

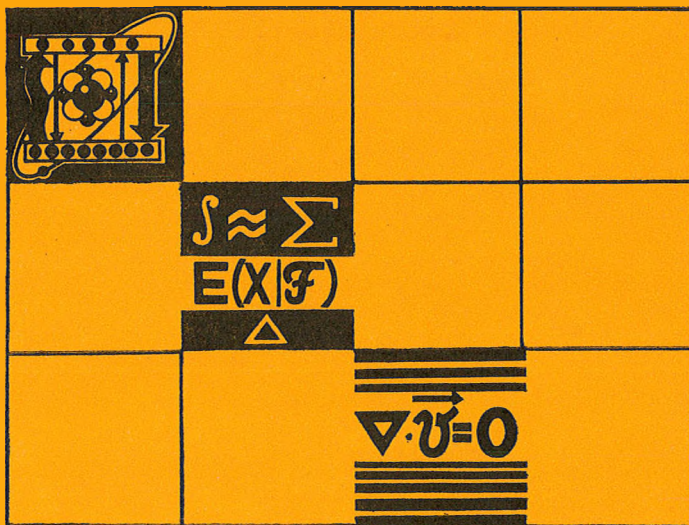
2

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В.И. Ленина

Физика
Математика
Механика



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Барышевский В. Г., Городишенин Н. Л., Лившиц М. Г., Черепица С. В.</i> О возможности наблюдения многочастотной прецессии спина нейтрона в условиях дифракции в кристалле	3
<i>Урбанович А. И.</i> Нестационарный энергообмен световых волн в средах с инерционной тепловой нелинейностью	6
<i>Бандалет Н. В., Машко В. В.</i> О вкладах действительной и мнимой частей поляризуемости активной среды газового лазера в магнитном поле в энергетические характеристики генерации	9
<i>Дубовская И. Я., Чыонг Ба Ха.</i> О дифракционном излучении каналированной заряженной частицы	11
<i>Борковский Н. Б., Ковриков А. Б., Умрейко Д. С.</i> Определение равновесных расстояний «уран — кислород» в UO_2^{2+} по положению чисто электронного перехода в комплексах уранила	16
<i>Кулешов Н. В., Бойков В. Н., Красовский А. И.</i> Температурное уширение линий в спектрах люминесценции UO_2^{2+} в растворах и межионные взаимодействия	18
<i>Врублевский А. И., Кузовков П. В.</i> Исследование продуктов окисления некоторых металлопорфиринов	20
<i>Ходасевич В. В., Углов В. В., Гольцев М. В., Сыщенко А. Ф.</i> Исследование метастабильных структур в поверхностных слоях ионно-имплантированного никеля	23
<i>Гольцев В. П., Жукова С. И., Масюк Т. М.</i> Влияние ионной имплантации на механические свойства дюралюминия	26
<i>Безух Б. А., Долгих М. Н., Крылов Г. Г., Тимофеева И. А.</i> Исследование энергетических характеристик облаков	29

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Коляда А. А.</i> Интервально-модулярные коды с исправлением ошибок	33
<i>Дылько Т. Н.</i> Выбор коэффициентов статистики для проверки гипотезы одинаковой распределенности в задачах анализа дихотомической информации	36
<i>Диалло У. У.</i> К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений в пространстве непрерывных функций	40
<i>Мельникова Е. Н., Харин Ю. С.</i> О классификации серий многомерных наблюдений при случайной длине серий	43
<i>Батурина Л. Н., Лепешинский Н. А.</i> Представление простых путей неориентированного графа	48
<i>Ерофеев В. Т.</i> Тесеры сложения для потенциалов электромагнитного поля	50
<i>Чхе Хен Ир.</i> Критерии оптимальности и субоптимальности в задаче оптимизации динамической системы с изменяемым множеством управлений	54
<i>Джураев О.</i> Построение уравнения римановой поверхности, заданной в виде трехлистной поверхности наложения сферы	57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Бринкевич Д. И., Горбачева Н. И., Петров В. В., Туровский Б. М.</i> Влияние германия на энергетическое положение термодоноров в кремнии	61
<i>Патрин А. А.</i> Визуализация неоднородной диффузии примеси в профилированный кремний	63
<i>Сидоренко А. В., Курило В. С., Максимов С. И.</i> Об использовании волоконной оптики в системах распределения сигналов	65
<i>Апанасович В. В., Чудовская Е. А.</i> Моделирование процессов образования выходного сигнала микроканальной пластины	67
<i>Ивонис Э. А.</i> Метод оптимизации многомерной линейной нестационарной динамической системы с переменным множеством управлений	69
<i>Савелова Л. А.</i> Метод решения линейной экстремальной задачи с односторонними ограничениями	70
<i>Егоренков И. А., Прусов И. А.</i> Об одном методе определения упругих характеристик анизотропных шпангоутов	72
<i>Самодуров А. А.</i> О решениях одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	74
<i>Крахотко В. В., Размыслович Г. П.</i> Линейные сингулярные системы с запаздыванием	76

РЕЦЕНЗИИ

<i>Комяк А. И. С. А. Поваляев. Основы информатики: Справочное пособие</i>	78
---	----

МАЙ

2

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В.И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

Физика
Математика
Механика



МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ“
1988

Главный редактор В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (*ответственный редактор*),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (*зам. ответственного редактора*), В. В. БОБКОВ (*зам. ответственного редактора*), А. М. БЕЛЬСКИЙ (*ответственный секретарь*), Е. С. ВОРОПАЙ, Р. Ф. ГАБАСОВ, В. А. ГАЙСЕНКО, В. В. ГРУЗИНСКИЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, В. И. КОРЗЮК, Л. Н. КИВАЧ, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕДЕВ, В. И. МИРОНЕНКО, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, С. С. ШУШКЕВИЧ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

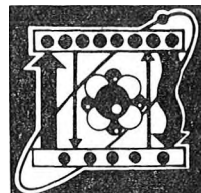
Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2

Редактор *И. П. Стрельченя*
Младший редактор *Г. М. Добыш*
Художественный редактор *С. В. Баленок*
Технический редактор и корректор *Г. Н. Хмарун*

Сдано в набор 02.03.88. Подписано в печать 12.05.88. АТ 13597. Формат 70×108^{1/16}. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-пзд. л. 7,49. Тираж 925 экз. Заказ 823. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11. Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, тел. 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 539.1

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, Н. Л. ГОРОДИШЕНИН,
М. Г. ЛИВШИЦ, С. В. ЧЕРЕПИЦА

О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ МНОГОЧАСТОТНОЙ ПРЕЦЕССИИ СПИНА НЕЙТРОНА В УСЛОВИЯХ ДИФРАКЦИИ В КРИСТАЛЛЕ

В работах [1—3] показано, что одночастотная ларморовская прецессия спина нейтрона в постоянном магнитном поле становится многочастотной, если нейтрон испытывает динамическую дифракцию в кристалле. Эффект обусловлен тем, что каждый зеемановский подуровень спина нейтрона в магнитном поле испытывает расщепление. При этом величина расщепления уровней зависит от ориентации кристалла, и при фиксированном значении магнитного поля поворот кристалла относительно падающего пучка приводит к изменению угла поворота спина прошедших нейтронов.

В реальном пучке имеется распределение нейтронов по длинам волн и углам падения, поэтому возникает вопрос, не усреднится ли искомый эффект при проведении эксперимента на пучке нейтронов с относительно низкой монохроматичностью. Покажем, что в некоторых случаях многочастотная прецессия спина может быть обнаружена и в интегральном сечении, что позволяет проведение такого рода эксперимента на обычном низкопоточном реакторе.

Волновая функция нейтронов, прошедших через кристалл толщиной l , помещенный в магнитное поле напряженностью $\vec{H}$, получена в работе [4] и имеет вид:

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c_+ \psi_+(\vec{r}) \\ c_- \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(\vec{r}) = & [2(\varepsilon_2^\sigma - \varepsilon_1^\sigma)]^{-1} \{ [2\varepsilon_2^\sigma - g_\sigma(0)] e^{ik_0 \varepsilon_1^\sigma l / \gamma_0} - \\ & - [2\varepsilon_1^\sigma - g_\sigma(0)] e^{ik_0 \varepsilon_2^\sigma l / \gamma_0} \} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \\ & - \frac{\beta g(\tau)}{2(\varepsilon_2^\sigma - \varepsilon_1^\sigma)} (e^{ik_0 \varepsilon_1^\sigma l / \gamma_0} - e^{ik_0 \varepsilon_2^\sigma l / \gamma_0}) e^{i(\vec{k}_0 + 2\pi\tau) \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{1(2)}^\sigma = \frac{1}{4} \{ (1 \pm \beta) g_\sigma(0) - \beta \alpha_{\pm}^\sigma \sqrt{[\beta \alpha_{\pm}^\sigma + g_\sigma(0)(1 - \beta)]^2 + 4\beta g(\tau)g(-\tau)} \},$$

$$g_\sigma(0) = g(0) \pm (\sigma) g_m(0), \quad g_m(0) = \frac{2m\mu H}{\hbar^2 k_0^2},$$

где $\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$ — спиновая волновая функция падающих на кристалл нейтронов; $\sigma = \pm$ (знак $+$ ($-$) соответствует нейтронам со спином, параллельным (антипараллельным) магнитному полю); $\beta = \gamma_0 / \gamma_1$; $\gamma_0 = \hbar \vec{k}_0 \cdot \vec{n} / k_0$;

$\gamma_1 = (\vec{k}_0 + 2\pi\vec{\tau}) \cdot \vec{n}/k_0$; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности кристалла; $\alpha = 2\pi\vec{\tau} \cdot (2\pi\vec{\tau} + 2\vec{k}_0)/k_0^2$ — величина, характеризующая отклонение от точного условия Брэгга; $2\pi\vec{\tau}$ — вектор обратной решетки кристалла; $g(\tau)$ — структурная амплитуда; $\vec{k}_0$ — волновой вектор падающих нейтронов; μ и m — магнитный момент и масса нейтрона соответственно; $\vec{r}$ — текущий радиус-вектор частицы.

В области дифракционного резонанса вращение вектора поляризации характеризуется четырьмя, в общем случае различными, частотами прецессии [3]. Проведение поляризационных измерений непосредственно в области дифракционного резонанса крайне затруднено вследствие его угловой и энергетической узости. Представляет интерес поэтому рассмотреть возможность наблюдения эффекта вдали от точных условий Брэгга. При значительном отклонении падающего пучка от точных условий дифракции в сторону углов, больших или меньших ($|\alpha/g| \gg 1$) угла Брэгга, в кристалле возбуждается только одна α - или β -ветвь дисперсионной поверхности нейтронов [5] и прецессия спина носит одночастотный характер.

Вдали от дифракции поперечная компонента вектора поляризации P_{tx} прошедшего пучка имеет вид (предполагаем, что падающий пучок поляризован вдоль оси X):

$$P_{tx} = \cos \left[\omega_L l / \gamma_0 (1 + \text{sign}(\alpha) \frac{2g(\tau)g(-\tau)}{\beta\alpha^2} (1 - \beta)) \right], \quad (1)$$

$$\omega_L = \frac{2m\mu H}{\hbar^2 k_0}.$$

Компонента P_{ty} получается из P_{tx} заменой $\cos$ на $-\sin$.

Из (4) следует, что частота прецессии отличается от ларморовской частоты ω_L . При углах дифракции, меньших (больших) угла Брэгга, частота прецессии прошедших нейтронов будет больше (меньше) ларморовской частоты. Как следствие, разность углов поворота спина нейтронов, прошедших через кристалл, установленный в двух дифракционных положениях, когда угол дифракции больше и меньше угла Брэгга, равна

$$\Delta\varphi = \omega_L l / \gamma_0 \cdot \frac{4g(\tau)g(-\tau)}{\beta\alpha^2} (1 - \beta).$$

Падающий пучок нейтронов, полученный путем дифракционного отбраживания от обычного мозаичного кристалла-монокроматора, имеет разброс по длинам волн от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda$. Степень монохроматичности пучка $\Delta\lambda/\lambda_0$ порядка 1 % [6]. Пусть пучок достаточно хорошо сколлимирован, так что угловая расходимость $\Delta\Theta/\Theta_B \ll \Delta\lambda/\lambda_0$, поэтому необходимо провести усреднение угла $\Delta\varphi$ только по длинам волн падающих нейтронов. Для простоты предположим, что спектральная плотность нейтронного пучка равномерно распределена от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda$. Тогда

$$\overline{\Delta\varphi} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \Delta\varphi(\lambda) d\lambda / \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} d\lambda = A / (\lambda_0 - \lambda_B) (\lambda_0 + \Delta\lambda - \lambda_B),$$

$$A = \omega_L l / \gamma_0 \cdot \frac{4g(\tau)g(-\tau)}{(\lambda_B/d^2)} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta},$$

где λ_0 — длина волны падающих нейтронов; λ_B — длина волны, удовлетворяющая точному условию Брэгга; d — межплоскостное расстояние в кристалле. При $\lambda_0 = 0,1$ нм, отражении (220) кристалла кремния толщиной $l = 1,5$ см, факторе асимметрии $\beta = 3$, напряженности внешнего магнитного поля $H = 40$ кА/м и отстройке по длине волны от точного условия Брэгга $(\lambda_0 - \lambda_B)/\lambda_0 = 10^{-4}$, которая эквивалентна угловой отстройке от дифракционного резонанса на угол $\Delta\Theta$, связанный с $\Delta\lambda$ соот-

ношением $\Delta\Theta = \Delta\lambda/\lambda_B \operatorname{ctg} \Theta_B$, величина добавочного угла поворота спина нейтронов достигает $\Delta\varphi = 4 \cdot 10^{-3}$ рад. Таким образом, для рассмотренных экспериментальных условий разность углов поворота спина нейтронов, прошедших через кристалл на угловом расстоянии порядка $0,1^\circ$ слева и справа от дифракционного максимума, будет достигать $0,008$ рад, что находится в пределах достигнутой экспериментальной точности [7—9].

Вращение вектора поляризации нейтронов, прошедших кристалл вне условий дифракции, описывается ларморовской частотой прецессии ω_L . Вклад эффекта многочастотной прецессии спина (МПС) определяется долей нейтронов, участвующих в динамической дифракции. В условия дифракции попадает лишь та часть пучка частиц, угловой разброс и отклонение которых по длине волны от точных условий Брэгга не превосходят по порядку величины $|g(\tau)| \approx 10^{-6}$. Как следствие, обнаружение относительно малого вклада искомого эффекта в проходящем пучке затруднено.

Для пучка нейтронов, распространяющихся за кристаллом в направлении дифракции, вращение вектора поляризации полностью определяется эффектом МПС, так как все нейтроны этого пучка пересекли кристалл в режиме дифракции. Если в эксперименте тонкая дифракционная структура отраженного пучка не анализируется, то измеряемый эффект определяется суммой вкладов всех падающих нейтронов с различными длинами волн.

Тогда среднее значение поперечной компоненты вектора поляризации дифракционно отраженных нейтронов может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{d_x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\operatorname{Re}\psi_{d+}^*(y)\psi_{d-}(y)dy \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I_d(y)dy = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left[D \frac{1+\beta}{2} g_m(0) \right] A_+(y)A_-(y)dy \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} [A_+^2(y) + A_-^2(y)]dy, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\pm}(y) &= \sin \left[D \frac{g(\tau)\sqrt{\beta}}{2} \sqrt{1+(y+y'_{\pm})^2} \right] \bigg/ \sqrt{1+(y+y'_{\pm})^2}, \\ y_{\pm} &= y + y'_{\pm} = \frac{\beta\alpha - g(0)(1-\beta)}{2g(\tau)\sqrt{\beta}} \pm \frac{g_m(0)}{2g(\tau)\sqrt{\beta}}, \quad D = k_0 l / \gamma_0. \end{aligned}$$

В силу лоренцевского характера затухания подынтегрального выражения в (2) основной вклад в величину интеграла вносит лишь область интегрирования при $|y| \lesssim 10$. При увеличении величины $|y|$ от 0 до 10 величина $D \frac{1+\beta}{2} g_m(0)$ изменяется лишь на 10^{-5} часть своего первоначального значения. Сохраняя разумную степень точности, косинус можно вынести из-под знака интегрирования. Тогда выражение для компоненты $\bar{P}_{d_x}$ можно представить в виде двух сомножителей

$$\begin{aligned} \bar{P}_{d_x} &= \cos \left[D \frac{1+\beta}{2} g_m(0) \right] \cdot R, \\ R &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_+(y)A_-(y)dy \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} [A_+^2(y) + A_-^2(y)]dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Выражение для компоненты $\bar{P}_{d_y}$ получается из компоненты $\bar{P}_{d_x}$ заменой $\cos$ на $-\sin$. Следовательно, компонента вектора поляризации, поперечная направлению магнитного поля, может быть записана в следующем виде:

$$\bar{P}_{d_x} + i\bar{P}_{d_y} = e^{iD \frac{1+\beta}{2} g_m(0)} \cdot R.$$

Величина R является осциллирующей функцией относительно параметра $y'_+ = -y_-$. Это приводит к тому, что с увеличением толщины кри-

сталла и/или напряженности магнитного поля происходят как поворот, так и биеция величины поперечной компоненты вектора поляризации дифрагировавшего пучка нейтронов. Поворот вектора поляризации характеризуется пространственной частотой $k_0 \frac{1+\beta}{2\gamma_0} g_m(0)$, отличной от ларморовской частоты прецессии $k_0 \frac{1}{\gamma_0} g_m(0)$. Биеция величины вектора поляризации в данном случае носят многочастотный характер, описываемый выражением (3). Для оценки периода этих осцилляций при заданной толщине кристалла найдем напряженность магнитного поля, когда модуль вектора поляризации проходит через первый минимум. Это происходит при достижении равенства $D \frac{g(\tau)V\beta}{2} (V \sqrt{1+(y+y'_+)^2} - \sqrt{1+(y+y'_-)^2})|_{\alpha=0} = \pi/2$. После разложения подкоренного выражения получаем следующее соотношение:

$$D \frac{(1-\beta)^2}{4g(\tau)V\beta} g(0) g_m(0) = \pi/2. \quad (4)$$

В случае дифракции нейтронов с длиной волны $\lambda_0=0,1$ нм на кристалле кремния в геометрии Лауэ (220) с фактором асимметрии $\beta=2$ при толщине кристалла $l=1$ см для выполнения условия (4) напряженность магнитного поля должна составлять 16 кА/м. Таким образом, многочастотную прецессию спина нейтронов можно наблюдать по появлению биеций величины вектора поляризации дифракционно отраженного пучка нейтронов в асимметричном случае Лауэ при толщине кристалла порядка 1 см и напряженности магнитного поля в несколько сотен эрстед. При наблюдении эффекта от всего дифракционного пика отпадают жесткие требования, предъявляемые к монохроматичности и угловой расходимости падающего пучка. Это позволяет проводить подобного рода эксперимент на пучке нейтронов с относительно низкой монохроматичностью, получаемом при использовании обычного мозаичного кристалла-монокроматора [6].

Список литературы

1. Барышевский В. Г. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 1. С. 78.
2. Boryshevskii V. G., Cherepitsa S. V. // Phys. Lett. 1982. V. A90. N. 5. P. 267.
3. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1983.
4. Барышевский В. Г. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. Вып. 5(11). С. 1587.
5. Batterman B., Cole H. // Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. N. 3. P. 681.
6. Александров Ю. А., Шарапов Э. И., Чер. Л. Дифракционные методы в нейтронной физике. М., 1981.
7. Forte M. // Nuovo Cimento. 1973. V. A18. N. 3. P. 727.
8. Abrahams A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 776.
9. Forte M. et al. // Ibid. 1980. V. 45. N. 26. P. 2088.

Поступила в редакцию 06.10.86.

УДК 778.39.535.36

А. И. УРБАНОВИЧ

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЭНЕРГООБМЕН СВЕТОВЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ИНЕРЦИОННОЙ ТЕПЛОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

При нестационарном взаимодействии двух световых волн одинаковой частоты и разных интенсивностей в нелинейной среде возможен их энергообмен, т. е. передача энергии от сильной волны к слабой [1]. Возникновение этого эффекта, эффекта нестационарного энергообмена (НЭ), связано с появлением зависящего от времени фазового сдвига между ин-

терференционным полем волн и индуцируемой им дифракционной решеткой показателя преломления и (или) коэффициента поглощения. В стационарных условиях этот сдвиг отсутствует, и усиление слабого на частоте мощного излучения не происходит. Эффект НЭ, обусловленный различными нелинейными механизмами, рассмотрен в ряде работ [2—7] как при попутном, так и при встречном распространении волн.

В предлагаемой статье эффект НЭ рассмотрен при попутном распространении световых волн в среде с тепловой нелинейностью с учетом ее инерционных свойств. Такой средой может быть газ, состоящий из не поглощающих молекул и добавки из молекул, поглощающих оптическое излучение. Будем считать, что поляризованность среды P зависит только от изменения температуры T , т. е. $P = (\partial \epsilon / \partial T)_p \cdot T \cdot E / 4\pi$, где $(\partial \epsilon / \partial T)_p$ — термооптический коэффициент, учитывающий изменение диэлектрической проницаемости среды ϵ с температурой при постоянном давлении p . Тогда систему уравнений, описывающую взаимодействие поля излучения с такой средой, можно записать в виде [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{nc\rho E^2}{4\pi} + D\Delta u - \frac{u}{\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T - bT - \frac{u}{\tau Q}, \quad (1)-(2)$$

где u — плотность поглощенной энергии; n — показатель преломления; c — скорость света в вакууме; $\rho/2$ — амплитудный коэффициент поглощения; D — коэффициент диффузии возбужденных в результате поглощения оптического излучения молекул; τ — время установления процесса термализации — превращения поглощенной энергии в теплоту; a — коэффициент температуропроводности; Q — теплоемкость единицы объема; b — коэффициент теплообмена с окружающей средой; Δ — оператор Лапласа.

Первое слагаемое в правой части (1) описывает поглощение электромагнитной энергии активными молекулами, второе — диффузию этих молекул, третье — передачу энергии оптически возбужденных молекул через столкновения непоглощающим молекулам среды.

Рассмотрим распространение двух световых волн $E_j \exp(-i\omega_j t + i\vec{k}_j \vec{r})$ с частотами ω_j и волновыми векторами $\vec{k}_j$, пересекающихся в среде под углами $\pm \theta$ к оси z . Система уравнений, описывающая взаимодействие этих волн, с учетом (1) — (2) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\rho}{2} E_1 = i \frac{\omega_1 \rho}{4\pi \tau Q} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \left\{ E_2 \int_0^t (|E_1|^2 + |E_2|^2) \cdot f(t-t'; 0; 0) dt' + E_2 \int_0^t E_1 E_2^* \cdot f^*(t-t'; q; \Omega) dt' \right\}; \quad (3a)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\rho}{2} E_2 = i \frac{\omega_2 \rho}{4\pi \tau Q} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p \left\{ E_1 \int_0^t (|E_1|^2 + |E_2|^2) \cdot f(t-t'; 0; 0) dt' + E_1 \int_0^t E_1^* E_2 \cdot f(t-t'; q; \Omega) dt' \right\}, \quad (3b)$$

где $f(t-t'; q; \Omega) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{\lambda_2(t-t')} - e^{\lambda_1(t-t')}]$, $q = |\vec{k}_2 - \vec{k}_1|$, $\lambda_1 = -\gamma - i\Omega$; $\lambda_2 = -\Gamma - i\Omega$; $\Omega = \omega_2 - \omega_1$; $\Gamma = b + aq^2$ и $\gamma = 1/\tau + Dq^2$ — константы релаксации светоиндуцированных решеток, обусловленные процессами температуропроводности и термализации соответственно; $V = c/n$. Граничные условия зададим в виде: $E_j(z=0, t) = E_{j0}(t)$, $j=1, 2$.

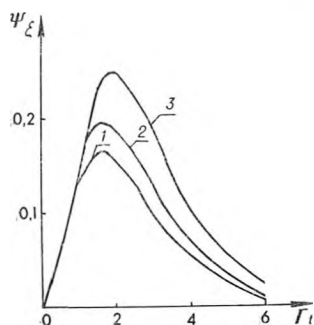
Систему (3) будем решать для тонких сред методом последовательных приближений при следующих предположениях: $|E_1| \gg |E_2|$, $\Omega=0$; $z \ll c/n|\lambda_j|$, что позволит отбросить в (3) временные производные [6]; $E_{j0}(t)$ — прямоугольные импульсы. Пренебрегая также поглощением сильной волны и ограничиваясь членами, квадратичными по z для функ-

ции пропускания $\Pi(z, t) = |E_2(z, t)/E_{20}(t)|^2$ слабого излучения, из (3) можно найти:

$$\Pi(z, t) \approx 1 - \rho z + \left(\frac{\alpha_T |E_{10}|^2}{\gamma \tau} \rho z \right)^2 \Psi_\xi(t) + \dots, \quad (4)$$

где $\xi = \Gamma/\gamma$, ($\xi < 1$); $\alpha_T = \omega(\partial\epsilon/\partial T)_p/4\pi Q\Gamma$;

$$\Psi_\xi(t) = \frac{1}{(1-\xi)^3} \left\{ \xi(2-\xi+\xi^2)e^{-\Gamma t \left(\frac{1}{\xi}-1\right)} - (2\xi^2-\xi+1) + \right. \\ \left. + (1-\xi)(1-\xi e^{-\Gamma t \left(\frac{1}{\xi}-1\right)})^2 e^{-\Gamma t} + \Gamma t(1-\xi)(1+\xi e^{-\Gamma t \left(\frac{1}{\xi}-1\right)}) \right\} e^{-\Gamma t}. \quad (5)$$



Зависимость функции Ψ_ξ от времени при различных значениях ξ : $\xi=0$ (1); 0,1 (2); 0,3 (3)

Слагаемое в (4), линейное по z , описывает поглощение слабой волны, а квадратичное — эффект НЭ, т. е. усиление слабого излучения за счет передачи энергии от мощной волны. Как можно легко убедиться, в установившемся режиме при $t \gg \gamma^{-1}$, Γ^{-1} , функция $\Psi_\xi(t)$ равна нулю, т. е. перекачка энергии от сильной волны к слабой отсутствует. Найдем пороговое поле $|E_{10}|_{\text{пор}}^2$, при котором эффект НЭ преобладает над поглощением. Функция пропускания $\Pi(z, t)$ будет больше единицы, если $|E_{10}|^2 >$

$$> |E_{10}|_{\text{пор}}^2 = \frac{\gamma \tau}{\alpha_T (\rho z \Psi_\xi^{\text{max}})^{1/2}}, \quad \text{где } \Psi_\xi^{\text{max}} \text{ — макс-}$$

симальное значение функции $\Psi_\xi(t)$ при фиксированном значении ξ . Без учета инерционных свойств среды, т. е. при отсутствии диффузии поглощающих молекул ($D=0$) и мгновенном превращении поглощенной энергии в теплоту ($\tau=0$), величина $\xi=0$ и функция $\Psi_\xi(t)$, определяемая (5), принимает вид [1]:

$$\Psi_0(t) = (-1 + e^{-\Gamma t} + \Gamma t) e^{-\Gamma t}. \quad (6)$$

На рисунке приведены зависимости функции Ψ_ξ от времени t для различных значений ξ . Из графиков видно, что с увеличением ξ максимальные значения функции Ψ_ξ^{max} возрастают.

Таким образом, хотя характеры временных зависимостей (5) и (6) совпадают, при значениях $\xi \neq 0$ следует ожидать количественных отличий в эффективности НЭ по сравнению со случаем $\xi=0$.

Список литературы

1. Rother // Zs. f. Naturforschung. 1970. В. 25a. S. 1120.
2. Rangnekar S. S., Enns R. H. // Can. Journ. Phys. 1971. V. 49. P. 2307.
3. Винецкий В. Л., Кухтарев Н. В., Соскин М. С. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. № 4. С. 420.
4. Винецкий В. Л., Кухтарев Н. В. Там же. 1978. Т. 5. № 4. С. 857.
5. Апанасевич П. А., Афанасьев А. А., Жвавый С. П. // Тез. докл. IX Всесоюз. конференц. по КиНО. М., 1978. С. 200.
6. Апанасевич П. А., Афанасьев А. А., Урбанович А. И. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 4. С. 827.
7. Абрашин В. И., Апанасевич П. А., Афанасьев А. А., Дриц В. В., Урбанович А. И. // ЖПС. 1985. Т. 42. № 6. С. 1006.
8. Gray M. A., Herman R. M. // Phys. Rev. 1969. V. 181. P. 374.

Поступила в редакцию 06.10.86.

О ВКЛАДАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАЦИИ

Магнитное поле в активной среде газового лазера в общем случае влияет на все характеристики генерируемого излучения: энергетические, частотные и поляризационные [1], причем его действие зависит от анизотропии лазерного резонатора. При несовпадении базисов фазовой анизотропии, индуцируемой магнитным полем в активной среде, и амплитудной анизотропии резонатора обе части поляризуемости среды, действительная (показатель преломления) и мнимая (коэффициент усиления), одновременно дают вклад в указанные характеристики. В частности, такая ситуация имеет место, когда резонатор обладает линейной амплитудной (частичный поляризатор) и циркулярной фазовой (нерезонансный фарадеевский элемент) анизотропией, а среда помещена в продольное магнитное поле. Важным является вопрос о соотношении вкладов обеих частей поляризуемости среды в параметры генерации, поскольку оно во многом определяет эффективность использования индуцируемой в среде анизотропии для управления характеристиками генерируемого излучения. Имеющиеся литературные данные косвенно свидетельствуют о том, что действительная часть поляризуемости среды может оказывать на энергетику излучения лазера довольно сильное влияние, сравнимое с влиянием ее мнимой части. Так, в [2] с помощью магнитного поля в активной среде гелий-неонового лазера осуществлена селекция типов колебаний вплоть до получения генерации одной продольной моды с высокой энергетической эффективностью. Такая селекция обусловлена резонансным фарадеевским вращением плоскости поляризации излучения в среде. Однако прямые эксперименты, позволяющие четко решить поставленный вопрос, не проводились. В настоящей работе изложены результаты эксперимента, позволяющего качественно оценить соотношение вкладов действительной и мнимой частей поляризуемости, помещенной в продольное магнитное поле активной среды газового лазера с анизотропным резонатором, в мощность генерации.

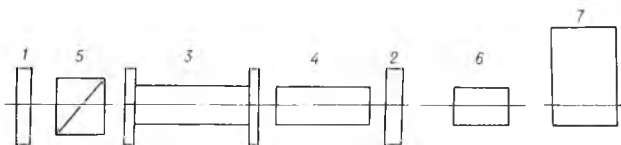


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1, 2 — зеркала резонатора; 3 — ячейка с гелий-неоновой смесью в переменном продольном магнитном поле; 4 — нерезонансный фарадеевский вращатель плоскости поляризации излучения; 5 — частичный поляризатор; 6 — ФЭУ; 7 — осциллограф

На рис. 1 показана блок-схема экспериментальной установки. Активная газоразрядная ячейка с гелий-неоновой смесью помещалась в переменное продольное магнитное поле соленоида, питающегося переменным током частотой 50 Гц (рис. 2, а). Циркулярная фазовая анизотропия резонатора создавалась нерезонансным фарадеевским элементом (стержень из тяжелого флинта длиной 120 мм, помещенный в постоянное продольное магнитное поле). Частичный поляризатор — стеклянная пластинка, наклоненная к оптической оси резонатора под углом Брюстера, — обеспечивал различные потери для двух ортогонально-линейно-поляризованных волн. Разность амплитудных потерь для этих волн составляла 12 %. Остальные поверхности внутри резонатора (окошки активной кю-

веты и торцы фарадеевского элемента) были просветлены для длины волны $1,15 \text{ мкм}$ и располагались в плоскостях, ортогональных оптической оси резонатора, вследствие чего линейную амплитудную анизотропию не создавали. В отсутствие циркулярной фазовой анизотропии активной среды мощность генерации была порядка 1 мВт , а поляризация выходного излучения близка к линейной (азимут поляризации определялся направлением максимального пропускания частичного поляризатора). Включение магнитного поля в активной среде или в нерезонансном фарадеевском элементе приводило к вращению плоскости поляризации излучения лазера.

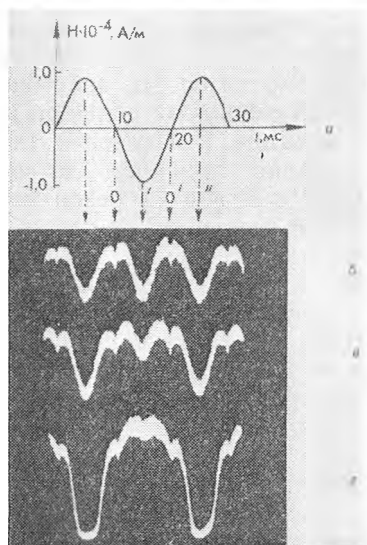


Рис. 2. Зависимость напряженности продольного магнитного поля в активной среде лазера от времени (а) и осциллограммы интенсивности генерации при величинах циркулярной фазовой анизотропии резонатора 0 (б), 0,02 (в) и 0,07 рад (г)

В случае, когда резонатор не обладает циркулярной фазовой анизотропией, интенсивность генерации не зависит от направления продольного магнитного поля, поэтому периодичность ее изменения составляет 100 Гц (рис. 2, б). Точки O , O' осциллограммы соответствуют напряженности $H=0$. При наложении на активную среду магнитного поля изменяются и мнимая, и действительная части ее поляризуемости, т. е. расщепляется контур усиления и наблюдается резонансный эффект Фарадея. В лазере с линейной амплитудной анизотропией оба эти фактора вызывают уменьшение мощности генерации (участки $O-I$, $O-I'$ осциллограммы), за исключением небольшой области напряженности H вблизи нулевых значений. Рост интенсивности излучения лазера в этой области обусловлен разрушением магнитным полем выстраивания атомных состояний [1]. При максимальных значениях $|H|$ (точки I , I' , I'') интенсивность генерации минимальна. Это связано с тем, что при используемых амплитудных значениях напряженности магнитного поля ($H_{\text{ампл}} = 9,95 \cdot 10^3 \text{ А/м}$) еще не происходит полного расщепления контура

усиления и, кроме того, угол резонансного поворота плоскости поляризации излучения в среде не достигает максимального значения. Таким образом, энергетические характеристики лазера с фазово-изотропным резонатором не позволяют судить о соотношении вкладов обеих частей поляризуемости среды в параметры генерации. Для выяснения этого вопроса необходимо создать циркулярную фазовую анизотропию резонатора постоянной величины — наложить постоянное продольное магнитное поле на фарадеевский элемент. При этом индуцируемая в активной среде циркулярная фазовая анизотропия может увеличивать или уменьшать на частотах усиления фазовую анизотропию резонатора, что соответствует одинаковым либо противоположным направлениям вращения плоскости поляризации излучения в среде и фарадеевском элементе. Первый случай отображен на участках $O-I$ и $O'-I''$, а второй — на участке $O-O'$ осциллограмм (рис. 2, в, г). Периодичность изменения мощности генерации при этом составляет 50 Гц .

Из данных рис. 2 видно, что с ростом фазовой анизотропии резонатора увеличивается глубина модуляции интенсивности генерируемого излучения при постоянной амплитуде напряженности магнитного поля в среде. Это обусловлено ростом крутизны зависимости энергетических характеристик лазера от величины фазовой анизотропии резонатора [1]. Чем больше последняя, тем сильнее влияет поворот плоскости поляризации излучения в активной среде на мощность генерации. Это справедли-

во до тех пор, пока величина фазовой анизотропии лазера не сравняется с величиной его амплитудной анизотропии.

Если поворот плоскости поляризации излучения в среде складывается с поворотом в фарадеевском элементе, повышение напряженности магнитного поля в ячейке вызывает монотонное падение интенсивности генерации. Если же эти повороты вычитаются, поведение энергетических характеристик зависит от параметров фарадеевского вращателя. При относительно небольших углах поворота в нем (см. рис. 2, в) мощность генерации вначале растет с увеличением напряженности магнитного поля (см. участок $O-I'$), причем сильнее, чем за счет разрушения выстраивания атомных состояний. В точках максимума фазовая анизотропия среды компенсирует на частотах усиления фазовую анизотропию резонатора. Дальнейшее возрастание напряженности H приводит к уменьшению интенсивности излучения лазера, и в точке I' , соответствующей значению $H_{\max}$, наблюдается минимум. При достаточно больших величинах фазовой анизотропии резонатора (см. рис. 2, г) этот минимум почти не заметен, а в максимуме мощность генерации уже существенно превосходит ее значение в отсутствие магнитного поля. Таким образом, при достаточной величине фазовой анизотропии резонатора и определенном направлении магнитного поля в активной среде лазера, соответствующем вычитанию углов поворота плоскости поляризации излучения в среде и фарадеевском элементе, мощность генерации возрастает, несмотря на то, что зеемановское расщепление контура усиления должно приводить к падению мощности излучения лазера с линейно-амплитудно-анизотропным резонатором. Это происходит из-за того, что в указанных условиях резонансное фарадеевское вращение плоскости поляризации излучения в активной среде сильнее влияет на энергетические характеристики генерации, чем зеемановское расщепление контура поглощения.

Приведенные экспериментальные данные указывают, что при определенном соотношении величин амплитудной и циркулярной фазовой анизотропии лазера, достаточной напряженности магнитного поля в среде изменение магнитным полем действительной части поляризуемости активной среды лазера может оказывать на энергетические характеристики генерации влияние, сравнимое или даже большее, чем влияние изменения мнимой части поляризуемости среды.

Авторы признательны А. П. Войтовичу и А. И. Комяку за обсуждение работы.

Список литературы

1. Войтович А. П. Магнитооптика газовых лазеров. Минск, 1984.
2. Войтович А. П., Павлющик А. А., Пантелеев С. В. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. № 1. С. 42.

Поступила в редакцию 22.09.86.

УДК 548.0:535.3

И. Я. ДУБОВСКАЯ, ЧЫОНГ БА ХА

О ДИФРАКЦИОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ КАНАЛИРОВАННОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

В рентгеновском диапазоне спектра структура кристалла влияет не только на движение излучающей частицы, но и на состояние излучаемого фотона, приводя при выполнении условий дифракции к появлению излучения под большим углом к направлению движения частицы [1]. Общие выражения для дифференциального сечения рентгеновского излучения при дифракции Лауэ и Брэгга в случаях осевого и плоскостного каналирования были получены в [2—4]. В настоящей работе рассмотрено угловое и спектральное распределение рентгеновского излучения, обра-

зованного частицами, каналированными вдоль оси (осевое каналирование). Найдены поляризационные и интегральные характеристики излучения, испускаемого в дифракционный пик.

Согласно [3, 4], дифференциальное число фотонов, излучаемых каналированными вдоль оси частицами под большим углом к направлению движения в случае дифракции фотонов по Лауэ ($k_z > 0$, $k_z + \tau_z > 0$), имеет вид:

$$dN_s^\tau = \frac{e^2 \beta_1^2 d^3 k}{4\pi^2 \omega E^2} \sum_{nf} Q_{nn} |\vec{e}_{1s} \vec{W}_{nf}|^2 \left| \sum_{\mu=1,2} \epsilon_{\mu s}^\tau \frac{1 - e^{-iq_{znf}^{\mu s} L}}{q_{znf}^{\mu s}} \right|^2, \quad (1)$$

где E — энергия частицы; ω — частота испускаемого фотона; $\vec{k}$ — его волновой вектор; $\vec{\tau}$ — вектор обратной решетки кристалла; $\vec{p}(\vec{p}_1)$ — начальный (конечный) импульс частицы; L — толщина кристалла; $\vec{e}_{1s}$ — вектор поляризации фотона; $\vec{e}_{1\sigma} \parallel [\vec{k}\vec{\tau}]$ для σ -поляризации; $\vec{e}_{1\pi} \parallel [\vec{k}, [\vec{k}\vec{\tau}]]$ для π -поляризации; $\vec{k}_\tau = \vec{k} + \vec{\tau}$; $q_{znf}^{\mu s} = p_{zn} - p_{1zf} - k_z - \tau_z - \frac{\omega}{\gamma_1} \epsilon^{\mu s}$. Здесь ось z выбрана по кристаллографической оси, вдоль которой движется каналированная частица; $1 + \epsilon^{\mu s}$ — диэлектрическая проницаемость кристалла в условиях дифракции; $\gamma_1 = \frac{k_z + \tau_z}{\omega/c}$;

$$\begin{aligned} \vec{W}_{nf} &= \vec{p} - (\vec{p}_\perp - \vec{k}_\perp - \vec{\tau}_\perp) J_{nf} - \vec{I}_{nf}, \\ J_{nf} &= N_\perp \int_{S_\perp} e^{-i(\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp) \cdot \vec{\rho}} \psi_{n\kappa}^*(\vec{\rho}) \psi_{f\kappa_1}^*(\vec{\rho}) d^2 \rho, \\ \vec{I}_{nf} &= \frac{N_\perp}{i} \int_{S_\perp} e^{-i(\vec{k}_\perp + \vec{\tau}_\perp) \cdot \vec{\rho}} \psi_{n\kappa}^*(\vec{\rho}) \nabla_\rho \psi_{f\kappa_1}^*(\vec{\rho}) d^2 \rho, \\ Q_{nn} &= \frac{N_\perp}{S_\perp} \left| \int_{S_\perp} \psi_{n\kappa}^*(\vec{\rho}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{\rho}} d^2 \rho \right|^2, \end{aligned}$$

n, f — номера состояний; $\kappa(\kappa_1)$ — двумерный приведенный квазинимпульс в начальном (конечном) состоянии; $N_\perp$ — число двумерных элементарных ячеек в плоскости кристалла, поперечной оси z ; $S_\perp$ — площадь ячеек; $\psi_{n\kappa}^*(\vec{\rho})$ — двумерная функция Блоха в кристалле. Остальные обозначения см. в [2, 4].

Очевидно, что сечение (1) принимает максимальное значение для всех частот, удовлетворяющих неравенству [2]:

$$\begin{aligned} \text{Re } q_{znf}^{\mu s} &= p_{zn} - p_{1zf} - k_z - \tau_z - \frac{\omega}{\gamma_1} \text{Re } \epsilon^{\mu s} \simeq \\ &\simeq \omega(1 - \beta \cos \theta) - \Omega_{nf} - \frac{\omega}{\gamma_1} \text{Re } \epsilon^{\mu s} \leq \frac{\omega}{\gamma_1} \text{Im } \epsilon^{\mu s}, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ — угол между вектором $\vec{k} + \vec{\tau}$ и осью z ; $\Omega_{nf} = \epsilon_n - \epsilon_f$ — частота перехода между состояниями с энергиями ϵ_n и ϵ_f двумерного потенциала. Для достаточно толстого непоглощающего кристалла возможен асимптотический переход $|1 - \exp(-iq_z L)|/|q_z|^2 \simeq \pi L \delta(q_z)$, что дает возможность проинтегрировать (1) по частотам или углам и получить угловое или спектральное распределение.

Рассмотрим подробно дифракционное излучение каналированных вдоль оси частиц относительно невысоких энергий, когда выполняется соотношение $1 - \beta \gg \frac{1}{\gamma_1} \text{Re } \epsilon^{\mu s}$.

В этом случае, согласно (2), преломляющие свойства среды слабо влияют на частоту излучения

$$\omega_{nf}^{\mu s} \simeq \omega_{nf} = \frac{\Omega_{nf}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (3)$$

которая определяется только углом вылета кванта, полной энергией частицы и частотой соответствующего перехода.

В результате интегрирования сечения (1) с помощью δ -функции для углового распределения фотонов получаем следующие выражения.

Для излучения под большим углом относительно направления движения частицы:

$$\frac{dN_s^\tau}{d\Omega} = \frac{e^2 L \beta_1^2}{2\pi} \sum_{nf} Q_{nn} \Omega_{nf}^3 B_s^\tau(\omega_{nf}) |x_{nf} R_{xs}^\tau + y_{nf} R_{ys}^\tau|^2, \quad (4)$$

$$\text{где } R_{x\sigma}^\tau = \frac{\beta \sin^2 \theta \cos \varphi (\tau_y \cos \varphi - \tau_x \sin \varphi)}{(1 - \beta \cos \theta)^2 [\tau^2 - (\vec{n}_1 \vec{\tau})^2]^{1/2}} + \frac{\tau_z \sin \theta \sin \varphi - \tau_y \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta) [\tau^2 - (\vec{n}_1 \vec{\tau})^2]^{1/2}},$$

$$R_{x\pi}^\tau = \frac{\beta \sin \theta \cos \varphi (\cos \theta (\vec{n}_1 \vec{\tau}) - \tau_z)}{(1 - \beta \cos \theta)^2 [\tau^2 - (\vec{n}_1 \vec{\tau})^2]^{1/2}} + \frac{\sin \theta \cos \varphi (\vec{n}_1 \vec{\tau}) - \tau_x}{(1 - \beta \cos \theta) [\tau^2 - (\vec{n}_1 \vec{\tau})^2]^{1/2}},$$

$$R_{y\sigma}^{\tau(0)} \equiv -R_{x\sigma}^{\tau(0)}, \quad R_{y\pi}^{\tau(0)} \equiv R_{x\pi}^{\tau(0)} \text{ с заменой } \tau_x \leftrightarrow \tau_y, \sin \varphi \leftrightarrow \cos \varphi,$$

$$B_s^\tau(\omega_{nf}) = \sum_{\mu} |\xi_{\mu s}^\tau|^2, \quad \vec{n}_1 = \frac{\vec{k} + \vec{\tau}}{|\vec{k} + \vec{\tau}|},$$

$$\vec{\rho}_{nf} = x_{nf} \vec{i} + y_{nf} \vec{j} = N_{\perp} \int_{s_{\perp}} \Psi_{n\vec{k}}(\vec{\rho}) \vec{\rho} \Psi_{f\vec{k}}^*(\vec{\rho}) d^2 \rho,$$

$\vec{\rho}_{nf}$ — в общем случае комплексное.

Для излучения вдоль направления движения частицы:

$$\frac{dN_s^0}{d\Omega} = \frac{e^2 L}{2\pi} \sum_{nf} Q_{nn} \Omega_{nf}^3 B_s^0(\omega_{nf}) |x_{nf} R_{xs}^0 + y_{nf} R_{ys}^0|^2, \quad (5)$$

где $R_{x\sigma}^0 \equiv R_{x\sigma}^\tau$ с заменой $\theta \rightarrow \vartheta$,

$$R_{x\pi}^0 = \frac{\beta \sin^2 \vartheta \cos \varphi (\tau_x \cos \varphi + \tau_y \sin \varphi)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 [\tau^2 - (\vec{n} \vec{\tau})^2]^{1/2}} + \frac{\tau_z \sin \vartheta \cos \varphi - \tau_x}{(1 - \beta \cos \vartheta) [\tau^2 - (\vec{n} \vec{\tau})^2]^{1/2}},$$

$$B_s^0(\omega_{nf}) = \sum_{\mu} |\xi_{\mu s}^0(\omega_{nf})|^2, \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

При $y_{nf}=0$ полученные формулы переходят в соответствующие выражения (см. [4]) для случая одномерного (плоскостного) каналирования частицы относительно кристаллографических плоскостей, перпендикулярных к оси x .

Необходимо отметить, что для частиц высоких энергий, когда $1 - \beta \lesssim 1/\gamma_1 \text{Re} \varepsilon^{\mu s}$, дисперсия среды существенно изменяет спектр испускаемых квантов, приводя, например, к нескольким ветвям излучения как функции θ . В этом случае суммирование по состояниям n, f в формулах (4), (5) необходимо дополнить суммированием по всем возможным частотам излучения [4]. В угловом же распределении появляется дополнительный множитель [4]:

$$\left| 1 - \frac{(\omega_{nf}^{\mu s})^2}{\gamma_1 \Omega_{nf}} \text{Re} \left(\frac{\partial \varepsilon^{\mu s}}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_{nf}^{\mu s}} \right|^{-1}$$

как результат учета частотной дисперсии в δ -функции.

Так как при каналировании частиц вдоль оси для связанных состояний двумерный периодический потенциал, описывающий движение частиц в плоскости, поперечной направлению движения релятивистских частиц, обладает осевой симметрией, удобно двумерную волновую функцию частицы выбрать в виде:

$$\psi_n(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_n(\rho) e^{i\nu\varphi}, \quad \nu = 0, \pm 1, \dots,$$

где $\varphi_n(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{1}{2E} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + U_{\text{эф}}(\rho) \right] \varphi_n(\rho) = \varepsilon_n \varphi_n(\rho),$$

где $U_{\text{эф}}(\rho) = U(\rho) + \nu^2/2E\rho^2$, $U(\rho)$ — потенциал кристаллографической оси.

В этом случае $\vec{\rho}_{nf} = \frac{1}{2} \rho_{nf} (\vec{i} + i\vec{j})$, $\Delta\nu = \pm 1$, $\rho_{nf} = N_{\perp} \int \varphi_n(\rho) \rho^2 \varphi_f^*(\rho) d\rho$. В результате угловые распределения (4), (5) представляются в следующем виде.

Для излучения под большим углом относительно направления движения каналированной частицы:

$$\frac{dN_s^{\tau}}{d\Omega} = \frac{e^2 L}{8\pi} \beta_1^2 \sum_{nf} Q_{nn} |\rho_{nf}|^2 \Omega_{nf}^3 B_s^{\tau}(\omega_{nf}) (R_{\rho s}^{\tau})^2. \quad (6)$$

Для излучения вдоль направления движения частицы:

$$\frac{dN_s^0}{d\Theta} = -\frac{e^2 L}{8\pi} \sum_{nf} Q_{nn} |\rho_{nf}|^2 \Omega_{nf}^3 B_s^0(\omega_{nf}) (R_{\rho s}^0)^2, \quad (7)$$

где $(R_{\rho s}^{\tau(0)})^2 = (R_{xs}^{\tau(0)})^2 + (R_{ys}^{\tau(0)})^2$.

Для получения спектрального распределения излучения необходимо проинтегрировать дважды дифференциальное сечение соответственно по углам.

Используя формулы, полученные в [2] для спектрально-углового распределения фотонов, образованных электронами (позитронами), каналированными между кристаллографическими плоскостями, можно получить следующее выражение:

$$\frac{dN_s^{\tau}}{d\omega} = \frac{e^2 L \beta_1^2}{2} \sum_{nf} Q_{nn} |x_{nf}|^2 \Omega_{nf}^2 B_s^{\tau}(\omega) \left[1 - 2 \frac{\omega}{\tilde{\omega}_{nf}} + 4 P_s^{\tau} \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{nf}} \right)^2 \right], \quad (8)$$

где $\tilde{\omega}_{nf} = 2\gamma^2 \Omega_{nf}$ — максимальная частота излучения; P_s^{τ} — поляризационный множитель:

$$P_{\sigma}^{\tau} = \frac{1}{4\tau_{\perp}^2} (\tau_x^2 + 3\tau_y^2), \quad P_{\pi}^{\tau} = \frac{1}{4\tau_{\perp}^2} (3\tau_x^2 + \tau_y^2), \quad \gamma = E/m.$$

Согласно (7), при плоскостном каналировании дифракционное излучение в общем случае эллиптически поляризовано. Причем степень поляризации зависит как от вида дифракционной функции $B_s^{\tau}(\omega)$, так и от энергии частицы. Так как отношение $\omega/\tilde{\omega}_{nf}$ уменьшается с ростом энергии частицы, то, согласно (7), при $(\omega/\tilde{\omega}_{nf}) \ll 1$ степень поляризации будет определяться только процессом дифракции.

В случае осевого каналирования, интегрируя (1) по углам, получаем для спектрального распределения выражение:

$$\frac{dN_s^{\tau}}{d\omega} = \frac{e^2 L \beta_1^2}{4} \sum_{nf} Q_{nn} |\rho_{nf}|^2 \Omega_{nf}^2 B_s^{\tau}(\omega) \left[1 - \frac{2\omega}{\tilde{\omega}_{nf}} + 2 \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{nf}} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Согласно (9), при осевом каналировании частиц поляризация излучения определяется только функцией $B_s^{\tau}(\omega)$, характеризующей дифракционное отражение фотонов кристаллом:

$$B_s^{\tau}(\omega) = \sum_{\mu} |\xi_{\mu s}^{\tau}(\omega)|^2 = 2 |g_{\tau}^s|^2 \{ [1 - \beta_1] |g_0 + \beta_1 \alpha| + 4\beta_1 |g_{\tau}^s|^2 \}^{-1},$$

$\alpha = \frac{2k\tau + \tau^2}{\omega^2}$, $\beta_1 = \frac{k_z + \tau_z}{k_z}$, g_0 и g_τ^s — коэффициенты в разложении диэлектрической проницаемости кристалла по векторам обратной решетки.

Из (9) видно также, что в осевом случае, в отличие от плоскостного каналирования, для связанных состояний, обладающих осевой симметрией, спектральное распределение фотонов факторизуется, т. е. представляется в виде произведения спектрального распределения фотонов от каналированной частицы в отсутствии дифракции на дифракционную функцию $B_s^\tau(\omega)$. Указанная функция имеет острый характер: достигает максимума, равного 1/2, на интервале $\alpha \leq |g_0|$ и быстро стремится к нулю при отклонении от этого условия.

Для оценки интегрального числа фотонов N_s^τ , излучаемых в дифракционный пик, воспользуемся остротой дифракционной функции $B_s^\tau(\omega)$. В результате интегральное число фотонов в дифракционный пик под большим углом относительно направления движения частицы записывается в следующем виде.

Для плоскостного каналирования:

$$N_s^\tau = \frac{\pi e^2 L \sqrt{\beta_1} |g_\tau^s(\omega_B)| \omega_B^2}{4 |\tau_z|} \sum_{nf} Q_{nn} |x_{nf}|^2 \Omega_{nf}^2 \left[1 - 2 \frac{\omega_B}{\omega_{nf}} + 4 P_s^\tau \left(\frac{\omega_B}{\omega_{nf}} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Для осевого каналирования:

$$N_s^\tau = \frac{\pi e^2 L \sqrt{\beta_1} |g_\tau^s(\omega_B)| \omega_B^2}{8 |\tau_z|} \sum_{nf} Q_{nn} |\rho_{nf}|^2 \Omega_{nf}^2 \left[1 - 2 \frac{\omega_B}{\omega_{nf}} + 2 \left(\frac{\omega_B}{\omega_{nf}} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где дифракционная частота ω_B определяется из условия $\alpha = 0$, $\omega \simeq \omega_B = \frac{\tau^2}{2 |\tau_z|}$, $\cos \Theta \simeq \cos 2\Theta_B = 1 - \frac{2 |\tau_z|^2}{\tau^2}$.

Используя (10), (11), получаем, что позитроны с энергией 50 МэВ, каналированные в алмазе вдоль оси $\langle 100 \rangle$, излучают в дифракционный пик (τ (1, 1, 3)) 10^{-6} фотонов на частицу, $L = 10^{-2}$ см, $Q = 1$.

В заключение необходимо отметить, что интенсивность дифракционного излучения каналированных частиц сравнима с интенсивностью параметрического рентгеновского излучения [5]. Однако параметрическое излучение имеет пороговый характер, в то время как дифракционное излучение, рассмотренное выше, наблюдается, если максимальная частота излучения, образованного каналированными частицами $\omega_{nf} = 2\gamma^2 \Omega_{nf}$, лежит в рентгеновском диапазоне спектра. В результате для частиц, движущихся в кристалле с энергией ниже порога возникновения параметрического излучения, наблюдение излучения под большим углом к направлению движения частицы возможно только для каналированных частиц.

Список литературы

1. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. С. 1133.
2. Baryshevskii V. G., Grubich A. O., Dubovskaya I. Ya. // Phys. Stat. Solid. (b). 1978. V. 88. P. 351.
3. Baryshevskii V. G., Dubovskaya I. Ya., Grubich A. O. // Ibid. 1980. V. 99. P. 205.
4. Baryshevskii V. G., Dubovskaya I. Ya. // Journ. Phys. C: Solid. Stat. Phys. 1983. V. 16. P. 3663.
5. Адищев Ю. Н., Барышевский В. Г. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. Вып. 7. С. 295.

Поступила в редакцию 05.09.86.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ РАССТОЯНИЙ «УРАН—КИСЛОРОД» В UO_2^{2+} ПО ПОЛОЖЕНИЮ ЧИСТО ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕХОДА В КОМПЛЕКСАХ УРАНИЛА

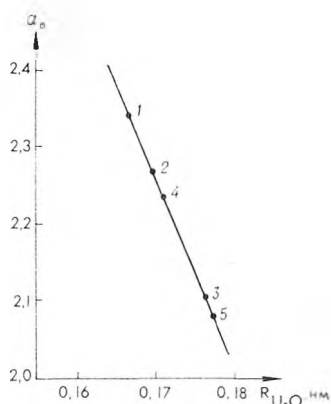
Широко известны способы рентгено- и нейтронографического определения строения комплексов уранила, а также их структурные исследования с помощью колебательных спектров [1, 2]. В первом случае в результате рассеяния рентгеновских лучей или нейтронов образцом получается дифракционная картина, которая подлежит дешифровке на ЭВМ. Это позволяет установить распределение электронной плотности на рассеивающих центрах и координаты самих центров, а следовательно, и межатомные расстояния. Упомянутые способы, однако, сложны в экспериментальном плане, расшифровка результатов измерений трудоемка. Существенное различие в рассеивающей способности атомов урана U и кислорода O приводит к большим погрешностям в определении межатомных расстояний R_{U-O} .

Гораздо проще по спектрам инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния в области $800-1000\text{ см}^{-1}$, отвечающей колебаниям иона уранила, рассчитать силовую постоянную валентной связи k и по корреляционной зависимости Беджера $r=1,08 k^{-1/3}+1,17$ определить величину межатомного расстояния в ураниле. Однако зависимость $r(k)$ весьма приближенная (и, вообще говоря, нелинейная), для разных классов объектов числовые константы заметно различаются, что в конечном счете приводит к низкой точности определения межатомных расстояний в ураниле ($\sim 0,01\text{ нм}$).

В нашей работе [3] показано, что с учетом внутренних $6p$ -электронов атома урана методом Малликена — Вольфсберга — Гельмгольца (МВГ) можно хорошо описать одноэлектронные уровни энергии и оптические спектры галогенидов уранила; причем первый переход в указанных соединениях представляет $f-f$ переход в самом атоме урана, сопровождающийся также частичным переносом заряда с уранильных атомов кислорода на уран. Для согласования расчетных и экспериментальных дан-

ных потребовалось лишь проварьировать единственный параметр — показатель экспоненты α_0 радиальной функции уранильных атомов кислорода.

Это необходимо в связи с тем, что на расстояниях $R_{U-O} < 0,19\text{ нм}$, когда происходит достаточно интенсивное взаимодействие $6p$ -орбитали U с $2p$ -орбиталями O, атомные орбитали кислорода должны сжиматься, причем тем сильнее, чем меньше расстояние R_{U-O} . Оказалось также, что значения α_0 с высокой степенью точности лежат на одной прямой. Следует отметить, однако, что значения коэффициентов в линейной зависимости могут изменяться, в частности, при переходе к комплексам уранила с кислородсодержащими лигандами, при учете спин-орбитального взаимодействия и в ряде других случаев. Так, проведенные нами расчеты электронной структуры и спектров нитратного и ацетатного соединений уранила показали, что и для них сохраняется линейная зависимость, но при некотором изменении



Зависимость показателя экспоненты α_0 радиальной функции уранильных атомов кислорода от межатомного расстояния в ураниле:

1 — тетрагидрид; 2 — тетрабромид; 3 — пентафторид; 4 — триацетат и 5 — тринитрат уранила

параметров прямой. В обобщенном виде ее можно записать: $\alpha_0 = -24,180 R_{U-O} \text{ (нм)} + 6,3597$. Отсюда следует сравнительно простой, надежный и достаточно точный (с погрешностью 0,001 нм) способ определения равновесных межатомных расстояний «уран — кислород» в группировке уранила.

По совпадению линий в спектрах люминесценции и электронного поглощения устанавливается положение частоты первого электронного перехода в ураниле. Затем полуэмпирическим методом РМХ (расширенный метод Хюккеля) с учетом внутренних *6p*-орбиталей атома урана рассчитывается электронная структура и энергия (частота) первого электронного перехода в ураниловом комплексе (набор параметров для такого расчета приведен в [3]). Для этого при некотором пробном значении величины межатомного расстояния R_{U-O} по корреляционной зависимости (см. рисунок) определяется показатель орбитальной экспоненты α_0 . Проверяется наличие удовлетворительного совпадения расчетной величины энергии (частоты) первого электронного перехода с экспериментальной (с точностью до 20 см⁻¹). В случае совпадения делается вывод о соответствии выбранного значения R_{U-O} истинному. В случае несовпадения берется новое значение R_{U-O} , и вся процедура повторяется.

В уранилнитратном и триацетатном комплексах экспериментальные и рассчитанные по методу РМХ [4] величины частот первых электронных переходов совпали при $\alpha_0 = 2,078$ и 2,235 соответственно. По корреляционной кривой (см. рисунок) найдены значения расстояний $R_{U-O} = 0,178$ и 0,171 нм соответственно, что хорошо согласуется с экспериментом. Аналогичное совпадение получено и в случае других соединений уранила (см. таблицу).

Расчетные и экспериментальные значения
межатомных расстояний «уран — кислород»
в группе UO_2^{2+} в ряде ураниловых соединений

Ураниловый комплекс	α_0	R_{U-O} , нм	
		расчет	эксперимент [1, 2]
Тетрахлорид	2,332	0,167	0,167
Тетрабромид	2,263	0,170	0,169
Пентафторид	2,098	0,176	0,176
Триацетат	2,235	0,171	0,171
Тринитрат	2,078	0,178	0,178

Таким образом, указанный способ открывает новую принципиальную возможность использования теоретических методов в совокупности со спектральными данными для оценки структурных параметров молекулярных систем и, кроме того, позволяет установить логическую (физическую) связь между распределением электронной плотности в пространстве взаимодействующих атомов и длиной их химической связи.

Список литературы

1. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Т. 1: Спектры, строение. Минск, 1981.
2. Новицкий Г. Г., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения. Т. 2: Атлас спектров. Минск, 1981.
3. Борковский Н. Б., Ковриков А. Б., Умрейко Д. С. // Коорд. химия. 1984. Т. 10. № 11. С. 1526.
4. Ковриков А. Б., Людчик А. М., Попов В. Г., Умрейко Д. С. Некоторые аспекты автоматизации научных исследований. Минск, 1980.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ UO_2^{2+} В РАСТВОРАХ И МЕЖИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Селективное лазерное возбуждение позволяет получать линейчатые спектры люминесценции ионов UO_2^{2+} в замороженных растворах при низких температурах [1]. В настоящей работе этим методом изучено температурное уширение линий в спектрах люминесценции стеклообразных растворов уранилсульфата в серной кислоте, уранилфосфата в фосфорной кислоте и уранилнитрата в воде и этаноле, а также влияние процесса переноса энергии электронного возбуждения на формирование указанных спектров. Возбуждение люминесценции осуществлялось излучением аргонового лазера и перестраиваемого в диапазоне 470—520 нм струйного лазера на красителе кумарин-102. Аппаратная функция спектрометра составляла $0,3 \text{ см}^{-1}$. Для записи линий люминесценции в резонансной области частот использовался фосфороскоп с временным разрешением $\sim 10^{-4} \text{ с}$.

Полуширина линии 0-0 перехода (δ) при регистрации в резонансной области частот ($\nu_{\text{рег}} \approx \nu_{\text{возб}}$), в соответствии с [2], составляет $1/2$ измеренной полуширины линии $\Delta\nu_0$, из которой исключено влияние аппаратной функции прибора. Зависимость δ от температуры в интервале 4—80 К приведена на рис. 1. Кривые достаточно хорошо аппроксимируются степенной зависимостью: $\delta \sim T^{2,2 \pm 0,2}$ для всех исследованных образцов.

Известно, что для ионов РЗЭ в стеклах [3] и органических молекул в стеклообразных матрицах [4] зависимость однородной ширины линии от температуры описывается законами, близкими к T^2 , в отличие от кристаллов, в которых сужение линий с понижением температуры (при $T < 100 \text{ К}$) происходит гораздо быстрее. В работе [5] предлагается объяснение температурного уширения в стеклах с использованием гипотезы о двухуровневых системах [6]. Объяснение возможно также в рамках обычного рамановского двухфононного механизма уширения линий, если учесть взаимодействие примесного центра с локализованными низкочастотными модами [7]. Вопрос о существовании таких колебательных состояний в стеклах не вполне ясен.

В настоящей работе для всех исследованных объектов обнаружено, что при $T < 10 \text{ К}$ в спектрах селективно возбуждаемой люминесценции рядом с линией 0-0-перехода как с длинноволновой, так и с коротковолновой сторон отчетливо проявляются «крылья» протяженностью 3—4 см^{-1} (рис. 2). Их форма сходна для различных частот 0-0-перехода. С повышением температуры вследствие уширения бесфононной линии они сливаются с ней и становятся практически неотделимыми. По-видимому, «крылья» соответствуют оптическим переходам с участием низкочастотных колебательных состояний матрицы: с длинноволновой стороны от ν_0 — переходам с рождением фотонов, а с коротковолновой — с их исчезновением. Этим определяется, вероятно, увеличение асимметрии крыльев относительно частоты 0-0 перехода при понижении температуры, так как фононы с большими частотами должны «вымораживаться». Таким образом, обычный рамановский механизм уширения флуоресцентных линий данных стеклообразных объектов представляется вполне приемлемым.

На рис. 1 приведены также температурные зависимости ширины линий, соответствующих переходам на подуровни колебаний $\nu_1(\text{UO}_2^{2+})$. Ширина этих линий $\Delta\nu_1$ определяется однородными ширинами возбужденного электронного уровня δ и колебательного подуровня в основном электронном состоянии δ' , а также неоднородным разбросом колебательных частот Δ . При 4,2 К контуры линий описываются кривой Фойгта.

Вклад гауссовой и лоренцевой компонент составляет соответственно 12,5 и 3 см^{-1} для UO_2^{2+} в сернокислом растворе, 8 и 2,5 см^{-1} — в спиртовом. Гауссова составляющая контура, по-видимому, характеризует неоднородное уширение линии [1], т. е. селекция ионов UO_2^{2+} по частоте чисто электронного перехода не устраняет значительного разброса их колебательных частот. Повышение температуры приводит к возрастанию однородной составляющей контура, и он все более приближается к лоренцевому. Гауссова компонента с температурой меняется незначительно.

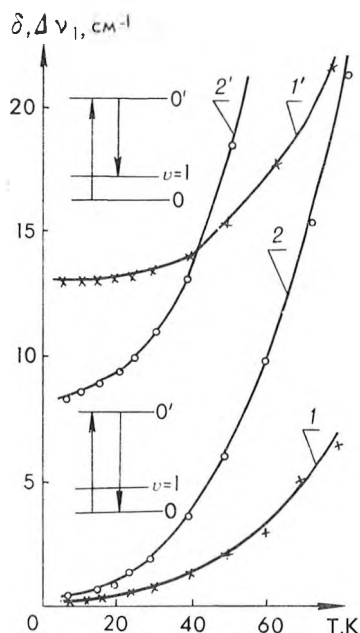


Рис. 1. Зависимость от температуры δ (1 и 2) и $\Delta\nu_1$ (1' и 2') в серной кислоте (1 и 1') и в спирте (2 и 2')

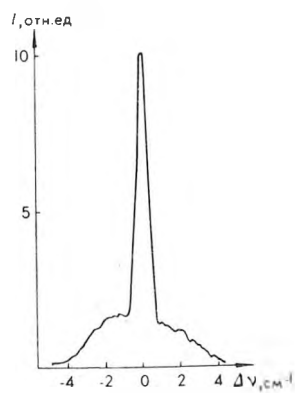


Рис. 2. Флуоресцентная линия 0-0 перехода UO_2^{2+} в серной кислоте

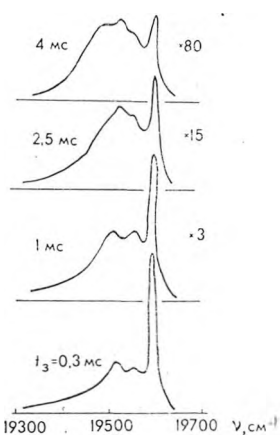


Рис. 3. Спектр люминесценции ионов UO_2^{2+} в серной кислоте в области первой полосы для различных t_3 ($\nu_n = 20492,4 \text{ см}^{-1}$)

При достаточно большой концентрации ионов UO_2^{2+} в каждом из исследуемых растворов ($c \geq 10^{-1} \text{ М}$) кроме рассмотренных линий в спектре селективно возбуждаемой люминесценции отчетливо проявляется серия широких полос, напоминающая спектр образца при его УФ облучении [1]. Эта серия обусловлена, по-видимому, безызлучательным переносом энергии от непосредственно возбужденных к соседним молекулам, излучающим в более длинноволновой области. Процесс переноса в данном случае, очевидно, сопровождается рождением фононов. Относительная интенсивность широкополосной составляющей спектра при гелиевых температурах падает с увеличением длины волны возбуждающего излучения ввиду уменьшения относительного числа акцепторных молекул, на которые безызлучательный перенос возможен без термической активации.

Явление переноса отражается также в кинетике свечения образцов. Если в растворах с концентрацией $c \leq 10^{-2} \text{ М}$ закон затухания люминесценции близок к экспоненциальному, то повышение концентрации сопровождается заметными отклонениями от экспоненциальности высвечивания селективно возбуждаемых центров. В мгновенных спектрах, снятых в порядке увеличения временной задержки относительно возбуждающего импульса, четко прослеживается перераспределение интенсив-

ности свечения в пользу акцепторной полосы, причем ее максимум постепенно смещается в низкочастотную область (рис. 3).

Кинетика затухания возбужденных донорных центров в теории статистического переноса энергии в неупорядоченных средах для общего случая мультипольного взаимодействия описывается выражением [8]:

$$I_D(t) = I_D(0) \exp(-t/\tau - \gamma t^{3/2}), \quad (1)$$

где S — порядок мультипольности взаимодействия; τ — радиационное время жизни; γ — макропараметр, характеризующий среднюю скорость (или среднее характерное время $\tau_T = \gamma^{-S/3}$) переноса энергии от донорных ионов к акцепторным. Выражение (1) удовлетворительно описывает экспериментальные результаты для ионов UO_2^{2+} в сернокислом растворе при $S = 6,5 \pm 0,5$ ($t \geq 100$ —150 мкс), что позволяет предполагать определяющую роль диполь-дипольного механизма межионного взаимодействия в процессе переноса энергии. Значение макропараметра γ для частоты возбуждения $\nu_b = 20492,4 \text{ см}^{-1}$ оказалось равным $37,5 \text{ с}^{-1/2}$ ($T = 4,2 \text{ К}$), что соответствует характерному времени переноса $\tau_T = 710 \text{ мкс}$ (при концентрации акцепторных молекул $1,5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$). Длинноволновое смещение максимума акцепторной полосы с увеличением времени задержки объясняется наличием повторных актов переноса энергии (от акцепторных к соседним молекулам с меньшими энергиями 0-0-переходов) за среднее время жизни в возбужденном электронном состоянии. Повышение температуры (до 77 К и более) приводит к быстрому росту скорости переноса энергии, как этого и следует ожидать для случая нерезонансного механизма переноса с участием фононов [9].

Список литературы

1. Бойков В. Н., Кулешов Н. В., Красовский А. Н. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 1. С. 94.
2. Kushida T., Takushi E. // Phys. Rev. 1975. B. 12. P. 824.
3. Hegarty J., Yen W. M. // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 1126.
4. Гороховский А. А., Ребане Л. А. // ФТТ. 1977. Т. 19. № 11. С. 3417.
5. Lyo S. K., Orbach R. // Phys. Rev. 1980. B. 22. P. 4223.
6. Anderson P. W., Halperin B. I., Varma C. M. // Phil. Mag. 1972. V. 25.
7. Осадько И. С. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. № 12. С. 640.
8. Зусман Л. Д., Бурштейн А. И. // ЖПС. 1971. Т. 15. С. 124.
9. Алимов О. К., Ашуров М. Х., Басиев Т. Т., Воронько Ю. К. // Препринт ФИАН. 1982. № 77.

Поступила в редакцию 16.09.86.

УДК 538.113

А. И. ВРУБЛЕВСКИЙ, П. В. КУЗОВКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДУКТОВ ОКИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛОПОРФИРИНОВ

Способность порфириновых оснований образовывать устойчивые комплексы с различными металлами позволяет изучать влияние природы металла на спектроскопические свойства продуктов окисления металлопорфиринов. Проведенные к настоящему времени исследования, например [1—4], показали, что отрыв электрона при окислении металлопорфиринов может происходить как из π -системы комплекса, так и с атомных орбиталей металла. Для установления общих закономерностей влияния природы металла и структуры порфиринового лиганда на свойства продуктов окисления необходимо провести дальнейшие систематические исследования и в первую очередь — расширение круга изучаемых порфиринов.

В настоящем сообщении приведены результаты исследований методом ЭПР продуктов электрохимического окисления некоторых металло-

порфиринов, проведенных с целью выяснения влияния центрального металла и структуры порфиринового лиганда на электронную структуру продуктов окисления тетрапиррольных пигментов.

Объектами исследования служили комплексы тетрафенилпорфина (ТФП) с кадмием, свинцом, кобальтом и палладием, а также производные этиопорфирина II (ЭП) с серебром и кобальтом и кобальтовый комплекс мезопорфирина IX (диметилловый эфир) Со МП. Выбор соединений диктовался стремлением изучить зависимость направленности электрохимического окисления от природы металла и порфиринового лиганда. В качестве растворителя выбран хлористый метилен. Остальная экспериментальная часть работы изложена ранее [5].

Параметры спектров ЭПР исследованных радикалов

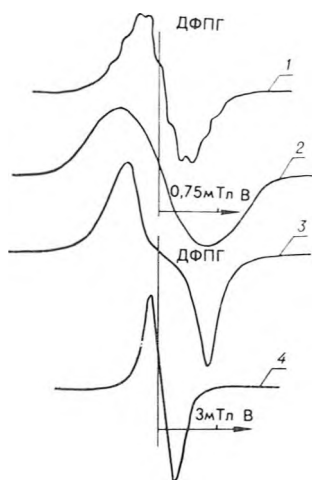
Радикал	ΔB , мТл	g	a , мТл	Примечание
Cd ТФП ⁺	0,70	2,0028	$a_N=0,160$	СТС разрешена плохо Протонная СТС не наблюдается
Ag ЭП ⁺	—	—	—	Катион диамагнитен
Pb ТФП ⁺	1,00	2,0021	—	СТС не разрешена
Mg ТФП ⁺	0,56	2,0029	$a_N=0,148$ $a_H=0,028$	СТС разрешена хорошо
Zn ТФП ⁺	0,59	2,0027	$a_N=0,162$ $a_H=0,028$	»
Со МП ⁺⁺	1,16	2,0040	—	СТС отсутствует
Со ЭП ⁺⁺	1,16	2,0040	—	»
Со ТФП ⁺⁺	4,10	2,0040	$a_{Co}=5,4$	СТС не разрешена

В таблице приведены характеристики спектров ЭПР продуктов окисления изученных металлопорфиринов, а также магниторезонансные параметры спектров ЭПР, полученных в аналогичных условиях, продуктов одноэлектронного окисления Mg и Zn ТФП [3]. Эти продукты в случае данных комплексов надежно идентифицированы [3, 6] как π -катион-радикалы, и параметры их спектров ЭПР могут служить тестом для отнесения спектров ЭПР исследованных продуктов к определенному типу парамагнитных центров.

Продукты одноэлектронного окисления Cd и Pb ТФП парамагнитны и характеризуются изотропными спектрами ЭПР (см. рисунок, 1, 2). В спектре кадмиевого комплекса проявляется слабо разрешенная сверхтонкая структура (СТС) из девяти линий с константой расщепления, равной 0,16 мТл, g -фактор равен $2,0028 \pm 0,0003$. Такие особенности спектра позволяют утверждать, что, как и в случае катион-радикалов Mg и Zn ТФП [3, 5], СТС является следствием взаимодействия неспаренного электрона, делокализованного в π -системе порфиринового макроцикла, с четырьмя эквивалентными ядрами азота порфириновой системы.

Спектр ЭПР продуктов одноэлектронного окисления Pb ТФП характеризуется бесструктурной синглетной линией. Сравнение параметров спектра для этого порфирина с параметрами для π -катион-радикалов Mg и Zn ТФП позволяет утверждать, что и в этом случае образуются π -катион-радикалы, компоненты сверхтонкой структуры которых уширены (возможно потому, что ион Pb(II) значительно выходит из плоскости порфиринового кольца [7], что, в свою очередь, приводит к понижению симметрии макроцикла) и не разрешаются.

В отличие от рассмотренных металлопорфиринов при аналогичных условиях эксперимента одноэлектронное окисление Pd ТФП не приводит к появлению спектра ЭПР.



Спектры ЭПР монокатионов Cd ТФП (1) и Pb ТФП (2); дикатионов Co ТФП (3) и Co ЭП (4) в CH_2Cl_2

При потенциалах, отвечающих второй стадии окисления, для всех рассмотренных порфиринов (включая магниевый и цинковый комплексы) наблюдается уменьшение интенсивности сигнала ЭПР, характеризующего монокатионы. В дальнейшем сигнал практически исчезает полностью. Этот факт, а также полярографические данные, показывающие, что разность между потенциалами второй и первой стадий окисления ($\Delta E = E_{1/2}^2 - E_{1/2}^1$) практически не зависит от природы металла [8], позволяют считать, что при потенциалах второй стадии окисления происходит отрыв электрона также из π -сопряженной системы с образованием диамагнитного дикатиона Me(II)P^{2+} . В противном случае величина ΔE существенно зависла бы от природы центрального металла.

Кобальтовые комплексы порфиринов парамагнитны с эффективным электронным спином $S=1/2$, соответствующим основной электронной конфигурации иона $\text{Co}^{++}(3d)^7$. Спектр ЭПР этих металлопорфиринов при 300 К не регистрируется вследствие малого времени спин-решеточной релаксации, характерной для конфигурации d^7 [9].

Полярографические исследования [2, 8] установили, что порфирины кобальта могут окисляться в три одноэлектронные стадии. При потенциалах первой стадии окисления мы не наблюдали сигнала ЭПР. Учитывая результаты работы [10] по исследованию спектров ЯМР монокатионов Co-октаэтилпорфина, можно считать, что в результате одноэлектронного окисления Co ЭП и Co ТФП отрыв электрона происходит с атомной $3d_z^2$ орбитали кобальта и образуются диамагнитные продукты с переходом конфигурации $\text{Co}(3d)^7$ в $(3d)^6$.

Продукты двухэлектронного окисления кобальтовых комплексов парамагнитны и им соответствуют спектры ЭПР, представленные на рисунке (спектры 3, 4). Из анализа спектров следует, что в случае Co ТФП существует СТС от взаимодействия неспаренного электрона с ядром Co, характеризующимся ядерным спином $I=7/2$, в случае же Co ЭП это взаимодействие отсутствует. Этот экспериментальный факт можно объяснить, считая, что в результате отрыва второго электрона, т. е. в дикатионе, неспаренный электрон локализуется на существенно разных молекулярных орбиталях π -системы комплекса. В случае Co ЭП $^{++}$ электрон локализован на орбитали симметрии a_{1u} , являющейся чисто лигандной, в случае Co ТФП $^{++}$ — на a_{2u} , характеризующейся делокализацией на ядро Co за счет сопряжения с p_z -орбиталью металла.

Серебряные комплексы порфиринов также парамагнитны, и их изотропный спектр ЭПР состоит из одиннадцати эквидистантных линий сверхтонкой структуры ($g=2,0054$; $a=2,22$ мТл). Наблюдающаяся структура может быть отнесена к взаимодействию неспаренного электрона с четырьмя эквивалентными ядрами азота ($I_N=1$) и ядром ^{109}Ag ($I_{\text{Ag}}=1/2$) [11]. Причем константы сверхтонкого взаимодействия связаны соотношением $a_{\text{Ag}}=2a_N$. Такое отнесение предполагает, что неспаренный электрон в комплексе находится на молекулярной разрыхляющей σ -орбитали, имеющей следующий вид [10]: $\Psi(b_{1g}) = \alpha(d_{x^2-y^2}) - \beta(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4)$, где $\sigma_i - sp^2$ — гибридная орбиталь i -го атома азота лиганда; $d_{x^2-y^2}$ — металлическая атомная $4d$ орбиталь; α и β — коэффициенты.

При потенциалах одноэлектронного окисления ($E_{1/2}^1 = 0,30$ В относительно насыщенного каломельного электрода) этот спектр ЭПР практически полностью исчезает. Отсутствие спектра ЭПР на этой стадии окис-

ления Ag ЭП можно объяснить двумя причинами, а именно: образованием диамагнитного продукта; образованием частицы с основным триплетным состоянием.

Исходя из результатов работы [12] по использованию магнитометрических измерений для перхлората Ag ОЭП⁺ и учитывая, что структура ОЭП близка к структуре ЭП (оба порфирина являются алкилпирролзамещенными), можно считать, что и в случае Ag ЭП в результате одно-электронного окисления происходит отрыв электрона из σ -системы комплекса и образуется диамагнитный продукт. Дальнейшее увеличение потенциалов электродов в этом случае не привело к образованию устойчивых парамагнитных продуктов окисления.

Список литературы

1. Wolberg A., Manassen J. // Inorg. Chem. 1970. V. 9. № 8. P. 2365.
2. Wolberg A., Manassen J. // Journ. Amer. Chem. Soc. 1970. V. 92. № 3. P. 2982.
3. Глазков Ю. В., Журавлев А. Г., Кузовков П. В., Шульга А. М. // ЖПС. 1973. Т. 18. № 1. С. 117.
4. Врублевский А. И., Круглик Е. К., Стополянская Л. В., Глазков Ю. В., Бытева И. М. // ЖПС. 1980. Т. 33. № 3. С. 517.
5. Глазков Ю. В., Кузовков П. В., Рябцев А. Н. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1972. № 3. С. 39.
6. Fajer J., Borg D. C., Forman A., Felton R. H., Vegh L., Dolphin D. // Ann. N. Y. Acad. Sc. 1973. V. 206. P. 349.
7. Schaffer A. M., Gouterman M. // Teor. Chim. Acta. 1970. V. 18. № 1. P. 1.
8. Stanienda A., Biebl G. // Z. physik. Chem. Neue Folge. 1967. B. 52. № 6. S. 254.
9. Керрингтон А., Мак-Лечлан Э. Магнитный резонанс и его применение в химии. М., 1970. С. 42.
10. Dolphin D., Forman A. // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 1971. V. 68. № 4. P. 614.
11. Kneubuhl F. K., Koski W. S., Caughey W. S. // Journ. Amer. Chem. Soc. 1961. V. 83. № 10. P. 1607.
12. Kadish K., Davis D. G., Fuhrhop J. H. // Angev. Chem. 1972. V. 84. № 6. P. 1072.

Поступила в редакцию 25.05.86.

УДК 621.039

*В. В. ХОДАСЕВИЧ, В. В. УГЛОВ,
М. В. ГОЛЬЦЕВ, А. Ф. СЫЩЕНКО*

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СТРУКТУР В ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ ИОННО-ИМПЛАНТИРОВАННОГО НИКЕЛЯ

В последние годы поверхность материала стала объектом широких исследований в связи с тем, что свойства поверхностных слоев зачастую определяют эксплуатационные качества и долговечность изделия в целом. Метод ионной имплантации, являясь на микроскопическом уровне активным и неравновесным процессом, позволяет получать материалы с составом и структурой, недостижимыми другими, например, металлургическими способами [1].

При выборе легирующих элементов для создания сплавов с повышенными свойствами, в частности прочностью и износостойкостью, рекомендуют [2] исходить из значений энергий решеток этих элементов и образовавшихся на их основе твердых растворов.

Основной проблемой направленного изменения свойств в результате легирования приповерхностных областей методом ионной имплантации является установление связи между дозой облучения ионами, структурой и фазовым составом поверхностного слоя.

Выбрав в качестве основы сплава никель, свойства которого хорошо известны, из графика Даркен — Гурри, представляющего собой графическое изображение условий Юм — Розери [1, 3], мы видим, что легирующие элементы, находящиеся вне эллипса, главная ось которого составляет 15 % радиуса атома никеля, а малая ось $\pm 0,4$ единицы электроотрицательности, в обычных условиях с никелем твердых растворов не образуют.

Однако если эти элементы (золото, тантал, гафний и олово) имплантировать в никель, то, как показано в работе [4], они образуют метастабильный твердый раствор. Этот экспериментальный факт позволил Сунду сформулировать эмпирическое правило, согласно которому твердые растворы при ионной имплантации будут образовываться, если радиусы имплантированных атомов отличаются на -15 — $+40$ % от радиуса никеля, а электроотрицательность их на величину $\pm 0,7$.

Представляло интерес проверить эту концепцию для случая имплантации ионов мышьяка в никель. Отметим, что никель и мышьяк имеют гранецентрированную кубическую и ромбоэдрическую кристаллические решетки, т. е. они не изоморфны, и параметры решетки — 0,352 и 0,413 нм соответственно. Растворимость As в Ni, как это следует из диаграммы состояния никель-мышьяк [5], в твердом состоянии при 1 200 К составляет 4,4 % ат и имеется область гомогенности промежуточной фазы со структурой β —Ni₅As₂, содержащей 27 % ат мышьяка. При комнатной температуре растворимость мышьяка в никеле, по-видимому, близка к нулю, что связывается с невыполнением условия Юм—Розери об изоморфности кристаллических решеток Ni и As [3].

Исследования проводились на образцах никеля чистоты 99,998 в виде тонких (100 нм) пленок. Облучение ионами мышьяка осуществлялось на установке типа Lintott при ускоряющем напряжении 60 кВ и плотности тока 200 мкА/см². Дозы облучения варьировались в интервале 10^{15} — 10^{17} ион/см². Нагрев образцов за счет энергии, передаваемой во время облучения и оцененной, согласно [6], не превышал 660 К.

Общую концентрацию мышьяка в имплантированном слое и ее распределение по поверхности образца никеля изучали с использованием растрового электронного микроскопа с микроанализатором (МРСА) РЭММА-200 при ускоряющем напряжении 20—30 кВ и метода обратного резерфордского рассеяния (ОР) ионов гелия с энергией 1,6 МэВ. Изменение концентрации As в зависимости от дозы облучения показано на рис. 1.

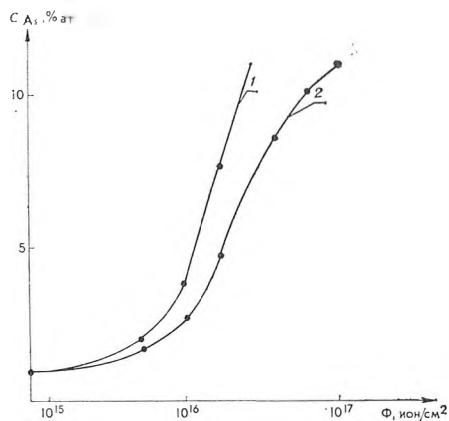


Рис. 1. Изменение концентрации мышьяка в имплантированном слое никеля в зависимости от дозы облучения:

1 — расчет; 2 — эксперимент

Общее содержание мышьяка в имплантированном слое, по данным ОР и МРСА, в интервале доз облучения $1 \cdot 10^{15}$ — $1 \cdot 10^{17}$ ион/см² изменяется от 1 до 11 % ат (см. рис. 1). При этом максимальная слоевая концентрация As на глубине, соответствующей проективному пробегу R_p , изменяется при этих же дозах облучения от 1,7 до 18 % ат. Следовательно, концентрация As в имплантированном слое заметно превышает предел его растворимости по сравнению с диаграммой фазового равновесия Ni—As [5].

Для изучения структурного состояния никеля, содержащего ионы мышьяка, использовали просвечивающую электронную микроскопию и электронографию в сочетании с данными ОР. На электронограммах,

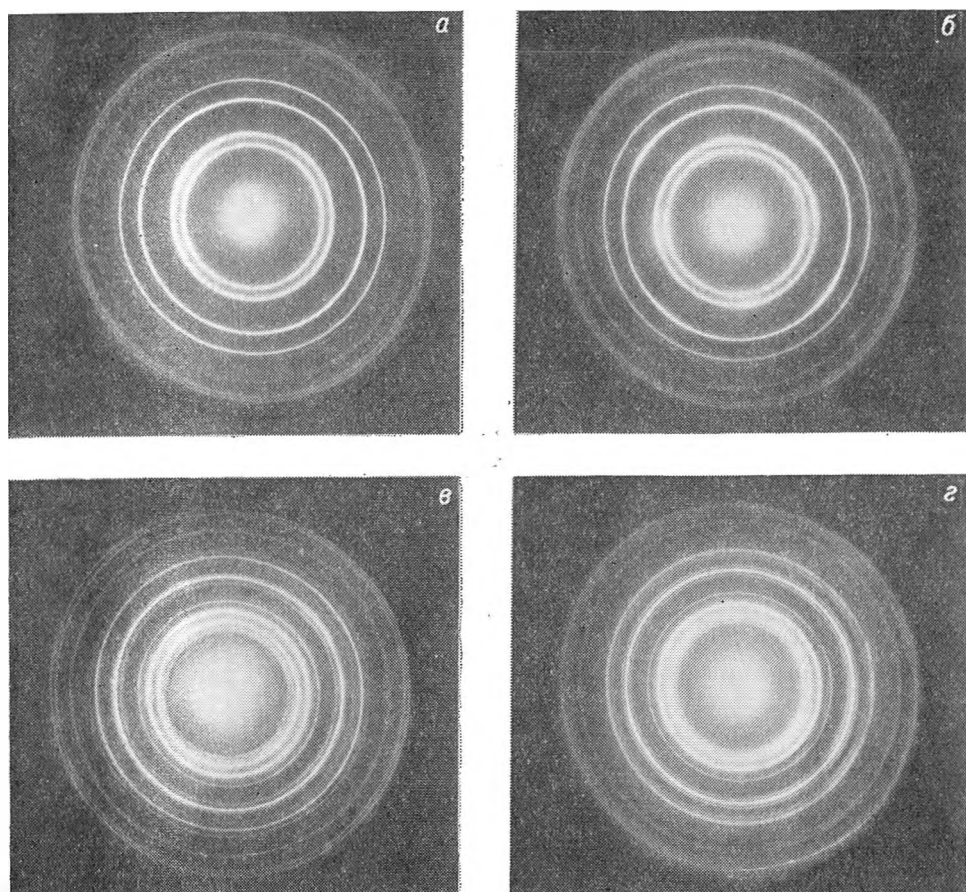


Рис. 2. Электронограммы структуры никеля, имплантированного ионами мышьяка дозами:

а — 10^{15} ; б — 10^{16} ; в — $2 \cdot 10^{16}$ и г — $4 \cdot 10^{16}$ ион/см²

снятых с образцов никеля, имплантированных ионами As до доз 10^{16} ион/см² (4,5 % ат As), видны четкие дифракционные линии (рис. 2, а, б), принадлежащие никелю, параметр ГЦК-решетки которого соответствует равновесной величине. При дозе облучения $2 \cdot 10^{16}$ ион/см² (7,9 % ат As) на электронограмме (рис. 2, в) появляются слабые дополнительные линии, которые могут быть отнесены к соединению β -Ni₃As₂. С увеличением дозы облучения до $4 \cdot 10^{16}$ ион/см² (12,9 % ат As) и выше на электронограммах (рис. 2, г), кроме дифракционных линий, принадлежащих никелю, имеются достаточно четкие рефлексы, которые уверенно можно приписать ГПУ-фазе со структурой β -Ni₃As₂.

Таким образом, можно считать, что при дозах облучения 10^{15} — 10^{16} ион/см² имплантированный мышьяк находится в метастабильном твердом растворе никеля. Одним из возможных механизмов образования метастабильных твердых растворов является процесс замещения при столкновении [7]. Условия замещения в соответствии с подходом, описанным в работе [7], оцениваются из следующих соображений. Предполагается, что потеря энергии ионами происходит в результате их упругого взаимодействия с атомами решетки. Максимальная энергия, полученная атомом, обладающим массой M_2 , при столкновении с ионом, характеризующимся массой M_1 и энергией E_i , определяется известным выражением [1]: $T = E_i \cdot 4M_1 \cdot M_2 / (M_1 + M_2)^2 = E_i \alpha$. Предполагается также, что атом твердого тела будет замещен, если кинетическая энергия T , полученная им при соударении, будет больше пороговой энергии замещения E_d . Рассеянный ион будет захвачен образованной вакансией, если оставшаяся

кинетическая энергия ($E-T$) будет меньше пороговой энергии захвата E_c . Иными словами, условия замещения при столкновении будут определяться неравенствами типа: $E > E_d/\alpha$, $E < E_c/(1-\alpha)$.

При имплантации ионов мышьяка ($M_1=74,9$) в никель ($M_2=58,7$), принимая $E_d=E_c=25$ эВ и используя предложенную в работе [7] модель, легко определить, что в нашем случае замещения при столкновении возможны, если энергия ионов мышьяка ($\alpha=0,98$) в конце пробега составит ≥ 25 эВ.

При дозе облучения $2 \cdot 10^{16}$ ион/см² и выше наблюдается распад пересыщенного метастабильного раствора с образованием мелкодисперсных выделений второй фазы, которые представляют собой соединения арсенида никеля со структурой β -Ni₅As₂.

Список литературы

1. Ионная имплантация / Пер. с англ.; Под ред. О. П. Елютина. М., 1985.
2. Гольцев В. П., Данилькевич М. И. // Материаловедение в машиностроении. Минск, 1983.
3. Hume-Rothery W., Smallman R. E., Haworth C. W. The structure of Metals and Alloys. London, 1969. P. 329.
4. Sood D. K., Dearnaley G. // Radiat. Eff. 1978. V. 39. P. 157.
5. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. М., 1962.
6. Sigmund P. // Phys. Rev. 1969. V. 184. № 2. P. 383.
7. Brice D. K. // Inst. Phys. Conf. Ser. 1976. V. 28. P. 334.

Поступила в редакцию 07.04.86.

УДК 539.12.04

В. П. ГОЛЬЦЕВ, С. И. ЖУКОВА, Т. М. МАСЮК

ВЛИЯНИЕ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЮРАЛЮМИНИЯ

Преимущества ионной имплантации делают этот метод весьма перспективным для модификации физических свойств металлов и сплавов, контролируемых состоянием поверхности. На широком круге материалов продемонстрирована возможность целенаправленного изменения таких характеристик, как износостойкость, усталостная прочность [1], однако положительный эффект наблюдается не для любых комбинаций ион—мишень и режимов облучения. Использование метода ионной имплантации ставит перед исследователями множество вопросов, связанных с интерпретацией результатов, поскольку в каждом случае требуется выяснение механизма, ответственного за наблюдаемые эффекты.

В настоящей работе исследовалось влияние имплантации ионов сурьмы на процесс установившейся ползучести и микротвердость алюминиевого сплава Д16. После механической обработки образцы отжигались при $T=720$ К, а затем подвергались химической полировке. Имплантация ионов сурьмы с энергией 35 кэВ и плотностью ионного тока 9 мкА/см² осуществлялась в непрерывном режиме на ускорителе ИЛУ-4 до дозы облучения 10^{17} ион/см². Согласно [2], проецированный пробег и страгглинг ионов сурьмы равны 23 и 6,8 нм соответственно.

Стадия установившейся ползучести в условиях четырехточечного изгиба изучалась при температуре 600—700 К и напряжении 2—15 МПа на установке, описанной в [3]. Микротвердость определялась с помощью ПМТ-3 при нагрузке 0,1—2 Н.

Для всех исследованных образцов скорость установившейся ползучести $\dot{\epsilon}$ в избранном режиме деформации хорошо описывается уравнением Виртмана: $\dot{\epsilon} = A\tau^n \exp(-U/kT)$, где U — энергия активации установившейся ползучести; n — параметр, характеризующий чувствительность скорости ползучести к напряжению τ ; A — константа, зависящая от свойств материала.

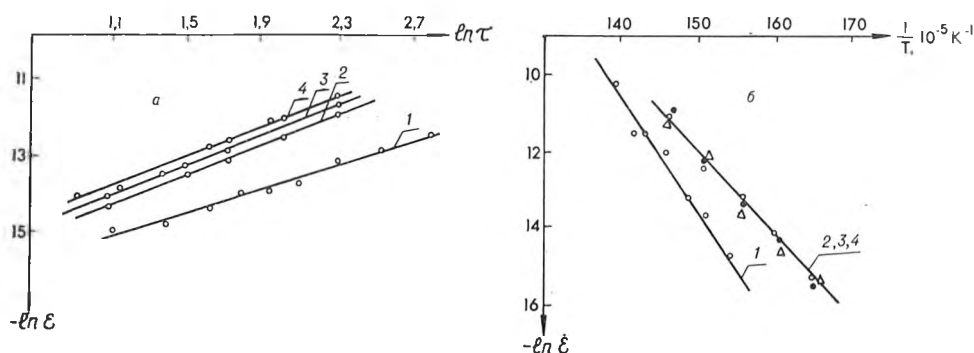


Рис. 1. Зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения (а) и температуры (б) исходных и имплантированных сурьмой образцов при дозе имплантации: 1 — 0; 2 — $2 \cdot 10^{16}$; 3 — $6 \cdot 10^{16}$; 4 — 10^{17} ион/см²

Из приведенной на рис. 1 зависимости скорости ползучести от напряжения и температуры следует, что после имплантации наблюдается значительное увеличение скорости ползучести. Так, например, при $\tau = 10$ МПа $\epsilon_{\text{импл}}/\epsilon_{\text{неимпл}} = 4$. Величина деформации, накапливаемая на установившейся стадии, для имплантированных образцов приблизительно на порядок больше, чем для исходных. Уменьшение величины энергии активации ползучести и увеличение чувствительности скорости ползучести к напряжению также свидетельствует о снижении сопротивления ползучести после имплантации ионов сурьмы (см. таблицу).

Разупрочнение имплантированных образцов проявляется и в уменьшении их микротвердости H , причем максимальный эффект наблюдается при малых глубинах проникновения индентора h (рис. 2). Относительное изменение $\Delta H/H_0$ составляет 70 % для $h = 5$ мкм.

Следует отметить, что доза имплантации в рассмотренном интервале $2 \cdot 10^{16} - 10^{17}$ ион/см² слабо влияет на изменение параметров установившейся ползучести и микротвердости исследуемого сплава.

Аналогичное снижение прочностных свойств обнаружено при радиационном воздействии на структуру и механические свойства сплавов Ni—Be и X20H78TiOр, облученных нейтронами, наблюдалось в [5]. Структурные исследования, проведенные авторами, показали, что облучение приводит к разрушению упрочняющих выделений.

Для объяснения обнаруженных в настоящей работе эффектов разупрочнения изучено распределение примесей до и после имплантации ионов сурьмы в дюралюминий методом резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия с энергией 1,4 МэВ и рентгеноспектрального микроанализа. Из приведенных на рис. 3 спектров РОР для исходных образцов и после облучения дозой 10^{17} см⁻² видно, что в результате имплантации уменьшается содержание меди и кислорода, который находился в необлученных образцах на поверхности, возможно, в связанном состоянии Al_2O_3 .

Исследуемый алюминиевый сплав Д16 является сложной многокомпонентной системой (4,5 % Cu; 1,6 % Mg; 0,4 % Mn; 0,3 % Fe; <0,1 % Si; остальное — Al). После предварительного гетерогенизирующего отжига исходные образцы содержали выделения избыточных упрочняющих фаз, средний размер которых составлял 9 мкм.

Параметры стадии установившейся ползучести сплава Д16, имплантированного сурьмой

Доза имплантации, ион/см ²	U , эВ	n
0	$2,34 \pm 0,03$	$1,6 \pm 0,1$
$2 \cdot 10^{16}$	$1,88 \pm 0,03$	$2,0 \pm 0,1$
$6 \cdot 10^{16}$	$1,90 \pm 0,03$	$2,1 \pm 0,1$
10^{17}	$1,88 \pm 0,03$	$2,0 \pm 0,1$

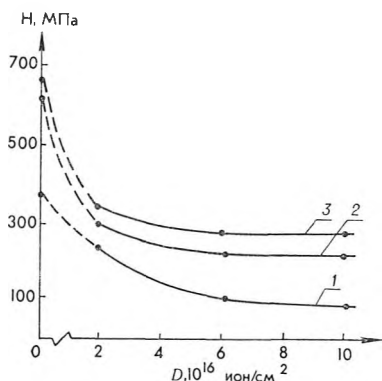


Рис. 2. Дозовая зависимость при различных глубинах проникновения индентора:

1 — $h = 5$; 2 — 7; 3 — 9 мкм

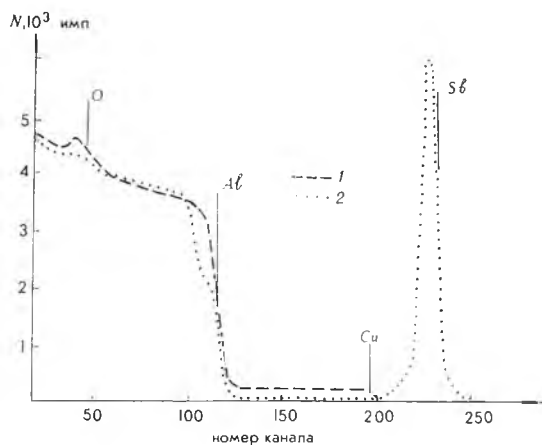


Рис. 3. Спектры резерфордского обратного рассеяния ионов гелия для исходного образца (1) и после имплантации 10^{17} Sb⁺/см² (2)

Рентгеноспектральный микроанализ показал, что медь и железо, находящиеся в исходных образцах в стабильных соединениях (возможно, FeAl_3 , CuAl_2 и CuMgAl_2), в имплантированных образцах диффундируют в глубь от поверхности: интенсивность характеристического излучения CuK_α и FeK_α для облученных образцов уменьшилась на порядок в области твердого раствора и примерно в пять раз в области упрочняющих выделений. Кроме того, размеры включений уменьшились почти в два раза по сравнению с необлученными образцами. Распределение сурьмы по образцу равномерное с уровнем гомогенности 12 %. Эти результаты несколько отличаются от данных, приведенных в [6], где имплантация ионов сурьмы с энергией 200 кэВ в алюминий технической чистоты вызывала диффузию меди и железа от поверхности образца и к ней соответственно.

Таким образом, обнаруженный нами эффект разупрочнения алюминиевого сплава Д16, имплантированного сурьмой, можно связать с частичным разрушением включений второй фазы и последующей диффузией основных легирующих примесей от поверхности образца в глубь кристалла.

Список литературы

1. Ионная имплантация // Под ред. Дж. К. Хирвонена. М., 1985.
2. Буренков А. Ф., Комаров Ф. Ф., Кумахов М. А., Темкин М. М. Таблицы параметров пространственного распределения ионно-имплантированных примесей. Минск, 1980.
3. Гуманский Г. А., Фишер А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1975. № 2. С. 92.
4. Афанасьев В. Д., Гофман Ю. И., Степина Е. И., Цымбал В. А. Радиационные эффекты в металлах и сплавах. Киев, 1976. С. 18.
5. Гринчук П. П., Лобода Е. М. // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Топливные и конструкционные материалы. М., 1976. Вып. 1(4). С. 26.
6. Madakson P. B. // Journ. Appl. Phys. 1984. V. 55(9). P. 3308.

Поступила в редакцию 15.09.86.

Б. А. БЕЗУХ, М. Н. ДОЛГИХ,
Г. Г. КРЫЛОВ, И. А. ТИМОФЕЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЛАКОВ

Для исследования маломасштабных яркостных неоднородностей облаков, атмосферы и подстилающих поверхностей необходима радиометрическая аппаратура высокого разрешения и чувствительности, работающая в широком спектральном диапазоне. Серийно такие приборы не выпускаются, поэтому для проведения подобных исследований разработан и изготовлен специальный радиометр «Смог-2М» [1] (рис. 1).

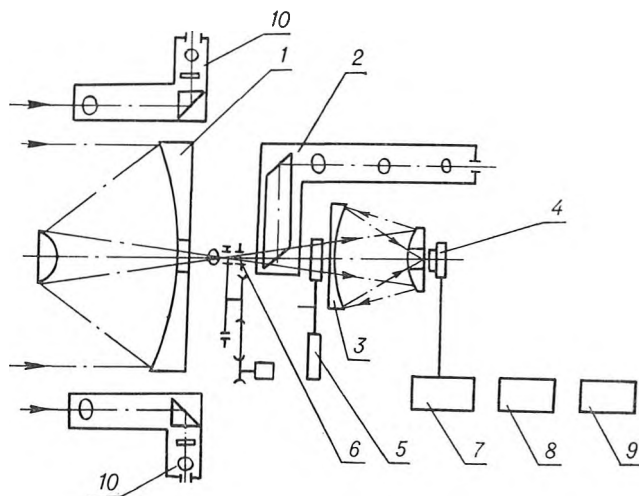


Рис. 1. Блок-схема инфракрасного радиометра «Смог-2М»

Входной объектив 1 прибора двухзеркальный, сферический, системы Кассегрена с относительным отверстием 1 : 5. Излучение от объекта, наведение на который осуществляется с помощью визира 2, фокусируется дополнительным объективом 3 на приемную площадку приемника излучения 4 (пирозлектрический приемник с интегральным предусилителем МГ-30). Перед объективом 3 установлена турель с инфракрасными фильтрами 5 (табл. 1). Опорные излучатели — зачерненные лопасти модулятора 6, расположенного в термостате. Электрический сигнал с приемника, пропорциональный разности излучений исследуемого объекта и опорного излучателя, поступает на полосовой усилитель 7, синхронно детектируется блоком 8 и после интегрирования (блок 9) поступает на регистратор (самописец КСП-4). В приборе использованы также внешние визиры 10.

Таблица 1

Параметры инфракрасных фильтров

$\lambda_{ц}, \text{ мкм}$	2,36	3,7	4,3	10,3
$B_0, \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{стер} \cdot \text{мкм}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$2,52 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
$K, \text{ Вт/В} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{стер} \cdot \text{мкм}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$

Регистрируемый поток радиации ограничивался по длинам волн с помощью ИК фильтров, а энергетическая яркость объекта определялась выражением [2]:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\lambda, T) \tau_\lambda d\lambda, \quad (1)$$

где $L(\lambda, T)$ — функция Планка; τ_λ — пропускание фильтра на данном участке $\Delta\lambda$; λ — длина волны; T — температура, К.

Градунровка радиометра проводилась по методике [2]. Эталонным излучателем служила плоская модель абсолютно черного тела. Нагреватель мощностью ~ 2 КВт обеспечивал нагревание тела до 500 К. Поверхность покрывалась шерлаком в два слоя, коэффициент излучения брался равным единице.

При фиксированной температуре и для каждого фильтра рассчитывалась $L_{\lambda_{\Phi}}^{AЧТ}$ по формуле:

$$L_{\lambda_{\Phi}}^{AЧТ} = \frac{\sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda}^{AЧТ} \Delta\lambda \tau_{\lambda}}{\sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_{\lambda}}. \quad (2)$$

Здесь $L_{\lambda}^{AЧТ}$ — функция Планка для центра выбранного участка пропускания фильтра. В конечном счете соотношение для определения яркости исследуемого излучения фона (полное заполнение поля зрения прибора излучателем) выглядит следующим образом:

$$L_{\lambda_i} = L_0 \pm k_i U_i, \quad (3)$$

где L_{λ_i} — спектральная плотность энергетической яркости фона; k_i — коэффициент пропорциональности (константа для данного фильтра); L_0 — спектральная плотность энергетической яркости опорного излучателя (константа для данного фильтра); U_i — показания прибора, мВ.

Результаты градуировки обрабатывались методом наименьших квадратов, т. е. отыскивалось уравнение прямой, средний квадрат отклонения от которой экспериментальных точек минимален.

В соответствии с этим методом параметры уравнения (3) запишутся в виде:

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n N_i L_i - \sum_{i=1}^n N_i L_i}{\sum_{i=1}^n N_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^2}; \quad (4)$$

$$L_0 = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^2 \sum_{i=1}^n L_i - \sum_{i=1}^n N_i \sum_{i=1}^n N_i L_i}{n \sum_{i=1}^n N_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n N_i \right)^2} \quad (5)$$

при дисперсии

$$\gamma^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (L_i - k_i U_i - L_0)^2 \right]. \quad (6)$$

Здесь n — количество экспериментальных точек; N_i — показания радиометра при установке i -го значения температуры калибровочного АЧТ, соответствующего измеряемой яркости L_i .

Таблица 2

Параметры АЧТ			Показания радиометра
$t_i, ^\circ\text{C}$	T_i, K	$R_{\lambda_{\text{эф}}}^{\text{АЧТ}},$ $\text{Вт/м}^2 \cdot \text{стер} \cdot \text{мкм}$	$N_i, \text{мм}$
20,8	293,8	8,89	—21
22	295	9,07	—17,5
24	297	9,37	—12,5
25	298	9,53	—7
26	299	9,68	—4
31	304	10,5	14
32,5	305,6	10,7	18,5
37,5	310,5	11,5	36,4

В табл. 2 представлены экспериментальные точки, полученные в процессе градуировки радиометра на фильтре с $\lambda_{\text{ц}}=10,3$ мкм и приведенные к единым условиям измерений.

В результате расчета, который осуществлялся по программе, составленной для вычислительного комплекса ДВК-2М, получена аппроксимирующая функция:

$$L=0,045N+9,87, \quad (7)$$

где N выражено в мВ. Дисперсия оказалась равной

$$\gamma^2=7,46 \cdot 10^{-4}, \quad (8)$$

т. е. среднее квадратичное отклонение экспериментальных данных от аппроксимирующей линии $\gamma \sim 0,03$ (единиц яркости).

Полученные данные свидетельствуют о несущественном статистическом разбросе показаний при такой процедуре градуировки. Действительно, даже при минимальной из рассмотренного диапазона температур яркости калибровочного АЧТ относительная погрешность измерений радиометром составила $\sim 1\%$.

Расчет погрешностей измерений с учетом собственных шумов аппаратуры дал величину $\sim 2\%$, что при температуре 300 К составляет $1,7 \cdot 10^{-4}$ Вт/м²·стер·мкм.

Пороговая чувствительность по спектральной плотности энергетической яркости и температуре определялась по формуле:

$$\varepsilon(L) = \Delta L(T) \frac{N_{\text{ш}}}{\Delta N_{\text{Б}}}; \quad \varepsilon(T) = \Delta T \frac{N_{\text{ш}}}{\Delta N_{\text{Б}}} \quad (9) - (10)$$

и оказалась равной $3,1 \cdot 10^{-2}$ Вт/м²·стер·мкм ($\Delta T=0,25$ К) для источника излучения 290 К ($N_{\text{ш}}$ — шум регистрирующей аппаратуры; $\Delta N_{\text{Б}}$ — приращение сигнала на выходе системы, соответствующее $\Delta L(T)$ или ΔT), В.

Измерения яркости различных облачных ситуаций в приведенных длинах волн (см. табл. 1) проводились в Средиземном море и Атлантическом океане в дневное и ночное время.

На рис. 2 показана схема съемки относительно солнца, при этом $h_{\text{г}}$ менялось в пределах $-5 \div +20^\circ$ при заданных $\varphi=0; 5; 10; 90; 180$. Высота солнца $h_{\odot}$ менялась от 0° до 85° . Одновременно осуществлялось фотографирование облачной ситуации для конкретной пространственной привязки и идентификации исследуемых облаков по их классификации [3].

Спектральная плотность энергетической яркости ($\lambda_{\text{ц}}=2,36$ мкм) моря и атмосферы при $h_{\odot}=40^\circ$ и различных направлениях наблюдения силь-

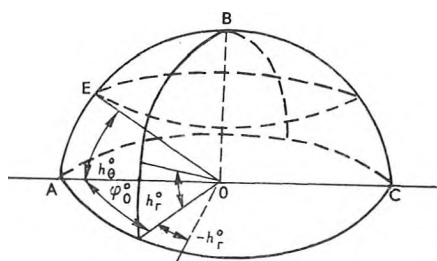
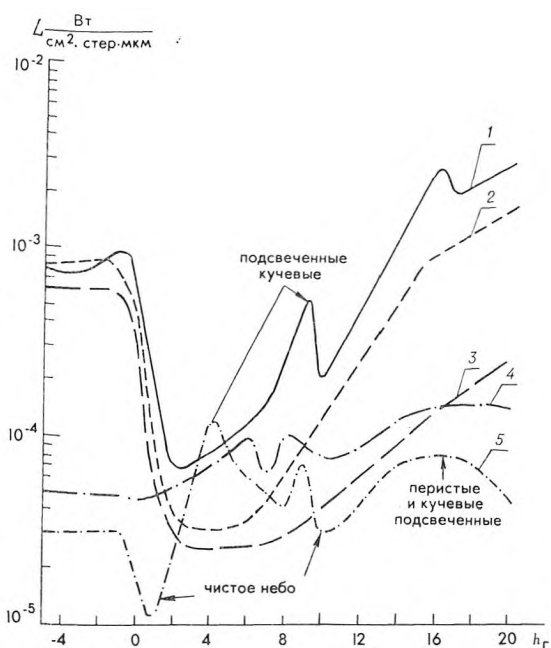


Рис. 2. Схема направлений измерений относительно солнца яркости различных облачных ситуаций

Рис. 3. Зависимость спектральной плотности энергетической яркости моря, атмосферы и облаков при различных углах наблюдения $\varphi=0; 5; 10; 90; 180$



но варьируется в зависимости от угла между направлением наблюдения и направлением на солнце (рис. 3). В области визирования морской поверхности эти вариации объясняются, по-видимому, вкладом в величину яркости отраженного солнечного излучения. При наблюдении неба диффузно рассеянное солнечное излучение дает небольшую добавку, а основной вклад в вариации яркости принадлежит облакам, попадающим в поле зрения радиометра.

В настоящее время такие спектры заложены в память ЭВМ БЭСМ-6 в виде банка данных фоновых ситуаций, что позволяет проводить их статистический и корреляционный анализ для выявления общих закономерностей формирования случайных яркостных полей в ИК диапазоне.

Список литературы

1. Безух Б. А. и др. Инфракрасные радиометры / Препринт ИФ АН БССР. Минск, 1983.
2. Холопов Г. К. // Радиация и облачность. Тарту, 1975.
3. Атлас облаков / Под ред. А. Х. Хригана, Н. И. Новожилова. Л., 1978.

Поступила в редакцию 15.09.86.

УДК 681.325

А. А. КОЛЯДА

ИНТЕРВАЛЬНО-МОДУЛЯРНЫЕ КОДЫ С ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК

В теории кодирования разработан широкий набор алгебраических кодов, предназначенных для обнаружения и исправления ошибок при хранении и передаче информации [1. С. 163—382]. Для контроля вычислительных устройств такие коды не пригодны [2. С. 107—108]. Среди позиционных арифметических кодов наибольшую известность получили АН коды и так называемые остаточные коды [3]. Идеи, положенные в основу этих кодов, нашли дальнейшее развитие в рамках системы остаточных классов (СОК) [4—6]. Алгоритмы декодирования кодов СОК, как правило, базируются на процедурах формирования интегральных характеристик кодов, наиболее трудоемких операциях модулярной арифметики. Это приводит к усложнению и снижению быстродействия декодирующей аппаратуры (см., например, [7]). В данной работе предпринимается попытка устранить отмеченный недостаток кодов СОК путем некоторой их модификации.

Рассмотрим систему модулей $m_1, m_2, \dots, m_k, q_1, \dots, q_n$, удовлетворяющую условиям: $(m_i, m_j) = 1, i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, k; (q_s, q_l) = 1, s \neq l; s, l = 1, 2, \dots, n; (m_i, q_l) = 1, i = 1, 2, \dots, k-1; l = 1, 2, \dots, n;$

$$m_k \geq 2p + k - 2, \quad (1)$$

где n, k, p — фиксированные натуральные числа ($n \geq 1, k \geq 2, p \geq 1$); и пусть: $V_i = \{0, 1, \dots, m_i - 1\}, i = 1, 2, \dots, k; W_l = \{0, 1, \dots, q_l - 1\}, l = 1, 2, \dots, n; V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{k-1} \times V_k \times W_1 \times \dots \times W_n; D(p) = \{-pM, -pM + 1, \dots, pM - 1\}, M = \prod_{i=1}^k m_i$. Тогда отображение $f: D(p) \rightarrow V$, ставящее в соответствие числу $A \in D(p)$ слово $a = f(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \bar{I}_a, \beta_1, \dots, \beta_n) \in V$, в котором $\alpha_i = |AM_i^{-1}|_{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $\beta_l = |A|_{q_l}$ ($l = 1, 2, \dots, n$), а $\bar{I}_a$ выбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$A = \sum_{i=1}^{k-1} M_i \alpha_i + I_a M, \quad (2)$$

где

$$I_a = \begin{cases} \bar{I}_a, & \text{если } 0 \leq \bar{I}_a < p, \\ \bar{I}_a - m_k, & \text{если } p \leq \bar{I}_a < m_k; \end{cases} \quad (3)$$

$M_i = M/m_i$, через $|X|_d$ обозначается наименьший неотрицательный вычет по модулю d , сравнимый с величиной X ; определяет некоторый код $C \in V$, который назовем интервально-модулярным кодом с информаци-

онными модулями $m_1, m_2, \dots, m_k$ и контрольными модулями $q_1, q_2, \dots, q_n$ (ИМ код).

Как известно, корректирующие возможности кодов с исправлением ошибок зависят от значения их кодового расстояния [1. С. 26—28]. Для задания на множестве V метрики определим в нем операцию сложения следующим образом. Суммой двух слов $a_1 = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(1)}, \bar{I}_{a_1}, \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)})$ и $a_2 = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(2)}, \bar{I}_{a_2}, \beta_1^{(2)}, \dots, \beta_n^{(2)})$ из V назовем слово $a_3 = (\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(3)}, \bar{I}_{a_3}, \beta_1^{(3)}, \dots, \beta_n^{(3)}) \in V$ такое, что $\alpha_i^{(3)} = |\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}|_{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$); $\beta_l^{(3)} = |\beta_l^{(1)} + \beta_l^{(2)}|_{q_l}$ ($l = 1, 2, \dots, n$) и

$$\bar{I}_{a_3} = |\bar{I}_{a_1} + \bar{I}_{a_2} + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}}{m_i} \right]|_{m_k},$$

где квадратные скобки употребляются для обозначения целой части чисел.

Легко проверить, что относительно введенной операции множество V является абелевой группой: нулевым элементом является слово $0 = (0, 0, \dots, 0)$, а противоположным по отношению к слову $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \bar{I}_a, \beta_1, \dots, \beta_n)$ будет слово

$$-a = (|\alpha_1|_{m_1}, |\alpha_2|_{m_2}, \dots, |\alpha_{k-1}|_{m_{k-1}}, |\bar{I}_a - n_a|_{m_k}, |\beta_1|_{q_1}, \dots, |\beta_n|_{q_n}), \quad (4)$$

где n_a — число ненулевых символов в последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$.

Для разности слов a_1 и a_2 справедлива формула

$$a_1 - a_2 = (|\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}|_{m_1}, |\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}|_{m_2}, \dots, |\alpha_{k-1}^{(1)} - \alpha_{k-1}^{(2)}|_{m_{k-1}}, |\bar{I}_{a_1} - \bar{I}_{a_2} + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}}{m_i} \right]|_{m_k}, |\beta_1^{(1)} - \beta_1^{(2)}|_{q_1}, \dots, |\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(2)}|_{q_n}). \quad (5)$$

Назовем весом $W(a)$ слова $a \in V$ число его ненулевых символов и определим расстояние между элементами a_1 и a_2 из V по формуле

$$d(a_1, a_2) = \max \{W(a_1 - a_2), W(a_2 - a_1)\}. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $d(a_1, a_2)$ удовлетворяют аксиомам расстояния.

Лемма. Если хотя бы один из первых k символов слова $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \bar{I}_a, \beta_1, \dots, \beta_n) \in V$ не равен нулю, то множество $\{I_a, \bar{I}_{-a}\}$, $(-a$ — элемент, противоположный по отношению к $a)$ содержит ненулевой символ.

Доказательство. Пусть a — слово, удовлетворяющее условию леммы. Предположим, что $I_a = 0$. Тогда число n_a ненулевых символов в последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ положительно и, согласно формулам (1) и (4), имеем $\bar{I}_{-a} = |\bar{I}_a - n_a|_{m_k} > 0$, что и доказывает лемму.

Теорема 1. Если контрольные модули ИМ кода таковы, что $Q > 2p$, $(Q = \prod_{l=1}^n q_l)$, то для кодового расстояния $d(C)$ ($d(C) = \min \{d(a_1, a_2)\}$ кода C имеет место формула

$$d(C) = n + k - \max \{S = j_0 + l_0 \mid 0 < \prod_{j=1}^{j_0} m_{ij} \prod_{l=1}^{l_0} q_{kl} \leq 2pM\}, \quad (7)$$

где максимум берется по упорядоченным по возрастанию наборам индексов $(i_1, i_2, \dots, i_{j_0}) \subseteq \{1, 2, \dots, k-1\}$ и $(k_1, k_2, \dots, k_{l_0}) \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — кодовые слова, причем $a_1 \neq a_2$ и пусть A_1 и A_2 — соответствующие им числа из $D(p)$ (см. форму-

лу (2)). Тогда из формул (2), (5), (6) и доказанной леммы следует, что $d(a_1, a_2) = n + k - S_0$, где S_0 — количество модулей ИМ кода, исключая m_k , которым кратно число $|A_1 - A_2|$. Теперь видим справедливость формулы (7), если учесть, что $|A_1 - A_2| \in [1, 2pM] \subseteq [1, MQ]$.

Из теоремы 1 и общей теории кодирования [5, 6] вытекает следующая.

Теорема 2. Корректирующий ИМ код, для которого $n=1, q_l > m_i$ (для всех $i=1, 2, \dots, k$); $n=2, q_l > m_i$ (для всех $i=1, 2, \dots, k$ и $l=1, 2$), обнаруживает (исправляет) любую аддитивную ошибку веса 1.

Рассмотрим ИМ код, для которого $n=2$ и

$$q_l > m_i \quad (i=1, 2, \dots, k; \quad l=1, 2). \quad (8)$$

Предположим, что в результате обработки числовой информации слово $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, I_a, \beta_1, \beta_2) \in V$, в котором один из символов может быть искаженным. Приводимая ниже процедура декодирования слова a позволяет обнаружить и исправить любые такие искажения.

1. Вычислим величины

$$S_l = \left| \beta_l + \sum_{i=1}^{k-1} M_i \alpha_i \right|_{q_l} + |I_a M|_{q_l}, \quad l = 1, 2, \quad (9)$$

где I_a определяется по формуле (3).

Если $S = (S_1, S_2) = (0, 0)$, то декодируемое слово, очевидно, является кодовым. С другой стороны, если a содержит ошибку, то благодаря условию (8) это неизбежно приведет к отличию от нуля, по меньшей мере, одной из компонент величины S . Таким образом, S представляет собой синдром рассматриваемого кода.

2. Если одна из компонент синдрома (например, S_1) не равна нулю, а другая (S_2) равна нулю, то контрольный символ β_1 искажен и, согласно (9), истинное значение его β'_1 восстанавливается по формуле

$$\beta'_1 = \left| \sum_{i=1}^{k-1} M_i \alpha_i + I_a M \right|_{q_1} = |\beta_1 - S_1|_{q_1}.$$

3. Случай $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0$ соответствует искажению одного из информационных символов. Для локализации и исправления такой ошибки достаточно:

а) для каждого $j=1, 2, \dots, k$ в формуле (2) заменить j -й символ a на неизвестное X_j и затем найти его по контрольным модулям, используя формулы (2) и (9):

$$|X_j|_{q_l} = \left| M_j^{-1} \left(\beta_l - \sum_{i=1}^{k-1} M_i \alpha_i - I_a M \right) \right|_{q_l} = |M_j^{-1} S_l + \alpha_j|_{q_l} \\ (j = 1, 2, \dots, k-1; \quad l = 1, 2),$$

$$|X_k|_{q_l} = \left| M^{-1} \left(\beta_l - \sum_{i=1}^{k-1} M_i \alpha_i \right) \right|_{q_l} = |M^{-1} S_l + I_a|_{q_l}; \quad l = 1, 2;$$

б) если для некоторого $j_0 \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ выполняется $|X_{j_0}|_{q_1} = |X_{j_0}|_{q_2} = \alpha'_{j_0}$, причем $0 \leq \alpha'_{j_0} < m_{j_0}$, то заключаем, что искажен символ слова a с номером j_0 и правильным его значением является вычет α'_{j_0} . Аналогично, если величины I'_1 и I'_2 , определяемые соответственно вычетами $|X_k|_{q_1}$ и $|X_k|_{q_2}$ по формулам вида (3), совпадают, причем находятся в интервале $[-p-k+2, p)$, то принимаем, что искажен k -й символ слова a и его истинным значением будет $|I'_1|_{m_k}$.

Описанный алгоритм декодирования может быть выполнен за $2 + \lceil \log_2 k \rceil$ модульных операций [8].

Исследования показали, что в интервально-модулярных системах счисления операция расширения кода выполняется значительно проще,

чем в СОК. Это позволяет использовать для корректирующих ИМ кодов предельно простые проверочные соотношения и алгоритмы декодирования.

Список литературы

1. Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Инагаки Я. Теория кодирования. М., 1978.
2. Журавлев Ю. П., Котелюк Л. А., Циклинский Н. И. Надежность и контроль ЭВМ. М., 1978.
3. Дадаев Ю. Г. Теория арифметических кодов. М., 1981.
4. Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968.
5. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность ЦВМ. М., 1973.
6. Mandelbaum D. M. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. V. 23. N. 1. P. 85.
7. Краснобаев В. А., Давыдов И. Б. Устройство для обнаружения ошибок в системе остаточных классов СОК: А. с. 1013957 СССР // БИ 1983. № 15.
8. Коляда А. А. Устройство для исправления ошибок в непозиционном коде: А. с. 1136165 СССР // БИ 1985. № 3.

Поступила в редакцию 10.03.86.

УДК 519.234.8

Т. Н. ДЫЛЬКО

ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОДИНАКОВОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДИХОТОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. При формировании группы экспертов по принципу согласованности мнений [1] возникает задача проверки гипотезы о равенстве распределений.

Например, группа экспертов проводит классификацию изделий в N классов (изделия 1-го сорта, 2-го и т. д.) при m -кратной экспертизе, причем классификация проводится независимо между экспертами и между экспертизами. Ответы j -го эксперта можно описывать набором независимых случайных величин следующим образом: $\alpha_{ts}^j = 1$ с вероятностью P_{ts}^j , если при s -й экспертизе изделие отнесено в t -й класс и $\alpha_{ts}^j = 0$ с вероятностью $1 - P_{ts}^j$ в противном случае.

Случайные величины $\{\alpha_{ts}^j, t = 1, \dots, N; s = 1, \dots, m\}$ при сделанных предположениях независимы в совокупности и представляют собой конечную последовательность независимых испытаний Бернулли, т. е. образуют люсиан [2].

В соответствии с методом, предложенным в [1] и подробно изложенным в [2], строится критерий для проверки гипотезы одинаковой распределенности, основанный на расстоянии между люсианами и содержащий некоторые коэффициенты. Возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять эти коэффициенты, чтобы функция распределения статистики была близка к предельной функции распределения (в пределах заданной точности)?

2. **Математическая постановка задачи.** Рассматривается последовательность n люсианов $A_j, j = 1, \dots, n, A_j = \{\alpha_{11}^j, \dots, \alpha_{N1}^j, \alpha_{12}^j, \dots, \alpha_{N2}^j, \dots, \alpha_{1m}^j, \dots, \alpha_{Nm}^j\}, N \geq 2$, где α_{ts}^j определены в п. 1. Проверяется гипотеза

$$H_0: P_{ts}^j = P_{ts}, t = 1, \dots, N, s = 1, \dots, m \text{ для любого } j. \quad (1)$$

(В рассмотренном выше примере это соответствует согласованности мнений экспертов, т. е. тому, что вероятность классификации изделия в один класс одинакова для всех экспертов). Рассматривается асимпто-

тика $n = \text{const}$, $m \rightarrow \infty$, т. е. число параметров P_{ts} растет вместе с объемом выборки.

3. Построение критерия. При построении статистики для проверки гипотезы (1) используется расстояние между ляснанами: $d(A_k, A_q) = \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^m |\alpha_{ts}^k - \alpha_{ts}^q|$, удовлетворяющее естественной системе аксиом [1].

Введем некоторые обозначения:

$$\gamma_{ts} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ts}^j \quad (2)$$

(в рассматриваемом примере это общее число голосов, отданных всеми экспертами за t -й класс при s -й экспертизе)

$$\beta_{ts} = \frac{2}{n-1} \left[\gamma_{ts} - \frac{\gamma_{ts}^2}{n} \right], \quad \xi_{ts}^{kq} = |\alpha_{ts}^k - \alpha_{ts}^q| - \beta_{ts}, \quad (3) - (4)$$

$$\eta_{ts} = \sum_{(k,q) \in G_1} c_{kq} \xi_{ts}^{kq}, \quad (5)$$

G_1 — множество, состоящее из $n_1 = \left[\frac{n}{2} \right]$ пар (k, q) , не имеющих общих элементов.

$$D\eta_{ts} = \sum_{i=1}^{n_1} c_{k_i q_i}^2 D\xi_{ts}^{k_i q_i} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} c_{k_i q_i} c_{k_j q_j} E\{\xi_{ts}^{k_i q_i} \xi_{ts}^{k_j q_j}\}, \quad (6)$$

$$D\xi_{ts}^{k_i q_i} = \left(2 - \frac{4}{n} \right) P_{ts} (1 - P_{ts}) - \frac{4(n-2)(n-3)}{n(n-1)} P_{ts}^2 (1 - P_{ts})^2, \quad (7)$$

$$E\{\xi_{ts}^{k_i q_i} \xi_{ts}^{k_j q_j}\} = \frac{-4}{n} P_{ts} (1 - P_{ts}) + \frac{8(2n-3)}{n(n-1)} P_{ts}^2 (1 - P_{ts})^2. \quad (8)$$

При практическом использовании величины (6) — (8) заменяются их несмещенными оценками, которые вычисляются аналогично [2]. Обозначим S_{ts} несмещенную оценку $D\eta_{ts}$. Тогда в соответствии с [2, 3] имеем следующую статистику для проверки (1):

$$\xi = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \eta_{ts}}{\left(\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N S_{ts} \right)^{1/2}}. \quad (9)$$

Как вытекает из работ [1, 2], распределение ξ при росте m сходится к стандартному нормальному распределению $\Phi(x)$. Обозначим $F_m(x) = P(\xi \leq x)$.

4. Ограничения на коэффициенты c_{kq} . Получим ограничения на коэффициенты c_{kq} , используя обобщенное неравенство Эссеена. Мы предлагаем выбирать коэффициенты c_{kq} таким образом, чтобы

$$\sup_x |F_m(x) - \Phi(x)| \leq \alpha^v, \quad (10)$$

где $0 < \alpha < 1$ — уровень значимости, задаваемый статистиком при проверке гипотезы (1) по распределению статистики ξ , $v \geq 1$. В противном случае гипотеза H_0 может быть необоснованно отвергнута или принята.

Для введенных в (5) случайных величин η_{ts} обобщенное неравенство Эссеена имеет вид:

Теорема [4. С. 139]. Пусть η_{ts} , $t=1, \dots, N$, $s=1, \dots, m$ — независимые случайные величины.

$$E\eta_{ts} = 0, E(|\eta_{ts}|^3) < \infty \text{ для } t=1, \dots, N, s=1, \dots, m. \quad (11)$$

$$\sigma_{ts}^2 = E\eta_{ts}^2 = D\eta_{ts}, \quad B_m = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \sigma_{ts}^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N D\eta_{ts}, \quad (12)$$

$$F_m(x) = P \left\{ B_m^{-1/2} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \eta_{ts} < x \right\}.$$

Тогда

$$\sup_x |F_m(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A \cdot \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N E(|\eta_{ts}|^3)}{(B_m)^{3/2}}, \quad (13)$$

где $A = 0,9051$.

Ясно, что (11) выполняется. Оценим сверху $E(|\eta_{ts}|^3)$:

$$\begin{aligned} E(|\eta_{ts}|^3) &\leq \sum_{i=1}^{n_1} |c_{k_i q_i}|^3 E\{|\xi_{ts}^{k_i q_i}|^3\} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_1} |c_{k_i q_i}| \times \\ &\times |c_{k_j q_j}|^2 E\{|\xi_{ts}^{k_i q_i}| |\xi_{ts}^{k_j q_j}|^2\} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j \neq s_1}}^{n_1} \sum_{s_1=1}^{n_1} |c_{k_i q_i}| \times \\ &\times |c_{k_j q_j}| |c_{k_{s_1} q_{s_1}}| \times E\{|\xi_{ts}^{k_i q_i}| |\xi_{ts}^{k_j q_j}| |\xi_{ts}^{k_{s_1} q_{s_1}}|\}, \end{aligned} \quad (14)$$

причем последняя сумма равна нулю, если $n < 6$.

Теорема 1. При $n \geq 6$ справедливы равенства:

$$E\{|\xi_{ts}^{kq}|^3\} = \sum_{i=0}^2 \sum_{l=0}^{n-2} |y_l^{(i)}|^3 C_{n-2}^l P_{ts}^l (1 - P_{ts})^{n-2-l} P(A_i^{kq}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E\{|\xi_{ts}^{kq}| |\xi_{ts}^{k_1 q_1}|^2\} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{l=0}^{n-4} |y_l^{(i,i)}| \times (l_j - l_i + y_l^{(i,i)})^2 \times \\ &\times C_{n-4}^l P_{ts}^l (1 - P_{ts})^{n-4-l} \times P(A_i^{kq}) P(A_j^{k_1 q_1}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E\{|\xi_{ts}^{kq}| |\xi_{ts}^{k_1 q_1}| |\xi_{ts}^{k_2 q_2}|\} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{s_1=0}^2 \sum_{l=0}^{n-6} |y_l^{(i,i,s_1)}| \times \\ &\times |l_j - l_i + y_l^{(i,i,s_1)}| \times |l_{s_1} - l_i + y_l^{(i,i,s_1)}| \times C_{n-6}^l P_{ts}^l \times \\ &\times (1 - P_{ts})^{n-6-l} P(A_i^{kq}) P(A_j^{k_1 q_1}) P(A_{s_1}^{k_2 q_2}), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A_i^{kq} : \alpha_{ts}^k + \alpha_{ts}^q = i, \quad i = 0, 1, 2, \quad l_i = \begin{cases} i, & i = 0, 1, \\ 0, & i = 2, \end{cases} \quad (18)-(19)$$

$$y_l^{(i)} = l_i + \tilde{y}_l^{(i)}, \quad y_l^{(i,i)} = l_i + \tilde{y}_l^{(i,i)}, \quad (20)$$

$$y_l^{(i,i,s_1)} = l_i + \tilde{y}_l^{(i,i+s_1)}, \quad \tilde{y}_l^{(i)} = -\frac{2}{n-1} \left[l + i - \frac{1}{n} (l+i)^2 \right],$$

$$P(A_0^{kq}) = (1 - P_{ts})^2, \quad P(A_1^{kq}) = 2P_{ts}(1 - P_{ts}), \quad P(A_2^{kq}) = P_{ts}^2. \quad (21)$$

Доказательство. Проведем для формулы (16). Формулы (15) и (17) получаются аналогично.

Введем обозначение:

$$z = \sum_{j=1}^n \alpha_{ts}^j, \quad j \neq k, k_1, q, q_1. \quad (22)$$

Тогда, учитывая (22), (2) — (4), имеем:

$$\xi_{ts}^{kq} = |\alpha_{ts}^k - \alpha_{ts}^q| - \frac{2}{n-1} \left[z + \alpha_{ts}^k + \alpha_{ts}^q + \alpha_{ts}^{k_1} + \alpha_{ts}^{q_1} - \right.$$

$$-\frac{1}{n} (z + \alpha_{ts}^k + \alpha_{ts}^q + \alpha_{ts}^{k_1} + \alpha_{ts}^{q_1})^2 \Big].$$

Ясно, что целочисленная случайная величина $z \in \{0, 1, \dots, n-4\}$. Поэтому случайная величина ξ_{ts}^{kq} при выполнении условий A_i^{kq} и $A_j^{k_1q_1}$ может принимать значения:

$$\xi_{ts}^{kq} = l_i - \frac{2}{n-1} \left[l + i + j - \frac{1}{n} (l + i + j)^2 \right] = y_l^{(i,j)},$$

$$l = 0, 1, \dots, n-4. \quad (23)$$

В силу определения множества G_1 , $P(A_i^{kq}, A_j^{k_1q_1}) = P(A_i^{kq}) P(A_j^{k_1q_1})$. Выразим β_{ts} из (23), подставим в выражение для вычисления $\xi_{ts}^{k_1q_1}$, вычислим $E\{|\xi_{ts}^{kq}| |\xi_{ts}^{k_1q_1}|^2\}$ по формуле полного математического ожидания и получим (16). (21) получаем, учитывая (18) и определение случайных величин α_{ts}^j .

Теорема 2. Если параметры c_{kq} статистики (9) удовлетворяют условиям:

$$c_{kq} \leq a_m, (k, q) \in G_1, \sum_{G_1} c_{kq} \leq b, c_{kq} \geq 0, \sum_{G_1} c_{kq}^2 \geq 1, \quad (24) - (25) - (26)$$

где b удовлетворяет условию:

$$1 < b < \sqrt{\frac{n}{4} \left(2 - \frac{4(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \max_{P_{ts}} P_{ts} (1 - P_{ts}) \right)}, \quad (27)$$

$$a_m = \frac{\alpha^v M_4}{A \cdot M_1} - \frac{b (M_2 + (n_1 - 1) M_3)}{M_1}, \quad (28)$$

$$M_1 = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N E\{|\xi_{ts}^{kq}|^3\}, M_2 = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N E\{|\xi_{ts}^{kq}| |\xi_{ts}^{k_1q_1}|^2\}, \quad (29)$$

$$M_3 = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N E\{|\xi_{ts}^{kq}| |\xi_{ts}^{k_1q_1}| |\xi_{ts}^{k_2q_2}|\}, \quad (30)$$

$$M_4 = \left(\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \left[2 - \frac{4b^2}{n} - \frac{4(n-2)(n-3)}{n(n-1)} P_{ts} (1 - P_{ts}) \right] P_{ts} (1 - P_{ts}) \right)^{3/2}, \quad (31)$$

$A=0,9051$, $0 < \alpha < 1$ — уровень значимости проверки гипотезы (1) по статистике (9), $v \geq 1$, то выполняется (10).

Если объем выборки m удовлетворяет условию

$$a_m > \frac{1}{\sqrt{n_1}}, \quad (32)$$

то множество решений (24) — (26) не пусто.

Доказательство. Оценим числитель (13) сверху, используя (25) и неравенство $\left(\sum_{i=1}^{n_1} c_{k_i q_i} \right) \leq n_1 \sum_{i=1}^{n_1} c_{k_i q_i}^2$. Знаменатель оценим снизу, учитывая (25), (26). Используя обозначения (29) — (31) и требуя выполнения (10), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \left[\frac{\alpha^v M_4}{A \cdot M_1} - \frac{b}{M_1} (M_2 + (n_1 - 1) M_3) \right] c_{k_i q_i}^2 - c_{k_i q_i}^3 \right\} \geq 0. \quad (33)$$

Введем обозначения:

$$c_{k_i q_i} = \Theta_i, i = 1, \dots, n_1, \quad (34)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{n_1} \end{bmatrix} - n_1\text{-вектор, } \Xi = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \Theta_{n_1} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} a_m & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_m \end{bmatrix} \quad (35)$$

— $n_1 \times n_1$ -матрицы.

Тогда, учитывая (34) — (35), (33) запишем в виде:

$$\Theta' \{ \Xi - M \} \Theta \geq 0. \quad (36)$$

Согласно [5], квадратичная форма (36) неотрицательно определена тогда и только тогда, когда матрица этой квадратичной формы имеет неотрицательные характеристические числа, т. е. получаем (24).

Неравенство (27) получаем, учитывая (26) и требуя, чтобы подкоренное выражение в M_4 было больше нуля; (32) следует из неравенств (26) и (24). Подставляя в (32) выражение из (28), имеем неравенство относительно m .

5. Пример. При $n=4$, $N=3$, $\alpha=0,1$, $\nu=1$, $P_{1s}=0,5$, $P_{2s}=P_{3s}=0,25$, $s=1, \dots, m$, $b=1,01$, $a_m=1,0000129$, $m=5637$, коэффициенты c_{12} , c_{34} можно выбрать следующим образом: $c_{12}=1$, $c_{34}=0,001$.

Теоретическая оценка объема выборки m по (10) является завышенной. Так, если подставить полученные значения m , c_{hv} в (13), будем иметь: $\sup_x |F_m(x) - \Phi(x)| \leq 0,0345268$, т. е. на порядок лучше, чем предполагали.

Список литературы

1. Орлов А. И. Устойчивость в социально-экономических моделях. М., 1979.
2. Орлов А. И. // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М., 1980.
3. Орлов А. И. // Экспертные оценки в задачах уравнения. М., 1982.
4. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М., 1972.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970.

Поступила в редакцию 16.04.86.

УДК 517.968.7

У. У. ДИАЛЛО

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе изучается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

с действующим в пространстве C непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций оператором

$$A(t)x(s) = c(t, s)x(s) + \int_a^b k(t, s, \sigma)x(\sigma)d\sigma. \quad (2)$$

Здесь $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$ — заданные на $\mathbf{R} \times [a, b]$ и $\mathbf{R} \times [a, b] \times [a, b]$ вещественные измеримые функции.

Уравнения вида (1) наряду с бесконечными системами линейных уравнений являются естественным бесконечномерным аналогом конечных линейных систем. Однако если бесконечным системам посвящена значительная литература (см., например, [1]), интегро-дифференциальные уравнения (1), несмотря на то, что встречаются во многих задачах анализа (в частности, в теории вероятностей), почти не исследовались (отдельные результаты см., например, [2—5]).

В предлагаемой статье в явном виде выписываются условия на функции $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$, при которых (1) может рассматриваться как линейное дифференциальное уравнение в пространстве C , описываются вид и свойства функции Коши этого уравнения, условия существования функции Грина в задачах об ограниченных и ω -периодических решениях, условия их непрерывной зависимости от параметров и т. д.

1. Рассмотрим вначале линейный оператор

$$Ax(s) = c(s)x(s) + \int_a^b k(s, \sigma)x(\sigma)d\sigma. \quad (3)$$

Пусть

$$\alpha(s) = c(s) + \int_a^b k(s, \sigma)d\sigma, \quad (4)$$

$$\beta(c, s) = \int_a^c \{c(s)\chi(s, \sigma) + (c - \sigma)k(s, \sigma)\}d\sigma \quad (a < c < b) \quad (5)$$

(здесь $\chi(s, \sigma)$ — характеристическая функция бесконечного отрезка $[s, \infty)$ и

$$\gamma(s) = |c(s)| + \int_a^b |k(s, \sigma)|d\sigma. \quad (6)$$

Из классических результатов Ф. Рисса — И. Радона [6—8] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Линейный оператор (3) действует в пространстве C в том и только том случае, когда функции (4) и (5) определены и непрерывны, а функция (6) ограничена. При этом он непрерывен и

$$\|A\| = \sup_{a \leq s \leq b} \gamma(s). \quad (7)$$

В частности, из леммы 1 вытекает, что пространство $L_r(C)$ операторов вида (3) есть замкнутое подпространство пространства $L(C)$ непрерывных линейных операторов, действующих в C ; представление операторов из $L_r(C)$ в виде (3) единственно; множество $L_i(C)$ интегральных операторов (т. е. операторов вида (3) с нулевой функцией $c(s)$) является идеалом в $L_r(C)$.

Интересно отметить, что оператор (3) может действовать в пространстве C в случаях, когда его отдельные слагаемые не будут линейными операторами в C . Из леммы 1 следует, что множество $L_d(C)$ операторов вида (3), для которых оба слагаемых — операторы в C , также будет замкнутым подпространством $L(C)$. Замкнутым является и подпространство $L_k(C)$ пространства $L_d(C)$ операторов (3), для которых интегральное слагаемое — компактный оператор в C .

2. Введем в рассмотрение функции

$$\alpha(t, s) = c(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma)d\sigma, \quad (8)$$

$$\beta(c, t, s) = \int_a^c \{c(t, s)\chi(s, \sigma) + (c - \sigma)k(t, s, \sigma)\}d\sigma \quad (9)$$

и

$$\gamma(t, s) = |c(t, s)| + \int_a^b |k(t, s, \sigma)|d\sigma, \quad (10)$$

построенные по оператор-функции (2). Из леммы 1 и общих теорем об оператор-функциях вытекает

Теорема 1. Оператор-функция (2) является слабо (сильно) непрерывной функцией в $L_r(C)$ в том и только том случае, когда выполняются условия:

а) функции (8) и (9) непрерывны по каждой переменной (по совокупности переменных) $t, s \in \mathbf{R} \times [a, b]$;

б) функция (10) ограничена на каждом прямоугольнике $[-T, T] \times [a, b]$ ($0 < T < \infty$).

Оператор-функция (2) будет непрерывной по норме функцией в $L_r(C)$ в том и только том случае, когда выполнено условие б) и, кроме того, условия:

в) функции (8) и (9) непрерывны по s на $[a, b]$ при каждом фиксированном $t \in \mathbf{R}$;

г) функция $c(t, s)$ непрерывна по t на $\mathbf{R}$ равномерно относительно $s \in [a, b]$;

д) функция $k(t, s, \sigma)$ при любом $T > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{a \leq s \leq b, -T \leq t, \tau \leq T, |t - \tau| < \delta} \int_a^b |k(t, s, \sigma) - k(\tau, s, \sigma)| d\sigma = 0. \quad (11)$$

В условиях теоремы 1 в силу общих теорем о линейных дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах (см., например, [5]) определена функция Коши $U(t, \tau)$, которая является решением интегрального уравнения

$$U(t, \tau) = I + \int_{\tau}^t A(\xi) U(\xi, \tau) d\xi. \quad (12)$$

Эта оператор-функция со значениями в $L(C)$ вместе со своей производной $U'_t(t, \tau)$ обладает теми же свойствами непрерывности, что и исходная оператор-функция (2). Более точная информация содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть выполнены условия одного из утверждений теоремы 1. Тогда функция Коши $U(t, \tau)$ является оператор-функцией в $L_r(C)$ и, более того, представима в виде

$$U(t, \tau) x(s) = e^{\int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi} x(s) + \int_a^b \omega(t, \tau, s, \sigma) x(\sigma) d\sigma, \quad (13)$$

где $\omega(t, \tau, s, \sigma)$ — определенная при $-\infty < t, \tau < \infty, a \leq s, \sigma \leq b$ вещественная функция; при этом она слабо (сильно) непрерывна или непрерывна по норме на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, если слабо (сильно) непрерывна или непрерывна по норме на $\mathbf{R}$ оператор-функция (2). Кроме того, значения $U(t, \tau)$ при всех t, τ лежат в $L_d(C)$ или $L_h(C)$, если значения (2) при всех t лежат в $L_d(C)$ или соответственно в $L_h(C)$.

Теоремы 1 и 2 позволяют перенести на уравнения (1) почти все классические результаты, известные для конечных систем. Например, уравнение (1) является приводимым, если оператор-функция (2) ω -периодична по t с некоторым $\omega \neq 0$; последнее означает ω -периодичность по t функций $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$. С их помощью на уравнения (1) легко могут быть распространены теоремы о непрерывной зависимости функции Коши от параметров, приведенные в [9].

3. Остановимся еще на задачах об ограниченных и ω -периодических решениях уравнения (1). Если оператор-функция (2) не зависит от t , т. е. $A(t) = A$, где A определен равенством (3), существование функции Грина этой задачи равносильно предположению о том, что спектр (3) не содержит нуля и чисто мнимых значений (чисто мнимых значений, кратных $i\omega$); последнее в случае, когда $A \in L_h(C)$, означает, что функция $c(s)$ из (3) не обращается в нуль и что оператор (3) не имеет нулевого и чисто мнимых собственных значений. Приведем одно утверждение о существовании функции Грина для общего случая; оно является аналогом классической леммы Боголюбова (см., например, [10]).

Теорема 3. Пусть оператор-функция (2) и оператор (3) связаны соотношениями:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < t < \infty, a \leq s \leq b} \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(\tau, s) d\tau - c(s) \right| = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < t < \infty, a \leq s \leq b} \int_a^b \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} k(\tau, s, \sigma) d\tau - k(s, \sigma) \right| d\sigma = 0,$$

причем задача об ограниченных решениях для уравнения $dx/dt = Ax$ обладает функцией Грина $G(t, \tau)$. Тогда при достаточно малых ε задача об ограниченных решениях для уравнения $dx/dt = \varepsilon A(t)x$ также обладает функцией Грина $G_\varepsilon(t, \tau)$, равномерно сходящейся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к функции Грина $G(t, \tau)$.

В заключение автор выражает благодарность П. П. Забрейко, под руководством которого он работает.

Список литературы

1. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
4. Забрейко П. П., Нурекенов Т. // Вестн. АН КазССР. 1966. № 5. С. 32.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М., 1970.
6. Рисс Ф. // УМН. 1936. Вып. 1. С. 175.
7. Радон И. Там же. С. 200.
8. Гливенко В. Л. Интеграл Стильтьеса. М.; Л., 1936.
9. Левин А. Ю. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 774.
10. Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А. Там же. 1969. Т. 184. № 3. С. 526.

Поступила в редакцию 02.06.86.

УДК 621.391.1:519.28

Е. Н. МЕЛЬНИКОВА, Ю. С. ХАРИН

О КЛАССИФИКАЦИИ СЕРИЙ МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИНЕ СЕРИИ

При разработке автоматизированных комплексов идентификации сложных систем, имеющих на случайных интервалах времени различную структуру или различные режимы функционирования, возникают задачи классификации наблюдений, образованных сериями случайной длины. Рассматриваемая в работе задача является обобщением задачи [1] и отличается тем, что длины серий являются случайными величинами.

Математическая модель. Пусть в пространстве наблюдений R^N определено m -параметрическое семейство плотностей $Q = \{p(x; \Theta): x \in R^N, \Theta \in \Xi \subseteq R^m\}$, $L \geq 2$ — натуральное число, обозначающее число классов, $\{\Theta_1^0, \dots, \Theta_L^0\} \subseteq \Xi$ — подмножество L различных точек. Пусть далее $x_1, \dots, x_n \in R^N$ — наблюдаемый временной ряд, образованный из K^0 независимых серий случайной длины:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{X_1, X_2, \dots, X_{K^0}\}, \quad (1)$$

где $X_j = \{x_1, \dots, x_{\tau_j^0}\}$ — j -я случайная серия ($j = \overline{1, K^0}$), состоящая из τ_j^0 независимых наблюдений одного и того же класса $\Omega_{I_j^0} (I_j^0 \in S(L) = \{1, \dots, L\})$, имеющих плотность распределения вероятностей $p(x;$

$\Theta_{I_j^0}^0$) из Q . Номера классов $I_1^0, \dots, I_{K^0}^0$ — независимые случайные величины с распределением вероятностей

$$P\{I_j^0 = k\} = \pi_k > 0 \quad (k = \overline{1, L}), \quad \sum_{k=1}^L \pi_k = 1. \quad (2)$$

Длины серий $\tau_1^0, \dots, \tau_{K^0}^0$ образуют не зависящую от $\{I_j^0\}$ последовательность независимых случайных величин с распределением

$$P\{\tau_j^0 = \tau\} = \begin{cases} q_j(\tau), & \text{если } \tau_- \leq \tau \leq \tau_+, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad \sum_{\tau=\tau_-}^{\tau_+} q_j(\tau) = 1, \quad (3)$$

где τ_-, τ_+ — заданные нижняя и верхняя границы длин серий. Параметры $K^0 \{\Theta_j^0\}, \{\tau_j^0\}, \{I_j^0\}$ неизвестны.

Задача классификации временного ряда длительностью n заключается в определении номеров классов, к которым принадлежит каждое из наблюдений (с точностью до переобозначения классов).

Определим моменты «разладки» временного ряда $T_0^0, \dots, T_{K^0}^0$: $T_0^0 = 0$, $T_{K^0}^0 = n$, $T_i^0 = \tau_1^0 + \dots + \tau_i^0$ — случайный момент i -го возможного перехода от одного класса к другому ($i = \overline{1, K^0}$). Тогда, согласно (1), задача классификации состоит в построении решающих правил для определения $K^0, \{T_i^0\}, \{I_j^0\}$.

Оценивание моментов «разладки». Определим статистику

$$\bar{\Theta} = \arg \max_{\Theta \in \Xi} \sum_{i=1}^n \ln p(x_i; \Theta). \quad (4)$$

Обозначим: $\beta(x; \bar{\Theta}) = \nabla_{\bar{\Theta}} \ln p(x; \bar{\Theta})$ — m -вектор-столбец частных производных первого порядка; $\gamma(x; \bar{\Theta}) = \nabla_{\bar{\Theta}}^2 \ln p(x; \bar{\Theta})$ — $(m \times m)$ — симметрическая матрица частных производных второго порядка;

$$\begin{aligned} b(T_{i-1}, T_i) &= \sum_{\tau=1}^{T_i - T_{i-1}} \beta(x_{T_{i-1}+\tau}; \bar{\Theta}) \text{ — } m\text{-вектор;} \\ g(T_{i-1}, T_i) &= \sum_{\tau=1}^{T_i - T_{i-1}} \gamma(x_{T_{i-1}+\tau}; \bar{\Theta}) \text{ — } (m \times m)\text{-матрица;} \\ \alpha(X) &= \sum_{i=1}^K \sum_{\tau=1}^{T_i - T_{i-1}} \ln p(x_{T_{i-1}+\tau}; \bar{\Theta}) = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i; \bar{\Theta}). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. Если Q — регулярное семейство и рассматривается случай «сближающихся» классов:

$$|\Theta_i^0 - \Theta_j^0| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, (i, j \in S(L)), \quad (6)$$

то в ε -окрестности точек $\{\Theta_i^0\}$ логарифмическая функция правдоподобия допускает представление

$$\begin{aligned} l(\{\Theta_i\}, K, \{T_i\}, \{I_i\}) &= \tilde{l}(\{\Theta_i\}, K, \{T_i\}, \{I_i\}) + o(\varepsilon^2), \\ \tilde{l}(\cdot) &= \alpha(X) + \sum_{j=1}^K (\ln(\pi_{I_j} q_j(T_j - T_{j-1})) + b^T(T_{j-1}, T_j)(\Theta_{I_j} - \bar{\Theta}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Theta_{I_j} - \bar{\Theta})^T g(T_{j-1}, T_j)(\Theta_{I_j} - \bar{\Theta})). \end{aligned} \quad (7)$$

При доказательстве используются (1) — (5), формула Тейлора для

$\ln p(x; \bar{\Theta})$ в окрестности $\bar{\Theta}$, а также тот факт, что $\bar{\Theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta^0$, где $|\Theta^0 - \Theta_i^0| = O(\varepsilon)$.

Используя теорему 1, будем строить приближенные оценки максимального правдоподобия для $K^0, \{T^0\}, \{I_i^0\}$ из условия максимума аппроксимирующей функции (7):

$$\max_{\{\Theta_i\}} \tilde{l}(\{\Theta_i\}, K, \{T_i\}, \{I_i\}) \rightarrow \max_{\{T_i\}, \{I_i\}} \max_K \quad (8)$$

Максимизируя функцию (7) по $\{\Theta_i\}$ и используя вместо матрицы $(T_j - T_{j-1})^{-1} \sum_{\tau=1}^{T_j - T_{j-1}} \gamma(x_{T_{j-1} + \tau}; \bar{\Theta})$ ее оценку $\bar{\gamma} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i; \bar{\Theta})$, приведем задачу (8) к виду:

$$\begin{aligned} l_1(K, \{T_i\}, \{I_i\}) = & \alpha(X) + \sum_{j=1}^K (\ln(\pi_{I_j} q_j (T_j - T_{j-1})) + \\ & + B(T_{j-1}, T_j, T_{j-1}, T_j) / (2n\pi_{I_j})) + \\ & + \frac{K(K-1)}{2n} \left(\left(\frac{K(K-1)}{2} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{K-1} \frac{1}{\pi_{I_j}} \sum_{k=j+1}^K \delta_{I_j, I_k} B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k) \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \max_{\{T_i\}, \{I_i\}} \max_K, \end{aligned} \quad (9)$$

где $B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k) = -b^T(T_{j-1}, T_j) \bar{\gamma}^{-1} b(T_{k-1}, T_k)$, δ_{ij} — символ Кронекера. С учетом (9) определим семейство целевых функций:

$$\begin{aligned} l_2(K, \{T_i\}, \{I_i\}; p) = & \alpha(X) + \sum_{j=1}^K (\ln(\pi_{I_j} q_j (T_j - T_{j-1})) + \\ & + \frac{1}{2n\pi_{I_j}} B(T_{j-1}, T_j, T_{j-1}, T_j) + \\ & + \frac{K(K-1)}{np(2K-p-1)\pi_{I_j}} U(K-j) \sum_{k=j+1}^{\min\{K, j+p\}} \delta_{I_j, I_k} B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k)), \end{aligned} \quad (10)$$

где $U(z) = \{0, \text{если } z \leq 0; 1, \text{если } z > 0\}$; p — параметр семейства, $1 \leq p \leq K-1$. Если $p = K-1$, то $l_2(\cdot) = l_1(\cdot)$; при $p < K-1$ $l_2(\cdot)$ следует рассматривать как аппроксимацию $l_1(\cdot)$. Тогда правило для совместного определения $K^0, \{T_i^0\}, \{I_i^0\}$ примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K-p} \Psi_{K,j}(T_{j-1}, \dots, T_{j+p}; I_j, \dots, I_{j+p}) \rightarrow & \max_{\{T_i\}, \{I_i\}} \max_K, \quad (11) \\ \Psi_{K,j}(T_{j-1}, \dots, T_{j+p}; I_j, \dots, I_{j+p}) = & \ln(\pi_{I_j} q_j (T_j - T_{j-1})) + \\ & + B(T_{j-1}, T_j, T_{j-1}, T_j) / (2n\pi_{I_j}) + \\ & + \frac{K(K-1)}{np(2K-p-1)\pi_{I_j}} \sum_{k=j+1}^{j+p} \delta_{I_j, I_k} B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k), \quad j = \overline{1, K-p-1}; \\ \Psi_{K, K-p}(T_{K-p-1}, \dots, T_K; I_{K-p}, \dots, I_K) = & \sum_{j=K-p}^K (\ln(\pi_{I_j} q_j (T_j - T_{j-1})) + \\ & + B(T_{j-1}, T_j, T_{j-1}, T_j) / (2n\pi_{I_j}) + \\ & + \frac{K(K-1)}{np(2K-p-1)\pi_{I_j}} U(K-j) \sum_{k=j+1}^K \delta_{I_j, I_k} B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k)). \end{aligned}$$

Максимум в (11) находится методом динамического программирования [2].

Укажем более простое двухэтапное решающее правило: вначале строятся оценки $\{\hat{T}_i\}$, $\hat{K}$, затем $\{\hat{I}_i\}$. Для такого разделения используется оценка сверху для $l_2(\cdot)$ в (10), представляемая в виде

$$l_2(K, \{T_i\}, \{I_i\}; p) \leq l_2^+(K, \{T_i\}; p) = \alpha(X) + K \cdot \ln \pi_{\max} + \sum_{j=1}^K \left(\ln q_j(T_j - T_{j-1}) + \frac{1}{2n\pi_{\min}} B(T_{j-1}, T_j, T_{j-1}, T_j) + \right. \\ \left. + \frac{K(K-1)}{np(2K-p-1)\pi_{\min}} U(K-j) \sum_{k=j+1}^{\min\{K, j+p\}} (B(T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k))_+ \right) = \\ = \sum_{j=1}^{K-p-2} f_{K,j}(T_j, \dots, T_{j+p+1}), 1 \leq p \leq K-3,$$

где $(z)_+ = z \cdot U(z)$, $\pi_{\min} = \min_{i=1, \dots, L} \pi_i$, $\pi_{\max} = \max_{i=1, \dots, L} \pi_i$. Тогда оценки $\{\hat{T}_i\}$, $\hat{K}$ определяются из условия:

$$\sum_{j=1}^{K-p-2} f_{K,j}(T_j, \dots, T_{j+p+1}) \rightarrow \max_{\{T_i\}} \max_K \quad (12)$$

Максимизация в (12) осуществляется с использованием процедуры динамического программирования [2].

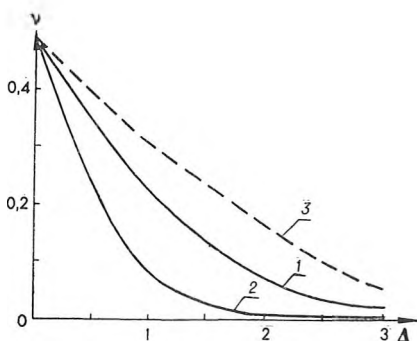
Классификация серий. Для нахождения оценок $\{I_j^0\}$ при уже найденных оценках $\hat{K}$, $\{\hat{T}_i\}$ используем модификацию процедуры кластер-анализа, основанную на минимизации критерия компактности [3]:

$$d_{jh}/(d_j + d_h) \rightarrow \min_{j, h=1, \dots, \hat{K}} \quad (13)$$

$$\text{где } d_j = (\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1})^{-1} \sum_{\tau=1}^{\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1}} |x_\tau - m_j|^2, m_j = (\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1})^{-1} \sum_{\tau=1}^{\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1}} x_\tau,$$

$$d_{jh} = ((\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1})^{-1} + (\hat{T}_h - \hat{T}_{h-1})^{-1}) |m_j - m_h|^2, j \neq h, j, h = 1, \dots, \hat{K}.$$

Процедура осуществляется в $\hat{K}-L$ этапов. На первом этапе число



Зависимость v от λ , Δ :

$$1 - \lambda = 1; 2 - \lambda = 5; 3 - v_0 = \Phi\left(-\frac{\Delta}{2}\right)$$

классов полагается равным $\hat{K}$. Из (13) находятся номера j^* , h^* двух серий, объединяемых в одну с номером j^* , для которой находятся d_{j^*} , m_{j^*} , d_{j^*h} , $h = 1, \dots, \hat{K}+1$. Число классов становится равным $\hat{K}-1$. После последнего этапа все серии объединены в L классов и тем самым найдены оценки $\{I_i^0\}$.

Исследование эффективности классификации. Пусть $\hat{I} = (\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{\hat{K}})$ —

вектор решений, где $\hat{I}_k$ — номер класса, к которому отнесена серия X_k .

Для оценки потенциальной точности классификации рассмотрим случай, когда параметры $K^0, \{\theta_j^0\}, \tau_1^0, \dots, \tau_{K^0}^0$ известны. Тогда решающее правило для определения I имеет вид ($k=1, \overline{K^0}$):

$$I_k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, L\}} \sum_{j=1}^{\tau_k^0} \ln(\pi_j p(x_{T_{k-1}+i}^0; \theta_j^0)).$$

Точность классификации будем характеризовать средним числом ошибочных решений при фиксированном числе K^0 (полных) серий:

$$N_{K^0} = K^0 \cdot E \{ \tau_k^0 P \{ I_k \neq I_k^0 \} \}.$$

Пусть $L = 2, \pi_1 = \pi_2 = 0,5$. Обозначим $\bar{i} = 3 - i (i \in \{1, 2\})$, $J(i) = E_{\theta_i^0} \{ \ln(p(x_i; \theta_i^0)/p(x_i; \theta_{\bar{i}}^0)) \} \geq 0$ — дивергенция Кульбака, $\sigma^2(i) = D_{\theta_i^0} \{ \ln(p(x_i; \theta_i^0)/p(x_i; \theta_{\bar{i}}^0)) \} \geq 0$, $b(i) = J(i)/\sigma(i) \geq 0$, где $E_{\theta_i^0} \{ \cdot \}$, $D_{\theta_i^0} \{ \cdot \}$ — символы математического ожидания и дисперсии по распределению $p(x; \theta_i^0)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

- 1) $\exists h > 0$, такое что $\forall i, k \in \{1, 2\} \quad E_{\theta_i^0} \left\{ \left(\frac{p(x_i; \theta_k^0)}{p(x_i; \theta_{\bar{k}}^0)} \right)^h \right\} < \infty$;
- 2) $\forall i \in \{1, 2\} \quad 0 < \sigma(i) < \infty$;
- 3) τ_k^0 — дискретная случайная величина с распределением ($k = \overline{1, K^0}$)

$$P \{ \tau_k^0 = t \} = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau_-, \\ q(t), & \text{если } \tau_- \leq t \leq \tau_+, \\ 0, & \text{если } t > \tau_+; \end{cases}$$

4) $\tau \rightarrow \infty, b(1), b(2) \rightarrow 0$, так что $\forall i \in \{1, 2\} \quad b(i) = o(\tau_+^{-1/3})$.

Тогда для N_{K^0} справедливо асимптотическое выражение

$$N_{K^0} = K^0 \sum_{\tau=\tau_-}^{\tau_+} \tau q(\tau) \frac{\Phi(-\sqrt{\tau} b(1)) + \Phi(-\sqrt{\tau} b(2))}{2} (1 + o(1)), \quad (14)$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Доказательство основывается на применении центральной предельной теоремы с узкими зонами нормальной сходимости [4].

Пример. Пусть Q — семейство N -мерных гауссовских плотностей $p(x; \Theta) = n_N(x|\Theta, \Sigma)$ с неизвестным математическим ожиданием Θ и известной ковариационной матрицей Σ ; число классов $L=2$. При этом выражение (14) становится точным и принимает вид:

$$N_{K^0} = K^0 \sum_{\tau=\tau_-}^{\tau_+} \tau q(\tau) \Phi\left(-\sqrt{\tau} \frac{\Delta}{2}\right), \quad (15)$$

где $\Delta = ((\Theta_2^0 - \Theta_1^0)^T \Sigma^{-1} (\Theta_2^0 - \Theta_1^0))^{1/2}$ — межклассовое расстояние Махаланбиса. Рассмотрим ситуацию с пуассоновскими сериями, когда $\tau_k^0 = 1 + \eta_k$, где η_k — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ . При этом (15) позволяет получить среднюю относительную долю ошибок классификации (по отношению к средней длине наблюдаемого ряда $\bar{n} = K^0(1 + \lambda)$):

$$v = \frac{N_{K^0}}{K^0(1 + \lambda)} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + 1} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{\tau \cdot \lambda^{\tau-1}}{(\tau-1)!} \Phi\left(-\sqrt{\tau} \frac{\Delta}{2}\right).$$

При использовании поточечной классификации ряда $x_1, \dots, x_n$ (без учета его «серийной» структуры) средняя относительная доля ошибок

равна $v_0 = \Phi(-\Delta/2)$. Из рисунка видно, что учет «серийной» структуры временного ряда при его классификации приводит к существенному выигрышу в эффективности.

Решающие правила (12), (13) реализованы на ЕС ЭВМ, исследованы методом статистического моделирования и показали достаточную эффективность.

Список литературы

1. Харин Ю. С. // Проблемы передачи информации. 1985. Т. 21. Вып. 4. С. 64.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы диалогового программирования. Минск, 1975.
3. Миленький А. В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. М., 1975.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., 1985.

Поступила в редакцию 06.06.86.

УДК 519.17

Л. Н. БАТУРИНА, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ПУТЕЙ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

Эффективность решения многих оптимизационных задач на графах и сетях зависит от способа представления требуемой информации о сети. Часто в качестве такой информации необходимо множество простых путей (ПП) графа. Для нахождения всех ПП между парой некоторых вершин связного графа $G = (X, A)$ можно использовать любой алгоритм (например, [1]) определения K кратчайших ПП с трудоемкостью $O(Kn^3)$. Однако при изложении этих алгоритмов способы эффективного представления информации о найденных ПП не обсуждаются.

Ниже предлагается алгоритм ТПП (таблица простых путей), с помощью которого сведения о множестве ПП между заданной парой вершин неориентированного графа представляются в виде специальных удобных для дальнейшего использования таблиц без предварительного определения этого множества. Одновременно классифицируются вершины графа по их удаленности в ПП от источника s .

Одним из практических применений таких таблиц является использование их при решении задач о максимальном динамическом потоке на простых путях неориентированного графа.

Пусть $X = \bigcup_{x_j \in \Gamma(s)} X^j \cup \{s\}$, причем для каждого множества X^j справедливо условие $X^j = \bigcup_{i=1}^{k_j} X_i$, где $\Gamma(x_i) = \{x_k | (x_i, x_k) \in A\}$; k_j — длина максимального ПП из s в t , проходящего через вершину $x_j \in \Gamma(s)$; X_i — подмножество, содержащее вершины, достижимые из x_j по всем ПП длины $i-1$. В общем случае $X_i \cap X_l \neq \emptyset$.

Каждое множество X^j представим в виде таблицы P_j размерности $(n-1) \times k_j$ (где n — число вершин графа), в которой l -я строка соответствует вершине $x_l \in X$ ($x_l \neq s$), а k -й столбец — длине ПП из s в x_l . Элемент (l, k) таблицы является списком S_{lk} вершин, каждая из которых предшествует вершине x_l хотя бы в одном ПП из x_j в x_l длины $k-1$. Если в графе G не существует ПП из x_j в x_l длины $k-1$, то $S_{lk} = \emptyset$ и $x_l \notin X_k$.

Пусть $G = (X, A)$ — связный неориентированный граф с выделенными вершинами s и t , у которого каждое ребро имеет длину 1.

Алгоритм ТПП. Шаг 1. Выбираем некоторую непомеченную вершину $x_j \in \Gamma(s)$.

1.1. Полагаем $R_j = \{x_l | (x_j, x_l) \in A, x_l \neq s\}$, $N = \emptyset$. Для всех $x_i \in X$ ($x_i \neq s, x_j, t$) полагаем $R_i = \{x_l | (x_i, x_l) \in A, x_l \neq x_j\}$.

1.2. Полагаем $S_{j1} = \{s\}$ и $S_{11} = \emptyset$ для всех $x_l \neq x_j$; $S_{12} = \{x_j\}$ для $x_l \in R_j$ и $S_{12} = \emptyset$ для $x_l \notin R_j$. Тогда $X_1 = \{x_j\}$ и $X_2 = \{R_j\}$.

Шаг 2. Пусть найдены элементы $k-1$ -го столбца таблицы P_j и, соответственно, определены множества $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$. Списки S_{lk} ($x_l \neq s, x_j$) k -го столбца определяются просмотром вершин множества X_{k-1} . Полагаем $N_{pm} = \emptyset$ для всех $x_p \in X$ и $m = 1, \dots, k$. Выбираем некоторую непросмотренную вершину $x_r \in X_{k-1}$. Ее просмотр заключается в следующем.

2.1. Выбираем непомеченную вершину $x_l \in R_r$. Помещаем вершины x_r и x_l в список N и полагаем $p = x_r, q = 1, \delta = 0$.

2.2. Если $\delta = 0$, то находим вершину $x \in S_{p(h-q)}$, для которой справедливо условие $x \notin N$, и переходим к п. 2.3. Если условие не выполняется, то переходим к п. 2.4.

Если $\delta = 1$, то находим вершину $x \in S_{p(h-q)}$, для которой справедливо условие $x \notin N$ и $x \notin N_{p(h-q)}$, полагаем $\delta = 0$ и переходим к п. 2.3. В противном случае переходим к п. 2.4.

2.3. Помещаем x в начало списка N и в список $N_{p(h-q)}$, увеличиваем q на единицу и полагаем $p = x$. При $k - q \leq 2$ вносим вершину x_r в список S_{1k} и тогда $x_l \in X_k$. Вершина x_l становится помеченной, переходим к п. 2.5. При $k - q > 2$ повторяем п. 2.2.

2.4. Если $k - q = k - 1$, то вершина x_l становится помеченной и переходим к п. 2.5. Если $k - q < k - 1$, то полагаем $\delta = 1$, уменьшаем q на единицу, удаляем x из списка N . Полагаем p равным первому элементу списка N и повторяем п. 2.2.

2.5. Полагаем $N = \emptyset$ и $N_{pm} = \emptyset$ для всех $x_p \in X$ и $m = 1, \dots, k$. Переходим к п. 2.1 для следующей непомеченной вершины. Если помечены все вершины $x_l \in R_r$, то вершина x_r становится просмотренной. Удаляем старые метки и переходим к п. 2.1 для следующей непросмотренной вершины $x_r \in X_{k-1}$. Если просмотрены все вершины $x_r \in X_{k-1}$, то списки S_{lk} (и соответственно множество X_k) определены. Удаляем старые метки и переходим к следующему шагу, считая все вершины $x_l \in X_k$ непросмотренными.

Шаг 3. Если $X_k \neq \emptyset$, то увеличиваем k на единицу и переходим к шагу 2. В противном случае таблица P_j построена. Максимальный номер столбца, для которого $S_{tkj} \neq \emptyset$, определяет длину максимального ПП из s в t , проходящего через вершину $x_j \in \Gamma(s)$. Теперь вершина x_j считается просмотренной. Переходим к шагу 1 для следующей непросмотренной вершины $x_j \in \Gamma(s)$. Если просмотрены все вершины $x_j \in \Gamma(s)$, то длина максимального ПП из s в t равна $K = \max_{x_j \in \Gamma(s)} \{k_j\}$ и алгоритм закончен.

Нетрудно видеть, что шаг 2 алгоритма основан на процедуре поиска в ширину [2].

Утверждение 1. Любой простой путь графа G из s в t , проходящий через вершину $x_j \in \Gamma(s)$, восстанавливается по таблице P_j .

Доказательство. Из действий шага 2 алгоритма вытекает, что в любое множество X_k включаются те и только те вершины x_l , которые достижимы из x_j по ПП длины $k-1$. Следовательно, $S_{lk} = \emptyset$ в том и только в том случае, когда в графе G нет простого пути из x_j в x_l длины $k-1$. Пусть существует ПП из x_j в t длины $k-1$, тогда $S_{tk} \neq \emptyset$. Из вышесказанного следует, что в этом случае найдется вершина $x \in S_{tk}$, для которой $S_{x(h-1)} \neq \emptyset$, а в списке $S_{x(h-1)}$ есть вершина $y \neq t, x$. Продолжая эту процедуру, найдем вершину $z \in S_{j2}$, не совпадающую с ранее выделенными вершинами. Присоединив к этим вершинам s , получим ПП из s в t длины k . Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Таблицы P_j содержат в совокупности сведения о всех ПП из s в t графа G .

В самом деле, если дуга (x_{j1}, x_l) вошла в таблицу P_{j1} , то в некоторую таблицу P_{jm} ребро (x_{j1}, x_l) войдет (при условии существования ПП, содержащего дугу (x_l, x_{j1})), ориентированным от x_l к x_{j1} .

Нетрудно показать, что трудоемкость построения таблицы P_j оценивается величиной $O(n^4)$.

Часто (например, при решении потоковых задач) требуется найти ПП из s в t , начиная с вершины s . В этом случае таблицы P_j преобразуются в таблицу P , содержащую сведения о всех ПП из s в t графа G . В таблице P размерности $(n-1) \times K$ каждая l -я строка соответствует вершине $x_l \in X$ ($x_l \neq t$), а номер k -го столбца — длине ПП из s , включающего дугу, инцидентную вершине x_l , в качестве последней. Элемент (l, k) таблицы P представлен списком S'_{lk} вершин $x_r \in X_k$ таблиц P_j , которым предшествует вершина x_l в ПП из s в x_r длины k . Если дуга (x_l, x_r) не является k -й дугой хотя бы одного ПП из s в t , то $x_r \notin S'_{lk}$. Для каждой вершины $x_r \in S'_{lk}$ определена метка M_r . Номер j вершины $x_j \in \Gamma(s)$ заносится в метку M_r только в том случае, если существует ПП из s в t , проходящий через эту вершину x_j , k -й вершиной которого является вершина x_r .

Назовем Π_{st} -подграфом подграф, построенный на множестве всех ПП из s в t графа G .

Построим по таблице P неориентированный граф $G^* = (X^*, A^*)$, придерживаясь следующей процедуры.

Ребра графа G^* находятся просмотром списков S'_{lk} столбцов таблицы P . Пусть просмотрен k -й столбец. Просмотр $k+1$ -го столбца состоит в следующем. К вершине x_l присоединяем ребро (x_l, x_p) , если $x_p \in S'_{l(k+1)}$ и это ребро еще не вошло в множество A^* . Граф G^* построен, если просмотрен последний столбец таблицы P .

Утверждение 2. Граф G^* является Π_{st} -подграфом графа G .

Доказательство. Пусть ребро $(x_l, x_p) \in A$ не вошло в граф G^* . Из способа организации таблицы P и процедуры построения графа G^* вытекает, что в этом случае $x_l \notin S_{pk}$ и $x_p \notin S_{lk}$ для любой таблицы P_j при всех $k=1, \dots, k_j$. Тогда из доказательства утверждения 1 следует, что в графе G нет ни одного ПП из s в t , содержащего либо дугу (x_l, x_p) , либо (x_p, x_l) . Утверждение доказано.

Процедура нахождения по таблице P ПП из s в t , проходящего через данную вершину $x_j \in \Gamma(s)$, состоит в следующем. Включаем в путь вершину s . Пусть найдено k вершин $s, x_i, \dots, x_p$ (где $x_p \neq t$), метка каждой из которых содержит значение j . Для определения $k+1$ -й вершины ПП просматриваем список $S'_{p(k+1)}$ и включаем в путь вершину $x_r \in S'_{p(k+1)}$, для которой $j \in M_r$. Путь построен, если в него включена вершина t .

Обоснование процедуры следует из способа организации таблицы P и утверждения 2.

Список литературы

1. Shier D. // Networks. 1976. N. 6. P. 205.
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., 1980.

Поступила в редакцию 26.06.86.

УДК 517.9:535.4

Памяти А. М. Родова

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предлагаемой работе выводятся некоторые теоремы сложения для потенциалов Дебая и векторов Герца в сферических, цилиндрических и декартовых координатах.

Определим электромагнитное поле (ЭМП) формулами [1]:

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = \text{rot rot } \vec{\Pi}, \quad \vec{H} = -i\omega \epsilon \text{ rot } \vec{\Pi}, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \quad (1)$$

где $\vec{\Pi}$ — электрический вектор Герца. В дальнейшем в качестве векторов Герца выберем специальные поля:

$$\vec{\Pi}_{mn}^{(j)} = \tilde{\psi}_{mn}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_j, \quad \vec{\Pi}_{mn}^{(j)} = \psi_{mn}(r, \theta, \varphi) \vec{e}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, $\psi_{mn} = j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$, $\tilde{\psi}_{mn} = h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$, $\{r, \theta, \varphi\}$ — сферические координаты.

Будем писать $\{\vec{E}, \vec{H}\} \approx [\vec{A}]$, если после подстановки вектора Герца $\vec{A}$ в (1) получим ЭМП $\{\vec{E}, \vec{H}\}$, символ $[\vec{A}]$ означает, что вектор $\vec{A}$ является вектором Герца.

ЭМП может быть построено также с помощью потенциалов Дебая (u, v) по формулам [1]:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + k^2 ru, \quad H_r = \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k^2 rv, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(ru)}{\partial \theta \partial r} + \frac{i\omega\mu}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad H_\theta = \frac{k^2}{i\omega\mu} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(rv)}{\partial \theta \partial r}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2(ru)}{\partial \varphi \partial r} - i\omega\mu \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad H_\varphi = -\frac{k^2}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2(rv)}{\partial \varphi \partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем $\{\vec{E}, \vec{H}\} \approx (u, v)$, если после подстановки потенциалов Дебая u, v в (3) получим ЭМП $\{\vec{E}, \vec{H}\}$.

Можно показать, что $\{k\tilde{n}_{mn}, \frac{k^2}{i\omega\mu} \tilde{m}_{mn}\} \approx (\tilde{\psi}_{mn}, 0)$, $\{i\omega\mu \tilde{m}_{mn}, k\tilde{n}_{mn}\} \approx (0, \tilde{\psi}_{mn})$, где [2, 3]: $\tilde{m}_{mn} = \text{rot}(\tilde{\psi}_{mn}, \vec{r})$, $\tilde{n}_{mn} = \frac{1}{k} \text{rot} \tilde{m}_{mn}$, $\tilde{m}_{mn} = \frac{1}{k} \text{rot} \tilde{n}_{mn}$. Используя рекуррентные соотношения для присоединенных функций Лежандра и сферических функций Бесселя, получаем:

$$\{\tilde{E}_{mn}^{(j)}, \tilde{H}_{mn}^{(j)}\} \approx [\tilde{\Pi}_{mn}^{(j)}] \approx (\tilde{u}_{mn}^{(j)}, \tilde{v}_{mn}^{(j)}), \quad (4)$$

$$\{\tilde{E}_{mn}^{(j)}, \tilde{H}_{mn}^{(j)}\} \approx [\tilde{\Pi}_{mn}^{(j)}] \approx (u_{mn}^{(j)}, v_{mn}^{(j)}), \quad (5)$$

где потенциалы Дебая определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{mn}^{(1)} &= \frac{k}{2(2n+1)} \left\{ \frac{1}{n} \tilde{\psi}_{m+1, n-1} - \frac{1}{n+1} \tilde{\psi}_{m+1, n+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+m)(n+m-1)}{n} \tilde{\psi}_{m-1, n-1} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1} \tilde{\psi}_{m-1, n+1} \right\}, \\ \tilde{v}_{mn}^{(1)} &= \frac{k^2}{2\omega\mu} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \tilde{\psi}_{m+1, n} + \frac{(n+m)(n-m+1)}{n(n+1)} \tilde{\psi}_{m-1, n} \right\}, \\ \tilde{u}_{mn}^{(2)} &= \frac{k}{2(2n+1)i} \left\{ \frac{1}{n} \tilde{\psi}_{m+1, n-1} - \frac{1}{n+1} \tilde{\psi}_{m+1, n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n} \tilde{\psi}_{m-1, n-1} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1} \tilde{\psi}_{m-1, n+1} \right\}, \\ \tilde{v}_{mn}^{(2)} &= \frac{k^2}{2\omega\mu i} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \tilde{\psi}_{m+1, n} - \frac{(n+m)(n-m+1)}{n(n+1)} \tilde{\psi}_{m-1, n} \right\}, \\ \tilde{u}_{mn}^{(3)} &= \frac{k}{2n+1} \left\{ -\frac{n+m}{n} \tilde{\psi}_{m, n-1} + \frac{n-m+1}{n+1} \tilde{\psi}_{m, n+1} \right\}, \\ \tilde{v}_{mn}^{(3)} &= \frac{mk^2}{n(n+1)\omega\mu} \tilde{\psi}_{mn}. \end{aligned}$$

Для вычисления $u_{mn}^{(j)}, v_{mn}^{(j)}$ необходимо заменить $\tilde{\Psi}_{mn}$ на Ψ_{mn} .

Рассмотрим ЭМП $(\Psi_{mn}(O_1), 0)$ в сферической системе координат $O_1 r_1 \theta_1 \varphi_1$ и разложим его по электромагнитным полям в сферической системе координат $O_2 r_2 \theta_2 \varphi_2$. Имеем $(\tilde{\Psi}_{mn}(O_1), 0) \approx \{\vec{E}(O_1), \vec{H}(O_1)\}$, где $\vec{H}(O_1) = \frac{k^2}{i\omega\mu} \text{rot}(\tilde{\Psi}_{mn}(O_1)r_1) = [r_1 = r_2 + a] = \frac{k^2}{i\omega\mu} \{\text{rot}(\tilde{\Psi}_{mn}(O_1)r_2) + \text{rot}(\tilde{\Psi}_{mn} \times (O_1)a)\}$, $a = a_1 e_x + a_2 e_y + a_3 e_z$, $a_1 = r_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0$, $a_2 = r_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0$, $a_3 = r_0 \cos \theta_0$; $\{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$ — сферические координаты начала O_2 в системе O_1 .

Используя теоремы сложения для сферических волновых функций [1. С. 137], получаем теоремы сложения для потенциалов Дебая.

$$\begin{aligned} (\tilde{\Psi}_{mn}(O_1), 0) &\approx (u_{mn}(O_2), v_{mn}(O_2)) = \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l A_{pl}^{mn} \tilde{\Psi}_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l B_{pl}^{mn} \tilde{\Psi}_{pl}(O_2) \right), \quad (r_2 > r_0), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_{pl}^{mn} &= kr_0 \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta_0 \left[\frac{1}{(l+1)(2l+3)} C_{p-1, l+1}^{mn} - \frac{1}{l(2l-1)} C_{p-1, l-1}^{mn} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(l+p+2)(l+p+1)}{(l+1)(2l+3)} C_{p+1, l+1}^{mn} + \frac{(l-p-1)(l-p)}{l(2l-1)} C_{p+1, l-1}^{mn} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta_0 \left[\frac{l+p+1}{(l+1)(2l+3)} C_{p, l+1}^{mn} + \frac{l-p}{l(2l-1)} C_{p, l-1}^{mn} \right] + C_{pl}^{mn} \right\} e^{i(m-p)\varphi_0}, \\ B_{pl}^{mn} &= \frac{k^2 r_0}{l(l+1)\omega\mu} \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta_0 [C_{p-1, l}^{mn} + (l+p+1)(l-p) C_{p+1, l}^{mn}] + \right. \\ &\quad \left. + p \cos \theta_0 C_{pl}^{mn} \right\} e^{i(m-p)\varphi_0}, \text{ где} \end{aligned}$$

$$C_{pl}^{mn} = \begin{cases} \frac{(2l+1)(l-p)!}{(l+p)!} \sum_{\sigma=|l-n|}^{l+n} i^{\sigma+l-n} b_{\sigma}^{(nmlp)} j_{\sigma}(kr_0) P_{\sigma}^{m-p}(\cos \theta_0), \\ 0, \text{ если } |p| > l \text{ или } l < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Аналогично

$$(0, \tilde{\Psi}_{mn}(O_1)) \approx \left(-\frac{\mu}{\varepsilon} v_{mn}(O_2), u_{mn}(O_2) \right), \quad (8)$$

где функции справа в формулах (6), (8) являются потенциалами Дебая в системе координат $O_2 r_2 \theta_2 \varphi_2$. Можно получить также теоремы сложения:

$$\begin{aligned} (\Psi_{mn}(O_1), 0) &\approx \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l A_{pl}^{mn} \Psi_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l B_{pl}^{mn} \Psi_{pl}(O_2) \right), \\ (\tilde{\Psi}_{mn}(O_1), 0) &\approx \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \tilde{A}_{pl}^{mn} \tilde{\Psi}_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=-l}^l \tilde{B}_{pl}^{mn} \tilde{\Psi}_{pl}(O_2) \right), \quad (r_2 < r_0), \end{aligned}$$

где для вычисления $\tilde{A}_{pl}^{mn}, \tilde{B}_{pl}^{mn}$ достаточно заменить в формулах (7) $j_{\sigma}(kr_0)$ на $h_{\sigma}^{(1)}(kr_0)$. Аналогичные формулы в другой форме получены в [2]. В формулах (6) при практических вычислениях могут быть использованы соотношения [4] для коэффициентов (7).

Приведем формулы, представляющие векторы Герца в цилиндрических координатах $\{\rho, z, \varphi\}$:

$$\vec{A}_m^{(j)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = I_m(v\rho) e^{i\lambda z + im\varphi} \vec{e}_j, \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \frac{\pi}{2} > \arg v \geq -\frac{\pi}{2} \quad (9)$$

через потенциалы Дебая в сферических координатах.

Разложим (9) по сферическим волновым функциям [5]:

$$\vec{A}_m^{(j)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = \sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda) \vec{\Pi}_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi),$$

где $D_n(\lambda) = (-1)^m \frac{i^n (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \tilde{P}_n^m\left(\frac{\lambda}{k}\right)$,

$$\tilde{P}_n^m\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \left(\frac{-i\nu}{k}\right)^m \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi), \quad \xi = \frac{\lambda}{k}.$$

Используя (5), получаем

$$[\vec{A}_m^{(j)}(\rho, z, \varphi; \lambda)] \approx \left(\sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda) u_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi), \sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda) v_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi) \right).$$

Далее приведем формулы, представляющие векторы Герца в декартовых координатах:

$$\vec{B}^{(\mp j)}(x, y, z; \lambda, \beta) = e^{-\alpha z + i\lambda x + i\beta y} \vec{e}_j, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2},$$

$$\frac{\pi}{2} > \arg \alpha \geq -\frac{\pi}{2} \quad (10)$$

через потенциалы Дебая в сферических координатах.

Разложим (10) по сферическим волновым функциям [6]: $\vec{B}^{(\mp j)}(x, y, z; \lambda, \beta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)} \vec{\Pi}_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi)$, где $A_{mn}^{(\mp)} = (-i)^n \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \times$

$$\times \left(\frac{i\beta - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} \right)^m \tilde{P}_n^m\left(\mp \frac{i\alpha}{k}\right).$$

Используя (5), получаем

$$[\vec{B}^{(\mp j)}(x, y, z; \lambda, \beta)] \approx \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)} u_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)} v_{mn}^{(j)}(r, \theta, \varphi) \right). \quad (11)$$

Выражения (11) в другой форме приведены в [7. С. 169].

Выведенные формулы переразложения (теоремы сложения) используются для решения краевых задач дифракции аналитическими методами [8].

Список литературы

1. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, 1968.
2. Cruzan O. R. // Quart. of Appl. Math. 1962. Т. 20. № 1. Р. 33.
3. Ерофеев В. Т., Кардаш С. Н. // Диф. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1060.
4. Ronchi L., Barbarino S., Grasso F., Guerriera G., Musumeci F., Scordino A. // Lett Nuovo Cim. 1982. V. 35. № 11. Р. 353.
5. Ерофеев В. Т. // Диф. уравнения. 1973. Т. 9. № 7. С. 1310.
6. Ерофеев В. Т. // Там же. 1978. Т. 14. № 8. С. 1439.
7. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев, 1983.
8. Иванов Е. А., Родов А. М. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-тех. наук. 1964. № 4. С. 5.

Поступила в редакцию 09.07.86.

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СУБОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЕМЫМ МНОЖЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЙ

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой с изменяемым множеством допустимых значений управлений:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= c_x^* x(t^*) + c_v^* v \rightarrow \max, \\ \dot{x} &= Ax + Bu, x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U(v), t \in T = [0, t^*], b_* \leq v \leq b^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T — заданный промежуток времени; $0, t^*$ — начальный и конечный моменты процесса управления; $x = x(t)$ — n -вектор состояния динамической системы в момент t ; $u = u(t)$ — r -вектор управляющих воздействий; v — вектор управляющих параметров; A, B — матрицы соответствующих размеров, характеризующие свойства объекта управления и входного устройства; c_x, c_v — n, q -векторы параметров критерия качества.

Будем считать, что $U(v)$ — многогранное множество:

$$U(v) = \{u \in R^r : Du + Gv = f, d_* \leq u \leq d^*\}. \quad (2)$$

$D(K, J), G = G(K, L)$ — $k \times r, k \times q$ -матрицы; f, d_*, d^*, b_*, b^* — векторы соответствующих размеров.

Управляющие воздействия $u(t), t \in T$, будут выбираться из класса импульсных функций с постоянным периодом квантования.

Пару $w = (u, v)$ из управляющего воздействия $u = (u(t), t \in T)$ и вектора управляющих параметров v назовем управлением. Допустимым управлением назовем управление w , которое принимает значения из множества:

$$W = \{w = (u, v) : u \in U(v), b_* \leq v \leq b^*\}. \quad (3)$$

Оптимальными будем называть допустимое управление w^0 и траекторию x^0 , на которых критерий качества $J(w)$ задачи (1) достигает максимального значения: $J(w^0) = \max_{w \in W} J(w)$.

Субоптимальным (ϵ -оптимальным) назовем допустимое управление $w^\epsilon = (u^\epsilon, v^\epsilon)$, которое при заданном $\epsilon \geq 0$ удовлетворяет неравенству $J(w^0) - J(w^\epsilon) \leq \epsilon$. Задача заключается в том, чтобы построить оптимальное и субоптимальное управления w^0, w^ϵ .

2. Опорное управление. Воспользовавшись формулой Коши, (1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \sum_{t \in T_g} c_x^* A^{t^*-t/h-1} B u(t) + c_v^* v \rightarrow \max, \\ Du(t) + Gv &= f, \end{aligned} \quad (4)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, t \in T_g = \{0, h, \dots, t^* - h\}, b_* \leq v \leq b^*.$$

Допустимые приращения $\Delta u(t) = \bar{u}(t) - u(t), t \in T; \Delta v = \bar{v} - v$ удовлетворяют уравнению

$$D \Delta u(t) + G \Delta v = 0, t \in T. \quad (5)$$

Пусть $L_{\text{оп}}^v$ — некоторое подмножество множества L . Из множества T_g выберем конечное подмножество точек $T_{\text{оп}}^{uv} = \{\tau_1^{uv}, \tau_2^{uv}, \dots, \tau_p^{uv}\}$. Каждому моменту времени $t \in T_{\text{оп}}^{uv}$ припишем множество $J_{\text{оп}}^{uv}(t) \subset J$. Обозначим: $J_{\text{оп}}^{uv} = \{J_{\text{оп}}^{uv}(t), t \in T_{\text{оп}}^{uv}\}, J_n^{uv}(t) = J \setminus J_{\text{оп}}^{uv}(t)$.

Составим матрицу

$$Q_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} D(K, J_{\text{оп}}^{uv}(\tau_1^{uv})) & 0 & \dots & 0 & G(K, L_{\text{оп}}^v) \\ 0 & D(K, J_{\text{оп}}^{uv}(\tau_2^{uv})) & \dots & 0 & G(K, L_{\text{оп}}^v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(K, J_{\text{оп}}^{uv}(\tau_p^{uv})) & G(K, L_{\text{оп}}^v) \end{pmatrix}$$

Обозначим: $L^{uv} = \{J_{\text{оп}}^{uv}, L_{\text{оп}}^v\}$.

Определение 1. Совокупность $Q_{\text{оп}} = \{L^{uv}; T_{\text{оп}}^{uv}\}$ назовем совместной опорой, если $\det Q_{\text{оп}} \neq 0$.

Используя совместную опору, из (5) находим

$$\begin{pmatrix} \Delta u_{J_{\text{оп}}^{uv}(t)}^{uv}(t) \\ t \in T_{\text{оп}}^{uv} \\ \Delta v_{\text{оп}} \end{pmatrix} = -Q_{\text{оп}}^{-1} Q_{\text{н}} \begin{pmatrix} \Delta u_{J_{\text{н}}^{uv}(t)}^{uv}(t) \\ t \in T_{\text{оп}}^{uv} \\ \Delta v_{\text{н}} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{где } Q_{\text{н}} = \begin{pmatrix} D(K, J_{\text{н}}^{uv}(\tau_1^{uv})) & 0 & \dots & 0 & G(K, L_{\text{н}}^v) \\ 0 & D(K, J_{\text{н}}^{uv}(\tau_2^{uv})) & \dots & 0 & G(K, L_{\text{н}}^v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(K, J_{\text{н}}^{uv}(\tau_p^{uv})) & G(K, L_{\text{н}}^v) \end{pmatrix}$$

Из множества $T_{\text{н}}^{uv} = T_g \setminus T_{\text{оп}}^{uv}$ выберем некоторое подмножество $T_{\text{оп}}^u = \{\tau_1^u, \tau_2^u, \dots, \tau_q^u\}$. Каждому $t \in T_{\text{оп}}^u$ припишем множество $J_{\text{оп}}^u(t) \subset J$, $|J_{\text{оп}}^u(t)| = |K|$, $t \in T_{\text{оп}}^u$. Обозначим: $J_{\text{оп}}^u = \{J_{\text{оп}}^u(t), t \in T_{\text{оп}}^u\}$, $J_{\text{н}}^u(t) = J \setminus J_{\text{оп}}^u(t)$, $t \in T_{\text{оп}}^u$.

Определение 2. Назовем $J_{\text{оп}}^u(t)$ локальной опорой в момент t , совокупность $Q_{\text{оп}}^u = \{T_{\text{оп}}^u; J_{\text{оп}}^u\}$ — локальной опорой, если $\det D(K, J_{\text{оп}}^u(t)) \neq 0$, $t \in T_{\text{оп}}^u$.

Определение 3. Совокупность $Q_{\text{оп}} = \{Q_{\text{оп}}^{uv}; Q_{\text{оп}}^u\}$ из совместной и локальной опор назовем опорой задачи.

Определение 4. Пару $\{\omega, O_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления и опоры задачи назовем опорным управлением.

Определение 5. Опорное управление $\{\omega, O_{\text{оп}}\}$ называется невырожденным, если все опорные компоненты управления являются некритическими.

Используя локальную опору, из (5) найдем

$$\Delta u_{J_{\text{оп}}^u(t)}^u(t) = D^{-1}(K, J_{\text{оп}}^u(t)) (-D(K, J_{\text{н}}^u(t)) \Delta u_{J_{\text{н}}^u(t)}^u(t) - G \Delta v), \quad t \in T_{\text{оп}}^u; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{J_{\text{оп}}^u(\tau_k^u)}^u(t) &= D^{-1}(K, J_{\text{оп}}^u(\tau_k^u)) (-D(K, J_{\text{н}}^u(\tau_k^u)) \Delta u_{J_{\text{н}}^u(\tau_k^u)}^u(t) - \\ &- G \Delta v), \quad t \in T_k \setminus T_{\text{оп}}^{uv} \equiv T^k; \quad T_k = T \cap [\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Критерии оптимальности и субоптимальности. Приращение критерия качества равно:

$$\Delta J(u, v) = \sum_{t \in T_g} c_x^* A^{t^* - t/h - 1} B \Delta u(t) + c_v^* \Delta v. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$Q_{\text{оп}}^{-1} = \begin{vmatrix} Q_1(\tau_1^{uv}) & Q_1(\tau_2^{uv}) & \dots & Q_1(\tau_p^{uv}) \\ Q_2(\tau_1^{uv}) & Q_2(\tau_2^{uv}) & \dots & Q_2(\tau_p^{uv}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_p(\tau_1^{uv}) & Q_p(\tau_2^{uv}) & \dots & Q_p(\tau_p^{uv}) \\ Q^v(\tau_1^{uv}) & Q^v(\tau_2^{uv}) & \dots & Q^v(\tau_p^{uv}) \end{vmatrix},$$

$$-\omega'(t) = \psi'(t) B(I, J_{\text{он}}^u(\tau_k^u)) D^{-1}(K, J_{\text{он}}^u(\tau_k^u)), t \in]\tau_{k-1}^u, \tau_k^u] \setminus T_{\text{он}}^{uv}, k = \overline{1, q}, \\ q = |T_{\text{он}}^u|;$$

$$-\omega'(t) = \sum_{i=1}^p \psi'(\tau_i^{uv}) B(I, J_{\text{он}}^{uv}(\tau_i^{uv})) Q_i(t) + \\ + [c_{\text{он}} + \sum_{k \in Q} \sum_{t \in T^k} \omega(t)]' G(K, L_{\text{он}}^v) Q^v(t), t \in T_{\text{он}}^{uv}, \quad (10)$$

$$-\Delta_h'(t) = \psi'(t) B(I, J_h^u(\tau_k^u)) + \omega'(t) D(K, J_h^u(\tau_k^u)), t \in T^k, k = \overline{1, q};$$

$$-\Delta_h^{u'}(t) = \psi'(t) B(I, J_h^{uv}(t)) + \omega'(t) D(K, J_h^{uv}(t)), t \in T_{\text{он}}^{uv},$$

$$-\Delta_h^{v'} = \left(\sum_{t \in T_{\text{он}}^{uv}} \omega'(t) + \sum_{t \in T_g \setminus T_{\text{он}}^{uv}} \omega(t) \right)' G(K, L_h^v) + c_{vh}',$$

где $\psi(t), t \in T_g$ — решение сопряженной системы

$$\psi(t-h) = A' \psi(t), t \in T_g, \quad (11)$$

с начальным условием $\psi(t^*-h) = c_v$.

Из (9) исключим опорные компоненты управляющего воздействия $u(t), t \in T$ и вектора v , пользуясь формулами (6), (7), (8) и обозначениями (10):

$$\Delta J(u, v) = - \sum_{k \in Q} \sum_{t \in T^k} \Delta_h'(t) \Delta u_{J_h^u(\tau_k^u)}(t) - \\ - \sum_{t \in T_{\text{он}}^{uv}} \Delta_h^{u'}(t) \Delta u_{J_h^{uv}(t)}(t) - \Delta_h^{v'} \Delta v_h. \quad (12)$$

Теорема 1. Для оптимальности опорного управления $\{\omega, O_{\text{он}}\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо, чтобы вдоль траектории $\psi(t), t \in T_g$ сопряженной системы (11) и функции $\omega(t), t \in T_g$, (10) выполнялись:

1) условие максимума для управляющего воздействия

$$(\psi'(t) B + \omega'(t) D) u(t) = \max_{d_* < y < d^*} (\psi'(t) B + \omega'(t) D) y, t \in T_g;$$

2) условие максимума для вектора управляющих параметров

$$\left(\sum_{t \in T_g} \omega'(t) G + c_v' \right) v = \max_{b_* < z < b^*} \left(\sum_{t \in T_g} \omega'(t) G + c_v' \right) z.$$

Теорема 2. Для ε -оптимальности допустимого управления $\omega = (u, v)$ необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $O_{\text{он}}$ вдоль траектории $\psi(t), t \in T_g$ сопряженной системы (11) и функции $\omega(t), t \in T_g$, (10) выполнялись условия:

$$1) (\psi'(t) B + \omega'(t) D) u(t) = \max_{d_* < y < d^*} (\psi'(t) B + \omega'(t) D) y - \varepsilon^u(t), t \in T_g,$$

$$2) \left(\sum_{t \in T_g} \omega'(t) G + c_v' \right) v = \max_{b_* < z < b^*} \left(\sum_{t \in T_g} \omega'(t) G + c_v' \right) z - \varepsilon^v,$$

$$3) \sum_{t \in T_g} \varepsilon^u(t) + \varepsilon^v \leq \varepsilon.$$

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Р. Ф. Габасову за внимание к работе.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск, 1984.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Там же. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 6.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

Поступила в редакцию 20.11.86.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ВИДЕ ТРЕХЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде трехлистной поверхности наложения сферы $\hat{S}$. Предположим, что заданы точки ветвления $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{k}$, $z_3 = \frac{1}{k}$, $z_4 = 1$ ($k > 1$) и образующие группы монодромии поверхности

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить поле алгебраических функций, соответствующее заданному накрытию сферы.

Нетрудно проверить, что $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 = 1$ и род поверхности R равен нулю. Следовательно, на ней существует всюду мероморфная функция с единственным простым полюсом [1]. Данная задача эквивалентна следующей векторно-матричной задаче Римана [2].

Найти все вектор-функции, аналитические вне контура $(-1, -1/k) \cup (1/k, 1)$ и ограниченные на его концах, по краевому условию:

$$\begin{pmatrix} w_1^+(t) \\ w_2^+(t) \\ w_3^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1^-(t) \\ w_2^-(t) \\ w_3^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (-1, -1/k),$$

(1)

$$\begin{pmatrix} w_1^+(t) \\ w_2^+(t) \\ w_3^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1^-(t) \\ w_2^-(t) \\ w_3^-(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (1/k, 1).$$

На бесконечности решение допускает следующую асимптотику: $w_1(z) \sim 3z$, $w_2(z) \sim c_1$, $w_3(z) \sim c_2$, $c_1, c_2 = \text{const}$ (при $z \rightarrow \infty$).

Прежде всего отметим, что если $w(z)$ такое решение задачи (1), при котором пара (z, w) порождает искомое поле алгебраических функций (т. е. (z, w) составляют примитивную пару), то они связаны неприводимым алгебраическим уравнением вида [2, 3]:

$$f(z, w) = w^3 + a_1(z)w^2 + a_2(z)w + a_3(z) = 0. \quad (2)$$

Задача (1) будет решена, если построить каноническую матрицу решений задачи или нормальный базис поля алгебраических функций, заданного уравнением (2).

Пусть $\alpha = \exp -\frac{2\pi i}{3}$. Тогда, применяя преобразования [4]

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

к системе (1), получаем:

$$\begin{vmatrix} \psi_1^+(t) \\ \psi_2^+(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1^-(t) \\ \psi_2^-(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (-1, -1/k), \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \psi_1^+(t) \\ \psi_2^+(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1^-(t) \\ \psi_2^-(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (1/k, 1),$$

$$\psi_3^+(t) = \psi_3^-(t), \quad t \in (-1, -1/k) \cup (1/k, 1), \quad (3a)$$

где $\psi(z) = S \circ \omega(z)$.

Для решения задачи (3) построим риманову поверхность R^* , образованную склеиванием двух экземпляров $\hat{S}$ вдоль разрезов $(-1, -1/k)$ и $(1/k, 1)$ по закону подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Уравнение поверхности R^* имеет вид: $u^{*2} = (1-z^2)(1-k^2z^2)$, а ее род равен $\rho^* = 1$. Далее, полагая

$$F^+(t, v^*) = \begin{cases} \psi_1^+(t, v^*), & (t, v^*) \in L_1, \\ \psi_1^-(t, v^*), & (t, v^*) \in L_2, \end{cases}$$

$$F^-(t, v^*) = \begin{cases} \psi_2^-(t, v^*), & (t, v^*) \in L_1, \\ \psi_2^+(t, v^*), & (t, v^*) \in L_2, \end{cases}$$

$$G(t, v^*) = \alpha, \quad (t, v^*) \in L_1 \cup L_2,$$

сведем задачу (3) к однородной задаче Римана на R^* [5].

$$F^+(t, v^*) = \alpha F^-(t, v^*), \quad (\infty, \pm\infty)^{-1} | (F), \quad (t, v^*) \in L_1 \cup L_2, \quad (4)$$

где L_1 и L_2 — соответственно верхний и нижний берега разреза $(1/k, 1)$ и

$$v^{*2} = (1-t^2)(1-k^2t^2).$$

Поскольку индекс коэффициента задачи (4) равен нулю, то $l-l' = \kappa + m + n - \rho^* + 1 = 2$ и $l=2$, т. е. задача имеет два линейно независимых решения [5]. Общее решение задачи (4) строится по формуле:

$$F(z, u^*) = \varphi(z, u^*) \cdot X(z, u^*), \quad (5)$$

$$\text{где } X(z, u^*) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(t, v^*) d\hat{\omega} - \int_{(0, L)}^{(t_0, u_0^*)} d\hat{\omega} - 2\pi i m \int_{(0, 1)}^{(z, u_0^*)} \frac{dt}{v^*} \right]$$

и $d\hat{\omega} = \frac{u^* + v^*}{2v^*} \cdot \frac{dt}{t-z}$ — аналог адра Коши на R^* .

Точки z_0, u_0^* и число m находим из следующей проблемы обращения Якоби:

$$\int_{(0, 1)}^{(z_0, u_0^*)} \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} = -\frac{2}{3}iK' - 2iK'm - 4Kn,$$

где K, K' — полные эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра. Решая проблему обращения, находим, что $m=0, n=0, z_0 = -\operatorname{sn}\left(\frac{2}{3}iK'\right), u_0^* = \operatorname{cn}\left(\frac{2}{3}iK'\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{2}{3}iK'\right)$. Здесь $\operatorname{sn}(\cdot), \operatorname{cn}(\cdot), \operatorname{dn}(\cdot)$ — эллиптические функции Якоби. Подставляя найденные значения в формулу (5), после несложных преобразований получаем:

$$F(z, u^*) = \varphi(z, u^*) \cdot \sqrt[3]{\frac{k(1-z)}{1-kz}} \cdot \sqrt{\frac{z}{z-z_0}} \times$$

$$\times \exp \left[-u^* \left(\frac{1}{3} \int_1^{1/k} \frac{dt}{(t-z)v^*} + \frac{1}{2} \int_{(0, 1)}^{(z_0, u_0^*)} \frac{dt}{(t-z)v^*} \right) \right], \quad (6)$$

$\varphi(z, u^*)$ является всюду мероморфной функцией, кратной дивизору $Q^{-1} = (z_0, u_0^*) \cdot (0, 1)^{-1} \cdot (\infty, +\infty)^{-1} \cdot (\infty, -\infty)^{-1}$, и представима в виде: $\varphi(z, u^*) = \frac{az^2 + bz + c + d \cdot u^*}{z}$. Пользуясь условием кратности $\varphi(z, u^*)$ заданному дивизору Q^{-1} , получаем: $\varphi(z, u^*) = (1 + z) \cdot b + \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot d$. Линейно независимые функции $\varphi_1(z) = 1 + z$ и $\varphi_2(z, u^*) = \frac{1 - z^2 + u^*}{z}$ составляют нормальный базис пространства рациональных функций, кратных дивизору Q^{-1} , и $\text{ord } \varphi_1(z) = \text{ord } \varphi_2(z, u^*) = 1$. Заменяя в (6) $\varphi(z, u^*)$ линейной комбинацией функций базиса и выделяя однозначные ветви решения в формуле (5), получаем каноническую матрицу решений задачи (3) [6, 7]:

$$\chi(z, u^*) = \begin{pmatrix} (1 + z) \cdot X(z, u^*) \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot X(z, u^*) \\ (1 + z) \cdot X(z, -u^*) \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot X(z, -u^*) \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи (3), (3a) записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + z) \cdot X(z, u^*) \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot X(z, u^*) & 0 \\ (1 + z) \cdot X(z, -u^*) \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot X(z, -u^*) & 0 \\ 0 & \sqrt{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\psi_1(z) = \left[(1 + z) d_1 + \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot d_2 \right] \cdot X(z, u^*)$,
 $\psi_2(z) = \left[(1 + z) d_1 + \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot d_2 \right] \cdot X(z, -u^*)$,
 $\psi_3(z) = \sqrt{3z}$, $d_1, d_2 \neq 0$.

Учитывая подстановку $\psi(z) = S \circ \omega(z)$, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha \varphi_1(z) + \alpha^2 \psi_2(z) + \psi_3(z)], \\ \omega_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha^2 \psi_1(z) + \alpha \psi_2(z) + \psi_3(z)], \\ \omega_3(z) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\psi_1(z) + \psi_2(z) + \psi_3(z)]. \end{aligned}$$

Теперь выделим то единственное решение, которое на бесконечности имеет асимптотку: $\omega_1(z) \sim 3z$, $\omega_2(z) \sim c_1$, $\omega_3(z) \sim c_2$. Имеем:

$$\begin{cases} [(\alpha + \alpha^2) d_1 + (k\alpha - k\alpha^2 + 1) d_2 + \sqrt{3}] z + (\alpha + \alpha^2) d_1 = 3\sqrt{3}z, \\ [\alpha + \alpha^2] d_1 + (k\alpha^2 - k\alpha + 1) d_2 + \sqrt{3} z + (\alpha + \alpha^2) d_1 = \sqrt{3} c_1, \\ (2d_1 - 2d_2 + \sqrt{3}) z + 2d_1 = \sqrt{3} c_2. \end{cases}$$

Сравнивая в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем систему линейных уравнений, решив которую, находим: $d_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2k}$, $d_2 = -i \frac{3}{2k}$, $c_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2k}$, $c_2 = -1 - i \frac{\sqrt{3}}{k}$. По формулам Виета находим выражения для коэффициентов искомого уравнения (2): $a_1(z) = -(\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0) = -\left(3z + \frac{k - i\sqrt{3}}{2k}\right)$, $a_2(z) = \omega_1^0 \cdot \omega_2^0 + \omega_1^0 \cdot \omega_3^0 + \omega_2^0 \cdot \omega_3^0 = -\left(\frac{3k + i3\sqrt{3}}{2k} z + \frac{k^2 - 3 + 2i\sqrt{3}}{2k^2}\right)$, $a_3(z) = -(\omega_1^0 \cdot \omega_2^0 \cdot \omega_3^0) = \frac{3k^2 - 9 + 2i\sqrt{3}}{2k^3} z$. Здесь $\omega_1^0(z)$, $\omega_2^0(z)$, $\omega_3^0(z)$ — решение (1) при $z \rightarrow \infty$. Таким образом,

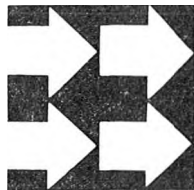
$$f(z, w) = w^3 - \left(3z + \frac{k - i\sqrt{3}}{2k}\right)w^2 - \left(\frac{3k + i3\sqrt{3}}{2k}z + \frac{k^2 - 3 + 2i\sqrt{3}}{2k^2}\right)w + \frac{3k^2 - 9 + 2i\sqrt{3}}{2k^2}z = 0. \quad (7)$$

Легко проверить, что уравнение (7) неприводимо. Следовательно, пара (z, w) , связанная уравнением (7), порождает искомое поле алгебраических функций [2].

Список литературы

1. Форстер О. Римановы поверхности. М., 1980. С. 247.
2. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 396.
3. Зверович Э. И. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 104.
4. Круглов В. Е. Сибирск. матем. журн. 1982. Т. 22. № 6. С. 87.
5. Зверович Э. И. // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
6. Зверович Э. И., Померанцева А. И. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. С. 511.

Поступила в редакцию 26.11.86.



УДК 621.315.592

Д. И. БРИНКЕВИЧ, Н. И. ГОРБАЧЕВА,
В. В. ПЕТРОВ, Б. М. ТУРОВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ГЕРМАНИЯ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТЕРМОДОНОРОВ В КРЕМНИИ

Легирование кремния изовалентной примесью германия подавляет процесс генерации термодоноров (ТД) [1—4]. Учитывая, что вследствие различия в величинах ковалентных радиусов этих элементов в кристаллах возникают внутренние упругие деформации, представляет интерес определение энергетического спектра ТД в $\text{Si} \langle \text{Ge} \rangle$.

Исследовался кремний с исходным удельным сопротивлением 20 Ом·см, легированный германием в процессе выращивания из расплава по методу Чохральского. Концентрация германия (N_{Ge}), по данным нейтронно-активационного анализа, составляла $3 \cdot 10^{18}$ — $1,5 \cdot 10^{20}$ см $^{-3}$, содержание кислорода в узловом и углерода в междоузельном положениях, определенное по полосам ИК поглощения (ИКП) при 9,1 и 16,5 мкм [5], — $9,0 \cdot 10^{17}$ и $5,6 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$ соответственно. Параллельно изучались контрольные образцы с идентичными исходными параметрами. Измерения эффекта Холла и проводимости выполнялись в температурном интервале 60—300 К. Спектры ИКП регистрировались на спектрофотометре Specord-75IR при 80 К. Термообработка (ТО) проводилась при 450, 650 и 800 °С. Для стимулирования процесса генерации высокотемпературных ТД часть образцов подвергалась предварительному нагреву при 450 °С.

Как установлено, примесь Ge не влияет на энергетическое положение ТД, генерируемых в кремнии при 450 °С. Во всех исследовавшихся ма-

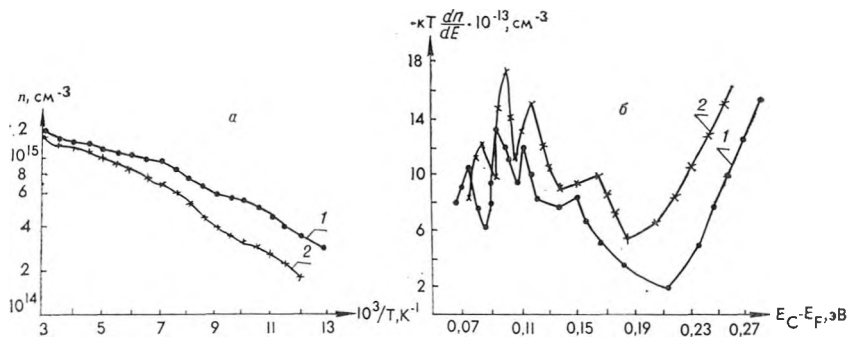


Рис. 1. Температурные зависимости концентрации основных носителей заряда (а) и зависимости $kT \frac{dn}{dE} = f(E_i - E_F)$ (б) образцов, термообработанных в течение 64 ч при 650 °С. Длительность предварительной ТО 128 ч; N_{Ge} , см $^{-3}$:

1 — 0; 2 — $3 \cdot 10^{19}$

териалах наблюдались только известные кислородсодержащие ТД с уровнями $\sim E_C - 0,135$ и $E_C - 0,06$ эВ [4]. Присутствие германия не изменяло энергетического положения полос ИКП, связанных с термодонарами. При $N_{Ge} \geq 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ имело место лишь отмеченное ранее [4] уширение полос, обусловленное деформационными напряжениями, создаваемыми примесными атомами германия.

Влияние Ge на энергетическое положение ТД проявлялось в кристаллах, подвергнутых ТО при более высоких температурах. Следует отметить, что температурные зависимости холловской подвижности в термообработанных кристаллах Si и Si<Ge> были идентичны, т. е. присутствие Ge не оказывало заметного влияния на процессы рассеяния основных носителей заряда. По температурным зависимостям концентрации носителей заряда (рис. 1, а) определить энергетическое положение ТД с помощью традиционного метода, основанного на решении уравнения электронейтральности для легированного компенсированного полупроводника, не представляется возможным. В данном случае нельзя установить число действующих электрически активных центров с близкой энергией ионизации. В такой ситуации обычно пользуются дифференциальным методом [6]. На рис. 1, б представлены зависимости $-kT \frac{dn}{dE} = f(E_C - E_F)$, где k — постоянная Больцмана; T — температура; E_F — энергия, соответствующая положению уровня Ферми; E_C — энергия дна зоны проводимости. Значения $E_C - E_F$, соответствующие максимумам указанных зависимостей, позволяют определить энергетическое положение ТД. Как установлено, вид рассматриваемых зависимостей, полученных для всех концентраций Ge, идентичен. В Si<Ge> наблюдалось смещение уровней ТД к середине запрещенной зоны, причем величина сдвига возрастала с повышением энергии ионизации центров. В термообработанных при 650 °С образцах, согласно рис. 1, б, наблюдались следующие энергетические уровни ТД. В контрольном: $E_C - 0,078$; $E_C - 0,090$; $E_C - 0,115$ и $\sim E_C - 0,15$ эВ; в Si<Ge> с $N_{Ge} = 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ $E_C - 0,085$; $E_C - 0,098$; $E_C - 0,124$ и $\sim E_C - 0,17$ эВ.

Влияние примеси Ge на энергетическое положение ТД, вводимых в ходе термообработки при 800 °С, аналогично ранее рассмотренному случаю: имеет место смещение уровней к середине запрещенной зоны, причем его величина более чем в два раза превышает соответствующее значение для образцов, подвергнутых ТО при 650 °С (рис. 2).

Учитывая, что в кристаллах Si<Ge> примесными атомами германия создаются локальные напряжения [3], можно было бы предположить, что они определяют сдвиг уровней ТД, однако оценки, согласно [7, 8], дают средние значения гидростатического давления, необходимого для получения наблюдавшихся смещений, $\sim 1000 \text{ Т/см}^2$. Наличие таких давлений в кристаллах Si<Ge> маловероятно. Аналогичные оценки и в случае одноосного сжатия вдоль главных кристаллографических направлений дают физически нереальные значения давлений и скоростей смещения уровней.

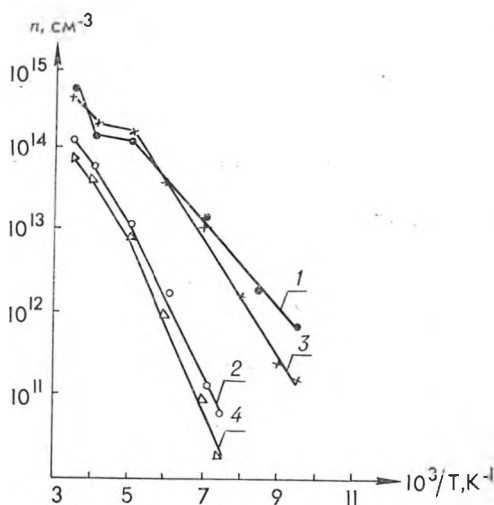


Рис. 2. Температурные зависимости концентрации основных носителей заряда образцов, термообработанных в течение 18 ч при 800 °С. Длительность предварительной ТО 350 ч, N_{Ge} , см^{-3} :

1 — 0; 2 — $3 \cdot 10^{18}$; 3 — $3 \cdot 10^{19}$; 4 — $1,5 \cdot 10^{20}$

Не исключено, что Ge входит в состав высокотемпературных термодоноров и, по всей вероятности, изменение их структуры определяет смещение соответствующих уровней.

Приведенные данные свидетельствуют о существенном влиянии примеси Ge на энергетическое положение высокотемпературных ТД. Однако анализ этого влияния весьма затруднен тем, что природа этих центров к настоящему времени не установлена. Кроме того, при ТО в диапазоне температур 600—800 °С одновременно вводится несколько видов как донорных, так и акцепторных центров [9, 10], причем энергетический спектр и концентрация ТД существенно зависят от режима термообработки.

В заключение отметим, что необходимы дополнительные исследования для изучения влияния Ge на процессы генерации высокотемпературных термодоноров в кремнии.

Авторы признательны М. И. Тарасику и В. С. Просоловичу за полезные дискуссии, В. В. Борщенскому за помощь в проведении экспериментов.

Список литературы

1. Бабицкий Ю. М., Горбачева Н. И., Гринштейн П. М., Ильин М. А., Мильвидский М. Г., Туровский Б. М. // ФТП. 1984. Т. 18. № 7. С. 1309.
2. Дашевский М. Я., Лымарь С. Г., Докучаева А. А., Итальянцев А. Г., Антонова И. А. // Изв. АН СССР: Неорганические материалы. 1985. Т. 21. № 11. С. 1827.
3. Бабицкий Ю. М., Гринштейн П. М., Ильин М. А., Кузнецов В. П., Мильвидский М. Г. // ФТП. 1985. Т. 19. № 11. С. 1982.
4. Бринкевич Д. И., Горбачева Н. И., Петров В. В., Ткачев В. Д., Туровский Б. М., Черный В. В. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. № 4. С. 308.
5. Ильин М. А., Коварский В. Я., Орлов А. Ф. // Заводская лаборатория. 1984. Т. 50. № 1. С. 24.
6. Hoffman H. J. // Appl. Phys. A. 1979. V. 19. № 2. P. 307.
7. Tayaata N., Otsuji T. // Journ. Appl. Phys. 1985. V. 57. № 10. P. 4623.
8. Пол В., Варшауэр Д. Твердые тела под высоким давлением. М., 1966.
9. Глинчук К. Д., Литовченко Н. М., Меркер Р. // Полупроводниковая техника и микроэлектроника: Республ. междуведомств. сб. Киев, 1977. Т. 25. С. 17.
10. Schmalz K., Gaworzewski P. // Phys. status solidi. 1981. V. A64. № 1. P. 151.

Поступила в редакцию 22.09.86.

УДК 621.315.592

А. А. ПАТРИН

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ В ПРОФИЛИРОВАННЫЙ КРЕМНИЙ

Профилированный кремний (ПК) является перспективным материалом для изготовления фотоэлектрических преобразователей солнечной энергии в электрическую. Кристаллы ПК характеризуются, как правило, наличием когерентных и малоугловых границ, блоков и других дефектов, вытянутых вдоль направления роста [1, 2]. Эти дефекты могут влиять на процессы диффузии примеси при формировании n — p -переходов и в конечном счете — на характеристики фотопреобразователей, изготовленных на основе ПК.

В настоящей работе решена задача визуализации фронта неоднородной диффузии примеси в профилированный кремний. Использован метод анализа в режиме наведенного электронным лучом тока РЭМ изображений плоскостей прецизионных клиньев в области их пересечений с плоскостью n — p -перехода. Эксперименты выполнены на образцах ПК, выращенных по методу Степанова, аналогично [3], в виде тонкостенных замкнутых профилей шестигранной формы с шириной грани 37 мм. Образцы ПК толщиной 0,4—0,5 мм имели p -тип проводимости и удельное

сопротивление 1—3 Ом·см; основная легирующая примесь — бор. Для исследований выбирались участки с типичными ростовыми дефектами. На полированной поверхности образцов диффузией из фосфорсодержащего диффузанта формировались n — p -переходы с расчетной глубиной залегания 0,8—1,0 мкм. На поверхности диффузионной структуры в окне 10×11 мм² химически формировался прецизионный клин с углом 1—2 мин; методика формирования клина соответствовала предложенной в [4]. Ожидаемый выход n — p -перехода на плоскость клина располагался на расстоянии 2—2,5 мм от линии, образованной пересечением плоскости клина с планарной поверхностью структуры. На планарной поверхности вне клина и на тыловой поверхности диффузионных структур формировались токосъемные контакты. Поверхность в области клина исследовалась в растровом электронном микроскопе «Jeol-35». При анализе в режиме наведенного электронным лучом тока в случае однородной диффузии в однородно легированную матрицу следовало ожидать проявления выхода n — p -перехода на плоскость клина в виде прямой линии.

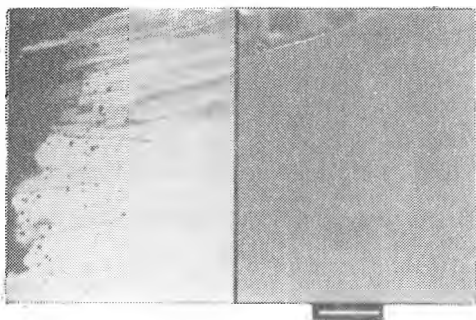


Рис. 1. РЭМ изображение участка поверхности клина (горизонтальная черта под фотографией — масштаб 1000 мкм)

РЭМ изображения, типичные для диффузионных структур на ПК, в области выхода n — p -перехода на поверхность клина показаны на рис. 1. В режиме наведенного тока (фотография слева) светлое поле соответствует области существования n — p -перехода под поверхностью структуры. След n — p -перехода на поверхности клина определяется вертикальной границей темного и светлого поля. Глубина клина увеличивается в пределах кадра справа налево от нуля до 3 мкм.

Как следует из РЭМ изображений в режиме вторичных электронов (фотография справа), поверхность клина при увеличении $10\times$ представляется геометрически достаточно однородной. В то же время при аналогичном увеличении в режиме наведенного тока проявляется неоднородное распределение электрически активных дефектов в кристалле ПК под n — p -переходом и наблюдается линия выхода n — p -перехода на плоскость клина как граница между зоной темного и светлого поля. Четко видно, что след n — p -перехода на поверхности клина непрямолинейен, он модулирован системой дефектов, вытянутых преимущественно вдоль направления роста профилированного кристалла. В области поверхности с большой плотностью линейных границ (см. рис. 1, верхняя часть кадра) четко проявляются «языки», ограниченные электрически активными линейными дефектами. (Изображение этого участка поверхности клина, полученное при увеличении $100\times$ в режиме наведенного тока, см. рис. 2, а). В пределах каждого монокристаллического участка, заключенного между парой границ, неплоскостность n — p -перехода, рассчитанная из нелинейности следа перехода на клине, не превышала $6 \cdot 10^{-3}$ мкм. На соседних монокристаллических участках глубины залегания переходов существенно разнятся, отличия достигают 0,4—0,5 мкм. В области с малой концентрацией линейных границ (нижняя часть кадра рис. 2) неплоскостность перехода в два—три раза меньше и в целом в таких областях n — p -переход залегает на 0,4—0,5 мкм глубже. (РЭМ изображение участка такой области, полученное при увеличении $100\times$ в режиме наведенного тока, см. рис. 2, б).

На отдельных участках монокристаллических областей в структурах ПК наблюдается характерная периодическая модуляция с периодом около 100 мкм яркости РЭМ изображения в виде полос, перпендикулярных

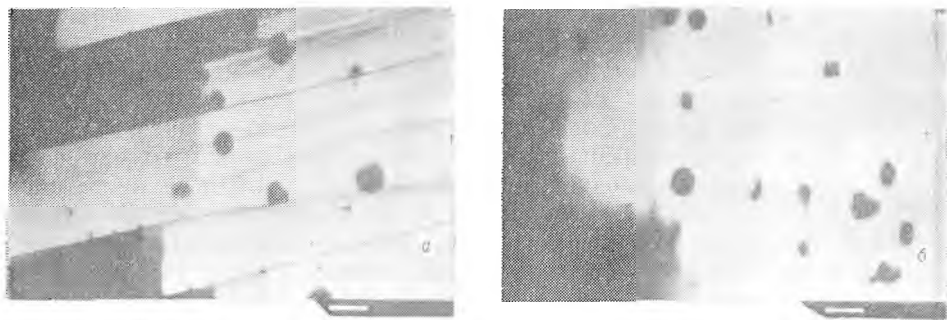


Рис. 2. РЭМ изображения в режиме наведенного тока участков структуры с линейными границами (а) и монокристаллического (б) вблизи выхода $n-p$ -перехода на поверхность клина (горизонтальная черта под фотографиями — масштаб 100 мкм)

к направлению роста кристалла. Обнаружены также дефекты в виде темных точек диаметром 30—50 мкм, детали изображения которых меняются при вариации толщины легированного слоя и энергии электронов.

Таким образом, при работе в электрическом контрасте на макроскопически большой площади визуализирован фронт диффузии примеси в структурно-неоднородный полупроводник. Вопросы анализа природы наблюдаемых характерных дефектов, информативности данных о переходном участке на границе фронта диффузии и других особенностях, проявляющихся при анализе полупроводниковых структур с прецизионными клиньями в РЭМ с использованием режима наведенного тока, представляют собой самостоятельную задачу, решаемую в настоящее время.

Автор благодарен В. И. Петрову и Э. И. Рау за содействие в исследованиях на РЭМ.

Список литературы

1. Ravi K. V. // Journ. Cryst. Growth. 1977. V. 39. P. 1.
2. Rao C. V. H. N., Getella M., Wald F. V., Ravi K. V. // Journ. Cryst. Growth. 1980. V. 50. P. 311.
3. Береза В. П., Овчинникова Т. А., Турковский В. Ю., Закс М. Б. // Новые методы получения электроэнергии. М., 1980. № 2(8). С. 45.
4. Huber A. M., Laurencin G., Razeghi M. // Journ. Phys. (France). 1983. V. 4. C. 4. Suppl. 9. P. 409.

Поступила в редакцию 22.09.86.

УДК 621.396:621.383

А. В. СИДОРЕНКО, В. С. КУРИЛО, С. Н. МАКСИМОВ

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОЛОКОННОЙ ОПТИКИ В СИСТЕМАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Преимущества оптического волокна, обеспечивающего малые вес и габариты системы, ее устойчивость к электромагнитным помехам, а также успехи в развитии интегральной электроники СВЧ диапазона позволяют использовать волоконно-оптические системы для передачи СВЧ сигнала в антенных комплексах [1, 2].

Одной из наиболее перспективных областей применения волоконной оптики являются системы распределения СВЧ сигналов в фазированных антенных решетках [1]. Требования, предъявляемые к указанным системам, определяются довольно жесткими допусками на точность передачи фазы и амплитуды СВЧ сигнала, которые составляют несколько градусов по фазе и до одного децибелла по амплитуде. Практические реализации подобных систем по данным известной нам литературы отсутствуют.

В настоящем сообщении приводятся результаты исследования двухканальной системы передачи СВЧ сигналов, которая может служить прототипом практической системы распределения СВЧ сигналов в фазированных антенных решетках.

Эксперименты проводились на макетах волоконно-оптических систем в деци- и сантиметровом диапазонах длин волн. В первом случае источником оптического излучения являлся полупроводниковый инжекционный лазер 32 ДЛ 102Б, а во втором — гелий-неоновый лазер ЛГ-38. Модуляция полупроводникового лазера осуществлялась непрерывным СВЧ сигналом, накладываемым на постоянное смещение лазерного диода. Модулирующие сигналы поступали к расположенным в каждом из каналов лазерам через делитель мощности от СВЧ генератора. Для модуляции газового лазера использовался электрооптический модулятор на селенистом цинке. Разделение оптического сигнала на два канала производилось оптическим разветвителем [3]. Оптические кабели на кварцевых многомодовых волокнах, потери которых не превышают трех децибелл на длинах волн 0,6—0,9 мкм, служили каналом передачи. Ввод лазерного излучения в кабель осуществлялся с помощью микрообъектива (при применении внешнего модулятора) или непосредственно (в случае полупроводникового лазера). Для повышения эффективности ввода лазерного излучения в параметрических фотоприемниках использовались градиентные линзы «Градан». В волоконно-оптических системах сантиметрового диапазона длин волн приемниками являются фотоэлектронные умножители бегущей волны с интерференционными светофильтрами на входе. В качестве приемников использованы разработанные нами параметрические фотоприемники на диодах ЛФД-2, позволяющие повысить уровень выходного сигнала почти на два порядка по сравнению с обычным фотодетектором [4]. Принцип действия указанных фотоприемников основан на параметрическом преобразовании частоты. При этом емкость $p-n$ -перехода модулируется внешним гармоническим высокочастотным сигналом накачки, что приводит к появлению выходного сигнала на частоте, равной разности частот сигналов накачки и гетеродинных биений. В разработанных макетах обеспечиваются режимы работы элементов, минимизирующие ошибки передачи по амплитуде и фазе СВЧ сигнала, передаваемого на оптической несущей.

Технические параметры двухканальных
волоконно-оптических систем передачи

Параметры	СВЧ диапазон	
	дм	см
Оптическая длина волны излучения, мкм	0,85	0,63
Максимальная мощность входного СВЧ сигнала P_m , Вт	10^{-4}	0,7
Отношение сигнал/шум при P_m , дБ	31	25
Долговременная нестабильность относительной электрической длины канала	$5 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
Долговременная нестабильность фазового сдвига между каналами	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
Долговременная нестабильность амплитуды СВЧ сигнала, дБ	0,01	0,03
Уровень перекрестных помех, дБ	18	16

В ходе эксперимента и статистической обработки результатов измерений определены основные параметры двухканальной системы распре-

деления СВЧ сигналов (см. таблицу), анализ которых позволяет сделать вывод о целесообразности ее применения в фазированных антенных решетках.

Список литературы

1. Wallington J. R., Criffin J. M.: // The GEC Journ. 1984. V. 2. № 2. P. 66.
2. Сидоренко А. В. // Тез. докл. II Всесоюз. конференц.: Метрологическое обеспечение антенных измерений. Ереван, 1981. С. 38.
3. Войтенко И. Г., Казадов А. Н. и др. // Изв. вузов СССР: Радио-электроника. 1983. Т. 26. № 5. С. 80.
4. Курило В. С., Пикулник В. Г., Сидоренко А. В. // Проблемы создания и применения в народном хозяйстве лазерной и оптико-электронной техники. Минск, 1982. С. 40.

Поступила в редакцию 19.05.86.

УДК 537.533.3

В. В. АПАНАСОВИЧ, Е. А. ЧУДОВСКАЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА МИКРОКАНАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

При фотометрических измерениях широкое распространение получают детекторы на основе микроканальных пластин (МКП), имеющие относительно высокий коэффициент усиления и значительно лучшие по сравнению с ФЭУ характеристики выходного сигнала [1]. Кроме того, с помощью этих детекторов можно получать информацию об исследуемом объекте в виде изображения с высоким пространственным разрешением.

В общем случае не удается аналитически разрешить математическую модель процесса образования лавины электронов в МКП с целью получения характеристик потока электронов, образующих выходной сигнал МКП. При значительных упрощениях механизмов каскадного умножения в канале найдены только выражения для среднего значения коэффициента усиления [2] и коэффициента шума [3] в статическом режиме работы МКП.

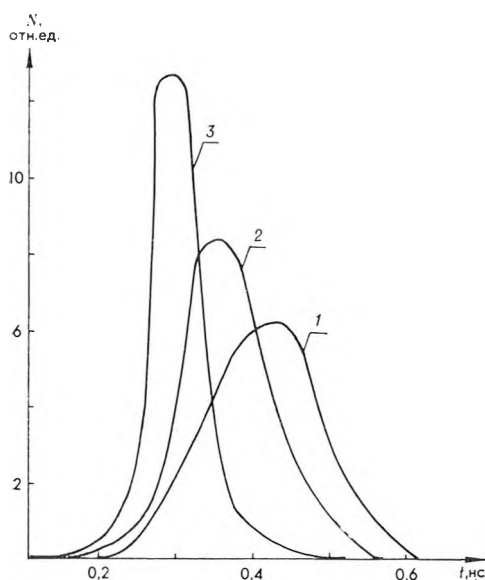
В настоящей работе для разрешения математической модели МКП используется метод имитационного моделирования, позволяющий с достаточной степенью точности воспроизводить все процессы, протекающие в микроканале пластины после попадания в него электрона.

Для построения имитационной модели МКП разработано формализованное описание кинетики образования лавины электронов в микроканале. Математической моделью процесса появления электронов в МКП является ветвящийся случайный процесс: электрон, влетая в микроканал, выбивает из его стенки вторичные электроны, которые, в свою очередь, двигаясь по параболическим траекториям и сталкиваясь со стенками канала, выбивают вторичные электроны. Число вторичных электронов ν , выбитых одним первичным, подчиняется распределению Пуассона со средним значением, совпадающим с коэффициентом вторичной эмиссии [4]:

$$\delta = \delta(0) [U/U_m \sqrt{\cos \theta}]^\beta \exp [\alpha (1 - \cos \theta) + \beta (1 - U/U_m \sqrt{\cos \theta})],$$

где θ — угол, образуемый вектором скорости электрона с нормалью к поверхности трубки в точке соударения; U — энергия падения электрона; U_m — максимальная энергия столкновения электрона со стенкой канала, соответствующая максимальному коэффициенту вторичной эмиссии $\delta(0)$ при нормальном падении первичного электрона; α — постоянная, зависящая от свойств материала ($\alpha=0,62$ для окисла свинца); β — константа, учитывающая особенности процесса умножения на разных его этапах ($0,55 \leq \beta \leq 0,65$ для $U/U_m < 1$ и $\beta \approx 0,25$ для $U/U_m \gg 1$). Каждый

из выбитых электронов, независимо от других вторичных электронов, обладает кинетической энергией, подчиняющейся распределению Релея [4], со средним значением $\bar{E}$ и вылетает под углом в соответствии с законом косинусов [5].



Временное распределение одноэлектронного импульса

на 1 мм, радиус 125 мкм, $\delta(0) = 3$, $U_m = 400$ эВ. Предполагалось, что электрон влетает в канал под углом $\theta = 5^\circ$ с энергией, равной 1000 эВ. За начало отсчета взят момент попадания электрона в канал. Из полученных значений следует, что с повышением напряжения улучшаются характеристики выходного сигнала. Увеличение V с 1000 до 2300 В приводит к сокращению фронта нарастания выходного сигнала с 0,15 до 0,05 нс и к уменьшению его полной ширины на полувысоте с 0,17 до 0,06 нс. Величины нормированных множителей при построении временных распределений для напряжений 1000, 1500 и 2300 В (см. рисунок, кривые 1—3) составили соответственно $0,92 \cdot 10^2$, $0,13 \cdot 10^5$ и $0,41 \cdot 10^6$. При этом статистическая погрешность для значений ординат полученных кривых в среднем не превышает 5 %.

Из проведенных экспериментов следует, что разработанная имитационная модель МКП позволяет, с одной стороны, проверять адекватность реальных физических процессов, происходящих в МКП, нашим представлениям о механизмах образования лавины электронов в канале; с другой — получать различные характеристики выходного сигнала в широком диапазоне измерения входных параметров, которые в дальнейшем могут использоваться для выбора оптимальных значений параметров МКП при проведении конкретных оптико-физических экспериментов.

Список литературы

1. Дмитриев В. Д., Лукьянов С. М., Пеннонжквич Ю. Э., Сатаров Д. К. // ПТЭ, 1982. № 2. С. 7.
2. Якобсон А. М. // Радиотехника и электроника. 1966. № 10. С. 1813.
3. Ronald L. Bell // IEEE Trans. Elect. Dev. 1975. V. ED-22. № 10. P. 821.
4. Guest A. J. // Acta Electronica. 1971. V. 14. № 1. P. 79.
5. Бронштейн И. М., Фрайман Б. С. Вторичная электронная эмиссия. М., 1969.

Поступила в редакцию 17.11.86.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЙ

Постановка задачи. В классе кусочно-непрерывных r -вектор функций $u = u(t) = (u_j(t), j \in J), t \in T$, рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) = U(t) = \{u \in R^r : D(t)u = f(t), d_*(t) \leq u \leq d^*(t)\}, t \in T = [0, t^*].$$

Здесь $A(t) = A(I, I/t), B(t) = B(I, J/t), D(t) = D(K, J/t)$ — матричные конечно-параметрические функции с кусочно-непрерывными элементами; $I = \{1, \dots, n\}, J = \{1, \dots, r\}, K = \{1, \dots, l\}; \text{rank } D(t) = l < r, t \in T; f(t), d^*(t), d_*(t), t \in T$, — конечно-параметрические вектор-функции с кусочно-непрерывными элементами.

При помощи формулы Коши задачу (1) запишем в эквивалентной функциональной форме:

$$\int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt \rightarrow \max, u(t) \in U(t), t \in T, \quad (2)$$

где $c'(t) = c'F(t^*, t)B(t) = \psi'(t)B(t), \psi(t), t \in T$, — решение (котраектория) сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \psi(t^*) = c. \quad (3)$$

Для задачи (1) составим функцию Гамильтона:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi'(A(t)x + B(t)u). \quad (4)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина для оптимальности допустимого управления $u(t), t \in T$, и соответствующей траектории $x(t), t \in T$, необходимо и достаточно, чтобы

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{u \in U(t)} H(x(t), \psi(t), u, t), t \in T. \quad (5)$$

Фактическая реализация этого результата связана с решением континуума конечномерных линейных задач (5). Наша цель — описать другой метод решения задачи (5).

Опорное управление. Составим множество $T_{\text{оп}}$ изолированных моментов времени $t_k \in T, k = \overline{0, s}$:

$$T_{\text{оп}} = \{t_k, k = \overline{0, s} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = t^*\}. \quad (6)$$

Отрезкам $T_k =]t_k, t_{k+1}]$ поставим в соответствие множества $J_k \subset J, |J_k| = l, k = \overline{0, s}$. Обозначим:

$$\begin{aligned} J_{k\text{н}} &= J \setminus J_k, J_{\text{оп}} = \{J_k, k = \overline{0, s}\}, S_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}, \\ D_k(t) &= D(K, J_k|t), D_{k\text{н}}(t) = D(K, J_{k\text{н}}|t), \\ B_k(t) &= B(K, J_k|t), B_{k\text{н}}(t) = B(K, J_{k\text{н}}|t), k = \overline{0, s}. \end{aligned} \quad (7)$$

Совокупность $S_{\text{оп}}$ назовем опорой задачи (1), если $\det D_k(t) \neq 0, t \in T_k, k = \overline{0, s}$. Пара $\{u, S_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления u и опоры $S_{\text{оп}}$ — опорное управление. Опорное управление — невырожденное, если $d_{*j}(t) < u_j(t) < d_j^*(t), t \in T_k, j \in J_k, k = \overline{0, s}$.

Построим вектор-функцию $\xi_k(t) = \psi'(t)B_k(t)D_k^{-1}(t)$, вектор-функцию оценок (коуправление) $\Delta_{k\text{н}}(t) = \xi_k(t)D_{k\text{н}}(t) - \psi'(t)B_{k\text{н}}(t)$. Нетрудно проверить, что $\Delta_{k\text{оп}}(t) = \xi_k(t)D_k(t) - \psi'(t)B_k(t) = 0, t \in T_k, k = \overline{0, s}$.

Критерий оптимальности. Соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta_{kj}(t) &\geq 0 \text{ при } u_j(t) = d_{*j}(t), \Delta_{kj}(t) \leq 0 \text{ при } u_j(t) = d_j^*(t), \\ \Delta_{kj}(t) &= 0 \text{ при } d_{*j}(t) < u_j(t) < d_j^*(t), t \in T_k, j \in J_{k\text{н}}, k = \overline{0, s} \end{aligned} \quad (8)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного управления $\{u, S_{\text{оп}}\}$.

Алгоритм. Для произвольного момента $t \in T$ сформируем задачу

$$\psi'(t)B(t)u \rightarrow \max, D(t)u = f(t), d_*(t) \leq u \leq d^*(t). \quad (9)$$

Введем три параметра $J_{\text{оп}}, \tau, \tau_0$.

1. Зададим $J_{\text{оп}} = \emptyset, \tau = t^*, \tau_0 = 0$.

2. При $t = \tau$ решим задачу (9) двойственным двухфазным алгоритмом, описанным в [1], с начальной опорой $J_{\text{оп}}$. Пусть $\{u(\tau), D_{\text{оп}}(\tau)\}$ — оптимальный опорный план. Здесь $D_{\text{оп}}(\tau) = D(K, J_{\text{оп}}(\tau) | \tau)$.

3. По $D_{\text{оп}}(\tau)$ вычислим вектор-функцию $u'(t | \tau) = c_{\text{оп}}(t | \tau) D_{\text{оп}}^{-1}(\tau)$, где $c_{\text{оп}}(t | \tau) = (c_j(t), j \in J_{\text{оп}}(\tau)), t \in [\tau_0, \tau]$, оценки неопорных векторов условий $d_j(\tau), j \in J_{\text{н}}(\tau): \Delta_j(t | \tau) = u'(t | \tau) d_j(\tau) - c_j(t | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau), t \in [\tau_0, \tau]$, где $d_j(\tau) = D(K, j | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau)$.

4. Если выполняется условие $\Delta_j(t | \tau) \cdot \Delta_j(\tau | \tau) \geq 0, j \in J_{\text{н}}(\tau), t \in [\tau_0, \tau]$, то переходим в 5. В противном случае находим $t_1 = \max \{s \in [\tau_0, \tau] : \Delta_j(s | \tau) = 0, j \in J_{\text{н}}(\tau)\}$ и переходим в 8.

5. Построим псевдоуправление: $\omega_j(t | \tau) = d_{*j}(t)$ при $\Delta_j(t | \tau) > 0$; $\omega_j(t | \tau) = d_j^*(t)$ при $\Delta_j(t | \tau) < 0, j \in J_{\text{н}}(\tau)$; $\omega_{\text{оп}}(t | \tau) = D_{\text{оп}}^{-1}(\tau) \cdot (f(t) - D_{\text{н}}(\tau) \omega_{\text{н}}(t | \tau)), t \in [\tau_0, \tau]$, где $\omega_{\text{оп}}(t | \tau) = (\omega_j(t | \tau), j \in J_{\text{оп}}(\tau)), \omega_{\text{н}}(t | \tau) = (\omega_j(t | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau)), D_{\text{н}}(\tau) = D(K, J_{\text{н}}(\tau) | \tau)$.

6. Если $d_{* \text{оп}}(t) \leq \omega_{\text{оп}}(t | \tau) \leq d_{\text{оп}}^*(t), t \in [\tau_0, \tau]$, то переходим в 9. В противном случае находим $t_2 = \max \{s \in [\tau_0, \tau] : d_{*j}(s) > \omega_j(s | \tau) \text{ или } d_j^*(s) < \omega_j(s | \tau), j \in J_{\text{оп}}(\tau)\}$ и переходим в 7.

7. Псевдоуправление $\omega(t | \tau) = \omega_{\text{оп}}(t | \tau), \omega_{\text{н}}(t | \tau)$ — решение задачи (9) на отрезке $[t_2, \tau]$. Переходим в 2 с $J_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}(\tau), \tau = t_2$.

8. Переходим в 5 с $\tau_0 = t_1 - 0$.

9. Псевдоуправление $\omega(t | \tau)$ — решение задачи (9) на отрезке $[\tau_0, \tau]$. Если $\tau_0 = 0$, то переходим в 10. В противном случае переходим в 2 с $J_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}(\tau), \tau = \tau_0, \tau_0 = 0$.

10. Решение задачи (9) найдено на всем отрезке T .

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. Габасову за постановку задачи и постоянное внимание.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Там же. Ч. 3: Сетевые задачи. Минск, 1986.

Поступила в редакцию 29.10.86.

УДК 519.852

Л. А. САВЕЛОВА

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Если в задаче линейного программирования нет двусторонних ограничений на переменные, то ее целевая функция может принимать неограниченные значения, а двойственная задача может не иметь планов. Эти обстоятельства усложняют проблему построения адаптивного метода, предложенного в книге Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой, А. И. Тятюшкина (Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск, 1984). Опишем один из подходов к проблеме.

Рассмотрим нормальную задачу линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (1)$$

где $A = A(I, J), I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, m \leq n$. Во множествах I, J выделим подмножества $I_{\text{оп}} \subset I, J_{\text{оп}} \subset J, |I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$. Совокупность $K_{\text{оп}} =$

$= \{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ назовем опорой, а матрицу $A_{\text{оп}} = A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ — опорной, если выполняется $\det A_{\text{оп}} \neq 0$. Пусть $\{x, K_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (1). Построим итерацию метода: $\{x, K_{\text{оп}}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{K}_{\text{оп}}\}$.

Шаг 1. Выберем параметр метода $\varepsilon > 0$ и построим векторы потенциалов $u(I)$, оценок $\Delta(J)$ и невязок $\omega(I)$:

$$u'(I) = u'(I_{\text{оп}}) = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}; \Delta'(J) = u'(I_{\text{оп}}) A(I_{\text{оп}}, J) - c'(J), \omega(I) = b(I) - A(I, J)x(J).$$

Шаг 2. Проверим выполнение соотношений

$$u'_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}}; \Delta_j \geq 0, j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}. \quad (2)$$

Если (2) выполняется, перейдем к шагу 3, иначе — к шагу 4.

Шаг 3. Подсчитаем число

$$\beta = \sum_{\substack{\Delta_j > 0, \\ j \in J_{\text{н}}}} \Delta_j x_j + \sum_{\substack{u'_i > 0, \\ i \in I_{\text{оп}}}} u'_i \omega_i.$$

Если выполняется соотношение

$$\beta \leq \varepsilon, \quad (3)$$

то решение задачи прекращаем на плане $x^* = x$. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. Построим подходящее направление $l = (l_{\text{оп}}, l_{\text{н}})$: $l_j = -x_j$, если $\Delta_j > 0$; $l_j = -\Delta_j$, если $\Delta_j \leq 0$, $j \in J_{\text{н}}$; $l(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1} \eta(I_{\text{оп}}) - A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}})l(J_{\text{н}})$, где $\eta_i = \omega_i$, если $u'_i > 0$; $\eta_i = u'_i$, если $u'_i \leq 0$, $i \in I_{\text{оп}}$.

Шаг 5. Вычислим максимально допустимый шаг вдоль l : $\theta = \min\{1, \theta_{i_0}, \theta_{j_0}\}$, где $\theta_{i_0} = \min \theta_i$, $i \in I_{\text{н}}$; $\theta_i = \omega_i / a_{(i)} l$, если $a_{(i)} l > 0$; $\theta_i = \infty$, если $a_{(i)} l \leq 0$, $i \in I_{\text{н}}$; $\theta_{j_0} = \min \theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\theta_j = -x_j / l_j$, если $l_j < 0$, $\theta_j = \infty$, если $l_j \geq 0$, $j \in J_{\text{оп}}$.

Шаг 6. Построим новый план $\bar{x} = x + \theta l$. В зависимости от того, на чем реализуется шаг θ , возможны следующие случаи.

1. Если $\theta = 1$ и (2) выполняется, то прекращаем решение на оптимальном плане $x^0 = \bar{x}$;

2. Если $\theta = 1$ и (2) не выполняется, то переходим к шагу 7.

3. Если $\theta < 1$ и (2) выполняется, вычислим число β и проверим соотношение (3). Если (3) выполняется, то решение прекращаем на субоптимальном плане $x^* = \bar{x}$. Иначе — переходим к шагу 8.

4. Если $\theta < 1$ и (2) не выполняется, то переходим к шагу 8.

Шаг 7. Для плана $\bar{x}$ построим направление $\bar{l}$ и вычислим шаг $\bar{\theta} = \min\{\bar{\theta}_{i_0}, \bar{\theta}_{j_0}\}$. При $\bar{\theta} = \infty$ решение прекращаем, так как целевая функция неограниченно возрастает. Если $\bar{\theta} < \infty$, то построим новый план $\tilde{x} = \bar{x} + \bar{\theta} \bar{l}$ и перейдем к шагу 8.

Шаг 8. Вычислим направление изменения коплана $\delta = (\delta(I_{\text{оп}}), \delta(J_{\text{н}}))$:

а) при $\theta = \theta_{i_0}$

$$\delta(I_{\text{оп}}) = -e'_{i_0} A(I_{\text{н}}, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1},$$

$$\delta(J_{\text{н}}) = e'_{i_0} (A(I_{\text{н}}, J_{\text{н}}) - A(I_{\text{н}}, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}));$$

б) при $\theta = \theta_{j_0}$

$$\delta(I_{\text{оп}}) = e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1}; \delta(J_{\text{н}}) = e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}).$$

Если (2) выполняется, то переходим к шагу 9. Иначе — к шагу 11.

Шаг 9. Вычислим максимально возможный шаг вдоль δ : $\sigma = \min\{\sigma_{i_*}, \sigma_{j_*}\}$, где $\sigma_{i_*} = \min \sigma_i$, $i \in I_{\text{оп}}$; $\sigma_{j_*} = \min \sigma_j$, $j \in J_{\text{н}}$;

$$\sigma_i = \begin{cases} -u_i / \delta_i, & \text{если } u_i \delta_i < 0; \\ 0, & \text{если } u_i = 0, \delta_i < 0; \\ \infty & \text{в остальных случаях, } i \in I_{\text{оп}}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j/\delta_j, & \text{если } \Delta_j \delta_j < 0; \\ 0, & \text{если } \Delta_j = 0, \delta_j < 0; \\ \infty & \text{в остальных случаях, } j \in J_n. \end{cases} \quad (5)$$

Шаг 10. Построим новые векторы $\bar{u}(I) = u(I) + \sigma \delta(I)$, $\bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma \delta(J)$ и перейдем к шагу 15.

Шаг 11. Вычислим начальную скорость вдоль направления δ :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \kappa_{j_0}, & \text{если } \theta = \theta_{j_0}; \\ b_{i_0} - A(i_0, J) \kappa, & \text{если } \theta = \theta_{i_0}, \text{ где } \kappa = x + l. \end{cases}$$

Шаг 12. Подсчитаем числа σ_i , $i \in I_{\text{оп}}$, и σ_j , $j \in J_n$, по формулам (4) — (5) и все конечные из них упорядочим по возрастанию $\sigma_{\bar{j}_1} \leq \sigma_{\bar{j}_2} \leq \dots \leq \sigma_{\bar{j}_r}$, $r \leq n$.

Шаг 13. Если $\delta_{\bar{j}_k} \geq 0$, $\bar{j}_k \in (I_{\text{оп}}, J_n)$, то вычислим

$$\Delta \alpha_k = \begin{cases} \delta_{\bar{j}_k} \kappa_{\bar{j}_k}, & \text{если } \bar{j}_k \in J_n; \\ \delta_{\bar{j}_k} (A(\bar{j}_k, J) \kappa - b_{\bar{j}_k}), & \text{если } \bar{j}_k \in I_{\text{оп}}. \end{cases}$$

Если тогда $\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \Delta \alpha_i \geq 0$, то положим $\sigma = \sigma_{\bar{j}_p} = \sigma_{\bar{j}_*}$ и перейдем к шагу 10.

Шаг 14. Если $\delta_{\bar{j}_k} < 0$, $\bar{j}_k \in (I_{\text{оп}}, J_n)$, то положим $\sigma = \sigma_{\bar{j}_k} = \sigma_{\bar{j}_*}$ и перейдем к шагу 10.

Шаг 15. Заменим опору $K_{\text{оп}}$ на $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, где

- 1) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup \bar{j}_*$, если $\theta = \theta_{j_0}$, $\bar{j}_* \in J_n$;
- 2) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus \bar{j}_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$, если $\theta = \theta_{j_0}$, $\bar{j}_* \in I_{\text{оп}}$;
- 3) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup \bar{j}_*$, если $\theta = \theta_{i_0}$, $\bar{j}_* \in J_n$;
- 4) $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus \bar{j}_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $\theta = \theta_{i_0}$, $\bar{j}_* \in I_{\text{оп}}$,

и перейдем к шагу 2.

Поступила в редакцию 20.11.86.

УДК 539.3

И. А. ЕГОРЕНКОВ, И. А. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПНЫХ ШПАНГОУТОВ

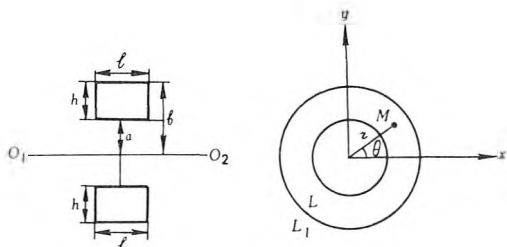
Применяемые в современной технике шпангоуты во многих случаях в пределах допускаемой нагрузки можно рассматривать как упругое тело, обладающее цилиндрической анизотропией. Если внешняя нагрузка такая, что напряжениями σ_z , τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, отнесенными к цилиндрическим координатам r , θ , z (см. рисунок), можно пренебречь, для решения задач по определению НДС шпангоута необходимо знать его упругие характеристики [1]:

$$a_{11} = 1/E_r, \quad a_{22} = 1/E_\theta, \quad a_{12} = -\nu_1/E_\theta = -\nu_2/E_r. \quad (1)$$

Наиболее достоверную информацию о значениях величин (1) можно получить путем экспериментов со сплошным шпангоутом. В нашей работе выведены три уравнения, используя которые можно найти значения величин a_{ij} по данным эксперимента для радиальных смещений точек на

цилиндрических поверхностях шпангоута, подвергнутого равномерному растяжению или сжатию в радиальном направлении.

Растяжение шпангоута нормальным давлением на внутренней цилиндрической поверхности. Пусть L и L_1 — концентричные окружности с радиусами a и b ($a < b$). Его сечение диаметральной плоскостью — прямоугольник $h \times l$ (см. рисунок). Предположим, что на цилиндрических поверхностях



Сечения шпангоута

$$\sigma_r = -q = \text{const на } L, \sigma_r = 0 \text{ на } L_1. \quad (2)$$

Применяя формулы [1, 2]:

$\sigma_r = M(b/r)^{1-\gamma} - N(b/r)^{1+\gamma}$, $\sigma_\theta = \gamma[M(b/r)^{1-\gamma} + N(b/r)^{1+\gamma}]$, где M и N — произвольные постоянные; $\gamma = \sqrt{a_{11}/a_{22}} = \sqrt{E_6/E_r}$, с учетом условий (2) найдем:

$$\sigma_r = [(b/r)^{1-\gamma} - (b/r)^{1+\gamma}]q/\lambda(\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}), \quad \sigma_\theta = [(b/r)^{1-\gamma} + (b/r)^{1+\gamma}]q\gamma/\lambda(\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}).$$

Зная σ_r и σ_θ , значения радиальных смещений u_r любой точки шпангоута найдем по формуле $u_r = r(a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta)$. В частности, для точек на контурах L и L_1 найдем

$$u_q = a(-a_{12} + \varepsilon_1 a_{22})q, \quad u_q^{(1)} = a\varepsilon_2 a_{22}q, \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = \gamma(\lambda^\gamma + \lambda^{-\gamma})/\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}$; $\varepsilon_2 = 2\gamma/\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}$; u_q и $u_q^{(1)}$ — значения u_r на L и L_1 .

Сжатие шпангоута нормальным давлением на внешней цилиндрической поверхности шпангоута. Предположим теперь, что $\sigma_r = 0$ на L , $\sigma_r = -p = \text{const}$ на L_1 . Поступая, как выше, получаем $\sigma_r = [\lambda^{-\gamma}(b/r)^{1+\gamma} - \lambda^\gamma(b/r)^{1-\gamma}]p/\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}$, $\sigma_\theta = [\lambda^{-\gamma}(b/r)^{1+\gamma} + \lambda^\gamma(b/r)^{1-\gamma}]\gamma p/\lambda^\gamma - \lambda^{-\gamma}$. Следовательно, радиальные смещения на L и L_1 определяются выражениями:

$$u_p = -b\varepsilon_2 a_{22}p, \quad u_p^{(1)} = -b(a_{12} + \varepsilon_1 a_{22})p. \quad (4)$$

Из четырех уравнений (3), (4) независимыми будут только три:

$$\varepsilon_1 a_{22} - a_{12} = b_1, \quad \varepsilon_1 a_{22} + a_{12} = -b_2, \quad \varepsilon_2 a_{22} = b_3, \quad (5)$$

где $b_1 = \frac{u_q}{aq}$, $b_2 = \frac{|u_p^{(1)}|}{bp}$, $b_3 = \frac{u_q^{(1)}}{aq}$ — величины, найденные путем эксперимента. Считая их известными, найдем $a_{12} = -(b_1 + b_2)/2$. Используя затем первое и третье из уравнений (5), получаем: $\lambda^\gamma + \lambda^{-\gamma} = 2m$, $m = (b_1 - b_2)/2$. Согласно этому уравнению, $\lambda^\gamma = m + \sqrt{m^2 - 1}$, $\gamma = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})/\ln \lambda$.

По найденному γ можно найти ε_2 , затем a_{11} и a_{22} найдем из уравнений: $a_{11}/a_{22} = \gamma^2$, $\varepsilon_2 a_{22} = b_3$.

Поскольку нахождение радиальных смещений для указанной нагрузки не вызывает технических трудностей, используя полученные формулы, можно определить характеристики материала шпангоута a_{ij} , не прибегая к испытаниям его элементов.

Список литературы

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
2. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. Минск, 1978.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим встречающееся в приложениях дифференциальное уравнение [1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + \Phi(y) + F(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$, $F(x)$, $\Phi(y)$ — вещественные голоморфные в окрестности точки $(0, 0)$ функции, $\Phi(y) \neq y$, $\Phi(y) \neq \text{const}$ *.

Групповой анализ этого уравнения при $\Phi(y) \equiv K \exp y$ ($K = \text{const} \neq 0$) проведен в работах [2, 3]. Ниже будет показано, что такая специализация функции $\Phi(y)$ является (с точностью до линейной замены неизвестной функции) необходимой для инвариантности уравнения (1) относительно однопараметрической группы преобразований.

Пусть $X = \xi(x, y) \frac{d}{dx} + \eta(x, y) \frac{d}{dy} + \xi_1(x, y, y') \frac{d}{dy'} + \xi_{11}(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''}$ — инфинитизимальный оператор [4]. Тогда определяющее уравнение для выражения (1) имеет вид

$$(f'y' + F')\xi + f\xi_1 + \Phi'\eta + \xi_{11}|_{y''} = -\left(f \frac{dy}{dx} + \Phi + F\right) = 0, \quad (2)$$

где штрих обозначает производную.

Подставляя в (2) вместо ξ_1 , ξ_{11} соответствующие выражения (см., например, [3]), имеем: $(f'y' + F')\xi + \Phi'\eta + f(\eta_x + y'\eta_y - y'\xi_x - y'^2\xi_y) + \eta_{xx} + y'\eta_{xy} - y'^2\xi_{xx} - y'^2\xi_{xy} + y'(\eta_{xy} + y'\eta_{yy} - y'\xi_{xy} - y'^2\xi_{yy}) - (fy' + \Phi + F)(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) = 0$. Сравнивая в последнем соотношении коэффициенты при одинаковых степенях производной y' , приходим к системе уравнений:

$$\xi_{yy} = 0,$$

$$-f\xi_y - 2\xi_{xy} + \eta_{yy} + 3f\xi_y = 0, \quad (3)$$

$$f'\xi + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + f\xi_x + 3\Phi\xi_y + 3F\xi_y = 0,$$

$$F'\xi + \Phi'\eta + f\eta_x + \eta_{xx} - F(\eta_y - 2\xi_x) - \Phi(\eta_y - 2\xi_x) = 0.$$

Из первых двух уравнений системы (3) получаем, что

$$\xi = B_1(x), \quad \eta = B_2(x)y + C_2(x), \quad (4)$$

где функции $B_1(x)$, $B_2(x)$ и $C_2(x)$ определяются из последующих уравнений системы. Подставляя (4) в оставшиеся уравнения системы (3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y , имеем:

$$f'B_1 + 2B_2' - 2B_1' + fB_1' = 0,$$

$$F'B_1 + \Phi'(B_2y + C_2) + f(B_2'y + C_2') + B_2''y + C_2'' - F(B_2y - 2B_1') - \Phi(B_2 - 2B_1') = 0.$$

Полученная система при сделанных ранее предположениях относительно $\Phi(y)$ равносильна системе

$$f'B_1 + 2B_2' - 2B_1' + fB_1' = 0,$$

$$F'B_1 + fC_2' + C_2'' - FB_2 + 2FB_1' = 0, \quad (5)$$

$$\Phi'(B_2y + C_2) + fB_2'y + B_2''y - \Phi(B_2 - 2B_1') = 0.$$

Последнее соотношение системы выполнено лишь при $B_2 \equiv 0$. При этом условии получаем последовательно

* Линейное уравнение изучено в классических работах С. Ли (см. [4]).

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{2B_1'}{C_2} \equiv \frac{1}{\mu}, \quad \Phi(y) = K \exp(y/\mu), \quad (6)-(7)$$

где K и μ — произвольные постоянные.

Из соотношения (6) следует $C_2 = -2\mu B_1'$, и далее два первых уравнения системы (5) переписутся в виде

$$B_1'' = f' B_1 + f B_1', \quad F' B_1 - 2\mu f B_1'' - 2\mu B_1''' + 2F B_1 = 0. \quad (8)$$

Из соотношений (8) получаем, что система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$3u'^2 - 2uu'' - 4f'u^2 + 2fuu' = 0, \quad (9)$$

где $u = F - 2\mu f'^2 - 2\mu f'$.

Если $u \neq 0$, то из соотношения (9) следует, что функция $v = -\frac{1}{2} \frac{d \ln u}{dx}$ удовлетворяет уравнению Риккати $v' - f v = -v^2 + f'$, т. е. $v = f' + ((\exp(\int f(x) dx))(C + \exp(-\int f(x) dx)))^{-1}$, где C — произвольная постоянная.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема. Для того чтобы нелинейное уравнение (1) допускало непрерывную по параметру a группу преобразований

$$x^* = g(x, y, a), \quad y^* = h(x, y, a) \quad (10)$$

необходимо, чтобы функция $\Phi(y)$ имела вид (7). Если это условие выполнено, то уравнение (1) допускает группу (10) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (9).

Преобразования (10) находятся как решения соответствующей задачи Коши. Подробнее см. [5]; там же указаны уравнения вида (1), допускающие непрерывную группу, общее решение которых можно построить по одному известному частному решению.

Пример. Уравнение $y'' + \alpha y' + K \exp(y/\mu) + 2\mu \alpha^2 = 0$ допускает группу $x^* = -\frac{1}{\alpha} \ln |c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|$, $y^* = y + 2\mu \alpha(x + c_2) + 2 \ln |c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|$, где c_1 и c_2 — параметры.

Общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $y = -2\alpha \mu(x + c_2) - 2 \ln |c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))| + y_1(-\frac{1}{\alpha} \ln |c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|)$, где $y_1(x)$ — его частное решение.

Список литературы

1. Чудновский В. М., Холодkevич Е. Д. // ФТТ. 1982. Т. 24. № 4. С. 1118.
2. Самодуров А. А. // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М., 1986. С. 14.
3. Самодуров А. А., Чудновский В. М. // Диф. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 911.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., 1980.
5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. Уравнения Риккати и Абеля. Гродно, 1986.

Поступила в редакцию 12.02.87.

ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим стационарную линейную неоднородную систему с запаздыванием:

$$A_0 \dot{x}(t) + Ax(t) + A_1 x(t-1) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), \quad -1 \leq t < 0, \quad x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где x — n -вектор; A_0, A, A_1 — заданные $n \times n$ -матрицы; $f(t), \varphi(t)$ — кусочно-непрерывные n -вектор-функции; x_0 — заданный n -вектор.

Если матрица A_0 имеет обратную A_0^{-1} , то система (1) равносильна системе $\dot{x}(t) + A_0^{-1} Ax(t) + A_0^{-1} A_1 x(t-1) = A_0^{-1} f(t), \quad t \geq 0$, которая имеет единственное решение для каждого начального условия (2).

Пусть $\det A_0 = 0$. Систему (1) в этом случае будем называть сингулярной.

Начальное условие (2) назовем допустимым, если сингулярная система (1) имеет хотя бы одно решение. Если для каждого допустимого начального условия система (1) имеет единственное решение, то каждую систему будем называть совместной.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия.

Определение 1. Наименьшее неотрицательное число k_0 называется индексом матрицы A_0 , если $\text{rank } A_0^{k_0+1} = \text{rank } A_0^{k_0}$. Индекс матрицы A_0 обозначается $\text{ind } A_0$.

Определение 2. Матрица X , являющаяся решением трех матричных уравнений $XA_0 = A_0X, XA_0X = X, XA_0^{k_0+1} = A_0^{k_0}$, где $k_0 = \text{ind } A_0$, называется обратной Драйзина для матрицы A_0 .

Для любой квадратной матрицы обратная матрица Драйзина существует, единственна и обозначается A_0^D . Свойства и применение обратной Драйзина можно найти в работе S. L. Campbell, C. D. Meyer. Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitman. London. England, 1979.

Очевидно, что система (1) совместна тогда и только тогда, когда совместна соответствующая ей однородная система

$$A_0 \dot{x}(t) + Ax(t) + A_1 x(t-1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Справедливы утверждения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$A_0(A + mA_1) = (A + mA_1)A_0, \quad \text{Ker } A_0 \cap \text{Ker}(A + mA_1) = \{0\} \quad (4) - (5)$$

для любого $m, m \in \mathbb{C}$. Тогда система (3) совместна и вектор-функция

$$x(t) = F(t) A_0^D A_0 q + \int_{-1}^0 F(t - \tau - 1) A_0^D A_1 A_0^D A_0 \psi(\tau) d\tau, \quad \text{где } q \in R^n, \psi(\tau),$$

$-1 \leq \tau < 0$, — кусочно-непрерывная функция из множества

$$\{\psi(\cdot) : A_1(E - A_0^D A_0) \psi(t) \equiv 0, \quad -1 \leq t < 0\}, \quad (6)$$

$F(t)$ — решение уравнения $\dot{F}(t) + A_0^D A F(t) + A_0^D A_1 F(t-1) = 0, F(0) = E, F(t) \equiv 0, t < 0$, является общим решением системы (3).

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия (4), (5) и функция $f(t), t \geq 0, k_0 - 1$ раз непрерывно дифференцируема, тогда общее решение $x(t)$ системы (1) задается формулой

$$x(t) = F(t) A_0^D A_0 q + \int_{-1}^0 F(t - \tau - 1) A_0^D A_1 A_0^D A_0 \psi(\tau) d\tau + A_0^D \int_0^t F(t - \tau) f(\tau) d\tau + (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i [(A + e^{-\rho} A_1)^D]^{i+1} f^{(i)}(t), \quad (7)$$

где $q \in R^n$, $\psi(\tau)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция из множества (6), e^{-p} — оператор сдвига ($e^{-p}x(t) \equiv x(t-1)$).

Следствие 1. Пусть матрица $A_1=0$, т. е. система (1) имеет вид

$$A_0 \dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Тогда из формулы (7) получаем общее решение системы (8): $x(t) = e^{A_0^D A t} A_0^D A_0 q + A_0^D \int_0^t e^{A_0^D A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i (A^D)^{i+1} \times \times f^{(i)}(t)$, которое совпадает с решением, полученным в указанной работе S. L. Campbell, C. D. Meyer.

Следствие 2. Пусть теперь $A=0$, т. е. рассматривается система с чистым запаздыванием

$$A_0 \dot{x}(t) + A_1 x(t-1) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Если $A_0 A_1 = A_1 A_0$, $\text{Ker } A_0 \cap \text{Ker } A_1 = \{0\}$, то общее решение системы (9) имеет вид: $x(t) = F(t) A_0^D A_0 q + \int_{-1}^0 F(t-\tau-1) A_0^D A_1 A_0^D A_0 \psi(\tau) d\tau + + A_0^D \int_0^t F(t-\tau) f(\tau) d\tau + (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i (A_1^D)^{i+1} f^{(i)}(t+i+1)$, где $q \in R^n$, $\psi(\tau)$, $\tau \in [-1, 0]$, — произвольная n -вектор-функция из множества (6), а $F(t)$ есть решение уравнения. $F(t) + A_0^D A_1 F(t-1) = 0$, $F(0) = E$, $F(t) \equiv 0$, $t < 0$.

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 2 система (1) для каждого начального состояния (2) с кусочно-непрерывной функцией $\varphi(\tau)$, $-1 \leq \tau < 0$, принадлежащей множеству (6), имеет единственное решение тогда и только тогда, когда вектор x_0 удовлетворяет соотношению

$$x_0 = A_0^D A_0 z + (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i [(A + e^{-p} A_1)^D]^{i+1} f^{(i)}(0) \quad (10)$$

для некоторого вектора $z \in R^n$.

Решение системы (1) при условиях (2), (6), (10) описываем формулой (7), полагая в ней $z = q$, $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-1, 0]$.

Поступила в редакцию 19.03.87.



С. А. П о в а л я е в. **Основы информатики: Справочное пособие.** Минск: Университетское, 1987. 127 с.

В рецензируемом справочном пособии изложены практические приемы работы с научно-технической информацией во всех сферах знаний.

Сегодня ученому, как никогда ранее, необходимо четко ориентироваться в действующей информационной системе, экономично распределять свои собственные ресурсы и возможности сети органов научно-технической информации.

В пособии учтены все изменения, происшедшие в Государственной системе научно-технической информации вплоть до 1986 г., дан прогноз ее развития.

Научно-информационные издания по естественным, техническим и общественным наукам, научные отчеты и диссертации, информационные стандарты, депонирование научных работ, алгоритмы информационного и патентного поиска, научно-техническая пропаганда — вот далеко не полный перечень разделов пособия.

Предлагаемое пособие окажет реальную помощь не только преподавателям, но и студентам. Достаточно отметить, что пути к новой информации, которые зачастую оказываются путанными и длинными в силу слабой информационной подготовки потребителя, становятся оптимальными благодаря таким разделам справочного пособия, как

«Структура органов научно-технической информации», «Правила работы с реферативными изданиями», «Действия потребителя в системах автоматизированного поиска информации», «Описания новых информационных технологий».

В справочном пособии такого рода впервые удалось взглянуть на информатику и с социальной точки зрения: в специальных аналитических таблицах отражены динамика развития научной информации во всех сферах знаний, временные отрезки внедрения научных результатов, языковая ситуация в научной информации, насыщение информационных потоков по всем научным направлениям. Ценно и то, что таблицы обобщают исследовательский опыт специалистов в области информатики СССР, США, Канады, Японии, ФРГ за последние 20 лет. Такая форма аналитической информации заставляет размышлять, побуждает к творчеству.

Есть, однако, в пособии и слабые места. Так, например, раздел, посвященный ручным перфосистемам поиска информации, излишне растянут и, наоборот, обзор технических средств обработки, размножения и передачи информации дан крайне сжато, без оценки перспективы их развития. Хотелось бы увидеть и более четкое разграничение понятий «бумажная» и «безбумажная» информатика. Все это, тем не менее, не влияет на общую высокую оценку полезного и своевременного пособия.

А. И. КОМЯК.

УДК 539.1

Барышевский В. Г., Городишенин Н. Л., Лившиц М. Г., Черепица С. В. О возможности наблюдения многочастотной прецессии спина нейтрона в условиях дифракции в кристалле // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Рассмотрена возможность наблюдения многочастотной прецессии спина нейтрона в условиях дифракции в кристалле. Проанализирована методика проведения эксперимента.

Библиогр. 9 назв.

УДК 778.39.535.36

Урбанович А. И. Нестационарный энергообмен световых волн в средах с инерционной тепловой нелинейностью // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Рассмотрен нестационарный энергообмен (НЭ) световых волн с учетом диффузии поглощающих оптическое излучение молекул и немгновенности превращения поглощенной энергии в теплоту. Найдено пороговое поле и показано, что эффективность НЭ в этих условиях отличается от НЭ в средах с мгновенным локальным откликом.

Библиогр. 8 назв., ил. 1.

УДК 621.373.826.038.823

Бандалет Н. В., Машко В. В. О вкладах действительной и мнимой частей поляризуемости активной среды газового лазера в магнитном поле в энергетические характеристики генерации // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Исследованы энергетические характеристики гелий-неонового лазера с резонатором, обладающим линейной амплитудной и циркулярной фазовой анизотропией, и активной средой в переменном продольном магнитном поле. Показано, что резонансное фарадеевское вращение плоскости поляризации излучения в активной среде при определенных условиях может давать вклад в мощность генерации, сравнимый или даже больший, чем вклад зеемановского расщепления контура усиления.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 548.0:535.3

Дубовская И. Я., Чыонг Ба Ха. О дифракционном излучении каналированной заряженной частицы // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Получены угловое и спектральное распределения дифракционного излучения аксиально каналированной заряженной частицы. Найдены поляризационные и интегральные характеристики излучения, испускаемого в дифракционный пик. Показано, что в осевом случае для связанных состояний, обладающих осевой симметрией, спектральное распределение факторизуется.

Библиогр. 5 назв.

УДК 539.193:546.791.6

Борковский Н. Б., Ковриков А. Б., Умрейко Д. С. Определение равновесных расстояний «уран — кислород» в UO_2^{2+} по положению чисто электронного перехода в комплексах уранила // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Изложен способ определения равновесных расстояний «уран — кислород» в комплексах уранила с использованием электронной абсорбционной спектроскопии. Измеренная частота первого электронного перехода в ураниле сравнивается с рассчитанной по методу Хюккеля с использованием корреляционной зависимости.

Библиогр. 4 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 535.37

Кулешов Н. В., Бойков В. Н., Красовский А. Н. Температурное уширение линий в спектрах люминесценции UO_2^{2+} в растворах и межмолекулярные взаимодействия // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Методом селективного лазерного возбуждения изучена зависимость от температуры ширины линий флуоресценции ионов UO_2^{2+} в растворах в интервале 4,2—80 К. Оценены параметры межмолекулярного взаимодействия, определяющие перенос энергии электронного возбуждения.

Библиогр. 9 назв., ил. 3.

УДК 538.113

Врублевский А. И., Кузовков П. В. Исследование продуктов окисления некоторых металлопорфиринов // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Изучено влияние природы металла и структуры порфиринового лиганда на свойства продуктов окисления металлопорфиринов. Показано, что одноэлектронное окисление Cd и Pb ТФП приводит к образованию π -катион-радикалов. Установлено, что продукты двухэлектронного окисления кобальтовых комплексов парамагнитны и неспаренный электрон локализован на молекулярной орбитали π -системы макроцикла.

Библиогр. 12 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 621.039

Ходасевич В. В., Углов В. В., Гольцев М. В., Сыщенко А. Ф. Исследование метастабильных структур в поверхностных слоях ионно-имплантированного никеля // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Исследована структура и фазовый состав никеля, облученного ионами мышьяка в интервале доз 10^{15} — 10^{17} ион/см². Показано, что при облучении дозами до 10^{16} ион/см² (концентрация мышьяка 4,5 % ат) структура представляет собой метастабильный твердый раствор мышьяка в никеле. При дозах более $2 \cdot 10^{16}$ ион/см² (7,9 % ат As) происходит распад пересыщенного раствора с формированием фазы со структурой β — Ni₅As₂.

Библиогр. 7 назв., ил. 2.

УДК 539.12.04

Гольцев В. П., Жукова С. И., Масюк Т. М. Влияние ионной имплантации на механические свойства дюралюминия // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Исследованы стадия установившейся ползучести и микротвердость алюминиевого сплава Д16, облученного ионами сурьмы. Обнаружено значительное разупрочнение имплантированных образцов. Наблюдаемые эффекты слабо зависят от дозы имплантации в интервале $(2 \cdot 10^{16}$ — $10^{17})$ ион/см². С помощью методов резерфордовского обратного рассеяния и рентгеноспектрального микроанализа показано, что разупрочнение сплава происходит в результате разрушения включений второй фазы и перераспределения легирующих примесей.

Библиогр. 6 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 535.214.4

Безух Б. А., Долгих М. Н., Крылов Г. Г., Тимофеева И. А. Исследование энергетических характеристик облаков // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Описывается радиометр «Смог-2М», работающий в широком спектральном диапазоне. Пороговая чувствительность $\sim 3,1 \cdot 10^{-2}$ Вт/м² · стер · км. Относительная погрешность измерений при рассмотренном методе градуировки не более 1 %. С помощью радиометра выполнены измерения энергетических характеристик различных облачных образований в Атлантическом океане и Средиземном море.

Библиогр. 3 назв., ил. 3, табл. 2.

УДК 681.325

Коляда А. А. Интервально-модулярные коды с исправлением ошибок // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Определяется класс непозиционных корректирующих кодов, названных интервально-модулярными кодами. Получено явное выражение для кодового расстояния рассматриваемых кодов, предлагается эффективный алгоритм обнаружения и исправления однократных ошибок, более простой, чем аналогичные алгоритмы для систем остаточных классов.

Библиогр. 8 назв.

УДК 519.234.8

Дылько Т. Н. Выбор коэффициентов статистики для проверки гипотезы одинаковой распределенности в задачах анализа дихотомической информации // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Получены оценки на коэффициенты статистики для проверки гипотезы одинаковой распределенности случайных множеств с независимыми элементами (люсианов), при которых функция распределения статистики и предельная функция распределения отличаются меньше, чем заданный уровень значимости проверки гипотезы.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.968.7

Диалло У. У. К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений в пространстве непрерывных функций // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Изучается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

с действующим в пространстве C непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций оператором

$$A(t)x(s) = c(t, s)x(s) + \int_a^b k(t, s, \sigma)x(\sigma)d\sigma. \quad (2)$$

В предлагаемой работе в явном виде выписываются условия на функции $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$, при которых (1) может рассматриваться как линейное дифференциальное уравнение в пространстве C , описываются вид и свойства функции Коши этого уравнения, условия существования функции Грина в задачах об ограниченных и ω -периодических решениях, условиях их непрерывной зависимости от параметров.

Библиогр. 10 назв.

УДК 621.391.1:519.28

Мельникова Е. Н., Харин Ю. С. О классификации серий многомерных наблюдений при случайной длине серий // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Рассматривается задача статистической классификации серий многомерных наблюдений случайной длины. Оценки длин серий находятся из условия максимума функции правдоподобия с использованием процедуры динамического программирования. Классификация серий проводится с помощью алгоритма кластер-анализа, основанного на минимизации критерия компактности. Приводится асимптотическое выражение для среднего числа ошибочных решений при фиксированном числе серий.

Библиогр. 4 назв., ил. 1.

УДК 519.17

Батурина Л. Н., Лепешинский Н. А. Представление простых путей неориентированного графа // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Описан алгоритм, с помощью которого сведения о множестве простых путей между заданной парой вершин неориентированного графа представляются в виде специальных таблиц без предварительного определения этого множества.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.9:535.4

Ерофеев В. Т. Теоремы сложения для потенциалов электромагнитного поля // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Приведены некоторые формулы переразложения, представляющие электромагнитные поля с вектором Герца, заданным в сферических, цилиндрических и декартовых координатах через потенциалы Дебая в сферических координатах.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.977.58

Чхе Хен Ир. Критерии оптимальности и субоптимальности в задаче оптимизации динамической системы с изменяемым множеством управлений // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Приводятся критерии оптимальности и субоптимальности в задаче оптимального управления, в которой множество допустимых значений можно изменять с помощью параметров.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Джураев О. Построение уравнения римановой поверхности, заданной в виде трехлистной поверхности наложения сферы // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

В явном виде строится уравнение римановой поверхности, соответствующее трехлистному накрытию сферы по заданным точкам ветвления и закону склеивания листов.

Библиогр. 7 назв.

УДК 621.315.592

Бринкевич Д. И., Горбачева Н. И., Петров В. В., Туровский Б. М. Влияние германия на энергетическое положение термодоноров в кремнии // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Исследованы процессы генерации термодоноров в $\text{Si} < \text{Ge} >$ при отжиге в температурном интервале 450—800 °С. Установлено, что примесь германия вызывает смещение к середине запрещенной зоны энергетических уровней высокотемпературных термодоноров. Показано, что германий не влияет на положение энергетических уровней термодоноров, генерируемых в кремнии при 450 °С.

Библиогр. 10 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592

Патрин А. А. Визуализация неоднородной диффузии примеси в профилированный кремний // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех., 1988. № 2.

Визуализирован в электрическом контрасте неоднородный фронт диффузии примеси в профилированный кремний, выращенный по способу Степаова в виде тонкостенных замкнутых профилей с шириной грани 37 мкм. Образцы содержали диффузионный слой толщиной 0,8—1,0 мкм и прецизионный клин с углом 1—2 мин. Из анализа поверхности образцов в области клина в растровом электронном микроскопе в режиме тока, наведенного электронным лучом, получена количественная информация о степени неоднородности залегания p — n -перехода в участках с различной степенью структурного совершенства.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 621.396:621.383

Сидоренко А. В., Курило В. С., Максимов С. И. Об использовании волоконной оптики в системах распределения сигналов // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Приводятся результаты экспериментальных исследований двухканальных волоконно-оптических систем передачи СВЧ сигнала, которые могут служить прототипом систем распределения СВЧ сигналов в антенных решетках.

Библиогр. 4 назв., табл. 1.

УДК 537.533.3

Апанасович В. В., Чудовская Е. А. Моделирование процессов образования выходного сигнала микроканальной пластины // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Рассмотрена математическая модель процесса формирования одноэлектронного импульса в канале микроканальной пластины. Для получения характеристик потока электронов в выходном импульсе используется метод имитационного моделирования. Приводятся результаты статистических экспериментов с реализованной на ЭВМ имитационной моделью микроканальной пластины.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

УДК 517.977.58

Ивонис Э. А. Метод оптимизации многомерной линейной нестационарной динамической системы с переменным множеством управлений // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

В классе кусочно-непрерывных управлений решена задача оптимизации линейной нестационарной динамической системы, в которой ограничения на многомерные управления полиэдральные и изменяются во времени.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.852

Савелова Л. А. Метод решения линейной экстремальной задачи с односторонними ограничениями // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Рассматривается статическая линейная задача в нормальной форме. Для ее решения построен алгоритм, в основу которого положен адаптивный метод.

УДК 539.3

Егоренков И. А., Прусов И. А. Об одном методе определения упругих характеристик анизотропных шпангоутов // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Предполагается, что шпангоут представляет собой сплошное круглое кольцо, материал которого обладает цилиндрической анизотропией с неизвестными упругими характеристиками E_r , E_θ и ν . С помощью решения задач о равномерном растяжении и сжатии шпангоута получены простые формулы для нахождения указанных величин.

Библиогр. 2 назв., ил. 1.

УДК 517.9

Самодуров А. А. О решениях одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

Методами теории групп преобразований изучается уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + \Phi(y) + F(x) = 0.$$

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.929

Крахотко В. В., Размыслович Г. П. Линейные сингулярные системы с запаздыванием // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2.

При определенных условиях на параметры для линейной стационарной системы с запаздыванием по состоянию и неразрешенной относительно производной строится решение в замкнутой форме.