ISSN 0321-0367

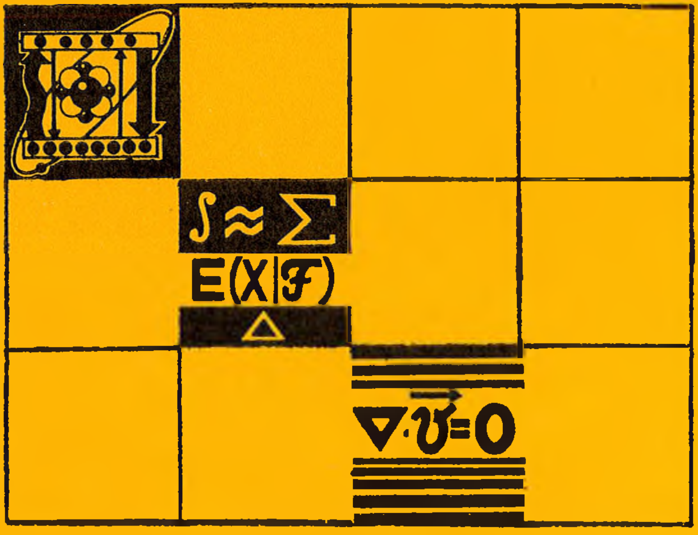
3

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В.И. Ленина

Физика
Математика
Механика



СЕНТЯБРЬ

3

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В.И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

Физика
Математика
Механика

МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ"
1988

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *С. В. Баленок*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 06.06.88. Подписано в печать 30.08.88. АТ 11074. Формат 70×108/16. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,35. Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 905 экз. Заказ 1009. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

Физика

УДК 537.533.7

А. А. АНДРИЯНЧИК, А. Н. КАМИНСКИЙ

РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В КРИСТАЛЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ

В работе [1] впервые показано, что спектр излучения быстрого электрона, испытывающего колебания в световой волне, которая распространяется в кристаллической среде, расщепляется, если для излучения выполнены условия дифракции. В настоящей работе найдено спектрально-угловое распределение фотонов, образованных в указанном процессе.

Пусть кристалл имеет бесконечные размеры в плоскости (x, y) и толщину L по оси Oz, электрон движется со скоростью $\vec{v}_0=v_0\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси Oz). Лазерная волна $\vec{E}=\vec{e}_x E_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r}-\omega_0 t))$ линейно поляризована перпендикулярно к плоскости падения и падает под углом φ к оси Oz.

Согласно [2], спектральная плотность энергии излучения на единицу телесного угла

$$W_{\vec{n}\omega}=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\sum_{s=1,\,2}\left|\int \vec{E}_{\vec{k}}^{s(-)*}(\vec{r},\,\omega)\,\vec{j}(\vec{r},\,\omega)\,d^3r\right|^2, \tag{1}$$

где s — индекс поляризации; $\vec{j}(\vec{r},\omega)$ — фурье-образ плотности тока электрона в поле лазерной волны; $\vec{E}_{\vec{k}}^{s(-)*}$ связаны с решением однородных уравнений Максвелла $\vec{E}_{\vec{k}}^{s(+)}$, описывающих процесс рассеяния фотона на мишени, с помощью соотношения

$$E_{\vec{k}}^{s(-)*}=E_{-\vec{k}}^{s(+)}. \tag{2}$$

В рассматриваемой геометрии при условии, когда поперечная скорость колебаний в волне много меньше продольной скорости, возмущение плотности тока электрона:

$$\vec{j}(\vec{r},\,t)=\vec{e}_x\,e\,v_x(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t)), \tag{3}$$

где $v_x(t)$ — поперечная скорость; $\vec{r}(t)$ — траектория электрона.

Вследствие эффекта Доплера оптические колебания электрона в волне приводят к возникновению более жесткого излучения. Предположим, что для него возможна дифракция. Для простоты будем считать, что плоскость дифракции перпендикулярна к оси Ox (σ — поляризация). В двухволновом приближении динамической теории дифракции интересующее нас выражение для $\vec{E}_{\vec{k}}^{(-)*}$, например, в случае Лауэ имеет вид [2]:

$$\vec{E}_{\vec{k}}^{(-)*}=\vec{e}_x\{e^{-i\vec{k}\vec{r}}[\xi_0^{(1)}e^{\frac{ik\varepsilon_1(L-z)}{\gamma_0}}+\xi_0^{(2)}e^{\frac{ik\varepsilon_2(L-z)}{\gamma_0}}]+$$

$$+ e^{-i(\vec{k}+2\pi\vec{\tau})\vec{r}} \beta_1 \left[\xi_\tau^{(1)} e^{\frac{ik\varepsilon_1(L-z)}{\gamma_0}} + \xi_\tau^{(2)} e^{\frac{ik\varepsilon_2(L-z)}{\gamma_0}}\right]\}, \tag{4}$$

где $\xi_0^{(1,2)} = \pm \frac{2\varepsilon_{2,1} - g_{00}}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$; $\xi_\tau^{(1,2)} = \mp \frac{g_0}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$; $\gamma_0 = \cos\Theta$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{4}\{g_{00} + \beta_1 g_{11} - \beta_1\alpha \pm [(g_{00} + \beta_1 g_{11} - \alpha\beta_1)^2 + 4\beta_1(\alpha g_{00} - g_{00} g_{11} + g_{10} g_{01})]^{1/2}\}$; $\beta_1 = k_z/(k_z + 2\pi\tau_z)$, $\alpha = [2(\vec{k}\,2\pi\vec{\tau}) + (2\pi\vec{\tau})^2]/k^2$; $\vec{\tau}$ — вектор обратной решетки; $\vec{k}$ и ω — волновой вектор и частота фотона соответственно; g_{ik} определяется разложением в ряд по векторам обратной решетки диэлектрической проницаемости кристалла.

Из (1) следует дисперсионное соотношение для излучения:

$$\omega_{i\,1,2}^{(k)} = \frac{\Omega_{1,2}}{1 - \beta\cos\Theta - \varepsilon^{(k)}(\omega_{i\,1,2}^{(k)})}, \tag{5}$$

где $\Omega_{1,2} = \omega_0(1 \pm \beta n \cos\varphi')$; n — показатель преломления кристалла; φ' — угол распространения лазерной волны в кристалле. Угол Θ для дифрагированного излучения отсчитывается относительно угла Брэгга, определяемого из условия

$$\cos\Theta_{\text{Бр}} = \frac{\tau_\perp^2 - \tau_z^2}{\tau^2}. \tag{6}$$

Найдем угловое распределение для числа квантов, вылетевших в дифракционный пик:

$$\frac{dN_\gamma}{d\Omega} = \int \frac{W_{\vec{n}\omega}\, d\omega}{\hbar\omega} = \frac{L}{2\pi\hbar c v_0}\left(\frac{e^2 pE_0\beta_1}{mc\gamma\omega_0}\right)^2 \left\{\sum_i \sum_k \xi_\tau^{(k)2}(\omega_{i1}^{(k)}) \times \right.$$

$$\times \frac{\omega_{i1}^{(k)2}}{\Omega_1\left(1 - \frac{\omega_{i1}^{(k)2}}{\Omega_1} \cdot \left.\frac{\partial\varepsilon^{(k)}}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_{i1}^{(k)}}\right)} + q^2 \xi_\tau^{(k)2}(\omega_{i2}^{(k)}) \left.\frac{\omega_{i2}^{(k)2}}{\Omega_2\left(1 - \frac{\omega_{i2}^{(k)2}}{\Omega_2} \cdot \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_{i2}^{(k)}}\right)}\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{\tau_z \sin\Theta \sin\varphi + \tau_y \cos\Theta}{\tau_\perp}\right)^2, \tag{7}$$

где q и p — коэффициенты отражения и прохождения, определяемые формулами Френеля [3].

Для излучения вперед выражение аналогично (7) с заменой $\xi_\tau^{(k)} \to \xi_0^{(k)}$, $\beta_1 \to 1$, а угол отсчитывается относительно оси Oz.

Первый член в выражении (7) соответствует излучению электрона

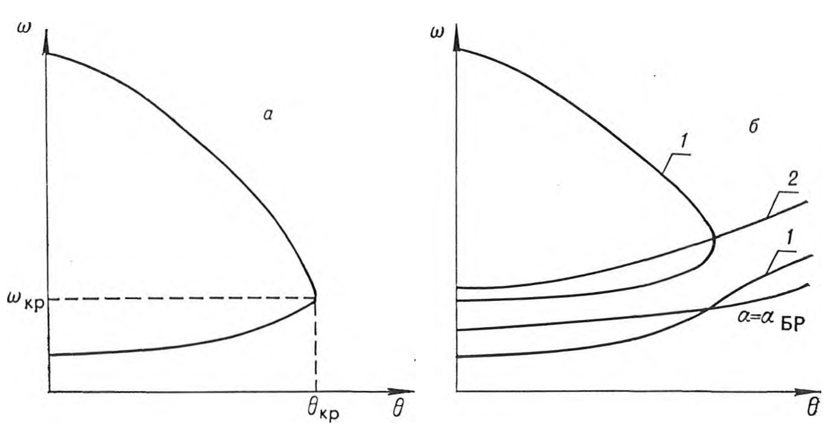


Рис. 1. Дисперсионные кривые рентгеновского излучения в кристалле без дифракции (*а*), с учетом дифракции (*б*):

1 — нормальная ветвь; *2* — ветвь аномального эффекта Доплера под действием падающей волны и связан с нормальным эффектом Доплера, второй — излучению под действием зеркально отраженной в кристалле волны и связан с аномальным эффектом Доплера, который возможен вследствие того, что показатель преломления среды в условиях дифракции может быть больше 1.

На рис. 1, *а* показана дисперсионная кривая рентгеновского излучения осциллятора в преломляющей среде без учета дифракции. Известно [2], что, если показатель преломления зависит от частоты, в спектрально-угловом распределении излучения возникают две ветви. С увеличением угла Θ частота верхней ветви быстро уменьшается, а нижней медленно растет. При определенном угле $\Theta=\Theta_{кр}$ ветви соединяются, и далее излучение невозможно.

В условиях дифракции картина существенно изменяется. Дисперсионная кривая расщепляется (см. рис. 1, *б*).

Если кривая точных условий дифракции $\alpha=\alpha_{Бр}$ проходит значительно выше точки ($\omega_{кр}$, $\Theta_{кр}$), дифракцию испытывает излучение верхней ветви. Угловое распределение дифракционного излучения имеет двугорбый вид с шириной пиков $\sim 10^{-4}$ рад и провалом между ними $\sim 10^{-6}$ рад. Если кривая $\alpha=\alpha_{Бр}$ проходит вблизи точки ($\omega_{кр}$, $\Theta_{кр}$), как показано на рис. 1, *б*, дифрагировать будет излучение обеих ветвей. В угловом распределении излучения (рис. 2, кривая *1*) первый пик уширяется до 10^{-3} рад. Если $\alpha=\alpha_{Бр}$ лежит ниже точки ($\omega_{кр}$, $\Theta_{кр}$), пики сливаются.

Оценка числа рентгеновских квантов в направлении дифракции при толщине кристалла $L\sim 1$ см, энергии электрона 500 МэВ, напряженности поля в лазерной волне 10^7 В/см в угол 10^{-4} рад дает $N_\gamma \sim 10^{-12}$ квантов/частицу.

Отраженная в кристалле лазерная волна также может привести к возникновению рентгеновских квантов за счет аномального эффекта Доплера. Дисперсионная кривая и угловое распределение этого излучения приведены соответственно на рис. 1 и 2 (кривая *2*). Ширина пика этого излучения $\sim 10^{-3}$ рад. Эффективность образования рентгеновских квантов за счет такого механизма по порядку величины может быть сравнима с нормальным эффектом Доплера. Относительный вклад этих двух механизмов в общее число квантов зависит от геометрии рассеяния лазерной волны на электроне. В случае падения лазерной волны вдоль движения электрона возможна ситуация, при которой аномальный эффект Доплера будет доминировать.

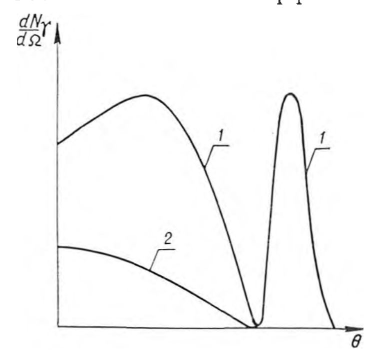


Рис. 2. Угловое распределение излучения электрона для нормального (*1*) и аномального (*2*) эффектов Доплера

Таким образом, взаимодействие электрона со световой волной в кристалле может привести к возникновению дифрагированного рентгеновского излучения за счет и нормального, и аномального эффектов Доплера, причем спектрально-угловые распределения излучения различны. Поэтому в принципе представляется возможным разделение этих эффектов.

Авторы выражают благодарность В. Г. Барышевскому за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. Барышевский В. Г. // Докл. АН БССР. 1971. Т. 15. №4. С. 306.
2. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1982.
3. Ландсберг Г. С. Оптика. М., 1976.

Поступила в редакцию 08.02.87.

УДК 539.121.7

НГУЕН ДИНЬ ЗУНГ

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЙТРОНОВ НА КРИСТАЛЛЕ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЯДРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ЗЕРКАЛЬНОГО ОТРАЖЕНИЯ

Пусть поток поляризованных нейтронов падает на кристалл с поляризованными ядрами, входная поверхность которого совпадает с плоскостью yoz. Предположим, что вектор поляризации ядер направлен по направлению оси z и имеется магнитное поле внутри кристалла с компонентами $B_x=B_y=0$, $B_z=B(x)$, где $B(x)=B$ при $x>0$ и $B(x)=0$ при $x<0$.

Процесс неупругого рассеяния поляризованных нейтронов на поверхности этого кристалла определяется гаминтонианом [1, 2]:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+H_k+W_1+W_2, \tag{1}$$

где H_k — гаминтониан рассеивателя и

$$W_1=-\mu\sigma B(x)-\mu\sigma H_{\text{эф}}^{\text{яд}}(x),$$

$$W_2=\sum_l[A_l+B_l\vec{\sigma}(\vec{J}_l-\langle\vec{J}_l\rangle)]\,\delta(\vec{r}-\vec{R}_l)-g\mu_{\text{Б}}\mu\,\times$$

$$\times\sum_j\left[\vec{s}\,\vec{\nabla}_r(\vec{S}_j-\langle\vec{S}_j\rangle)\,\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}_j|}+4\pi\vec{s}(\vec{S}_j-\langle\vec{S}_j\rangle)\,\delta(\vec{r}-\vec{R}_j)\right],$$

где $\vec{r}$, $\vec{R}_l$, $\vec{R}_j$ — векторы положения нейтрона, ядер и спинов S_j; $\vec{s}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ — оператор спина нейтрона; $\vec{J}$ — оператор спина ядра; $\mu_{\text{Б}}$ — магнетон Бора; $g\mu_{\text{Б}}S_j$ — электронный момент, связанный с узлом j; μ — магнитный момент нейтрона.

Эффективное сечение неупругого рассеяния поляризованных нейтронов определяется следующей формулой:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\,dE_{k'}}=\frac{m^2}{(2\pi)^3\hbar^5}\cdot\frac{K'}{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}\,\mathrm{Sp}\,\{\rho_n\,\rho_{\text{яд}}\,\rho_{\text{эл}}\,T^{+}_{k'k}\,T_{k'k}(t)\}, \tag{2}$$

где m — масса нейтрона; ρ_n, $\rho_{\text{яд}}$, $\rho_{\text{эл}}$ — спиновые матрицы плотности нейтрона, ядра и электронного узла.

В данной задаче имеются взаимодействия двух типов W_1 и W_2, поэтому применим метод приближения искаженных волн для вычисления матричного элемента оператора перехода $T_{k'k}$. В [3] показано, что

$$T^{\text{иск}}_{k'k}=(\varphi^{(-)}_{k'}\,|\,W_2\,|\,\varphi^{(+)}_{k}), \tag{3}$$

где $\varphi^{(+)}_k$, $\varphi^{(-)}_k$ — расходящаяся и сходящаяся волны задачи рассеяния с потенциалом взаимодействия W_1, т. е. решения следующего уравнения Шредингера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta-(\mu\sigma_z B(x)+\mu\sigma_z H^{\text{яд}}_{\text{эф}}(x))\right]\varphi_k=E_k\,\varphi_k. \tag{4}$$

Представим φ_k в виде $\varphi_k=e^{i\vec{k}_{\parallel}\vec{r}_{\parallel}}\,\varphi_k(x)\,\chi_\alpha$, где $\chi_\alpha=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ — спиновая собственная функция нейтрона; $k_{\parallel}$, $r_{\parallel}$ — компоненты волнового вектора и вектора положения нейтрона, параллельные поверхности кристалла. Решив уравнение (4), получим:

$$\varphi_{\pm}(x)=\begin{cases}e^{ik_x^< x}+A_{r\pm}e^{-ik_x^< x} & \text{при } x<0,\\ A_{t\pm}e^{ik_{x\pm}^> x} & \text{при } x>0,\end{cases} \tag{5}$$

где $A_{r\pm}=\dfrac{K_x^<-K_{x\pm}^>}{K_x^<+K_{x\pm}^>}$, $A_{t\pm}=\dfrac{2K_x^<}{K_x^<+K_{x\pm}^>}$ — амплитуды отраженных и преломленных волн нейтрона; $K_x^<=\sqrt{2mE_\perp/\hbar^2}$ при $x<0$; $K_{x\pm}^>=\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}[E_\perp\pm\mu(B+H_{\text{эф}}^{\text{яд}})}$ при $x>0$, где $E_\perp=E_k-\dfrac{K_\parallel^2\hbar^2}{2m}>0$.

Разлагая решения уравнения (4) $\varphi_\pm$ по матрицам Паули $\vec{\sigma}$ и единичной двухмерной матрице I в виде $\lambda I+\vec{A}\vec{\sigma}$, вычисляя интеграл (3), получаем $T_{k'k}^{\text{иск}}$. После громоздких вычислений для эффективного сечения неупругого рассеяния поляризованных нейтронов на ферромагнетике, имеющем насыщение намагничивания вдоль оси z, получим

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE_{k'}}=\frac{m^2}{(2\pi)^3\hbar^3}\cdot\frac{K'}{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{\bar{k}'}-E_{\bar{k}})t}\Big\{\sum_{ll'}[A_l^*A_{l'}(T_{1l}^*T_{1l'}+T_{2l}^*T_{2l'})+$$
$$+P_{0z}2\mathrm{Re}(A_l^*A_{l'}T_{1l}^*T_{2l'})+2B_l^*B_{l'}T_{1l}^*T_{1l'}\langle(J_{lx}(0)-\langle J_{lx}(0)\rangle)(J_{l'x}(t)-$$
$$-\langle J_{l'x}(t)\rangle)\rangle+\sum_{jj'}[(2T_{3j}^*T_{3j'}-Q_y^2 2\mathrm{Re}(T_{3j}^*T_{4j'})+2\mathrm{Re}(T_{3j}^*T_{6j'})+$$
$$+Q_y^2Q_\parallel^2T_{4j}^*T_{4j'}+Q_\parallel T_{5j}^*T_{5j'}+Q_y^2T_{5j}^*T_{5j'}+T_{6j}^*T_{6j'}+Q_z^2T_{7j}^*T_{7j'}+$$
$$+Q_z^2Q_y^2T_{8j}^*T_{8j'})+P_{ox}(Q_yQ_z2\mathrm{Im}(T_{3j}^*T_{4j'})+Q_z2\mathrm{Re}(T_{3j}^*T_{7j'})+$$
$$+Q_y^2Q_z2\mathrm{Re}(T_{5j}^*T_{8j'})+Q_z2\mathrm{Re}(T_{6j}^*T_{7j'}))+P_{oy}(-Q_z2\mathrm{Im}(T_{3j}^*T_{5j'})+$$
$$+Q_yQ_z2\mathrm{Re}(T_{3j}^*T_{8j'})-Q_y^3Q_z2\mathrm{Re}(T_{4j}^*T_{8j'})+Q_y^2Q_z2\mathrm{Im}(T_{4j}^*T_{5j'})+$$
$$+Q_yQ_z2\mathrm{Re}(T_{5j}^*T_{7j'})-Q_z2\mathrm{Im}(T_{5j}^*T_{6j'}))+P_{oz}(-Q_y^3 2\mathrm{Im}(T_{4j}^*T_{5j'})-$$
$$-Q_y^2Q_z^2 2\mathrm{Re}(T_{4j}^*T_{8j'})+Q_y2\mathrm{Im}(T_{5j}^*T_{6j'})+Q_z^2 2\mathrm{Re}(T_{5j}^*T_{7j'}))]\langle(S_{jx}(0)-$$
$$-\langle S_{jx}(0)\rangle)(S_{j'x}(t)-\langle S_{j'x}(t)\rangle)\rangle\Big\}, \tag{6}$$

где $\vec{P}_o=(P_{ox},P_{oy},P_{oz})$ — вектор поляризации падающего нейтрона $\vec{Q}_\parallel=(Q_y,Q_z)=\vec{K}'_\parallel-\vec{K}_\parallel$, $Q_\parallel=|\vec{Q}_\parallel|$,

$$T_{1l}=e^{-i\vec{Q}_\parallel\vec{R}_{l\parallel}}\frac{1}{2}[A_{t+}^{*\prime}A_{t+}e^{-i(K_{x+}^{>\prime}-K_{x+}^>)R_{lx}}+A_{t-}^{*\prime}A_{t-}e^{-i(K_{x-}^{>\prime}-K_{x-}^>)R_{lx}}],$$

$$T_{2l}=e^{-i\vec{Q}_\parallel\vec{R}_{l\parallel}}\frac{1}{2}[A_{t+}^{*\prime}A_{t+}e^{-i(K_{x+}^{>\prime}-K_{x+}^>)R_{lx}}-A_{t-}^{*\prime}A_{t-}e^{-i(K_{x-}^{>\prime}-K_{x-}^>)R_{lx}}],$$

$$T_{3j}=-2\pi g\mu_{\text{Б}}\mu T_{1j},$$

$$T_{4j}=-\frac{1}{2}g\mu_{\text{Б}}\mu[\tau_{1j}+\tau_{2j}+\tau_{3j}+\tau_{4j}+\tau_{5j}+\tau_{6j}],$$

$$T_{5j}=-\frac{1}{2}g\mu_{\text{Б}}\mu[-(K_x^{<\prime}-K_x^<)\tau_{1j}-(K_x^{<\prime}+K_x^<)\tau_{2j}+(K_x^{<\prime}+K_x^<)\tau_{3j}+$$
$$+(K_x^{<\prime}-K_x^<)\tau_{4j}-(K_{x+}^{>\prime}-K_{x+}^>)\tau_{5j}-(K_{x-}^{>\prime}-K_{x-}^>)\tau_{6j}],$$

$$T_{6j}=\frac{1}{2}g\mu_{\text{Б}}\mu[(K_x^{<\prime}-K_x^<)^2\tau_{1j}+(K_x^{<\prime}+K_x^<)^2\tau_{2j}+(K_x^{<\prime}+K_x^<)^2\tau_{3j}+$$
$$+(K_x^{<\prime}-K_x^<)^2\tau_{4j}+(K_{x+}^{>\prime}-K_{x+}^>)^2\tau_{5j}+(K_{x-}^{>\prime}-K_{x-}^>)^2\tau_{6j}],$$

$$T_{7j}=\frac{1}{2}g\mu_{\text{Б}}\mu[(K_x^{<\prime}+K_x^<)\tau_{7j}-(K_x^{<\prime}-K_x^<)\tau_{8j}-(K_x^{<\prime}+K_x^<)\tau_{9j}+$$
$$+(K_{x+}^{>\prime}-K_{x+}^>)\tau_{5j}+(K_{x-}^{>\prime}-K_{x-}^>)\tau_{6j}],$$

$$T_{8j}=\frac{1}{2}g\mu_{\text{Б}}\mu[\tau_{5j}+\tau_{6j}+\tau_{7j}+\tau_{8j}+\tau_{9j}],$$

$$\tau_{1j} = \frac{2\pi e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} + i\,(K_x^{<} - K_x^{<'})]},\quad \tau_{2j} = \frac{\pi\,(A_{r+} + A_{r-})\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} - i\,(K_x^{<} + K_x^{<'})]},$$

$$\tau_{3j} = \frac{\pi\,(A_{r+}^{*'} + A_{r-}^{*'})\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} + i\,(K_x^{<} + K_x^{<'})]},$$

$$\tau_{4j} = \frac{\pi\,(A_{r+}^{*'} A_{r+} + A_{r-}^{*'} A_{r-})\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{\parallel j}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} - i(K_x^{<} - K_x^{<'})]},$$

$$\tau_{5j} = \frac{A_{l+}^{*'} A_{l+}\,\pi\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-i\,(K_{x+}^{>'} - K_{x+}^{>})R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} - i\,(K_{x+}^{>'} - K_{x+}^{>})]},$$

$$\tau_{6j} = \frac{A_{l-}^{*'} A_{l-}\,\pi\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-i(K_{x-}^{>'} - K_{x-}^{>})R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} - i\,(K_{x-}^{>'} - K_{x-}^{>})]},$$

$$\tau_{7j} = \frac{(A_{r+} - A_{r-})\,\pi\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} - i(K_x^{<} + K_x^{<'})]},$$

$$\tau_{8j} = \frac{(A_{r+}^{*'} A_{r+} - A_{r-}^{*'} A_{r-})\,\pi e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} + i(K_x^{<'} - K_x^{<})]},$$

$$\tau_{9j} = \frac{(A_{r+}^{*'} - A_{r-}^{*'})\,\pi\, e^{-i\vec{Q}_{\parallel}\vec{R}_{\parallel j}} e^{-Q_{\parallel} R_{xj}}}{Q_{\parallel}\,[Q_{\parallel} + i\,(K_x^{<'} + K_x^{<})]}.$$

Из (6) видно, что эффективное сечение неупругого рассеяния поляризованных нейтронов на ферромагнетике при учете преломления и зеркального отражения содержит корреляционные функции спинов ядер и электронных спинов узлов решетки.

В случае полного отражения нейтронов от поверхности ферромагнетика $e^{iK_{x\pm}^{>}R_{xj}} = e^{iK_x^{<} n_{\pm} R_{xj}} \to e^{-K_x^{<}\beta R_{xj}}$, где $\beta = \operatorname{Im} n_{\pm}$ — мнимая часть показателя преломления. Так как $\mu < 0$, величина $\beta > 0$ только в случае параллельной ориентации спина нейтрона и спина ядра. Если выберем $K_x^{<} \sim 10^8$ см$^{-1}$, $-\mu(B + H_{\text{эф}}^{\text{яд}}) \sim 10^{-19}$ эрг, то критический угол полного отражения $\theta_k \lesssim 10^{-4}$ рад. Можем выбрать $\theta < \theta_k$ так, чтобы $\beta \sim 10^{-1}$. Тогда для глубины затухания нейтронов в кристалле получаем оценку $l = \dfrac{1}{K_x^{<}\beta} \sim 10^{-7}$см. Следовательно, при полном отражении волновая функция нейтронов очень быстро затухает в тонком слое кристалла.

Учитывая, что спины падающего нейтрона и ядра направлены по направлению оси z, в случае полного отражения получаем эффективное сечение поверхностного неупругого рассеяния нейтронов в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{m^2}{(2\pi)^3\hbar^5}\,\frac{K'}{K}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'} - E_k)t} \Big\{ \sum_{ll'} [2A_l^* A_{l'}\, \overset{*}{t}_{1l} t_{1l'} +$$
$$+ P_{oz}\, 2\mathrm{Re}\,(A_l^* A_{l'}\, \overset{*}{t}_{1l} t_{1l'}) + 2B_l^* B_{l'}\, \overset{*}{t}_{1l} t_{1l'}\, \langle (J_{lx}(0) - \langle J_{lx}(0)\rangle)(J_{l'x}(t) -$$
$$- \langle J_{l'x}(t)\rangle)\rangle] + \sum_{jj'} [(2\overset{*}{t}_{3j} t_{3j'} - Q_y^2 2\mathrm{Re}(\overset{*}{t}_{3j} t_{4j'}) + 2\mathrm{Re}\,(\overset{*}{t}_{3j} t_{6j'}) + Q_y^2 Q_{\parallel}^2\, \overset{*}{t}_{4j} t_{4j'} +$$
$$+ Q_{\parallel}^2\, \overset{*}{t}_{5j} t_{5j'} + Q_y^2\, \overset{*}{t}_{5j} t_{5j'} + \overset{*}{t}_{6j} t_{6j'} + Q_z^2\, \overset{*}{t}_{7j} t_{7j'} + Q_z^2 Q_y^2\, \overset{*}{t}_{8j} t_{8j'}) +$$
$$+ P_{oz}\,(- Q_y^3\, 2\mathrm{Im}\,(\overset{*}{t}_{4j} t_{6j'}) - Q_z^2 Q_y^2\, 2\mathrm{Re}(\overset{*}{t}_{4j} t_{8j'}) + Q_y\, 2\mathrm{Im}\,(\overset{*}{t}_{5j} t_{6j'}) +$$
$$+ Q_z^2\, 2\mathrm{Re}\,(\overset{*}{t}_{5j} t_{7j'}))]\, \langle (S_{jx}(0) - \langle S_{jx}(0)\rangle)\,(S_{j'x}(t) - \langle S_{j'x}(t)\rangle)\rangle \Big\}, \quad (7)$$

где $t_{1l} = t_{2l} = \frac{1}{2} A_{l+}^{*\prime} A_{l+} e^{-i\underline{Q}_{\parallel} \underline{R}_{l\parallel}} e^{-(K_x^{<\prime}\beta^{\prime} + K_x^{<}\beta) R_{lx}}$, $t_{3j} = -2\pi g \mu_{\text{Б}} \mu t_{1j}$, t_{4j}, t_{5j}, t_{6j}, t_{7j}, t_{8j} получаем из T_{4j}, T_{5j}, T_{6j}, T_{7j}, T_{8j} соответственно, если положить $A_{r-} = A_{t-} = 0$.

Важно отметить, что, так как функции $e^{-2(K_x^{<\prime}\beta + K_x^{<}\beta) R_{lx}}$ и $e^{-2Q_{\parallel} R_{jx}} = e^{-2|K_{\parallel}^{\prime} - K_{\parallel}| R_{jx}}$ быстро затухают, эффективное сечение поверхностного рассеяния нейтронов в случае полного отражения зависит только от корреляционной функции спинов поверхностных ядер и корреляционной функции электронных спинов узлов на поверхности кристалла.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. Г. Барышевскому за постановку задачи и полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. Mazur P. and Mills D. L. // Physical review. 1982. V. 26. № 9. P. 5175.
2. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. Минск, 1976.
3. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., 1973.

Поступила в редакцию 16.03.87.

УДК 519.24

В. А. ГАЙСЕНОК, Г. Г. КРЫЛОВ

НОВЫЙ МЕТОД ТОЧНОГО ОБРАЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

Обработка результатов кинетических измерений, как правило, требует решения уравнения свертки следующего вида:

$$g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $g(t)$ — выходной сигнал; $f(t)$ — искомый входной сигнал; $h(t)$ — функция отклика прибора; пределы интегрирования определяются условиями причинной связи входного и выходного сигналов. Задача отыскания $f(t)$ относится к некорректным задачам математической физики, что связано с неустойчивостью решения относительно малых вариаций входных данных задачи [1]. С физической точки зрения неустойчивость решения понятна, если отметить, что уравнение (1) описывает фактически линейную фильтрацию входного сигнала некоторым прибором с заданной функцией отклика. Тогда для входных сигналов, совпадающих в частотной полосе пропускания фильтра и сильно различающихся вне полосы пропускания, выходные сигналы будут практически одинаковыми. При попытке восстановить входной сигнал могут поэтому получаться сильно различающиеся решения при любом уровне шума в исходных данных.

Для получения приемлемого решения (1) необходимо привлекать дополнительную информацию: заранее сузить класс возможных решений, так чтобы в рамках рассматриваемого класса задача становилась устойчивой к малым вариациям исходных данных. Такое сужение можно проводить различными способами, что соответствует различным выборам процедуры регуляризации (см. [1]), вводимой для решения широкого круга некорректных задач. В приложениях для обращения уравнения свертки использовались методы преобразования Фурье [2—6] и Лапласа [7—9], разложения в ряд [10], сплайн-аппроксимации [11], явной регуляризации с последующим варьированием [12], итерационные [13] и некоторые другие [14, 15].

Многообразие применяемых методов обусловлено недостатками, присущими отдельным методам. Так, при явной регуляризации трудным моментом является априорный выбор параметра регуляризации, с помощью которого выбирается нужный класс функций, особенно если заранее о поведении искомого решения сказать что-либо трудно. Методы решения с использованием интегральных преобразований отличаются чувствительностью к шумам входных данных, а предварительная фильтрация для устранения случайных ошибок должна опираться на известный частотный спектр искомого сигнала для правильного выбора границы обрезания шумов. Итерационные методы также подвержены влиянию случайных ошибок входных данных, причем многократность применения алгоритма диктует еще более жесткие требования к сглаживанию входных данных по сравнению с методами интегральных преобразований. Развитый в [11] метод разложения свертки с использованием аппроксимации сплайном применим только для функций отклика, отличных от нуля на малых интервалах времени, что соответствует очень хорошим приборам. Этот метод, несмотря на заверения авторов, также вырезает высокочастотную часть входного сигнала, что легко показать, рассматривая сплайн как цифровую фильтрацию с дискретным временем, а это позволяет усомниться в пригодности метода для восстановления кусочно-гладких функций.

Рассмотрим метод обращения уравнения временной свертки, использующий специфические свойства полиномов Лагерра $L_n(t)$ и связанной с ними системы функций $y_k(t)=\{L_k(t)\exp(-x/2)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на полуинтервале [0, ∞] [16]. Для полиномов Лагерра имеет место следующее свойство [16]:

$$\int_0^t L_m(x)\, L_n(t-x)\, dx = L_{m+n}(t) - L_{m+n+1}(t). \tag{2}$$

Предположим, что все входящие в (1) функции можно разлагать в равномерно сходящиеся к самим функциям ряды Фурье по системе $\{y_k(t)\}$. В большинстве физических приложений такое предположение имеет место, так как выбранный класс функций совпадает с классом функций непрерывных и имеющих непрерывную производную на полуинтервале [0, ∞[и экспоненциально затухающих при $t\to\infty$. Разложим функции f, g, h в соответствующие ряды:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n(t),\quad g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n y_n(t),\quad h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n y_n(t) \tag{3—4—5}$$

и подставим разложения (3)—(5) в уравнение (1). Тогда, используя (2) и учитывая соотношения ортогональности для функций $y_k(t)$, после простых преобразований получаем для коэффициентов разложения выходного сигнала $g(t)$:

$$\beta_k=\sum_n \gamma_n(\alpha_{k-n}-\alpha_{k-n-1}). \tag{6}$$

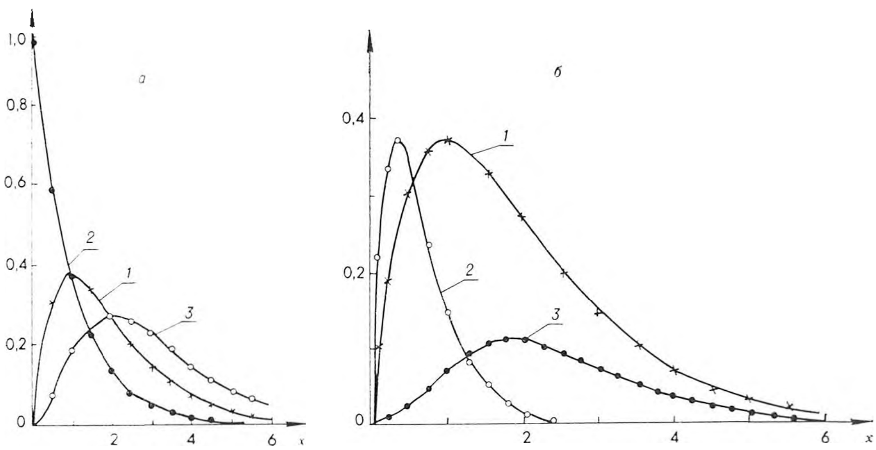
Как видно из (6), каждое β_k выражается через конечное число членов α_k и γ_k, поэтому соотношения (6) можно обратить, выражая α_k через β_k и γ_k. После элементарных вычислений получим:

$$\alpha_k=\frac{1}{\gamma_0}\Bigl(\beta_k+\sum_{n=0}^{k-1}(\beta_n-\alpha_n\gamma_{n-k})\Bigr). \tag{7}$$

Выражение (7) в совокупности с (4) дает точное решение уравнения (1) в виде обобщенного ряда Фурье по системе функций $\{y_k(t)\}$.

Проанализируем вопрос об устойчивости полученного решения относительно вариации входных данных, что необходимо для определения влияния шумов входных данных на результаты расчетов. Как известно [1], суммирование рядов Фурье со случайными коэффициентами — задача некорректная. Для получения устойчивого решения применяют процедуры регуляризации рядов, простейшая из которых заключается в обрезании ряда конечной суммы, если ошибка входных данных сравнима с ошибкой при отбрасывании последнего рассматриваемого члена ряда. Такую регуляризацию можно проделать и в рассматриваемом нами случае. Так как аналитические оценки устойчивости предложенного метода решения уравнения (1) получить довольно сложно, ограничимся численным анализом нескольких модельных случаев с учетом различных уровней шумов. Например, рассмотрим вариант при

$$f(x)=x\exp(-x),\quad h(x)=\exp(-x),\quad g(x)=x^2/2\exp(-x). \tag{8}$$



Восстановление сигналов при отсутствии шумов:

1 — входной сигнал; *2* — функция отклика; *3* — выходной сигнал. Сигналы описываются выражениями (8) — *а* и (9) — *б*

На рисунке (*а*) представлены результаты восстановления входного сигнала $f(x)$ (крестики) по виду функций $g(x)$ и $h(x)$, а также выходного сигнала и функции отклика (точки) по рассчитанным для них коэффициентам разложения. При суммировании мы ограничились первыми 15 членами разложения, шум во входных данных полагали равным нулю. Как видно из рисунка, метод приводит к точному восстановлению всех рассматриваемых сигналов. Если уровень шума не превышает 10—15 % уровня сигнала, наличие шумов слабо сказывается на восстанавливаемом входном сигнале. За меру отклонения рассчитанных и восстановленных кривых взята норма вида $\|f\|=\max\limits_x|f(x)|$, среднеквадратичные отклонения зашумленных функций отклика и выходного сигнала обозначены символами $\Delta_{\text{кв}}g$, $\Delta_{\text{кв}}h$. Точность восстановления входного сигнала определяется практически точностью задания входных данных, т. е. уровнем шумов (табл. 1). Результаты расчетов оказываются устойчивыми даже при большом уровне шума.

Для проверки предложенного метода в условиях быстрого спадания сигнала и для узких функций отклика проведен расчет при

$$\begin{gathered} f(x)=x\exp(-x),\quad h(x)=3x\exp(-3x), \\ g(x)=1/2x\exp(-x)+(3/2x^2+9/4x-9/8)\exp(-3x). \end{gathered} \tag{9}$$

Результаты (см. рисунок, *б* и табл. 2) свидетельствуют о хорошей применимости предложенного метода и в этом случае. Отметим, что здесь для точного восстановления $h(x)$ необходимо увеличить количество учитываемых членов разложения в функциональный ряд, число членов ряда (25) подбиралось путем сравнения исходного и восстановленного сигнала $h(x)$.

Таким образом, предложенный метод обращения уравнения свертки эффективен для широкого класса исходных функций, причем как для узких, так и для широких функций отклика. Он устойчив к шумам входных данных и дает результаты практически с той же относительной точностью, что и точность входных данных. Регуляризация в этом случае

Таблица 1

К расчету точности восстановления входного сигнала вида (8)

Шум, %	δf	$\Delta_{кв}\, h$	δh	$\Delta_{кв}\, g$	δg
0	$9{,}77\cdot10^{-4}$	0	$1{,}85\cdot10^{-4}$	0	$6{,}29\cdot10^{-4}$
1	$9{,}71\cdot10^{-4}$	$2{,}18\cdot10^{-3}$	$9{,}63\cdot10^{-3}$	$1{,}41\cdot10^{-3}$	$1{,}42\cdot10^{-3}$
2	$1{,}06\cdot10^{-3}$	$4{,}40\cdot10^{-3}$	$1{,}82\cdot10^{-2}$	$2{,}90\cdot10^{-3}$	$2{,}63\cdot10^{-3}$
3	$2{,}35\cdot10^{-3}$	$6{,}60\cdot10^{-3}$	$2{,}73\cdot10^{-2}$	$4{,}36\cdot10^{-3}$	$3{,}91\cdot10^{-3}$
4	$3{,}05\cdot10^{-3}$	$8{,}80\cdot10^{-3}$	$3{,}62\cdot10^{-2}$	$5{,}81\cdot10^{-3}$	$5{,}19\cdot10^{-3}$
5	$3{,}79\cdot10^{-3}$	$1{,}10\cdot10^{-2}$	$4{,}52\cdot10^{-2}$	$7{,}26\cdot10^{-3}$	$6{,}48\cdot10^{-3}$
10	$6{,}71\cdot10^{-3}$	$2{,}18\cdot10^{-2}$	$9{,}68\cdot10^{-2}$	$1{,}41\cdot10^{-2}$	$1{,}33\cdot10^{-2}$
15	$3{,}85\cdot10^{-3}$	$3{,}80\cdot10^{-2}$	$1{,}83\cdot10^{-1}$	$2{,}10\cdot10^{-2}$	$2{,}05\cdot10^{-2}$
20	$8{,}40\cdot10$	$5{,}07\cdot10^{-2}$	$2{,}54\cdot10^{-1}$	$2{,}95\cdot10^{-2}$	$2{,}36\cdot10^{-2}$

Таблица 2

К расчету точности восстановления входного сигнала вида (9)

Шум, %	δf	$\Delta_{кв}\, h$	δh	$\Delta_{кв}\, g$	δg
0	$3{,}75\cdot10^{-4}$	0	$8{,}19\cdot10^{-3}$	0	$8{,}69\cdot10^{-5}$
1	$6{,}06\cdot10^{-4}$	$9{,}00\cdot10^{-4}$	$7{,}95\cdot10^{-3}$	$5{,}22\cdot10^{-4}$	$5{,}36\cdot10^{-4}$
2	$2{,}04\cdot10^{-3}$	$1{,}80\cdot10^{-3}$	$8{,}36\cdot10^{-3}$	$1{,}04\cdot10^{-3}$	$1{,}09\cdot10^{-3}$
3	$2{,}29\cdot10^{-3}$	$2{,}70\cdot10^{-3}$	$1{,}16\cdot10^{-2}$	$1{,}57\cdot10^{-3}$	$1{,}63\cdot10^{-3}$
4	$3{,}09\cdot10^{-3}$	$3{,}39\cdot10^{-3}$	$1{,}42\cdot10^{-2}$	$2{,}06\cdot10^{-3}$	$2{,}10\cdot10^{-3}$
5	$2{,}62\cdot10^{-3}$	$4{,}71\cdot10^{-3}$	$1{,}98\cdot10^{-2}$	$2{,}53\cdot10^{-3}$	$2{,}65\cdot10^{-3}$
10	$6{,}00\cdot10^{-3}$	$9{,}87\cdot10^{-3}$	$4{,}00\cdot10^{-2}$	$5{,}37\cdot10^{-3}$	$4{,}68\cdot10^{-3}$
15	$8{,}81\cdot10^{-3}$	$1{,}52\cdot10^{-2}$	$5{,}55\cdot10^{-2}$	$7{,}82\cdot10^{-3}$	$7{,}46\cdot10^{-3}$
20	$1{,}93\cdot10^{-2}$	$1{,}83\cdot10^{-2}$	$7{,}01\cdot10^{-2}$	$1{,}04\cdot10^{-2}$	$9{,}45\cdot10^{-3}$

представляет собой естественный выбор в качестве допустимых таких функций, которые соответствуют сигналам конечной длительности или сигналам, экспоненциально затухающим при $t\to\infty$. Это позволяет разлагать все функции в равномерно сходящиеся ряды Фурье по системе $\{y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Число учитываемых членов ряда определяется уровнем шумов и выступает как параметр регуляризации в рассмотренном методе обращения свертки.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
2. Andre J. C., Vincent L. M., O'Connor D., Ware W. R. // Journ. Phys. Chem. 1979. V. 83. № 17. P. 2285.
3. Sjontoff E. // Nucl. Instrum. Methods. 1979. V. 163. № 3. P. 519.
4. Уикхэм М., Форнака С. // Приборы для науч. исслед. 1979. № 6. С. 74.
5. Schlesinger J. // Nucl. Instrum. Methods. 1973. V. 106. № 3. P. 503.
6. Allen L. C., Gladney H. M., Glarum S. H. // Journ. Chem. Phys. 1964. V. 40. № 11. P. 3135.
7. Helman W. P. // Int. Journ. Radiat. Phys. Chem. 1971. V. 3. P. 283.
8. Almgren M. // Journ. Chem. Soc. 1973. № 4. P. 145.
9. Gafni A., Modlin R. L., Brand L. // Biophys. Journ. 1975. V. 15. № 3. P. 263.
10. Sander W. C. // Journ. Appl. Phys. 1966. V. 37. № 4. P. 1495.

11. Дойч М., Беньямини И. // Приборы для науч. исслед. 1982. № 1. С. 99.
12. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей /Под ред. В. Н. Вапника. М., 1984.
13. Lake J. A. // Acta Crystallogr. 1967. V. 23. Part. 2. P. 191.
14. McKinnon A. E., Szabo A. G., Miller D. R. // Journ. Phys. Chem. 1977. V. 81. № 16. P. 1564.
15. Valeur B. // Journ. Chem. Phys. 1978. V. 30. № 1. P. 85.
16. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные фукции. М., 1977.

Поступила в редакцию 09.12.86.

УДК 621.373.826

И. С. МАНАК, С. Б. МИХНЮК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Эффективность использования полупроводниковых излучателей в оптических системах связи, прецизионной светодальнометрии, системах хранения и отображения информации определяется успехом в создании надежных, слабо подверженных различным воздействиям приборов с высоким быстродействием.

Важным параметром, характеризующим быстродействие источника излучения, является время жизни носителей. Спонтанное время жизни неравновесных носителей τ_c определяется временем жизни носителей при излучательной рекомбинации $\tau_и$ и безызлучательным временем жизни $\tau_б$; тогда: $1/\tau_c = 1/\tau_и + 1/\tau_б$. Вычисление временных параметров по экспериментальным амплитудно-частотным, фазово-частотным и переходным характеристикам возможно лишь в случае, если достоверно известны схема и весовые коэффициенты релаксационных процессов в рассматриваемом источнике излучения.

Излучательная рекомбинация за счет прямых излучательных процессов зона — зона осуществляется в прямозонных полупроводниках (GaAs, InAs и др.). В работе [1] сообщается, что в GaAs генерация происходит в основном на переходах зона — зона при $(N_A - N_D) \leqslant 2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ и зона — акцептор при $(N_A - N_D) \geqslant 1{,}5 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$. При низких напряжениях смещения свойства спектров линейных p—n-переходов согласуются с моделью туннельных излучательных переходов зона — примесь, в которых принимают участие глубоко лежащие состояния [2]. Эта модель горизонтального туннелирования может быть интерпретирована, как переходы зона — зона.

Цель данной работы — путем решения кинетических уравнений получить аналитические выражения для амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) полупроводниковых излучателей с учетом схемы релаксации неравновесных носителей. Под АЧХ источника излучения будем понимать зависимость амплитуды переменной составляющей в потоке излучения $\Phi_\sim$ от частоты ω при неизменной амплитуде модулирующего напряжения на p—n-переходе. При этом считаем, что процесс генерации неравновесных носителей является безынерционным по сравнению со всеми рекомбинационными процессами в рассматриваемой системе. Скорость генерации неравновесных электронов при наличии модуляции: $G_{общ} = G + G' e^{i\omega_m t}$, где G — постоянное смещение; G' — амплитуда переменной составляющей. При наличии модуляции в спонтанном режиме работы для межзонной излучательной рекомбинации уравнение непрерывности имеет вид: $dn/dt = G + G' e^{i\omega_m t} - n/\tau_c$. Его решение в стационарном режиме ($t \to \infty$) для переменной составляющей:

$$n_{\sim/t\to\infty} = \frac{G' \tau_c}{\sqrt{1 + (\omega_m \tau_c)^2}} e^{i(\omega_m t - \varphi)}, \tag{1}$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \omega\tau_c$ — сдвиг фаз между огибающей оптического потока и напряжением на p—n-переходе излучателя. Для переменной составляющей интенсивности на основании (1):

$$\Phi_{\sim} = \gamma \frac{\tau_c}{\tau_и} \frac{G'}{\sqrt{1 + (\omega_m \tau_c)^2}} e^{i(\omega_m t - \varphi)}, \qquad (2)$$

где γ — коэффициент, характеризующий потери.

При низких частотах модуляции, когда $\omega_m \tau_c \ll 1$, интенсивность пропорциональна $\tau_c / \tau_и = \eta$ (η характеризует внутренний квантовый выход). Если под граничной частотой понимать ту частоту модуляции, на которой амплитуда переменной составляющей в потоке излучения уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с ее значением на низкой частоте, то из (2) можно определить τ_c, так как в этом случае выполняется простое соотношение: $\omega_{гр} \cdot \tau_c = 1$, откуда $\tau_c = 1/\omega_{гр} = 1/2\pi f_{гр}$. Применяя диффузионную теорию для p—n-перехода, можно описать поведение неосновных носителей как во времени, так и в пространстве. Примем дополнительные обозначения (для электронов в p-области): j — плотность тока неосновных носителей; q — заряд электрона, характеризующий потери; D — коэффициент диффузии электрона; L — длина диффузии электрона; W — толщина p-области; U_0 — постоянное смещение, поданное на p—n-переход; U_m — амплитуда переменного сигнала на переходе; Φ — количество излученных фотонов; n_p — равновесная концентрация неосновных носителей заряда. Тогда для электронов в p-области кинетические уравнения имеют вид: $dn/dt + 1/q \cdot \partial j/dx = -n/\tau_c$; $j = -qD\partial n/\partial x$, т. е.

$$\partial n/\partial t - D\partial^2 n/\partial x^2 = -n/\tau_c. \qquad (3)$$

Граничные условия:

$$n_{/x=0} = n_p \frac{qU_m}{kT} \exp \frac{qU_0}{kT} \exp i\omega_m t, \quad n_{/x=W} = 0. \qquad (4)—(5)$$

Условия для дырок в n-области аналогичны. Число излученных из p-области фотонов получим из выражения:

$$\Phi = S \int_0^W \gamma \frac{n(x,\ t)}{\tau_и} dx, \qquad (6)$$

где S — площадь p — n-перехода. Решение задачи (3)—(5) имеет вид

$$n(x,\ t) = n_p \frac{qU_m}{kT} \exp \frac{qU_0}{kT} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1 + i\omega_m \tau_c}\, \frac{W - x}{L}}{\operatorname{sh} \sqrt{1 + i\omega_m \tau_c}\, \frac{W}{L}} \exp i\omega_m t.$$

Подставляя $n(x, t)$ в (6) и интегрируя, находим

$$\Phi(t) = -Sn_p \frac{\gamma}{\tau_и} \frac{qU_m}{kT} \exp \frac{qU_0}{kT} \frac{L}{\sqrt{1 + i\omega_m \tau_c}} \frac{1 - \operatorname{ch} \sqrt{1 + i\omega_m \tau_c}\, \frac{W}{L}}{\operatorname{sh} \sqrt{1 + i\omega_m \tau_c}\, \frac{W}{L}} \times$$

$$\times \exp i\omega_m t. \qquad (7)$$

С помощью разложения функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ ($z \in C$) и условия $W \gg L$ соотношение (7) сводится к виду

$$\Phi(t) \simeq Sn_p \frac{\gamma}{\tau_и} \frac{qU_m}{kT} \exp \frac{qU_0}{kT} \frac{3L^2}{W} \frac{e^{i(\omega_m t - \varphi)}}{\sqrt{1 + (\omega_m \tau_c)^2}},$$

т. е. аналогично (2).

На практике большое значение имеют излучательные процессы с участием примесных состояний [3]. Экспериментальные исследования электролюминесценции в p—n-переходе из GaAs показали, что в спектре излучения имеются примесные полосы, у которых отчетливо проявляется кинетика заполнения примесных состояний [4]. Также известно, что эффективная излучательная рекомбинация в непрямозонных полупроводниках (GaP и др.) может осуществляться только при наличии определенного промежуточного примесного центра [5]. При сильном легировании GaAs мелкими донорными примесями энергетический уровень примеси расширяется в примесную зону, которая сливается с зоной проводимости. Это приводит к образованию «хвостов» плотности состояний в запрещенной зоне [3]. В отдельных случаях установление квазиравновесия в глубоких частях «хвостов» зон может идти значительно медленнее, чем установление равновесия в зонах. Если процесс испускания фотонов идет с участием глубоких «хвостов» плотности состояний, эту часть «хвоста» можно считать отдельной системой уровней с характерным временем заполнения ее носителями тока, равным времени установления равновесия в этой части «хвоста» плотности состояний, поэтому перейдем к рассмотрению более сложной схемы релаксации неравновесных носителей.

Пусть излучательная рекомбинация идет через локализованный донорный уровень $E_д$ в запрещенной зоне, а неравновесные электроны зоны проводимости безызлучательным образом с вероятностью $p_б=1/\tau_б$ переходят на уровень $E_д$ и глубокий уровень E'.

Для этой схемы релаксации неравновесных носителей можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} dn/dt = -n/\tau_б + G + G'e^{i\omega_m t}, \quad 1/\tau_б = 1/\tau_{б_1} + 1/\tau_{б_2}, \\ dn_1/dt = n/\tau_{б_1} - n_1/\tau_и, \end{cases}$$

где $\tau_{б_1}$ и $\tau_{б_2}$ — время жизни неравновесных электронов по безызлучательному каналу рекомбинации относительно переходов зона проводимости — донорный уровень и зона проводимости — глубокий уровень в запрещенной зоне; $n_1=N_д f$ — концентрация электронов на донорном уровне, а $N_д$ — концентрация доноров, f — функция заполнения доноров.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} n_1(t) = \dfrac{\tau_б\,\tau_и}{\tau_{б_1}}\left[G + \dfrac{G'\,e^{i(\omega_m t-\varphi-\psi)}}{\sqrt{(1+\omega_m^2\,\tau_и^2)\,(1+\omega_m^2\,\tau_б^2)}}\right], \\ \operatorname{tg}\psi = \omega_m\tau_и, \quad \operatorname{tg}\varphi = \omega_m\,\tau_б. \end{cases} \tag{8}$$

В этом случае источник излучения представляет собой апериодическое звено второго рода, частотная характеристика которого описывается двумя постоянными времени: $\tau_и$ учитывает инерционные свойства в канале излучательной рекомбинации и $\tau_б$ — инерционный характер заселения верхнего рабочего уровня. Учет обратного выброса электронов в зону проводимости меняет только некоторые параметры в функциональном выражении зависимости $n_1(t)$. Решение (8) выполняется при

$$N_д \gg \frac{G\tau_б\tau_и}{\tau_{б_1}} : [1 - G'\,(1+\omega_m^2\,\tau_и^2)^{-1/2}\,(1+\omega_m^2\,\tau_б^2)^{-1/2}].$$

Например, для светодиодов из GaP возьмем следующие усредненные параметры: $N_д = 10^{17}$ см$^{-3}$; $I = 15$ мА; площадь $p-n$-перехода $S = 1$ мм^2; $\tau_и = 10^{-7}$ с; $\tau_{б_1}/(\tau_{б_2}+\tau_{б_1}) = 0{,}5$; $d = 1$мкм; $m=1$. Примем в области среза частотной характеристики $\sqrt{1+(\omega_m\tau_и)^2} = \sqrt{2}$, $\sqrt{1+(\omega_m\tau_б)^2} = 1$ (случай, когда $\sqrt{1+(\omega_m\tau_б)^2} > 1$ является менее жестким условием); тогда получим: $10^{17} \gg 7{,}5 \cdot 10^{15}$.

Таким образом, лишь в простейшем случае межзонной излучательной рекомбинации неравновесных носителей АЧХ полупроводниковых источников излучения определяется одной постоянной времени. При рекомбинации неравновесных носителей через примесные состояния в запрещенной зоне полупроводника инерционность излучателя не может быть описана одной постоянной времени, что приводит к более сложным аналитическим зависимостям для амплитудно- и фазово-частотных характеристик этих приборов.

Список литературы

1. Rossi J. A., Holonyak N., Dapkus P. D., McNeely I. B. // Appl. Phys. Lett. 1969. № 8. P. 109.
2. Casey H. C., Silversmith D. J. // Journ. Appl. Phys. 1969. V. 40. № 6. P. 241.
3. Богданевич О. В., Дарзнек С. А., Елисеев П. Г. Полупроводниковые лазеры. М., 1976.
4. Именков А. Н., Козлов М. М., Наследов Д. Н., Царенков Б. В. // ФТТ. 1966. Т. 8. Вып. 7. С. 2098.
5. Коган Л. М. Полупроводниковые светоизлучающие диоды. М., 1983.

Поступила в редакцию 03.11.86.

УДК 532.783.

В. И. ЛАПАНИК, А. З. АБДУЛИН, А. А. МИНЬКО

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ И ХИРАЛЬНЫХ ДОБАВОК НА ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВИСТ-ИНДИКАТОРОВ

Одним из наиболее изученных электрооптических эффектов в нематических жидких кристаллах (НЖК) является твист-эффект [1]. Вольт-контрастная кривая твист-эффекта характеризуется пороговым напряжением перехода Фредерикса ($U_п$), при котором начинается подъем (или спад) вольт-контрастной характеристики, и напряжением насыщения ($U_н$), когда кривая зависимости пропускания ячейки от напряжения выходит на плато. На практике для описания пороговых характеристик пользуются величинами напряжения, при которых ячейка пропускает 10 и 90 % падающего на нее света (U_{10} и U_{90}). Другими важными характеристиками твист-эффекта являются динамические параметры: времена реакции ($\tau_{вкл}$) и релаксации ($\tau_{выкл}$) жидкого кристалла (ЖК) в ячейке. В реальных устройствах для предотвращения возникновения областей обратного кручения [2] и улучшения однородности контраста по площади ячейки применяют ЖК-смеси с добавлением в нематическую матрицу оптически активного вещества (хиральная добавка), что влияет на пороговые и динамические характеристики твист-индикаторов.

В настоящей работе исследованы пороговые ($U_п$, U_{10}, U_{90}) и динамические ($\tau_{вкл}$, $\tau_{выкл}$) характеристики твист-индикаторов с различными жидкокристаллическими матрицами и хиральными примесями в зависимости от концентрации оптически активной добавки (шага спиральной структуры), толщины жидкокристаллического слоя, химической природы нематической матрицы и хиральной добавки.

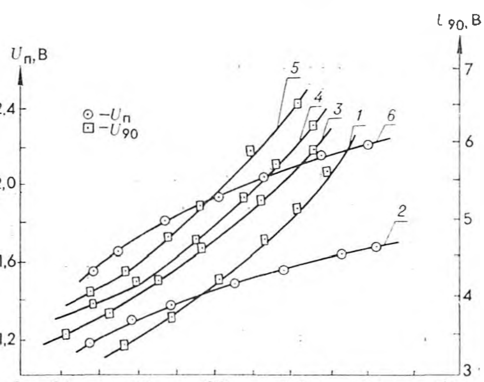


Рис. 1. Зависимость $U_п$, U_{90} от d/P:

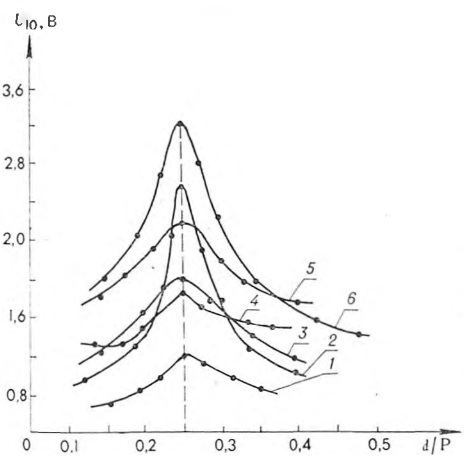
1 — смесь № 2+0,25 % х. д. № 2; *2* — смесь № 3+ +0,1 % х. д. № 1; *3* — смесь № 1+0,1 % х. д. № 1; *4* — смесь № 2+0,5 % х. д. № 2; *5* — смесь № 2+ +1% х. д. № 2; *6* — смесь № 1+0,1 % х. д. № 1

Нематическими матрицами служили распространенные смеси: 4-алкил(алкокси) — 4-цианодифенилов (смесь № 1), 4-алкил — 4-цианодифенилов и 4-цианодифениловых эфиров карбоновых кислот (смесь № 2) и смесь производных пиримидинов (смесь № 3, *R*O-TN-403, фирма Хофман-ля-Рош). В качестве хиральных добавок выбраны *l*-ментиловые (х. д. № 1) и 1, 2-метилбутиловые (х. д. № 2) эфиры бензойных кислот. Ориентация кристалла задавалась натиранием адипиновой кислотой поверхностей стеклянных пластинок ячейки, покрытых проводящим слоем двуокиси олова. Равновесный шаг спиральной среды (P) определяли в клине Кано. Толщину ячейки измеряли интерферометрическим методом по пропусканию незаполненной ячейки на спектрофотометре Specord NIR-61. Электрооптические характеристики твист-ячеек исследовали обычным способом [3] при параллельных поляризаторах и нормальном падении на ячейки коллимированного пучка света с длиной волны 550 нм. Возбуждение ячеек производили синусоидальным электрическим полем частотой 65 Гц. Все измерения проводили при $20\pm0{,}5$ °C.

Как известно из ряда теоретических работ [4—6], наличие хиральной добавки в нематической матрице приводит к изменению пороговых и динамических характеристик ячейки по сравнению с аналогичными характеристиками для твист-эффекта на чистом нематике. Так, $U_п^2$ вычисляется по формуле: $U_п^2 = \frac{4\pi^2}{\varepsilon_a}\left[K_{11}\pi + (K_{33}-K_{22})\rho_0 + 4\pi K_{22}\rho_0\frac{d}{P}\right]$, где K_{ii} — модули упругости Франка; ρ_0 — угол скручивания, создаваемый стенками; ε_a — величина диэлектрической анизотропии жидкокристаллической среды; d — толщина слоя жидкого кристалла. Приведенная формула отличается от формулы для твист-эффекта в обычном нематике наличием третьего слагаемого в квадратных скобках, зависящего от отношения d/P.

Как видно из экспериментальных данных (рис. 1), $U_п$ качественно описывается приведенной формулой, в то время как зависимость U_{10} от d/P (рис. 2) имеет ясно выраженный максимум при $d/P=0{,}25$, т. е. когда величина закрутки, создаваемой стенками ячейки, и величина закрутки, создаваемой добавкой, равны. Поскольку зависимость U_{90} носит также характер плавной кривой (см. рис. 1), параметр крутизны вольт-контрастной характеристики, определяемый как $K=(U_{90}-U_{10})/U_{10}$, будет иметь минимальное значение при соотношении между толщиной слоя и шагом спиральной структуры, равным 0,25 (рис. 3). С увеличением шага спирали пороговое напряжение U_{10} будет возрастать менее резко. Кривые *2*, *5*, *6* (рис. 2) показывают зависимость U_{10} от абсолютной величины шага спирали.

Таким образом (см. рис. 2, 3), характер и величина изменения напряжения U_{10} и параметра крутизны при приближении к значению отноше-



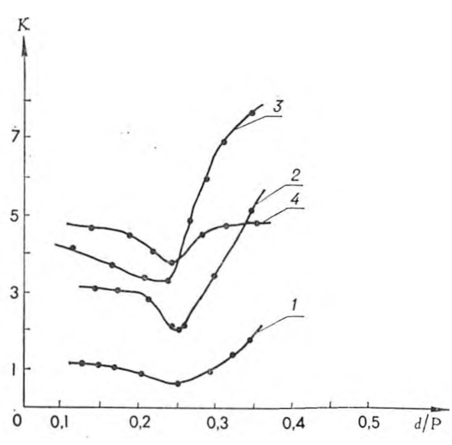


Рис. 2. Зависимость напряжения U_{10} от d/P:

1 — смесь № 2+0,25 % х. д. № 2; *2* — смесь № 1+0,25 % х. д. № 1; *3* — смесь № 1+0,1 % х. д. № 2; *4* — смесь № 3+0,1 % х. д. № 1; *5* — смесь № 1+0,1 % х. д. № 1; *6* — смесь № 1+0,5 % х. д. № 1

Рис. 3. Зависимость параметра крутизны от d/P:

1 — смесь № 1+0,1 % х. д. № 1; *2* — смесь № 2+0,25 % х. д. № 2; *3* — смесь № 2+0,5 % х. д. № 2; *4* — смесь № 2+1 % х. д. № 2 ния $d/P = 0{,}25$ зависят как от состава матрицы, так и от природы и концентрации хиральной добавки.

Исследование динамических характеристик твист-индикаторных ячеек показало, что время релаксации возрастает монотонно, а время реакции — более резко с увеличением отношения d/P.

Таким образом, полученные результаты позволяют наметить пути целенаправленного влияния на пороговые и динамические характеристики твист-индикаторных ячеек не только подбором нематической матрицы и хиральной добавки, но и изменением концентрации оптически активной добавки (шага спиральной структуры) и толщины жидкокристаллического слоя.

Список литературы

1. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М., 1978. С. 384.
2. Raynes E. P. // Electronic Lett. 1974. V. 10. P. 141.
3. Береснев Г. А., Блинов Л. М., Гребенкин М. Ф., Цветков В. А. // Кристаллография. 1983. Т. 28. С. 129.
4. Акопян Р. С., Зельдович Б. Я. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 2137.
5. Morimoto K., Ohtsuka T., Murakami Y. et. al. // Nat. Tech. Rep. 1976. V. 62. P. 213.
6. Takahachi Y., Uchida T., Wada M. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1981. V. 22. P. 171.

Поступила в редакцию 04.11.86.

УДК 535.338.42

Г. А. ПИЦЕВИЧ, В. И. ГОГОЛИНСКИЙ, Д. И. САГАЙДАК,
В. Л. АНТОНОВСКИЙ, И. П. ЗЯТЬКОВ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ПЕРОКСИБЕНЗОАТА

В настоящее время весьма актуальна задача спектральной идентификации органических пероксидов в реакционных средах, а также определение корреляций между спектральными и химико-технологическими характеристиками. Такие данные для пероксиэфиров практически отсутствуют. Пероксиды этого класса широко применяются в качестве инициаторов высокотемпературной реакции полимеризации. В нашей работе получены колебательные спектры пероксибензоата $(CH_3)_3COOC(=O)Ph$ (I) и предложена их интерпретация (см. таблицу).

ИК спектры поглощения соединения I регистрировались на приборе Specord-75IR при спектральной ширине щели 3 см$^{-1}$. Образец представлял собой чистое вещество в тонком слое между окошками KBr. Спектры КР регистрировались на приборе Spex-Ramalog при спектральной ширине щели 2 см$^{-1}$ в режиме постоянного тока. Возбуждение проводилось аргоновым лазером на частоте 19435 см$^{-1}$ при мощности 0,1 Вт. Значения частот и точность поляризационных измерений контролировались по CCl_4.

Молекула пероксибензоата несимметрична, но содержит фрагменты, обладающие локальной симметрией, -трет-бутильную группу и бензольное кольцо с карбонильной группой. Симметрия фрагмента $OC(CH_3)_3$ принадлежит точечной группе C_{3v}, однако второй атом кислорода, расположенный вне оси третьего порядка, приводит к ее искажению. Согласно [1], угол O—C—C, образованный C—CH_3 связью, находящейся в транс-положении по отношению к пероксидной связи, оказывается значительно меньше двух других O—C—C углов, поэтому симметрия трет-бутильного фрагмента понижается до C_s.

Симметрию C_s можно также приписать фрагменту Ph—C(=O)—O—O, Интерпретация колебательных спектров пероксибензоата

Номер колебания по Вильсону	Симметрия C_{2v}	Симметрия C_s	Отнесение	СКР			ИКС	
				ν, см$^{-1}$	I	ρ	ν, см$^{-1}$	I
—	—	A'	τ_{CH_3}	151	4	—	—	—
16б	B_2	A''	Ph	178	6	—	—	—
—	—	A'	δ_{COO}	252	15	0,3	—	—
15	B_1	A'	Ph	308	3	0,5	—	—
—	—	A'	δ_{OCC}	360	1	0,5	—	—
—	—	A'	δ_{OCC}	377	2	0,4	—	—
16а	A_2	A''	Ph	424	5	0,1	—	—
6а	A_1	A'	Ph	479	3	0,1	476	6
—	—	A'	δ_{CCC}	561	7	0,2	—	—
6б	B_1	A'	Ph	619	14	0,69	619	2
—	—	—	Ph	679	14	0,02	669	5
4	B_2	A''	Ph	—	—	—	705	60
—	—	A'	ν_{CC}	753	14	0,03	751	8
1	A_1	A'	Ph	797	2	0,75	796	8
—	—	—	δ_{OCO}	835	20	0,2	831	10
—	—	A'	ν_{OO}	864	37	0,35	863	6
—	—	A'	δ_{CCH}	886	16	0,1	—	—
—	—	A''	δ_{CCH}	920	пл	р	924	пл
—	—	A'	δ_{CCH}	924	пл	р	—	—
5	B_2	A''	Ph	994	5	0,1	—	—
12	A_1	A'	Ph	1004	120	0,07	1003	1
18а	A_1	A'	Ph	1025	35	0,01	1024	70
—	—	A'	δ_{CCH}	1057	1	р	1054	60
18б	B_1	A'	Ph	1079	2	р	1079	30
9б	B_1	A'	Ph	1162	7	0,75	1163	3
9а	A_1	A'	Ph	1178	10	р	1178	30
—	—	A''	δ_{CCH}	1192	пл	0,75	1191	35
2	—	A'	ν_{CO}	1236	25	0,2	1235	80
3	B_1	A'	Ph	1265	7	0,4	1262	30
14	B_1	A'	Ph	1317	2	0,3	1316	15
—	—	A'	δ_{HCH}	1367	1	р	1365	50
—	—	A'	δ_{HCH}	—	—	—	1389	5
—	—	A''	δ_{HCH}	1442	пл	—	—	—
19б	B_1	A'	Ph	1450	10	0,6	1451	60
19а	A_1	A'	Ph	1492	2	р	1492	р
8б	B_1	A'	Ph	1590	пл	—	1585	4
8а	A_1	A'	Ph	1602	60	0,5	1600	8
—	—	—	$\nu_{C=O}$	1758	54	0,2	1758	90
—	—	A'	ν_{CH}	2853	3	р	—	—
—	—	A'	ν_{CH}	2883	10	р	2877	4
—	—	A'	ν_{CH}	2910	17	р	2910	4
—	—	A'	ν_{CH}	2935	60	р	2940	10
—	—	A'	ν_{CH}	2954	20	р	—	—
—	—	A''	ν_{CH}	2990	22	0,76	2987	40
—	A_1	A'	Ph	3078	60	р	3074	4

однако колебания монозамещенного бензольного кольца определяются симметрией C_{2v}, которой обладала бы молекула в случае одноатомного заместителя [2, 3].

При отнесении полос в колебательных спектрах пероксибензоата воспользуемся интерпретацией колебательных спектров гидропероксида трет-бутила $\mathrm{HOOC(CH_3)_3}$ (II) и пероксибензойной кислоты $\mathrm{HOO\underset{\substack{\| \\ O}}{C}Ph}$ (III), выполненной нами ранее [4]. Эти молекулы хорошо моделируют описанные фрагменты в соединении I.

Наибольший интерес представляет идентификация линии, обусловленной колебанием —O—O— связи. Необходимо оценить частотный интервал возможного проявления этого колебания, а также соотношение интенсивностей полос в ИК и КР спектрах. Поскольку валентное колебание —O—O— связи для соединений II и III проявляется на частотах 840 и 880 $см^{-1}$, в спектрах соединения I интервал его проявления можно уверенно ограничить областью частот 800—900 $см^{-1}$. Соотношение интенсивностей валентного колебания —O—O— связи в ИК и КР спектрах определяется локальной симметрией ее ближайшего окружения в молекуле. Для перкислот и гидропероксидов локальная симметрия отсутствует, что обусловливает большую относительную интенсивность проявления валентного колебания —O—O— связи в ИК спектрах.

Для алкильных (R—COOC—R′) и диацильных ($\mathrm{R{-}\underset{\substack{\| \\ O}}{C}OO\underset{\substack{\| \\ O}}{C}{-}R'}$) пероксидов локальная симметрия пероксидной цепочки может быть отнесена к точечной группе C_2 или C_{2h}. Валентное колебание —O—O— связи для этих соединений практически не проявляется в ИК спектрах поглощения, а в спектрах КР оно очень интенсивно [5—7]. Тогда для соединения I, которое по строению занимает промежуточное положение между гидропероксидами и диацильными пероксидами, можно ожидать и одинаковой относительной интенсивности в ИК и КР спектрах полос, обусловленных валентным колебанием —O—O— связи.

В интервале 800—900 $см^{-1}$ спектра КР соединения I присутствуют три поляризованные линии средней интенсивности: 835, 864, 885 $см^{-1}$. В спектре КР соединения II на частоте 881 $см^{-1}$ с большой интенсивностью проявляется симметричное валентное колебание C—C связей Эта линия имеет слабый аналог в ИК спектре поглощения. Очевидно, одну из трех рассматриваемых линий следует связать с таким же колебанием в молекуле I, другую — с валентным колебанием пероксидной связи. Колебания группировки $\mathrm{C(CH_3)_3}$ с более низкими частотами невозможно привлечь для интерпретации третьей линии в интервале 800—900 $см^{-1}$ пероксибензоата. Наиболее высокочастотное из них (747 $см^{-1}$) в соединении II связано с валентными колебаниями C—C связей, и трудно ожидать, что это колебание увеличивает свою частоту на 100 $см^{-1}$ в соединении I. Колебания монозамещенного бензольного кольца в спектре КР в интервале 800—900 $см^{-1}$ не проявляются со сколько-нибудь заметной интенсивностью [2, 8, 9]. Однако в спектре КР пероксибензойной кислоты наблюдается линия 794 $см^{-1}$, обусловленная деформационным колебанием карбонильной группы, которое в большей мере подвержено влиянию изменения окружения в молекулах I и III, чем колебание бензольного кольца. Очевидно, за линию 835 $см^{-1}$ ответственно деформационное колебание карбонильной группы. Усредненное значение ν_{O-O} для пероксибензойной кислоты и гидропероксида II равно 860 $см^{-1}$. Учитывая этот факт, а также и то, что линия 864 $см^{-1}$ имеет аналог в ИК спектре поглощения, ее следует отнести к валентному колебанию —O—O— связи в молекуле пероксибензоата. Линию 886 $см^{-1}$, у которой практически нет аналога в ИК спектре поглощения, следует связать с симметричными валентными колебаниями С—С связей в трет-бутильной группе.

Колебания бензольного кольца в молекуле I могут быть интерпретированы исходя из симметрии C_{2v} или C_s. В первом случае классификация их по типам симметрии имеет вид: $\Gamma_{C_{2v}} = 11A_1 + 10B_1 + 3A_2 + 6B_2$.

Если симметрия кольца принадлежит к точечной группе C_s, классификация колебаний будет: $\Gamma_{C_s} = 21A' + 9A''$.

Идентификацию линий, обусловленных колебаниями бензольного кольца, удобно проводить, пользуясь данными работы [3]. Авторы при интерпретации спектров монозамещенных бензолов исходят из симметрии C_{2v} кольца и указывают, какие колебания характеристичны по частоте и форме. Для нехарактеристичных колебаний приведен интервал их возможного проявления. После идентификации десяти колебаний кольца типа B_1 по значению степени деполяризации можно судить о том, какой симметрией оно обладает.

Одиннадцать полносимметричных колебаний типа A_1 включают три валентных С—Н колебания, остальные обусловлены паритетным вкладом изменений углеродных связей кольца и деформациями углов С—С—Н и С—С—С. При этом пять из них характеристичны по форме и частоте [3]. Обозначение этих колебаний по Вильсону: 8а, 19а, 9а, 18а, 12. К ним в ИК и КР спектрах следует отнести линии 1602, 1492, 1179, 1025, 1004 см$^{-1}$ соответственно. Три колебания (2, 1 и 6а) нехарактеристичны, первое из них оказывается чувствительным к заместителю. Линия 1236 см$^{-1}$, очевидно, обусловлена этим колебанием, а 797 и 479 см$^{-1}$ — колебаниями 1 и 6а. Колебания типа B_1 включают два валентных С—Н колебания. Из восьми оставшихся семь (14, 9а, 6в, 8в, 19в, 3, 18в) характеристичны по частоте и одно (15) нехарактеристично. К характеристичным колебаниям типа B_1 отнесены полосы 1317, 1162, 619, 1590, 1450, 1265, 1079 см$^{-1}$; линия 308 см$^{-1}$ отнесена к колебанию 15. Не все колебания типа B_1 деполяризованы (см. таблицу), как это должно быть при точном выполнении симметрии C_{2v} для бензольного кольца, следовательно, для молекулы I колебание кольца лучше описывается симметрией C_s. Это приводит к тому, что колебания A_1 и B_1 дают 21 колебание типа A', т. е. плоские, а A_2 и B_2 — 9 неплоских колебаний типа A''. Согласно [3], три колебания типа A_2: 17а, 10а, 16а — характеристичны по частоте. Первое колебание, очевидно, не проявляется в спектрах, второе — маскируется интенсивной линией 835 см$^{-1}$; к третьему колебанию отнесена линия 424 см$^{-1}$. Четыре колебания типа B_2 (5, 17, 4, 10) также характеристичны по частоте. В спектрах проявляются колебания 5 и 4 (994 и 705 см$^{-1}$). Два колебания типа B_2 (11 и 16) нехарактеристичны. В спектрах проявляется лишь колебание 16 на частоте 178 см$^{-1}$.

К колебаниям трет-бутильного фрагмента, помимо линии 886 см$^{-1}$, следует отнести линию 753 см$^{-1}$, обусловленную валентными колебаниями С—С связей. Линии 920, 924, 1192 см$^{-1}$ связаны с симметричными и антисимметричными маятниковыми колебаниями С—Н связей. Линии 1367, 1389, 1442, 1450 см$^{-1}$ обусловлены симметричными и антисимметричными деформационными колебаниями этих же связей. Валентное колебание одиночной С—О связи проявляется на частоте 1235 см$^{-1}$, двойной — 1758 см$^{-1}$.

Таким образом, колебания трет-бутильного фрагмента и бензольного кольца могут быть описаны исходя из симметрии C_s. Валентное колебание —О—О— связи проявляется на частоте 865 см$^{-1}$ со средней интенсивностью в ИК и КР спектрах. Вклад этого колебания возможен также и на частотах 835 и 880 см$^{-1}$.

Список литературы

1. Slovokhotov Y. L., Timofeeva T. V. // Journ. Mol. Struct. 1984. V. 112. P. 127.

2. Chattopadhyay S. // Indian Journ. Phys. 1968. V. 42. № 6. P. 336.
3. Свердлов Л. М., Ковнер М. А., Крайков Е. П. // Колебательные спектры многоатомных молекул. М., 1971. С. 361.
4. Зятьков И. П., Пицевич Г. А., Гоголинский В. И., Сагайдак Д. И. // Тез. докл. 8-й Всесоюз. конференц. по химии органич. пероксидов. Л., 1985. С. 78.
5. Christe K. O. // Spectrochim. Acta. 1970. V. 27 A. P. 463.
6. Durig J. R., Wertz D. W. // Journ. Mol. Spectrosc. 1968. V. 25. P. 467.
7. Зятьков И. П., Сагайдак Д. И., Пицевич Г. А., Гоголинский В. И., Ксенофонтова Н. М. // ЖПС. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 110.
8. Green J. H. S. // Spectrochim. Acta. 1977. V. 33 A. P. 575.
9. Green J. H. S., Harrison D. J. Idem. P. 583.

Поступила в редакцию 12.01.87.

УДК 539.184.3:546.791

С. Н. ШАШКОВ

ЭНЕРГИИ ИОНИЗАЦИИ ВАЛЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ УРАНА

Изучение кристаллов уранилов потребовало расчета электронной структуры соединений. При решении этой задачи мы столкнулись с трудностью выбора вводимых в расчет параметров — потенциалов ионизации атома урана, так как установившихся методик практического решения этой задачи не существует. Однако тем или иным способом приходится определять численные значения потенциалов ионизации урана, чему и посвящается предлагаемая работа.

Воспользуемся следующим фактом: для атомов и ионов урана с конфигурацией валентных оболочек $6p^65f^\alpha6d^\beta7s^\gamma$ (для нейтрального атома в основном состоянии — $6p^65f^36d^17s^2$) и зарядом $z=6-(\alpha+\beta+\gamma)$ величину энергии связи электрона i-й атомной орбитали (АО) можно, пренебрегая обменными взаимодействиями, представить в виде $E_i = E_i^0-(3-\alpha)\langle ii\,|\,5f5f\rangle-(1-\beta)\langle ii\,|\,6d6d\rangle-(2-\gamma)\langle ii\,|\,7s7s\rangle$, где E_i^0 — i-я энергия связи для нейтрального атома в основном состоянии, а $<ii|jj>$ — интегралы кулоновского межэлектронного отталкивания [1].

Кулоновские интегралы можно приблизительно заменить на величины $F_0(ij)$ — параметры Слейтера—Кондона для нейтрального атома урана в $6p^65f^36d^17s^2$ конфигурации. Получаем упрощенное выражение для потенциалов ионизации:

$$E_i = E_i^0-(3-\alpha)\,F_0(i5f)-(1-\beta)\,F_0(i6d)-(2-\gamma)\,F_0(i7s). \qquad (1)$$

Величины $F_0(ij)$ можно вычислить из экспериментальных данных [2, 3], представленных ниже в виде равенств (все энергии выражены в $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж):

$$\begin{gathered} E_{6d}(f^2d^2s^2)=E^0_{7s}+0{,}775,\quad E_{5f}(f^4s^2)=E^0_{6d}+0{,}870,\\ E_{6d}(f^2d^2s^2)=E^0_{5f}+1{,}426,\quad E_{5f}(f^4s^1)=E_{7s}(f^3s^2)+0{,}578,\\ E_{6d}(f^3d^2)=E_{7s}(f^3d^1s^1)+0{,}533,\quad E_{7s}(f^2d^2s^1)=E_{5f}(f^3d^2)+1{,}140,\\ E_{5f}(f^4d^1)=E_{6d}(f^3d^2)+0{,}983,\quad E_{6d}(f^2d^1s^1)=E_{7s}(f^3s^2)+0{,}036,\\ E_{6d}(f^2d^1s^2)=E_{5f}(f^3s^2)+1{,}944,\quad E^0_{6d}=-6{,}060. \end{gathered} \qquad (2)$$

Подставляя вместо E_i в каждом из равенств (2) выражение (1) и проводя несложные математические упрощения, получаем систему уравнений с неизвестными величинами $F_0(ij)$, E^0_{5f}, E^0_{7s} вида

$$AX=W, \qquad (3)$$

где A — матрица системы; W — массив свободных членов системы; X — массив неизвестных. Задача (3) является некорректно поставленной, так как число уравнений (девять) больше числа неизвестных (восемь). Для

Энергии атомных орбиталей ($\cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж) урана

Конфигурация	Энергия			
	$6p$	$5f$	$6d$	$7s$
p^6	90,730	64,142	52,604	47,201
f^1	77,020	53,036	43,308	39,939
f^2	63,310	41,930	36,012	32,677
f^3	49,600	30,824	27,716	25,415
f^4	35,890	19,718	19,420	18,153
f^5	22,180	8,612	11,124	10,891
d^1	84,130	55,846	44,822	40,264
f^1d^1	70,420	44,740	36,526	33,002
f^2d^1	56,710	33,634	28,220	25,740
f^3d^1	43,000	22,528	19,924	18,478
f^4d^1	29,290	11,422	11,628	11,216
f^5d^1	15,580	0,316	3,332	3,954
d^2	74,530	47,550	37,040	33,327
f^1d^2	60,820	36,444	28,744	26,065
f^2d^2	47,110	25,338	20,448	18,803
f^3d^2	33,400	14,232	12,152	11,541
f^4d^2	19,690	3,126	3,856	4,279
d^3	64,930	39,254	29,258	26,390
f^1d^3	51,220	28,148	20,962	19,128
f^2d^3	37,510	17,042	12,666	11,866
f^3d^3	23,800	5,936	4,370	4,604
d^4	55,330	30,958	21,476	19,453
f^1d^4	41,620	19,852	13,180	12,191
f^2d^4	27,910	8,746	4,884	4,929
d^5	45,730	22,662	13,694	12,516
f^1d^5	32,020	11,556	5,398	5,254
d^6	36,130	14,366	5,912	5,579
s^1	84,730	56,880	45,667	41,010
f^1s^1	71,020	45,774	37,371	33,748
f^2s^1	57,310	34,668	29,075	26,486
f^3s^1	43,600	23,562	20,779	19,224
f^4s^1	29,890	12,456	12,483	11,962
f^5s^1	16,180	1,350	4,187	4,700
d^1s^1	61,420	48,584	37,885	34,073
$f^1d^1s^1$	47,710	37,478	29,589	26,811
$f^2d^1s^1$	34,000	26,372	21,293	19,549
$f^3d^1s^1$	20,290	15,266	12,997	12,287
$f^4d^1s^1$	6,580	4,160	4,701	5,025
d^2s^1	51,820	40,288	30,103	27,136
$f^1d^2s^1$	38,110	29,182	21,807	19,874
$f^2d^2s^1$	24,400	18,076	13,511	12,612
$f^3d^2s^1$	10,690	6,970	5,315	5,350
d^3s^1	42,220	31,992	22,321	20,199
$f^1d^3s^1$	28,510	20,886	14,025	12,937
$f^2d^3s^1$	14,800	9,780	5,729	5,675
d^4s^1	32,620	23,696	14,539	13,262

Конфигурация	Энергия			
	$6p$	$5f$	$6d$	$7s$
$f^1d^4s^1$	18,910	12,590	6,243	6,000
d^5s^1	23,020	15,400	6,757	6,325
s^2	78,730	49,620	38,730	34,819
f^1s^2	65,020	38,512	30,434	27,557
f^2s^2	51,310	27,406	22,138	20,295
f^3s^2	37,600	16,300	13,842	13,033
f^4s^2	23,900	5,194	5,546	5,771
d^1s^2	69,130	41,322	30,948	27,882
$f^1d^1s^2$	55,420	30,216	22,652	20,620
$f^2d^1s^2$	41,710	19,110	14,356	13,358
$f^3d^1s^2$	28,000	8,004	6,060	6,096
d^2s^2	59,530	33,026	23,166	20,945
$f^1d^2s^2$	45,820	21,920	14,870	13,683
$f^2d^2s^2$	32,110	10,814	6,574	6,421
d^3s^2	49,930	24,730	15,384	14,008
$f^1d^3s^2$	36,220	13,624	7,088	6,746
d^4s^2	40,330	16,434	7,602	7,071

Примечание. Значения энергий даны с обратным знаком.

ее решения воспользуемся методом Тихонова [4, 5], где за решение задачи принимается такой вектор X^0, который минимизирует функционал $M=\|AX-W\|^2$. Таким образом найдены параметры: $F_0(5f5f)=11{,}106$; $F_0(5f6d)=8{,}296$; $F_0(5f7s)=7{,}262$; $F_0(6d6d)=7{,}782$; $F_0(6d7s)=6{,}937$; $F_0(7s7s)=6{,}191$; $E^0_{5f}=8{,}004$; $E^0_{7s}=6{,}096$.

В связи с отсутствием достаточного количества экспериментальных данных, относящихся к $6p$-АО урана, значения $F_0(i6p)$ и E^0_{6p} заимствованы из хартри-фоковских расчетов электронной структуры и энергий, выполненных Манном [6] для атома урана: $F_0(7s6p)=6{,}000$; $F_0(6d6p)=9{,}600$; $F_0(5f6p)=13{,}710$; $E^0_{6p}=-28{,}0$.

С учетом всех вычисленных параметров выражение (1) примет вид

$$
\begin{aligned}
E_{5f}&=-64{,}142+11{,}106\alpha+8{,}296\beta+7{,}262\gamma,\\
E_{6d}&=-52{,}604+8{,}296\alpha+7{,}782\beta+6{,}937\gamma;\\
E_{7s}&=-47{,}201+7{,}262\alpha+6{,}937\beta+6{,}191\gamma,\\
E_{6p}&=-90{,}730+13{,}710\alpha+9{,}600\beta+6{,}000\gamma.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Из (4) нетрудно получить интересующие нас энергии атомных орбиталей урана (см. таблицу) с электронной конфигурацией $6p^65f^\alpha 6d^\beta 7s^\gamma$, которые хорошо согласуются с экспериментальными результатами из термодинамических, спектральных и расчетных данных [7—11].

В качественной форме энергии валентных АО урана, сведенные в таблицу, передают многие закономерности химии актиноидов:

1) энергии $6p$- и валентных f-, d-, s-АО урана зависят от электронной конфигурации атома (или иона). Примечательно, что $6p$-энергетические уровни для всех зарядовых состояний глубже, чем $5f$-уровни;

2) увеличение заряда урана приводит к общему понижению энергии всех АО;

3) в положительно заряженных ионах урана уровень $7s$ лежит выше, чем уровень $6d$.

Таким образом, в работе предпринята попытка проанализировать значения энергий АО урана в различных его валентных состояниях. В качественной форме рассмотрены некоторые закономерности в энергиях валентных атомных орбиталей урана. Отметим еще, что выражения (4) можно с успехом применять при квантовохимических расчетах урансодержащих молекул по полуэмпирическому методу МВГ с техникой самосогласования по зарядам и электронным конфигурациям.

Список литературы

1. Нефедов В. С. // Радиохимия. 1980. № 4. С. 479.
2. Brewer L. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1971. V. 61. № 12. P. 1666.
3. Sugar J. // Journ. Phys. 1974. V. 60. № 10. P. 4103.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректно поставленных задач. Изд. 2-е. М., 1979.
5. Тихонов А. Н. // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 3. С. 591.
6. Mann J. B. // Atom. Data and Nucl. Data Tables. 1973. V. 12. № 1. P. 1.
7. Sugar J. // Journ. Chem. Phys. 1973. V. 59. № 2. P. 788.
8. Brewer L. // Journ. Soc. Amer. 1971. V. 61. № 8. P. 1101.
9. Brewer L. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1974. V. 64. № 5. P. 687.
10. Moor C. E. Atomic energy levels: Nat. Bur. Stand. Circ. 1958. V. 1. № 467; V. 2. P. 227; V. 3. P. 245.
11. Ионова Г. В., Першина В. Г., Спицын В. И. Электронное строение актиноидов. М., 1986.

Поступила в редакцию 19.01.87.

УДК 621.396.69

Н. Б. КИРЕЕВ

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛОСЫ СИГНАЛА СИСТЕМ КОНТРОЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Измерение электромагнитных полей в водных средах позволяет контролировать движущиеся локальные неоднородности как в пассивном, так и в активном режимах. Возможность контроля движущихся неоднородностей в пассивном режиме обусловлена, во-первых, магнитными полями, индуцируемыми турбулентным движением воды [1], во-вторых, наличием собственных электрических и магнитных полей у объектов неживой и живой природы.

Принцип действия устройств, работающих в активном режиме, основан на измерении приращения токов проводимости контролируемой зоны при взаимодействии движущегося объекта с электрическим полем СНЧ диапазона, создаваемым электродными датчиками. Наличие объекта, пересекающего зону контроля, регистрируется по изменению амплитуды и фазы монохроматического сигнала, частота которого выбирается из условия распространения электромагнитного поля (ЭМП) в водной среде.

Применение сложных сигналов с базой $B \gg 1$ при последующей обработке корреляционным приемником или согласованным фильтром позволяет получить выигрыш в амплитуде полезного сигнала в $\sqrt{B}$ раз по сравнению с аналогичными системами, использующими монохроматические сигналы [2]. При этом повышается чувствительность системы в целом, появляется возможность уменьшить амплитуду напряжения на электродах датчика и, следовательно, снизить термодинамические шумы перехода металл — полупроводящая среда.

База сложного сигнала определяется его полосой F и длительностью T [3]. Увеличение B за счет длительности сигнала ограничено временем взаимодействия движущегося объекта с ЭМП электродных датчиков T_m, а путем расширения полосы — ростом постоянной затухания в водной среде α_B, которая определяется [1]: $\alpha_B = 1{,}73 \cdot 10^{-2} \sqrt{f\sigma}$, где f — частота сигнала; σ — проводимость среды.

Максимальное затухание ЭМП Δ между электродами датчика без учета пространственной структуры поля:

$$\Delta = \exp L/2\delta, \quad (1)$$

где

$$\delta = \lambda_B/2\pi \quad (2)$$

— толщина скин-слоя (определяет расстояние, на котором напряженность электрического поля падает в $e=2{,}718$ раз [1]); L — расстояние между электродами датчика; λ_B — длина волны в воде [1]:

$$\lambda_B = \sqrt{10^7/f\sigma}. \quad (3)$$

Амплитуда центрального пика автокорреляционной функции (АКФ) шумоподобного сигнала, например, сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), пропорциональна $\sqrt{B}$ [3]. В свою очередь, как указывалось, приращения амплитуды сложного сигнала, приложенного к электродам датчика, связанные с движением контролируемого объекта, на выходе коррелятора или согласованного фильтра возрастут также в $\sqrt{B}$ раз. Однако увеличение базы сигнала путем расширения его полосы вызывает рост затухания ЭМП между электродами датчика, и, следовательно, снижение чувствительности системы к воздействию контролируемого объекта. Эти факты указывают на то, что при выборе полосы сигнала системы контроля локальных неоднородностей в полупроводящих средах целесообразно исходить из условия:

$$B/\Delta = \xi = \max. \quad (4)$$

Подставляя значения B и Δ, находим, что условие (4) выполняется, если верхняя частота сложного сигнала f_{B0} имеет вид:

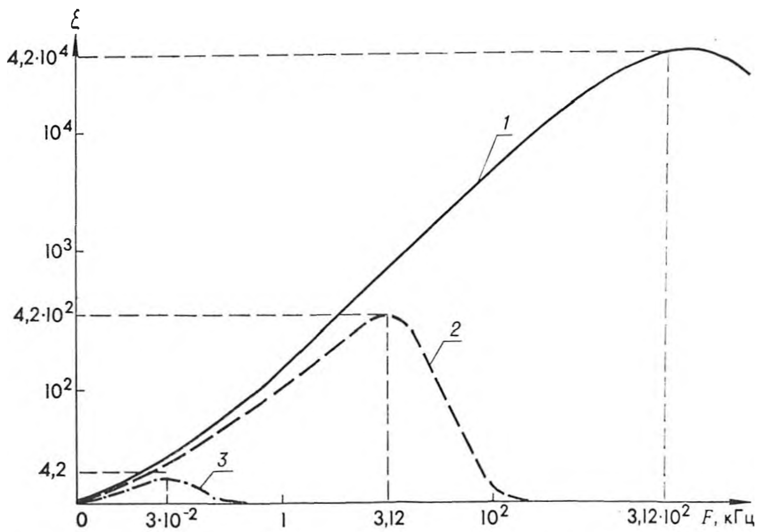
$$f_{B0} = 4/L^2\pi^2\sigma 10^{-7}. \quad (5)$$

Тогда оптимальную базу сложного сигнала B_0 можно определить следующим образом:

$$B_0 = TF_{\text{opt}} \simeq 4T/\pi^2L^2\sigma \cdot 10^{-7}. \quad (6)$$

Подставляя f_{B0} в (3), получаем оптимальную длину волны в водной среде:

$$\lambda_{B\text{opt}} = \pi L/2. \quad (7)$$



Зависимость коэффициента ξ от полосы F сигнала при $\delta=1{,}3\cdot10^{-2}$ См/м и $T=1$ с:

1 — L=10 м; 2 — L=100 м; 3 — L=1000 м

Тогда из (2) толщина скин-слоя при частоте $f=f_{E0}$

$$\delta_{opt}=\lambda_{Bopt}/2\pi=L/4. \qquad (8)$$

Следовательно, при выборе верхней частоты сигнала, согласно (5), оптимальная длина волны в водной среде и толщина скин-слоя определяются только расстоянием между электродами датчика и не зависят от проводимости среды в зоне контроля. При этом между электродами датчика укладывается ровно четыре скин-слоя, а максимальное затухание в центре между электродами, согласно (1), является величиной постоянной, равной e^2.

На рисунке представлена зависимость коэффициента ξ от полосы сложного сигнала F при определенных значениях T, L и σ. Максимум кривой соответствует оптимальной полосе сигнала F_{opt}.

Таким образом, используя формулы (5)—(8) применительно к конкретным значениям размеров контролируемой зоны (L), проводимости окружающей водной среды (σ) и длительности взаимодействия локальной неоднородности с ЭМП (T), можно оценить эффективность применения сложных сигналов, база которых $B>1$. Длительность взаимодействия, в свою очередь, определяется геометрическими размерами и скоростью движения локальной неоднородности.

В заключение следует заметить, что выражение (6) является приближенным. Погрешность определения оптимальной базы обусловлена тем, что при расчете затухания по формуле (1) не учтены пространственная структура ЭМП и геометрические размеры датчиков. Значение Δ в строгой постановке можно найти, применяя методы расчета статических ЭМП, при помощи средств вычислительной техники. На практике величина базы сигнала B не является критичной и может выбираться в относительно широких пределах, поэтому приведенные выражения вполне удовлетворяют требованиям инженерного подхода.

Список литературы

1. Акиндинов В. В., Нарышкин В. И., Рязанцев А. М. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 5. С. 913.
2. Чердынцев В. А., Киреев Н. Б. Устройство для счета движущихся объектов: А. с. 1328833 СССР // БИ. 1987. № 29.
3. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М., 1985.

Поступила в редакцию 17.02.87.

УДК 535.341

И. Т. КОЛЕВА, М. Н. ГЕОРГИЕВА,
А. В. КОЛЕСНИК, Г. М. НОВИК

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ПЛАЗМЫ КАПИЛЛЯРНОГО ИМПУЛЬСНОГО РАЗРЯДА

Пространственная и временная неоднородность капиллярного импульсного разряда (КИР) с двумя соосно расположенными диэлектрическими пластинами существенно затрудняет определение параметров его плазмы. Следует отметить, что работ по диагностике плазмы КИР явно недостаточно [1, 2].

Настоящая статья посвящена исследованию пространственно-временного распределения спектрального показателя поглощения в сплошном спектре КИР. Определение параметров неоднородной и нестационарной плазмы по сплошному спектру надежнее, так как этот спектр обусловлен торможением электронов и рекомбинацией, а время установления теплового равновесия для свободных электронов короче, чем для связанных, и максвелловское распределение скоростей их меньше искажается радиационными потерями по сравнению с распределением Больцмана и Саха для связанных состояний.

Электрическая схема использованной нами установки и условия получения разряда аналогичны описанным в [1, 2]. Разрядный промежуток

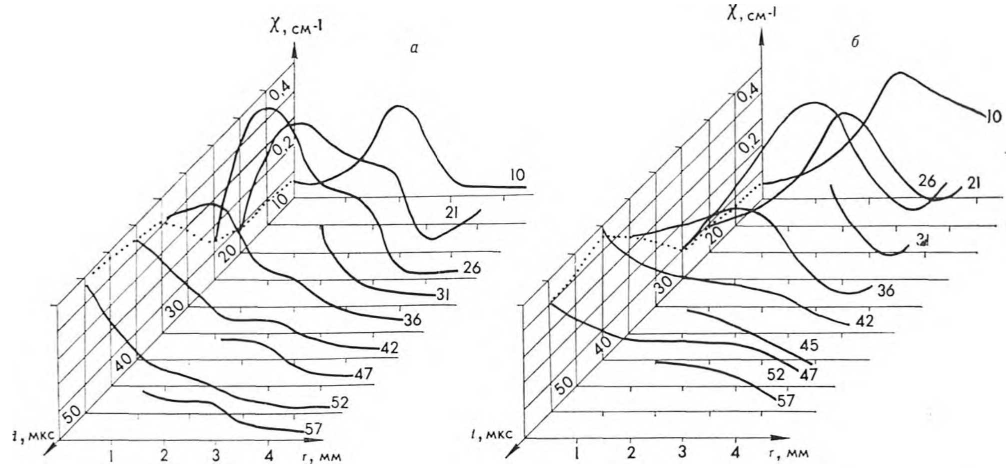


Рис. 1. Радиально-временное распределение спектрального показателя поглощения для $\lambda_1 = 432$ нм (*а*) и для $\lambda_2 = 632{,}8$ нм (*б*)

капилляра образовывался отверстиями диаметром 2,5 мм в двух диэлектрических ($C_5H_8O_2$) пластинах толщиной 1,8 мм, размещенных соосно на расстоянии 2 мм. Разрядный контур состоял из емкостного накопителя $C=420$ мкФ с начальным напряжением $V=2{,}5$ кВ, электродов из меди и капилляра. Индуктивность контура — 1,2 мкГн. Форма разрядного тока — колебания с сильным затуханием; амплитуда его в первом полупериоде 4,5 кА при длительности полупериода 90 мкс.

С учетом недостаточно высокой воспроизводимости параметров плазмы КИР в серии последовательных разрядов использована такая оптическая схема установки, которая позволила получать полную информацию о пространственно-временном распределении показателя поглощения по фоторазвертке спектра одного разрядного импульса. Регистрация спектра осуществлялась спектрохронографом, собранным на базе спектрографа СТЭ-1 и скоростного фоторегистратора СФР, работающего в режиме лупы времени. Сенситометрические свойства фотопленки определялись по результатам фотосъемки девятиступенчатого ослабителя в таких же условиях, как и при регистрации спектра КИР.

Изображение исследуемой плазмы проецировалось на щель спектрографа при помощи ахроматической линзы с фокусным расстоянием 7,2 см. Оптическая ось спектрографа при этом проходила через центр межэлектродного промежутка, а ось разряда была перпендикулярна к щели спектрографа. За исследуемой плазмой на оптической оси устанавливались вогнутое сферическое зеркало и линза так, что изображение плазмы в отраженном от зеркала свете проецировалось в натуральную величину на саму плазму. Эти условия можно реализовать в том случае, когда расстояние между зеркалом и линзой равно радиусу кривизны зеркала. Половина зеркала закрывалась непрозрачным экраном, что в условиях осесимметричного разряда позволяло измерять интенсивность свечения плазмы I_σ и интенсивность, усиленную за счет отраженного света I.

Связь между оптической плотностью плазмы D и интенсивностями I_σ, I можно выразить следующим образом:

$$D = \ln \frac{I_\sigma \tau}{I - I_\sigma}, \qquad (1)$$

где τ — коэффициент пропускания оптической системы.

В нашем случае оптическая система состояла из линзы и зеркала, и расчет τ проводился по методике, изложенной в [3].

По формуле (1) определялось поперечное распределение D на различных расстояниях от оси разряда. Измерения выполнены для двух участков спектра шириной $\Delta\lambda=1$ нм, центры которых соответствуют длинам волн $\lambda_1=432$ нм и $\lambda_2=632{,}8$ нм. Значения τ для указанных участков спектра составляли 0,62 и 0,78 соответственно.

Значения поперечного распределения оптической плотности осесимметричной плазмы использовались для расчета (с привлечением коэффициентов обратного преобразования Абеля для 10 зон разбиения [4]) радиального распределения показателей поглощения $\varkappa(r, t)$ (рис. 1). Ошибка определения $\varkappa(r, t)$ не превышала 30 %.

По данным работы [5] и теории тормозного и фотоионизационного поглощения излучения плазмы [6] рассчитаны показатели поглощения для фиксированных значений температуры $\varkappa(T)$.

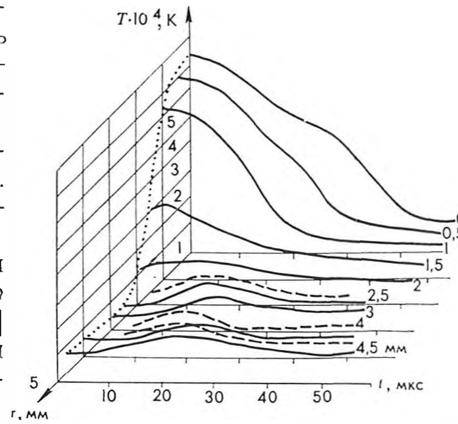


Рис. 2. Радиально-временное распределение температуры плазмы

В результате сопоставления полученных экспериментальных зависимостей $\varkappa(r, t)$ с вычисленными значениями $\varkappa(T)$ определены радиально-временные распределения температуры плазмы $T(r, t)$ (рис. 2), полученные по показателю поглощения на длине волны 432 (сплошные линии) и 632,8 нм (пунктирные линии).

Полученные данные согласуются с результатами измерения температуры другими методами [1, 5]. Анализ пространственно-временных зависимостей показателей поглощения позволяет сделать вывод о наличии существенного самопоглощения в сплошном спектре плазмы КИР. Эффект самопоглощения следует учитывать при разработке методик диагностики такой плазмы по эмиссионному спектру.

Список литературы

1. Колева И. Т., Георгиева М. Н., Петракиев А. П. Материалы 10-й Национальной конференц. по спектроскопии. В. Тырново, 1982. С. 114.
2. Колева И. Т., Петракиев А. П., Попова Е. // Ежегодник Софийского ун-та. 1982. Т. 75. С. 51.
3. Георгиева М. Н., Колева И. Т., Панева А. И. Электропромышленность и приборостроение. 1986. Кн. 1. С. 36.
4. Bockasten K. // JOSA. 1961. V. 51. № 9. P. 943.
5. Трухан Е. // Докл. АН БССР. 1968. Т. 12. № 5. С. 409.
6. Биберман Л. М., Норман Г. Э. // УФН. 1967. Т. 91. № 2. С. 194.

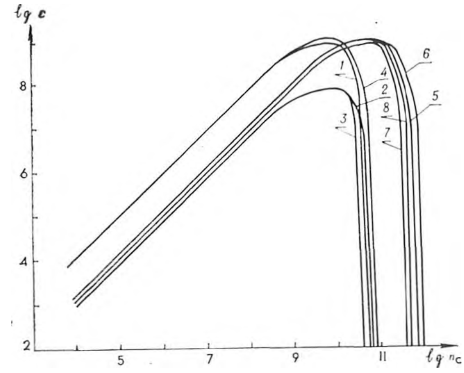
Поступила в редакцию 15.12.86.

УДК 523.035

А. В. АПАНАСОВИЧ, И. Р. ГУЛАКОВ, Е. Е. ПРОЛИСКО

УЧЕТ ПОСЛЕИМПУЛЬСОВ ФОТОПРИЕМНИКА В ИНФОРМАЦИОННОМ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА СЧЕТЧИКОВ ФОТОНОВ

Качество фотоприемников в счетчиках фотонов оценивается по отношению сигнал/шум, порогу чувствительности, квантовой эффективности детектирования, объему принимаемой информации. Наиболее общим критерием является скорость прохождения информации ε через фотоприемник [1]. В [2] показано, что с помощью ε и ее дисперсии можно за-



Зависимость скорости пропускания информации от уровня сигнала:

$1 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}1$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0{,}02$, $b = 1$; $2 - \tau = 10^{-8}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0$, $b = 1$; $3 - \tau = 10^{-8}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0{,}02$, $b = 1$; $4 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}1$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0$, $b = 1$; $5 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0{,}02$, $b = 1$; $6 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^5$ с$^{-1}$, $P = 0{,}02$, $b = 1$; $7 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0{,}2$, $b = 1$; $8 - \tau = 10^{-9}$ с, $\eta = 0{,}01$, $n' = 10^6$ с$^{-1}$, $P = 0{,}2$, $b = 10^9$

писать основные критерии качества счетчика фотонов в общем виде. Однако в работах [1, 2] не учитывалось наличие у реальных фотоприемников послеимпульсов и мертвого времени [3], что может оказывать заметное влияние на процесс фотодетектирования.

Пусть на вход фотоприемника поступает стационарный пуассоновский поток фотонов интенсивностью n_c, квантовый выход фотоприемника q, длительность одноэлектронного импульса τ постоянна, суммарная интенсивность импульсов темнового тока и фона n'. Предположим, что любой импульс тока фотоприемника с вероятностью P сопровождается послеимпульсом, момент наступления которого определяется плотностью распределения $f(t-x)$, где x — момент наступления порождающего импульса. Примем, что послеимпульсы, импульсы фона и темнового тока относятся к шумам и несут «отрицательную» информацию. Полезной считается разность между информацией, поступающей с выхода фотоприемника, и «шумовой» информацией. Энтропия сообщения: $H = \sum\limits_i P_i \log_2 P_i$, где P_i — вероятность i возможных исходов.

Выделим на интервале детектирования произвольный промежуток времени, равный длительности одноэлектронного импульса τ. На таком интервале или будет зарегистрировано одно событие с вероятностью P_1, или с вероятностью P_0 регистрации не произойдет. Так как другие исходы невозможны, то

$$P_1 + P_0 = 1. \tag{1}$$

Обозначим через $P(0, \tau)$ вероятность отсутствия импульсов на интервале τ. Для осуществления регистрации на τ необходимо, чтобы за этот промежуток времени поступил один или более импульсов и одновременно на интервале длительностью τ, предшествующем первому из них, не было других импульсов, т. е.

$$P_1 = [1 - P(0, \tau)] P(0, \tau). \tag{2}$$

Рассмотрим событие B, состоящее в отсутствии импульсов на интервале длительности τ. Представим B в виде произведения $B = AC$, где A обозначает отсутствие импульсов основного потока, а C — отсутствие послеимпульсов на интервале τ. Очевидно, что

$$P(0, \tau) = P(B) = P(A) P(C/A), \tag{3}$$

причем

$$P(A) = e^{-n\tau}, \quad \text{где } n = qn_c + n'. \tag{4}$$

В силу пуассоновского характера исходного потока событие (C/A) можно рассматривать как отсутствие любых послеимпульсов на τ, порожденных импульсами основного потока до момента начала выделенного интервала τ. Для вычисления вероятности $P(C/A)$ рассмотрим некоторый временной интервал T, который предшествует интервалу τ. Тогда вероятность того, что порожденный каким-либо событием исходного потока, происшедшим на интервале T в момент, отстоящий от начала интервала τ на время x, послеимпульс не попадает в интервал τ, равна

$$F(x) = 1 - \int\limits_{x}^{x+\tau} f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Число событий ν исходного потока, порождающего послеимпульсы, подчиняется распределению

$$P\{\nu = i\} = \frac{(npT)^i}{i!} e^{-npT}, \ i = 0, \ 1, \ \ldots . \qquad (6)$$

Каждое из этих событий наступает на T независимо от других событий с плотностью распределения

$$q(x) = \frac{1}{T}. \qquad (7)$$

Тогда, учитывая (5) — (7), находим

$$P(C/A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(npT)^i}{i!} e^{-npT} \left[\int\limits_{0}^{T} \frac{1}{T}\, dxp \left(1 - \int\limits_{x}^{x+\tau} f(t)\,dt \right) \right]^i .$$

Упростив последнее выражение и устремляя T к бесконечности, получаем $P(C/A) = \exp\left\{ -np \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{x}^{x+\tau} f(t)\,dt \right\}$. Подставляя это выражение в (3) с учетом (4), имеем $P(0, \tau) = \exp\left[-n\tau - np \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{x}^{x+\tau} f(t)\,dt \right]$. Предполагая, в соответствии с [4], что $f(t) = be^{-bt}$, b, $t > 0$, получаем

$$P(0, \tau) = \exp\left[-n\tau - \frac{np}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right]. \qquad (8)$$

Соответственно для суммарного потока импульсов фона и темнового тока

$$P'(0, \tau) = \exp\left[-n'\tau - \frac{n'p}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right]. \qquad (9)$$

Отсюда на основании (2) находим

$$P_1 = \left\{ 1 - \exp\left[-n\tau - \frac{np}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right] \right\} \exp\left[-n\tau - \frac{np}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right],$$

$$P_1' = \left\{ 1 - \exp\left[-n'\tau - \frac{n'p}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right] \right\} \exp\left[-n\tau - \frac{np}{b} (1 - e^{-b\tau}) \right].$$

Скорость прохождения информации через фотоприемник

$$\varepsilon = \frac{H - H'}{\tau} = -\frac{1}{\tau} [P_1 \log_2 P_1 + P_0 \log_2 P_0 - P_1' \log_2 P_1' - P_0' \log_2 P_0'],$$

где P_0 и P_1, P_0' и P_1' связаны соотношением (1).

Из рисунка видно, что величина темнового тока практически не влияет на результат (кривые *5* и *6*). Всегда предпочтительнее фотоприемник с меньшей длительностью одноэлектронного импульса τ (кривые *3* и *5*). Наличие послеимпульсов начинает сказываться лишь при входных интенсивностях, близких к критической (кривые *1* и *4*). Максимум скорости прохождения информации наступает при $n_c \simeq 1/\tau g$. Следовательно, при высокой входной интенсивности иногда выгоднее брать фотоприемник с более низким квантовым выходом (кривые *1*, *5*).

Список литературы

1. Ветохин С. С., Гулаков И. Р., Перцев А. Н. // Докл. АН БССР. 1983. № 4. С. 323.
2. Гулаков И. Р., Перцев А. Н. Там же. 1984. № 7. С. 613.
3. Денисенко В. Н., Иванов М. А., Прокопович И. П. // Метрология. 1985. № 6. С. 24.
4. Ветохин С. С., Гулаков И. Р., Перцев А. Н. и др. Одноэлектронные фотоприемники. М., 1986. С. 92.

Поступила в редакцию 03. 11. 86.

Математика и механика

$\int \approx \sum$ $E(X|\mathcal{F})$ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

УДК 514.765

А. Н. МЕТЛИЦКИЙ

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ ВПОЛНЕ РАСЩЕПЛЯЕМОЙ ГРУППОЙ Ли, И ИХ МОРФИЗМЫ

В работе [1] для произвольной группы Ли G введено понятие общей глобальной пары (G, Γ), определено однородное пространство Q, порожденное этой парой. Представляет интерес случай, когда сама структура группы Ли G определяет гладкие эндоморфизмы этой группы. Данная работа посвящена рассмотрению такой ситуации.

1. Введем

Определение 1. Пусть группа Ли G представима в виде полупрямого произведения $G=G_0=K_0 * G_1$, где K_0 — нормальный делитель, а G_1 — подгруппа G; в свою очередь, $G_1=K_1 * G_2$ и т. д., $G_{n-1}=K_{n-1} * G_n$, где G_n не представима в виде полупрямого произведения. Будем называть такую группу Ли G вполне расщепляемой и записывать в виде:

$$G = K_0 * K_1 * \ldots * K_i * G_{i+1} = \{g \in G,\ g = k_0 k_1 \ldots k_i h_{i+1},\ k_i \in K_i,\ i = \overline{0,\ n-1}\}. \qquad (1)$$

Если в (1) G_n — простая подгруппа G, будем называть G расщепляемой. В этом случае справедлива

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

а) G расщепляема;

б) на G существуют гладкие идемпотенты $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, такие, что $\Phi_j \circ \Phi_{j-1} \circ \ldots \circ \Phi_0 (G) \subset \Phi_{j-1} \circ \ldots \circ \Phi_0 (G)$, $j = \overline{1,\ n-1}$;

в) на G существуют гладкие попарно коммутативные идемпотенты $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, для которых $\Phi_k \circ \Phi_l = \Phi_l$, если $l \geqslant k$, $k,\ l = \overline{0,\ n-1}$.

В условиях б) и в) $\Phi_n(G)=G$ либо $\Phi_n(G)=e$, где e — единица G.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ б), а) $\Rightarrow$ в) будем доказывать параллельно. Положим

$$\Phi_i(G)=G_{i+1} : \Phi_i(g)=\Phi_i(k_0 k_1 \ldots k_i h_{i+1})=h_{i+1},\ \Phi_n(G)=e. \qquad (2)$$

Для $\forall g,\ g' \in G$ в силу того, что $K^i = K_0 K_1 \ldots K_i$ есть нормальные делители G, имеем: $\Phi_i(gg') = \Phi_i(k_0 k_1 \ldots k_i h_{i+1} k_0' k_1' \ldots k_i' h_{i+1}') = \Phi_i(k_0 \ldots \ldots k_i h_{i+1} k_0' \ldots k_i' h_{i+1}^{-1} h_{i+1} h_{i+1}') = h_{i+1} h_{i+1}' = \Phi_i(k_0 \ldots k_i h_{i+1}) \Phi_i(k_0' \ldots k_i' \times \times h_{i+1}') = \Phi_i(g) \Phi_i(g')$. Гладкость Φ_i вытекает из того, что группа Ли G, как многообразие, есть прямое произведение K^i на G_{i+1}. Из (2) следует, что $\Phi_i^2 = \Phi_i$. Так как $\Phi_j \circ \ldots \circ \Phi_0(g) = \Phi_j \circ \ldots \circ \Phi_0(k_0 \ldots k_j h_{j+1}) = \Phi_j \circ \ldots \circ \Phi_1(k_1 \ldots k_j h_{j+1}) = \ldots = \Phi_j(k_j h_{j+1}) = h_{j+1} = h_j = \Phi_{j-1} \circ \ldots \circ \Phi_0(g)$ для $\forall g \in G$, то из а) $\Rightarrow$ б).

Пусть для определенности $l \geqslant k$, тогда $\Phi_l \circ \Phi_k(g) = \Phi_l \circ \Phi_k(k_0 \ldots k_k h_{k+1}) = \Phi_l(h_{k+1}) = \Phi_l(k_{k+1} \ldots k_l h_{l+1}) = h_{l+1} = \Phi_l(g)$. С другой стороны, $\Phi_k \circ \Phi_l(g) = \Phi_k \circ \Phi_l(k_0 \ldots k_l h_{l+1}) = \Phi_k(h_{l+1}) = h_{l+1} = \Phi_l(g)$. Тем самым доказана импликация а) $\Rightarrow$ в).

Проверим далее справедливость импликаций б) $\Rightarrow$ а) и в) $\Rightarrow$ а). Известно [1], что задание на G идемпотента Φ_0 эквивалентно представлению G в виде $G = \operatorname{Ker}\Phi_0 * \operatorname{Im}\Phi_0 = K_0 * G_1$. Покажем, что Φ_1 можно ограничить на G_1. Имеем: $\Phi_1(G_1) = \Phi_1 \circ \Phi_0(G) \subset \Phi_0(G) = G_1$. Из того, что $\Phi_1^2(g) = \Phi_1(g)$ $\forall g \in G$, следует, что $\Phi^2_{1|G_1} = \Phi_{1|G_1}$. Таким образом, $G_1 = \operatorname{Ker}\Phi_{1|G_1} * \operatorname{Im}\Phi_{1|G_1} = K_1 * G_2$.

Пусть теперь $\Phi_i(G_i) \subset G_i$ для всех $i < p$. Тогда в силу предположения и б) $\Phi_p(G_p) = \Phi_p \circ \Phi_{p-1}(G_{p-1}) = \ldots = \Phi_p \circ \Phi_{p-1} \circ \ldots \circ \Phi_0(G) \subset \Phi_{p-1} \circ \ldots \circ \Phi_0(G) = \ldots = \Phi_{p-1}(G_{p-1}) = G_p$. Так как $\Phi^2_{p|G_p} = \Phi_{p|G_p}$, то $G_p = \operatorname{Ker}\Phi_{p|G_p} * \operatorname{Im}\Phi_{p|G_p} = K_p * G_{p+1}$ для всех $p = \overline{0, n-1}$. Остается заметить, что, так как $\Phi_{n|G_n} = G_n$ либо $\Phi_{n|G_n} = e$, то G_n — простая подгруппа G. Тем самым из б) $\Rightarrow$ а).

В условии в) соотношения $\Phi_k \circ \Phi_l = \Phi_l$ позволяют упорядочить Φ_i в том смысле, что $\operatorname{Ker}\Phi_0 \subset \operatorname{Ker}\Phi_1 \ldots \subset \operatorname{Ker}\Phi_{n-1}$. Дальнейшее доказательство импликации в) $\Rightarrow$ а) проводится аналогично предыдущему индукцией по i. Заметим только, что $\Phi_1(G_1) = \Phi_1 \circ \Phi_0(G) = \Phi_0 \circ \Phi_1(G) \subset G_1$, так как $\forall g \in G$ $\Phi_0(\Phi_1(g)) \in G_1$; и, при $i = p$, $\Phi_p(G_p) = \Phi_p \circ \ldots \circ \Phi_0(G) = \Phi_{p-1} \circ \ldots \circ \Phi_0 \circ \Phi_p(G) \subset G_p$. Последнее включение справедливо в силу того, что $\forall g \in G$. $\Phi_0(g) \in G_1, \Phi_1(g) \in G_2, \ldots, \Phi_{p-1}(g) \in G_p$ по индуктивному предположению.

Следствие. Идемпотенты $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$, определенные в (2), порождают коммутативную полугруппу $\Gamma_1' = [\Phi_0, \ldots, \Phi_n]$, причем $\Gamma_1' = \{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\}$.

Доказательство следует из (2).

З а м е ч а н и е. В дальнейшем нас будет интересовать случай вполне расщепляемой группы Ли G. Ясно, что такая группа Ли порождает гладкие идемпотенты Φ_i, определяемые по формуле (2) и образующие коммутативную полугруппу $\Gamma_1 = \{\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}\}$. Введем

Определение 2. Пусть группа Ли G представима в виде полупрямого произведения $G = K * H$. Назовем нетривиальный нормальный делитель K базовым в G, если в G не существует нетривиального нормального делителя K' такого, что $K' \subset K$ и $G = K' * G'$.

Определение 3. Вполне расщепляемую группу Ли G назовем максимально вполне расщепляемой, если в расщеплении (1) K_i — базовые в G_i для всех i.

Всюду далее G удовлетворяет определению 3.

2. Зададим на G наряду с Γ_1 конечную коммутативную группу гладких инволютивных автоморфизмов $\Gamma_2 = [\Psi_0, \ldots, \Psi_m]$ с условиями

$$\Psi_s(K_i) \subset K_i, \ \Psi_s(G_{i+1}) \subset G_{i+1}, \ s = \overline{0, m}. \tag{3}$$

Теорема 2. Пары (G, Γ_i), где $\Gamma_i = [\Psi_0 \circ \Phi_i, \ldots, \Psi_m \circ \Phi_i]$ есть общие глобальные пары [1] для каждого фиксированного i.

Доказательство легко следует из определения общей глобальной пары.

Следствие. В силу (3) и того, что $\Phi_{i|G_{i+1}} = G_{i+1}$, пары (G_{i+1}, Γ_i'), где Γ_i' состоит из ограничений элементов Γ_i на G_{i+1}, есть глобальные пары в смысле [2] для каждого фиксированного i.

Пару (G, Γ), где $\Gamma = [\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_m]$ будем также называть общей глобальной парой. Из определения Γ_1 и Γ_2 и теоремы 2 следует, что Γ — конечная коммутативная полугруппа гладких эндоморфизмов G с условием: $\Lambda^3 = \Lambda$, $\forall \Lambda \in \Gamma$.

Определение 4. Пару (G, Γ) назовем минимальной полной общей глобальной парой, если $H^\Gamma = \{h \in G, \ \Lambda(h) = h, \ \forall \Lambda \in \Gamma\}$ — дискретная подгруппа G и для любой подгруппы $\Gamma' \subset \Gamma$ $H^{\Gamma'}$ не является дискретной.

Общая глобальная пара (G, Γ) определяет глобальную пару (G_n, Γ_n), где Γ_n состоит из ограничений элементов Γ на G_n. Справедлива

Теорема 3. Общая глобальная пара (G, Γ) минимальная полная тогда и только тогда, когда (G_n, Γ_n) минимальная полная.

Доказательство теоремы 3 мы здесь опускаем. Заметим только, что оно следует из конечности Γ и Γ_n и справедливости утверждения теоремы 3 для порождающих элементов Γ и Γ_n.

3. Пара (G, Γ_1) порождает однородные пространства:

$$M_i = \{x_i = g\Phi_i(g^{-1}) = k_0 \ldots k_i\}. \tag{4}$$

Действие G в M_i определяется естественным образом при помощи отображений $x_i \to T_g(x_i) = gx_i\Phi_i(g^{-1})$. В силу следствия теоремы 1 M_i определяют все однородные пространства, порожденные (G, Γ_1).

Пара (G, Γ_2) определяет однородные симметрические пространства $Q(\Gamma_2)$ [2]:

$$N_s = \{y_{s'} = g\Psi_s(g^{-1})\} \tag{5}$$

с действием G:

$$y_{s'} \to T_g(y_s) = gy_s\Psi_s(g^{-1}).$$

Пары (G, Γ_i) порождают однородные пространства $Q(\Gamma_i)$ [1]:

$$R_{si} = \{r_{si} = g\,(\Psi_s \circ \Phi_i)\,(g^{-1}) = k_0 \ldots k_i h_{i+1} \Psi_s'\,(h_{i+1}^{-1})\} \tag{6}$$

с действием G по следующему правилу: $r_{si} \mapsto T_g\,(r_{si}) = gr_{si}\,(\Psi_s \circ \Phi_i)\,(g^{-1})$.

Пары (G_{i+1}, Γ_i') порождают однородные симметрические пространства

$$T_{si} = \{t_{si} = \Phi_i\,(g)\,(\Psi_s \circ \Phi_i)\,(g^{-1}) = h_{i+1}\Psi_s\,(h_{i+1}^{-1})\} \tag{7}$$

с действием G: $t_{si} \mapsto T_g\,(t_{si}) = \Phi_i\,(g)\,t_{si}\,(\Psi_s \circ \Phi_i)\,(g^{-1})$. Справедлива

Теорема 4. Отображения

$$\varphi_{ki} : M_i \mapsto M_k : x_i \mapsto x_i\Phi_k\,(x_i^{-1}),$$
$$\varphi_{si}^{k} : R_{si} \mapsto M_k : r_{si} \mapsto r_{si}\Phi_k\,(r_{si}^{-1}),$$
$$f_{si}^{s'} : R_{si} \mapsto N_s' : r_{si} \mapsto r_{si}\,(\Psi_s \circ \Phi_i)\,(r_{si})\,\Psi_s\,(r_{si}^{-1}),$$
$$f_{si}^{sk} : R_{si} \mapsto R_{sk} : r_{si} : \mapsto r_{si}\,(\Psi_s' \circ \Phi_i)\,(r_{si})\,(\Psi_s \circ \Phi_k)\,r_{si}^{-1}),$$
$$\alpha_{si}^{sp} : R_{si} \mapsto T_{sp} : r_{si} \mapsto \Phi_p\,(r_{si}),$$
$$\alpha_s^{si} : N_s \mapsto T_{si} : y_s \mapsto \Phi_i\,(y_s),$$

где $k \leqslant i$, $p \geqslant i$, есть морфизмы однородных пространств (4)—(7).

Доказательство проводится непосредственной проверкой по определению морфизма однородных пространств.

Заметим, что вопрос существования вполне расщепляемых групп Ли при $i > 0$ решается положительно. К таким группам относятся, например, группы движений галилеевых пространств [3].

Список литературы

1. Ведерников В. И., Ведерников С. В. // Изв. вузов СССР: Матем. 1984. № 7. С. 34.
2. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1983. Т. 15. С. 165.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969.

Поступила в редакцию 01.12.86.

УДК 514.75

С. В. ВЕДЕРНИКОВ, Э. Ш. ЗАРИПОВ

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ НЕЕВКЛИДОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим группу Ли $G = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & T \end{pmatrix} \Big/ a \in R_k^n, \quad T\varepsilon_0 T = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \right.$

$= \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix}, \ T \in O(n, k), \ k+p=n \Big\}$ — группа движений неевклидового пространства. В группе G имеются две подгруппы:

1) $H = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \Big/ T\varepsilon_0 T = \varepsilon_0 \right\} = O(n+1, k)$;

2) $K = \left\{ k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & E_n \end{pmatrix} \Big/ \bar{a} \in R_k^n \right\}$.

Они называются группой вращения и группой параллельных переносов, соответственно, группа G является полупрямым произведением этих подгрупп: $G = K * H$, $a = kh = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & T \end{pmatrix}$, $a \in G$, $k \in K$, $h \in \in H$, где K — нормальный делитель группы G.

Рассмотрим следующие эндоморфизмы группы G:

$$1) \ \Phi_0 : G \to G : kh \to h : \Phi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$2) \ \Phi_i = I(\varepsilon_i) : G \to G : a \to \varepsilon_i a \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & E_i & \\ & & E_j \end{pmatrix}, \ i+j=n.$$

Пусть $\Gamma = [\Phi_0, \Phi_i]$, $i = 1, \ldots, n-1$. Строим глобальную пару (G, Γ) [1]. Очевидно, что полученная пара будет полной.

Теорема 1. Существуют только следующие однородные неизоморфные пространства, порожденные глобальной парой (G, Γ):

а) $M_0 = \{x_0 / x_0 = a\Phi_0(a^{-1}), a \in G\}$;

б) $M_1 = \{x_1 / x_1 = a\Phi_i(a^{-1}), a \in G\}$;

в) $M = \{x / x = a\Phi_i(\Phi_0(a^{-1})), a \in G\}$.

Теорема 2. Пространство M_0 есть неевклидово псевдоевклидово пространство [2].

Теорема 3. Пространство M_1 есть пространство плоскостей размерности i.

Теорема 4. Пространство M есть пространство плоскостей с произвольными точками на них.

Рассмотрим специальный морфизм [3]:

$$\sigma : N_2 \to 2^{N_1} : y \to N_{1y} = \{x \in N_1 / f(x, y) \in z\}, \tag{2}$$

где f — морфизм f: $N_1 \times N_2 \to P$, N_1, N_2, P—G-пространства; $z \subset P$, z — инвариантная часть P. В качестве f можно взять

$$f(x, y) = x\Phi(y)\Psi(x^{-1})y^{-1}, \ x \in N_1, \ y \in N_2, \tag{3}$$

где Φ, Ψ — эндоморфизмы G-пространств, так что N_1 есть Φ-пространство; N_2—Ψ-пространство. Будем строить с помощью σ геометрические образы однородных пространств, порожденных парой (G, Γ). Возьмем в качестве N_1 пространство M_0, а N_2 — пространство M_1. Специальный морфизм представит элементы M_1 в виде подмногообразий в M_0. Имеем $M_y = \{x \in M_0 / x\Phi_0(y)\Phi_i(x^{-1})y^{-1} \in z\}$, $y \in M_1$. В этом случае $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (E - A_i)(\bar{x} - \bar{y}) & E_n \end{pmatrix}$, $\bar{x}$, $\bar{y} \in R_k^n$, $x \in M_0$, $y \in M_1$, и правая часть этого выражения определяет неоднородное G-пространство векторов $\bar{E}^n$.

Легко заметить, что отображение $\mu : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{z} & E_n \end{pmatrix} \to |\bar{z}|$ — инвариант. Возьмем композицию инварианта с морфизмом $f(x, y)$ и рассмотрим следующие два случая:

1) $\bar{z} = \bar{o}$. Тогда $M_y = \{x \in M_0 / f(x, y) = E_{n+1}\}$, и получаем уравнение $(E - A_i)(x - y) = 0$, которое определяет плоскость в пространстве M_0.

2) $|\bar{z}| = r$, $r \in R$. В этом случае

$$M_y = \left\{ x \in M_0 / f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (E - A_i)(\bar{x} - \bar{y}) & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{z} & E_n \end{pmatrix} \right\},$$

а композиция с указанным инвариантом дает $|(E-A_i)(\bar{x}-\bar{y})| = r$. Это уравнение цилиндра с i-мерными образующими. В случае $r^2=0$ цилиндр лежит в изотропном конусе, $r^2<0$ — внутри изотропного конуса, а в случае $r^2>0$ — вне изотропного конуса.

Теперь для пространств M_0, M имеем $f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{x} - \bar{y} & E_n \end{pmatrix}$, $x \in M_0$, $y \in M$, $\bar{x},\ \bar{y} \in R^n_k$. Таким образом, снова получаем элементы пространства E^n. Далее аналогично:

1) $\bar{z}=\bar{o}$. Тогда $\bar{x}-\bar{y}=\bar{o}$ определяет точку в M_0.

2) $|\bar{z}|=r$, $r \in R$. Получим

$$|\bar{x}-\bar{y}|=r. \tag{4}$$

Это уравнение сферы с центром в точке $\bar{y}$, т. е. $M_y=\{x \in M_0/|\bar{x}-\bar{y}|=r\}$ — сфера $S_y \subset M_0$, $y \in M$. При $r^2>0$ и $r^2<0$ сферы (4) называются соответственно сферами вещественного и мнимого радиусов, а при $r^2=0 \Rightarrow r=0$ — изотропным конусом.

Аналогичные результаты получены С. И. Ковалевичем для группы евклидовых движений.

Как известно [1], глобальная пара $(G,\ \Gamma)$ порождает глобальные пары $(H^\Phi,\ \Gamma)$, где $\Phi \subset \Gamma$, а Γ' состоит из ограничений элементов группы Γ на H^Φ. В частном случае мы возьмем в качестве Φ эндоморфизм $\Phi_k \circ \Phi_0$, и тогда $H^\Phi = \left\{ a/a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},\ T\varepsilon_0 T = \varepsilon_0 \right\}$. Здесь мы полагаем $\varepsilon_0 = E$, т. е. H^Φ изоморфно $O(n)$. Группа Γ' при отождествлении H^Φ с $O(n)$ будет порождена автоморфизмами $\Psi_i = I(\varepsilon_i)$, $\varepsilon_i = \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & -E_j \end{pmatrix}$. Очевидно, что полученная глобальная пара будет полной и соответствующие ей однородные пространства будут пространствами F-мерных плоскостей эллиптического пространства. (При $i=1$ получим эллиптическое пространство.)

В самом деле, определенная нами глобальная пара порождает однородное пространство:

$$Q(\Gamma') = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)/x_i = a\Phi_i(a^{-1}) = a\varepsilon_i a^{-1}\varepsilon_i,\ a \in G,\ k \leqslant n\}.$$

Рассмотрим изоморфное ему однородное пространство:

$$M = \left\{ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)/y_i = \bar{e}_i \bar{e}_i',\ \bar{e}_i = a \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in O(n) \right\},$$

где изоморфизм определяется следующим образом: $y_1 = \frac{1}{2}(x_1\varepsilon_1 + x_k\varepsilon_k)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_2\varepsilon_2 - x_1\varepsilon_1)$, $\ldots$, $y_k = \frac{1}{2}(x_k\varepsilon_k - x_{k-1}\varepsilon_{k-1})$. Действие группы $O(n)$ в M индуцируется отображением f и определяется следующим образом: $T_a: (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k) \to (ay_1a^{-1},\ ay_2a^{-1},\ \ldots,\ ay_ka^{-1})$. Изучим полиномиальные морфизмы:

$$P: M \to M(n): (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k) \to P(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k). \tag{5}$$

В силу того, что $y_i^2 = y_i$, $y_iy_j = 0$ $(i \neq j)$, будем иметь $P(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k) = \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \ldots + \lambda_ky_k$, причем в $M(n)$ структура G-пространства вводится отображением $T_a(z) = aza^{-1}$, $\forall z \in M(n)$. Образом этого морфизма будет однородное пространство:

$$N=\left\{z/z=a\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}a^{-1},\ a\in O(n)\right\},$$

изоморфное M в случае $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$.

Матрицу $z\in N$ можно рассматривать как матрицу квадратичной формы, так как она симметричная, и она определит квадрику в эллиптическом пространстве с уравнением

$$\bar{x}'z\bar{x}=0. \tag{6}$$

Квадрика (6) будет находиться в эллиптическом пространстве, если $(\bar{x}\bar{x})=1$. Вводя обозначение $x=\bar{x}\bar{x}'$, уравнение (6) можем переписать в виде

$$xzx=0. \tag{7}$$

Отметим, что квадрику (7) будет задавать не только матрица z, но и матрица λz, $\lambda\neq 0$. Поэтому, строго говоря, можно ввести однородное пространство квадрик эллиптического пространства, которое будет изоморфно фактор-пространству N/K, где K — отношение эквивалентности $z\leftrightarrow\lambda z$.

Матрицы y_i определяют точки эллиптического пространства, ортогональные между собой и удовлетворяющие условиям $zy_i=\lambda_i y_i$. Такие точки называются собственными точками оператора z или центрами квадрики [4].

Так как $z\bar{e}_i=\lambda_i\bar{e}_i$, векторы $\bar{e}_i$ будут собственными векторами самосопряженного оператора z. Пусть точка x принадлежит квадрике. Тогда

$$xzx=0\Leftrightarrow\lambda_1(\bar{e}\bar{e}_1)^2+\lambda_2(\bar{e}\bar{e}_2)^2+\ldots+\lambda_k(\bar{e}\bar{e}_k)^2\Leftrightarrow\lambda_1\cos^2 d_1+ \\ +\lambda_2\cos^2 d_2+\ldots+\lambda_k\cos^2 d_k, \tag{8}$$

где d_i — расстояния от точки x до центра квадрики y_i. Полученное условие (8) можно рассматривать как геометрическое условие принадлежности данной точки x эллиптического пространства данной квадрике z.

Аналогично изучается более общий случай однородного пространства:

$$Q(\Gamma')=\{(y_1,\ \ldots,\ y_k)/y_1=a\Psi_{e_1}(a^{-1}),\ \ldots,\ y_k=a\Psi_{e_k}(a^{-1}),\ a\in G\}.$$

Здесь $N=\{z/z=\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_k y_k=a\varepsilon a^{-1},\ a\in G\}$, где

$$\lambda_i\neq\lambda_j,\ i\neq j \text{ и } \varepsilon=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{e_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k E_{e_k} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix},\ (e_1+\ldots+e_k=k)$$

определяет матрицу z квадратичной формы пространства Евклида, а также квадрику в пространстве плоскостей эллиптического пространства S_{n-1} с уравнением $xzx=0$. Это уравнение эквивалентно условию $\lambda_1\cos^2 d_1+\lambda_2\cos^2 d_2+\ldots+\lambda_k\cos^2 d_k$, где d_i — расстояния от точки квадрики до плоскости эллиптического пространства S_{n-1}, определяемой проектором

$$y_i=a\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}a^{-1},\ a\in G.$$

Такая плоскость называется плоскостью центров квадрики.

Список литературы

1. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1983. Т. 15. С. 165.

2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М., 1975. Т. 7. С. 49.
4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969.

Поступила в редакцию 03.12.87.

УДК 519.852.35:853.4

Ч. А. ДАНГАЛЧЕВ

СЕТЕВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ МОДУЛЯ

Пусть $S=\{I, V\}$ — конечная ориентированная сеть, в которой I — множество узлов; V — множество дуг $I = I_v \cup I_s \cup I_m$, где I_v — входные узлы размножители; I_s — узлы сумматоры; I_m — узлы взятия модуля.

Узел $i \in I_v$ имеет один вход и конечное число выходов. Входной поток X, поступив на узел i, проходит через него и передается далее в виде $X_1, X_2, \ldots$ выходных сигналов, представляющих копии входного сигнала.

Узел $i \in I_d = I_s \cup I_m$ имеет конечное число входов и один выход. Входные сигналы $X_1, X_2, \ldots, X_k$, поступив на узел $i \in I_d$, проходят через него и передаются далее в виде выходного сигнала $Y = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j + a_i$, если $i \in I_s$, или $Y = \left|\sum\limits_{j=1}^{k} X_j + a_j\right|$, если $i \in I_m$, где a_i — характеристика узла $i \in I_d$. Выход Y из узла i будем обозначать через X_{ii}, чтобы отличить от входных сигналов.

Для дуги $(i, j) \in V$, $i, j \in I$, кроме традиционных характеристик d_*, d^* — нижней и верхней пропускных способностей, введем новую — $A_{ij} \neq \neq 0$, отражающую специальное свойство дуги (i, j) передавать поток X_i в узел j в виде $A_{ij}X_i$. Дугам $(i, j) \in V$, где $i \in I_v$, $j \in I_s$, не приписываются характеристики d_*, d^*. Если $i \in I_m$, то $d_{*ij} \geqslant 0$.

Сеть S имеет один выходной узел t, принадлежащий множеству I_s. Если для дуги (i, j) и $i \in I_v$, то $j \in I_s$, и если $j \in I_s \setminus t$, то $i \in I_v$.

Определение 1. Входные сигналы X_i, $i \in I_v$, называются планом, если потоки на сети S удовлетворяют ограничениям:

$$d_{*i} \leqslant X_i \leqslant d_i^*, \quad i \in I_v, \tag{1}$$

$$d_{*ij} \leqslant X_{ii} \leqslant d_{ij}^*, \quad i \in I_d \setminus t. \tag{2}$$

Граф, образованный из узлов $i \in I_d$ и соответствующих им дуг, является деревом. Рассмотрим задачу:

$$X_t \to \min \tag{3}$$

при ограничениях (1) и (2).

Пусть X — допустимый поток, т. е. план. Для каждого узла $i \in I_d$ определим E_i следующим способом: $E_t = 1$; $E_i = 1$, если $E_i = \operatorname{sign}(\Sigma X_j + a_i)$, если $i \in I_m$, где суммируем по всем входным сигналам в узле i (если сумма равняется нулю, то выбираем произвольный знак).

Решаем систему:

$$M_t = 1; \quad M_i = A_{ij}E_jM_j, \tag{4}$$

где $(i, j) \in V$, $i \in I_d \setminus t$.

Система имеет единственное решение, так как граф является деревом. Совокупность всех узлов $j \in I$, для которых существует путь, связывающий узел $s \in I_v$ с узлом $i \in I_d$ и проходящий через j, обозначим через C_{si}. Определяем также множества $K_{si} = C_{si} \cap I_s$ и $K_s = \bigcup\limits_{s \in I_v} C_{si}$. Возьмем произвольное подмножество J_0 множества I_d.

Рассмотрим матрицу $G = (g_{is}, i \in J_0, s \in I_v)$, где $g_{is} = \sum\limits_{k \in K_{si}} A_{sk}M_k$.

Пусть I_{v0} — произвольное подмножество I_v.

Определение 2. Совокупность $T=\{J_0, I_{v0}\}$ называется опорой, если $|I_{v0}|=|J_0|$ и $\det G_0 \neq 0$, где $G_0 = G(J_0, I_{v0})$. Совокупность $\{X, T\}$ будем называть опорным планом.

Определение 3. Опорный план $\{X, T\}$ является невырожденным, если на нем выполняются неравенства: $d_{*i} < X_{ii} < d_i^*$, $i \in I_{v0}$, и $d_{*ij} < X_{ii} < d_{ij}^*$, $(i, j) \in V$, $i \in J_{\text{н}} = I_t \setminus J_0$.

Для каждого $i \in J_0$ выполняется:

$$M_i X_{ii} = \sum_{s \in I_v} X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + \sum_{j \in K_i} E_j M_j a_j. \tag{5}$$

Рассмотрим поток $\overline{X} = X + \Delta X$. Аналогично (5) получаем:

$$M_i \overline{X}_{ii} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} \overline{M}_k + \sum_{j \in K_i} \overline{E}_j \overline{M}_j a_j, \ i \in J_0. \tag{6}$$

Полагая $M_k^* = \overline{M}_k \operatorname{sign}(\overline{M}_i M_i)$ и умножая (6) на $\operatorname{sign}(\overline{M}_i M_i)$, получаем:

$$M_i \overline{X}_{ii} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k^* + \sum_{j \in K_i} E_j M_j^* a_j. \tag{7}$$

Вычитая почленно (5) из (7), получаем:

$$M_i \Delta X_{ii} = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + B_i \tag{8}$$

для каждого $i \in J_0$, где $B_i = \sum_{j \in K_i} a_j (M_j^* E_j - M_j E_j) + \sum_{s \in I_v} X_s + \Delta X_j \times \times \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} (M_k^* - M_k)$. Если $i \in I_{s0} = I_s \cap J_0$, то $B_i = 0$.

Рассмотрим вектор $C' = (C_s, s \in I_v)$, где $C_s = \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} M_k$. При помощи вектора C введем потенциалы $Y' = (Y_i, i \in J_0)$:

$$Y' = C'(I_{v0}) G_0^{-1} = C_0' G_0^{-1} \text{ и } J_i = 0, \text{ если } i \in J_{\text{н}}. \tag{9}$$

Отсюда получаем $J' G_0 = C_0'$ или

$$\sum_{k \in K_{st}} A_{st} M_k = \sum_{i \in J_0} Y_i \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k, \ s \in I_{v0}. \tag{10}$$

Для каждого $i \in J_0$ рассмотрим $\delta_i = Y_i M_i$, для каждого $K \in I_s \cup J_0$ рассмотрим $\mu_k = M_k \left(1 - \sum_{i \in C_{kt}} Y_i\right)$ и для каждого $s \in I_{v\text{н}} = I_v \setminus I_{v0}$ рассмотрим $D_s = \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} \mu_k$.

Приступим к вычислению формулы приращения:

$$F = X_t = \sum_{s \in I_v} C_s X_s + \sum_{j \in I_d} a_j M_j E_j.$$

$$\overline{F} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} \overline{M}_k + \sum_{j \in I_d} a_j \overline{M}_j \overline{E}_j,$$

$$\Delta F = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} M_k + B, \text{ где}$$

$$B = \sum_{j \in I_d} a_j (\overline{M}_j \overline{E}_j - M_j E_j) + \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} (\overline{M}_k - M_k). \tag{11}$$

Учитывая (10), получаем:

$$\sum_{s\in I_{v0}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{st}} A_{sk}M_k = \sum_{s\in I_{v0}} \Delta X_s \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k =$$

$$= \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k - \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k =$$

$$= \sum_{i\in J_0} Y_i (M_i \Delta X_{ii} - B_i) - \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k.$$

Вернемся к вычислению ΔF:

$$\Delta F = B + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k + \sum_{i\in J_0} Y_i M_i \Delta X_{ii} - \sum_{i\in J_0} Y_i B_i -$$

$$- \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k = \sum_{i\in J_0} \delta_i \Delta X_{ii} + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{st}} A_{sk}M_k \times$$

$$\times \Big(1 - \sum_{i\in C_{kt}} Y_i\Big) + B - \sum_{i\in J_0} Y_i B_i.$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = \sum_{i\in J_0} \delta_i \Delta X_{ii} + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s D_s + B - \sum_{i\in J_0} J_i B_i. \tag{12}$$

Выясним физический смысл компонентов векторов δ и D, предполагая, что план $\{X, T\}$ невырожденный.

А. Пусть $\Delta X_s \neq 0$, $s \in I_{v\text{н}}$; $\Delta X_j = 0$, $j \in I_{v\text{н}} \setminus i$; $\Delta X_{ii} = 0$, $i \in J_0$. При достаточно малом $|\Delta X_s|$ получаем $M_j^* = M_j$, $\overline{M}_j = M_j$ и, следовательно, $B_j = 0$, $B = 0$ и $\Delta F = D_s \Delta X_s$, т. е. D_s является первоначальной скоростью изменения целевой функции.

Б. Пусть $\Delta X_{ii} \neq 0$, $i \in J_0$: $\Delta X_{jj} = 0$, $j \in J_0 \setminus i$; $\Delta X_s = 0$, $s \in I_{v\text{н}}$.

1. Если $i \in I_{s0}$, то $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$.

2. Если $X_{ii} \neq 0$ и $i \in I_{m0}$, то $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$, где $I_{m0} = I_m \cap J_0$.

3. Если $X_{ii} = 0$ и $\overline{E}_i = E_i$, то опять $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$, $i \in I_{m0}$.

4. Пусть $X_{ii} = 0$ и $\overline{E}_i = -E_i$. Тогда $\overline{M}_i = M_i$ и $\overline{M}_k = -M_k$, если $k \in K_i \setminus i$.

Все остальные члены сохраняют знаки. Вычислим B:

$$B = \sum_{j\in I_d} a_j (\overline{M}_j \overline{E}_j - M_j E_j) + \sum_{s\in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k\in K_{st}} A_{sk} (\overline{M}_k - M_k) =$$

$$= \sum_{j\in K_i} a_j (-2M_j E_j) + \sum_{s\in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} (-2M_k).$$

Так как $-2\Big(\sum_{j\in K_i} a_j M_j E_j + \sum_{s\in I_v} X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k\Big) = -2M_i X_{ii} = 0$, то получаем:

$$B = -2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим $B_p : M_k^* = -M_k$, если $i \in C_{kt}$ и, следовательно, $B_p \neq 0$ при $p \in C_{it}$, т. е. имеем: $B_p = -2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k$. $\Delta F =$

$$= \delta_i \Delta X_{ii} - 2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k - \sum_{p\in C_{it}} J_p \Big(-2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k\Big) =$$

$$= \delta_i \Delta X_{ii} - 2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k \Big(1 - \sum_{p\in C_{it}} J_p\Big).$$

Применяя (8), получаем:

$$M_i\Delta X_{ii} = \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k + B_i = \sum_{i\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k.$$

$$\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii} + 2M_i\Delta X_{ii}\Big(1 - \sum_{p\in C_{it}} Y_p\Big).$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = (\delta_i + 2\mu_i)\Delta X_{ii}. \tag{14}$$

Теперь можем сформулировать критерий локальной оптимальности.

Теорема 1. Для локальной оптимальности опорного плана $\{X, T\}$ достаточна, а в случае невырожденности и необходима, выполнимость соотношений:

$$\begin{gathered} D_s \geqslant 0, \text{ если } X_s = d_{*s}, \\ D_s \leqslant 0, \text{ если } X_s = d^*_s, \end{gathered} \tag{15}$$

$$D_s = 0, \text{ если } d_{*s} < X_s < d^*_s, \; s\in I_{v\text{н}}.$$

$$\begin{gathered} \delta_i \geqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d_{*ij}, \\ \delta_i \leqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d^*_{ij}, \\ \delta_i = 0, \text{ если } d_{*ij} < X_{ii} < d^*_{ij}, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} (i, j)\in V, \; i\in I_{s0} \text{ или } i\in I_{m0} \text{ и } X_{ii}\neq 0. \\ \delta_i \geqslant 0 \text{ и } \delta_i + 2\mu_i \geqslant 0, \text{ если } i\in I_{m0} \text{ и } X_{ii} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Определение 4. План $\{X, T\}$ называется согласованным, если на нем выполняются соотношения (16) и (17).

Введем β:

$$\beta = \sum_{D_s>0} D_s(X_s - d_{*s}) + \sum_{D_s<0} D_s(X_s - d^*_s), \tag{18}$$

где $s\in I_{v\text{н}}$.

Теперь можем сформулировать критерий субоптимальности.

Теорема 2. Для локальной субоптимальности невырожденного согласованного плана достаточна выполнимость неравенства $\beta\leqslant\varepsilon$.

На базе доказанных утверждений, следуя (1), можно построить прямой опорный метод решения задачи (3) (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1986. Ч. 3: Сетевые задачи. С. 26).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. Ф. Габасову за внимание к работе.

Поступила в редакцию 03.12.86.

УДК 517.977

А. Л. ЛЕБЕДЕВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Одним из центральных результатов теории оптимального управления является доказанный Р. Калманом принцип двойственности, который устанавливает тесную внутреннюю связь задач оптимального управления по квадратичному критерию и задач оптимальной фильтрации, а также позволяет облегчить решение многих практических задач управления. Впервые результаты Р. Калмана были перенесены на дифференциальные системы с запаздывающим аргументом А. Линдквистом [1]. Предлагаемая работа посвящена изучению дискретных систем, на примере которых доказана двойственность задач минимизации обобщенных квадратичных функционалов на траекториях линейных систем [2, 3] и и задач оптимальной фильтрации [4] при взаимно коррелированных помехах объекта и измерителя.

1. Запаздывание в фазовых переменных. Рассмотрим систему

$$x(t+\Theta) = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h_1) + G(t)\,w(t),\quad t \in T_N^{\Theta}, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{\varphi_0(t),\ t \in S_{h_1}^{\Theta}(t_0),\ x(t_0) = x_0\},\quad y(t) = C(t)\,x(t) + v(t), \qquad (2)—(3)$$

где $x(t)$, $t \in T_N^{\Theta}$, — n-вектор фазовых переменных; $y(t)$, $t \in T_N^{\Theta}$, — l-вектор наблюдений; $h_1 > 0$ — запаздывание; $T_N^{\Theta} = \{t_0,\ t_0+\Theta,\ \ldots,\ t_0+N\Theta = t_f-\Theta\}$; $S_{h_1}^{\Theta}(t_0) = \{t_0-h_1,\ t_0-h_1+\Theta,\ \ldots,\ t_0-\Theta\}$; $\Theta > 0$ — шаг дискретности; случайный вектор x_0 и случайные процессы $\{w(t)\}$, $\{v(t)\}$, $t \in T_N^{\Theta}$, $\{\varphi_0(\tau)\}$, $\tau \in S_{h_1}^{\Theta}(t_0)$ имеют гауссовское распределение с нулевым средним и следующими статистическими свойствами:

$$M[x_0 x_0^T] = Q_0,\quad M[\varphi_0(t)\,\varphi_0^T(\tau)] = Q_{\varphi}(t)\,\delta(t-\tau),\quad t,\ \tau \in S_{h_1}^{\Theta}(t_0),$$
$$M[w(t)\,w^T(\tau)] = Q_w(t)\,\delta(t-\tau),\quad M[v(t)\,v^T(\tau)] = Q_v(t)\,\delta(t-\tau),$$
$$M[w(t)\,v^T(\tau)] = Q_{wv}(t)\,\delta(t-\tau),\quad t,\ \tau \in T_N^{\Theta}. \tag{4}$$

Остальные взаимно корреляционные матрицы перечисленных случайных процессов равны нулю из-за их некоррелированности.

Задачу оптимальной фильтрации для системы (1) — (3) сформулируем следующим образом: требуется по наблюдениям $y(t)$, $t \in T_N^{\Theta}$, и заданному вектору $l \in R^n$ ($\|l\| \neq 0$) построить оценку величины $l^T x(t_f)$ (проекции фазового вектора на заданное направление) вида

$$l^T \hat{x}(t_f) = -\sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} u^T(t)\,y(t), \tag{5}$$

где весовые коэффициенты $u(t)$, $t \in T_N^{\Theta}$, выбираются из условия

$$I_1 = M\{l^T[x(t_f) - \hat{x}(t_f)]\,[x(t_f) - \hat{x}(t_f)]^T l\} \to \min. \tag{6}$$

Введем последовательность векторов:

$$z(t) = A^T(t)\,z(t+\Theta) + A_1^T(t+h_1)\,z(t+h_1+\Theta) + C^T(t)\,u(t),\quad t \in T_N^{\Theta}, \tag{7}$$

$$z(\cdot) = \{0,\ \tau \in \{t_f+\Theta,\ \ldots,\ t_f+h_1\},\ z(t_f) = l\}. \tag{8}$$

С учетом (8) запишем

$$l^T x(t_f) = z^T(t_f)\,x(t_f) = z^T(t_0)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta)x(t+\Theta) - z^T(t)x(t)]. \tag{9}$$

Из (1) и (7) имеем соотношения: $z^T(t+\Theta)\,x(t+\Theta) = z^T(t+\Theta)\,A(t)\,x(t) + z^T(t+\Theta)\,A_1(t)\,x(t-h_1) + z^T(t+\Theta)\,G(t)\,w(t)$; $z^T(t)\,x(t) = z^T(t+\Theta) \times A(t)\,x(t) + z^T(t+h_1+\Theta)\,A_1(t+h_1)\,x(t) + u^T(t)\,C(t)\,x(t)$, подставляя которые в (9) приходим к

$$l^T x(t_f) = z^T(t_0)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta)\,A_1(t)\,x(t-h_1) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta)\,G(t)\,w(t) + u^T(t)\,C(t)\,x(t)]. \tag{10}$$

В силу (3), (5) имеем

$$l^T \hat{x}(t_f) = -\sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [u^T(t)\,C(t)\,x(t) + u^T(t)\,v(t)]. \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), получаем

$$l^T [x(t_f) - \hat{x}(t_f)] = z^T(t_0) x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta) A_1(t) x(t-h_1) + $$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta) G(t) w(t) + u^T(t) v(t)]. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (6) и учитывая (4), будем иметь: $I_1 = z^T(t_0) Q_0 z(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta) A_1(t) Q_\varphi(t-h_1) A_1^T(t) z(t+\Theta) + \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta) G(t) \times Q_w(t) G^T(t) z(t+\Theta) + 2z^T(t+\Theta) G(t) Q_{wv}(t) u(t) + u^T(t) Q_v(t) u(t)] = I_2(u)$. Вводя обозначения

$$\overline{Q}_\varphi(t) = A_1(t) Q_\varphi(t-h_1) A_1^T(t), \quad \overline{Q}_w(t) = G(t) Q_w(t) G^T(t),$$
$$\overline{Q}_{wv}(t) = G(t) Q_{wv}(t), \qquad (13)$$

окончательно получаем

$$I_2(u) = z^T(t_0) Q_0 z(t_0) + \sum_{s=0}^{h_1-\Theta} z^T(t_0+s+\Theta) \overline{Q}_\varphi(t_0+s) z(t_0+s+\Theta) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta) \overline{Q}_w(t) z(t+\Theta) + 2z^T(t+\Theta) \overline{Q}_{wv}(t) u(t) +$$
$$+ u^T(t) Q_v(t) u(t)]. \qquad (14)$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 1. Задача оптимальной фильтрации (1)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления системой (7)—(8), на траекториях которой минимизируется функционал (14).

Эквивалентность следует понимать в том смысле, что функционалы I_1 и I_2 достигают оптимумов на одном и том же множестве векторов $u(t)$, $t \in T_N^\Theta$.

Производя в (7), (8) замену времени $\tau = t_f - t - \Theta$, $0 \leqslant \tau \leqslant t_f - t_0$, и переходя к новым переменным $\bar{z}(\tau) = z(t_f - \tau)$, $\bar{u}(\tau) = u(t_f - \tau - \Theta)$, $\tau \in \{0, \ldots, t_f - t_0\}$, приходим к следующей задаче оптимального управления:

$$\bar{z}(\tau+\Theta) = A^T(t_f-\tau-\Theta) \bar{z}(\tau) + A_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_1) \bar{z}(\tau-h_1) +$$
$$+ C^T(t_f-\tau+\Theta) \bar{u}(\tau), \quad \bar{z}_0(\cdot) = \{0, \ \tau \in \{-h_1, \ \ldots, \ -\Theta\}, \ \bar{z}(0) = l\}, \qquad (15)$$
$$I_2(\bar{u}) = \bar{z}^T(t_f-t_0) Q_0 \bar{z}(t_f-t_0) + \sum_{s=-h_1}^{-\Theta} \bar{z}^T(t_f-t_0+s) \overline{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta) \times$$
$$\times \bar{z}(t_f-t_0+s) + \sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta} [\bar{z}^T(\tau) \overline{Q}_w(t_f-\tau-\Theta) \bar{z}(\tau) + 2\bar{z}^T(\tau) \times$$
$$\times \overline{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta) \bar{u}(\tau) + \bar{u}^T(\tau) Q_v(t_f-\tau-\Theta) \bar{u}(\tau)].$$

Теорема 2. Задача оптимальной фильтрации (1)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления (15).

2. Запаздывание в наблюдениях. Пусть наблюдаемый сигнал удовлетворяет уравнению

$$y(t) = C(t) x(t) + C_1(t) x(t-h_2) + v(t), \quad t \in T_N^\Theta. \qquad (16)$$

Сопряженная система в этом случае имеет вид:

$$z(t) = A^T(t) z(t+\Theta) + A_1^T(t+h_1) z(t+h_1+\Theta) + C^T(t) u(t) +$$
$$+ C_1^T(t+h_2) u(t+h_2), \quad t \in T_N^\Theta. \qquad (17)$$

Воспользовавшись предложенной схемой рассуждений, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. Задача оптимальной фильтрации (1), (2), (16), (4)—(6) эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\bar{z}(\tau+\Theta)=A^T(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+A_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_1)\bar{z}(\tau-h_1)+$$
$$+C^T(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+C_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_2)\bar{u}(\tau-h_2),$$
$$\tau\in\{0,\ \Theta,\ \ldots,\ t_f-t_0\},$$
$$\bar{z}_0(\cdot)=\{0,\ \tau\in\{-h_1,\ \ldots,\ -\Theta\},\ \bar{z}(0)=l\},\ \bar{u}(\tau)=0,\ \tau\in\{-h_2,\ \ldots,\ 0\},$$
$$I_3(\bar{u})=\bar{z}^T(t_f-t_0)Q_0\bar{z}(t_f-t_0)+\sum_{s=-h_1}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)\bar{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta)\times$$
$$\times\bar{z}(t_f-t_0+s)+\sum_{s=-h_2}^{-\Theta}\bar{u}^T(t_f-t_0+s)Q_{\varphi_1}(t_0-s-\Theta)\bar{u}(t_f-t_0+s)+$$
$$+2\sum_{s=-h}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)Q_{\varphi_2}(t_0-s-\Theta)\bar{u}(t_f-t_0+s)+$$
$$+\sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta}[\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_w(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+$$
$$+\bar{u}^T(\tau)Q_v(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)],$$

где $Q_{\varphi_1}(t)=C_1(t)Q_\varphi(t-h_2)C_1^T(t)$, $Q_{\varphi_2}(t)=A_1(t)Q_\varphi(t-h)C_1^T(t)$, $h=$ $=\min\{h_1,\ h_2\}$.

3. Запаздывание в шумовых помехах. Пусть запаздывание входит не только в фазовые переменные, но и в шумовые помехи, действующие на систему

$$x(t+\Theta)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h_1)+G(t)w(t)+G_1(t)w(t-h_1),$$
$$w(t)\equiv 0,\ t\leqslant t_0. \qquad (18)$$

В этом случае имеет место следующая

Теорема 4. Задача оптимальной фильтрации (18), (2)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления системой (15) с функционалом:

$$I_4(\bar{u})=\bar{z}^T(t_f-t_0)Q_0\bar{z}(t_f-t_0)+\sum_{s=-h_1}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)\bar{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta)\times$$
$$\times\bar{z}(t_f-t_0-\Theta)+\sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta}[\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_w(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+$$
$$+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{w_1}(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau-h_1)+\bar{z}^T(\tau-h_1)\bar{Q}_{w_2}(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau-h_1)+$$
$$+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+2\bar{z}^T(\tau-h_1)\bar{Q}_{wv_1}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+$$
$$+\bar{u}^T(\tau)Q_v(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)],$$

где $\bar{Q}_{w_1}(t)=G(t)Q_w(t)G_1^T(t+h_1)$, $\bar{Q}_{w_2}(t)=G_1(t+h_1)Q_w(t)G_1^T(t+h_1)$, $\bar{Q}_{wv_1}(t)=G_1(t+h_1)Q_{wv}(t)$.

Доказанные теоремы позволяют строить двойственные алгоритмы фильтрации, основанные на получении оптимального управления в сопряженных системах [2] и использовании соотношения (5).

Список литературы

1. Lindquist A. // Journ. Math. Anal. and Appl. 1972. V. 37. № 2. P. 516.
2. Лебедев А. Л. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 5. С. 116.
3. Забелло Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации в управляемых системах с запаздыванием / Редкол. журн. «Вести. Белорус-

ского ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. Минск, 1983. Деп. в ВИНИТИ 27.01.83. № 505-83.
4. Лебедев А. Л. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 35.

Поступила в редакцию 13.02.87.

УДК 519.6

М. М. КОВАЛЕВ, НГУЕН НГИА

МНОГОГРАННИК МЕДИАН ГРАФА

Целые точки многогранника медиан графа служат допустимой областью дискретного аналога известной задачи Ферма—Вебера: в метрическом пространстве найти местоположение точек, сумма расстояний которых до данных k точек минимальна. Подмечено, что симплекс-метод на многограннике медиан графа почти всегда приводит к целочисленному оптимуму, в связи с чем Спинетто в 1976 г. сформулировал проблему: изучить строение целочисленных вершин многогранника медиан графа. Результаты работ [1—3] по частичному решению проблемы Спинетто обобщены в [4] (см. § 7); в [5] приведен критерий смежности целочисленных вершин. В предлагаемой статье дается полное решение проблемы Спинетто.

Многогранник $M(k, n)$ медиан графа задается условиями:

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = 1 \quad \forall_i \in N, \sum_{i\in N} x_{ii} = k, \qquad (1)—(2)$$

$$x_{ij} \leqslant x_{jj} \ \forall (i, j) \in N\times N, \ i\neq j, \qquad x_{ij} \geqslant 0 \ \forall (i, j) \in N\times N, \qquad (3)—(4)$$

где $N=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Напомним (см. [4]), что многогранник M называется квазицелочисленным, если всякое ребро многогранника $\operatorname{conv}(M\cap Z^n)$ является ребром многогранника M. Многогранник называется связноцелочисленным, если подграф графа многогранника M, порожденный его целочисленными вершинами, является остовным подграфом графа многогранника $\operatorname{conv}(M\cap Z^n)$.

Перейдем к формулировке основной теоремы о структуре вершин многогранника k-медиан графа.

Теорема. Многогранник $M(k, n)$ k-медиан графа является

i) целочисленным при $k=1, n-1, n$;

ii) квазицелочисленным, но нецелочисленным при $k=2, 3, n-2$;

iii) связноцелочисленным, но не квазицелочисленным при $4\leqslant k\leqslant \leqslant n-3$. Доказательство теоремы основано на ряде лемм.

Лемма 1. Многогранник $M(n)$, заданный условиями (1), (3), (4), является квазицелочисленным.

Доказательство. Введя фиктивные переменные

$$y_{ij}\geqslant 0 \ \forall (i, j)\in N\times N, \ i\neq j, \qquad (5)$$

приведем ограничения (3) к виду:

$$x_{ij}-x_{jj}+y_{ij}=0 \ \forall (i, j)\in N\times N, \ i\neq j. \qquad (3')$$

Система ограничений (1), (3′), (4), (5) определяет в R^{2n^2-n} многогранник, который будем обозначать $M'(n)$. Сложением строк можем преобразовать систему ограничений, задающих многогранник $M'(n)$, к следующей эквивалентной форме: $\sum\limits_{j\in N} x_{ij} = 1 \ \forall i \in N, \ \ x_{ij} + \sum\limits_{\substack{p\neq j\\ p\in N}} x_{jp} + y_{ij} = 1$ $\forall (i, j) \in N\times N, \ i\neq j, \ x_{ij}\geqslant 0 \ \forall (i, j)\in N\times N, \ y_{ij}\geqslant 0 \ \forall (i, j)\in N\times N,$ $i\neq j$. Последняя по теореме 7.2 из [4] определяет квазицелочисленный многогранник, откуда следует и квазицелочисленность многогранника $M(n)$.

Лемма 2 [1]. Все целочисленные точки многогранника — вершины целочисленных граней $F(\omega) = \{x\in M(k, n): x_{ii} = 0 \ \ \forall i\in N\setminus\omega\}$ для каждого k-подмножества ω множества N.

Лемма 3 [4]. Пусть $\omega', \omega''\subset N$, $|\omega'\cap\omega''|=k-1$, x' и x'' — две целочисленные точки, принадлежащие соответственно граням $F(\omega')$ и $F(\omega'')$ многогранника $M(k, n)$. Тогда существует целочисленная грань $F(\omega', \omega'')$, содержащая как x', так и x''.

Доказательство теоремы.

i) Целочисленность многогранников $M(1, n)$ и $M(n, n)$ установлена в [1]. Покажем, что многогранник $M(n-1, n)$ определяется только ограничениями (1), (2), (4), а ограничения (3) являются их следствием. Действительно, если $x^0=(x^0_{ij})$ удовлетворяет ограничениям (1), (2), (4), но не удовлетворяет ограничениям (3), то существуют такие $i_0, j_0 \in N$, $i_0 \neq j_0$, что $x^0_{i_0 j_0} > x^0_{j_0 i_0}$. Тогда, подставив $x=x^0$ в ограничения (1) при $i=i_0$, с учетом $x^0_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N \times N, k=n-1$, имеем $1=\sum_{j\in N} x^0_{i_0 j} = \sum_{\substack{j\in N \\ j\neq i_0, j_0}} x^0_{i_0 j} + x^0_{i_0 i_0} + x^0_{j_0 i_0} > x^0_{i_0 i_0} + x^0_{j_0 j_0} \geqslant 1$. Полученное противоречие показывает, что x^0 должен удовлетворять ограничениям (3). Целочисленность многогранника $M(n-1, n)$ немедленно следует из абсолютной унимодулярности матрицы ограничений (1), (2), (4).

ii) Заметим, что многогранник $M(k, n)$ при $1<k<n-1$ содержит дробную вершину x^{ps}, координаты которой определяются следующей формулой: $x_{ip}=\frac{n-k-1}{n-2}$, $i\in N$, $x_{jj}=\frac{k-1}{n-2}$, $j\neq p$, $x_{ps}=\frac{k-1}{n-2}$, $s\neq p$, $x_{ij}=0$ для остальных (i, j).

Остается доказать квазицелочисленность $M(k, n)$ при $k=2, 3, n-2$. Поскольку любая целочисленная точка многогранника $M(k, n)$ является его вершиной, для доказательства квазицелочисленности достаточно показать, что всякое ребро $[x^1, x^2]$ многогранника $\operatorname{conv}(M(k, n)\cap Z^n)$ является ребром многогранника $M(k, n)$. Пусть $\omega_l=\{j : x^l_{jj}=1, j\in N\}$, $l=1, 2$.

Случай $k=2$ или $n-2$. Тогда в силу $|\omega_1\cap\omega_2| \geqslant k-2$ имеет место одна из следующих возможностей: $|\omega_1\cap\omega_2|=k-1$, k или $k-2$. В первом случае, согласно лемме 3, грань $F(\omega_1, \omega_2)$, содержащая x^1 и x^2, есть целочисленный многогранник. Поэтому $[x^1, x^2]$ — ребро $M(k, n)$. Во втором, по лемме 2, грань $F(\omega)$, где $\omega=\omega_1=\omega_2$, содержит x^1 и x^2 и является целочисленным многогранником. Откуда следует, что $[x^1, x^2]$ также ребро $M(k, n)$. Наконец, если $|\omega_1\cap\omega_2|=k-2$, рассмотрим грань минимальной размерности G многогранника $M(k, n)$, содержащую x^1 и x^2. Предположим, что $x^1_{ij}=x^2_{ij}$ для всех $(i, j)\in J_0\subset N\times N$. Тогда $x_{ij}=x^1_{ij}\,\forall (i, j)\in J_0$ для любой точки $x=(x_{ij})$ этой грани, иначе существует грань меньшей размерности, содержащая x^1 и x^2. Подставив $x_{ij}=x^1_{ij}$, $(i, j)\in J_0$ в систему (1)—(4) и удалив ограничения, которые обратились в тождества, получим систему ограничений, определяющую вместе с фиксированными переменными грань G. В получившейся системе ограничений ограничения (2) можно эквивалентно заменить следующими: $x_{i_1 i_1}+x_{j_1 j_1}=1$, $i_1\in\omega_1\setminus\omega_2$, $j_1\in\omega_2\setminus\omega_1$; $x_{i_2 i_2}+x_{j_2 j_2}=1$, $i_2\in\omega_1\setminus\omega_2$, $j_2\in\omega_2\setminus\omega_1$, где $\{i_1, i_2\}=\omega_1\setminus\omega_2$, $\{j_1, j_2\}=\omega_2\setminus\omega_1$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, легко показать, что грань G квазицелочисленная, поэтому $[x^1, x^2]$ — ребро многогранника $M(k, n)$.

Квазицелочисленность многогранника $M(k, n)$ при $k=2, n-2$ доказана. Случай $k=3$ рассматривается аналогично.

iii) Связноцелочисленность многогранника $M(k, n)$ при любом k доказана в [1]. Чтобы показать его неквазицелочисленность при $4\leqslant k\leqslant n-3$, рассмотрим следующие две целочисленные вершины:

$$x^1 = \left(\begin{matrix} 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0 \\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad x^2 = \left(\begin{matrix} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \\ \ldots \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Нетрудно показать, что $[x^1, x^2]$ является ребром многогранника $\operatorname{conv}(M(k, n) \cap Z^n)$, но не является ребром многогранника $M(k, n)$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Ковалев М. М., Исаченко А. И., Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. 1978. Т. 11. № 10. С. 17.
2. Kovalajw M., Nguen Ngia, Kühn E. // Tagung Math. Optimierung. Humboldt. Universitat zu Berlin, 1977. S. 50.
3. Чинь Д. З., Нгуен Нгиа // Тоан хок. 1982. Т. 10. № 2. С. 1.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Горунович С. А. // Кибернетика. 1985. № 5. С. 67.

Поступила в редакцию 11.12.86.

УДК 519.25

Х. Д. ШУНГАРОВ

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ГРАФА ЗВЕЗДАМИ

1. В практике автоматизированного проектирования электронно-вычислительной аппаратуры [1, 2] возникает следующая многокритериальная задача дискретной оптимизации. Заданы: n-вершинный граф $G = (V, E)$, в котором каждое ребро $e = ij \in E$ взвешено целым числом $w(e) = w(i, j) \geqslant 0$, и множество натуральных чисел $\mathbf{H} = \{h_1, \ldots, h_T\}$. Каждому числу $h_t \in \mathbf{H}$, $t = \overline{1, T}$, соответствует h_t-звезда (звезда типа t). Множество $\mathbf{H}$ будем называть множеством типовых звезд. Напомним, что h-звездой называется полный двудольный граф $K_{1,h-1}$ [3].

Покрытием графа G звездами будем называть его остовный подграф $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$, каждая компонента связности которого представляет собой звезду, изоморфную некоторой типовой звезде из множества типовых звезд $\mathbf{H}$.

На множестве $X = \{x\}$ всех покрытий графа G задана векторная целевая функция (ВЦФ) $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, частные критерии которой $F_k(x) \to \min$, $k = \overline{1, 3}$, имеют вид: $F_1(x) = |E| - |E_x|$ — число ребер графа G, не вошедших в покрытие x; $F_2(x) = \sum_{t=1}^{T} c_t z_t$ — стоимость покрытия x, где c_t — стоимость звезды типа t; $F_3(x) = \frac{1}{|E_x|} \sum_{e \in E_x} w(e)$ — удельный вес покрытия x.

ВЦФ $F(x)$ определяет паретовское множество $\tilde{X} \subseteq X$ [4, 5]. Проблема состоит в построении алгоритма, гарантирующего нахождение так называемого полного множества альтернатив (ПМА). ПМА X^0 определяется как такое минимальное по мощности подмножество $X^0 \subseteq \bar{X}$, что $F(X^0)=F(\bar{X})$, где для всякого $X^* \subseteq X$ его образ в критериальном пространстве $F(X^*)=\{F(x)/x \in X^*\}$ [6].

Сформулированная задача покрытия графа звездами является NP-трудной проблемой, так как в качестве частного случая содержит задачу разбиения графа на пути длины два [7]. В настоящей работе предлагается алгоритм построения ПМА поставленной задачи.

2. Пусть $G=K_n=(V, E)$ — полный n-вершинный граф. Для существования покрытия графа G звездами при заданном $\mathbf{H}=\{h_t\}$, $t=\overline{1, T}$, необходимо, чтобы было разрешимо в целых неотрицательных числах уравнение

$$\sum_{t=1}^{T} h_t z_t = n, \tag{1}$$

где h_t — число вершин в звезде типа t; z_t — число звезд типа t в покрытии x.

Пусть $z=(z_1, \ldots, z_T)$ — некоторое конкретное решение уравнения (1), обладающее $T_0 < T$ ненулевыми компонентами. Компоненты этого решения представим в виде последовательности

$$z_{t_1}, \ \ldots, \ z_{t_s}, \ \ldots, \ z_{t_{T_0}}. \tag{2}$$

Сумма $\sum_{s=1}^{T_0} z_{t_s} = N$ содержательно означает количество звезд в покрытиях, соответствующих последовательности (2). Множество всех покрытий такого вида обозначим через $X(z)$. Считая, что элементы последовательности (2) упорядочены по неубыванию, определим структуру всякого покрытия $x \in X(z)$ в виде последовательности

$$h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(\nu)}, \ldots, h^{(N)}, \tag{3}$$

где
$$\begin{array}{ll} h^{(\nu)}=h_{t_1}, & 1 \leqslant \nu \leqslant z_{t_1}, \\ h^{(\nu)}=h_{t_2}, & z_{t_1}+1 \leqslant \nu \leqslant z_{t_1}+z_{t_2}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ h^{(\nu)} = h_{t_s}, & \sum_{r=1}^{s-1} z_{t_r} \leqslant \nu \leqslant \sum_{r=1}^{s} z_{t_r}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ h^{(\nu)} = h_{t_{T_0}}, & \sum_{s=1}^{T_0-1} z_{t_s} \leqslant \nu \leqslant \sum_{s=1}^{T_0} z_{t_s}. \end{array}$$

При этом считаем, что звезды покрытия x перенумерованы числами $\nu=1, 2, \ldots, N$ во взаимно однозначном соответствии с элементами последовательности (3).

Введем теперь трехиндексные переменные x_{ij}^{ν}, где

$$x_{ij}^{\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } ij \text{ вошло в состав } \nu\text{-й звезды покрытия } x, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные x_{ij}^{ν} представим в виде трехиндексной матрицы $x=\|x_{ij}^{\nu}\|$, $i, j=\overline{1, n}$, $\nu=\overline{1, N}$, $X(z)$ — множество всех таких матриц x, где номера i, j строк-столбцов и номера ребер графа G находятся во взаимно однозначном соответствии.

Задача z: Найти $x \in X(z)$ такое, что $F_3(x)=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w(i, j)x_{ij}^{\nu} \to \min$ при условиях

$$1^\circ.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\nu} x_{ij}^{\nu} = 2\,(h^{(\nu)} - 1),\ \nu = \overline{1,\ N},$$

где c_{ij} — элементы матрицы смежности $C = \|c_{ij}\|$ исходного графа G.

$$2^\circ.\ \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{\nu} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{\nu} = h^{(\nu)} - 1,\ \nu = \overline{1,\ N}.$$

$$3^\circ.\ x_{ij}^{\nu} = x_{ji}^{\nu} \leqslant c_{ij},\ i,\ j = \overline{1,\ n},\ \nu = \overline{1,\ N}.$$

$$4^\circ.\ x_{ij}^{\nu} \in \{0,\ 1\},\ i,\ j = \overline{1,\ n},\ \nu = \overline{1,\ N}.$$

$$5^\circ.\ \sum_{\nu=1}^{N} x_{ij}^{\nu} \leqslant 1,\ i,\ j = \overline{1,\ n}.$$

$$6^\circ.\ \min_{1\leq i\leq n} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\nu} \geqslant 1,\ i = \overline{1,\ n}.$$

$$7^\circ.\ \min_{1\leq j\leq n} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{\nu} \geqslant 1,\ j = \overline{1,\ n}.$$

Смысл условий 1°—7° состоит в следующем. Условие 1° означает, что общее количество ребер, используемых для построения ν-й звезды, равно в точности $h^{(\nu)} - 1$, $\forall\ \nu = \overline{1,\ N}$;

2° — для каждого $\nu = \overline{1,\ N}$ в графе G найдется вершина, которая является центром $h^{(\nu)}$-звезды;

3° — условие учета того, что покрытие строится для неориентированного графа;

4° — условие задачи булева программирования.

5° — требование того, чтобы каждое ребро входило в состав не более чем одной звезды.

Условия 6°—7° означают, что каждая вершина данного графа инцидентна хотя бы одному ребру, вошедшему в покрытие x.

3. Для построения ПМА X^0 сформулированной задачи предлагается алгоритм α, состоящий из двух уровней: нижнего и верхнего. На нижнем уровне работает алгоритм α_1 из двух этапов α_1^1 и α_1^2. Этап α_1^1 для заданного $\mathbf{H}$ находит множество Z всех целых неотрицательных решений $z = (z_1, \ldots, z_T)$ уравнения (1) и представляет собой алгоритм [8].

Этап α_1^2 состоит в том, что для каждого решения z, полученного на этапе α_1^1, решается «задача z» методом построения последовательности планов [9]. Этап α_1^2, а вместе с ним и алгоритм α_1, заканчивает свою работу решением задачи z для каждого $z \in Z$.

Каждое решение $x = \|x_{ij}^{\nu}\|$, полученное с помощью [9], однозначно определяет некоторое покрытие, оптимальное по критерию $F_3(x)$. Множество всех таких покрытий обозначим через X_α.

На верхнем уровне работает алгоритм α_2, который состоит из двух этапов α_2^1 и α_2^2. Этап α_2^1 состоит в том, что покрытия из X_α попарно сравниваются между собой по значению ВЦФ $F(x)$ с целью отсева доминируемых [10], т. е. непарето-оптимальных. В результате такого отсева получим подмножество $\tilde{X}_\alpha = X_\alpha \cap \tilde{X}$ паретовского множества.

На этапе α_2^2 множество $\tilde{X}_\alpha$ разбивается на подмножества, каждое из которых составляет покрытия, одинаковые по значению ВЦФ $F(x)$. Затем, оставляя по одному представителю в каждом из этих подмножеств, получаем множество $X_\alpha^0 \subseteq \tilde{X}_\alpha$, удовлетворяющее условию

$$F(X_\alpha^0) = F(\tilde{X}_\alpha). \qquad (4)$$

Согласно конструкции алгоритма α, множество X_α^0 не содержит пары (x_1, x_2) с одинаковыми значениями $F(x_1)=F(x_2)$, поэтому обоснование алгоритма α состоит в доказательстве того, что X_α^0 представляет собой искомое ПМА.

Утверждение. Построенное с помощью алгоритма α множество X_α^0 удовлетворяет условию

$$F(X_\alpha^0)= F(\widetilde{X}). \tag{5}$$

Доказательство. Согласно конструкции алгоритма α, имеем $\tilde{X}_\alpha \subseteq \tilde{X}$. Отсюда следует справедливость включения

$$F(\tilde{X}_\alpha)\subseteq F(\tilde{X}). \tag{6}$$

Включение

$$F(\tilde{X})\subseteq F(\tilde{X}_\alpha) \tag{7}$$

докажем методом от противного. Пусть существует парето-оптимальное покрытие $\bar{x}^* \in \tilde{X}_\alpha$ такое, что

$$F(x^*)\in F(\tilde{X}_\alpha), \quad F(\bar{x}^*) \notin F(\tilde{X}). \tag{8}$$

Заметим теперь, что при построении множества $\tilde{X}_\alpha$ алгоритм α_2 осуществляет перебор покрытий по всем возможным значениям пары $(F_1(x), F_2(x))$. Таким образом, алгоритм α_2 осуществляет поиск покрытия $\bar{x}^*$, оптимального по критерию $F_3(x)$ при фиксированном значении $F_1(x)$, $F_2(x)$. Тогда соотношения (8) означают, что имеют место $(F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}))=(F_1(\bar{x}^*), F_2(\bar{x}^*))$, $F_3(\bar{x})<F_3(\bar{x}^*)$. Но это противоречит оптимальности покрытия x по критерию $F_3(x)$. Полученное противоречие доказывает справедливость (6). Из (4), (6) и (7) следует справедливость (5). Утверждение доказано.

Список литературы

1. Петренко А. И. Основы автоматизированного проектирования. Киев, 1982.
2. Селютин В. А. Машинное конструирование электронных устройств. М., 1977.
3. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
5. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
6. Перепелица В. А. // Кибернетика. 1984. № 4. С. 62.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
8. Müller Hartmut // Wiss Z. Techn. Hochsch. Carl Schorlemmer. Leuna-Merseburg, 1977. № 1. S. 81.
9. Емеличев В. А., Комлик В. И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М., 1981.
10. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982.

Поступила в редакцию 13.04.87.

УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тонкую сплошную ортотропную эллиптическую пластинку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг малой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости (см. рисунок). Внешний край пластинки будем полагать свободным от усилий.

Отнесем срединную плоскость пластинки к прямоугольной системе координат xOy, оси которой совпадают с главными направлениями упругости.

Нормальные σ_x, σ_y и касательные τ_{xy} напряжения, возникающие в эллиптической пластинке при ее вращении, выражаются через функцию напряжений $F(x, y)$ известными соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U, \ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U, \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}, \tag{1}$$

где $U(x) = -\frac{\rho\omega^2}{2} x^2$ — потенциал центробежных сил; ρ — плотность материала.

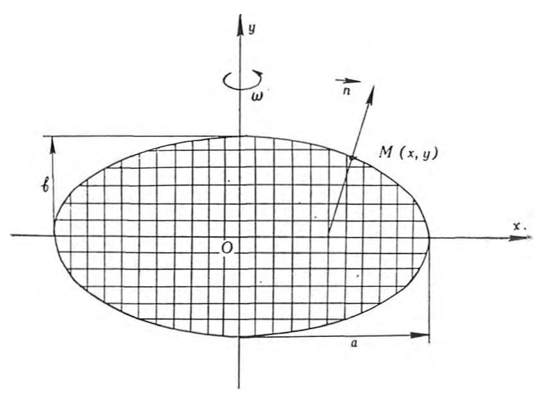
Функция напряжений $F(x, y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных [1]:

$$\frac{1}{E_y} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x}\right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{(1 - \nu_{yx})}{E_y} \rho\omega^2. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) представим в виде:

$$F(x, \ y) = \frac{(1 - \nu_{yx})}{24} \rho\omega^2 x^4 + 2\mathrm{Re}\,[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \tag{3}$$

Здесь первое слагаемое — частное решение уравнения (2), а выражение $F_0(x, y) = 2\mathrm{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]$ — общее решение однородного уравнения, соответствующего данному. Функции $F_j(z_j)$ ($j = 1, \ 2$) — произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$. Комплексные параметры μ_j, характеризующие анизотропию тела, для всех известных ортотропных материалов являются чисто мнимыми, $\mu_j = i\delta_j$.



К расчету ортотропной эллиптической пластинки, вращающейся вокруг малой оси симметрии

Из (1) с учетом выражения (3) получим следующие формулы для определения напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\mathrm{Re}\,[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2^1(z_2)] - \frac{\rho\omega^2}{2} x^2, \\ \sigma_y = 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] - \nu_{yx} \frac{\rho\omega^2}{2} x^2, \\ \tau_{xy} = -2\mathrm{Re}\,[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)], \end{cases} \tag{4}$$

где $\Phi_j(z_j) = \frac{d F_j(z_j)}{d z_j}$.

Таким образом, задача об определении напряженного состояния ортотропной эллиптической пластинки, вращающейся вокруг малой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости, свелась к отысканию двух аналитических функций $\Phi_j(z_j)$ из граничных условий на внешнем контуре:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(n, \ x) + \tau_{xy} \cos(n, \ y) = 0, \\ \tau_{xy} \cos(n, \ x) + \sigma_y \cos(n, \ y) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя в выражения (5) значения напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy} из (4) и интегрируя по дуге s, представим граничные условия на свободном крае пластинки в следующем виде:

$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)] = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e^{ik\vartheta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\vartheta}), \\ 2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)] = \beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\beta_k e^{ik\vartheta} + \bar{\beta}_k e^{-ik\vartheta}), \end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha_0 = -\nu_{yx}\dfrac{\rho\omega^2 a^3}{6}$, $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 = \nu_{yx}\dfrac{\rho\omega^2 a^3}{16}$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2 = 0$, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = \nu_{yx} \times \times \dfrac{\rho\omega^2 a^3}{48}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k = 0$ $(k = 4, 5, 6\ldots)$; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -i\dfrac{3\rho\omega^2 a^2 b}{16}$, $\beta_2 = = \bar{\beta}_2 = 0$, $\beta_3 = -i\dfrac{\rho\omega^2 a^2 b}{48}$, $\bar{\beta}_1 = i\dfrac{3\rho\omega^2 a^2 b}{16}$, $\bar{\beta}_3 = i\dfrac{\rho\omega^2 a^2 b}{48}$, $\beta_k = \bar{\beta}_k = 0$ $(k=4, 5, 6\ldots)$; a, b, ϑ — полуоси и параметр эллипса соответственно.

В работе [2] показано, что для эллиптической односвязной области функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ представляются следующими рядами:

$$\Phi_1(z_1) = A_0 + A_1 z_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k P_{1k}(z_1),\quad \Phi_2(z_2) = B_0 + B_1 z_2 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k P_{2k}(z_2),$$

где $P_{jk}(z_j)$ — полиномы Фабера, имеющие вид: $P_{jk}(z_j) = -\dfrac{1}{(a-i\mu_j b)^k} \times \times \left[\left(z_j + \sqrt{z_j^2 - a^2 - \mu_j^2 b^2}\right)^k + \left(z_j - \sqrt{z_j^2 - a^2 - \mu_j^2 b^2}\right)^k\right]$. Подстановка функций $\Phi_j(z_j)$ в граничные условия (6) приводит к системе алгебраических уравнений для определения постоянных A_k, B_k и сопряженных с ними $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$ $(k=2, 3, 4\ldots)$. Решая ее, найдем:

$A_k = \bar{A}_k = B_k = \bar{B}_k = 0$, $(k=2, 4, 5, 6\ldots)$.

$$A_3 = \bar{A}_3 = -\frac{\rho\omega^2 a^2 b}{96} \cdot \frac{(m+\delta_1)^3\left[\nu_{yx}\delta_2^2(3m^2+\delta_2^2) + (m^2+3\delta_2^2)\right]}{(\delta_2^2-\delta_1^2)\left[3m^4 + (\delta_1^2+\delta_2^2)m^2 + 3\delta_1^2\cdot\delta_2^2\right]},$$

$$B_3 = \bar{B}_3 = \frac{\rho\omega^2 a^2 b}{96} \cdot \frac{(m+\delta_2)^3\left[\nu_{yx}\delta_1^2(3m^2+\delta_1^2) + (m^2+3\delta_1^2)\right]}{(\delta_2^2-\delta_1^2)\left[3m^4 + (\delta_1^2+\delta_2^2)m^2 + 3\delta_1^2\cdot\delta_2^2\right]},$$

$m = a/b$.

Линейные члены функций $A_1 z_1$ и $B_1 z_2$ определяют постоянные напряжения в пластинке: $\sigma_x^0 = \dfrac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{ib} = \dfrac{3}{8}\rho\omega^2 a^2$, $\sigma_y^0 = \dfrac{\bar{\alpha}_1 + \alpha_1}{a} = \nu_{yx}\dfrac{\rho\omega^2 a^2}{8}$, $\tau_{xy}^0 = \dfrac{\bar{\alpha}_1 - \alpha_1}{ib} = 0$. Постоянные A_0, B_0 остаются произвольными, не влияющими на напряженное состояние пластинки.

Таким образом, для рассматриваемой задачи функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= A_0 + \left[A_1 + \frac{6(m^2-\delta_1^2)}{b(m+\delta_1)^3}A_3\right] z_1 - \frac{8A_3}{b^3(m+\delta_1)^3} z_1^3, \\ \Phi_2(z_2) &= B_0 + \left[B_1 + \frac{6(m^2-\delta_2^2)}{b(m+\delta_2)^3}B_3\right] z_2 - \frac{8B_3}{b^3(m+\delta_2)^3} z_2^3, \end{aligned} \tag{7}$$

а компоненты напряжений, вычисленные по формулам (4), равны:

$$\begin{cases} \sigma_x = \rho\omega^2 a^2\left[J\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) + I\dfrac{y^2}{b^2}\right], \\ \sigma_y = \rho\omega^2 b^2\left[K\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) + I\dfrac{x^2}{a^2}\right], \\ \tau_{xy} = -I\rho\omega^2 xy, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$I = \frac{m^2(m^2 - \nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]},$$

$$J = -\frac{1}{2}\,\frac{[2m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]}, \tag{9}$$
$$K = \frac{1}{2}\,\frac{m^2(m^2 - \nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]}.$$

Если вращение сплошной ортотропной эллиптической пластинки происходит вокруг большой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости, то распределение напряжений в ней опять же описывается формулами (8), но постоянные имеют другие значения:

$$I^* = \frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]},$$
$$J^* = \frac{1}{2}\,\frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]}, \tag{10}$$
$$K^* = -\frac{1}{2}\,\frac{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})\,m^2 + 2E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})\,m^2 + 3E_x/E_y]}.$$

Из анализа выражений (8) следует, что наибольшее напряжение на границе пластинки получается на концах малой оси, а напряжение, наибольшее для всей пластинки, имеет место в центре.

При равенстве полуосей эллипса $a=b=R$ формулы (8) описывают распределение напряжений в ортотропном диске радиуса R, вращающемся вокруг диаметра.

Полагая $E_x=E_y=E$, $\nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$, $G_{xy}=G$ в выражениях (8), (9), (10), получаем распределение напряжений в сплошной изотропной эллиптической пластинке, вращающейся вокруг осей симметрии, расположенных в срединной плоскости. Отметим, что в литературе имеется приближенное решение (методом малого параметра) этой задачи [3].

Список литературы

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
2. Лехницкий С. Г. // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. № 9. С. 527.
3. Уздалев А. И., Старостин В. Е., Кравцов В. Ф. // Изв. вузов СССР: Машиностр. 1983. № 1. С. 33.

Поступила в редакцию 13.12.86.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО n-ЛИСТНОМУ НАКРЫТИЮ СФЕРЫ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде n-листной поверхности наложения сферы $\widehat{\mathbf{C}}$. Предположим, что заданы точки ветвления a_1, $a_2=0$, a_3 (a_1, $a_3 \neq \infty$, 0) и образующие группы монодромии поверхности $\sigma_1=(2, 1, \ldots, 1)$, $\sigma_2=(n)$, $\sigma_3=(n_1)(n_2)$, где $n_1+n_2=n$ и $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = e$.

Требуется построить поле алгебраических функций $\widehat{\mathbf{C}}(z, w)$, соответствующее заданному накрытию сферы [1].

Данные подстановки содержат цикл n-го порядка, поэтому порожденная ими группа действует транзитивно [2]. Следовательно, риманова поверхность R связна [3]. Поскольку цикленные типы подстановок σ_1, σ_2, σ_3 соответственно таковы: $(2, 1, \ldots, 1)$, (n), (n_1, n_2), то индекс ветвления поверхности R равен $\omega_z=2n-2$, а ее род равен $\rho = \frac{1}{2}\omega_z - n + 1 = 0$ [3]. Следовательно, R гомеоморфна сфере $\widehat{\mathbf{C}}$.

Пусть $f(z, w)=0$ — алгебраическое уравнение римановой поверхности R. Тогда соответствующая векторно-матричная задача линейного сопряжения для рассматриваемого случая имеет вид [3] (при надлежащей нумерации корней):

$$
\begin{aligned}
&w^+(t)=(G_1,\,1)\,w^-(t),\quad t\in L_1,\\
&w^+(t)=(G_3,\,1)\,w^-(t),\quad t\in L_2,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $w(z)=(w_1(z),\ w_2(z),\ \ldots,\ w_n(z))$ — вектор-функция (столбец); $w_i(z)$ — корни уравнения $f(z,\ w)=0$; $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $(G_1,\ 1)$ и $(G_3,\ 1)$ — матричное представление подстановок σ_1 и σ_3; L_1 и L_2 — разрезы, соединяющие точки a_1, a_2 и a_2, a_3 соответственно.

Элемент $w(z)$, порождающий искомое поле, будем искать как аналитическое решение задачи (1), обращающееся в нуль при $z=0$, ограниченное при $z=a_1$ и $z=a_3$ и имеющее асимптотику $w_1(z)\sim O(kz)$, $w_2(z)\sim O(1),\ \ldots,\ w_n(z)\sim O(1)$ при $z\to\infty$, $k\neq 0$. Искомое решение должно удовлетворять следующему алгебраическому уравнению:

$$
f(z,\ w)=w^n+(\alpha z+\beta)\,w^{-n-1}+(\gamma z+\delta)\,w^{n-2}+\ \ldots\ +(\xi z+\eta)\,w+(\mu z+\nu)=0,
\tag{2}
$$

где α, β, $\ldots$, μ, ν — неизвестные коэффициенты. Так как $z=0$ является точкой ветвления порядка n, то, полагая $w(0)=0$, заключаем, что при $z=0$ уравнение (2) должно приводиться к виду $w^n=0$. Отсюда следует, что $\beta=\delta=\ \ldots\ \eta=\nu=0$, и, следовательно, получим:

$$
f(z,\ w)=w^n+\alpha zw^{n-1}+\gamma zw^{n-2}+\ \ldots\ +\xi zw+\mu z=0.
\tag{3}
$$

Учитывая асимптотику $w_1(z)\sim O(kw)$ при $z\to\infty$ и используя диаграмму Ньютона [3], заключаем, что $\alpha=-k$ и, следовательно,

$$
f(z,\ w)=w^n-kzw^{n-1}+\gamma zw^{n-2}+\ \ldots\ +\xi zw+\mu z=0.
\tag{4}
$$

Для получения остальных неизвестных коэффициентов исходим из того условия, что поверхность R над точками $z=a_1$ и $z=a_3$ разветвляется по закону подстановок σ_1 и σ_3 соответственно; при $z=a_1$ имеем: $f(a_1,\ w)=w^n-ka_1w^{n-1}+\gamma a_1w^{n-2}+\ \ldots\ +\xi a_1w+\mu a_1=(w+a)^2(w^{n-2}+b_1w^{n-3}+\ \ldots\ +b_{n-2})=w^n+(2a+b_1)\,w^{n-1}+(b_2+2ab_1+a^2)\,w^{n-2}+\ \ldots\ \ldots\ +(2ab_{n-2}+a^2b_{n-3})\,w+a^2b_{n-2}$, а при $z=a_3$: $f(a_3,\ w)=w^n-ka_3w^{n-1}+\gamma a_3w^{n-2}+\ \ldots\ +\xi a_3w+\mu a_3=(w+c)^{n_1}(w+d)^{n_2}=w^n+(n_1c+n_2d)\,w^{n-1}+\left[\frac{n_1(n_1-1)}{2}c^2+n_1n_2\,cd+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\,d^2\right]w^{n-2}+\ \ldots\ +c^{n_1}d^{n_2}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, получим систему уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&2a+b_1=-ka_1\\
&b_2+2ab_1+a^2=\gamma a_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&2ab_{n-2}+a^2b_{n-3}=\xi a_1\\
&a^2b_{n-2}=\mu a_1
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&n_1c+n_2d=-ka_3\\
&\frac{n_1(n_1-1)}{2}\,c^2+n_1n_2cd+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\,d^2=\gamma a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n_1d+n_2c)\,c^{n_1-1}\,d^{n_2-1}=\xi a_3\\
&c^{n_1}d^{n_2}=\mu a_3
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

Система (5) содержит $2n$ уравнений и такое же число неизвестных. Система совместна по построению. Далее, неизвестные b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-2} в первую часть системы (5) входят линейно. Исключая их, получаем:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&na^{n-1}+(n-1)\,ka_1\cdot a^{n-2}+(n-2)\,\gamma a_1\cdot a^{n-3}+\ \ldots\ \pm\xi a_1=0,\\
&(n-1)\,a^n+(n-2)\,ka_1\,a^{n-1}+(n-3)\,\gamma a_1\cdot a^{n-2}+\ \ldots\ \pm\mu a_1=0.
\end{aligned}
\right.
\tag{6}
$$

Знак «+» берется, если n четно, а знак «—», если n нечетно. Исключая неизвестную c из второй части системы (5), будем иметь:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a_3\gamma=\left[\frac{n_2\,(n_2-1)}{2}\,d^2+\frac{n_1-1}{2n_1}(ka_3+n_2d)^2-n_2d\,(ka_3+n_2d)\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_3\xi=\left[\frac{\left(n_1^2-n_2^2\right)d-kn_2a_3}{n_1}\right]\left(\frac{-ka_3-n_2d}{n_1}\right)^{n_1-1}d^{n_2-1}\\
&a_3\mu=\left(\frac{-ka_3-n_2d}{n_1}\right)^{n_1}d^{n_2}
\end{aligned}
\right.
\tag{7}
$$

Находя $\gamma, \ldots, \xi, \mu$ из (7) и подставляя их значения в (6), получаем:

$$\begin{cases} na_3a^{n-1} + [(n-1)ka_1a_3] \cdot a^{n-2} + \ldots \pm \\ \pm \left\{ \left[\dfrac{(n_1^2 - n_2^2)\, d - ka_3n_2}{n_1} \right] \left(\dfrac{-ka_3 - n_2d}{n_1} \right)^{n_1-1} a_1 d^{n_2-1} \right\} = 0, \\ (n-1)\, a_3a^n + [(n-2)\, ka_1a_3]\, a^{n-1} + \ldots \pm \left[\left(\dfrac{-ka_3 - n_2d}{n_1} \right)^{n_1} d^{n_2} a_1 \right] = 0. \end{cases}$$

Левые части этих уравнений будем рассматривать как многочлены от a. Обозначим их соответственно через $\varphi(a)$ и $\psi(a)$. Желая исключить переменную a, приравниваем к нулю результат этих многочленов:

$$R(\varphi, \psi) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) является уравнением степени $n(n-1)$ относительно a. Следовательно, оно имеет $n(n-1)$ решений, но среди этих решений имеются и посторонние. Их число равно $n(n-1) - n(n-3)/2 = n(n+1)/2$ (поскольку число соотношений $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = e$ для рассматриваемого случая равно $n(n-3)/2$). Отбрасывая посторонние решения, получаем нужные значения для коэффициентов искомого уравнения (2). При этом уравнение поверхности принимает вид:

$$f(z, w) = w^n - kzw^{n-1} + \left\{ \frac{1}{a_3} \left[\frac{n_2(n_2-1)}{2} d^2 + \frac{n_1 - 1}{2n_1} (ka_3 + n_2d)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - n_2 (ka_3 + n_2d)\, d \right] \right\} zw^{n-2} + \ldots + \frac{1}{a_3} \left(\frac{-ka_3 - n_2d}{n_1} \right)^{n_1} d^{n_2} = 0. \tag{9}$$

Здесь d определяется из (8). В частности, из (9) видно, что при $d=0$ уравнение поверхности R приводимо, т. е. $d=0$ является посторонним решением.

Пусть $\gamma_0, \ldots, \xi_0, \mu_0$ — одно из найденных значений для коэффициентов уравнения (4) и пусть

$$f(z, w) = w^n - kzw^{n-1} + \gamma_0 zw^{n-2} + \ldots + \xi_0 zw + \mu_0 z = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим вопрос об упорядочении корней уравнения (10). Для этой цели находим z из равенства (10):

$$z = \frac{w^n}{kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \ldots - \xi_0 w - \mu_0}. \tag{11}$$

Из (11) видно, что $z \to \infty$ при $w \to \infty$ и $kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \ldots - \xi_0 w - \mu_0 \to 0$.

Обозначим корни уравнения $kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \ldots - \xi_0 w^1 - \mu_0 = 0$ через $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_{n-1}^0$. Таким образом, над точкой $z=\infty$ переменная w принимает ровно n значений $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_{n-1}^0, \infty$. Функция, обратная к (11), реализует конформное отображение поверхности R на $\widehat{\mathbf{C}}$. При этом контур, лежащий на R над $L_1 \cup L_2$, преобразуется на сложный контур Γ и разбивает $\widehat{\mathbf{C}}$ на n связных компонент (образы листов), содержащих по одной из точек $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_{n-1}^0, \infty$ (образы точки ∞). Далее при $z=a_1$ и $z=a_3$ находим кратные корни уравнения (10). Эти корни расположены на границах примыкающих областей. Затем перенумеруем области таким образом, чтобы они располагались по закону подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и содержали по одной из точек $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_{n-1}^0, \infty$ [4].

В качестве решений векторно-матричной задачи (1) нужно взять однозначные в области $\widehat{\mathbf{C}} | L_1 \cup L_2$ решения уравнения (10), удовлетворяющие следующим начальным условиям: $w_{i_1}(\infty) = w_1^0,\ w_{i_2}(\infty) = w_2^0, \ldots, w_{i_n}(\infty) = \infty$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — соответствующая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Нормальный базис поля алгебраических функций, заданный уравнением (10), имеет вид [3]:

$$1,\ w,\ \frac{w^2}{z - a_3},\ \frac{w^3}{(z - a_3)^2}, \ldots, \frac{w^{n-2}}{(z - a_3)^{n-3}},\ \frac{w^{n-1}}{(z - a_3)^{n-3}}.$$

Аналогично работе [4] можно построить каноническую матрицу решения задачи (1) и, следовательно, в явном виде решить соответствующую неоднородную векторно-матричную задачу [5].

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 104.
2. Чеботарев Н. Г. Теория Галуа. М.; Л., 1936. С. 154.
3. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 396.
4. Джураев О. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 43.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. С. 551.

Поступила в редакцию 20.03.87.

УДК 517.51

ЧЖОУ СУНПИН

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАССОНА

1. **Введение.** Пусть $C^k_{[-1,1]}$ — класс функций, имеющих непрерывную производную степени k на $[-1, 1]$, $C_{[-1,1]}=C^0_{[-1,1]}$, $C^k_{2\pi}$ — класс 2π-периодических функций, имеющих непрерывную производную степени k с нормой $\|f\|_{C[a,b]}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$. Обозначим через $E_n(f)$ наилучшее приближение функции $f(x)\in C_{[-1,1]}$ алгебраическими полиномами степени не выше n, через $E^*_n(f)$ наилучшее приближение функции $f(x)\in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами степени не выше n. Пусть $\omega_k(f, \delta)$ — модуль гладкости порядка k функции $f(x)$, т. е. $\omega_k(f, \delta)=\sup\limits_{0\leqslant h\leqslant\delta}\|\Delta^k_h f(x)\|_c$, где $\Delta^k_h f(x)=\Delta_h(\Delta^{k-1}_h f(x))$, $\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$. Всюду в дальнейшем через C_x, M_x будем обозначать постоянные, зависящие лишь от x.

Задача наилучшего приближения непрерывных функций привлекала внимание многих ученых. Еще в 1914 г. С. Бернштейн [1] показал, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} nE_n(|x|)$. Затем С. Бернштейн [2, 3] и С. М. Никольский [4, 6] перенесли этот результат на случай функций, имеющих производные и удовлетворяющих условию Липшица. В 1980 г. М. Хассон [7] доказал следующую теорему.

Теорема А. Пусть $f(x)\in C_{(-1,1)}$, $\omega_2(f, \delta)=O(\delta)$ и существует такая постоянная $a\in(-1, 1)$, что выполнено одно из условий: $D_+f(a)>D^-f(a)$, $D_-f(a)>D^+f(a)$. Тогда $nE_n(f)\sim 1$*, здесь D^+, D_+, D^-, D_- — производные Дини, см. [8].

В этой же статье М. Хассон привел без доказательства соответствующую теорему для функций, имеющих производные.

Теорема Б. Пусть $k\geqslant 1$, $f(x)\in C^k_{[-1,1]}$, $\omega_2(f^{(k)}, \delta)=O(\delta)$ и существует такая постоянная $a\in(-1, 1)$, что выполнено одно из условий

$$D_+f^{(k)}_*(a)>D^-f^{(k)}(a),\ D_-f^{(k)}(a)>D^+f^{(k)}(a). \qquad (1)-(2)$$

Тогда $n^{k+1}E_n(f)\sim 1$.

Настоящая статья посвящена обобщению результатов Хассона, в частности, мы даем другое, более простое, доказательство теорем А и Б.

2. **Основные результаты.** Говорят, что функция $\varphi(x)\in\Phi$, если выполнены следующие условия:

$$\text{I}\ \ \varphi(x)>0,\ x\in(0, \infty),\ \lim_{x\to 0+}\varphi(x)=0,$$

$$\text{II}\ \ \varphi(\varepsilon x)\geqslant\varepsilon\varphi(x)\ \text{для}\ x\in(0, 1]\ \text{и}\ \varepsilon\in(0, 1],$$

---

* Существует положительная постоянная K, не зависящая от n, такая, что $K^{-1}\leqslant nE_n(f)\leqslant K$.

III $\sum_{j=0}^{n} 2^{2j}\varphi(2^{-j}) = O(2^{2n}\varphi(2^{-n}))$.

Введем обозначение

$$F_k(f,\ t,\ x,\ \eta) = \int_0^x dx_1 \int_{x_1}^{2x_1} dx_2 \ldots \int_{x_{k-1}}^{2x_{k-1}} [f^{(k)}(t+x_k) + f^{(k)}(t-x_k) - \\ - f^{(k)}(t+\eta x_k) - f^{(k)}(t-\eta x_k)]\, dx_k.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $k \geqslant 0$, $\varphi(x) \in \Phi$, $f(x) \in C^k_{[-1,\ 1]}$, $\omega_2(f^{(k)},\ \delta) = O(\varphi(\delta))$ и существуют постоянные $a \in (-1,\ 1)$, $\eta_0 > 0$ такие, что

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^k \varphi(h)} |F_k(f,\ a,\ h,\ \eta_0)| > 0. \tag{3}$$

Тогда $n^k[\varphi(n^{-1})]^{-1}E_n(f) \sim 1$.

Доказательство. Из известных неравенств

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_k}{n^k} E_{n-k}(f^{(k)}) \text{ и } E_n(f) \leqslant C\omega_2(f,\ n^{-1}),$$

см. [9], получаем неравенство

$$E_n(f) \leqslant C_k n^{-k}\varphi(n^{-1}). \tag{4}$$

Покажем, что имеет место обратное неравенство. Обозначим через $P_n(f,\ x)$ полином наилучшего приближения функции $f(x)$. Для n выберем натуральное число j так, чтобы $2^j \leqslant n < 2^{j+1}$. Представим $P_n(f,\ x)$ в виде:

$$P_n(f, x) = P_n(f,\ x) - P_{2^j}(f,\ x) + \sum_{l=1}^{j} [P_{2^l}(f,\ x) - P_{2^{l-1}}(f,\ x)] + P_1(f,\ x).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $a \pm \varepsilon \in (-1,\ 1)$, и пусть $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$. Тогда

$$\|P_n^{(k+2)}(f,\ x)\|_{C[\alpha,\ \beta]} \leqslant \|P_n^{(k+2)}(f,\ x) - P_{2^j}^{(k+2)}(f,\ x)\|_{C[\alpha,\ \beta]} + \\ + \sum_{l=1}^{j} \|P_{2^l}^{(k+2)}(f,\ x) - P_{2^{l-1}}^{(k+2)}(f,\ x)\|_{C[\alpha,\ \beta]} \leqslant M_k \sum_{l=1}^{j} 2^{(k+2)(l+1)+1} E_{2^l}(f) \leqslant \\ \leqslant M_k 2^{2j}\varphi(2^{-j}),$$

откуда

$$\|P_n^{(k+2)}(f,\ x)\|_{C[\alpha,\ \beta]} \leqslant M_k n^2\varphi(n^{-1}). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что

$$F_k(P_n(f),\ a,\ h,\ \eta_0) = \int_0^h dx_1 \int_{x_1}^{2x_1} dx_2 \ldots \int_{x_{k-1}}^{2x_{k-1}} dx_k \int_{\eta_0 x_k}^{x_k} dx_{k+1} \int_{-x_{k+1}}^{x_{k+1}} P_n^{(k+2)} \times \\ \times (f,\ a + x_{k+2})\, dx_{k+2}$$

для достаточно малого $h > 0$ такого, что $a \pm 2^k h \in (\alpha,\ \beta)$. Таким образом, в силу (4), имеем:

$$|F_k(P_n(f),\ a,\ h,\ \eta_0)| \leqslant C_k^* h^{k+2} n^2 \varphi(n^{-1}). \tag{6}$$

С другой стороны, в силу (3), существует постоянная C^* для достаточно малого $h > 0$ такая, что

$$|F_k(f,\ a,\ h,\ \eta_0)| \geqslant C^* h^k \varphi(h) \geqslant C^* h^k \varphi(n^{-1}) \min\{1,\ nh\}. \tag{7}$$

Положим $h = \frac{1}{2}\min\left\{1,\ \frac{C^*}{C_k^*}\right\} n^{-1}$. Из (6) и (7) находим

$$|F_k(f,\ a,\ h, \eta_0) - F_k(P_n(f),\ a,\ h,\ \eta_0)| \geqslant \\ \geqslant \frac{C^*}{2}\min\{h^k\varphi(n^{-1}),\ h^{k+1}n\varphi(n^{-1})\} \geqslant C_1 n^{-k}\varphi(n^{-1}).$$

Простым вычислением приходим к неравенству

$$|F_k(f, a, h, \eta_0) - F_k(P_n(f), a, h, \eta_0)| \leqslant C_k \|f - P_n(f)\|_{C[-1,1]},$$

поэтому $E_n(f) \geqslant C_k n^{-k} \varphi(n^{-1})$. Отсюда и из неравенства (4) вытекает утверждение теоремы.

Теперь покажем, что теорема 1 содержит теорему А и теорему Б.

Теорема 2. Пусть $k \geqslant 0$, $\varphi(x) = |x|$. Если $f(x) \in C^k_{[-1,1]}$, $\omega_2(f^{(k)}, \delta) = O(\delta)$ и для $f(x)$ выполняется неравенство (1) или (2), то $f(x)$ удовлетворяет условию (3).

Доказательство. Используя неравенство $\max\{D_- f^{(k)}(a) - D^+ f^{(k)}(a),\ D_+ f^{(k)}(a) - D^- f^{(k)}(a)\} > C > 0$ и условие $\omega_2(f^{(k)}, \delta) \leqslant M\delta$, имеем:

$$\frac{1}{h} |f^{(k)}(a+h) + f^{(k)}(a-h) - f^{(k)}(a+\eta h) - f^{(k)}(a-\eta h)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{h} |f^{(k)}(a+h) + f^{(k)}(a-h) - 2f^{(k)}(a)| - |\eta| M \geqslant C - |\eta| M, \quad h \to 0+.$$

Выберем постоянные $\eta_0 > 0$ и $h_0 > 0$ для достаточно малых h, $0 < h \leqslant 2^k h_0$, такие, что $\frac{1}{h} |f^{(k)}(a+h) + f^{(k)}(a-h) - f^{(k)}(a+\eta_0 h) - f^{(k)}(a-\eta_0 h)| \geqslant \frac{C}{2} > 0$. Можно считать, что $f^{(k)}(a+h) + f^{(k)}(a-h) - f^{(k)}(a+\eta_0 h) - f^{(k)}(a-\eta_0 h) \geqslant \frac{C}{2} h$, поэтому для $0 < h \leqslant h_0$ находим $F_k(f, a, h, \eta_0) \geqslant \frac{C}{2} \int\limits_0^h dx_1 \int\limits_{x_1}^{2x_1} dx_2 \ldots \int\limits_{x_{k-1}}^{2x_{k-1}} x_k\, dx_k \geqslant C_k h^{k+1}$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{h \to 0+} h^{-k-1} F_k(f, a, h, \eta_0) \geqslant C_k > 0$, т. е. $f(x)$ удовлетворяет условию (3).

Отметим, что имеет место теорема, аналогичная теореме 1, и для периодических функций.

Теорема 3. Пусть $k \geqslant 0$, $\varphi(x) \in \Phi$. Если $f(x) \in C^k_{2\pi}$, $\omega_2(f^{(k)}, \delta) = O(\varphi(\delta))$ и существует действительное число a и постоянная $\eta_0 > 0$ со свойством (3), то $n^k [\varphi(n^{-1})]^{-1} E^*_n(f) \sim 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

В заключение выражаю глубокую благодарность доценту А. А. Килбасу за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Bernstein S. // Acta Math. 1914. V. 37. P. 1.
2. Бернштейн С. // Изв. АН СССР: Сер. матем. 1938. Т. 2. С. 169.
3. Бернштейн С. // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. С. 379.
4. Никольский С. М. Там же. 1946. Т. 52. С. 7.
5. Никольский С. М. // Изв. АН СССР: Сер. матем. 1946. Т. 10. С. 295.
6. Никольский С. М. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55. С. 99.
7. Hasson M. // Approximation Theory III. New York. 1980. P. 491.
8. Зигмунд А. // Тригонометрические ряды. М., 1965.
9. Тиман А. Ф. // Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

Поступила в редакцию 03.04.87.

Краткие сообщения

УДК 538.132

А. И. КИРИЛЕНКО

ЯВЛЕНИЕ БРЮСТЕРА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СЛОИ

Явление Брюстера, понимаемое как прохождение волны определенной поляризации через границу раздела сред без отражения, находит широкое применение в оптике и радиофизике. Нами обнаружено, что при определенных условиях на границе параллельных слоев (при компланарном падении) существуют волны определенной поляризации, которые переносят энергию перпендикулярно к границе раздела и при этом на границе не отражаются. Предпосылкой для существования такого эффекта служит установленный С. А. Богуславским факт зависимости направления потока энергии неоднородной волны (вектор Пойнтинга), распространяющейся в поглощающей среде, от ее поляризации [1]. Цель нашей работы — установить, на границах каких сред и при каких параметрах волн указанное явление возможно.

Вопрос о том, каким образом в поглощающей среде сформировать волну с заданной структурой, обсуждался в литературе, и мы его рассматривать не будем. Считаем, что на границу раздела $z=0$ двух сред падает волна вида [2]:

$$\vec{E}=A_s[\vec{q}\vec{e}]-A_p[\vec{e}[\vec{q}\vec{e}]];\quad \vec{H}=NA_s[\vec{e}[\vec{q}\vec{e}]]+NA_p[\vec{q}\vec{e}], \tag{1}$$

где множитель $\exp\{i[\omega t-k(\vec{m},\vec{r})]\}$ опущен; $N=n-i\varkappa=n(1-i\operatorname{tg}\delta)$ — показатель преломления (ПП); $\vec{m}=N\vec{e}=N(\vec{e}_1+i\vec{e}_2)=\vec{m}_1+i\vec{m}_2$ — вектор рефракции; $\vec{e}_1\sim\operatorname{ch}\vartheta\{\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha\}$ — вектор волновой, а $\vec{e}_2\sim\operatorname{sh}\vartheta\{\cos\alpha,\ 0,\ -\sin\alpha\}$ — вектор амплитудной нормали; α — угол (параметр) падения; ϑ — параметр неоднородности; $\vec{q}=\{0,\ 0,\ 1\}$ — нормаль к границе раздела. Известно, что s- и p-волны (1) при отражении и преломлении не меняют своего типа, и на границе раздела амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн связаны соотношениями, которые можно представить в том же виде, что и формулы Френеля. Явление Брюстера состоит в том, что коэффициент отражения R_p обращается в нуль, что дает [2]:

$$\operatorname{tg}(\alpha+i\vartheta)=\frac{N'}{N}=n_1-i\varkappa_1, \tag{2}$$

где $N'=n'-i\varkappa'$ — ПП среды, в которой распространяется преломленная волна. Соотношение (2) позволяет однозначно определить параметры волны α и ϑ, при которых p-волна проходит границу раздела без отражения. С другой стороны, для p-волны (1) падающий поток энергии перпендикулярен к границе раздела, если

$$\operatorname{tg}\alpha = u \operatorname{th}\vartheta,\ u = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\delta}{3} + \sqrt{3}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\delta}{3}\right)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{3}} \qquad (3)$$

при $0<\delta<\pi/2$.

Таким образом, если удастся найти такие α и ϑ, что они одновременно будут удовлетворять соотношениям (2) и (3), получим явление Брюстера при нормальном потоке энергии. Из (2) и (3) имеем два уравнения относительно $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{u}{\varkappa_1}\operatorname{tg}\alpha - \frac{n_1 u}{\varkappa_1} = 0;\ \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{n_1}\operatorname{tg}\alpha + \frac{\varkappa_1 u}{n_1} = 0, \qquad (4)$$

у которых должен быть хотя бы один общий вещественный корень. Это приводит к условиям, которым должны удовлетворять параметры граничащих сред:

$$1 \geqslant 4n_1\varkappa_1 u \geqslant -u^2,$$

$$\frac{(n'^2+\varkappa'^2)^2 + (n^2-\varkappa^2)(n'^2-\varkappa'^2) + 4n\varkappa n'\varkappa'}{(n^2-\varkappa^2)\,n'\varkappa' - (n'^2-\varkappa'^2)\,n\varkappa} = \frac{1-u^2}{u}. \qquad (5)$$

На четыре параметра, характеризующие граничащие среды, будет, по существу, одно ограничение, т. е. три параметра можно задавать произвольно. Однако нужно иметь в виду, что, несмотря на большое разнообразие n и $\varkappa$, для одной среды эти параметры не являются независимыми. Это обстоятельство делает условия (5) довольно жесткими, поэтому для примера покажем, что система уравнений (2)—(3) решения имеет.

Зададимся относительными параметрами $n_1=1{,}5$; $\varkappa_1=-0{,}5$. По этим значениям с помощью (5) находим $u=11{,}09$, а по u через (3) — угол потерь первой среды: $\delta=74^\circ{,}543$. По известному u определяем общий корень уравнений (4): $\alpha=58^\circ{,}28$. Это, в свою очередь, дает возможность найти параметр неоднородности падающей волны $\vartheta=0{,}147$. Неоднородную волну с такими значениями α и ϑ довольно легко сформировать, например, используя падение однородной волны на поглощающий клин. Обратимся к параметрам сред. Используя определение (2) и найденное значение δ, получаем: $\varkappa=3{,}616\,n$; $n'=3{,}31\,n$; $\varkappa'=4{,}92\,n$; $\delta=56^\circ{,}1$. Здесь n — действительная часть показателя преломления первой среды — свободный параметр.

Как видно из (1), падающая p-волна линейно поляризована по магнитному вектору и эллиптически — по электрическому; эллипс располагается в плоскости падения.

Нами также проанализирован случай непараллельных слоев (некомпланарное падение). Явление Брюстера при нормальном падении потока энергии здесь также возможно, но ограничения на среды гораздо менее жесткие благодаря наличию еще одного параметра — параметра некомпланарности, характеризующего волну.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. П. Хапалюку за обсуждение результатов.

Список литературы

1. Богуславский С. А. Избранные труды по физике. М., 1961.
2. Кириленко А. И. Изв. вузов СССР: Радиофизика. 1981. Т. 24. С. 1416.

Поступила в редакцию 08.02.88.

УДК 621.396.670

С. В. МАЛЫЙ, И. Т. КРАВЧЕНКО

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОРЕЖЕННЫХ ВИБРАТОРНЫХ РЕШЕТОК

Вибраторные антенные и дифракционные решетки широко применяются в различных технических приложениях. Среди методов их математического моделирования наибольшее развитие получили методы численного исследования малоэлементных и бесконечных периодических решеток [1].

Вопросы, связанные с разработкой эффективных методов численного анализа апериодических решеток, в частности с прореженными элементами, не получили достаточного развития, хотя учет апериодичности — одно из необходимых условий проектирования реальных технических устройств и прогнозирования их эксплуатационных характеристик с учетом дефектов технологического и эксплуатационного характера.

Необходимость разработки методов исследования прореженных решеток обусловлена следующими причинами: во-первых, решетки такого типа представляют собой достаточно точную модель решеток с сильными дефектами элементов, во-вторых, прореживание является одним из наиболее эффективных средств уменьшения числа элементов при одновременном сохранении или улучшении электродинамических характеристик решеток [2].

Одна из особенностей исследования прореженных решеток состоит в многовариантности, т. е. анализ электродинамических характеристик должен проводиться в диапазоне плотностей прореживания, что необходимо для определения оптимального уровня прореживания или допустимого уровня дефектов. Однако известные методы ориентированы на решение задач одновариантного анализа и, как правило, не учитывают взаимовлияния элементов решетки [2]. Все это приводит к чрезмерным вычислительным затратам и большим погрешностям в определении электродинамических характеристик решеток.

Настоящая работа посвящена разработке методики многовариантного численного анализа произвольных прореженных вибраторных структур. Методика базируется на методе взаимных сопротивлений [1] и методе «матрешки» [3].

Предлагаемую методику реализует алгоритм, включающий в себя следующие основные этапы:

нумерацию элементов решетки по принципу: первый нумеруется, последний прореживается;

проведение LU-разложения для непрореженной структуры;

выделение по заданному уровню прореживания соответствующего LU-разложения прореженной решетки из разложения, полученного для непрореженной решетки;

электродинамический анализ характеристик прореженной вибраторной структуры в заданных режимах возбуждения;

рекурсивное повторение двух предыдущих этапов для исследования решеток в условиях заданных уровней прореживания.

Максимальная временная сложность предлагаемого алгоритма при полном цикле последовательного поэлементного прореживания имеет оценку $2/3\ N^3$, где N — максимальное число элементов в непрореженной решетке. Аналогичная оценка при использовании метода взаимных сопротивлений составляет $1/12\ N^4$. Указанные оценки получены в предположении об одновариантном возбуждении решетки. В общем случае, когда структуры исследуются в K режимах возбуждения, имеем следующие оценки: $(K+1)N^3/3$ — для предлагаемого алгоритма, $N^4/12+K1/3N^3$ — для одновариантной реализации метода взаимных сопротивлений. Оценки емкостной сложности предлагаемого и традиционного алгоритмов совпадают.

Границы применимости описанной методики определяются возможностью совместного использования метода взаимных сопротивлений и метода «матрешки».

В качестве примера рассмотрим линейную решетку полуволновых вибраторов с одинаковым межэлементным расстоянием $(0{,}5\,\lambda)$. Решетка работает в режиме плосковолнового возбуждения. Требуется определить диаграммы направленности решетки при различных уровнях прореживания. Задача сводится к решению матричного уравнения $ZI=V$, где Z — матрица взаимных сопротивлений; I — вектор токов; V — вектор возбуждения. Поле в дальней зоне определяется по формуле $E(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} I_n e^{jkn\,0{,}5\lambda \sin\Theta}$, где N — число вибраторов в решетке; Θ — угол наблюдения.

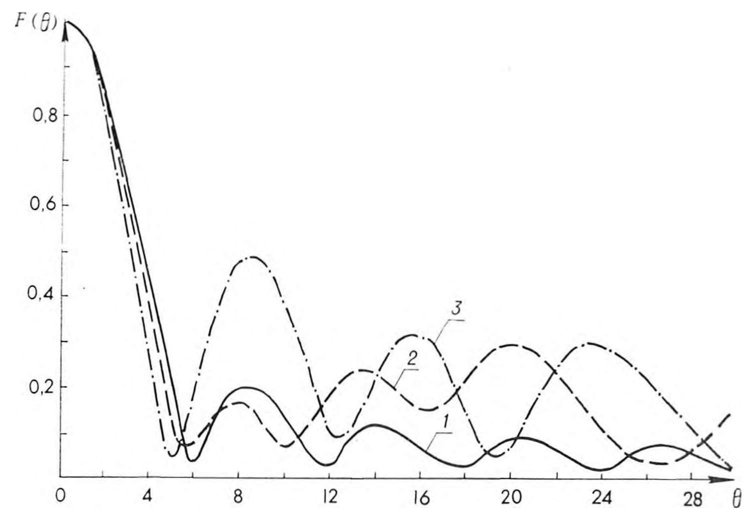


Рис. 1. Диаграммы направленности 20-элементной вибраторной решетки при различных уровнях прореживания:
1 — $N=20$; *2* — $N=15$; *3* — $N=10$

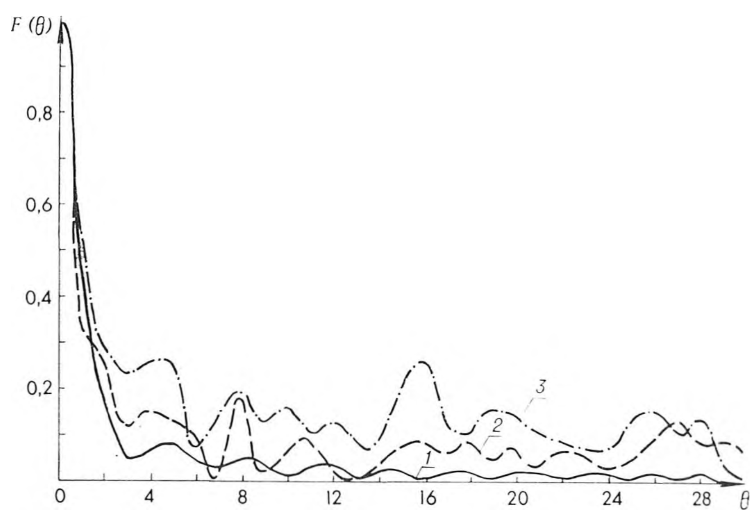


Рис. 2. Диаграммы направленности 80-элементной вибраторной решетки при различных уровнях прореживания:
1 — $N=80$; *2* — $N=60$; *3* — $N=40$

Расчеты проводились для двух решеток с числом элементов, соответственно равным 20 и 80, при различных уровнях прореживания, которое проводилось по равномерному случайному закону (рис. 1, 2). Количественная оценка эффективности предложенной методики следует из сравнения фактических затрат процессорного времени на расчет многовариантного прореживания по сравнению с аналогичными затратами для метода взаимных сопротивлений. Так, при расчете 80-элементной решетки (последовательное прореживание через десять элементов) на ЭВМ ЕС-1035 в среде ПДО СВМ эти затраты составили 270 с и 725 соответственно.

Точность предложенной методики совпадает с точностью метода взаимных сопротивлений.

Список литературы

1. Гостюхин В. Л., Гринева К. И., Трусов В. Н. Вопросы проектирования активных ФАР с использованием ЭВМ. М., 1983.
2. Антенные решетки: Методы расчета и проектирования / Под общей ред. Л. С. Бенсона. М., 1966.
3. Малый С. В., Кравченко И. Т. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. С. 69.

Поступила в редакцию 21.04.87.

УДК 535.8

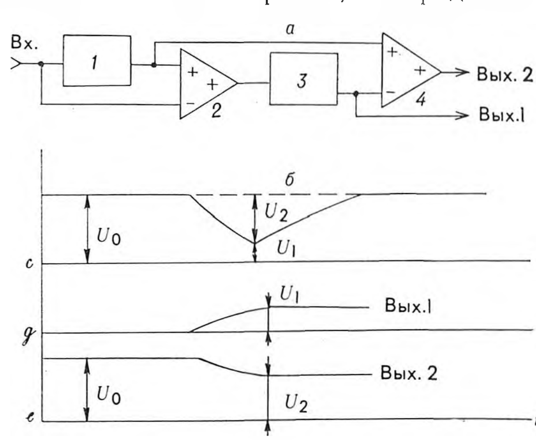
К. П. КУРЕЙЧИК, Н. В. КОЗЛОВСКИЙ

УСТРОЙСТВО ИЗМЕРЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ ПО МЕТОДУ «ПИКА» ДЛЯ ИМПУЛЬСНОГО СПЕКТРОМЕТРА

Измерение поглощения в атомно-абсорбционном спектральном анализе (ААСА) проводят несколькими методами, среди которых метод «пика» наиболее пригоден и часто применяется при непламенной атомизации анализируемых проб. Метод заключается в нахождении максимума сигнала поглощения за время измерения, который и принимается за искомую величину. Аппаратные решения выделения «пика» поглощения разнообразны и выполнены на основе цифровых [1] или аналоговых схем [2]. В последнем случае выделение «пика» происходит за счет пропускания прологарифмированного сигнала через интегрирующую RC-цепочку, подключенную ко входам дифференциального усилителя (ДУ) так, что емкость C соединяет один из входов ДУ с общей шиной, при этом резистор R включен между входами ДУ и выходом источника полезного сигнала. Надежная работа устройства достигается при $\tau_y = RC \gg \tau_u$, где τ_u — характерная длительность пика сигнала поглощения, равная 0,5 с.

При достаточно частом поступлении измеряемого сигнала на схему [2], например, от лазерного атомизатора, напряжение на емкости C растет, несмотря на большую постоянную τ_y по сравнению с τ_u, что и обусловливает падение точности измерений. В этом случае выделение «пика» ДУ производится не от начального сигнала, пропорционального интенсивности источника излучения без сигнала поглощения, а от уровня, до которого зарядилась емкость C. Таким образом, быстродействие схемы [2] по критерию возврата в исходное состояние и точность выделения полезного сигнала при его достаточно частом и периодическом повторении малы.

Схема, практически лишенная перечисленных недостатков (см. рисунок), содержит пиковые амплитудные детекторы (ПАД) *1* и *3*, соответствующим образом подключенные к дифференциальным усилителям (ДУ) *2* и *4*. Предварительный сброс напряжения производится с помощью реле.



Структурная схема (*а*) и временные диаграммы работы (*б*) устройства для измерения поглощения методом «пика»

В начальный момент времени на блоки *1* и *2* поступает напряжение U_0, пропорциональное интенсивности падающего на непламенный атомизатор излучения (см. рисунок, *б*, *с*). Выходное напряжение ДУ-1 при этом равно нулю, на выходе Вых. 2 (ДУ-4) — U_0 (см. рисунок, *б*, *е*). После появления «пика» сигнал поглощения на входе Вх. изменяется на U_2 и падает до напряжения U_1 (см. рисунок, *б*, *с*). Напряжение на выходе ПАД (*3*) (Вых. 1) возрастает до величины U_1 (рисунок, *б*, *д*), поскольку им выделяется разность $U_1=U_0-U_2$. Амплитуда напряжения U_1 запоминается ПАД-3. На Вых. 2 ДУ-4 при этом выделяется напряжение $U_2=U_0-U_1$, характеризующее собой «пик» сигнала поглощения.

Пиковые амплитудные детекторы *1* и *3* могут быть выполнены по известным схемам, например, [3]. Авторы использовали схему [4], поскольку требовалось искать и выделять «пик» сигнала поглощения в течение 1 мин.

При нормированном значении $U_{н0}$ напряжения U_1 и U_2 однозначно определяют оптическое пропускание (U_1/U_0) и поглощение $(1-U_1/U_0)$. Оптическая плотность атомных паров в атомизаторе легко рассчитывается по определению $D=\lg[U_0/U_1]$ исходя из полученных величин U_1 и U_0.

В качестве ДУ использованы операционные усилители типа 544УД1А, коэффициент усиления которых устанавливался равным единице. Относительная погрешность выделения «пика» поглощения, т. е. напряжения U_2 данным устройством (без влияния его компонентов) в течение 1 мин полностью определяется нестабильностью U_0 за это же время. Этот параметр существенно зависит от нестабильности оптико-электронного тракта спектрометра, включающего источник излучения, фотоприемник, предварительные усилители и т. д. Для источников излучения типа ЛТ-2, ТСПК, ЛК и ВСБ паспортная нестабильность составляет около 1 %/мин. Подбором режима питания она может быть снижена до 0,1 %/мин и менее [5]. Нестабильность фотоприемников при нестабильности их источников питания в 0,01 %/мин в среднем равна 0,1 %/мин. Следовательно, нестабильность U_0 будет стремиться к 0,2 %/мин, что и определит погрешность измерения «пика» поглощения.

Описанное устройство разработано для импульсного бездисперсионного спектрометра СБ-1 [6], работающего с широким набором непламенных атомизаторов. Линейность в диапазоне 0,01—10 В не хуже 1 % и определяется пиковыми детекторами *1* и *3*.

Список литературы

1. Курейчик К. П., Саржевский А. М., Макаров В. Л. // ЖПС. 1981. Т. 34. № 5. С. 953.
2. Корепанов В. Е., Атнашев Ю. Б., Музгин В. Н. Измерительное устройство атомно-абсорбционного спектрометра: А. с. 890084 СССР // БИ. № 46. С. 1981.
3. Шило В. Л. Линейные интегральные схемы. М., 1979. С. 183.
4. Алексенко А. Г., Коломбет Е. А., Стародуб Г. И. Применение прецизионных аналоговых ИС. М., 1981.
5. Курейчик К. П., Безлепкин А. И., Хомяк А. С., Александров В. В. Газоразрядные источники света для спектральных измерений. Минск, 1987.
6. Курейчик К. П., Гулаков И. Р., Макаров В. Л., Козловский Н. В. Лазерное и оптическое спектральное приборостроение: Материалы Республ. школы-семинара. Минск, 1983. С. 56.

Поступила в редакцию 24.03.87.

УДК 517.9

О. А. КАСТРИЦА

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА, ОПРЕДЕЛЕННОГО НА СПЕКТРЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Пусть **M** — множество всех симметрических положительно определенных $n\times n$-матриц и

$$\dot{x}=Px \tag{1}$$

— линейная n-мерная асимптотически устойчивая стационарная система. Как известно [1. С. 34], при любой матрице $C \in \mathbf{M}$ уравнение

$$P^T A + AP = -C \qquad (2)$$

определяет единственным образом посредством матрицы $A \in \mathbf{M}$ функцию Ляпунова $v(x) = x^T A x$. Для оценки решений системы (1) используется функционал φ: $A \mapsto \varphi(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ (см., например, [2. С. 73]), где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — экстремальные собственные значения матрицы A. В [3] рассматривалась задача о максимальном отклонении $\varphi(A)$ при малых возмущениях матрицы A и были указаны способы построения реализующих такие отклонения добавок к матрице A при различных способах задания матричной нормы.

Рассмотрим теперь задачу о влиянии матрицы $C \in \mathbf{M}$ на величину $\varphi(A)$. Обозначим $\mathbf{B}$ множество симметричных матриц B таких, что $\|B\| \leqslant \varepsilon$ и $C + B \in \mathbf{M}$. Будем полагать дальше, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — соответствующие им собственные векторы такие, что $u_i^T u_i = 1$. Изменение матрицы C вызывает, в силу (2), изменение собственных значений λ_k, $k = 1, \ldots, n$. Зависимость λ_k от C характеризуется матрицей чувствительности $\rho^k = [\rho_{ij}^k]$, где $\rho_{ij}^k = \partial\lambda_k/\partial c_{ij}$ — коэффициент чувствительности собственного значения λ_k к изменению элемента c_{ij} матрицы C. Дифференцируя по c_{ij} соотношение $Au_k = \lambda_k u_k$, получаем

$$\frac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k + A \frac{\partial u_k}{\partial c_{ij}} = \rho_{ij}^k u_k + \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial c_{ij}}. \qquad (3)$$

Умножая (3) слева на u_k^T и учитывая, что $A^T = A$, будем иметь $u_k^T \dfrac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k - \rho_{ij}^k = (\lambda_k u_k - Au_k)^T \dfrac{\partial u_k}{\partial c_{ij}} = 0$. Откуда

$$\rho_{ij}^k = u_k^T \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} u_k. \qquad (4)$$

Обозначим E_{ij} $n \times n$-матрицу, единственным ненулевым элементом которой является элемент i-й строки и j-го столбца, равный 1. Дифференцируя (2) по c_{ij}, получаем уравнение для отыскания $\dfrac{\partial A}{\partial c_{ij}}$:

$$P^T \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial c_{ij}} P = -E_{ij}. \qquad (5)$$

Это уравнение имеет единственное решение [4. С. 269]. Таким образом, уравнения (4)—(5) позволяют вычислить ρ_{ij}^k, а следовательно, и коэффициенты ρ_{ij} чувствительности функционала $\varphi(A)$ к изменению элемента c_{ij}:

$$\rho_{ij} = \frac{\partial}{\partial c_{ij}} (\lambda_n/\lambda_1) = \frac{\rho_{ij}^n \lambda_1 - \lambda_n \rho_{ij}^1}{\lambda_1^2}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим теперь множество стационарных систем вида $\dot{x} = (P + R)x$, близких к системе (1) (т. е. $\|R\| \leqslant \varepsilon$). При малых ε сохраняется асимптотическая устойчивость системы [5. С. 103]. При каждом P уравнение Ляпунова

$$P^T A + AP = -E \qquad (6)$$

имеет единственное решение $A = A(P) \in \mathbf{M}$ и, таким образом, для матриц A и P, связанных соотношением (6), значения $\varphi(A)$ зависят от P. Зависимость собственного значения λ_k от переменной матрицы $P = [p_{ij}]$ характеризуется матрицей чувствительности $\sigma^k = [\sigma_{ij}^k]$, где $\sigma_{ij}^k = \partial\lambda_k/\partial p_{ij}$ — коэффициент чувствительности λ_k к изменению элемента p_{ij} матрицы P, причем (см. (3)—(4))

$$\sigma_{ij}^k = u_k^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} u_k. \qquad (7)$$

Дифференцируя (6) по p_{ij}, получаем: $E_{ji}A + P^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} P + AE_{ij} = 0$. Откуда, учитывая симметричность A, получаем уравнение для $\partial A / \partial p_{ij}$:

$$P^T \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial p_{ij}} P = -(AE_{ij} + (AE_{ij})^T). \tag{8}$$

Таким образом, для нахождения σ_{ij}^k имеем уравнения (8) — (7).

Полученные результаты могут быть использованы для решения задач об экстремальном возмущении функционала $\varphi(A)$ при ограниченных изменениях параметров уравнений (2) и (6).

Замена матрицы C в уравнении (2) матрицей $C+B$ сообщает функционалу $\varphi(A)$ приращение $\Delta_B\varphi(A)$.

Задача. Построить матрицу $B_0 \in \mathbf{B}$ такую, что $\Delta_{B_0}\varphi(A) = \max\limits_{B \in \mathbf{B}} \Delta_B\varphi(A)$.

Приращение функционала $\varphi(A)$, вызванное матрицей B, можно представить в виде

$$\Delta_B\varphi(A) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \rho_{ij} b_{ij} + o(\varepsilon). \tag{9}$$

Формула (9) дает возможность выбрать симметричную матрицу $B = B_0 = [b_{ij}^0]$ так, чтобы $\Delta_{B_0}\varphi(A)$ было максимальным с точностью до $o(\varepsilon)$. Построение матрицы B_0 зависит от способа задания нормы матрицы.

Пусть $\|B\| = \sum\limits_{k,\, l=1}^{n} |b_{kl}|$ и пусть $\max\limits_{k,\, l} |\rho_{kl} + \rho_{lk}| = |\rho_{ij} + \rho_{ji}|$. Тогда положим $B_0 = \frac{\varepsilon}{2}(E_{ij} + E_{ji}) \operatorname{sgn}(\rho_{ij} + \rho_{ji})$. Матрица B_0 реализует $\max \Delta_B\varphi(A)$ с точностью до $o(\varepsilon)$. Если $\max$ достигается при разных парах (k, l), то B_0 определяется неоднозначно. Полученные при этом $\Delta_B\varphi(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Добавка R к матрице P сообщает $\varphi(A)$, в силу уравнения (6), приращение

$$\Delta\varphi_R(A) = \sum_{k,\, l=1}^{n} \sigma_{kl} r_{kl} + o(\varepsilon), \tag{10}$$

где $\sigma_{kl} = \frac{\partial}{\partial p_{kl}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) = \frac{\sigma_{kl}^n \lambda_1 - \sigma_{kl}^1 \lambda_n}{\lambda_1^2}$, $k,\ l = 1, \ldots, n$.

Задача. Построить матрицу R_0, $\|R_0\| \leqslant \varepsilon$, такую, что $\Delta\varphi_{R_0}(A) = \max\limits_{\|R\| \leqslant \varepsilon} \Delta\varphi_R(A)$. Построение матрицы R_0, реализующей экстремальное с точностью до $o(\varepsilon)$ отклонение $\Delta\varphi_{R_0}(A)$, может быть сделано с использованием формулы (10) в зависимости от выбора матричной нормы.

Пусть $\|R\| = \sum\limits_{k,\, l=1}^{n} |r_{kl}|$ и пусть $\max\limits_{k,\, l} |\sigma_{kl}| = \sigma_{ij}$. Тогда матрица $R_0 = \varepsilon \cdot E_{ij} \operatorname{sgn} \sigma_{ij}$. Если $\max|\sigma_{kl}|$ достигается более чем на одном элементе, то R_0 определяется неоднозначно. Получаемые при этом $\Delta\varphi_{R_0}(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Если $\|R\| = n \cdot \max\limits_{k,\, l} |r_{kl}|$, то $r_{kl}^0 = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{sgn} \sigma_{kl}$, $k,\ l = 1, \ldots, n$, и $R_0 = [r_{kl}^0]$.

Формулы для построения R_0 отличаются от формул для B_0, поскольку не требуется, чтобы R_0 была симметричной.

Список литературы

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
2. Хусаинов Д. Я., Комаров Ю. А., Юнькова Е. А. // Автоматика. 1984. № 6. С. 73.
3. Кастрица О. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 77.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.

Поступила в редакцию 23.04.87.

УДК 517.977.58

А. В. ЛУБОЧКИН

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО МИНИМУМУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЯ

В классе скалярных кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t\in T=[0, t^*]$, рассмотрим задачу:

$$I(u)=\int_0^{t^*} c(t)(u(t)-\alpha(t))^2/2dt\to\min,\quad \dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t),\quad x(0)=x_0,$$

$$Gx(t^*)=g,\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in T, \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$; $g\in R^m$; A, G — постоянные матрицы соответствующих размеров; $\operatorname{rank} G=m$; $c=c(t)>0$, $\alpha=\alpha(t)$, $t\in T$,— непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции.

Управление $u=(u(t),\ t\in T)$, $u(t)=[u(t+0)+u(t-0)]/2$, назовем допустимым, если $|u(t)|\leqslant 1$, $t\in T$, и на соответствующей непрерывной траектории $x=(x(t),\ t\in T)$ прямой системы ($\dot{x}=Ax+bu$, $x(0)=x_0$) выполняется терминальное ограничение $Gx(t^*)=g$. Задача (1) состоит в построении среди допустимых оптимального управления u^0: $I(u^0)=\min I(u)$. Различные точки $t_i\in T$, $i=\overline{1, m}$, назовем опорными моментами, совокупность $T_{\text{оп}}=\{t_i, i=\overline{1, m}\}$ — опорой (ограничений), если не выроаждена опорная матрица $P=(p(t_i),\ i=\overline{1, m})$, где $p(t)=Gq(t)$, $t\in T$; $q(t)$, $t\in T$,— решение уравнения $\dot{q}=-Aq$, $q(t^*)=b$. Пару $\{u, T_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления u и опоры $T_{\text{оп}}$ назовем опорным управлением. Считаем его невырожденным, если $|u(t_i)|<1$, $i=\overline{1, m}$.

Пусть $\{u, T_{\text{оп}}\}$ — начальное опорное управление. Поставим ему в соответствие траекторию $\psi=(\psi(t),\ t\in T)$ сопряженной системы:

$$\dot{\psi}=A'\psi,\ \psi(t^*)=G'y,\ y'=(c(t_i)(u(t_i)-\alpha(t_i))\ i=\overline{1, m})'P^{-1}. \tag{2}$$

Положим $\Delta(t)=\psi'(t)b-c(t)(u(t)-\alpha(t))$, $t\in T$.

Критерий оптимальности. Для оптимальности управления u достаточно существования такой опоры $T_{\text{оп}}$, что для $\{u, T_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения:

$$\Delta(t)\leqslant 0 \text{ при } u(t)=-1;\ \Delta(t)\geqslant 0 \text{ при } u(t)=1;\ \Delta(t)=0$$
$$\text{при } |u(t)|<1,\ t\in T. \tag{3}$$

Пусть $\{u, T_{\text{оп}}\}$ — невырожденное опорное управление. Для оптимальности управления u необходимо, чтобы для $\{u, T_{\text{оп}}\}$ выполнялись соотношения (3).

Следствие. Пусть $\{u^0, T_{\text{оп}}\}$ — невырожденное опорное управление. Оптимальное управление u^0 является непрерывным.

Исходя из опоры $T_{\text{оп}}$ и опорного управления $\{u, T_{\text{оп}}\}$ методом первого порядка [1] решим конечное число специальным образом [2] сформированных задач вида: $\sum_{j=1}^{k} c_j(x_j-\alpha_j)^2/2\to\min$, $Ax=b$, $d_*\leqslant x\leqslant d^*$, где $x=(x_j,\ j=\overline{1, k})$, $c=(c_j>0,\ j=\overline{1, k})$, $\alpha=(\alpha_j,\ j=\overline{1, k})$, d_*, $d^*\in R^k$; $b\in R^m$.

Подсчитаем оценки, позволяющие судить о целесообразности перехода к доводке. Процедура доводки завершает работу алгоритма построением непрерывного оптимального управления. Процедура доводки состоит в следующем. Построим квазиуправление $\omega=(\omega(t),\ t\in T)$:

$$\omega(t)=-1 \text{ при } \psi'(t)b+c(t)\alpha(t)<-c(t);\ \omega(t)=1$$
$$\text{при } \psi'(t)b+c(t)\alpha(t)>c(t);\ \omega(t)=\alpha(t)+\psi'(t)b/c(t)$$
$$\text{при } |\psi'(t)b+c(t)\alpha(t)|\leqslant c(t),\ t\in T; \qquad (4)$$

квазитраекторию $\varkappa=(\varkappa(t),\ t\in T)$: $\dot\varkappa=A\varkappa+b\omega,\ \varkappa(0)=x_0$; решение $\bar\omega_{\text{оп}}=(\bar\omega_i=\bar\omega(t_i),\ i=\overline{1,m})$ уравнения:

$$F(\bar\omega_{\text{оп}})=\sum_{j=1}^{p}\Bigl(\int_{\underline{t}_j}^{\underline{\tau}_j(\bar\omega_{\text{оп}})}p(t)(\omega(\underline{t}_j)-\alpha(t))\,dt-\int_{\bar t_j}^{\bar\tau_j(\bar\omega_{\text{оп}})}p(t)(\omega(\bar t_j)-$$
$$-\alpha(t))\,dt+\int_{\underline{\tau}_j(\bar\omega_{\text{оп}})}^{\bar\tau_j(\bar\omega_{\text{оп}})}p(t)\,\psi'(t;\bar\omega_{\text{оп}})\,b/c(t)\,dt-\int_{\underline{t}_j}^{\bar t_j}p(t)\,\psi'(t)\,b/c(t)\,dt\Bigr)=$$
$$=g-G\varkappa(t^*), \qquad (5)$$

где $\psi(t;\bar\omega_{\text{оп}}),\ t\in T,$— решение системы (2) при $y'=(c(t_i)(\bar\omega_i-\alpha(t_i)),\ i=\overline{1,m})'P^{-1}$; $\omega=(\bar\omega(t),\ t\in T)$ — квазиуправление (4), построенное по $\psi'(t;\bar\omega_{\text{оп}}),\ t\in T$; $\underline{t}_j,\ \bar t_j,\ j=\overline{1,p},$— левые и правые концы особых отрезков квазиуправления ω $(|\psi'(t)b+c(t)\alpha(t)|\leqslant c(t),\ t\in[\underline{t}_j,\ \bar t_j],\ j=\overline{1,p})$; $\underline{\tau}_j(\bar\omega_{\text{оп}}),\ \bar\tau_j(\bar\omega_{\text{оп}}),\ j=\overline{1,p},$— левые и правые концы особых отрезков квазиуправления $\bar\omega$; p — число особых отрезков. Уравнение (5) решим методом Ньютона.

Алгоритм является конечным: существует число $N<+\infty$, что для любого $\nu>0$ для построения управления u, $\|g-Gx(t^*)\|\leqslant\nu$, $|I(u)-I(u^0)|\leqslant\leqslant\nu$, требуется не более N интегрирований прямой и сопряженной систем.

Список литературы

1. Лубочкин А. В. Метод первого порядка решения выпуклой квадратичной сепарабельной задачи / Редкол. журн. «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск. 1986. Деп. в ВИНИТИ 15.10.86. № 7258-В86. 10 с.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.

Поступила в редакцию 18.04.87.

УДК 519.1

А. Н. ИСАЧЕНКО, МУХИБУЛЛА АБДУЛЛА

МНОГОГРАННИК ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Некоторые проблемы технико-экономического содержания сводятся к следующей задаче квадратичного булевого программирования:

$$(x,\ Ax^T)+(b,\ x^T)+d\to\text{extr},\ x\in\{-1,1\}^n. \qquad (1)$$

Здесь A—$(n\times n)$-матрица; b — n-вектор; d — скаляр. Запишем для задачи (1) эквивалентную задачу линейного программирования. Для этого введем в рассмотрение новые переменные $y_{ij}=x_ix_j,\ i,\ j=\overline{1,n}$. Тогда задача (1) примет вид:

$$(D,\ Y)+c\to\text{extr}, \qquad (2)$$

$$Y\in\{-1,\ 1\}^{n\times n},\ y_{ij}=y_{ii}\cdot y_{jj},\ i,\ j=\overline{1,\ n},\ i\neq j, \qquad (3)$$

где D — $(n\times n)$-матрица с элементами $d_{ij}=a_{ij};\ i,\ j=\overline{1,\ n},\ i\neq j;\ d_{ii}=$

$= b_i,\ i = \overline{1,\ n};\ \ c = d + \sum_{i=1}^{n} a_{ii};\ (D,\ Y)$ — скалярное произведение матриц.

Пусть S_n — множество $(n \times n)$-матриц, удовлетворяющих условию (3), а $P_n = \operatorname{conv} S_n$. Задача (1) эквивалентна задаче линейного программирования с целевой функцией (2) и условием $Y \in P_n$. Для применения алгоритмов линейного программирования к полученной задаче необходимо задать P_n системой линейных уравнений и неравенств. Последнее связано с рядом принципиальных трудностей, возникающих при переходе от комбинаторной формы задания допустимой области NP-трудных задач к их граневой структуре [1]. В настоящей статье исследуются свойства многогранника P_n. Основные определения и обозначения, используемые в статье, можно найти в [2].

Теорема 1. $\operatorname{vert} P_n = S_n$.

Доказательство. Для любой пары матриц $Y,\ Z \in S_n,\ Y \neq Z$, выполняется неравенство $(Y,\ Z) < (Y,\ Y) = n^2$, т. е. каждая гиперплоскость $H(Y) = \{Z \in R^{n \times n} \mid (Y,\ Z) = n^2\}$, $Y \in S_n$, является опорной к P_n и $P_n \cap H(Y) = Y$.

Теорема 2. $\dim P_n = (n+1)n/2$.

Доказательство. В силу (3) многогранник P_n принадлежит пересечению $n(n-1)/2$ гиперплоскостей, определяемых уравнениями $y_{ij} - y_{ji} = 0,\ i = \overline{1,\ n-1},\ j = \overline{i+1,\ n}$. Следовательно, $\dim P_n \leqslant (n+1)n/2$. Пусть O_n — нулевая $(n \times n)$-матрица; E_{ii} — $(n \times n)$-матрица с единственным ненулевым элементом, равным 1 и расположенным на позиции $(i,\ i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; E_{ij} — $(n \times n)$-матрица с двумя ненулевыми элементами, равными 1 и расположенными на позициях $(i,\ j)$ и $(j,\ i)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1,\ i+1 \leqslant j \leqslant n$; $K(i,\ j)$ — множество матриц из S_n с единицей в позиции $(i,\ j)$. Имеем $O_n = \frac{1}{2^n} \sum_{Y \in S_n} Y,\ \ E_{ij} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{Y \in K(i,\ j)} Y$, т. е. $O_n \in P_n,\ \ E_{ij} \in P_n$, $1 \leqslant i \leqslant n,\ i \leqslant j \leqslant n$. Множество $(n+1)n/2+1$ матриц $O_n,\ E_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \leqslant j \leqslant n$, является аффинно независимым, что и доказывает теорему.

Следствие 1. $O_n \in \operatorname{relint} P_n$.

По аналогии с доказательством теоремы (2) можно показать, что $-E_{ij} \in P_n,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \leqslant j \leqslant n$. Легко видеть, что $E_{ij},\ -E_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \leqslant j \leqslant n$, являются вершинами $(n+1)n/2$-мерного куба с центром во внутренней точке O_n.

Следствие 2. Двойственный к P_n многогранник задается в $R^{n \times n}$ системой линейных равенств $x_{ij} = x_{ji},\ i = \overline{1,\ n-1},\ j = \overline{i+1,\ n}$, и неравенств $(Y,\ X) \leqslant 1,\ \forall\, Y \in S_n$.

Справедливость следствия вытекает из того факта, что $O_n \in \operatorname{relint} P_n$ и, следовательно, двойственный к P_n многогранник совпадает с полярой к P_n.

Теорема 3. $\operatorname{diam} P_n = 1$.

Доказательство. Пусть $Y,\ Z \in S_n,\ Y \neq Z$. Определим матрицу M с элементами

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } y_{ij} = z_{ij} = 1, \\ -1, & \text{если } y_{ij} = z_{ij} = -1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и обозначим через l число ее ненулевых элементов. Тогда $(M,\ Y) = (M,\ Z) = l$. Возьмем любую матрицу $X \in S_n,\ X \neq Z,\ X \neq Y$. Существует хотя бы одна позиция $(i,\ j)$ такая, что

$$y_{ij} = z_{ij},\ \ x_{ij} \neq y_{ij},\ \ x_{ij} \neq z_{ij}. \tag{4}$$

Действительно, так как $X \neq Y$, то для некоторого $i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, имеет место неравенство $x_{ii} \neq y_{ii}$. Если $y_{ii} = z_{ii}$, то $x_{ii} \neq z_{ii}$ и искомая позиция есть $(i,\ i)$. Если $y_{ii} \neq z_{ii}$, то $x_{ii} = z_{ii}$ и, так как $X \neq Z$, получаем, что для некоторого $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняется $x_{jj} \neq z_{jj}$. При $x_{jj} \neq y_{jj}$ искомая позиция есть (j, j). В противном случае выполняется (4). В силу (4), $(M, X) \leqslant \leqslant l-1$. Следовательно, уравнение $(M, X)=l$ определяет гиперплоскость, опорную к P_n и имеющую в пересечении с P_n отрезок $[Y, Z]$.

Под гипергранью многогранника будем понимать его собственную грань максимальной размерности. Следующая теорема дает необходимые условия гиперграней P_n.

Теорема 4. Для того чтобы гиперплоскость $H=\{X \in R^{n \times n} \mid (A, X)=b\}$ определяла гипергрань многогранника P_n, $n \geqslant 2$, необходимо, чтобы $b \neq 0$ и хотя бы для одной позиции (i, j), $i \neq j$, элемент $a_{ij} \neq 0$.

Доказательство. Первое условие $b \neq 0$ вытекает из следствия 1. Доказательство второго условия проведем от противного. Пусть $a_{ij}=0$ для $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, n}$, $i \neq j$. Рассмотрим отображение $e: R^{n \times n} \rightarrow R^n$, определяемое по правилу $e(X)=(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn})$. Тогда $e(P_n)$ — n-куб, а уравнение $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i = b$ определяет в R^n гиперплоскость $\bar{H}$, опорную к $e(P_n)$. Для любой точки $x \in e(P_n) \cap \bar{H}$ хотя бы одна координата $x_i=1$ или -1. Пусть $x_i=1$. Так как e — биективное отображение для множеств vert P_n, vert $e(P_n)$, то для любой матрицы $X \in P_n \cap H$ имеет место равенство $x_{ii}=1$, что влечет из (3) выполнение условий $x_{ij}=x_{jj}$, $j=\overline{1, n}$, $i \neq j$. Следовательно, $\dim P_n \cap H \leqslant n(n-1)/2$, что при $n \geqslant 2$ приводит к противоречию с предположением теоремы.

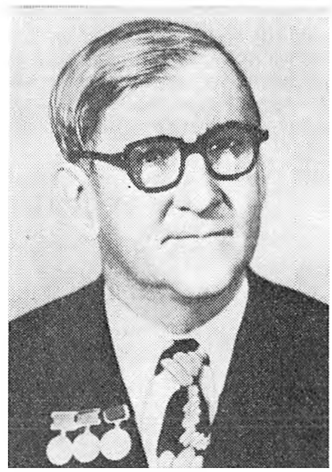
Список литературы

1. Jünger M. Polyhedral combinatories and the acyclic subdigraph problem. Berlin, 1985.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.

Поступила в редакцию 12.03.87.

Наши юбиляры

МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ ЕЛЬЯШЕВИЧ



21 августа 1988 г. исполнилось 80 лет со дня рождения известного советского физика, специалиста в области атомной и молекулярной спектроскопии, члена КПСС с 1945 г., академика АН БССР, доктора физико-математических наук, профессора Михаила Александровича Ельяшевича.

Становление М. А. Ельяшевича как ученого происходило в 30-е годы в Ленинграде. Это был период бурного развития физической науки в СССР, зарождения в ней новых направлений.

По окончании в 1930 г. физического отделения Ленинградского государственного университета М. А. Ельяшевич пять лет работает в Институте химической физики АН СССР, занимаясь экспериментальными исследованиями флуоресценции паров ртути и йода.

С 1935 по 1949 г. Михаил Александрович — сотрудник Государственного оптического института. В это время и определились основные научные интересы М. А. Ельяшевича, связанные с разработкой широкого круга проблем теоретической спектроскопии. Первые его теоретические работы, посвященные детальному изучению взаимодействия колебаний и вращения многоатомных молекул, легли в основу кандидатской диссертации, защищенной им в 1937 г.

Дальнейшее исследование динамики молекул привело Михаила Александровича к созданию основ теории колебательных спектров многоатомных молекул, что составило предмет его докторской диссертации (1944). Результаты развития этой теории, полученные совместно с Б. И. Степановым и М. А. Волькенштейном, изложены в фундаментальной монографии «Колебания молекул» (1949), которая долгие годы служила настольной книгой для специалистов в области молекулярной спектроскопии. Второе издание монографии (1972), переработанное Л. А. Грибовым при участии М. А. Ельяшевича, сохраняет свое значение и в настоящее время.

Параллельно с исследованиями по молекулярной спектроскопии М. А. Ельяшевич успешно разрабатывает теорию спектров сложных атомов. В 1940 г. была издана его книга «Спектры атомов редких земель», а в 1953 г.— фундаментальная монография «Спектры редких земель», переведенная на английский язык и получившая международное признание.

Новый период научной и педагогической деятельности М. А. Ельяшевича начинается с 1956 г. после избрания его академиком АН БССР и переезда в Минск. Возглавив лабораторию высокотемпературной оптики в Институте физики АН БССР (1960), Михаил Александрович развертывает работы в новом для Белоруссии направлении науки — физике низкотемпературной плазмы. К этому времени относится написание монографии «Атомная и молекулярная спектроскопия», которая явилась своего рода энциклопедией для целого поколения физиков-спектроскопистов.

С 1968 по 1977 г. Михаил Александрович Ельяшевич заведовал кафедрой атомной и молекулярной физики БГУ имени В. И. Ленина, отдавая много сил и энергии подготовке высококвалифицированных научных кадров. Среди учеников Михаила Александровича, которых он подготовил в течение своей многолетней научно-педагогической деятельности, член-корреспондент АН СССР, 2 академика АН БССР, 10 докторов и 40 кандидатов наук.

Михаил Александрович провел большую работу по созданию современного курса атомной физики. Подготовленная им программа этого раздела курса общей физики принята в качестве учебной программы для физических специальностей университетов СССР. Существенный вклад внес Михаил Александрович и в разработку вопросов истории и методологии физики.

С 1977 по 1983 г. Михаил Александрович Ельяшевич — профессор кафедры ядерной физики физфака БГУ имени В. И. Ленина, а с 1983 г.— научный консультант в НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко.

М. А. Ельяшевич ведет большую общественную работу, являясь членом бюро научного совета по спектроскопии атомов и молекул АН СССР, был заместителем председателя научно-методического совета по физике Минвуза СССР и председателем университетской секции этого совета, заместителем председателя Белорусского отделения Советского национального объединения истории и философии естествознания и техники.

Много энергии М. А. Ельяшевич отдал редакционно-издательской деятельности, являясь заместителем главного редактора «Журнала прикладной спектроскопии», членом редколлегии журнала «Оптика и спектроскопия». Профессор М. А. Ельяшевич — научный консультант раздела «Физика атома и спектроскопия» БСЭ, немало статей написано им и для других энциклопедических изданий, в частности для БелСЭ.

Большая научная, педагогическая и общественная деятельность ученого-коммуниста М. А. Ельяшевича высоко оценена Родиной: он награжден орденами Ленина, Трудового Красного Знамени, «Знак Почета», медалями, Почетными грамотами Верховного Совета БССР. Михаил Александрович — лауреат Ленинской и двух Государственных премий СССР.

Все, кто общается с Михаилом Александровичем, покорены его обаянием, доброжелательностью, скромностью, широкой эрудицией и высочайшей культурой. Преподаватели, сотрудники, студенты физического факультета, сотрудники НИИ ПФП и редколлегия журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина» горячо поздравляют Михаила Александровича со славным юбилеем и от всей души желают ему доброго здоровья на долгие годы и новых творческих успехов.

АЛЕКСАНДР ФЕДОРОВИЧ ЧЕРНЯВСКИЙ

Исполнилось 50 лет со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники БССР, лауреата премии Совета Министров СССР и Государственной премии БССР, члена-корреспондента АН БССР, доктора технических наук, профессора, директора НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко БГУ имени В. И. Ленина Александра Федоровича Чернявского.

А. Ф. Чернявский родился 14 сентября 1938 г. в Рязани в семье служащих. После окончания факультета автоматики и телемеханики Рязанского радиотехнического института (1960) Александр Федорович работал инженером на одном из предприятий в Московской области.

В 1962 г. А. Ф. Чернявский поступил в аспирантуру БГУ имени В. И. Ленина, в 1965 г. он защитил кандидатскую, а в 1971 г.— докторскую диссертацию.

С 1964 по 1971 г. А. Ф. Чернявский работал старшим инженером, главным инженером, старшим научным сотрудником, заведующим сектором Белгосуниверситета имени В. И. Ленина, с 1971 по 1979 г.— заведующим лабораторией, затем заведующим отделом средств автоматизации научных исследований НИИ прикладных физических проблем БГУ имени В. И. Ленина. С февраля 1979 г. Александр Федорович — директор этого института.

В Белгосуниверситете имени В. И. Ленина в полной мере раскрылись способности А. Ф. Чернявского — талантливого ученого, педагога, организатора науки. А. Ф. Чернявскому принадлежит ведущая роль в создании белорусской научной школы по разработке физико-технических методов и измерительно-вычислительных средств автоматизации физического эксперимента. Основные научные результаты получены А. Ф. Чернявским в области технической физики и связаны с разработкой новых принципов построения и создания аппаратуры для статистических временных измерений с нано- и пикосекундной разрешающей способностью, оптоэлектронных систем визуализации движущихся объектов и быстропеременных полей электромагнитного излучения, автоматизированных обучающих систем на основе современных средств вычислительной техники. Результаты научных исследований А. Ф. Чернявского отражены более чем в 250 научных работах, в том числе в 5 монографиях. Под его руководством подготовлено 28 кандидатов наук, двое учеников Александра Федоровича стали докторами наук.

В 1979 году Президиум Верховного Совета БССР присвоил А. Ф. Чернявскому почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники БССР». За создание и внедрение в учебный процесс автоматизированных обучающих систем на базе ЭВМ в 1984 г. ему присуждена премия Совета Министров СССР. В 1986 г. за разработку и внедрение в практику оптико-физических исследований статистических методов временного анализа быстропеременных процессов светового излучения Александр Федорович удостоен Государственной премии БССР. В 1987 г. А. Ф. Чернявский избран членом-корреспондентом АН БССР.

Научная деятельность профессора А. Ф. Чернявского неразрывно связана с педагогической работой. Он длительное время заведовал на общественных началах кафедрой электронных математических машин, а с 1986 г. руководит кафедрой автоматизации научных исследований БГУ имени В. И. Ленина.

А. Ф. Чернявский выполняет большую научно-организационную и общественную работу: является председателем специализированного совета по защите докторских диссертаций при НИИ ПФП, членом совета по статистической радиофизике АН СССР и совета по радиофизике АН БССР, членом бюро Отделения физики, математики и информатики АН БССР, членом редколлегии журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина. Сер. 1», членом Московского райкома КПБ г. Минска. Александр Федорович награжден Почетными грамотами Минвуза СССР, золотой, серебряной и бронзовой медалями ВДНХ СССР.

Под руководством А. Ф. Чернявского НИИ прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко выдвинулся в число ведущих научных учреждений страны. По итогам работы в 1980, 1981, 1983 и 1987 гг. институт занимал первое место во Всесоюзном социалистическом соревновании среди НИИ системы Минвуза СССР и награждался переходящим Красным знаменем Минвуза СССР и ЦК отраслевого профсоюза.

Александр Федорович — человек высокой культуры, принципиальный и инициативный коммунист, чуткий и отзывчивый товарищ.

Искренне и сердечно поздравляя Александра Федоровича Чернявского с 50-летним юбилеем, преподаватели, студенты БГУ имени В. И. Ленина, сотрудники НИИ ПФП желают ему доброго здоровья, счастья и новых творческих свершений на благо нашей Родины.

ЛЕОНИД МАТВЕЕВИЧ БАРКОВСКИЙ

Исполнилось 50 лет со дня рождения заведующего кафедрой теоретической физики БГУ имени В. И. Ленина, доктора физико-математических наук, профессора Леонида Матвеевича Барковского.

После окончания физико-математического факультета Могилевского педагогического института (1960) и завершения учебы в аспирантуре при кафедре теоретической физики БГУ имени В. И. Ленина (1964) Леонид Матвеевич работал инженером в Проблемной лаборатории БГУ имени В. И. Ленина. В 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию «Ковариантная теория электрооптических эффектов в кристаллах», в которой развит общий ковариантный метод описания электрооптических свойств кристаллов. В 1966—1968 гг. Л. М. Барковский — старший преподаватель, а в 1968—1982 гг. — доцент кафедры общей физики. В докторской диссертации Л. М. Барковского «Операторные методы в оптике и акустике кристаллов» (1980) разработаны новые методы в параметрической оптике и акустике кристаллов и на их основе построена теория световых и звуковых волн, охватывающая анизотропные, гиротропные, однородные, слоисто-неоднородные, стационарные и перестраиваемые среды. С 1984 г. профессор Л. М. Барковский — заведующий кафедрой теоретической физики.

Л. М. Барковский — известный специалист в области теоретической кристаллооптики и кристаллоакустики. Им предложен новый метод исследования симметрии и представления физических тензоров высших рангов в кристаллах, сущность которого состоит в полиномиальном представлении тензоров высокого ранга, в замене задачи определения явного вида исходного тензора задачей исследования нескольких тензоров второго ранга. Результаты исследования с помощью этого метода симметрии тензоров и псевдотензоров высоких рангов в кристаллах различных групп точечной симметрии дали строгую симметрическую основу для описания разнообразных оптических и акустических эффектов.

Одним из наиболее плодотворных направлений научной деятельности профессора Барковского в настоящее время является разработка новых операторных методов описания волн в анизотропных и гиротропных средах. Им найдены решения задачи Коши в случае однородных и стратифицированных анизотропных и гиротропных сред общего вида; показано, что существенную роль при этом играют экспоненциальные эволюционные операторы. Впервые для ряда ключевых задач найдены операторы отражения и пропускания, прямо выраженные через тензоры материальных констант. Предложены общие принципы анализа и синтеза волн в анизотропных и гиротропных средах на основе спектрального операторного подхода. Результаты исследований Л. М. Барковского, опубликованные более чем в 90 работах, получили всеобщее признание. Под руководством Л. М. Барковского защищены четыре кандидатские диссертации.

Плодотворную научную и педагогическую деятельность Л. М. Барковский сочетает с активной общественной работой. Он избирался в профком университета, секретарем партбюро физического факультета. Является членом трех специализированных советов по защите кандидатских диссертаций, членом научно-технического совета Минвуза БССР, заместителем ответственного редактора журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина. Сер. 1».

За успехи в научно-исследовательской деятельности и подготовку высококвалифицированных кадров Л. М. Барковский награжден Почетной грамотой Верховного Совета БССР, грамотами Минвуза БССР, ректората и общественных организаций Белгосуниверситета имени В. И. Ленина.

Сердечно поздравляя Леонида Матвеевича с юбилеем, преподаватели, сотрудники и студенты физического факультета, редколлегия журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина» желают ему крепкого здоровья, счастья, новых творческих свершений на благо нашей Родины.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

РЕФЕРАТЫ

УДК 537.533.7

Андриянчик А. А., Каминский А. Н. **Рентгеновское излучение электрона в кристалле при воздействии лазерной волны** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Рассматривается рентгеновское излучение при вынужденных колебаниях электрона под действием световой волны в кристалле. Найдено спектрально-угловое распределение этого излучения в случае, когда для него возможна дифракция. Показано, что если диэлектрическая проницаемость среды больше единицы, вклад в образование рентгеновских квантов даст как прошедшая, так и зеркально отраженная световые волны.

Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 539.121.7

Нгуен Динь Зунг. **Неупругое рассеяние поляризованных нейтронов на кристалле с поляризованными ядрами при учете преломления и зеркального отражения** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Найдена общая формула для эффективного сечения неупругого рассеяния поляризованных нейтронов на кристалле с поляризованными ядрами при учете преломления и зеркального отражения. Показано, что в случае полного отражения эффективное сечение поверхностного неупругого рассеяния нейтронов зависит только от корреляционной функции спинов поверхностных ядер и корреляционной функции электронных спинов на поверхности кристалла.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.24

Гайсёнок В. А., Крылов Г. Г. **Новый метод точного обращения уравнения свертки** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Предложен метод обращения уравнения временной свертки, использующий обобщенные ряды Фурье по специально выбранной системе функций. Проведен численный анализ применимости предложенного метода и показано, что область устойчивости получаемых решений относительно вариации входных данных совпадает с классом функций, разложимых в равномерно сходящиеся обобщенные ряды Фурье по используемой системе функций. В качестве параметра регуляризации можно выбирать число членов разложения входных функций в функциональный ряд.

Библиогр. 16 назв., ил. 1, табл. 2.

УДК 621.373.826

Манак И. С., Михнюк С. Б. **Теоретический анализ амплитудно-частотных характеристик полупроводниковых источников излучения** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Путем решения кинетических уравнений получены аналитические выражения для амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик полупроводниковых источников излучения для случая межзонной излучательной рекомбинации и при излучательной рекомбинации неравновесных носителей через примесные состояния в запрещенной зоне полупроводника. С использованием диффузионной теории p—n-перехода для прямозонных полупроводников решена более общая задача, описывающая поведение неравновесных носителей в функции времени и одной из пространственных координат.

Библиогр. 5 назв.

УДК 532.783

Лапаник В. И., Абдулин А. З., Минько А. А. **Влияние толщины слоя и хиральных добавок на электрооптические свойства жидкокристаллических твист-индикаторов** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Исследованы пороговые и динамические характеристики твист-индикаторных ячеек с различными жидкокристаллическими матрицами и хиральными примесями в зависимости от концентрации оптически активной добавки (шага спиральной структуры), толщины жидкокристаллического слоя, химической природы нематической матрицы и хиральной добавки.

Библиогр. 6 назв., ил. 3.

УДК 535.338.42

Пицевич Г. А., Гоголинский В. И., Сагайдак Д. И., Антоновский В. Л., Зятьков И. П. **Колебательные спектры пероксибензоата** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Получены колебательные спектры молекулы пероксибензоата. Интерпретация их предложена с учетом наличия локальной симметрии *Cs* у трет-бутильного и бензоилокси фрагментов, а также с использованием поляризационных измерений в спектрах КР и данных литературы. Установлено, что валентному колебанию пероксидной связи соответствует линия 865 $см^{-1}$, проявляющаяся в спектре КР со средней интенсивностью.

Библиогр. 9 назв., табл. 1.

УДК 539.184.3:546.791

Шашков С. Н. **Энергии ионизации валентных состояний урана** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Рассматривается задача нахождения численных значений потенциалов ионизации урана в различных электронных конфигурациях.

Библиогр. 11 назв., табл. 1.

УДК 621.396.69

Киреев Н. Б. **Об оптимизации полосы сигнала систем контроля локальных неоднородностей в полупроводящих средах** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Получено соотношение, на основании которого определяется оптимальная полоса сигнала системы контроля локальных неоднородностей в полупроводящих средах. Определены оптимальная длина волны и толщина скин-слоя в зависимости от расстояния между электродами датчика.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

УДК 535.341

Колева И. Т., Георгиева М. Н., Колесник А. В., Новик Г. М. **Исследование поглощения плазмы капиллярного импульсного разряда** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Получена пространственно-временная фоторазвертка спектра капиллярного импульсного разряда с двумя соосно расположенными диэлектрическими пластинами, по которой определены радиально-временные распределения показателей поглощения для двух участков сплошного спектра и температуры плазмы.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 523.035

Апанасович А. В., Гулаков И. Р., Пролиско Е. Е. **Учет послеимпульсов фотоприемника в информационном критерии качества счетчиков фотонов** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Рассмотрено влияние послеимпульсов фотоприемника на регистрацию стационарного пуассоновского потока фотонов и скорость прохождения информации через фотоприемник. Приведены результаты расчетов скорости прохождения информации в зависимости от уровня сигнала для различных вероятностей появления и постоянных времени спада интенсивности послеимпульсов для фотоприемников с различными значениями квантового выхода, скорости счета темновых импульсов и длительности одноэлектронных импульсов.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 514.765

Метлицкий А. Н. **Однородные пространства, порожденные вполне расщепляемой группой Ли, и их морфизмы** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Найден критерий расщепляемости группы Ли в полупрямое произведение, построены однородные пространства, порожденные такой группой, и их морфизмы.

Библиогр. 3 назв.

УДК 514.75

Ведерников С. В., Зарипов Э. Ш. **Геометрия группы неевклидовых движений** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Построена глобальная пара, порожденная группой неевклидовых движений. Получены однородные пространства, порожденные этой глобальной парой, изучена их геометрия, а также кривые второго порядка в эллиптическом пространстве.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.852.35:853.4

Дангалчев Ч. А. **Сетевая интерпретация функций, содержащих операции взятия модуля** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Приводятся критерии оптимальности и субоптимальности в кусочно-линейной задаче на сети, где нелинейность получается вследствие применения операции взятия модуля.

УДК 517.977

Лебедев А. Л. **О двойственности задач управления и фильтрации в линейных нестационарных системах с запаздыванием** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Доказаны теоремы, устанавливающие двойственность задач оптимальной фильтрации при коррелированных внешних возмущениях объекта и измерителя, а также задач оптимизации обобщенных квадратичных функционалов качества на траекториях линейных нестационарных систем с запаздыванием.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.6

Ковалев М. М., Нгуен Нгиа. **Многогранник медиан графа** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Дается полное решение проблемы Спинетто, касающейся многогранника задачи о k-медиане графа.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.25

Шунгаров Х. Д. **К решению одной многокритериальной задачи покрытия графа звездами** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Для трехкритериальной задачи покрытия графа звездами разработан алгоритм построения полного множества альтернатив.

Библиогр. 10 назв.

УДК 539.3

Королевич В. В., Прусов И. А. **Напряжения в ортотропной эллиптической пластинке, вращающейся вокруг оси симметрии, расположенной в срединной плоскости** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Получено точное решение плоской задачи для сплошной ортотропной эллиптической пластинки, вращающейся вокруг осей симметрии, расположенных в срединной плоскости.

Библиогр. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.948.32:517.544

Джураев О. **Построение поля алгебраических функций, соответствующего n-листному накрытию сферы** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

В явном виде строится алгебраическое уравнение римановой поверхности, соответствующее n-листному накрытию сферы по заданным точкам ветвления и закону склеивания листов.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.51

Чжоу Сунпин. **О доказательстве одной теоремы Хассона** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Дается обобщение классических теорем С. Бернштейна и С. М. Никольского об оценке наилучшего приближения $E_n(f)$ функции $f(x)$, имеющей непрерывную производную некоторого порядка k алгебраическими полиномами степени не выше n. В частности, приводится другое доказательство одной теоремы Хассона.
Библиогр. 9 назв.

УДК 538.132

Кириленко А. И. **Явление Брюстера при нормальном падении потока энергии на границу раздела двух поглощающих сред. Параллельные слои** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Рассматривается вопрос о прохождении электромагнитной неоднородной плоской волной границы раздела двух изотропных однородных поглощающих сред. Показано, что существуют волны с определенной поляризацией, которые переносят энергию перпендикулярно к границе раздела двух определенных сред и сами при этом не отражаются, т. е. на границе раздела имеет место явление Брюстера при нормальном падении потока энергии. Приведен численный пример.
Библиогр. 2 назв.

УДК 621.396.670

Малый С. В., Кравченко И. Т. **Электродинамический анализ прореженных вибраторных решеток** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.
Предложена методика многовариантного анализа электродинамических характеристик прореженных вибраторных решеток, отличающаяся от известных большей точностью и вычислительной эффективностью. Приводятся результаты использования методики для исследования линейной решетки параллельных полуволновых вибраторов при различных уровнях ее прореживания.
Библиогр. 3 назв., ил. 2.

УДК 535.8

Курейчик К. П., Козловский Н. В. **Устройство измерения поглощения по методу «пика» для импульсного спектрометра** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Описана схема устройства для измерения поглощения по методу «пика» при определении оптического пропускания, поглощения и оптической плотности. Линейность в диапазоне 0,01—10 В не хуже 1 %. Устройство предназначено для применения в атомно-абсорбционных спектрометрах с непламенной атомизацией.
Библиогр. 6 назв., ил. 1.

УДК 517.9

Кастрица О. А. **Об экстремальном возмущении функционала, определенного на спектре функции Ляпунова** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Теория чувствительности использована для построения экстремальных отклонений функционала, определенного на спектре решений матричного уравнения Ляпунова.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.977.58

Лубочкин А. В. **Оптимизация переходного процесса по минимуму энергии управления** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.

Предложен конечный метод первого порядка решения специальной задачи оптимального управления.
Библиогр. 2 назв.

УДК 519.1

Исаченко А. Н., Мухибулла Абдулла. **Многогранник задачи квадратичного булевого программирования** // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3.
Приводятся свойства выпуклой оболочки симметричных матриц специального вида, образующих допустимую область задачи квадратичного булевого программирования. Указаны размерность, множество вершин, диаметр, необходимые условия для гиперграней.
Библиогр. 2 назв.

ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСЕЙ ДЛЯ ОПУБЛИКОВАНИЯ В ЖУРНАЛЕ

1. Статья должна быть изложена с предельной краткостью, окончательно отредактирована и оформлена. Статья является оригиналом для печати.

2. Статьи, напечатанные на машинке (не портативной) через два интервала с полями не менее 4 см на одной стороне листа, представляют в редакцию в двух экземплярах.

3. Объем статьи не должен превышать 8 страниц машинописного текста (включая приложения) и 3 рисунков; кратких сообщений — 3 страниц и 2 рисунков.

4. К статье должны быть приложены: рекомендация кафедры, реферат статьи (до 0,25 с. машинописного текста) и сведения об авторе (место работы, должность, адрес, рабочий и домашний телефоны).

5. Особое внимание следует обращать на тщательность внесения в текст математических и химических формул, на оформление таблиц, списка литературы, рисунков и подписей к ним. Следует избегать повторения в тексте данных, содержащихся в таблицах и графиках, а также представления численных результатов одновременно в виде таблиц и графиков.

6. Формулы и буквенные обозначения необходимо аккуратно и разборчиво вписать в два экземпляра от руки черными и разметить синими чернилами: греческие буквы обвести красными; латинские, набираемые курсивом, подчеркнуть волнистой чертой; прописные двумя черточками снизу (A), строчные — двумя черточками сверху (a). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы O и o подчеркивают двумя черточками и волнистой чертой (курсив), а нуль отмечают квадратной скобкой снизу (O, o, 0). Необходимо различать в написании буквы l (эль), e, а также I и J (йот), для чего букву I пишут, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками и волнистой чертой снизу. Векторы подчеркивают черными чернилами стрелкой сверху. Математические символы cos, tg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H_2O, Ag и т. д.) отмечают квадратной скобкой снизу. Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечают дугой A^2 (для верхнего индекса) и A_2 (для нижнего).

7. Для формул и символов, а также между ними следует оставлять достаточные пробелы в тексте.

8. Необходимо придерживаться Международной системы единиц (СИ).

9. Рисунки представляют в двух экземплярах в виде графиков, схем, фотографий отдельно от текста; фотографии, отпечатанные на глянцевой бумаге с накатом, должны иметь четкое и контрастное изображение. Чертежи и схемы выполняют тушью на плотной белой бумаге или кальке в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей, и вместе с тем компактно в целях экономии места. На обороте карандашом необходимо указать фамилию автора, название статьи и номер рисунка.

10. Таблицы (обязательно с заголовками) и подписи к рисункам следует печатать на отдельных листах. Кривые на рисунках нумеруются арабскими цифрами, которые расшифровываются в подписях к рисункам. Представление одного и того же материала в виде таблиц и рисунков не допускается. Места для таблиц и рисунков необходимо указать на полях рукописи.

11. Ссылки на литературу даются в порядке цитирования (порядковый номер в квадратных скобках). Список литературы (прилагается на отдельном листе) должен быть оформлен в соответствии с ГОСТом 7.1-84 следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, год издания, страницы;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, принятое сокращенное название журнала, год издания, том, номер выпуска, страницы.

12. Ссылки на неопубликованные работы, диссертации и авторефераты не допускаются.

13. В конце статьи (после литературы) ставится название кафедры, где выполнена работа. Статью должны подписать все авторы.

14. В случае возвращения статьи автору на доработку первоначальный текст ее нобходимо вернуть в редакцию. При задержке статьи автором на месяц и более первоначальная дата поступления не сохраняется.

15. Редакция посылает автору одну корректуру для исправления только ошибок набора. Изменения и дополнения как в тексте, так и в рисунках не допускаются. Корректура за подписью автора и датой ее подписания сдается в редакцию в течение двух дней с момента ее получения.

16. Статьи, оформленные с нарушением «Правил», редакция не принимает.

95 к.

Индекс 74851

Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. 1—80.