_0(x, y) \quad \text{в } S_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь индекс 2 относится к компонентам напряжения и осадке, вызванным температурным полем; индекс 1 — к компонентам упругого состояния; $\omega_0(x, y)$ — заданное перемещение.

Сохраняя обозначения работы [1] для составляющих термоупругого состояния, приведем выражения для σ_{z2} , τ_{xz2} , τ_{yz2} , ω_2 :

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\xi_1 K \tilde{\Phi}_1 + \xi_3 \tilde{\Phi}_3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\eta_1 K \tilde{\Phi}_1 + \eta_3 \tilde{\Phi}_3),$$

$$\tau_{xz2} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\xi_1 K \tilde{\Phi}_1 + \xi_3 \tilde{\Phi}_3), \quad \tau_{yz2} = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\eta_1 K \tilde{\Phi}_1 + \eta_3 \tilde{\Phi}_3), \quad (3)$$

$$\omega_2 = C_1 K \partial \tilde{\Phi}_1 / \partial z + C_3 \partial \tilde{\Phi}_3 / \partial z,$$

$$\text{где } \tilde{\Phi}_1(x, y_1, z_1) = \frac{K_1}{4\pi} \iiint_{D^+} \frac{T(\gamma, \beta_1, \Theta_1) d\gamma d\beta_1 d\Theta_1}{V(x-\gamma)^2 + (y_1-\beta_1)^2 + (z_1-\Theta_1)^2},$$

$$\tilde{\Phi}_3(x, y_3, z_3) = \frac{K_3}{4\pi} \iiint_{D^+} \frac{T(\gamma, \beta_3, \Theta_3) d\gamma d\beta_3 d\Theta_3}{V(x-\gamma)^2 + (y_3-\beta_3)^2 + (z_3-\Theta_3)^2},$$

$$y_k = \mu_k y, \quad z_k = \lambda_k z, \quad \beta_k = \bar{\mu} y_k / \mu_k, \quad \Theta_k = \bar{\lambda} z_k / \lambda_k, \quad k = 1, 3;$$

остальные обозначения приведены в [1, 2].

С целью удовлетворения условиям (2) решим упругую задачу со следующими граничными условиями:

$$\tau_{xz1} = -\tau_{xz2}, \quad \tau_{yz1} = -\tau_{yz2} \quad \text{в } S,$$

$$\sigma_{z1} = -\sigma_{z2} \quad \text{в } S_2, \quad \omega_1 = \omega_0 - \omega_2 \quad \text{в } S_1. \quad (4)$$

Воспользуемся общими формулами, описывающими упругое состояние ортотропного полупространства [1]. В частности, выпишем выражения для σ_{z1} , τ_{xz1} , τ_{yz1} , ω_1 :

$$\sigma_{z1} = \frac{\alpha_3 \xi_1}{\lambda_1^3} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} + n_3 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

$$\tau_{xz1} = -\xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z} - n_6 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{yz1} = -\eta_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y \partial z} + n_7 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_3}{\lambda_1} \left[a_{66} - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_1} \right) (a_{44} \eta_1 + a_{55} \xi_1) \right] + 4\alpha_2 C_1 \right\} \partial \Phi_1 / \partial z +$$

$$+ \frac{z\alpha_3}{\lambda_1} C_1 \partial^2 \Phi_1 / \partial z^2 + C_3 \partial \Phi_3 / \partial z, \quad (6)$$

где функции $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$ удовлетворяют квазигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_i^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 0, 1, 3.$$

Представим функцию $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$ в виде:

$$\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z) = \Phi_0(x, \mu_3 y, \lambda_3 z) + \psi(x, y, z), \quad (7)$$

где $\psi = \Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z) - \Phi_0(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$.

Обозначим $\zeta = \lambda_k z$. Тогда при $\zeta = 0$ формулы (5) с учетом (4), (7) преобразуются к виду:

$$\frac{\alpha_3 \xi_1}{\lambda_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} + \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} + n_3 \frac{\partial^2 \Phi_0(x, \mu_3 y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= \begin{cases} -M(x, y) - p(x, y) & \text{в } S_1, \\ -M(x, y) & \text{в } S_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\xi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + n_6 \frac{\partial \Phi_0(x, \mu_3 y)}{\partial y} \right) = N(x, y) \quad \text{в } S, \quad (9)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\eta_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - n_7 \frac{\partial \Phi_0(x, \mu_3 y)}{\partial x} \right) = L(x, y) \quad \text{в } S, \quad (10)$$

где $M = \sigma_{z2} + n_3 \Psi_3$, $N = \tau_{xz2} - n_6 \Psi_1$, $L = \tau_{yz2} + n_7 \Psi_2$, $n_3 = n_6 - n_7$, $\Psi_1 = \partial^2 \psi / \partial y \partial z$, $\Psi_2 = \partial^2 \psi / \partial x \partial z$, $\Psi_3 = \partial^2 \psi / \partial x \partial y$; $p(x, y)$ — неизвестная плотность распределения нормальных усилий в области контакта S_1 .

Решение граничных задач (9), (10) запишем в форме

$$\xi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + n_6 \frac{\partial \Phi_0(x, \mu_3 y)}{\partial y} = \lambda_3^{-1} g_1(x, \mu_3 y, \xi), \quad (11)$$

$$\eta_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - n_7 \frac{\partial \Phi_0(x, \mu_3 y)}{\partial x} = \lambda_3^{-1} g_2(x, \mu_3 y, \xi), \quad (12)$$

$$\text{где } g_1 = \frac{-1}{2\pi} \iint_S \frac{N(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{V(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2}, \quad g_2 = \frac{-1}{2\pi} \iint_S \frac{L(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{V(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2}.$$

Продифференцируем равенства (11), (12) соответственно по x и y . С учетом полученных выражений на основании (8) имеем граничную задачу для определения $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(x, \mu_1 y)}{\partial \xi^2} = \begin{cases} -f_1(x, y) & \text{в } S_1, \\ -f_2(x, y) & \text{в } S_2, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } f_1(x, y) = \lambda_1 \alpha_3^{-1} \xi_1^{-1} (M(x, y) + p(x, y) + \lambda_3^{-1} J_1 + \lambda_3^{-1} \mu_3^{-1} J_2),$$

$$f_2(x, y) = \lambda_1 \alpha_3^{-1} \xi_1^{-1} (M(x, y) + \lambda_3^{-1} J_1 + \lambda_3^{-1} \mu_3^{-1} J_2),$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(x-\alpha) N(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2]^{3/2}}, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(\mu_3 y - \beta) L(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2]^{3/2}}.$$

Решение граничной задачи (13) запишем в виде:

$$\Phi_1 = g_3(x, \mu_1 y, \xi), \quad (14)$$

$$\text{где } g_3 = \frac{-1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{f_3(\sigma, t) d\sigma dt}{V(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \xi^2} - \frac{1}{2\pi} \iint_{S_2} \frac{f_4(\sigma, t) d\sigma dt}{V(x-\sigma)^2 + (\mu_1 y - t)^2 + \xi^2},$$

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{f_1(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}, \quad f_4 = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_2} \frac{f_2(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}.$$

Для определения функций $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$ и $\Phi_0(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$ воспользуемся равенствами (11), (12). Продифференцируем указанные уравнения в первом случае по x и y соответственно, во втором — (11) продифференцируем по y , а (12) — по x . Поскольку $\eta_3 n_6 / \xi_3 n_7 = \mu_3^{-2}$ и Φ_3, Φ_0 удовлетворяют приведенным квазигармоническим уравнениям, то на основании преобразованных выражений получим граничные задачи для Φ_3 и Φ_0 :

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \xi^2} = -f_5(x, y), \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} = f_7(x, y), \quad (15)$$

$$\text{где } f_5 = \lambda_3 \xi_3^{-1} (J_1 + \mu_3^{-1} n_7^{-1} n_6 J_2), \quad f_7 = \lambda_3 n_7^{-1} (J_4 - \eta_3 \mu_3^{-1} \xi_3^{-1} J_3),$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(\mu_3 y - \beta) N(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2]^{3/2}},$$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(x-\alpha) L(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \xi^2]^{3/2}}.$$

Решение граничных задач (15) имеет вид:

$$\Phi_3 = g_4(x, \mu_3 y, \xi), \quad \Phi_0 = g_5(x, \mu_3 y, \xi), \quad (16)$$

$$\text{где } g_4 = \frac{-1}{2\pi} \iint_S \frac{f_5(\sigma, t) d\sigma dt}{V(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \xi^2}, \quad f_5 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_5(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2},$$

$$g_5 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_7(\sigma, t) d\sigma dt}{V(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \xi^2}, \quad f_7 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_7(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}.$$

Функцию $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$ определим на основании второго равенства (16) путем замены μ_3 на μ_0 , λ_3 на λ_0 . Для определения $\psi(x, y)$ имеем следующее интегродифференциальное уравнение: $\psi(x, y) = g_5(x, \mu_0 y) - g_5(x, \mu_3 y)$.

Зная $\psi(x, y)$, функции Φ_1, Φ_3 и Φ_0 найдем по формулам (14), (16).

Для отыскания неизвестной функции $p(x, y)$ получим интегральное уравнение, удовлетворяя граничному условию для осадки ω_1 при $z=0$:

$$\omega_0 - \omega_2 = -0,5 \lambda_1 \left\{ \frac{\alpha_3}{\lambda_1} \left[a_{66} - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_1} \right) (a_{44} \eta_1 + a_{55} \xi_1) \right] + \right. \\ \left. + 2a_2 (a_{66} - a_{44} \eta_1 - a_{55} \xi_1) \right\} (f_3 + f_4) - 0,5 \lambda_3 (a_{66} - \eta_3 a_{44} - \xi_3 a_{55}) f_6.$$

Напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства находится по формулам [1], описывающим упругое состояние, с учетом найденных потенциалов $T(x, \bar{y}, \bar{z})$, $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$.

Список литературы

1. Василевич Ю. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 61.
2. Прусов И. А., Василевич Ю. В. Там же. 1981. № 3. С. 39.

Поступила в редакцию 07.04.88.

УДК 519.21

В. П. КУРЕНОК

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ СНОСА ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА a^{-2}

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t, X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с начальным значением $x \in R$ и измеримой функцией $a: R_+ \times R \rightarrow R$, где процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ является винеровским. Пусть $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ — стохастический базис, где $\mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}$ — возрастающий поток σ -алгебр, удовлетворяющий естественным условиям [1, гл. 1, § 1]. Под $(X, \mathbf{F})$ будем понимать случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, согласованный с потоком $\mathbf{F}$, а под $(W, \mathbf{F})$ — винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$, который согласован с $\mathbf{F}$ и для которого при любых $t, \tau \geq 0$ приращения $W_{t+\tau} - W_t$ не зависят от F_t .

Определение 1 [2, гл. 4, § 1]. Решением уравнения (1) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ называется пара процессов $(X; W)$ таких, что

- 1) процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ является $\mathbf{F}$ -согласованным;
- 2) процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ является $(W, \mathbf{F})$ -винеровским;
- 3) для каждого $t \geq 0$ почти наверное (п. н.) имеет место соотношение

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s) dW_s.$$

В данной работе мы доказываем теорему существования решения уравнения (1), которая обобщает результаты Ершова [3] и Ватанабэ [4], где для существования решения предполагается либо липшицевость функции a^{-2} , ее ограниченность и невырожденность, либо ее непрерывность [4] по совокупности переменных.

Все встречающиеся далее соотношения между случайными величинами будем считать, если не оговорено противное, выполненными почти наверное.

Определение 2. Под случайной заменой времени (заменой времени) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ будем понимать такой процесс $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$, что

- 1) $\varphi_0 = 0$;
- 2) φ_t является непрерывной функцией;

$$3) \lim_{t \uparrow \infty} \varphi_t = \infty;$$

4) процесс φ является F-согласованным.

Для нахождения решения уравнения (1) применим метод замены времени. Известно [2, гл. 4, § 4] что, если на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; F)$ с винеровским процессом (W, F) существует решение уравнения

$$\varphi_t = \int_0^t a^{-2}(\varphi_s, W_s \div x) ds, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

являющееся заменой времени, то уравнение (1) тогда тоже имеет решение.

Приведем без доказательства один результат о слабой сходимости мер, соответствующих случайным процессам, который будем использовать при доказательстве теоремы.

Лемма [2, Гл. 1, Т. 4.2]. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана последовательность d -мерных процессов $(Y_t^n)_{t \geq 0}$, $n = 1, 2, \dots$, $d \geq 1$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$1) \text{ для любого } T > 0 \lim_{C \uparrow \infty} \sup_n P(\max_{t \leq T} |Y_t^n| > C) = 0;$$

$$2) \text{ для любых } T, \varepsilon > 0 \text{ и } t_1, t_2 \in [0, T] \lim_{h \downarrow 0} \sup_n P(\max_{|t_1 - t_2| \leq h} |Y_{t_1}^n - Y_{t_2}^n| > \varepsilon) = 0 \text{ (для векторов } z, y \in R^d \text{ } (z, y) \text{ обозначает их скалярное произведение, а } |z| = \sqrt{(z, z)} \text{ — длину вектора } z).$$

Тогда последовательность (Y^n) является слабо компактной, т. е. из любой подпоследовательности мер, соответствующих процессам (Y^n) , можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема. Если выполнены условия:

$$1) \text{ функция } a^{-2}(t, x) \text{ является непрерывной по } t \text{ при любом } x, (t, x) \in R_+ \times R;$$

$$2) \text{ существуют функции } g \in L^{loc} \text{ и } z \text{ с } l(\{x: z(x) > 0\}) > 0, \text{ где } l \text{ — мера Лебега, такие, что } z(x) \leq a^{-2}(t, x) \leq g(x), (t, x) \in R_+ \times R, \text{ то уравнение (1) имеет решение.}$$

Доказательство. По сделанному выше замечанию нам достаточно доказать, что существует замена времени $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющая уравнению (2) для некоторого винеровского процесса W .

Пусть $W^0 = (W_t^0)_{t \geq 0}$ — винеровский процесс на стохастическом базисе $(\Omega^0, F^0, P^0, F^0)$, где $F_t^0 = \sigma(W_s^0, 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$ — пополненные σ -алгебры. Очевидно, что процесс W^0 является (W^0, F^0) -винеровским. Для $n = 1, 2, \dots$ определим далее процессы:

$$\varphi_t^n = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{n}); \\ \int_0^{t - \frac{1}{n}} a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 \div x) ds, & t \geq \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (3)$$

Из условия 2) теоремы следует, что определение (3) корректно и процессы $(\varphi_t^n)_{t \geq 0}$, $n = 1, 2, \dots$ являются F^0 -согласованными. Проверим далее, что последовательность трехмерных процессов

$$\left(\varphi_t^n; \int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 \div x) ds; W_t^0 \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

является слабо компактной. С учетом условия 2) теоремы имеем для любых $T, C > 0$:

$$P\left(\sup_{t \leq T} \sqrt{(\varphi_t^n)^2 + \left(\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 \div x) ds\right)^2 + (W_t^0)^2} \geq C\right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq P\left(\sup_{t \leq T} \left[(\varphi_t^n)^2 + \left(\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds \right)^2 + (W_t^0)^2 \right] \geq C^2\right) \leq \\ &\leq P\left(\left[2 \left(\int_0^T g(W_s^0 + x) ds \right)^2 + \sup_{t \leq T} (W_t^0)^2 \right] \geq C^2\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично для $T, h, \varepsilon > 0$ и $t_1, t_2 \in [0, T]$ получаем:

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{|t_1 - t_2| \leq h} \sqrt{(\varphi_{t_1}^n - \varphi_{t_2}^n)^2 + \left(\int_{t_1}^{t_2} a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds \right)^2 + (W_{t_1}^0 - W_{t_2}^0)^2} > \varepsilon\right) \leq \\ &\leq P\left(\max_{|t_1 - t_2| \leq h} \left[2 \left(\int_{t_1}^{t_2} g(W_s^0 + x) ds \right)^2 + (W_{t_1}^0 - W_{t_2}^0)^2 \right] > \varepsilon\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует непосредственно, что последовательность процессов (4) удовлетворяет условиям леммы, т. е. существует подпоследовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ и предельный процесс $(\varphi'_t; \psi'_t; W'_t)$, к которому слабо сходятся при $k \rightarrow \infty$ процессы $\left(\varphi_{t_k}^{n_k}; \int_0^{t_k} a^{-2}(\varphi_s^{n_k}, W_s^0 + x) ds; W_{t_k}^0\right)$.

Для простоты будем полагать, что подпоследовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ совпадает с последовательностью $\{1, 2, \dots\}$.

Так как функционал $\int_0^t a^{-2}(\cdot, y(s)) ds$ является непрерывным на $C_{[0, T]}(R)$ для любого $T > 0$, то совместное распределение процессов ψ'_t и $\int_0^t a^{-2}(\varphi'_s, W'_s + x) ds$ совпадает с пределом совместного распределения процессов

$$\left(\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds; \int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds\right).$$

Отсюда следует, что для любого $T > 0$ $\psi'_t = \int_0^t a^{-2}(\varphi'_s, W'_s + x) ds$, $t \in [0, T]$, т. е. последовательность процессов (4) слабо сходится к процессу $\left(\varphi'_t; \int_0^t a^{-2}(\varphi'_s, W'_s + x) ds, W'_t\right)$, $t \geq 0$. Кроме того, $W' = (W'_t)_{t \geq 0}$ является винеровским процессом.

Покажем, что процесс $(\varphi'_t, W'_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет уравнению (2). Для $t = 0$ имеем $\varphi_0^n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ и, следовательно, $\varphi'_0 = 0$. Пусть $t > 0$. Тогда существует номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполнено $t - \frac{1}{n} > 0$. Для таких n получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_t^n - \int_0^{t - \frac{1}{n}} a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds &= \varphi_t^n - \int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds + \\ &+ \int_{t - \frac{1}{n}}^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0 + x) ds \end{aligned}$$

стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\varphi'_t = \int_0^t a^{-2}(\varphi'_s, W'_s + x) ds \quad (7)$$

с вероятностью единица.

Правая часть равенства (7) является непрерывной, поэтому процесс (φ'_t) является также непрерывным при $t \geq 0$.

Для любого фиксированного $T > 0$ процессы $(\varphi_t^n, W_t^0) (t \leq T)$ являются измеримыми относительно σ -алгебры F_T^0 , а приращения процесса (W_s^0) после момента времени T не зависят от F_T^0 . Следовательно, процессы $(\varphi_t^n, W_t^0) (t \leq T)$ не зависят от приращений процесса (W_s^0) после момента T . В силу того, что процессы $(\varphi_t^n, W_t^0) n = 1, 2, \dots$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ слабо к процессу (φ_t', W_t') , последнее имеет место и для предельного процесса, т. е. процесс $(\varphi_t', W_t') (t \leq T)$ не зависит от приращений процесса (W_s^0) после момента времени T . Таким образом, процесс W' является винеровским относительно пополненного потока σ -алгебр $F_t' = \sigma(\varphi_s', W_s'; 0 \leq s \leq t), t \geq 0$, а процесс φ' согласован с этим потоком. Кроме того, решение (φ', F') удовлетворяет и условию 3) определения 2, так как (см. [5, теорема 3])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a^{-2}(\varphi_s', W_{s_1}' + x) ds \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t z(W_s' + x) ds = \infty.$$

Таким образом, процесс $\varphi' = (\varphi_t')_{t \geq 0}$ является заменой времени.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М., 1986.
2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
3. Yershov M. P. // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 330. P. 527.
4. Watanabe S. // Appl. Math. Optim. 1975. V. 2. № 1. P. 90.
5. Engelbert H.-J., Schmidt W. // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1981. V. 36. P. 47.

Поступила в редакцию 08.10.87.

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, НГУЕН НГИА

ПОРЯДКОВО-ВЫПУКЛЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

В последнее время в теории дискретной оптимизации интенсивно разрабатываются аналоги выпуклости, которые служат удобным инструментом для построения алгоритмов решения задач дискретной оптимизации и анализа их эффективности (библиографию см. в [1]). В [2] введено понятие порядково-выпуклой функции на частично упорядоченном множестве, удовлетворяющем условию Жордана — Дедекинда, исследованы общие свойства таких функций. Настоящая заметка, являясь продолжением указанной работы, содержит изложение свойства порядково-выпуклых функций на целочисленной решетке Z^n .

Напомним, что функция $f: Z^n \rightarrow R$ называется порядково-выпуклой, если

$$f(x + e_i) \geq \frac{1}{2} [f(x) + f(x + e_i + e_j)] \quad \forall i, j = 1, \dots, n; \quad \forall x \in Z^n,$$

где e_i — i -й единичный вектор.

Приведем примеры порядково-выпуклых функций на Z^n :

1) $p(x) = -(x_1 + \dots + x_n)^2$ на Z^n ;

2) $q(x) = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n x_i + 1}$ на Z_+^n .

Утверждение. Пусть $f_1: R \rightarrow R$ — неубывающая выпуклая функция; $f_2: Z^n \rightarrow R$ — порядково-выпуклая функция. Тогда функция $f: Z^n \rightarrow R$, определенная правилом $f(x) = f_1(f_2(x))$, порядково-выпуклая.

Доказательство. В силу порядковой выпуклости функции f_2 справедливо неравенство

$$f_2(x + e_i) \geq \frac{1}{2} [f_2(x) + f_2(x + e_i + e_j)], \quad \forall i, j \in N, \quad \forall x \in Z^n,$$

откуда из выпуклости и монотонности функции f_1 получаем:

$$\begin{aligned} f_1(f_2(x + e_i)) &\geq f_1\left(\frac{1}{2} [f_2(x) + f_2(x + e_i + e_j)]\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} [f_1(f_2(x)) + f_1(f_2(x + e_i + e_j))], \end{aligned}$$

что означает порядково-выпуклость функции $f(x)$.

Из утверждения вытекает, что если $f_1: R \rightarrow R$ — неубывающая выпуклая функция, то $f(x) = f_1\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ — порядково-выпуклая функция. Например, функция $f(x) = -\exp(-x_1 - \dots - x_n)$ порядково-выпуклая на Z_+^n .

Правым и левым градиентами функции f будем называть следующие числа:

$$\begin{aligned} \Delta^+ f(x) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x + e_i) - f(x)\}; \\ \Delta^- f(x) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x) - f(x - e_i)\}. \end{aligned}$$

Теорема 1 [2]. Пусть f — порядково-выпуклая функция на Z^n . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1^\circ. f(y) \geq \frac{h(y, z)}{h(x, z)} f(x) + \frac{h(x, y)}{h(x, z)} f(z), \quad (1)$$

для каждой тройки $x, y, z \in Z^n$ такой, что $x \leq y \leq z$. (Здесь $h(x, y)$ — функция расстояния на Z^n).

2°. На конечной подрешетке $Z_k^n = \{x \in Z_+^n: x \leq k\}$ $f(x)$ является субмодулярной.

3°. Правый (левый) градиент является антитонной (изотонной) функцией на Z^n .

4°. Для каждой пары элементов $x, y \in Z^n$ таких, что $x \leq y$, справедливы неравенства:

$$-h(x, y) \Delta^- f(y) \leq f(y) - f(x) \leq h(x, y) \Delta^+ f(x).$$

Отметим, что неравенство (1) можно принять за определение порядково-выпуклой функции.

Функцию $g: Z^n \rightarrow R$ назовем сильно порядково-выпуклой с коэффициентом $\alpha > 0$, если

$$g(x + e_i) - \frac{1}{2} [g(x) + g(x + e_i + e_j)] \geq \alpha, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall x \in Z^n.$$

Очевидно, что функция $p(x)$ из примера 1 является сильно порядково-выпуклой с коэффициентом $\alpha = 1$.

Теорема 2. Если $f: R^n \rightarrow R$ — ограниченная функция (существует такая константа L , что $|f(x)| \leq L$ для любого $x \in R^n$), то ее сужение на Z^n может быть представлено в виде разности двух порядково-выпуклых функций.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — сильно порядково-выпуклая функция с коэффициентом α . Покажем, что требуемым представлением является следующее:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad \text{где } f_1(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{L}{\alpha} g(x), \quad f_2(x) = -\frac{f(x)}{2} + \frac{L}{\alpha} \times g(x).$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} f_1(x + e_i) - \frac{1}{2} [f_1(x) + f_1(x + e_i + e_j)] &= \frac{f(x + e_i)}{2} + \frac{L}{\alpha} g(x + e_i) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{2} + \frac{L}{\alpha} g(x) + \frac{L}{\alpha} g(x + e_i + e_j) + \frac{f(x + e_i + e_j)}{2} \right] = \\ &= \frac{L}{\alpha} \left\{ g(x + e_i) - \frac{1}{2} [g(x) + g(x + e_i + e_j)] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ f(x + e_i) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} [f(x) + f(x + e_i + e_j)] \right\} \geq \frac{L}{\alpha} \alpha + \frac{1}{2} (-L - L) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $f_1(x)$ — порядково-выпуклая функция. Аналогично доказывается порядковая выпуклость функции $f_2(x)$.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = h(x) + \frac{2L}{\alpha} g(x)$, где $h(x)$ — ограниченная константой L функция и $g(x)$ — сильно порядково-выпуклая функция с коэффициентом α , то $f(x)$ — порядково-выпуклая функция.

Следствие 1 указывает еще один способ построения порядково-выпуклых функций. Например, функция $f(x) = \sum_{i=1}^n \sin x_i + 2n \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ — порядково-выпуклая. Интересно отметить, что, если функция $f(x)$ является порядково-выпуклой на Z_+^n , она представима в виде суммы ограниченной и порядково-выпуклой функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = -q(x)$, $f_2(x) = f(x) + q(x)$ ($q(x)$ — функция, определенная в примере 2).

Следствие 2. Для любой функции f , определенной на конечном множестве Z_k^n , существует такая порядково-выпуклая функция $g(x)$, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \frac{f(x)}{2} + g(x)$ и $f_2(x) = \frac{f(x)}{2} - g(x)$, первая из которых порядково-выпуклая, а вторая — порядково-вогнутая.

Теорема 3. Пусть $f: R^n \rightarrow R$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица т. е.

$$f(x) - f(y) \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in R^n.$$

Тогда ее сужение на Z^n может быть представлено в виде разности двух порядково-выпуклых функций.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — некоторая сильно порядково-выпуклая функция с коэффициентом α . Нетрудно убедиться, что таким представлением является $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{L}{2\alpha} g(x) \text{ и } f_2(x) = -\frac{f(x)}{2} + \frac{L}{2\alpha} g(x).$$

Разложение $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ будем называть регулярным, если для функции $g(x)$ выполняются условия $g(x + e_i) - g(x) = \text{const}$ и $g(x - e_i) - g(x) = \text{const}$ для любого $i \in N$.

Нетрудно видеть, что, если в качестве функции $g(x)$ в доказательствах теорем 2 и 3 возьмем функцию $p(x)$, получим регулярные разложения функции $f(x)$.

Перейдем к формулировке условий локального максимума (сравни с [2]).

Теорема 4. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ — разложение целевой функции задачи $\max \{f(x): x \in Z_k^n\}$. Тогда для того чтобы x^0 являлся порядковым максимумом, достаточно, а в случае регулярности разложения и необходимо, выполнение неравенств:

$$\begin{aligned} \Delta^+ f_2(x^0) - \Delta^- f_1(x^0 + e_i) &\leq 0, \\ \Delta^- f_2(x^0) - \Delta^+ f_1(x^0 - e_i) &\leq 0 \end{aligned}$$

для любого $i \in N$.

Список литературы

1. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987.
2. Ковалев М. М., Миланов П. Б. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 9. С. 784.

Поступила в редакцию 13.03.87.

УДК 801.73:681.3

Н. К. РУБАШКО, И. В. СОВПЕЛЬ

АВТОМАТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ТЕКСТОВ ЕСТЕСТВЕННЫХ ЯЗЫКОВ. II

В первой части работы [1] в виде условия (*) дано формальное определение основных типов текстовых ошибок, возникающих в линии ЕЯ коммуникации. В качестве начальных условий решаемой задачи АКД нами рассматриваются следующие:

задан эталонный словарь D ;

в каждом слове $Y \in T_0$ возможна только одна, независимо от типа, ошибка;

абсолютно одна и та же ошибка для равных слов из T_0 возможна только один раз.

Для $Y_i \in T_1$, $i = \overline{1, n}$ обозначим: $X^{(i)} = \{X_\xi^{(i)}\}$, $\xi = \overline{1, r_i}$ — множество всех значимых слов языка L , попарно с Y_i удовлетворяющих условию (*), включая и Y_i , если Y_i — значимое слово.

Обозначим: $\lambda(Y_i)$ — частота Y_i в T_1 .

Пусть $Y_i, Y_j \in T_1$. Число $r = |i - j| - 1$ назовем расстоянием между Y_i и Y_j в T_1 , обозначим $r(Y_i, Y_j)$.

Общий алгоритм обнаружения и исправления ошибок для каждого слова $Y \in T_1$ может быть описан следующим образом.

Шаг 1. Начало.

Шаг 2. Если $Y_i \in D$, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 5.

Шаг 3. Если $|X^{(i)}| = 1$, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 12.

Шаг 4. Считать Y_i «правильным» словом и перейти к шагу 13.

Шаг 5. Если $\lambda(Y_i) = 1$, то считать Y_i ошибочным словом и перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 10.

Шаг 6. Если $|X^{(i)}| = 0$, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 8.

Шаг 7. Считать Y_i словом с «грубой» ошибкой и перейти к шагу 13.

Шаг 8. Если $|X^{(i)}| = 1$, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 11.

Шаг 9. Положить $Y_i = X_1^{(i)}$ и перейти к шагу 13.

Шаг 10. Считать Y_i «новым и правильным» словом и перейти к шагу 13.

Шаг 11. Выбрать из $X^{(i)}$ такое $X_\xi^{(i)}$, которое удовлетворяет S_1 и S_2 и положить $Y_i = X_\xi^{(i)}$. Перейти к шагу 13.

Шаг 12. Если в T_1 не существует Y_j такое, что $r(Y_i, Y_j) \leq 4$ и Y_j было обработано как ошибочное слово, то перейти к шагу 11, иначе — к шагу 4.

Шаг 13. Конец.

Замечание. При реализации алгоритма переход к шагу 12 осуществляется после того, как обработаны по остальным условиям все слова $Y_j \in T_1$ такие, что $r(Y_i, Y_j) \leq 4$. Оказалось, что если ошибки составляют примерно 0,55 % общего числа слов, то около 40 % из них — ошибки, приводящие к значимым словам. Учитывая это и то, что ошибки

распределяются более или менее равномерно в T_1 , сделано допущение, что расстояние между ошибочными словами не может быть меньше 4, и поэтому на шаге 12 при определенных условиях предпочтение отдается значимому слову из T_1 , которое признается «правильным». В этом еще раз проявляется отличие общего цикла формирования теории в области искусственного интеллекта от классического [2]. В «быстром» режиме работы системы АКД, когда используется только морфологический уровень языка, шаг 11 не является автоматической процедурой, а реализуется в диалоге. Случай $Y_i \notin D$, $\lambda(Y_i) = 1$ и $|X^{(i)}| = 0$ идентифицируется системой как случай «отказа».

Основным недостатком указанного варианта системы, реализованного для английского и русского языков, как и существующих систем подобного типа (см., например, [3]), является многозначность решения задачи АКД и невозможность автоматически идентифицировать случай $Y = l(X)$, где $Y \neq X$ и есть значимое слово языка L [4].

Предполагаются два метода реализации процедуры автоматического установления соответствия $X_{\xi}^{(i)} = X^{(i)}$ синтаксису S_1 и семантике S_2 языка L .

Процедуральный метод. В этом случае последовательно используются два критерия: принадлежность $X_{\xi}^{(i)} \in X^{(i)}$ словарному обороту языка L (множество словарных оборотов задается как подмножество в D) и принадлежность $X_{\xi}^{(i)} \in X^{(i)}$ определенному типу сегмента [5], устанавливаемому на этапе автоматического анализа T_1 . Сама процедура анализа строится на основании семантико-грамматической информации, заложенной в словаре системы АКД и правил вывода (ПВ) типа «если..., то...», для описания которых используются специальные КС-и НС-грамматики (подобный механизм используется в большинстве существующих экспертных систем). Таким образом, имеет место следующий общий П-алгоритм:

Шаг 1. Начало.

Шаг 2. Выяснить, существует ли в T_1 словарный оборот, содержащий $X_{\xi}^{(i)}$. Если да, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 4.

Шаг 3. Если $X_{\xi}^{(i)} = Y_i$, то считать Y_i «правильным» словом, если нет — ошибочным и положить $Y_i = X_{\xi}^{(i)}$. Перейти к шагу 5.

Шаг 4. Выполнить процедуру анализа T_1 , используя последовательно подстановку слов из множества $X^{(i)}$ вместо Y_i . В случае успешного завершения процедуры перейти к шагу 3, иначе — к следующему шагу.

Шаг 5. Конец.

П-алгоритм реализован для английского языка с помощью стратегии восходящего анализа. Объем массива ПВ — около 4 тыс. так называемых однозначных правил. При этом первый из указанных критериев оказывается достаточно сильным «фильтром», поскольку покрываемость T_1 словарными оборотами составляет до 22 %. Проблема снятия многозначности остается в ряде случаев, требующих полного семантического анализа. Кроме того, алгоритм, основанный на ПВ, очевидно, работает только с текстом, который «следует» этим правилам.

Декларативный метод. Информационную основу этого метода составляет словарь D , в котором для каждого $X_i \in D$ указано конечное множество его семантико-грамматических категорий (кодов) в соответствии с множествами S_1 и S_2 языка L . Кроме того, по результатам исследований достаточно большого по объему корпуса текстов известна частота $\lambda(k_i)$ каждого кода $k_i \in K$ и частота встречаемости $\lambda(k_i, k_j)$ любой пары кодов из K , где K — конечное множество попарно различных кодов слов в языке L . Наконец, на множествах D и K задана 4-значная функция вероятности $P(X_i, k_j)$, принимающая значения, которые тоже известны, из множества $\{0; 0,01; 0,1; 1\}$ и описывающая вероятность события «слово X_i имеет в языке L код k_j ».

Используя словарь D , поставим в соответствие для $X^{(i)}$ множество кодов $K^{(i)} = \{k_p^{(i)}\}$, $p = \overline{1, q_i}$. В то время как первый метод основан на выводе семантико-грамматических свойств текста, настоящий использует вероятностный подход к анализу ЕЯ и исходит из следующего утверждения.

Утверждение 1. Однородная цепь Маркова с конечным числом состояний является математической моделью грамматики, порождающей ограниченный ЕЯ.

Прежде всего решается задача выбора наиболее вероятного кода для Y_i из множества $K^{(i)}$, а затем Y_i заменяется на то слово из $X^{(i)}$, которому принадлежит выбранный код. Критерием выбора кода является $\max \{P_r(k_p^{(i)})\}$, $p = \overline{1, q_i}$, где $P_r(k_p^{(i)})$ — относительная вероятность кода $k_p^{(i)}$, рассчитываемая по формуле: $P_r(k_p^{(i)}) = \frac{P_a(k_p^{(i)})}{\sum_{j=1}^{q_i} P_a(k_j^{(i)})}$, где $P_a(k_j^{(i)})$ — абсолют-

ная вероятность кода $k_j^{(i)}$, которая вычисляется из соотношения $P_a(k_p^{(i)}) = P_{-1} \cdot P_0 \cdot P_1$, P_0 — 4-значная функция вероятности для данного кода и соответствующего ему слова из $X^{(i)}$; P_{-1} , P_1 — соответственно «предшествующая» и «последующая» вероятности, определяемые как рекурсивные функции, учитывающие предшествующий и последующий для Y_i контекст.

Утверждение 2. Контекст для вычисления абсолютной вероятности кода Y_i определяется в T_1 такой цепочкой $Y_m Y_{m+1} \dots Y_{i-1} Y_i Y_{i+1} \dots Y_{n-1} Y_n$, для которой $|K^{(m)}| = |K^{(n)}| = 1$ и $|K^{(i)}| > 1$ для $j = \overline{m+1, n-1}$.

Последовательность кодов, взятых по одному из множеств $K^{(m)}$, $K^{(m+1)}$, ..., $K^{(n)}$, назовем кодовой цепочкой для $k_j^{(i)}$. Если она содержит $k_j^{(i)}$, то назовем ее собственной цепочкой для данного кода. Величину $f_i = \frac{\lambda(k_i, \bar{k}_{i+1})}{\lambda(\bar{k}_i) \cdot \lambda(\bar{k}_{i+1})}$, где $\bar{k}_i$, $\bar{k}_{i+1}$ — элементы кодовой цепочки, назовем функцией относительной вероятности кода $\bar{k}_i$.

Обозначим: m_1 — общее количество кодовых цепочек для $k_j^{(i)}$; n_1 — количество его собственных цепочек; l_1 — длина кодовой цепочки; $P_{s\eta}$ и $F_{s\eta}$ — соответственно 4-значная функция и функция относительной вероятности η -го элемента 3-й цепочки.

Утверждение 3.

$$P_r(k_p^{(i)}) = \frac{\sum_{s=1}^{n_1} F_{s1} \prod_{\eta=2}^{l_1-1} F_{s\eta} P_{s\eta}}{\sum_{s=1}^{m_1} F_{s1} \prod_{\eta=2}^{l_1-1} F_{s\eta} P_{s\eta}}.$$

Таким образом, имеет место следующий общий Д-алгоритм.

Шаг 1. Начало.

Шаг 2. Каждому значимому слову $Y_i \in T_1$ поставить в соответствие подмножество $K^{(i)} \in K$ (виртуальная модель T_1 на уровне слов [5]).

Шаг 3. Слову Y_i , обрабатываемому общим алгоритмом АКД, в случае перехода к шагу 11 поставить в соответствие подмножества $K_1^{(i)}$, $K_2^{(i)}$, ..., $K_{r_i}^{(i)}$.

Шаг 4. Вычислить относительную вероятность каждого кода из подмножеств $K_1^{(i)}$, $K_2^{(i)}$, ..., $K_{r_i}^{(i)}$.

Шаг 5. Если Y_i значимое слово, то перейти к шагу 7.

Шаг 6. Считать Y_i ошибочным словом и положить $Y_i = X_k^{(i)} \in X^{(i)}$ такому, для которого относительная вероятность кода оказалась наибольшей. Перейти к шагу 8.

Шаг 7. Если относительная вероятность кода, соответствующего Y_i , оказалась наибольшей, то считать Y_i «правильным» словом и перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 6.

Шаг 8. Конец.

Замечание. Основным достоинством Д-алгоритма является его сравнительная простота и высокая эффективность, а также возможность обнаруживать и исправлять «грубые» ошибки в T_1 .

Список литературы

1. Рубашко Н. К., Совпель И. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1989. № 1. С. 48.
2. Klaus K. Obermeier, David de Hilster // Applications of Artificial Intelligence II. 1985. V. 548. P. 220.
3. Белоногов Г. Г., Штурман Я. П., Кузнецов Б. А., Поздняк М. В. // Вопросы информац. теории и практики. М., 1984. № 51. С. 24.
4. Atwell E. // ICAME NEWS. 1983. N 7. P. 13.
5. Совпель И. В. // Международный семинар по машинному переводу: Тез. докл. М., 1983. С. 205.

Поступила в редакцию 04.06.87.

УДК 519.1

В. Э. ЗВЕРОВИЧ, И. Э. ЗВЕРОВИЧ

О СВЯЗЫВАЮЩЕМ ЧИСЛЕ ГРАФОВ

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Неопределяемые понятия имеются в [1]. Связывающим числом [2] графа G с множеством вершин VG называется величина $\text{bind}(G) = \min_{X \in F} |N(X)| / |X|$ по всем $X \in F = \{X / \emptyset \neq X \subseteq VG, N(X) \neq VG\}$, где $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$, а $N(x)$ — множество вершин, смежных с x .

В [3] поставлена задача характеристики графов, для которых

$$\text{bind}(G) = \min_{X \in I} |N(X)| / |X|, \quad (1)$$

где I — семейство всех независимых множеств графа G . В работе рассматривается случай $\text{bind}(G) > 1$, поскольку при $\text{bind}(G) \leq 1$ результат известен.

Через n , δ , α обозначаются соответственно порядок, минимальная степень вершин и число независимости графа G , а через $\langle X \rangle$ — подграф графа G , индуцированный множеством $X \subseteq VG$.

Утверждение 1. Если $\text{bind}(G) = |N(X)| / |X| > 1$ и граф $\langle X \rangle$ имеет изолированную вершину, то $X \cup N(X) = VG$.

Доказательство. Допустим противное: $Z = VG \setminus (X \cup N(X)) \neq \emptyset$. Образует множество $Y = X \cup Z$. Очевидно, что между X и Z нет ребер, поэтому $N(Y) = N(X) \cup N(Z) \subseteq N(X) \cup Z$. Тогда

$$|N(X)| / |X| = \text{bind}(G) \leq |N(Y)| / |Y| \leq (|N(X)| + |Z|) / (|X| + |Z|). \quad (2)$$

Заметим, что если $\langle X \rangle$ не содержит изолированной вершины, то $N(Y)$, возможно, совпадает с VG , т. е. $Y \notin F$, и неравенством $\text{bind}(G) \leq |N(Y)| / |Y|$ пользоваться нельзя.

Из (2) следует, что $|N(X)| / |Z| \leq |X| / |Z|$, а поскольку $Z \neq \emptyset$, то $|N(X)| \leq |X|$ — противоречие с условием.

Утверждение 2. Если $\text{bind}(G) > 1$, то равенство (1) равносильно условию $\text{bind}(G) = n/\alpha - 1$.

Доказательство. Пусть U — наибольшее независимое множество графа G . Если $\text{bind}(G) = n/\alpha - 1$, то $\text{bind}(G) = |N(U)| / |U|$, т. е. справедливо (1). Пусть выполняется (1), т. е. существует $X \in I$, для ко-

торого $|N(X)|/|X| = \text{bind}(G)$. По утверждению 1 $N(X) \cup X = VG$, тогда $|N(X)| = |VG| - |X|$. Так как $|X| \leq \alpha$, то $|N(X)|/|X| = (|VG| - |X|)/|X| = |VG|/|X| - 1 \geq n/\alpha - 1$. Следовательно, $\text{bind}(G) \geq n/\alpha - 1$. Остается заметить, что $\text{bind}(G) \leq |N(U)|/|U| = n/\alpha - 1$. Утверждение доказано.

Утверждение 2 позволяет выделить некоторые классы графов, для которых $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах.

Предложение 1. Пусть $\text{bind}(G) > 1$. Если граф G имеет связность k и $2\alpha < n - k$, то $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах ((1) не выполняется).

Доказательство. Известно [4], что $\text{bind}(G) \leq (n + k)/(n - k)$. По условию $k < n - 2\alpha$, поэтому $\text{bind}(G) < n/\alpha - 1$. Остается применить утверждение 2.

Предложение 2. Пусть $\text{bind}(G) > 1$. Если $\delta < n - \alpha(n - 1)/(n - \alpha)$ для графа G , то $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах.

Доказательство. Как известно из [4], $\text{bind}(G) \leq (n - 1)/(n - \delta)$. Учитывая, что $\delta < n - \alpha(n - 1)/(n - \alpha)$, имеем $\text{bind}(G) < n/\alpha - 1$. Тогда предложение следует из утверждения 2.

При $2\alpha = n - k$ предложение 1 уже неверно. Предложение 2 также не выполняется, если $\delta = n - \alpha(n - 1)/(n - \alpha)$. Например, у графа G (см. рисунок) $k = 3$, $\alpha = 3$, $\delta = 5$, $n = 9$; $\text{bind}(G) = 2$ и достигается на независимом множестве $\{u, v, w\}$.

Множество $X \subseteq VG$ назовем полностью зависимым, если $|X| > 1$ и граф $\langle X \rangle$ связный.

Теорема 1. Пусть $\text{bind}(G) > 1$. Тогда $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах, если и только если:

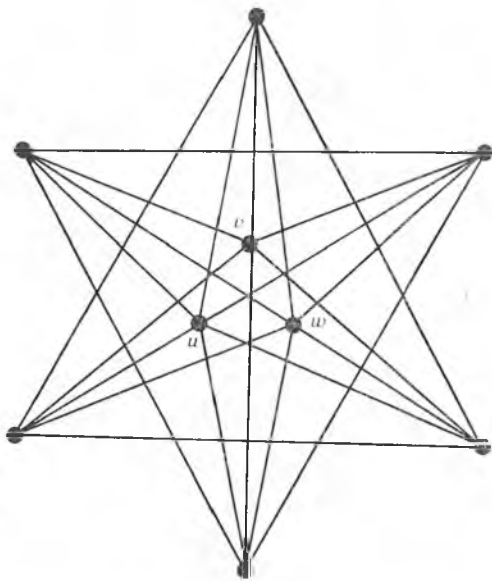
- (i) существует независимое множество $V \subseteq VG$, для которого $|N(V)| < n - \alpha(n - |V|)/(n - \alpha)$ или
- (ii) существует полностью зависимое множество $W \subseteq VG$, для которого $|N(W)| < n - \alpha$ и $|N(W)| < n - \alpha(n - |W|)/(n - \alpha)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняется одно из условий (i), (ii), а Y — одно из множеств $V \neq \emptyset$ или $W \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $X = VG \setminus N(Y)$.

Если $Y = V \neq \emptyset$, то из независимости V следует, что $Y \subseteq X$ и $X \neq \emptyset$. Так как $Y \in I$, $Y \subseteq X$ и $N(Y) \cap X = \emptyset$, то $|N(X)| \leq n - |Y| < n$, т. е. $X \in F$. Если же $Y = W \neq \emptyset$, то из условия (ii) $|N(Y)| < n - \alpha$ следует $X \neq \emptyset$. Множество Y полностью зависимо, поэтому $Y \subseteq N(Y)$, а значит, $Y \cap N(X) = \emptyset$ и $|N(X)| \leq n - |Y| < n$, т. е. $X \in F$. Таким образом, $X \in F$ и, следовательно, $\text{bind}(G) \leq |N(X)|/|X| \leq (n - |Y|)/(n - |N(Y)|) < n/\alpha - 1$. Последнее неравенство выполняется в силу того, что $|N(Y)| < n - \alpha(n - |Y|)/(n - \alpha)$. Остается применить утверждение 2.

Необходимость. Пусть равенство (1) не выполняется. Рассмотрим зависимое множество $X \in F$, для которого $|N(X)|/|X| = \text{bind}(G)$. По утверждению 2, $|N(X)|/|X| < n/\alpha - 1$. В множестве X выделим подмножество $X \supset V = \{x \in X, \deg_{\langle X \rangle} x = 0\}$.

Пусть $V \neq \emptyset$. Тогда по утверждению 1 $X \cup N(X) = VG$. Следовательно, $|N(X)| = n - |V|$. Покажем теперь, что $|X| = n - |N(V)|$, т. е. $N(V) = N(X) \setminus X$. Предположим, это равенство не выполняется. Тогда су-



существует множество $Z \neq \emptyset$ такое, что $Z \subseteq N(X) \setminus X$ и $N(V) \cap Z = \emptyset$. Рассмотрим множество $Y = X \cup Z$. Очевидно, что $|N(Y)| = n - |V| = |N(X)|$ и $Y \in F$, поэтому $|N(Y)|/|Y| = |N(X)|/(|X| + |Z|) < |N(X)|/|X|$ — противоречие с выбором множества X . Итак, $|X| = n - |N(V)|$ и тогда $\text{bind}(G) = |N(X)|/|X| = (n - |V|)/(n - |N(V)|) < n/\alpha - 1$, откуда $|N(V)| < n - \alpha \cdot (n - |V|)/(n - \alpha)$. Таким образом, если $V \neq \emptyset$, то выполняется условие (i).

Пусть теперь $V = \emptyset$. Рассмотрим множество $W = VG \setminus N(X)$. Так как $X \in F$, то $N(X) \neq VG$, поэтому $W \neq \emptyset$. Если $|W| = 1$, то для множества $Y = X \cup W$ верно $|N(Y)|/|Y| = |N(X)|/(|X| + 1) < |N(X)|/|X|$, что невозможно. Следовательно, $|W| > 1$.

Предположим, граф $\langle W \rangle$ несвязный и $\langle W' \rangle$ — некоторая компонента связности $\langle W \rangle$. Тогда для множества $Z = X \cup W'$ имеем $Z \in F$ и $|N(Z)|/|Z| \leq (|N(X)| + |W'|)/(|X| + |W'|) < |N(X)|/|X|$. Последнее неравенство выполняется в силу того, что $W' \neq \emptyset$ и $|N(X)| > |X|$. Получено противоречие с выбором X , поэтому граф $\langle W \rangle$ связный и множество W полностью зависимо.

Из $W = VG \setminus N(X)$ имеем $|N(X)| = n - |W|$. Докажем равенство $|X| = n - |N(W)|$, которое равносильно $N(X) \setminus X = N(W) \setminus W$. Допустим противное: существует $Z \neq \emptyset$, что $Z \subseteq N(X) \setminus X$ и $Z \cap N(W) = \emptyset$. Рассмотрим множество $Y = X \cup Z$. Очевидно, $|Y| = |X| + |Z|$, $|N(Y)| = |N(X)|$ и $Y \in F$. Тогда $|N(Y)|/|Y| = |N(X)|/(|X| + |Z|) < |N(X)|/|X|$, что противоречит выбору X . Следовательно, $|X| = n - |N(W)|$ и $\text{bind}(G) = |N(X)|/|X| = (n - |W|)/(n - |N(W)|) < n/\alpha - 1$, откуда $|N(W)| < n - \alpha(n - |W|)/(n - \alpha)$.

Предположим $|X| \leq \alpha$. Тогда $(n - |W|)/\alpha \leq (n - |W|)/|X| = |N(X)|/|X| < n/\alpha - 1$, откуда $|W| > \alpha$, т. е. $|W| > |X|$. Между множествами X и W нет ребер, причем из условия $\text{bind}(G) > 1$ следует, что граф G связный. Поэтому верно неравенство $n > |W| + |X|$, которое при $|W| > |X|$ равносильно $|N(X)|/|X| = (n - |W|)/|X| > (n - |X|)/|W| = |N(W)|/|W|$. Полученное противоречие доказывает неравенства $|X| > \alpha$ и $|N(W)| < n - \alpha$. Таким образом, если $V = \emptyset$, то выполняется условие (ii). Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\text{bind}(G) > 1$ и $\delta = n - \alpha$, то выполняется (1).

Доказательство. Допустим, что $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах. Тогда выполняется одно из условий (i), (ii) теоремы 1. Если выполняется (i), то существует независимое множество V , для которого $|N(V)| < n - \alpha(n - |V|)/(n - \alpha)$. Поскольку $|V| \leq \alpha$, то $|N(V)| < n - \alpha$. Если выполняется (ii), то существует полностью зависимое множество W , для которого $|N(W)| < n - \alpha$. По условию $\delta = n - \alpha$, поэтому $|N(X)| \geq \delta = n - \alpha$ для любого множества $X \subseteq VG$, $X \neq \emptyset$. Полученное противоречие доказывает следствие.

Следствие 2. Пусть $\text{bind}(G) > 1$ и $\alpha < \sqrt{n}$. Тогда (1) выполняется, если и только если $\delta = n - \alpha$.

Доказательство. Условие $\delta < n - \alpha(n - 1)/(n - \alpha)$ предложению 4 перепишем в виде $\delta < n - \alpha - (\alpha - 1)/(n/\alpha - 1)$. Так как δ, n, α — натуральные числа, то при $\alpha < \sqrt{n}$ последнее неравенство равносильно $\delta < n - \alpha$. Таким образом, если $\delta < n - \alpha$, то по предложению 2 равенство (1) неверно. Остается заметить, что для любого графа справедливо $\delta \leq n - \alpha$ и при $\delta = n - \alpha$ необходимо применить следствие 1. Доказательство завершено.

Следствие 2 не выполняется, если $\alpha = \sqrt{n}$. Граф на рисунке удовлетворяет этому условию, однако (1) верно, в то время как $\delta \neq n - \alpha$.

Из предложений 1, 2 и следствия 2 видно, что если $\text{bind}(G) > 1$, то, как правило, $\text{bind}(G)$ достигается только на зависимых множествах. Заметим, что почти всегда $\text{bind}(G) \geq 1$. Этот факт следует из результата Муна [5] о том, что почти все графы гамильтоновы и тривиальной оценки $\text{bind}(H) \geq 1$ для гамильтонова графа H .

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Woodall D. R. // J. Combin. Theory. Ser. B. 1973. V. 15. P. 225.
3. Borowiecki M. // Graphs, hypergraphs and matroids. Zielona Gora, 1985. P. 85.
4. Michalak D. Ibid. P. 45.
5. Moon J. // Canad. Math. Bull. 1972. V. 15. P. 39.

Поступила в редакцию 14.11.87.

УДК 517.948.32:517.544

С. Л. ШТИН

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В. Е. КРУГЛОВА

Пусть L — сложный кусочно-гладкий контур, расположенный в конечной части плоскости, а Λ — конечное множество точек из L , содержащее все переугулярные точки. Пусть, далее, $L_1, L_2, \dots, L_N$ — компоненты связности множества $L \setminus \Lambda$, и на каждом L_j задана невырожденная функциональная матрица $G_j(t)$ порядка n , удовлетворяющая условию Гельдера. Таким образом, на $L \setminus \Lambda$ задается матричная функция $G(t)$. Зададим еще на $L \setminus \Lambda$ H -непрерывный n -мерный вектор $g(t)$.

Рассмотрим матричную краевую задачу Римана: найти все векторы-столбцы $\Phi(z)$, голоморфные вне L , исчезающие на бесконечности, H -непрерывно продолжимые слева и справа на $L \setminus \Lambda$, где должно выполняться краевое условие

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L \setminus \Lambda.$$

Ограничимся тем случаем, когда $G(t)$ — подстановочная матрица, т. е. для каждого j матрица $G_j(t)$ является образом некоторой подстановки из S_n при мономиальном представлении. Частные случаи этой задачи изучались в работах Э. И. Зверовича, Л. И. Померанцевой [1] и В. Е. Круглова [2].

При решении матричной задачи Римана важное значение имеет изучение возможности редукции с помощью невырожденной линейной замены переменных данной n -мерной задачи к двум задачам меньшей размерности.

В работе [2] такая замена переменных указывается для $G(t) = S_3$ и S_4 и доказывается ее невозможность в случае $G(t) = S_5$. В связи с этими результатами В. Е. Круглов высказал в 1985 г. гипотезу о том, что линейная замена, редуцирующая n -мерную задачу Римана к задачам меньших размерностей, существует только для разрешимых групп подстановок.

В настоящей работе эта гипотеза опровергается. Приводится пример неразрешимой группы, для которой существует редуцирующая замена переменных. Перейдем к изложению этого примера. Мы укажем такую группу $G \subset S_8$ и такую матрицу $S \in GL(8, \mathbb{C})$, что для всех $g \in G$ будет иметь место равенство

$$(*) \quad S^{-1} g S = 1 \oplus P_g,$$

где P_g — некоторая мономиальная матрица порядка 7 (такая матрица может отличаться от подстановочной тем, что ее ненулевые элементы — произвольные числа из $\mathbb{C}^*$).

Рассмотрим подгруппу $G \subset S_8$, порожденную тремя элементами: $\sigma = (1234567)$, $\rho = (18)(24)(37)(56)$, $\tau = (23)(47)$. Очевидно, что $G = \langle \sigma, \rho, \tau \rangle \not\subset S_8$ при $k < 8$. Если не накладывать этого ограничения, то можно получить тривиальные контрпримеры ($S_n \supset S_{n-1} = G$ — неразрешимая подгруппа при $n \geq 6$ и $S = I_n$), которые не являются, однако, содержательными при рассмотрении краевой задачи Римана.

Рассмотрим в G подгруппу $\langle \sigma, \tau \rangle$. Можно доказать [3], что $\langle \sigma, \tau \rangle \cong PSL(3, 2)$, а последняя группа, как известно, проста. Следо-

вательно, наша группа G разрешимой не будет, так как в противном случае любая ее подгруппа должна была бы быть разрешимой. Теперь построим такую матрицу $S \in GL(8, \mathbb{C})$, что для всех $g \in G$ выполняется равенство (*). Достаточно установить, что это равенство имеет место для образующих σ, ρ, τ .

Если считать матрицы, представляющие элементы $g \in G$, матрицами линейных преобразований, записанными в каноническом базисе, то преобразование $g \mapsto S^{-1}gS$ можно интерпретировать как замену базиса. Выполнение равенства (*) означает тогда существование такого базиса $W_1, W_2, \dots, W_8$, для которого прямые $\langle W_i \rangle, i = 1, \dots, 8$ будут претерпевать под действием σ, ρ, τ некоторые перестановки, причем $W_1^\sigma = W_1^\rho = W_1^\tau = W_1$.

Рассмотрим следующую матрицу

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $S \in GL(8, \mathbb{C})$ и что σ, ρ, τ действуют на W_i следующим образом:

$$W_1^\sigma = W_1, W_2^\sigma = W_3, W_3^\sigma = W_4, W_4^\sigma = W_5, W_5^\sigma = W_6, W_6^\sigma = W_7, W_7^\sigma = W_8, \\ W_8^\sigma = W_2;$$

$$W_1^\rho = W_1, W_2^\rho = -W_2, W_3^\rho = -W_3, W_4^\rho = -W_4, W_5^\rho = W_5, W_6^\rho = -W_6, \\ W_7^\rho = W_7, W_8^\rho = W_8;$$

$$W_1^\tau = W_1, W_2^\tau = W_2, W_3^\tau = W_6, W_4^\tau = W_4, W_5^\tau = W_5, W_6^\tau = W_3, W_7^\tau = W_8, \\ W_8^\tau = W_7.$$

Отсюда следует, что множество матриц $S^{-1}GS$ действительно имеет вид $1 \oplus P_g$, где P_g — мономиальная матрица порядка 7.

В заключение отметим, что утверждение гипотезы относительно существования трансформирующего преобразования S в (*) для разрешимых подгрупп, возможно, верно. Здесь мы докажем ее для разрешимых подгрупп в S_p в том случае, когда p — простое число. В этом случае структура максимальных разрешимых подгрупп наиболее проста. Известно [4], что с точностью до сопряженности в S_p имеется одна максимальная разрешимая транзитивная подгруппа Γ_p . Эта группа имеет порядок $p(p-1)$ и состоит из всех подстановок вида: $h_{\alpha\beta}(x) = \beta x + \alpha$; $\alpha, \beta, x \in F_p, \beta \neq 0$ (если множество, на котором действует S_p , интерпретировать как конечное поле).

Покажем, что Γ_p порождается двумя образующими.

Известно, что мультипликативная группа F_p^* циклическая, т. е. $F_p^* = \langle \zeta \rangle$ для некоторого $\zeta \in F_p^*$.

Рассмотрим подстановки: $\sigma(x) = x + 1$ и $\tau(x) = \zeta x$, $\text{ord}(\sigma) = p$ и $\text{ord}(\tau) = p - 1$. Любая подстановка $h_{\alpha\beta} \in \Gamma_p$ представляется тогда следующим образом: $h_{\alpha\beta}(x) = \beta x + \alpha = \sigma^\alpha \tau^s(x)$, где s — такое целое число, что $\zeta^s \equiv \beta \pmod{p}$ (такое s всегда существует, так как $\beta \neq 0$ и ζ — образующий элемент).

Для того чтобы доказать равенство (*) для группы Γ_p , мы, как и выше, построим такой базис $W_0, W_1, \dots, W_{p-1}$ в $\mathbb{C}^n$, чтобы прямые $\langle W_i \rangle$

испытывали при действии элементов $\sigma, \tau \in \Gamma_p$ некоторые перестановки, причем вектор W_0 оставался бы неподвижным. (Он отвечает единице в прямом разложении $1 \oplus P_g$). Искомая матрица S будет тогда состоять из столбцов координат векторов W_i .

Заметим прежде всего, что, с точностью до растяжения, $W_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{p-1}$, где v_i — $(i+1)$ -й вектор стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$. Действительно, пусть $W_0 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}$. Тогда из условия $W_0^\sigma = W_0$ получаем:

$$(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1})^\sigma = \alpha_0 v_{\sigma(0)} + \alpha_1 v_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{p-1} v_{\sigma(p-1)} = \\ = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \dots + \alpha_{p-2} v_{p-1} + \alpha_{p-1} v_0 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Сравнивая коэффициенты, находим: $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1}$. Если $W_0, W_1, \dots, W_{p-1}$ — искомый базис, то, как уже было отмечено, каждый элемент $g \in \Gamma_p$ должен индуцировать некоторую подстановку π_g на множестве прямых $\langle W_0 \rangle, \dots, \langle W_{p-1} \rangle$, причем $\langle W_0 \rangle$ — неподвижная точка этой подстановки.

Посмотрим, какая подстановка π_σ отвечает образующей σ группы Γ_p . Ясно, что отображение $g \mapsto \pi_g$ — гомоморфизм групп. Из того, что σ — цикл порядка p , мы получаем, что $\text{ord}(\pi_\sigma) \mid p$. В силу простоты p для $\text{ord}(\pi_\sigma)$ есть только две возможности: $\text{ord}(\pi_\sigma) = p$ и $\text{ord}(\pi_\sigma) = 1$. Но первая из них означает, что π_σ — цикл порядка p , что противоречит условию $\pi_\sigma \langle W_0 \rangle = \langle W_0 \rangle$. Следовательно, $\text{ord}(\pi_\sigma) = 1$, т. е. π_σ — единичная подстановка.

Положим $W_1 = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}$. Из условия $\langle W_1 \rangle^\sigma = \langle W_1 \rangle$ получаем:

$$(\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1})^\sigma = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 v_2 + \dots + \alpha_{p-2} v_{p-1} + \alpha_{p-1} v_0 = \\ = \lambda(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{p-1} v_{p-1}).$$

Сравнивая коэффициенты, находим:

$$\alpha_{p-1} = \lambda \alpha_0, \alpha_{p-2} = \lambda \alpha_{p-1}, \dots$$

Таким образом, с точностью до растяжения,

$$W_1 = v_0 + \lambda^{p-1} v_1 + \lambda^{p-2} v_2 + \dots + \lambda v_{p-1}.$$

Равенство $\sigma^p = 1$ влечет $\lambda^p = 1$.

Если в качестве λ выбирать различные корни из единицы степени p , то получим $p-1$ различных векторов. Их мы и примем в качестве $W_1, W_2, \dots, W_{p-1}$. Убедимся, что векторы $W_0, W_1, \dots, W_{p-1}$ образуют базис. Для этого рассмотрим определитель:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^2)^{p-1} & \dots & (\lambda^{p-1})^{p-1} \\ 1 & \lambda^{p-2} & (\lambda^2)^{p-2} & \dots & (\lambda^{p-1})^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^2 & (\lambda^2)^2 & \dots & (\lambda^{p-1})^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{p-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^{p-1})^2 & \dots & (\lambda^{p-1})^{p-1} \\ 1 & \lambda^{p-1} & (\lambda^{p-1})^2 & \dots & (\lambda^{p-2})^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^2 & (\lambda^2)^2 & \dots & (\lambda^2)^{p-1} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Последний определитель — это определитель Вандермонда и поэтому отличен от нуля.

Осталось убедиться в том, что для каждой прямой $\langle W_i \rangle$ существует такая прямая $\langle W_j \rangle$, что $\langle W_i \rangle^\tau = \langle W_j \rangle$.

Мы покажем, что имеет место даже более точное соотношение: $W_i^\tau = W_j$. Поскольку все векторы W_i отличаются друг от друга лишь тем, что при их построении используются различные корни из единицы степени p , то достаточно установить, что найдется такой вектор W_i , для которого имеет место равенство $W_1^\tau = W_i$:

$$W_1^\tau = (v_0 + \lambda^{p-1} v_1 + \lambda^{p-2} v_2 + \dots + \lambda v_{p-1})^\tau = v_0 + \lambda^{p-1} v_{\bar{6}} + \lambda^{p-2} v_{2\bar{6}} + \\ + \dots + \lambda v_{(p-1)\bar{6}}$$

Здесь черта означает приведение по mod p .

Любой вектор W_i имеет вид: $v_0 + (\lambda^s)p^{-1}v_1 + (\lambda^s)^{p-2}v_2 + \dots + \lambda^s v_{p-1}$. Сопоставим векторам W_1^T и W_i подстановки π и Θ соответственно:

$$\pi = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & 2\bar{\xi} & \dots & (p-1)\bar{\xi} \\ p-1 & p-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 \\ s(p-1) & s(p-2) & \dots & s1 \end{pmatrix}.$$

Тогда доказательство существования вектора W_i сведется к доказательству существования такого целого числа s , для которого имеет место равенство $\pi = \Theta$ или, что равносильно, $\pi^{-1}\Theta = 1$. Берем произвольное k , $1 \leq k \leq p-1$, и действуем на него $\pi^{-1}\Theta$:

$$\begin{aligned} k &\mapsto \overline{\pi^{-1}(p-k)\bar{\xi}} \xrightarrow{\Theta} \overline{s(p-(p-k)\bar{\xi})} = \overline{s(p - -k\bar{\xi})} = \\ &= \overline{s(- -ks)} = \overline{s(-(p-1)k\bar{\xi})} = \overline{sk\bar{\xi}}. \end{aligned}$$

Если мы возьмем $s = \bar{\xi}^{p-2}$, то получим

$$\overline{sk\bar{\xi}} = \overline{\bar{\xi}^{p-1}k} = \bar{k} = k.$$

Таким образом, $\pi^{-1}\Theta = 1$, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Зверович Э. И., Померанцева Л. И. Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20.
2. Круглов В. Е. Частные индексы и одно приложение факторизации матриц подстановочного типа не выше четвертого порядка. Новосибирск, 1982.
3. Чарльз К. Симс. Вычислительные методы в изучении групп перестановок // Сб. переводов: Вычисления в алгебре и теории чисел. М., 1976.
4. Супруненко Д. А. Группы матриц. М., 1972.

Поступила в редакцию 20.09.88.

УДК 517.977

А. И. КАЛИНИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМИ И ОСОБЫМИ УЧАСТКАМИ

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем модели существенно упрощаются, если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых в том, что при их применении исходные задачи сводятся к коррекции решения более простых задач оптимального управления. В рамках теории оптимальных процессов асимптотическим методам уделяется значительное внимание (см. обзорные статьи [1—3]). В большинстве работ рассматриваются задачи с открытой областью управления, т. е. задачи вариационного типа. Оптимальные режимы в них являются гладкими функциями малого параметра, что не имеет места для задач оптимального управления в классической постановке, асимптотика которых изучена недостаточно полно.

Опишем подход, который позволил разработать конструктивные алгоритмы асимптотического решения широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач оптимального управления с замкнутыми множествами допустимых значений управляющих воздействий. В основе подхода лежит идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений. В задачах с прямыми ограничениями на значения управляющих воздействий в виде замкнутых неравенств оптимальные управления в общем случае имеют релейные, квазиособые и особые участки [4]. Точки переключения, моменты начала и конца квазиособых и особых режимов вместе с множителями Лагранжа являются удобными конечномерными элементами для описания оптимальных управлений

в возмущенных задачах: во-первых, по ним однозначно восстанавливаются оптимальные управления, во-вторых, что очень существенно с точки зрения теории возмущений, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. Если известна структура оптимального управления (под этим понимаются число и взаимное расположение точек переключения, квазисобых и особых участков), то с помощью принципа максимума [5] для указанных элементов можно составить систему алгебраических уравнений. Формируются эти уравнения путем интегрирования прямой и сопряженной систем, которые, как и исходная задача, являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах — классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных — метод пограничных функций [6]), можно разложить левые части алгебраических уравнений по целым степеням малого параметра, а затем найти асимптотику их решений, т. е. асимптотику точек переключения оптимального управления, начальных и конечных моментов квазисобых и особых режимов, а также множителей Лагранжа. Поскольку при таком подходе дело сводится к разложению конечномерных элементов, он удобен для численной реализации. Заметим, что идея использования структуры решений в асимптотическом анализе восходит к Ван-дер-Полю, который применил ее при исследовании колебательных режимов [7].

Таким образом, для реализации описанной схемы прежде всего нужно установить структуру оптимального управления в возмущенной задаче. В случае регулярных возмущений эта структура идентифицируется базовой задачей, которая формально получается из исходной, если малый параметр положить равным нулю. Не всегда решения возмущенной и базовой задач имеют одинаковую структуру. В качестве примера можно привести следующую задачу:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) + \frac{\mu}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^2(t) dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x^0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T = [t_*, t^*], \quad Hx(t^*) = g, \\ x &\in R^n, \quad u \in R, \quad g \in R^m, \quad m < n, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ — малый положительный параметр. Оптимальное управление в задаче (1) имеет квазисобые участки, в то время как решение базовой задачи носит чисто релейный характер. Тем не менее, в случае регулярных возмущений информации о решении базовой задачи, как правило, достаточно для нахождения структуры оптимального управления в возмущенной задаче. Сложнее обстоит дело с сингулярными возмущениями. В этом случае, как будет показано выше, не всегда представляется возможным найти структуру оптимального управления, опираясь на решение лишь одной невозмущенной задачи.

Изложенный подход реализован в виде конструктивных алгоритмов асимптотического решения следующих возмущенных задач оптимального управления (везде дальше малый параметр обозначается через μ и считается положительным).

В задаче терминального управления квазилинейной системой:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) + \mu d(x(t^*)) &\rightarrow \max, \\ \dot{x} &= A(t)x + \mu f(x, t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x^0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad Hx(t^*) + \mu h(x(t^*)) = g, \\ x &\in R^n, \quad u \in R, \quad g \in R^m, \quad m < n, \end{aligned}$$

оптимальное управление при нестеснительных предположениях относительно решения базовой задачи сохраняет его структуру, т. е. имеет релейный характер. Суть алгоритма [8, 9] состоит в построении асимптотики точек переключения оптимального управления в виде разложения по целым степеням μ . Вычисления сводятся к решению базовой задачи, которая в данном случае является линейной, интегрированию линейных

дифференциальных уравнений, а также к поиску решения линейных алгебраических систем. Этот алгоритм идейно близок к алгоритму асимптотического решения квазилинейной задачи быстрогодействия [10]. В такой задаче наряду с асимптотикой точек переключения строится асимптотическое разложение (по целым степеням μ) момента быстрогодействия.

Согласно принципу максимума, оптимальное управление в нормальной [11] задаче (1) имеет вид: $u^0(t, \mu) = \text{sat}(\Delta(t, \mu)/\mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, где $\Delta(t, \mu) = \psi'(t, \mu)b(t)$, а $\psi(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$ — решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad \psi(t^*) = -(c + H'v(\mu)).$$

Таким образом, оптимальное управление имеет квазисобые участки, на которых $|\Delta(t, \mu)/\mu| < 1$, и полностью определяется вектором множителей Лагранжа $v(\mu)$. Разработан алгоритм [12], позволяющий определить коэффициенты асимптотического разложения этого вектора, а также начальных и конечных моментов квазисобых режимов по целым степеням малого параметра. Оказывается, что коэффициенты при нечетных степенях μ в разложении $v(\mu)$ равны нулю.

В задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы:

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^{t^*} x' D(t) x dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x^0, \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad x \in R^n, \quad u \in R, \end{aligned}$$

и в задаче терминального управления нелинейной регулярно возмущенной системой:

$$\begin{aligned} \varphi(x(t^*)) \rightarrow \max, \\ \dot{x} = f(x, t, \mu) + b(x, t, \mu)u, \quad x(t_*) = x^0, \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad h(x(t^*)) = 0, \\ x \in R^n, \quad u \in R, \quad h: R^n \rightarrow R^m, \quad m < n, \end{aligned}$$

оптимальное управление в общем случае имеет релейные и особые участки. Для этих задач разработаны алгоритмы, позволяющие строить асимптотику точек переключения, начальных и конечных моментов особых режимов, а также множителей Лагранжа в виде разложений по целым степеням μ .

В сингулярно возмущенной задаче быстрогодействия:

$$\begin{aligned} \dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(0) = y^0, \quad y(T) = 0, \\ \mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(0) = z^0, \quad z(T) = 0, \\ |u(t)| \leq 1, \quad T \rightarrow \min, \quad y \in R^{n_1}, \quad z \in R^{n_2}, \quad u \in R, \end{aligned} \quad (2)$$

при условии, что матрица A_4 устойчивая, и некоторых других довольно общих предположениях точки переключения оптимального управления делятся на две группы. Первая состоит из точек, близких к соответствующим точкам переключения в задаче:

$$\begin{aligned} \dot{y} = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) y + (b_1 - A_2 A_4^{-1} b_2) u, \\ y(0) = y^0, \quad y(T) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad T \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3)$$

Вторая группа содержит точки переключения, отстоящие от момента быстрогодействия на величины порядка μ . Их число определяется числом точек переключения оптимального управления в задаче:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} = A_4 z + b_2 u, \quad s \leq 0, \quad z(s_1) = A_4^{-1} b_2, \quad z(0) = 0, \\ |u(s)| \leq 1, \quad \int_{s_1}^0 (u(s) + 1) ds \rightarrow \min \end{aligned} \quad (4)$$

с нефиксированной длительностью процесса.

Если задача (3) известна в литературе [2], это так называемая вырожденная задача, то задача (4) — новый элемент в теории сингулярных возмущений. В [13] предложен алгоритм асимптотического разло-

жения по целым степеням μ точек переключения оптимального управления и момента быстрогодействия в задаче (2). Аналогичный алгоритм разработан для задачи терминального управления линейной сингулярно возмущенной системой с ограничениями на правый конец траекторий, который также опирается на решения двух невозмущенных задач оптимального управления.

В основу алгоритма [14] асимптотического решения линейной задачи терминального управления системой нейтрального типа с малым запаздыванием:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t - \mu) + A_2\dot{x}(t - \mu) + bu(t), \\ x(t) &= \Phi(t), \quad t \in [t_* - \mu, t_*], \quad |u(t)| \leq 1, \quad Hx(t^*) = g, \\ x &\in R^n, \quad u \in R, \quad g \in R^m, \quad m < n, \end{aligned}$$

где $\|A_2\| < 1$, положены идеи, использовавшиеся для сингулярно возмущенных задач. Несмотря на то, что этот алгоритм опирается на решение лишь одной базовой задачи:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, \\ \dot{x} &= (E - A_2)^{-1}(A + A_1)x + (E - A_2)^{-1}bu, \quad x(t_*) = \Phi(t_*), \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad Hx(t^*) = g, \end{aligned} \quad (5)$$

асимптотические приближения к оптимальному управлению могут иметь точки переключения, близкие к конечному моменту t^* и отстоящие от него на расстояние, кратные запаздыванию. Остальные точки переключения, которые близки к соответствующим точкам в задаче (5), раскладываются по целым степеням μ .

Теоретическое обоснование всех алгоритмов опирается на теорему о неявной функции. Их развитие на системы с многомерным управлением не встречает принципиальных трудностей. Для каждой из рассмотренных задач разработана вычислительная процедура, позволяющая использовать полученные асимптотические приближения для точного решения задачи при заданном значении малого параметра.

Алгоритмы апробированы на некоторых прикладных задачах оптимального управления. Среди них задача о вертикальном подъеме ракеты-зонда [15] и задача управления звеном манипуляционного робота, математическая модель которой представляет собой задачу быстрогодействия для сингулярно возмущенной системы $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = z, \mu\dot{z} = -az - by_2 + u$.

Список литературы

1. Moiseev N. N., Chernousko F. L. // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. AC-26. P. 993.
2. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. // Матем. анализ (Итоги науки и техн.). 1982. Т. 20. С. 3.
3. Saksena V. R., O'Reilly J., Kokotovic P. V. // Automatica. 1984. V. 20. N. 3. P. 273.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М., 1973.
5. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
6. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
7. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М., 1935.
8. Габасов Р., Калинин А. И., Кириллова Ф. М. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 22.
9. Калинин А. И. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 3. С. 325.
10. Калинин А. И. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. № 3. С. 197.
11. Блис Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
12. Калинин А. И. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 6. С. 500.
13. Калинин А. И. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 880.
14. Горелик С. Б., Калинин А. И. // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Минск. 1989. С. 234.
15. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., 1978.



УДК 621.385.522

В. В. АПАНАСОВИЧ, И. Р. ГУЛАКОВ, Е. А. ЧУДОВСКАЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОДНОЭЛЕКТРОННОМ ФОТОПРИЕМНИКЕ

В работе [1] приведено описание моделирующего алгоритма и модели элементарных процессов образования одноэлектронного сигнала фотоэлектронного умножителя (ФЭУ). Модель программно реализована на ЕС-ЭВМ и содержит блок образования вторичных электронов на динодах, который позволяет генерировать их число, подчиняющееся распределению Пуассона; блок имитации пролета электронов между динодами и мимо одного из динодов в предположении, что времена пролета электронов между динодами распределены по экспоненциальному или нормальному законам; блок генерации послепулсусов, который учитывает явления, приводящие к образованию послепулсусов на выходе ФЭУ, такие как оптическая обратная связь, ионная оптическая обратная связь и экзотермическая эмиссия.

С помощью модели рассчитаны одноэлектронный отклик и амплитудные распределения импульсов ФЭУ с учетом явлений пролета электронов мимо динодов и побочных процессов, сопровождающих умножение электронов и приводящих к образованию послепулсусов.

Для более адекватного исследования механизмов формирования одноэлектронного отклика ФЭУ произведена модификация имитационной модели, позволяющая с большей степенью детализации воспроизводить процессы взаимодействия светового излучения с фотокатодом. Выполненная модификация позволяет учесть разброс времен пролета электронов через ФЭУ в зависимости от расстояния r зоны засветки до центра фотокатода и длины волны λ регистрируемого излучения.

Время преодоления электроном пути $d(r)$ от места засветки до первого динода определяется соотношением:

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2ad(r)} - v_0}{a},$$

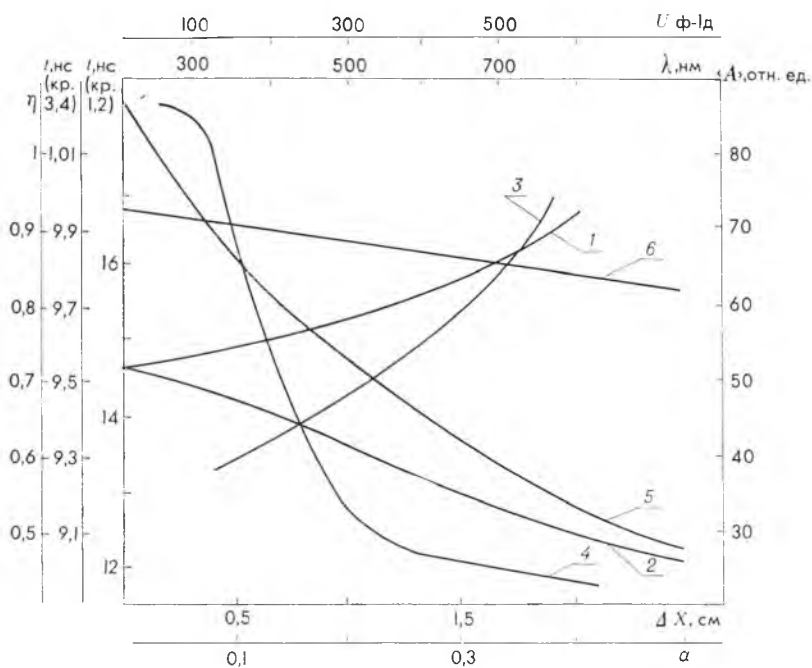
где a — ускорение, приобретаемое частицей в электрическом поле за время пролета расстояния $d(r)$: $a = \frac{e}{m} \frac{U}{d(r)}$; e , m — заряд и масса электрона соответственно; U — межкаскадное напряжение; v_0 — скорость вылета электрона с фотокатода, определяемая выражением

$$v_0 = \sqrt{2\Delta E e/m},$$

где ΔE — начальная энергия вылетевшего фотоэлектрона; $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} L$; h — постоянная Планка; c — скорость света; L — работа выхода материала фотокатода.

В модифицированном варианте предполагалось также, что число вновь образованных вторичных электронов в лавине зависит от места по-

падения на динод первичного электрона $n=n(x')$, и вычислялось оно согласно законам вторичной эмиссии, т. е. считалось, что направление их вылета практически не зависит от угла падения излучения и первичных электронов и подчиняется закону распределения косинусов: $n_i = n_0 \cos \varphi$, где n_0 — число электронов, выходящих по нормали; φ — угол выхода. Начальная энергия вылетающих из динода частиц соответствует распределению Релея.



Зависимость времени пролета электронов в ФЭУ от зоны засветки фотокатода (1), вероятности пролета электронов мимо динодов (2), длины волны регистрируемого излучения (3), напряжения между фотокатодом и первым динодом (4); зависимость средней амплитуды одноэлектронных импульсов (5) и квантовой эффективности регистрации при пороге дискриминации, равном $0,087 < A >$ (6), от вероятности пролета электронов мимо динодов

На имитационной модели выполнен ряд вычислительных экспериментов, с помощью которых получены зависимости среднего времени пролета электронов через ФЭУ как функции расстояния от центра до зоны засветки фотокатода для $\Delta x = 0 \div 20$ мм, вероятности пролета электронов мимо динодов $\alpha = 0 \div 0,5$ и длины волны регистрируемого излучения $\lambda = 300 \div 750$ нм при различных расстояниях d между фотокатодом и первым динодом и углах расположения первого динода по отношению к фотокатоду. Междинодное напряжение 200 В, расстояние между динодами 1 см. С целью сокращения затрат машинного времени при проведении экспериментов на данной модели число динодов бралось равным 4. С увеличением длины волны излучения возрастает среднее время пролета электронов через ФЭУ (см. рисунок), причем среднее его изменение составляет приблизительно 1,5 пс/нм, что хорошо совпадает с результатами эксперимента [2]. Расширение зоны засветки фотокатода ухудшает временное разрешение фотоприемника. С ростом коэффициента пролета электронов мимо динодов возрастает отклонение амплитудного распределения импульсов от пуассоновского распределения, характерного для «идеального ФЭУ», увеличивается амплитуда пролетных предимпульсов, уменьшаются средняя амплитуда одноэлектронных импульсов $< A >$ и квантовая эффективность регистрации η , причем чем меньше уровень дискриминации, тем слабее эта зависимость. На рисунке представлена

и зависимость среднего времени пролета электронов от напряжения между фотокатодом и первым динодом $U_{\phi-1д}$ при напряжении между остальными динодами 200 В. С повышением этого напряжения уменьшается среднее время пролета электронов, причем при $U_{\phi-1д}=300$ В эта зависимость переходит в насыщение. Вклад межэлектродного промежутка фотокатод — первый динод в разброс времени пролета является доминирующим по сравнению с другими межэлектродными промежутками.

Разработанная эмитационная модель фотоэлектронного умножителя позволила также исследовать процесс формирования импульсов тока сцинтилляционного спектрометра. Изучено влияние параметров сцинтилляций (числа фотонов, спектрального состава, длительности и относительной интенсивности компонентов сцинтилляций) на амплитудное разрешение спектрометра. Расчеты на имитационной модели показали, например, что амплитудное разрешение ФЭУ зависит от спектрального состава и интенсивности сцинтилляций. С увеличением λ от 400 до 600 нм разрешение уменьшается приблизительно на 2 %. Это связано с уменьшением начальных скоростей вылета электронов с фотокатода при возрастании λ , что приводит к увеличению сбора электронов на первый динод и амплитуды сцинтилляционных импульсов, а также улучшению разрешения.

Таким образом, разработанная модель, достаточно полно отражая реальные механизмы функционирования ФЭУ в одноэлектронном режиме, позволяет дать рекомендации по выбору оптимальных условий его работы.

Список литературы

1. Апанасович В. В., Гулаков И. Р., Чудовская Е. А. // Оптико-механ. промышленность. 1989. № 3. С. 45.
2. Ветохин С. С., Гулаков И. Р. // Журн. приклад. спектроскопии. 1986. Т. 45. № 1. С. 152.

Поступила в редакцию 28.11.88.

УДК 621.383

С. С. ВЕТОХИН

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ СЧЕТЧИКА ФОТОНОВ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ РЕГИСТРИРУЕМОГО СВЕТОВОГО ПОТОКА

В фотометрии слабых световых сигналов методом счета фотонов модуляция регистрируемого излучения применяется, как правило, лишь для учета аддитивных компонентов темнового или фоновозного характера [1, 2]. Однако на практике встречаются задачи, когда это излучение модулируется паразитными процессами с неизвестными характеристиками. При этом точность измерений снижается, а обычные радиотехнические методы фильтрации становятся неэффективными. В этой связи ниже приведен расчет отношения сигнал/шум, обеспечиваемого счетчиком фотонов при гармонической модуляции светового потока.

Пусть глубина модуляции регистрируемого светового сигнала вносящим помеху процессом $m \leq 100$ %. Тогда средняя скорость счета фотонов (или одноэлектронных импульсов [3]) n_c изменяется во времени по закону

$$n_c = n_0[1 - m(1 - \cos \omega t)/2], \quad (1)$$

где ω — частота модуляции; n_0 — средняя скорость счета в отсутствие модуляции. При этом средней скорости счета фотонов за период соответствует величина $n_0(1 - m/2)$. Ожидаемое за время τ число зарегистрированных фотонов:

$$N_c = \int_0^{\tau} n_c dt = n_0 (1 - m/2) \tau + \frac{mn_0}{2\omega} \sin \omega \tau. \quad (2)$$

При пуассоновской, наиболее распространенной в экспериментах по счету фотонов, статистике отсчетов дисперсия первого члена в (2) равна $D_1 = n_0(1 - m/2)^2$. При расчете дисперсии второго члена в (2) в силу неизвестности частоты модуляции и отсутствия синхронизации между модулирующим воздействием и началом счета фазу гармонической функции следует полагать величиной случайной. Из-за отсутствия априорной информации распределение фазы можно принять равномерным в интервале $[0, 2\pi]$, что даст дисперсию гармонической функции, равную $1/2$. Тогда для числа зарегистрированных фотонов с учетом независимости случайных фазы и скорости счета дисперсия второго члена в (2): $D_2 = n_0 m^2 (n_0 + 1/\tau) / 8\omega^2$. На практике, очевидно, можно потребовать, чтобы $n_0 \gg 1/\tau$, т. е. за интервал счета регистрируется заметное число фотонов, тогда дисперсия N_c :

$$D_c = n_0 (1 - m/2)^2 \tau + n_0^2 m^2 / 8\omega^2. \quad (3)$$

Пусть темновые и фоновые отсчеты, также подчиняющиеся пуассоновской статистике, увеличивают регистрируемую скорость счета на n_τ , так что измеряемое ее значение становится $n = n_c + n_\tau$, а число отсчетов $N = N_c + N_\tau$ соответственно. Для определения N_c следует дополнительно измерить N_τ (для простоты также за время τ , хотя при оптимизации времени измерения продолжительность накопления аддитивного компонента может быть сокращена [4]) и вычислить $N_c = N - N_\tau$. Тогда дисперсия N_c будет складываться из дисперсий N и N_τ :

$$D_c = n_0 (1 - m/2)^2 \tau + n_0^2 m^2 / 8\omega^2 + 2n_\tau \tau, \quad (4)$$

что при $\tau \gg |\sin \omega \tau| / \omega$ (это условие позволяет пренебречь в (2) вторым членом) дает отношение сигнал/шум:

$$\rho = \sqrt{n_0 \tau (1 - m/2)^2 / [(1 - m/2)^2 + n_0 m^2 / 8\omega^2 \tau + 2n_\tau / n_0]}. \quad (5)$$

Анализ выражения (5) показывает, что наличием модуляции обусловлена добавка в знаменателе, вклад которой уменьшается с увеличением частоты модуляции и продолжительности измерений.

При использовании коротких интервалов времени, когда $\tau \ll 1/\omega$ и $n_0 \ll 1/\tau$, оказывается, что $D_2 = n_0 m^2 / 8\omega^2 \tau$, а отношение сигнал/шум (5) преобразуется к виду:

$$\rho = \sqrt{n_0 \tau (1 - m/2)^2 / [(1 - m/2)^2 + m^2 / 8\omega^2 \tau^2 + 2n_\tau / n_0]} \quad (6)$$

и демонстрирует более резкую зависимость от продолжительности измерений.

В заключение отметим, что в (5) зависящий от частоты член доминирует, как правило, в знаменателе. При этом $\rho = \omega \tau (1 - m/2) \sqrt{8/m}$ и перестает зависеть от величины регистрируемого сигнала. В (6) этот член, напротив, чаще всего мал, и при $n_\tau \ll n_0$ оказывается, что $\rho = \sqrt{m_0 \tau}$ и соответствует [5] случаю большого сигнала для стационарного пуассоновского потока фотонов.

Список литературы

1. Ареччи, Гатти, Сона // Приборы для научных исследований. 1966. № 7. С. 128.
2. Ветохин С. С. // Оптико-механич. промышленность. 1985. № 12. С. 9.
3. Ветохин С. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 3. С. 8.
4. Ветохин С. С. // Оптико-механич. промышленность. 1985. № 10. С. 3.
5. Ветохин С. С., Гулаков И. Р., Перцев А. Н., Резников И. В. Одноэлектронные фотоприемники. М., 1986. С. 7.

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим стационарную систему

$$A_0 \dot{x}(t) = A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad (1)$$

где x — n -вектор траектории; u — r -вектор управления; A_0, A_1, B — матрицы соответствующих размеров; $h > 0$ — вещественное число. Система (1) является частным случаем систем с запаздыванием [1], не разрешенных относительно производной.

Целью данной работы является изучение связи между полной управляемостью системы (1) и управляемостью линейной системы

$$A_0 \dot{x}(t) = A_1 x(t) + Bu(t). \quad (2)$$

Управляемость систем (1) и (2) подразумевается в смысле работ [1, 2].

Имеет место следующая

Теорема. Система (1) полностью управляема тогда и только тогда, когда управляема система (2).

Отметим основные этапы в доказательстве этой теоремы. Из [1] следует, что для полной управляемости системы (1) необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} \text{rank } [A_0; B] = \text{rank } [A_0; A_1; B], \\ \text{rank } [\lambda A_0 - A_1 e^{-\lambda h}; B] = \text{rank } [A_0; A_1; B]. \end{cases} \quad (3)$$

Легко видеть [3], что второе условие из (3) эквивалентно соотношению

$$\text{rank } [\lambda e^{\lambda h} A_0 - A_1; B] = \text{rank } [A_0; A_1; B].$$

Отсюда в силу того [4], что для любого комплексного числа μ уравнение $\lambda e^{\lambda h} = \mu$ всегда разрешимо относительно λ , получаем, что условия (3) равносильны равенствам:

$$\begin{cases} \text{rank } [A_0; B] = \text{rank } [A_0; A_1; B], \\ \text{rank } [\mu A_0 - A_1; B] = \text{rank } [A_0; A_1; B], \end{cases}$$

являющимся [1, 2] критерием управляемости системы (2).

Следствие. Для полной управляемости системы (1) необходима и достаточна полная управляемость системы

$$A_1 \dot{x}(t) = A_0 x(t-h) + Bu(t). \quad (4)$$

Действительно, из [2] следует, что система (2) управляема тогда и только тогда, когда управляема симметричная ей система

$$A_1 \dot{x}(t) = A_0 x(t) + Bu(t). \quad (5)$$

Отсюда в силу полученной выше теоремы заключаем, что, во-первых, полная управляемость системы (1) эквивалентна управляемости системы (5) и, во-вторых, полная управляемость системы (4) равносильна управляемости системы (5). Значит, системы (1) и (4) одновременно либо полностью управляемы, либо не управляемы.

З а м е ч а н и е. Приведенные результаты позволяют, с одной стороны, свести изучение управляемости некоторых систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производной, к изучению управляемости соответствующих систем, разрешенных относительно производной, и, с другой, — получить в ряде случаев параметрические критерии управляемости рассматриваемых систем. Например, в силу следствия получаем, что критерий полной управляемости n -мерной стационарной системы

$$A \dot{x}(t) = x(t-h) + Bu(t), \quad (6)$$

где A — $n \times n$ -матрица, совпадает с критерием полной управляемости системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t). \quad (7)$$

В свою очередь, из полученной выше теоремы следует, что полная управляемость системы (7) эквивалентна управляемости системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

параметрический критерий управляемости которой хорошо известен [5]:

$$\text{rank}[B; AB; \dots; A^{n-1}B] = n. \quad (8)$$

Значит, условие (8) является параметрическим критерием управляемости как системы (7), так и системы (6).

Список литературы

1. Булатов В. И. // Управление многосвязными системами: V Всесоюз. совещ. Тбилиси, 1984 / М.: Ин-т проблем управления, 1984. С. 78.
2. Булатов В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 1. С. 63.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
4. Маркушевич А. И. Целые функции. М., 1975.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1977.

Поступила в редакцию 26.12.88.

УДК 517.988.8;517.983

Т. А. МАКАРЕВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ K -РАДИУС ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работах [1, 2] предложено новое обобщение принципа Банаха — Каччиополли сжимающих отображений на операторы в K -метрических пространствах, удовлетворяющих условию Липшица:

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leq Q\rho(x_1, x_2), \quad (1)$$

с коэффициентом Q — линейным или нелинейным оператором, действующим в пространстве B значений K -метрики. Это обобщение основано на использовании нового понятия — спектрального K -радиуса $r(Q)$ оператора Q , также являющегося оператором в пространстве B и обладающего свойствами, аналогичными свойствам обычного числового спектрального радиуса. В частности, достаточным условием существования неподвижной точки удовлетворяющего условию Липшица (1) оператора A в секвенциально полном K -метрическом пространстве X будет неравенство $r(Q)u_0 < 1$ при подходящем $u_0 \in B$, и, таким образом, применение новой теоремы о неподвижной точке требует умения вычислять или достаточно хорошо оценивать спектральный K -радиус конкретных операторов Q . Естественно, наиболее важен здесь случай, когда оператор Q линейный.

Соответствующие вычисления в [1, 2] с достаточной полнотой проведены лишь для случая, когда пространство B конечномерное. Настоящая работа посвящена более трудному случаю, когда B — некоторое пространство последовательностей. Наиболее естественное из таких пространств — пространство s всех последовательностей — ненормируемое и поэтому часто непригодно во многих приложениях. Это приводит к необходимости изучения спектрального K -радиуса в пространствах последовательностей, являющихся подпространствами s , которые с подходящей нормой, порождающей более сильную, чем в s , сходимость, оказываются банаховыми.

Наибольший интерес представляют пространства l_p ($1 \leq p \leq \infty$) и $c_0 = l_\infty$. Именно они и рассматриваются в данной работе.

1. Ниже X — одно из пространств l_p или c_0 , а Q — линейный оператор, заданный при помощи бесконечной матрицы с неотрицательными элементами q_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots$).

Теорема 1. Пусть Q является ограниченным оператором в X . Тогда при любом $u_0 \in X$

$$r(Q)u_0 \leq \rho_X(Q), \quad (2)$$

где $\rho_X(Q)$ — спектральный радиус Q в X .

Предположение, что Q действует в одном из пространств l_p или c_0 , естественно сформулировать в терминах коэффициентов матрицы Q . Для случаев l_1 , l_∞ и c_0 здесь известны необходимые и достаточные условия (см. [3—5]); для l_p ($1 < p < \infty$) существуют лишь достаточные признаки. Нами приводится новое утверждение, аналогичное соответствующему утверждению для интегральных операторов из [6]. Для его формулировки введем величины:

$$u_{r,k}(Q) = \|u_i\|_k \quad (u_i = \|q_{ij}\|_r),$$

$$v_{r,k}(Q) = \|v_j\|_k \quad (v_j = \|q_{ij}\|_r)$$

($0 \leq r, k \leq \infty$); здесь $\|\xi\|_p$ ($0 < p \leq \infty$) — «норма»:

$$\|\xi\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} & \text{при } 0 < p < \infty, \\ \sup_i |\xi_i| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $u_{r_1, k_1}(Q)$, $u_{r_2, k_2}(Q) < \infty$; пусть числа $p, \lambda, r_1, k_1, r_2, k_2$ удовлетворяют неравенствам, $0 < \lambda < 1$, $0 \leq \frac{1-\lambda}{r_1} + \frac{\lambda}{r_2}$, $\frac{1-\lambda}{r_1} + \frac{\lambda}{m_2}$, $\frac{1-\lambda}{m_1} + \frac{\lambda}{r_2} \leq 1$ и неравенствам $\frac{1-\lambda}{m_1} + \frac{\lambda}{r_2} \leq \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1-\lambda}{r_1} - \frac{\lambda}{m_2}$. Тогда Q ограничен в l_p , причем $\|Q\| \leq u_{r_1, k_1}(Q)^{1-\lambda} u_{r_2, k_2}(Q)^\lambda$. Более того, можно утверждать, что Q компактен, если или $m_1 < \infty$, или $m_2 < \infty$, или $m_1 = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{r_1, m_1}(Q^{(n)}) = 0$ или $m_2 = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{r_2, m_2}(Q^{(n)}) = 0$; здесь $Q^{(n)}$ — матрица с элементами $q_{i, j+n}$, а $Q^{(n)}$ — с элементами $q_{i+n, j}$.

2. Применение описанных результатов к анализу спектрального K -радиуса $r(Q)$ в пространствах l_p ($1 \leq p \leq \infty$) и c_0 позволяет получить для него лишь крайне грубые оценки сверху, основанные на использовании неравенств (2) и $\rho_p(Q) \leq \|Q\|$. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько может быть уточнен результат теоремы 1. В конечномерном случае в (2) почти для всех u_0 имеет место знак равенства. Подобная ситуация, к сожалению, есть и в бесконечномерном случае. Верна следующая

Теорема 3. Пусть Q — компактный оператор в l_p и элементы матрицы Q удовлетворяют неравенствам $q_{ij} \geq u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, \dots$), где $(u_i) \in l_p$, $(v_j) \in l$ с положительными координатами. Тогда для каждого ненулевого $u_0 \in l_p$ справедливо равенство $r(Q)u_0 = \rho_p(Q)$, при этом $\rho_p(Q) > 0$.

3. Для приложений наибольший интерес представляют ситуации, когда неравенство (2) является строгим. Здесь удается получить лишь частные результаты.

Рассмотрим матрицу вида

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & T_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & T_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где T_j ($j = 1, 2, \dots$) и 0 — матрицы-блоки размера $k \times k$.

Теорема 4. Пусть $u_0 = (u_1^*, \dots, u_n^*, \dots) \in s$. Тогда справедливо неравенство $r(Q)u_0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k^*} \cdot H(Q)$, где $H(Q)$ — блок-вектор, определенный равенством $H(Q) = (\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{T_1 \dots T_k} 1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{T_{n+1} \dots T_{n+k-1}} 1, \dots)$, 1 — единичный k -мерный вектор.

В заключение автор выражает благодарность профессору П. П. Забрейко и доценту А. Б. Антоневичу за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Забрейко П. П., Макаревич Т. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 53.
2. Забрейко П. П., Макаревич Т. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1497.
3. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
4. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
6. Забрейко П. П. К теории интегральных операторов II. Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 80.
7. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
8. Красносельский М. А., Липшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М., 1985.

Поступила в редакцию 01.03.89.

УДК 539.107.43

О. М. Аншаков, Л. М. Афанаснадн, Ю. Л. Змушко, Ю. М. Литвинович, В. А. Чудаков. Исследование процесса светособирания в протяженном детекторе на основе жидких сцинтилляторов. № 566-В89. Деп. от 24.01.89 в ВИНТИ.

Описаны методика и экспериментальная установка для исследования эффективности каналов собирания света радиолюминесценции на фотокатод фотоэлектронного умножителя в протяженном сцинтилляционном детекторе (ПСД). Приводятся результаты исследования ПСД с оловосвинцово-содержащим жидким сцинтиллятором на основе α -метилнафталина.

УДК 539.1

О. В. Мисевич, А. Л. Холмский, В. А. Чудаков, Г. П. Шпенков. Мёсбауэровские исследования анизотропии структуры поверхностного слоя нержавеющей стали после шлифования. № 693-В89. Деп. от 31.01.89 в ВИНТИ.

Обнаружена деформация решетки нержавеющей стали X18H9T в поверхностном слое 100 нм после шлифования. Получены косвенные данные, свидетельствующие о существовании в мёсбауэровском спектре нержавеющей стали неразрешенного дублета квадрупольного расщепления.

УДК 537.876.4

П. В. Авласенко, М. А. Вилькоцкий, В. П. Кныш. Резонансный отражательный микроволновый транспарант. № 690-В89. Деп. от 31.01.89 в ВИНТИ.

Проанализированы возможности оптимизации резонансного отражательного микроволнового фотоуправляемого транспаранта. Получена эмпирическая зависимость между резонансной частотой и другими электродинамическими параметрами системы. Проведены экспериментальные исследования транспаранта с резонансной частотой 9,75 ГГц и полосой пропускания 0,65 ГГц, подтвердившие применимость предложенной расчетной модели для проектирования транспарантов толщиной не менее 0,18 резонансной длины волны. Применение резонансных фотоуправляемых дифракционных структур позволяет создавать согласованные отражательные транспаранты толщиной менее четверти рабочей длины волны электромагнитного излучения.

УДК 519.6

Л. А. Раевская. Выпуклая оболочка матриц линейных расстояний. № 691-В89. Деп. от 31.01.89 в ВИНТИ.

Для заданной последовательности $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ целочисленных точек в R^1 вводится множество матриц линейных расстояний

$$M_n(a) = \{D\pi(a) = A(\pi)D(a)A^T(\pi), \pi \in S_n\}.$$

Здесь $D(a) = \| |a_j - a_i| \|_{n \times n}$; S_n — множество всех перестановок на множестве из n элементов; $A(\pi)$ — перестановочная матрица, соответствующая перестановке π . Исследуется выпуклая оболочка множества $M_n(a)$. Приводятся свойства матриц из $M_n(a)$ и алгоритм их распознавания. Определяется множество вершин $\text{conv } M_n(a)$ и исследуется свойство смежности.

УДК 681.3.08

Н. Е. Паромчик. О взаимосвязи старших производных интерполяционных полиномов. № 710-В89. Деп. от 07.02.89 в ВИНТИ.

Сформулирована и доказана теорема о взаимной связи производных m -го и $(m+1)$ -го порядка интерполяционных полиномов порядка $m+1$ с производным m -го порядка интерполяционных полиномов порядка m .

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения.

УДК 578.008.5:621.317

А. В. Бураков, Д. А. Диухе, А. М. Янченко. Простой коммутатор обмоток шаговых двигателей, управляющий движением двухкоординатного столика. № 1029-В89. Деп. от 17.02.89 в ВИНТИ.

Разработанный коммутатор позволяет осуществлять следующие режимы работы двух шаговых двигателей (ШД): остановку двигателей в любой момент времени вращения в фиксированной точке из массива $2^{14} \times 2^{14}$ положений с последующим его продолжением; непрерывное и однократное (на угол $0,9^\circ$) вращения с последующим реверсом на такой же угол; реверс со скоростями, различающимися до 10^3 раз; возврат к первоначальному положению; ручное управление и управление от вычислительного комплекса ДВК-2М. В качестве коммутатора четырех обмоток возбуждения ШД типа ДШИ-200 использована микросхема К155РЕЗ, что совместно с микросхемой К155ИЕ7 позволило реализовать в диапазоне частот $8-8 \cdot 10^3$ Гц четырех- и восьмитактный совмещенный и несовмещенный режимы возбуждения. Выполненный на комплементарных транзисторах усилитель постоянного тока служил усилителем мощности сигналов возбуждения двух обмоток ШД, что позволило уменьшить энергопотребление и габариты коммутатора.

УДК 548.315

А. И. Веришко, Н. П. Жуковская, А. П. Забогин, А. И. Комяк, А. И. Серафимович, С. Н. Шашков. Полиморфизм и молекулярные спектры кристаллов калийуранилнитрата. № 2493-В89. Деп. от 18.04.89 в ВИНТИ.

На основании геометрических представлений кристаллографии, концепции эффективных ионно-атомных радиусов и теории плотной упаковки кристаллических структур рассмотрен координационный полиэдр иона уранила в кристаллах $\text{M}\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ ($\text{M}=\text{K}$, Rb , Cs , NH_4) с точки зрения их устойчивости. Полученные данные позволили предположить наличие у $\text{K}\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ полиморфизма. Последнее надежно подтверждено методами рентгенографического и термоаналитического анализов и молекулярными спектрами.

Наши юбиляры



АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ МИХАЛЕВ



Исполнилось 50 лет со дня рождения заведующего кафедрой кибернетики БГУ имени В. И. Ленина, доктора технических наук, профессора Александра Сергеевича Михалева.

Александр Сергеевич Михалев родился 12 ноября 1939 г. в городе Моздоке Ставропольского края в семье рабочего. Окончив Рязанский радиотехнический институт в 1962 г., два года работал в должности ассистента в этом же институте. После успешного (с защитой кандидатской диссертации) окончания в 1967 г. аспирантуры при ЛЭТИ имени В. И. Ульянова (Ленина) Александр Сергеевич до 1974 г. работал старшим преподавателем, доцентом Рязанского радиотехнического института, а в 1974—1981 гг. — доцентом, заведующим кафедрой вычислительной техники Дальневосточного политехнического института.

В этот период в его работах формулируются и разрабатываются новые концепции итерационного структурно-параметрического синтеза сложных автоматических систем управления с эффективными разрывными законами управления, позволяющие достичь высоких точностных, динамических, энергетических и массогабаритных показателей систем. На основе этих концепций создаются основы теории и впервые в мировой практике разрабатываются основные технические решения принципиально нового класса электромеханических исполнительных систем роботов — серводвинов, характеризующихся исключительной гибкостью в управлении. В 1981 г. А. С. Михалев защищает докторскую диссертацию.

Признанный в стране специалист в области построения систем управления А. С. Михалев в 1981 г. был приглашен в Белгосунiversитет имени В. И. Ленина для развития новой специализации «Кибернетика. Системы управления роботами» на базе специальности «Радиофизика и электроника». С 1982 г. профессор А. С. Михалев — заведующий кафедрой кибернетики. По его инициативе в 1984 г. создается учебно-научно-производственное объединение «Белгосунiversитет имени В. И. Ленина — НПО «Гранат», обеспечившее впервые в республике целевую подготовку высококвалифицированных специалистов в области робототехники. На кафедре кибернетики по заказам различных отраслей промышленности впервые в СССР созданы системы управления для универсальных промышленных роботов типа «Гранат», «Электроника», «ТУР» с приводом на основе серводвинов.

Научно-технические разработки профессора Михалева отличаются новизной, опубликованы в более чем 190 научных трудах, защищены 82 авторскими свидетельствами, 25 из которых патентуются в 14 странах мира, внедрены ведущими роботостроительными предприятиями СССР. Они внесли весомый вклад в решение ряда важных народнохозяйственных задач в рамках республиканских программ: «Робототехника», «Интенсификация» и «Межотраслевой программы работ по робототехнике на 1986—1990 гг.», оказали существенное влияние на научно-техническую политику ведущих роботостроительных организаций республики и страны, вызвали коммерческую заинтересованность ряда зарубежных фирм (NOKIA (Финляндия), Берое, ЭЛПРОМ (НРБ), КУКА (ФРГ)).

Под руководством А. С. Михалева создана научная школа в области систем управления и очувствления роботов, подготовлено 18 кандидатов наук (среди них специалисты НРБ).

А. С. Михалев является членом научно-методических советов Госкомитета по народному образованию СССР и Министерства народного образования БССР по проблеме «Роботы и гибкие производственные системы», специализированных советов по защите кандидатских диссертаций в БГУ, БПИ, МРТИ, председателем Всесоюзного постоянно действующего научно-технического семинара «Роботы и гибкие производственные системы».

За многолетнюю плодотворную деятельность А. С. Михалев награжден знаками «Отличник изобретательства и рационализации», «Изобретатель СССР», почетными грамотами университета.

Свойственная Александру Сергеевичу высокая требовательность к себе и окружающим, его широкая научная эрудиция, постоянное стремление к поиску новых путей в современной технической науке способствуют быстрому становлению молодых ученых, работающих рядом с ним.

Сердечно поздравляя Александра Сергеевича с юбилеем, студенты и преподаватели факультета радиофизики и электроники желают ему доброго здоровья, счастья и новых творческих свершений.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в 1989 году в «Вестнике Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина», серия 1 (физика, математика и механика)

ФИЗИКА

Абдулин А. З., Минько А. А., Муравский А. А. Влияние характеристик жидкокристаллических материалов на электрооптические параметры матричного дисплея	2	21
Абдулла Г. С., Ильяшук Ю. М., Радевич Е. И., Федотов А. К. Проводимость твердых растворов $\text{HgTe} - \text{Ga}_2\text{Te}_3$ вблизи перехода полуметалл — полупроводник	3	18
Алешкевич Н. И., Ключников А. С., Кондратенко В. И. Оптическое восстановление СВЧ-голограмм	2	15
Аттия эль Саид, Пиви Пепе, Холмецкий А. Л., Чудаков В. А. Анализ энергетических распределений конверсионных электронов в приближении точечного источника	1	26
Бакр Ахмед, Левкович А. Д., Перцев А. Н., Муайед М. С. Влияние ионизационных потерь и кулоновского обратного рассеяния на бета-спектр при прохождении через поглотитель	3	24
Барышевский В. Г., Поликарпов И. В. Воздействие ультразвуковых колебаний на спектрально-угловые и интегральные характеристики параметрического рентгеновского излучения кристалла	1	8
Барышевский В. Г., Зайцева А. М. Упругое рассеяние жестких γ -квантов в кристалле	2	3
Бойков В. Н., Красовский А. Н., Шалаховская Г. В. Закономерности расположения флуоресцентных линий ураниловых кристаллов. Резонансные явления	1	11
Борисоглебский Л. А., Трофименко Е. Е. Волновая функция легкого пионного атома с феноменологическим пион-ядерным потенциалом	1	3
Борздов В. М. О построении оптимальной интервальной оценки среднего времени безотказной работы высоконадежных изделий микроэлектроник	2	35
Гайсенок В. А., Грузинский В. В., Сицко Г. Н., Афанасиади Л. Ш. Особенности концентрационной деполяризации флуоресценции примесных молекул в полимерных пленках	1	18
Гольцев В. П., Драко В. М., Сукие М., Данилович Ю. А. Структурные и фазовые изменения в сплаве $\text{Fe-30 \% Ni}$ при облучении ионами цинка	1	21
Гольцев В. П., Ходасевич В. В., Драко В. М., Углов В. В. Динамика накопления радиационных дефектов в никеле при ионном облучении	2	28
Гольцев В. П., Карпенко Г. Д., Лойко В. А., Драко В. М., Ходасевич В. В. Особенности формирования структуры поверхностных слоев при плазменном осаждении	3	27
Гулис И. М., Саечников К. А., Цвирко В. А. Установка для исследования электронно-колебательных спектров сложных молекул, охлажденных в сверхзвуковой струе	2	19
Дорошев В. П., Ильянок А. М., Ямный В. Е. Широкополосный кусочно-линейный аппроксиматор	1	23
Дубовская И. Я., Савчук Г. К. Излучение фотонов позитронами при отражении от кристалла	3	3
Задубовский И. И., Красногоровый Б. Н., Николаенко В. Т. Генератор поддерживающего напряжения для газоразрядных индикаторных панелей переменного тока	2	25
Казакевич Л. А., Лугаков П. Ф., Филиппов И. М. Рекомбинация носителей заряда в бездислокационном кремнии с различными типами ростовых микродефектов	3	15
Карих Е. Д. Нелинейные искажения при высокочастотной модуляции излучения гетеростетодиодов	3	20
Ле Тьен Хай, Поликарпов И. В. Параметрическое рентгеновское излучение при произвольном угле падения заряженной частицы к плоско-параллельной кристаллической пластинке	2	6
Лобко А. С., Рубацкая Е. Е. Угловые зависимости интенсивности мессбауэровского излучения, модулированного ультразвуком	3	6
Людчик А. М., Тимоценко Т. Н., Титков Е. Ф. К вопросу о разделении вкладов колебательной и ориентационной релаксации в контуры полос комбинационного рассеяния молекул в растворах	1	15
Нгуен Тхи Вьет Хьонг. Последовательная модель оценки надежности интегральных схем с учетом образования трещин	3	29
Патрин А. А., Суслов В. А., Фан Тхань Дау. Спектр фото-ЭДС в системе кремний — электролит при поляризации	3	9

<i>Рудницкий А. С.</i> Вариант обобщения метода парциальных плоских волн	3	12
<i>Саечников К. А., Гулис И. М.</i> Узкополосный источник пикосекундных импульсов с непрерывной перестройкой в видимой и ультрафиолетовой областях	1	6
<i>Тарасевич Н. Н.</i> Об определении мажоритарной функции и мажоритарного элемента	2	31
<i>Шишкин Г. В., Вильяльба В.</i> Разделение переменных в уравнении Дирака во внешних векторных полях. Декартовы координаты	2	9

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Басик В. А.</i> Об одном неявном алгоритме решения граничных задач для разностных трехточечных уравнений	3	38
<i>Бровка Н. В.</i> Нелинейная задача сопряжения для голоморфного вектора в плоскости с двумя разрезами	1	51
<i>Василевич Ю. В.</i> Термоупругое состояние ортотропного тела, вызванное стационарным температурным полем	3	61
<i>Гляков П. В.</i> Алгоритмы с гарантированной оценкой точности решения задач о разбиении	3	51
<i>Динь Куанг Тхай, Монастырный П. И., Нгуен Фьонг Май.</i> О понижении порядка систем сеточных уравнений в алгоритмах множественной разностной пристрелки и некоторых их свойствах	2	44
<i>До Суан Тхо.</i> Эквивалентность обобщенных простых таблиц	1	34
<i>Дудин А. Н., Халаф Ихсан.</i> Нахождение оптимальной гистерезисной стратегии управления двухскоростной системой массового обслуживания	3	35
<i>Зверович В. Э.</i> Связывающее число графа	1	39
<i>Зверович Э. И.</i> Задача линейного сопряжения в винеровских кольцах на объединении двух пересекающихся кругов	1	43
<i>Исаченко А. Н., Мухибулла Абдулла.</i> Грани многогранника задачи квадратичного булевого программирования	2	61
<i>Ковалев М. М., Мощенский А. В.</i> Поиск локальных минимумов выпуклой на упорядоченном множестве функции	1	29
<i>Котов В. М., Фуцти Г.</i> Задача о рюкзаке с монотонной функцией	3	48
<i>Липницкий С. Ф.</i> Математическая модель синтаксического анализа входных сообщений в интеллектуальной информационной системе	2	54
<i>Луцакова И. Н.</i> Оптимальные по быстродействию допустимые по ресурсу расписания для двух независимых приборов с минимизацией штрафной функции на первом приборе	1	54
<i>Матальцкий М. А.</i> О решении одного дифференциально-разностного уравнения	2	48
<i>Мощенский В. А., Ролит Ч. Н.</i> Об автоматизации построения программ по операторным термам, задающим вычислимые функции	2	65
<i>Певзнер Л. В.</i> О некоторых алгоритмах преобразования грамматик	3	42
<i>Петрова Г. Л.</i> Нижняя оценка мощности кодов, близких к равновесным	1	32
<i>Прохорова Р. А., Изобов Н. А.</i> О неустойчивых линейных системах Р. Конт	2	39
<i>Прусов В. И.</i> Напряженно-деформированное состояние полосы под действием сосредоточенной силы	1	45
<i>Рубашко Н. К., Совпель И. В.</i> Автоматический контроль текстов естественных языков. I	1	48
<i>Савчук В. П., Сафронов Г. И.</i> Определение погрешности позиционирования схвата робота с учетом его пространственной ориентации	1	37
<i>Струсевич В. А.</i> Улучшенный алгоритм выбора скоростей приборов для двухстадийной системы смешанного типа	3	45
<i>Тарновский А. Г.</i> Градиентные алгоритмы решения задачи балансировки турбин	2	51
<i>Фам Вьет Хунг.</i> Подалгебра, содержащая данную матрицу	3	56
<i>Фахми М. Х.</i> О гомоморфизмах одной алгебры последовательностных функций	3	58
<i>Шунгаров Х. Д.</i> Об эффективности одного алгоритма решения задачи покрытия графа звездами	2	58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Аншаков О. М., Вerezубова С. А., Нгуен Бак Ха, Чудаков В. А.</i> Исследование характеристик протяженного детектора на основе жидких сцинтилляторов	2	69
<i>Булатов В. И.</i> Об одном свойстве управляемых линейных систем, не разрезанных относительно производной	1	63
<i>Грузинский В. В., Ким У Хен, Кухто А. В.</i> Лазерные активные среды — нафталимиды — для синей области спектра	3	67
<i>Жарников С. Д., Малевич И. А., Манак И. С.</i> Спектральные характеристики инжекционных гетеролазеров при импульсной модуляции	3	69

Зорина Т. Е., Саржевская М. В., Черенкевич С. Н. Изменение структурнофункциональных характеристик эритроцитов при фотосенсибилизированном гемолизе под действием лазерного излучения	1	57
Кашевский В. В. Предельные формулы для одного сингулярного интеграла	1	66
Кононова О. А. Об изохронности центра одной системы нелинейных колебаний	2	71
Куренок В. П. Классификация решений стохастического дифференциального уравнения с факторизованной диффузией	1	64
Прусов И. А., Василевич Ю. В., Кудинова Г. В. О зависимости постоянных упругости трехмерного ортотропного тела	1	61
Сморodin В. С. Связь векторного импульса с функционалом Беллмана для систем с распределенным запаздыванием	3	71
Терехович А. Б., Ильютенко О. А. Об одном алгоритме расчета элементов плоских радиопрозрачных антенных укрытий	3	65
Трилле А. Е. Замечание о топологическом строении обобщенных симметрических пространств	1	67
Шашков С. Н. Многоэкспонентные волновые функции внешних орбиталей атома урана	2	67
Шепелевич В. Г., Шакер Хашем Ф. Структура и электрофизические свойства фольг висмута и сплавов висмут-сурьма	1	59

ХРОНИКА

Грузинский В. В. XIII Международная конференция по когерентной и нелинейной оптике	1	69
Скоропанов А. С. Республиканское научно-техническое совещание по физике и технике высоких давлений	1	70
Шишкин Г. В. VII Всесоюзная конференция «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации»	3	73

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Василий Иванович Ведерников	2	73
Петр Петрович Забрейко	2	74
Николай Владимирович Метельский	3	74
Анатолий Семенович Феденко	3	75
Аннотации депонированных статей	2	75
Аннотации депонированных статей	3	76

РЕФЕРАТЫ

УДК 535.56

Нгуен Тхай Хонг, Барковский Л. М. Изменение степени поляризации частично поляризованного света в слоистых анизотропных структурах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Найдено выражение для расчета степени поляризации световых пучков, распространяющихся в слоистых анизотропных средах. Приведены зависимости степени поляризации от количества слоев и управляющего электрического поля в случае кристаллов KDP кварца и ниобата лития.

Библиогр. 7 назв., ил. 2.

УДК 535.132

Кириленко А. И. О показателях преломления для неоднородных волн // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Изучается преломление неоднородных волн на границе раздела двух поглощающих сред. Рассматриваются значения показателей преломления для векторов фазовой и амплитудной нормали при компланарном и некомпланарном падении волны. Основное внимание уделено предельным случаям: прохождению «без преломления», нормальному и скользящему падениям.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592:546.28

Урбанович А. И., Подлипко Ю. А., Шалима В. Н. Температурные поля при облучении кристаллов ионными пучками переменной мощности // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Проведен анализ температурных полей в кристаллах при облучении их пучками ионов с мощностью, изменяющейся во времени. Дается сравнение с результатами, полученными для ионных пучков постоянной мощности. Показано наличие существенной зависимости возникающих температурных полей от временного профиля ионного пучка.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 523.8.538.8

Ключников А. С., Кондратенко В. И., Алешкевич Н. И. К вопросу об управлении фазовой структурой световых пучков // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Рассмотрены оптические системы, позволяющие управлять распределением амплитуды и фазы в поперечном сечении светового пучка с шагом дискретизации порядка длины волны фазированного излучения на основе применения управляемых транспарантов макроскопических размеров.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 621.378.325

Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П. Пассивная синхронизация мод в непрерывном лазере на АИГ: Nd^{3+} с помощью кристаллов LiF с F_2^- ЦО // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Показано, что применение в качестве пассивных лазерных затворов термически обработанных кристаллов LiF с F_2^- центрами окраски обеспечивает режим синхронизации мод при одновременной модуляции добротности непрерывного АИГ: Nd^{3+} -лазера независимо от длины резонатора.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 621.373.826.038.823

Войтович Д. А. Дополнительные потери резонатора газового лазера при быстром изменении его оптической длины // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Измерены дополнительные потери резонатора гелий-неонового лазера, возникающие при изменении его оптической длины со скоростью до 0,2 м/с.

Библиогр. 5 назв., ил. 3.

УДК 621.396.677

Семененя В. А. Задача излучения ФАР круглых волноводов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Описывается алгоритм решения задачи излучения периодической ФАР из круглых волноводов, построенный на основе решения методом Галеркина интегрального уравнения с использованием в качестве базисных функций собственных функций круглого волновода. Приведены формулы для расчета взаимных проводимостей между гармониками магнитных токов.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 535.375.55

Ле Тхань Хоах, Серафимович А. И., Тимошенко Т. Н., Титков Е. Ф. Об отнесении колебаний в области 200 см^{-1} в комплексных соединениях уранила // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

С целью выяснения природы колебания группы уранила в области 200 см^{-1} исследованы спектры комбинационного рассеяния гексагидрата уранилнитрата в расплаве, водном и органических растворах. Установлено, что данная полоса принадлежит валентному колебанию уранил-лиганд.

Библиогр. 5 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 539.12.04

Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Петров С. А. Изменение структуры поверхности кремния при облучении высокими дозами ионов C^+ и N_2^+ // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Методами просвечивающей электронной микроскопии и электронографии «на отражение» при последовательном удалении слоев способом анодного окисления анализирована структура поверхности монокристаллов кремния (001)-ориентации после имплантации высоких доз ионов C^+ и N_2^+ . Установлено, что при высокоинтенсивной имплантации углерода и азота на поверхности кремния формируются тонкая пленка карбида кремния кубической и включения нитрида кремния α -модификации.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 669.76:537.3

Шепелевич В. Г., Шакер Хашем Ф. Структура и процессы переноса в быстроохлажденных фольгах сплавов висмут-галлий // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Фольги сплавов Bi-Ga, полученные скоростным охлаждением из расплава, являются поликристаллическими и характеризуются текстурой {1012}. Исследованы температурные зависимости удельного электросопротивления, коэффициента Холла и дифференциальной термо-ЭДС фольг Bi-Ga. Установлено, что галлий в висмуте ведет себя как акцептор и характеризуется коэффициентом отдачи, достигающим $-0,02$.

Библиогр. 6 назв., ил. 1.

УДК 539.16.08

Каچارская Л. В., Чан Зуй Фыонг. Измерение β -активности водных растворов, содержащих изотопы ^{241}Pu , ^{90}Sr — ^{90}Y , ^{137}Cs // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Рассчитаны оптимальные размеры образца для экспериментального определения активности β -излучателей, а также получена пересчетная формула, позволяющая по измеренному числу отсчетов восстановить соответствующую активность.

Ил. 1, табл. 2.

УДК 519.624

Кулешова И. Ф., Монастырный П. И. Вариант метода дифференциальной ортогональной прогонки для задач с пограничным слоем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Предлагается новый метод для решения двухточечных граничных задач с пограничным слоем. Приведены конкретные расчеты, выполненные на ЭВМ.

Библиогр. 9 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 519.633

Басик В. А. О модификации метода полной редукции для разностных граничных задач с переменными коэффициентами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Предлагается итерационный алгоритм решения разностных граничных задач, в основу которого положены идеи метода полной редукции и неявных итерационных методов В. П. Ильина. На каждой итерации требуется выполнение $\approx O(M \cdot N \log_2 M)$ арифметических операций. Из приводимой оценки следует, что в случае разностных задач, возникающих в методе сеток из задачи Дирихле для дифференциальных уравнений, близких к уравнению Пуассона, алгоритм будет иметь скорость сходимости, не зависящую от числа узлов сетки.

Библиогр. 5 назв., табл. 2.

УДК 539.3

Василевич Ю. В. Контактная задача термоупругости для ортотропного полупространства // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Дано решение контактной задачи термоупругости по определению напряженно-деформированного состояния ортотропного полупространства, на поверхность которого действует абсолютно жесткий, произвольной формы в плане плоский штамп. Предполагается, что поверхность штампа имеет температуру $T = T_0(x, y)$. Температура соприкасающихся со штампом сред полагается равной нулю, а тепловой контакт совершенный. При решении задачи используется теория потенциала и специальное представление одной из искомых функций.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.21

Куренок В. П. Существование решения стохастического дифференциального уравнения без сноса при локальной интегрируемости коэффициента a^{-2} // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

В предположении непрерывности по t и при некотором условии локальной интегрируемости функции $a^{-2}(t, x)$, $(t, x) \in R_+ \times R^d$ доказывается существование решения стохастического дифференциального уравнения без сноса с коэффициентом диффузии a .

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.1

Ковалев М. М., Нгуен Нгна. Порядково-выпуклые разложения функций на целочисленной решетке // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Изучены свойства порядково-выпуклых функций на целочисленной решетке Z^n .

Библиогр. 2 назв.

УДК 801.73:681.3

Рубашко Н. К., Совпель И. В. Автоматический контроль текстов естественных языков. II // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Приводится общий алгоритм обнаружения и исправления ошибок, возникающих в линии естественно-языковой коммуникации, обсуждаются особенности его реализации, предлагаются два метода снятия многозначности решения задачи на морфологическом уровне — процедуральный, основанный на выводе семантико-грамматических свойств текста, и декларативный, использующий вероятностный подход к анализу естественного языка.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.1

Зверович В. Э., Зверович И. Э. О связывающем числе графов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Для графа G окружение множества $X \subseteq VG$ обозначим $N(X)$. Пусть $F = \{X: X \subseteq VG, X \neq \emptyset, N(X) \neq VG\}$ и I — семейство всех независимых множеств G . Связывающее число графа G определяется как $\text{bind}(G) = \min_{X \in F} \frac{|N(X)|}{|X|}$. Рассматривается задача характеристики графов, для которых $\text{bind}(G) = \min_{X \in I} \frac{|N(X)|}{|X|}$.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Штин С. Л. Об одной гипотезе В. Е. Круглова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Строится контрпример к одной гипотезе о разрешимых группах, возникающей в теории красивых матричных задач, а затем доказывается ее справедливость при дополнительных ограничениях.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.977

Калинин А. И. Асимптотические методы построения оптимальных управлений с релейными и особыми участками // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Описывается подход, с помощью которого разработаны алгоритмы асимптотического решения широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач оптимального управления с замкнутыми множествами допустимых значений управляющих воздействий.

Библиогр. 15 назв.

УДК 621.385.522

Апанасович В. В., Гулаков И. Р., Чудовская Е. А. Моделирование процессов фотоэлектрического преобразования в одноэлектронном фотоприемнике // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

На имитационной модели выполнен ряд статистических экспериментов, получены зависимости среднего времени пролета электронов через ФЭУ как функции зоны засветки фотокатода, длины волны регистрируемого излучения, вероятности пролета электронов мимо динодов при различных расстояниях между фотокатодом и первым динодом, углах расположения первого динода по отношению к фотокатоду и напряжении фотокатода — первый динод. Рассчитаны зависимость средней амплитуды одноэлектронных импульсов и эффективности регистрации при различных уровнях дискриминации от вероятности пролета электронов мимо динодов. Разработанная модель позволяет дать рекомендации по оптимизации режимов работы одноэлектронного фотоприемника.

Библиогр. 2 назв., ил. 1.

УДК 621.383

Ветохин С. С. Отношение сигнал/шум счетчика фотонов при гармонической модуляции регистрируемого светового потока // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Показано уменьшение отношения сигнал/шум счетчика фотонов при измерении излучения с неизвестной частотой модуляции. Расчеты выполнены для произвольной глубины модуляции, учтено влияние фоновых и темновых отсчетов.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977

Булатов В. И. К управляемости одного класса систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Показано, что стационарная система $A_0\ddot{x}(t) = A_1x(t-h) + Bu(t)$ полностью управляема тогда и только тогда, когда управляема линейная система $A_0\dot{x}(t) = A_1x(t) + Bu(t)$.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.988.8;517.983

Макаревич Т. А. Спектральный K-радиус линейных операторов в пространствах последовательностей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1990. № 1.

Рассматривается вопрос вычисления или достаточно хорошей оценки спектрального K-радиуса линейного оператора, действующего в пространствах последовательностей. Приводятся достаточные признаки ограниченности оператора, действующего в пространстве l_p ($1 < p < \infty$).

Библиогр. 8 назв.

ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСЕЙ ДЛЯ ОПУБЛИКОВАНИЯ В ЖУРНАЛЕ

1. Статья должна быть изложена с предельной краткостью, окончательно отредактирована и оформлена. Статья является оригиналом для печати.

2. Статьи, напечатанные на машинке (не портативной) через два интервала с полями не менее 4 см на одной стороне листа, представляют в редакцию в двух экземплярах.

3. Объем статьи не должен превышать 8 страниц машинописного текста (включая приложения) и 3 рисунков; кратких сообщений — 3 страниц и 2 рисунков.

4. К статье должны быть приложены: рекомендация кафедры, реферат статьи (до 0,25 стр. машинописного текста) и сведения об авторе (место работы, должность, адрес, рабочий и домашний телефоны).

5. Особое внимание следует обращать на тщательность внесения в текст математических и химических формул, на оформление таблиц, списка литературы, рисунков и подписей к ним. Следует избегать повторения в тексте данных, содержащихся в таблицах и графиках, а также представления численных результатов одновременно в виде таблиц и графиков.

6. Формулы и буквенные обозначения необходимо аккуратно и разборчиво вписать в два экземпляра от руки черными и разметить синими чернилами: греческие буквы обозначать красными; латинские, набираемые курсивом, подчеркнуть волнистой чертой; прописные — двумя черточками снизу ($\tilde{A}$), строчные — двумя черточками сверху ($\tilde{a}$).

Следует различать буквы $\tilde{O}$ (прописную), $\tilde{o}$ (строчную) и $\overset{\sim}{0}$ (нуль), для чего буквы $\tilde{O}$ и $\tilde{o}$ подчеркивают двумя черточками и волнистой чертой (курсив), а нуль отмечают квадратной скобкой снизу ($\overset{\sim}{0}$). Необходимо различать в написании буквы $\tilde{l}$ (эль), $\tilde{e}$, а

также $\tilde{I}$ и $\tilde{J}$ (йот), для чего букву $\tilde{I}$ пишут, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками и волнистой чертой снизу. Векторы подчеркивают черными чернилами стрелкой сверху. Математические символы $\cos$, $\lg$ и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H_2O , Ag и т. д.) отмечают квадратной скобкой снизу. Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечают дугой $\overset{2}{A}$ (для верхнего индекса) и $\overset{2}{A}$ (для нижнего).

7. Для формул и символов, а также между ними следует оставлять достаточные пробелы в тексте.

8. Необходимо придерживаться Международной системы единиц (СИ).

9. Рисунки представляют в двух экземплярах в виде графиков, схем, фотографий отдельно от текста; фотографии, отпечатанные на глянцевой бумаге с накатом, должны иметь четкое и контрастное изображение. Чертежи и схемы выполняют тушью на плотной белой бумаге или кальке в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей, и вместе с тем компактно в целях экономии места. На обороте карандашом необходимо указать фамилию автора, название статьи и номер рисунка.

10. Таблицы (обязательно с заголовками) и подписи к рисункам следует печатать на отдельных листах. Кривые на рисунках нумеруются арабскими цифрами, которые расшифровываются в подписях к рисункам. Представление одного и того же материала в виде таблиц и рисунков не допускается. Места для таблиц и рисунков необходимо указать на полях рукописи.

11. Ссылки на литературу даются в порядке цитирования (порядковый номер в квадратных скобках). Список литературы (прилагается на отдельном листе) должен быть оформлен в соответствии с ГОСТом 7.1-84 следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, год издания, страницы;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, принятое сокращенное название журнала, год издания, том, номер выпуска, страницы.

12. Ссылки на неопубликованные работы, диссертации и авторефераты не допускаются.

13. В конце статьи (после литературы) ставится название кафедры, где выполнена работа. Статью должны подписать все авторы.

14. В случае возвращения статьи автору на доработку первоначальный текст ее необходимо вернуть в редакцию. При задержке статьи автором на месяц и более первоначальная дата поступления не сохраняется.

15. Редакция посылает автору одну корректуру для исправления только ошибок набора. Изменения и дополнения как в тексте, так и в рисунках не допускаются. Корректур за подписью автора и датой ее подписания сдается в редакцию в течение двух дней с момента ее получения.

16. Статьи, оформленные с нарушением «Правил», редакция не принимает.