

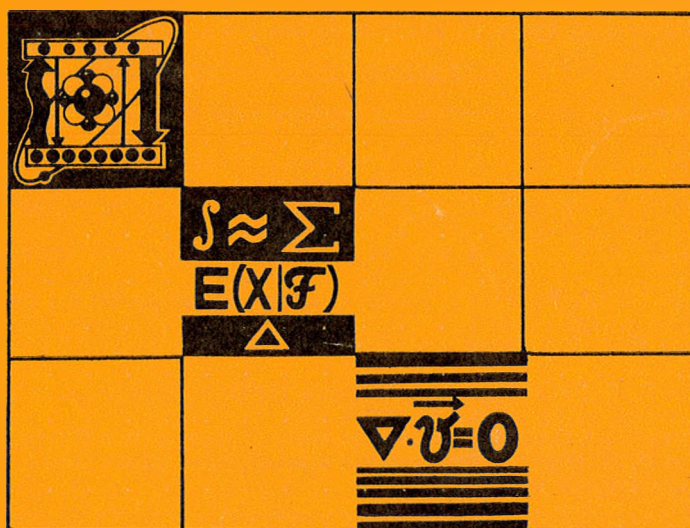
1

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В.И. Ленина

Физика
Математика
Механика



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Тимошенко А. И. Формулировка теории гравитации Эйнштейна в виде теории поля с неполной геометризацией в римановом пространстве-времени	3
Барковский Л. М., Фо Тхи Нгуен Ханг. Обратная задача отражения для магнитоэлектрических и оптически активных кристаллов средних сингоний	5
Вислович А. Н., Лобко С. И., Лобко Г. С. Плавание немагнитных тел в жидких магнетиках в однородном магнитном поле	8
Маляревич А. М., Последович М. Р., Тарасевич Е. В. Температурные зависимости в спектрах КР кристалла триглицинсульфата	11
Суслов В. А., Хоанг Суан Хонг, Хоанг Шон. Долговременные релаксации и позиционная зависимость фото-ЭДС в системе полупроводник — электролит	15
Добрянский В. М., Крылович В. И., Рубанов Ан. С. Выходные характеристики акустического интерферометра с периодическим качанием частоты входного напряжения	17
Тарасевич Н. Н. Миноритарная функция — функция контроля ошибок в мажоритарно резервированных системах	20
Бакиновский К. Н., Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П. Устойчивый режим модуляции добротности и синхронизации мод АИГ: Nd ³⁺ -лазера непрерывного действия с нелинейно поглощающим кристаллом LiF с F ₂ -центрами окраски	25
Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н. Влияние ионизационных потерь на бета-спектр при прохождении через поглотитель	27
Литвинов В. В., Пальчик Г. В., Уренев В. И. О кинетике образования термодоноров в кислородсодержащем германии	29

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Забрейко П. П., Нгуен Ханг Тхай. Об одном классе пространств Орлича вектор-функций	32
Забелло Л. Е. К исследованию приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием	34
Савелова Л. А. Корректировка направления в конечном методе решения интервальной задачи квадратичного программирования	38
Тарновский А. Г. Градиентный алгоритм решения задачи «минимум суммы квадратов»	40
Струсевич В. А. Минимизация суммарного времени обслуживания для системы с нефиксированными маршрутами	44
Дробушевич Г. А., Zubovich К. А. Система функционального программирования и ее реализация для ЕС ЭВМ	46
Коляда А. А., Селянинов М. Ю. Нормализация чисел в модулярной системе счисления	50
Музалевский И. М. Применение абстрактных моделей для представления данных. I. Структура и поиск	53

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Алексей Адамович Гусак (К 60-летию со дня рождения)	56
---	----

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Остапенко А. В. О релятивистском фермион-антифермионном уравнении со скалярным линейным потенциалом	57
Буров Л. И., Ганчеренок И. И. Влияние поляризации и геометрии накачки на энергетические характеристики лазера на красителе с анизотропным резонатором	59
Евсеев А. К., Полицук И. М. Исследование характеристик антенных обтекателей во временной области	61
Забелло И. Н. Решение в квадратурах одного матричного интегрального уравнения	62
Крушевский Е. А. Решение линейных функциональных уравнений с несколькими сдвигами внутри области	64
Гринкевич Г. В. Двумерное интегральное уравнение с функцией Сарана F_M в ядре	65
Радкевич Е. В. Разностная схема первого порядка аппроксимации решения системы многомерных уравнений Бюргерса	66
Лошкарева С. Ю. О числе пакетов максимальной сложности в Ω -сети	68
Хомичков И. И. Однолинейная система с повторными вызовами и входящим потоком Кокса второго порядка	70

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Юрий Станиславович Богданов	72
-----------------------------	----

ЯНВАРЬ

1

СЕРИЯ 1, 1988

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В.И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

Физика
Математика
Механика



МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ“
1988

Главный редактор В. Г. РУДЬ

Зам. главного редактора В. И. ЖАРИКОВ

Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
Л. М. БАРКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), **А. М. БЕЛЬСКИЙ** (ответственный секретарь), **Е. С. ВОРОПАЙ**, **Р. Ф. ГАБАСОВ**, **В. А. ГАЙСЕНКО**, **В. В. ГРУЗИНСКИЙ**, **Э. И. ЗВЕРОВИЧ**, **В. И. КОРЗЮК**, **Л. Н. КИВАЧ**, **Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ**, **Н. А. ЛУКАШЕВИЧ**, **Г. А. МЕДВЕДЕВ**, **В. И. МИРОНЕНКО**, **И. А. ПРУСОВ**, **В. Ф. СТЕЛЬМАХ**, **А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ**, **А. М. ШИРОКОВ**, **С. С. ШУШКЕВИЧ**, **Н. И. ЮРЧУК**

**ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА**

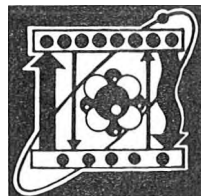
Серия 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1

Редактор **И. П. Стрельченя**
Младший редактор **Г. М. Добыш**
Художественный редактор **С. В. Баленок**
Технический редактор и корректор **Г. И. Хмарун**

Сдано в набор 02.10.87. Подписано в печать 29.12.87. АТ 14981. Формат 70×108^{1/16}. Бумага тип. № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,52. Уч.-изд. л. 7,3. Тираж 915 экз. Заказ 528. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, ул. Бобруйская, 7, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



УДК 530.12 : 531.51+530.13 : 531.62

А. И. ТИМОЩЕНКО

ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА В ВИДЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕПОЛНОЙ ГЕОМЕТРИЗАЦИЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В [1] показано, что теории тяготения с лагранжианами Эйнштейна и Розена в римановом и плоском пространствах-времени соответственно не дают удовлетворительного описания энергии-импульса гравитационного поля. В этой связи рассмотрим здесь теорию гравитации в римановом пространстве-времени с неполнотой геометризovanнм гравитационным лагранжианом.

В [1] записаны законы эволюции, следующие из тождества Нетер, пригодные в пространствах-времени с произвольной линейной связностью и метрикой. В частном случае риманова пространства для системы взаимодействующих гравитационного и других полей при неполной геометризации лагранжиана гравитационного поля* закон эволюции канонического тензора энергии-импульса (ТЭИ) имеет вид:

$$\tilde{\text{Div}}_{\lambda} t^{\lambda\kappa} - \frac{4}{\sqrt{-g}} B^{(\lambda\kappa)} \cdot \mu \gamma_{\nu\kappa} \left(\frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \right)_{\text{явн}} = 0, \quad (1)$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — плоская метрика, описывающая явную зависимость L_g от координат, $(\delta L_g / \delta \gamma_{\mu\nu})_{\text{явн}}$ — соответствующая вариационная производная. Тензоры энергии-импульса Гильберта в случаях: $L = L_g$ и $L = L_m$ равны:

$$\Theta_g^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\nu\rho}} \right)_{\text{явн}} g^{\mu\sigma} \gamma_{\rho\sigma} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}},$$

$$\Theta_m^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2)$$

где учтена теорема, доказанная ранее. Складывая ТЭИ, выписанные в (2), и учитывая уравнения поля тяготения:

$$\frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta L_m}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (3)$$

имеем:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_g^{\mu\nu} + \Theta_m^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\nu\rho}} \right)_{\text{явн}} g^{\mu\nu} \gamma_{\rho\sigma}, \quad (4)$$

что можно непосредственно получить из формализма Нетер. Для лагранжиана Розена [2]:

$$L_g = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (B_{\mu\nu\kappa} B^{\kappa\mu\nu} - B_{\kappa} B^{\kappa}). \quad (5)$$

Из (4) следует выражение:

* Здесь ограничимся случаем, когда $L_g = L_g(\gamma_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$.

$$\Theta_{\mu}^{\nu} = -\frac{1}{2\kappa} \tilde{\text{Div}}_{\lambda} \tilde{\text{Div}}_{\kappa} (\gamma^{\lambda\kappa} g^{\nu\epsilon} \gamma_{\mu\epsilon} + \delta_{\mu}^{\nu} g^{\lambda\kappa} - 2\gamma^{\kappa(v} g^{\epsilon)\lambda} \gamma_{\mu\epsilon}). \quad (6)$$

Легко видеть, что (6) тождественно сохраняется:

$$\tilde{\text{Div}}_{\nu} \Theta_{\mu}^{\nu} = 0. \quad (7)$$

Этот вывод, однако, имеет место для любой теории рассматриваемого вида независимо от лагранжиана гравитационного поля, что можно доказать, переходя в (1) от $\tilde{h}_{\kappa}^{\lambda}$ к $\Theta^{\lambda\kappa}$ и опуская первый индекс.

Таким образом, в рассматриваемой формулировке теории поля сохраняются смешанные компоненты ТЭИ Гильберта. Другие калибровки ТЭИ самосогласованной системы полей не приводят к какому бы то ни было закону сохранения энергии-импульса. Произвол же в выборе ТЭИ в силу его первоначального определения на основе тождества Нетер допустим лишь для контравариантных компонент из-за непрерывности опе-

раций опускания индекса и ковариантного дифференцирования $\tilde{\nabla}_{\lambda}$, т. е. из-за римановости метрики $g_{\mu\nu}$ пространства-времени. Этот факт предохраняет теорию от появления следствий типа гипотезы Лоренца — Леви — Чивитта.

Если лагранжиан самосогласованной системы полей зависит только от первых производных функций поля, то тензор момента энергии-импульса может быть взят в калибровке:

$$\mu^{\mu\nu\kappa} = 2X^{[\mu}\Theta^{\nu]\kappa}, \quad (8)$$

подчиняясь соотношению (см. [1]):

$$\tilde{\text{Div}}_{\kappa} \mu^{\mu\nu\kappa} + 2\Theta^{[\mu\nu]} - 2(X^{[\mu}B^{\nu]\lambda}{}_{;\kappa} - B^{\lambda[\mu}{}_{;\kappa}X^{\nu]})\Theta_{\lambda}^{\kappa} = 0,$$

которое переписывается также в виде:

$$\tilde{\text{Div}}_{\kappa} \mu_{\mu\nu}{}^{\kappa} + 2\Theta_{[\mu\nu]} + 2X^{\lambda}\tilde{Q}_{\kappa\lambda}{}_{[\mu}\Theta_{\nu]}{}^{\kappa} = 0, \quad (9)$$

где $\tilde{Q}_{\lambda\mu\nu} = -\tilde{\nabla}_{\lambda}g_{\mu\nu}$. Таким образом, никакие из компонент тензора момента энергии-импульса (ТМЭИ) самосогласованной системы полей в общем случае не сохраняются.

Вернемся к варианту теории поля с лагранжианом (5). Если ОСР подчиняется условию Фока (см. [1]):

$${}^{\prime}B^{\lambda} = \tilde{\text{Div}}_{\kappa} g^{\lambda\kappa} = 0, \quad (10)$$

то (6) упростится:

$$\Theta_{\mu}^{\nu} = -\frac{1}{2\kappa} \tilde{\text{Div}}_{\kappa} \tilde{\text{Div}}_{\kappa} (\gamma^{\lambda\kappa} g^{\nu\epsilon} \gamma_{\mu\epsilon}). \quad (11)$$

Интервал для поля Шварцшильда в координатах $x^0, r, \vartheta, \varphi$, связанных с координатами Фока соотношениями:

$$x^{\bar{0}} = x^0, \quad x^{\bar{1}} = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad x^{\bar{2}} = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x^{\bar{3}} = r \cos \vartheta, \quad (12)$$

запишется так:

$$ds^2 = -\frac{r-m}{r+m} dx^{\bar{0}^2} + \frac{r+m}{r-m} dr^2 + (r+m)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (13)$$

где m — геометризованная масса источника тяготения. Вычисления с помощью (11) — (13) показывают, что

$$\Theta_{\bar{0}}^{\bar{0}} = \frac{1}{\kappa} \frac{m^2}{r^2(r-m)^2} \cdot \frac{7r^2 - 4mr + m^2}{r^2 - m^2}. \quad (14)$$

Этот ответ не совпадает ни с одним из результатов, собранных в [3] для различных вариантов (в том числе и нетензорных) определения энергии-импульса в теории гравитации Эйнштейна. Из (14), в частности, вытекает, что в системе отсчета

$$h_{\lambda}{}^k = \text{diag} \left\{ \left(\frac{r-m}{r+m} \right)^{1/2}, \left(\frac{r+m}{r-m} \right)^{1/2}, r+m, (r+m) \sin \vartheta \right\} \quad (15)$$

(латинские индексы нумеруют векторы лоренцевого базиса; их численные значения выделяются шляпкой) энергия гравитационного поля Шварцшильда, запасенная в сферическом слое: $r_0 < r' < r$, равна:

$$E_g(r) = -cP_{\hat{0}}^{\hat{0}}(r) = -h^{\hat{0}}_{\hat{0}}(r) \int_{x^0=\text{const}} \Theta_{\hat{0}}^{\hat{0}}(r') h_{\hat{0}}^{\hat{0}}(r') d\tau_{\hat{0}}(r', \vartheta', \varphi') = \\ = \frac{4\pi m}{\kappa} \frac{\Delta u}{u^2 u_0^2} \left(\frac{2}{u} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} (u_0^2 u^2 - 4u - 4u_0), \quad (16)$$

где $u = 1 - m/r$, $u_0 = 1 - m/r_0$, $\Delta u = u - u_0$. Поскольку в области определения системы отсчета (15) $0 < u < 1$, $0 < u_0 < 1$, то из (16) следует, что

$$E_g < 0 \text{ при } m < r_0 < r. \quad (17)$$

Для решения Переса

$$ds^2 = -dx^0{}^2 + dx^{12} + dx^{22} + 2f(dx^0 + dx^3)^2, f = f(x^1, x^2, x^0 + x^3) \quad (18)$$

система координат x^0, x^1, x^2, x^3 в (18) оказывается гармонической. Расчет по формуле (11), записанной в ОСР (черта над индексом в данном случае опущена), приводит к ответу:

$$\Theta_{\hat{0}}^{\hat{0}} = -\Theta_{\hat{0}}^{\hat{3}} = -\Theta_{\hat{3}}^{\hat{0}} = \Theta_{\hat{3}}^{\hat{3}} = \frac{1}{\kappa} \square f, \quad (19)$$

где $\square = \gamma^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ — даламбертиан. Остальные компоненты Θ_{μ}^{ν} заведомо равны нулю. В силу уравнений Эйнштейна, сводящихся для метрики (18) к единственному уравнению: $f_{,11} + f_{,22} = 0$, все компоненты в (19) обращаются в нуль.

Отрицательность энергии поля Шварцшильда, как показывает детальный анализ, связана со знаком силы поля тяготения в ньютоновском приближении теории гравитации Эйнштейна и жестко согласована с требованием положительности энергии негравитационных полей. В этом можно убедиться, умножая (5) на некоторую постоянную a и выписывая в этом случае уравнения поля и уравнение геодезической, предполагая поле статистическим и центрально-симметричным. Таким образом, знак энергии гравитационного поля есть его специфическая черта, отличающая это поле от других полей. Возможно, для реальных гравитационных волн энергия в рассматриваемом подходе окажется положительной. Нулевой результат для волны Переса говорит о возможном нефизическом характере этого решения уравнений Эйнштейна в пустоте.

Список литературы

1. Тимошенко А. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 27; 1987. № 2. С. 3.
2. Rosen N. // Phys. Rev. 1940. V. 57. № 1. P. 147.
3. Zhao M.-G. // J. Phys. A: Math. Gen. 1984. V. 17. № 3. P. 619.

Поступила в редакцию 25.01.85.

УДК 535

Л. М. БАРКОВСКИЙ, ФО ТХИ НГУЕТ ХАНГ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ СРЕДНИХ СИНГОНИЙ

В настоящее время большой интерес представляют кристаллы сегнетомагнетиков, обладающие некоторой электрической и магнитной структурой. Вследствие этого в них одновременно проявляются свойства анти-сегнетоэлектриков и магнетиков [1]. В некоторых кристаллах ярко выра-

жен магнитоэлектрический эффект. В [2] рассмотрено влияние этого эффекта на распространение электромагнитных волн в кристаллах с различной симметрией, включая типы магнитной симметрии. С другой стороны, существует большое сходство между структурой тензоров, описывающих магнитоэлектрический эффект и эффект оптической активности кристаллов [3]. В настоящей работе предложенный ранее метод [4] определения тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости распространяется на магнитоэлектрические и оптически активные кристаллы. Уравнения Максвелла и уравнения связи для гармонических составляющих поля имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -ik\vec{D}, \operatorname{rot} \vec{E} = ik\vec{B}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E} + i\nu\vec{H}, \vec{B} = \mu\vec{H} + i\tilde{\nu}\vec{E}, \quad (1)-(2)$$

где ε, μ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; ν — магнитоэлектрический тензор [1]. Тильда обозначает транспонированный тензор. Уравнения связи (2) пригодны и для активных сред, только вместо ν нужно подставить тензор оптической активности α [3]. Рассмотрим случай нормального падения поляризованной плоской гармонической электромагнитной волны из вакуума (воздуха) на границу магнитоэлектрического кристалла. Тензор поверхностного импеданса [5] с учетом (1), (2) имеет вид

$$\gamma = - \frac{\left[\frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-} + i\tilde{n}^\times \left(\alpha_1 + \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{n}^\times \beta_1 \tilde{n}^\times \mu_1^{-1}}{\tilde{n} \mu_1 \tilde{n}} \right) \right] \tilde{n}^\times \left[\varepsilon_1^{-1} + \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{n} \mu_1 \tilde{n}} \left(\frac{1}{n_+} + i\tilde{n}^\times \beta_1 \right) \left(\frac{1}{n_-} + i\tilde{n}^\times \beta_1 \right) \right] \tilde{n}^\times}{\left(\frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-} \right)^2 + i[(\alpha_1 + \beta_1) \tilde{n}^\times]_c \left(\frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-} \right) + \frac{(\tilde{n}^\times \mu_1^{-1} \tilde{n}^\times \alpha_1 \tilde{n}^\times \tilde{\mu}_1 \tilde{n}^\times \beta_1)_c}{\tilde{n} \mu_1 \tilde{n}} + (\alpha_1 \tilde{n}^\times)_c (\beta_1 \tilde{n}^\times)_c - \tilde{n} (\alpha_1 + \beta_1) \tilde{n}}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \nu \mu^{-1} \tilde{\nu}, \quad \alpha_1 = -\varepsilon^{-1} \nu (\mu + \tilde{\nu} \varepsilon^{-1} \nu)^{-1}, \\ \mu_1 = \mu + \tilde{\nu} \varepsilon^{-1} \nu, \quad \beta_1 = -\mu^{-1} \tilde{\nu} (\varepsilon + \nu \mu^{-1} \tilde{\nu})^{-1}; \quad (4)$$

$\tilde{n}$ — единичный вектор нормали к границе, направленный внутрь кристалла; $\tilde{n}^\times$ — антисимметричный тензор, дуальный вектору $\tilde{n}$ [3]. Черта над буквой обозначает взаимный тензор, а индекс «с» — след тензора. Показатель степени «-1» обозначает обратный тензор, $n_\pm$ — показатели преломления, которые являются решением уравнения нормалей [3]:

$$|1 + \varepsilon^{-1} (\tilde{m}^\times + i\nu) \mu^{-1} (\tilde{m}^\times - i\tilde{\nu})| = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{m} = n\tilde{n}$ — вектор рефракции.

Для кристаллов средних сингоний тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon' - \varepsilon_0) \vec{e} \cdot \vec{e}, \quad \mu = \mu_0 + (\mu' - \mu_0) \vec{e} \cdot \vec{e}, \quad (6)-(7)$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси высшего порядка; $\vec{e} \cdot \vec{e}$ — диада. В базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ при $\vec{i} = \vec{e}$ матрица тензора ν принимает форму [2]:

$$\nu_{ij} = \begin{pmatrix} \nu_0 + \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_0 & -\nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Точно такой же вид имеют матрицы тензора оптической активности [3] для кристаллов средних сингоний. Для одновременного определения тензоров ε, μ, ν необходимо иметь кристалл в форме прямоугольного

параллелепипеда, грани которого перпендикулярны к векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Если свет распространяется в направлении орта $\vec{k}$ ($\vec{n} = \vec{k}$), то после подстановки (6), (7), (8) в (3) получим

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$M = \left(\frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-} \right)^2 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0 a b} \left(v_0 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} (v_0 + v_1) \right)^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{n_+ + n_-}{n_+ n_-} \left(\frac{v_0 (v_0 + v_1)}{\varepsilon' b} + \frac{a}{n_+ n_- \varepsilon'} + \frac{\mu_0}{b} \right) - \\ &\quad - \frac{(n_+ + n_-) v_0}{n_+ n_- \varepsilon_0 b} \left(\frac{\varepsilon_0 (v_0 + v_1)}{\varepsilon'} - v_0 \right), \\ \gamma_{12} &= \frac{i (n_+ + n_-)^2}{n_+^2 n_-^2} \frac{v_0 + v_1}{\varepsilon'} - \frac{i}{b} \left(\frac{\varepsilon_0 (v_0 + v_1)}{\varepsilon'} - v_0 \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{v_0 (v_0 + v_1)}{a \varepsilon_0} + \frac{b}{n_+ n_- \varepsilon_0} + \frac{\mu'}{a} \right), \\ \gamma_{21} &= \frac{i}{a} \left(\frac{\varepsilon' v_0}{\varepsilon_0} - v_0 - v_1 \right) \left(\frac{v_0 (v_0 + v_1)}{\varepsilon' b} + \frac{a}{n_+ n_- \varepsilon'} + \frac{\mu_0}{b} \right) - \\ &\quad - i \frac{(n_+ + n_-)^2}{n_+^2 n_-^2} \frac{v_0}{\varepsilon_0}, \\ \gamma_{22} &= \frac{n_+ + n_-}{n_+ n_-} \left(\frac{v_0 (v_0 + v_1)}{a \varepsilon_0} + \frac{b}{n_+ n_- \varepsilon_0} + \frac{\mu'}{a} \right) - \\ &\quad - \frac{n_+ + n_-}{n_+ n_-} \frac{v_0 + v_1}{a \varepsilon'} \left(\frac{\varepsilon' v_0}{\varepsilon_0} - v_0 - v_1 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$a = \varepsilon' \mu' + (v_0 + v_1)^2, \quad b = \varepsilon_0 \mu_0 + v_0^2 + v_1^2. \quad (12)$$

Если свет распространяется в направлении орта $\vec{i}$ ($\vec{n} = \vec{i}$), то тензор поверхностного импеданса имеет вид

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{11} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где

$$S = \left(\frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-} \right)^2 - \frac{v_2^2}{b^2}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(\frac{2iv_2}{b} - \frac{n_+ + n_-}{n_+ n_-} \right) \left(\frac{v_0^2 - v_2^2}{\varepsilon_0 b} + \frac{iv_2 (n_+ + n_-)}{\varepsilon_0 n_+ n_-} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{\varepsilon_0 n_+ n_-} - \frac{\mu_0}{b} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \left(\frac{2iv_2}{b} - \frac{n_+ + n_-}{n_+ n_-} \right) \left(\frac{i (n_+ + n_-)}{n_+ n_-} \frac{v_0}{\varepsilon_0} + \frac{2v_0 v_2}{\varepsilon_0 b} \right), \\ n_{\pm} &= \pm \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 + v_0^2} - iv_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Если исследуемый образец достаточно толстый, можно пренебречь многократным отражением, и тензор поверхностного импеданса выражается через тензор отражения:

$$\gamma = (I + r)^{-1} (I - r), \quad (17)$$

где r — тензор отражения, $I = 1 - \vec{n} \cdot \vec{n}$ — проективный оператор плоской границы. В [4] описан метод измерения тензора отражения. Показатели преломления $n_{\pm}$ можно измерить методом Фурье-спектроскопии. Следовательно, тензор γ , с одной стороны, может быть определен с по-

мощью (17) по экспериментальным значениям тензора r , а с другой,— соотношения (11), (15), (16) выражают электродинамические параметры кристалла через компоненты матрицы тензора γ . Задача, таким образом, сводится к вычислению семи параметров с использованием семи уравнений. Соответствующий вычислительный алгоритм будет рассмотрен отдельно.

Список литературы

1. Венневцев Ю. Н., Гагулин В. В., Любимов В. Н. Сегнетомагнетики. М., 1982.
2. Любимов В. Н. // Кристаллография. 1969. Т. 14. Вып. 2. С. 213.
3. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, 1976.
4. Федоров Ф. И., Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Жилко В. В. // Кристаллография. 1985. Т. 30. Вып. 4.
5. Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // ЖПС. 1974. Т. 20. Вып. 6. С. 1107.

Поступила в редакцию 07.04.86.

УДК 537.622 : 537.84

А. Н. ВИСЛОВИЧ, С. И. ЛОБКО, Г. С. ЛОБКО

ПЛАВАНИЕ НЕМАГНИТНЫХ ТЕЛ В ЖИДКИХ МАГНЕТИКАХ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Неоднородное магнитное поле изменяет в жидких магнетиках распределение давления, что является причиной дополнительных сил, действующих на взвешенные в них твердые тела [1]. Это явление нашло применение в магнитожидкостных сепараторах. Однородное внешнее поле не влияет на распределение давления, однако и в этом случае условия плавления тела могут измениться. Появление в магнетике немагнитного * включения приводит к возмущению поля вблизи тела и перераспределению давления. Если тело достаточно удалено от границ сосуда, так что возмущения поля не достигают границ, результирующая магнитная сила равна нулю. Условия плавления изменяются при приближении тела к границам объема, занимаемого магнетиком. В настоящей работе показано, что для магнетиков с сильными магнитными свойствами — ферросуспензий [2] и магнитных жидкостей [3] — этот механизм может играть определенную роль.

Сила, действующая на немагнитное тело в жидком магнетике, может быть вычислена по соотношениям [4]:

$$\vec{F} = \mu_0 \oint_S \left(p + \frac{1}{2} M_n^2 \right) n dS = \mu_0 \oint_{S'} \left(p + \frac{1}{2} M_n^2 \right) n dS. \quad (1)$$

Здесь $p = \int_0^H M dH$; S — поверхность тела; S' — внешняя поверхность,

ограничивающая объем магнетика; $\vec{n}$ — нормаль, направленная внутрь магнетика; M_n — нормальная к поверхности составляющая намагниченности.

Пусть тело A находится вблизи плоской границы S' сосуда с жидкостью (рис. 1). До внесения тела поле в жидкости однородно, его напряженность равна H_* , ориентация задается единичным вектором $\vec{e}$. Будем считать, что возмущения поля не достигают других границ, кроме близлежащей плоской границы. В этом случае силу можно вычислить согласно второму выражению (1), где поверхностью интегрирования является плоская граница. Результирующая сила имеет только нормальную к границе составляющую:

* Для краткости немагнитными телами называем диа- и парамагнитные тела.

$$F_n = \mu_0 \int_{S'} \int \left[p' + \frac{1}{2} (M_n^2 - M_{*n}^2) dS \right]. \quad (2)$$

Здесь $p' = \int_{H_*}^H MdH$ — возмущение давления, обусловленное телом, M_{*n} — нормальная составляющая невозмущенной намагниченности.

Для вычисления интеграла (2) необходимо знать распределение поля на плоской границе. Ограничимся рассмотрением случаев, когда структура поля может быть установлена на основе простых соображений.

Если тело удалено от границы на расстояние, превышающее размеры тела, индуцируемое им поле на границе можно рассматривать как поле некоторого диполя с дипольным моментом $\vec{m}$ [5]:

$$\mathbf{H}_g = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right). \quad (3)$$

Величина дипольного момента существенно зависит от закона намагничивания магнетика $M = M(H)$. Для магнитных жидкостей, например, кривую намагниченности можно разделить на два качественно различающихся участка. В слабых полях выполняется линейный закон намагничивания. В сильных полях намагниченность достигает насыщения. Таким образом, имеем

$$\mathbf{M} = \chi_0 \mathbf{H}, \quad \chi_0 = \text{const}, \quad H \ll H_T, \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = M_S \mathbf{e}, \quad M_S = \text{const}, \quad H \gg H_T. \quad (5)$$

Здесь H_T — характерные значения поля по порядку величины, равные 10—15 кА/м.

Пусть магнетик намагничен до состояния насыщения. В этом случае дипольный момент, индуцированный телом, равен по величине и противоположен по направлению дипольному моменту жидкости, вытесненной телом, т. е. $\mathbf{m} = -M_S V \mathbf{e}$ (V — объем тела). Поле в жидкости можно представить в виде суперпозиции невозмущенного поля и поля диполя $\mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{H}_g$, откуда следует

$$H = \sqrt{H_*^2 + 2(\mathbf{H}_* \cdot \mathbf{H}_g) + H_g^2} \approx H_* + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_g) + \frac{1}{2} \cdot \frac{H_g^2}{H_*}. \quad (6)$$

При получении этого соотношения использовано предположение $M_S \ll H_*$, необходимое для выполнения условия магнитного насыщения

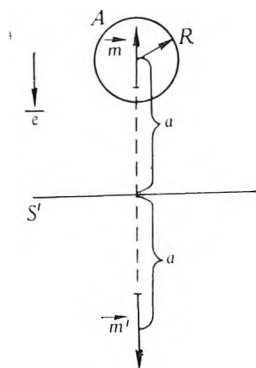


Рис. 1. Геометрия задачи

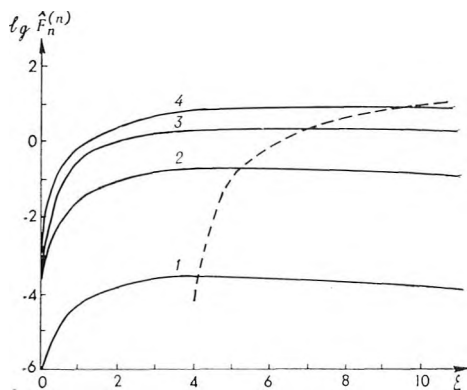


Рис. 2. Зависимость относительной силы взаимодействия сферы с плоской границей от напряженности поля для различных значений начальной магнитной восприимчивости:

1 — $\chi_0 = 0,1$; 2 — $\chi_0 = 1,0$; 3 — $\chi_0 = 3$; 4 — $\chi_0 = 5$

во всем объеме магнетика. Принимая во внимание также, что распределение намагниченности на плоской границе в состоянии насыщения определяется невозмущенным полем ($M_n = M_{*n}$), из (2) получаем

$$F_n = \mu_0 M_S \iint (H - H_*) dS = \mu_0 M_S \iint (\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_g) + \frac{1}{2} \frac{H_g^2}{H_*} dS. \quad (7)$$

Вычисление интеграла (7) показывает, что сила, действующая на тело, зависит от ориентации невозмущенного поля. Она направлена внутрь объема жидкости, максимальна, если поле нормально к границе, и в этом случае равна

$$F_n^{(n)} = \frac{3}{64\pi} \cdot \frac{M_S^3 V^3}{H_* a^4}. \quad (8)$$

Если поле направлено по касательной к границе, на тело действует сила $F_n^{(r)} = F_n^{(n)}/2$.

Рассмотрим взаимодействие поля с границей при линейном законе намагничивания (4). Если магнитная восприимчивость χ_0 не является малой величиной, поле, индуцированное телом, приводит к возмущениям намагниченности на плоской границе, которые создают дополнительные возмущения поля в жидкости. Индуцируемое границей поле можно определить методом зеркальных изображений [5]. В дипольном приближении это поле будет равно полю $\mathbf{H}_g$ диполя с дипольным моментом $m' = \chi_0 m / (2 + \chi_0)$, который является зеркальным изображением дипольного момента, индуцированного телом (рис. 1). Результирующее поле в жидкости равно $\mathbf{H} = \mathbf{H}_* + \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_g^2$. С учетом этого соотношения из (2) получаем

$$F_n = \mu_0 \chi \iint_{S'} [(H^2 - H_*^2) + \chi_0 (H_n^2 - H_{*n}^2)] dS. \quad (9)$$

Если поле перпендикулярно к границе раздела, отсюда следует соотношение

$$F_n^{(n)} = \frac{3\mu_0 (1 + \chi_0) m m'}{32\pi a^4} = \frac{3\mu_0 \chi_0 (1 + \chi_0) m^2}{32(2 + \chi_0) \pi a^4}. \quad (10)$$

Сила взаимодействия тела с границей равна силе взаимодействия диполя, индуцированного телом, с его зеркальным изображением. В тангенциальном поле, как и в случае насыщения, эта сила в два раза меньше, чем в нормальном поле. Чтобы полностью конкретизировать выражение (10), необходимо связать $\vec{m}$ с напряженностью невозмущенного поля. Наиболее просто это можно сделать для сферического тела, воспользовавшись результатом решения задачи о немагнитной сфере в неограниченном объеме магнетика в однородном внешнем поле [5]. В результате получим

$$\vec{m} = -\frac{3\chi_0 V}{3 + 2\chi_0} \mathbf{H}_* = -\frac{4\pi R^3 \chi_0}{3 + 2\chi_0} \mathbf{H}_*. \quad (11)$$

Здесь R — радиус сферы. С использованием (11) соотношение (10) принимает вид

$$F_n^{(n)} = \pi R^2 \left(\frac{R}{a}\right)^4 \mu_0 H_*^2 \frac{3\chi_0^3 (1 + \chi_0)}{2(2 + \chi_0)(3 + 2\chi_0)^2}, \quad H_* \ll H_T. \quad (12)$$

Сила (8) для сферического ($V = 4/3\pi R^3$) тела равна

$$F_n^{(n)} = \pi R^2 \left(\frac{R}{a}\right)^4 \mu_0 M_S^2 \frac{M}{12H_*}, \quad H_* \gg H_T. \quad (13)$$

Сравнение (12) и (13) показывает, что в полях порядка H_T сила достигает максимальной величины, поскольку при $H_* \ll H_T$ она растет с увеличением поля, а при $H_* \gg H_T$ — убывает. Для оценки максимума воспользуемся соотношением, которое в сильных полях переходит в (13),

а в слабых полях — в (12). Для магнитных жидкостей кривую намагничивания можно аппроксимировать ланжевеновской зависимостью:

$$M = M_S L = 3\chi_0 L H / \xi, \quad (14)$$

где $\xi = \frac{H}{H_T}$, $\chi_0 = \frac{M_S}{3H_T}$, $L = \text{cth } \xi - \xi^{-1}$. Заменяя в (12) начальную восприимчивость χ_0 на интегральную восприимчивость $\chi = 3\chi_0 L / \xi$, получим

$$F_n^{(n)} = \pi R^2 \mu_0 H_T^2 \left(\frac{R}{a} \right)^4 \cdot \frac{9}{2} \frac{\chi_0^3 L^3 (\xi + 3\chi_0 L) \xi}{(2\xi + 3\chi_0 L) (\xi + 2\chi_0 L)^2}. \quad (15)$$

При изменении поля изменяется ланжевеновский аргумент ξ . В сильных полях ($\xi \gg 1$) из (15) следует (13), в слабых полях ($\xi \ll 1$) получаем (12).

На рис. 2 приведен график зависимости относительной силы $\hat{F}_n = F_n / (\pi R^2 \mu_0 H_T^2 (R/a)^4)$ от ξ для различных значений χ_0 . Штриховая линия показывает изменение положения максимума при изменении χ_0 . Приведем численную оценку. В качестве характерного значения χ_0 для магнитной жидкости возьмем $\chi_0 = 3$. Как видно из рис. 2, максимальное значение силы в этом случае достигается при $\xi \simeq 7,5$. Полагая также $H_T = 15$ кА/м, получим $F_n^{(n)} \simeq 720$ (Па) $\cdot \pi R^2 (R/a)^4$.

При $\xi \simeq 7,5$ магнитная жидкость близка к состоянию насыщения, поэтому полученная оценка справедлива при произвольных расстояниях сферы от границы раздела. Если сфера соприкасается с границей ($R/a = 1$), на каждый квадратный сантиметр ее поперечного сечения действует сила отталкивания порядка сотых долей ньютона.

Качественный характер зависимости $F_n^{(n)}$ от расстояния сферы до границы и от напряженности поля согласуется с результатами экспериментальной работы [6]. Проведение количественного сопоставления затруднительно из-за отсутствия данных о характеристиках использованной в экспериментах [6] жидкости.

Список литературы

1. Rosenweig R. E. // AIAAJ. 1966. V. 4. P. 1751.
2. Шулъман З. П., Кордонский В. И. Магнитореологический эффект, Мнск, 1982.
3. Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М., 1985.
4. Вислович А. Н., Краков М. С. // Одиннадцатое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Саласпилс, 1984. Т. 3. С. 187.
5. Шимион К. Теоретическая электротехника. М., 1964.
6. Стругов В. Г., Чеканов В. В. // Одиннадцатое совещание по магнитной гидродинамике. Саласпилс, 1984. Т. 3. С. 103.

Поступила в редакцию 31.03.86.

УДК 535.33 : 535.36

А. М. МАЛЯРЕВИЧ, М. Р. ПОСЛЕДОВИЧ, Е. В. ТАРАСЕВИЧ

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В СПЕКТРАХ КР КРИСТАЛЛА ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТА

В основе природы сегнетоэлектрических превращений лежат малые смещения структурных элементов кристаллической решетки. Сложность строения ряда сегнетоэлектрических кристаллов затрудняет однозначное установление связи между макроскопическими электрофизическими свойствами и смещением атомов в элементарной ячейке при фазовом переходе. Ценную информацию при решении этого вопроса можно полу-

чить из изменений, наблюдаемых в спектрах комбинационного рассеяния (КР) в широком диапазоне температур, так как фазовый переход в общем случае сопровождается искажением симметрии атомных групп или симметрии их окружения.

Предлагаемая работа посвящена изучению температурных зависимостей относительных интенсивностей, полуширин и положения максимумов полос спектров комбинационного рассеяния сегнетоэлектрика триглицинсульфата (ТГС). Несмотря на большое число публикаций, вопрос о природе фазового перехода в этом кристалле остается дискуссионным.

Спектры комбинационного рассеяния ориентированных монокристаллических образцов регистрировались на установке, собранной на базе двойного дифракционного монохроматора ДФС-12. В качестве возбуждающего потока использовалось излучение аргонового лазера 1ЛА-120 на длине волны 514,5 нм (мощность излучения 300 мВ). Регистрация спектров велась по 90°-й схеме. Для выделения рассеянного излучения с определенным состоянием поляризации перед входной щелью монохроматора помещали поляроидную пленку. Поворот плоскости поляризации возбуждаемого пучка осуществляли с помощью полуволновой пластинки; температуру образца контролировали термопарой.

Анализ относительной интенсивности $I_{i(k)j}$ колебательных полос в комбинационном рассеянии (i и j — направления возбуждающего и рассеянного потоков, k и l — их поляризация соответственно) позволил отнести внешнее и внутреннее колебания кристаллической решетки ТГС к A и B типам симметрии в соответствии с правилами отбора [1] для centrosymmetric класса $2/m$ моноклинной сингонии выше точки Кюри и noncentrosymmetric класса 2 ниже точки фазового перехода [2].

В исследованном нами температурном интервале спектры комбинационного рассеяния кристаллов ТГС претерпевают изменения, заключающиеся в частотном сдвиге полос, в увеличении или уменьшении полуширины и относительной интенсивности их.

В области внутренних колебаний кристалла ТГС с наибольшей интенсивностью проявляется полоса 978 см^{-1} , принадлежащая полностью симметричному валентному колебанию $\nu_1(A)$ сульфатной группы SO_4^{2-} . В интервале температур от -180 до $+80^\circ\text{C}$ наблюдается смещение частоты этой полосы. Из рис. 1 видно, что с ростом температуры ее максимум плавно сдвигается в сторону низких частот, причем скорость изменения частоты возрастает с повышением температуры. Относительная интенсивность полосы при этом увеличивается в два раза. Указанные зависимости можно объяснить структурными изменениями, вызывающими пространственное перераспределение зарядов, что приводит в конечном счете к изменению силовых постоянных связей. Отмечаемое увеличение интенсивности связано, по-видимому, с некоторым повышением симметрии группы SO_4^{2-} , которое, однако, происходит в рамках одной и той же точечной группы. Об этом свидетельствует тот факт, что наблюдается полное снятие вырождения с вырожденных колебаний сульфатной группы во всем температурном интервале, в котором проводились исследования.

Наблюдаемые изменения связей в сульфатных группах кристалла ТГС теснейшим образом связаны со структурными деформациями атомных группировок глициновых молекул (Gly) вследствие сложной системы сильных водородных связей в кристалле [3, 4]. В первую очередь это должно было сказаться на колебаниях групп NH_2 и связи $\text{C}=\text{O}$, так как, согласно рентгеноструктурным исследованиям, именно между этими группами и сульфат-ионами существуют сильные водородные связи.

Колебание связи $\text{C}=\text{O}$ лежит в области $1700\text{--}1750\text{ см}^{-1}$ [5]. В спектре кристалла ТГС здесь проявляются две полосы с максимумами 1707 и 1751 см^{-1} . С ростом температуры наблюдается небольшое увеличение интенсивности и полуширины обеих полос. Однако полоса с частотой

1751 см^{-1} при изменении температуры не обнаруживает заметного частотного сдвига, в то время как другая полоса (1707 см^{-1}) при возрастании температуры смещается в сторону высоких частот (до 1712 см^{-1}) (см. рис. 1). Линейная зависимость частоты этого колебания от температуры свидетельствует о равномерном ослаблении энергии взаимодействия этой связи с окружением. Так как сильная водородная связь кислорода группы SO_4^{2-} существует только с GlyI, можно утверждать, что полоса 1707 см^{-1} принадлежит валентному колебанию карбонила GlyI, а полоса 1751 см^{-1} — колебаниям карбонильных групп GlyII и GlyIII, у которых с сульфатными группами существуют более слабые водородные связи. Увеличение частоты в первом случае (при 1707 см^{-1}) можно объяснить тем, что с повышением температуры атом водорода сдвигается в сторону сульфатной группы, и, следовательно, его воздействие на эту группу возрастает, а взаимодействие со связью $\text{C}=\text{O}$ GlyI уменьшается, что приводит к росту ее силовой постоянной.

Валентное колебание NH_3 -группы проявляется в области 2730—2770 см^{-1} . В кристалле ТГС полосы, соответствующие этим колебаниям, имеют слабую интенсивность и сильно перекрываются. Полосы, относящиеся к деформационным колебаниям этой группы, также сильно перекрываются другими колебательными полосами, и для температурных исследований нами была выбрана полоса 874 см^{-1} , принадлежащая веерным колебаниям NH_3 -группы.

Как видно из рис. 1, частота веерного колебания NH_3 -группы уменьшается с ростом температуры. Такое поведение частоты веерных колебаний этой группы коррелирует с описанными изменениями водородных связей. Смещение атомов водорода в сторону сульфатных групп приводит к более жесткому их закреплению в решетке кристалла вследствие усиления энергии взаимодействия с атомами кислорода SO_4^{2-} -групп и, как следствие, к торможению веерных колебаний NH_3 -групп. Подтверждением этому служит также изменение полуширины этой полосы с рос-

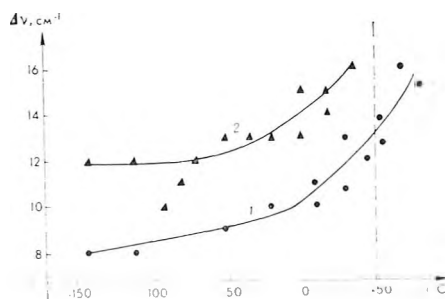
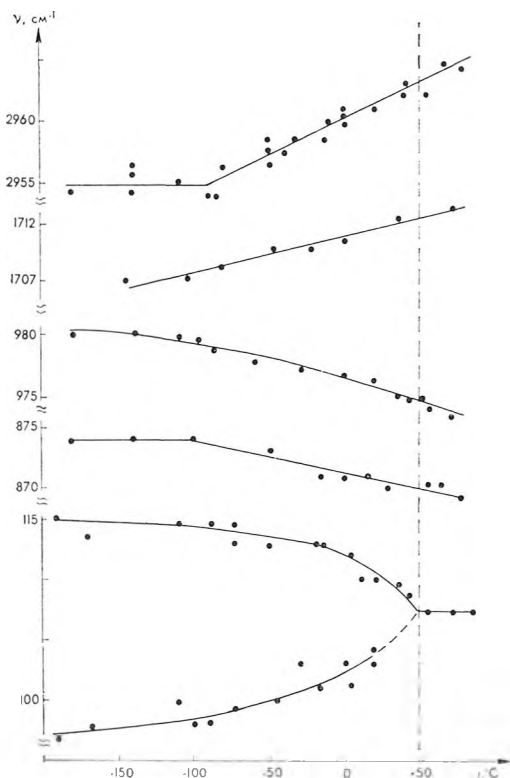


Рис. 1. Температурная зависимость положения максимумов полос комбинационного рассеяния кристалла ТГС

Рис. 2. Температурная зависимость полуширин полос комбинационного рассеяния кристалла ТГС:

1 — 874; 2 — 2954 см^{-1}

том температуры. С повышением температуры от -150°C до $+80^{\circ}\text{C}$ полуширина этой полосы изменяется от 8 до 16 см^{-1} , что служит однозначным доказательством усиления взаимодействия NH_2 -группы с ближайшим окружением, причем этот процесс начинает существенно проявляться при температуре $+10^{\circ}\text{C}$ и усиливается с ростом температуры (рис. 2).

Валентное симметричное колебание группы CH_2GlyI проявляется в спектре КР частотой 2954 см^{-1} при температуре -180°C . С повышением температуры частота этого колебания существенно увеличивается. Максимум этой полосы остается практически неизбежным до температуры -110°C (см. рис. 1). Затем наблюдается быстрый линейный рост частоты этого колебания вплоть до температуры $+80^{\circ}\text{C}$. В точке фазового перехода никаких существенных изменений не отмечено. Ход зависимости частоты этого колебания не дает возможности предположить, что наиболее существенное изменение в группе CH_2 происходит при температуре -110°C .

Таким образом, с повышением температуры уменьшается энергия связей атомов водорода с атомами кислорода, азота и углерода глициновых молекул и в первую очередь GlyI. При этом подвижность остова GlyI увеличивается, что в конечном счете приводит к фазовому переходу [6].

Полосы, ответственные за внешние колебания кристаллической решетки ТГС, также обнаруживают интересные зависимости. На рис. 1 показана зависимость частот полос 94 и 115 см^{-1} , которые связаны соответственно с колебаниями сульфатной группы как целого и трансляционными колебаниями GlyII и GlyIII друг относительно друга [7, 8]. С приближением к температуре перехода (пунктирная линия) наблюдается постепенное сближение частот этих колебаний. Наличие системы водородных связей между указанными группами приводит к появлению резонанса между близкими по частоте колебаниями, и в точке Кюри наблюдается слияние полос в одну. В изотропной фазе эта полоса соответствует колебанию сульфатных и глициновых групп друг относительно друга.

Проведенные исследования показали, что при изменении температуры кристалла ТГС происходят структурные изменения во всех группах, образующих кристаллическую решетку. Различная скорость температурного изменения частот полос и их полуширин в исследованном температурном интервале свидетельствует о неоднозначности процессов перестройки этих структурных групп.

Список литературы

1. Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М., 1965.
2. Пуле А., Матье Ж.-П. Колебательные спектры и симметрия кристаллов. М., 1973.
3. Hoshino S., Okaya Y., Pepinski R. // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 323.
4. Гурская Г. В. Структура аминокислот. М., 1968.
5. Галанов Е. К. // Оптика и спектроскопия. 1968. Т. 24. С. 137.
6. Кисловский Л. Д., Галанов Е. К., Шувалов Л. Д. Там же. С. 102.
7. Бродский И. А., Галанов Е. К. // ФТТ. 1969. Т. 11. Вып. 9. С. 2485.
8. Шабанов В. Ф., Сорокин А. В. // Изв. АН СССР. Сер. физ., 1975. Т. 39. Вып. 4.

Поступила в редакцию 06.01.86.

ДОЛГОВРЕМЕННЫЕ РЕЛАКСАЦИИ И ПОЗИЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФОТО-ЭДС В СИСТЕМЕ ПОЛУПРОВОДНИК—ЭЛЕКТРОЛИТ

Эффекты долговременной релаксации (ДР) [1], а также эффект позиционной зависимости (ПЗ) [2] фотоэлектрических сигналов в полупроводниковых структурах представляют практический интерес с точки зрения разработки принципиально новых приборов твердотельной электроники. Нами показано, что с помощью метода фото-ЭДС в системе полупроводник — электролит (ФПЭ) могут быть легко реализованы модельные эксперименты по изучению этих эффектов. Целесообразность использования в модельных экспериментах системы полупроводник — электролит обусловлена тем, что электролитический контакт обеспечивает возможность многократного выполнения измерений на одних и тех же образцах полупроводника в условиях целенаправленного изменения как поверхностных, так и объемных характеристик материала.

Измерения фото-ЭДС осуществлялись нами по традиционной схеме [3]: образец полупроводника погружался в прозрачный электролит и снабжался электрическим контактом в непогруженной части. Поверхность образца локально освещалась модулированным светом, возникающая при этом фото-ЭДС измерялась как разность потенциалов между электрическим контактом к образцу и платиновым электродом сравнения, погруженным в электролит. Для возбуждения фото-ЭДС использовалось излучение He—Ne ОКГ, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, мощность $P = 1$ мВт, либо излучение с λ в диапазоне от 0,5 до 1,1 мкм (P порядка 0,1 мВт), выделенное с помощью монохроматора из спектра лампы накаливания. Электролит представлял собой 0,5 %-ный раствор хлористого аммония в дистиллированной воде.

Эксперименты выполнялись на кремниевых образцах n - и p -типа проводимости, а также на образцах кремниевых эпитаксиальных структур. Образцы имели полированную рабочую поверхность, тыльная и боковые поверхности образцов защищались химически стойким лаком. С целью стабилизации поверхностных характеристик кремния образцы обрабатывались путем кипячения в аммиачно-перекисной смеси в течение 10—15 мин.

Как показали исследования, с помощью метода фото-ЭДС в системе полупроводник — электролит легко реализуются условия наблюдения и долговременных релаксаций первого рода ДР1 и фотоэлектрической утомляемости — релаксаций второго рода ДР2 (здесь и далее нами используется терминология, введенная авторами обзора [1]).

ДР1 наблюдается на кремниевых образцах любого типа и при любой подготовке поверхности. ДР1 проявляется в виде замедленной кинетики нарастания и спада фотоэлектрического импульса, характеристическое время медленной релаксации τ_1 составляет порядка 10^{-3} с, что на несколько порядков превышает типичные значения объемного времени жизни неосновных носителей заряда в образцах используемого кремния.

ДР2 воспроизводимо наблюдается на образцах кремния p -типа при выполнении измерений фото-ЭДС непосредственно после их освежения в концентрированной плавиковой кислоте. Время обработки в HF составляет 1—5 мин. ДР2 проявляется в виде временного дрейфа амплитудного значения импульсного фотоотклика.

На рис. 1 приведены типичные зависимости фото-ЭДС U_{Φ} от времени t , начиная с момента погружения образца в электролит сразу после освежения поверхности в HF. Приведенные данные показывают, что в эксперименте выполняется следующий закон долговременной релаксации:

$$U_{\Phi} = U_{\Phi 0} \cdot \exp(-t/\tau_2)^{1/2}, \quad (1)$$

где $U_{\phi 0}$ — значение фото-ЭДС в нулевой момент времени; τ_2 — характеристический параметр релаксации. Из приведенных данных следует, что величина параметра τ_2 частично зависит от электрофизических параметров полупроводника, а также от условий возбуждения фото-ЭДС. На образцах кремния n -типа в описанных условиях устойчивой и воспроизводимой ДР2 не наблюдается. ДР2 не удалось наблюдать и на образцах эпитаксиальных структур. Величина характеристического времени релаксации τ_2 на кремнии p -типа составляла для КДБ 0,3 от 4 до 11 мин, для КДБ10 — от 5 до 16 мин.

Позиционная зависимость фотоотклика устойчиво наблюдается в методе ФПЭ на образцах эпитаксиальных структур, а также на образцах высокоомного кремния при условии стабилизирующей обработки поверхности. ПЗ проявляется при изменении расстояния между световым зондом и электрическим точечным контактом к образцу. При этом контакт формируется на рабочей поверхности образца в непогруженной в электролит части, контакт затенен.

На рис. 2 приведены характерные зависимости величины фото-ЭДС от расстояния между световым зондом и контактом x . Зависимость U_{ϕ} от x нелинейна и может быть аппроксимирована выражением вида:

$$U_{\phi} = \frac{M}{N} (1 - \exp(-Nx)), \quad (2)$$

где M, N — постоянные, определяемые для конкретного типа образца и зависящие от геометрии опыта.

Установленные экспериментально основные закономерности проявления эффектов ДР и ПЗ в методике ФПЭ не противоречат развитым представлениям физики и электрохимии поверхности полупроводников и теории фотоэлектрических явлений, в частности теории поверхностных фотоэффектов в полупроводниках. Так, замедление релаксации импульсного фотоотклика ДР1, очевидно, является следствием того, что в формировании сигнала фото-ЭДС принимают участие медленные поверхностные состояния, существующие с высокой плотностью на поверхности кремния и определяющие процессы обмена носителями заряда на границе полупроводник — электролит.

Протекание процесса долговременной релаксации второго рода обусловлено, вероятно, дрейфом поверхностного потенциала кремния. Кос-

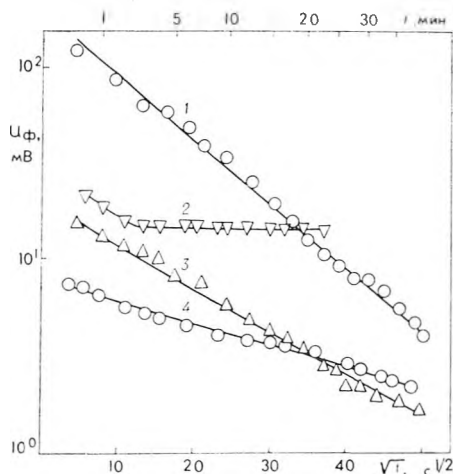


Рис. 1. Кинетика изменения фото-ЭДС на образцах кремния после осветнения в плавиковой кислоте:

1 — КДБ10, $\lambda=0,63$ мкм; 2 — КЭФ1,0, $\lambda=0,63$ мкм; 3 — КДБ0,3, $\lambda=0,76$ мкм; 4 — КДБ10, $\lambda=0,96$ мкм

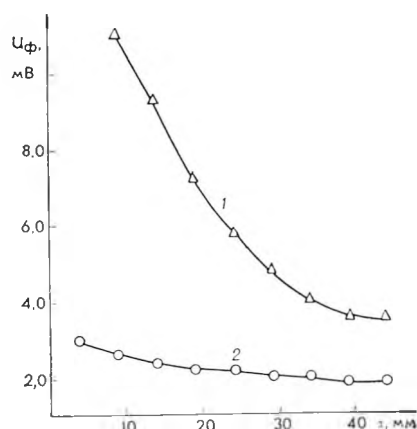


Рис. 2. Зависимость фото-ЭДС от расстояния между световым зондом и затененным точечным электрическим контактом, установленным на рабочей поверхности образца:

1 — 2КЭФ0,5/КДБ10; 2 — КДБ10

венным подтверждением этому может служить совпадение закона релаксации ДР2 (1) с законом Коца [4], описывающим кинетику изменения поверхностного заряда в полупроводниках. В нашем случае с помощью обработки в HF на *p*-Si вводятся поверхностные центры, обладающие малым сечением захвата по отношению к неосновным носителям заряда. Процесс медленной перезарядки этих центров и является причиной дрейфа фото-ЭДС.

Физика формирования эффекта ПЗ в методике ФПЭ, по нашему мнению, не отличается от известной для твердотельных координатных датчиков [2]. Возникновение ПЗ в образцах эпитаксиальных структур обусловлено эффектом продольного электрического поля на *p* — *n*-переходе при неравномерном освещении последнего. Можно показать, что аппроксимирующая зависимость типа (2) следует из теоретического уравнения для скорости изменения продольного электрического поля в предположении малости потенциала продольного поля по сравнению с потенциалом точки освещения перехода. Уравнение в этом случае решается путем разложения выражения для скорости изменения поля в ряд Тейлора и ограничения вторым приближением.

Эффект ПЗ на образцах высокоомного Si без внутреннего *p* — *n*-перехода возможен в предположении существования на поверхности полупроводника слоя, сильно обедненного основными носителями заряда. Именно такая ситуация часто реализуется на границе «кремний — водный электролит», т. е. на поверхности образца присутствует как бы аналог *p* — *n*-перехода и создаются условия для возникновения продольного поля при неравномерном освещении.

Возможное существование эффектов ДР и ПЗ фотоотклика в методике ФПЭ необходимо учитывать при использовании данной методики для метрики параметров полупроводника. Предложенные в настоящей работе модельные эксперименты могут быть использованы при постановке лабораторных работ по курсу физики полупроводников.

Список литературы

1. Шейнкман М. К., Шик А. Я. // ФТП. 1976. Т. 10. № 2. С. 209.
2. Полупроводниковые фотоприемники: Ультрафиолетовый, видимый и ближний инфракрасный диапазоны спектра / Под ред. В. И. Стафеева. М., 1984.
3. Lile D. L., Davis N. M. // Sol. Stat. Electronics. 1975. V. 18. N 7—8. P. 699.
4. Киселев В. Ф., Крылов О. В. Электронные явления в адсорбции и катализе на полупроводниках и диэлектриках. М., 1979.

Поступила в редакцию 03.11.86.

УДК 534.6.534.843.224

В. М. ДОБРЯНСКИЙ, В. И. КРЫЛОВИЧ, А. С. РУБАНОВ

ВЫХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКУСТИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КАЧАНИЕМ ЧАСТОТЫ ВХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Большинство интерферометрических методов исследования акустических свойств вещества основано на использовании гармонических зондирующих сигналов. В работе [1] показано, что расширение спектра частот электрического сигнала на входе акустического интерферометра за счет гармонического качания его частоты приводит к повышению информативности интерферометрических измерений.

Нами рассматривается более общий случай периодического качания частоты входного напряжения, получены и анализируются выражения, описывающие выходные характеристики интерферометра.

Пусть частота $\omega(t)$ электрического сигнала на входе акустического интерферометра с двумя линейными электроакустическими преобразователями — периодическая функция, представимая в виде

$$\omega(t) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\omega_k \cos(k\Omega t + \varphi_k), \quad (1)$$

где ω_0 — несущая частота; $T = 2\pi/\Omega$ — период качания частоты; $\Delta\omega_k$ и φ_k — амплитуда и начальная фаза k -й гармоники соответственно. Тогда, используя метод расчета, описанный в работах [1, 2], можно получить следующую формулу для возникающего на выходе интерферометра напряжения $U(t)$:

$$U(t) = U_0 \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \sum_{n=0}^{\infty} R^n \times \\ \times \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_k=-\infty}^{\infty} J_{l_k}(\Theta_k) \exp[i l_k (u_k - z_n k)], \quad (2)$$

где U_0 — не зависящая от времени t постоянная; $J_{l_k}(\Theta_k)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка l_k ; $u_k = \Omega_k(t - L/v) + \varphi_k$; $z_k = 2\Omega_k L/v$; $\Theta_k = \Delta\omega_k/\Omega_k$; $\Omega_k = k\Omega$; $R = R_0 \exp(-i\gamma)$; $R_0 = r_1 r_2 \exp(-2\alpha L)$; $\gamma = 2\omega_0 L/v + \delta_1 + \delta_2$; $r_1 \exp(i\delta_1)$ и $r_2 \exp(i\delta_2)$ — коэффициенты отражения волн от излучающего и приемного электроакустических преобразователей; v и α — скорость и коэффициент поглощения волн в исследуемой среде соответственно.

В общем случае амплитуда и частота выходного напряжения (2) — осциллирующие функции амплитуд $\Delta\omega_k$ и частот Ω_k гармонических составляющих частоты (1) и зависят от акустических характеристик интерферометра.

Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из (2).

Если время двойного обхода волны резонатора кратно целому числу периодов качания частоты

$$\frac{2L}{v} = pT \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

то выражение (2) принимает вид:

$$U(t) = \frac{U_0}{1-R} \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \times \\ \times \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_k=-\infty}^{\infty} J_{l_k}(\Theta_k) \exp(i l_k u_k),$$

что эквивалентно

$$U(t) = \frac{U_0}{1-R} \exp\left\{i\left[\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k \sin u_k\right]\right\}. \quad (4)$$

Как видно из (4), при выполнении условия (3) частотный спектр напряжения на выходе интерферометра будет идентичен спектру частот входного сигнала независимо от акустических параметров резонатора. Отсюда следует, в частности, результат, полученный в [1] при качании частоты входного напряжения по гармоническому закону.

Интерес представляет случай, когда время двойного обхода волны резонатора кратно полусцелому числу периодов качания частоты (1):

$$\frac{2L}{v} = \left(q \pm \frac{1}{2}\right)T, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5)$$

При выполнении (5) равенство (2) принимает вид:

$$U(t) = U_0 \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \sum_{n=0}^{\infty} R^n \prod_{v=1}^{\infty} \sum_{l_{2v}=-\infty}^{\infty} J_{l_{2v}}(\Theta_{2v}) \exp(i l_{2v} u_{2v}) \times$$

$$\times \prod_{v=1}^{\infty} \sum_{l_{2v-1}=-\infty}^{\infty} J_{l_{2v-1}}(\Theta_{2v-1}) \exp(i l_{2v-1} u_{2v-1}) \cos[\pi l_{2v-1} (2v-1) n]. \quad (6)$$

Переходя в выражении (6) к суммированию отдельно по четным и нечетным неотрицательным индексам l_{2v-1} , получаем

$$\begin{aligned} U(t) = U_0 \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \sum_{n=0}^{\infty} R^n \prod_{v=1}^{\infty} \exp(i\Theta_{2v} \sin u_{2v}) \times \\ \times \prod_{v=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_{2v-1}=0}^{\infty} J_{2m_{2v-1}}(\Theta_{2v-1}) \exp(i2m_{2v-1} u_{2v-1}) + \right. \\ \left. + \sum_{m_{2v-1}=1}^{\infty} J_{2m_{2v-1}}(\Theta_{2v-1}) \exp(-i2m_{2v-1} u_{2v-1}) + (-1)^n \times \right. \\ \left. \times \left\{ \sum_{m_{2v-1}=1}^{\infty} J_{2m_{2v-1}-1}(\Theta_{2v-1}) \exp[i(2m_{2v-1}-1) u_{2v-1}] - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m_{2v-1}=1}^{\infty} J_{2m_{2v-1}-1}(\Theta_{2v-1}) \exp[-i(2m_{2v-1}-1) u_{2v-1}] \right\} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Равенство (7) после несложных преобразований можно привести к виду:

$$\begin{aligned} U(t) = U_0 \exp\left\{i\left[\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right) + \sum_{v=1}^{\infty} \Theta_{2v} \sin u_{2v}\right]\right\} \sum_{n=0}^{\infty} R^n \times \\ \times \prod_{v=1}^{\infty} [\cos(\Theta_{2v-1} \sin u_{2v-1}) + i(-1)^n \sin(\Theta_{2v-1} \sin u_{2v-1})]. \quad (8) \end{aligned}$$

При $\sum_{v=1}^{\infty} |\Theta_{2v-1}| \ll \pi$ соотношение (8) упрощается

$$U(t) = \frac{U_0}{1-R} \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \exp\left[i\left(\sum_{v=1}^{\infty} \Theta_{2v} \sin u_{2v} + \psi_{2v-1}\right)\right], \quad (9)$$

где

$$\text{tg } \psi_{2v-1} = \frac{1-R}{1+R} \text{tg}\left(\sum_{v=1}^{\infty} \Theta_{2v-1} \sin u_{2v-1}\right). \quad (10)$$

Из формул (9) и (10) можно найти следующее выражение для частоты $\omega'(t)$ напряжения на выходе интерферометра:

$$\omega'(t) = \omega_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\Delta\omega_{2v} \cos u_{2v} + \frac{1-R}{1+R} \Delta\omega_{2v-1} \cos u_{2v-1} \right). \quad (11)$$

Из (10) и (11) видно, что при выполнении условия (5) амплитуды и частоты четных и частоты нечетных гармоник спектра принимаемого и зондирующего сигналов одинаковы. Однако амплитуды нечетных гармоник спектра частот выходного напряжения зависят от акустических параметров резонатора R_0 и γ . Так, например, при несущей частоте входного электрического сигнала, соответствующей максимуму крутизны частотно-фазовой характеристики интерферометра [1], амплитуда напряжения на выходе интерферометра имеет локальный минимум, а амплитуда нечетных гармоник частотного спектра выходного напряжения будет максимальной и равной (при $\alpha L \ll 1$)

$$\Delta\omega'_{2v-1} = \frac{1}{\alpha L} \Delta\omega_{2v-1}. \quad (12)$$

Можно показать, что расстройка периода качания частоты зондирующего сигнала от его значения, удовлетворяющего условию (5), приводит

к изменению амплитуд $\Delta\omega_{2v}$ и $\Delta\omega_{2v-1}$ частотного спектра принимаемого сигнала. При несущей частоте, соответствующей выполнению соотношения (12), и расстройке частоты Ω на величину $\mu = (\Omega' - \Omega)L/v$ при $|\mu| \ll \pi(2v-1)$ -я гармоника запишется так:

$$\omega_{2v-1}'(t, \mu) = \frac{1}{\alpha L} \Delta\omega_{2v-1} \left[\sin \Omega_{2v-1} t + \mu \frac{1}{\alpha L} \cos \Omega_{2v-1} t \right]. \quad (13)$$

Тогда для параметра модуляции $(2v-1)$ -й гармоники

$$H_{2v-1}(\mu) = \frac{\omega_{2v-1 \max}'(t, \mu) - \omega_{2v-1 \min}'(t, \mu)}{\Delta\omega_{2v-1}'}$$

из (13) можно получить: $H_{2v-1}(\mu) = \frac{2|\mu|}{\alpha L}$, откуда видно, что производная $dH_{2v-1}(\mu)/d\mu$ терпит разрыв в точке $\mu = 0$. Это говорит о резком изменении параметра модуляции $H_{2v-1}(\mu)$ при расстройке периода модуляции от его значения, удовлетворяющего (5). Указанное обстоятельство можно использовать для прецизионного измерения при выполнении (5) периода качания T частоты, а значит, и определения скорости распространения волн в среде $v = 2L/T(q \pm 1/2)$.

Отметим также, что полученные соотношения могут найти применение для определения коэффициента поглощения волн (что следует из формулы (12)). Кроме того, их можно использовать для контроля настройки акустического интерферометра. Задавая периодическое качание частоты входного напряжения в соответствии с условием (5) и измеряя отношение амплитуд $\Delta\omega_k'/\Delta\omega_k$, можно судить о качестве настройки и в случае необходимости корректировать ее, добиваясь выполнения соотношений $\Delta\omega_{2v}'/\Delta\omega_{2v} = 1$ и $\Delta\omega_{2v-1}'/\Delta\omega_{2v-1} = \text{const}$ для всех v .

Список литературы

1. Крылов В. И., Рубанов А. С. // ИФЖ. 1985. Т. 49. С. 654.
2. Крылов В. И., Логвинович П. Н., Рубанов А. С. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-техн. наук. 1979. № 3. С. 100.
3. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., 1962.

Поступила в редакцию 15.09.86.

УДК 512.93 : 681.325.63.35

Н. Н. ТАРАСЕВИЧ

МИНОРИТАРНАЯ ФУНКЦИЯ — ФУНКЦИЯ КОНТРОЛЯ ОШИБОК В МАЖОРИТАРНО РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Одним из наиболее эффективных методов структурного резервирования [1, 2] является мажоритарный, предложенный Дж. фон Нейманом [3]. Для улучшения показателей долговечности мажоритарно резервированных систем используют контроль ошибок с последующим восстановлением неисправных блоков. Вопросам контроля ошибок в системах различного назначения посвящена обширная литература. Наиболее полно контроль ошибок в мажоритарно резервированных системах исследован в работе [4], где решена задача синтеза контролирующих автоматов в базе ИЛИ-НЕ для трехканальной системы. В названии класса изобретений НОЗК 19/23 [5] содержится определение мажоритарного элемента как элемента, сигнал на выходе которого соответствует сигналу на большинстве его входов. По-видимому, по аналогии с определением мажоритарного элемента там же дано определение миноритарного элемента как элемента, сигнал на выходе которого соответствует сигналу на меньшинстве его входов. Однако из определения не ясно, какой сигнал должен быть на выходе миноритарного элемента, когда сигналы одновре-

менно отсутствуют или присутствуют на всех его входах. Не ясно также практическое использование миноритарного элемента. Цель настоящей работы — обоснование определения миноритарной функции как функции контроля ошибок в мажоритарно резервированных системах.

В настоящее время известны и широко используются пороговые элементы (ПЭ), реализующие пороговую функцию (ПФ):

$$F_{\Pi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \sum_i a_i x_i \geq h, \\ 0, & \sum_i a_i x_i < h, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i \in 0, 1$ — значение сигнала на i -м входе ПЭ; a_i — весовой коэффициент i -го входа; h — порог; n — число входов ПЭ (число аргументов ПФ) [1]. Мажоритарной будем называть функцию (1), для которой порог h выбирается следующим образом:

$$n \text{ четно} \rightarrow h = \frac{n}{2} + 1, \quad n \text{ нечетно} \rightarrow h = \frac{n+1}{2}. \quad (2)$$

Доопределим (1) следующим образом:

$$F_{\Pi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & n \geq \sum_i x_i \geq h, \\ 0, & 0 \leq \sum_i x_i < h, \end{cases} \quad (3)$$

полагая $a_i = 1$ (значение a_i для дальнейших рассуждений несущественно). Функция (3) определена на 2^n наборах аргументов, в том числе и на нулевом, где $F_{\Pi}(0, 0, \dots, 0) = 0$. Ее свойства, назначение и область применения изучены и достаточно подробно описаны в литературе, например, [6].

В (1), (3) и других логических выражениях значения аргументов (0 или 1) обычно считаются равноправными, т. е. в математических операциях и нуль, и единица имеют равную значимость. Однако логические функции с равноправными аргументами не являются достаточно точной моделью элементов.

При техническом описании работы элементов, устройств пользуются соглашениями положительной и отрицательной логики. При этом сигналом считают либо 1, либо 0. Другое состояние входов и выходов элементов соответствует отсутствию сигнала. В дальнейших рассуждениях будем иметь в виду соглашение положительной логики. Для описания элементов, спроектированных в соответствии с указанным соглашением, введем понятия истинное (единица 1) и ложное или исходное (не единица 1) значение аргумента функции. Элемент «работает» (реализует заданную функцию), когда хотя бы на одном из его входов есть сигнал. При отсутствии входных сигналов элемент находится в исходном состоянии. Следовательно, соответствующая математическая функция, описывающая «работу» реального элемента, не должна определяться на нулевом наборе аргументов, так как здесь элемент не «работает», т. е. областью определения такой функции должно быть $(2^n - 1)$ наборов аргументов, каждый из которых содержит хотя бы один истинный аргумент. Такой подход приводит к отождествлению понятий сигнал и истинный аргумент функции и, следовательно, к соответствию математического и технического описания элемента. Учитывая сказанное, запишем (3) в виде

$$F_M^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & n^1 \geq \sum_i x_i \geq h, \\ \bar{1}, & \sum_i x_i < h, \end{cases} \quad (4)$$

где единица в обозначении $F_M^1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ указывает истинное значение аргументов, n^1 обозначает n единиц (для определенности все рассуждения проведем для мажоритарного элемента и мажоритарной функции). Выражение (4) читаем так: мажоритарная функция — это такая логическая функция, определенная на всех наборах аргументов, кроме нулевого, которая принимает значение 1, когда большинство ее аргументов истинно, и значение $\bar{1}$, когда истинно меньшинство ее аргументов. Функция (4) описывает реальный мажоритарный элемент при соглашении положительной логики, если порог h выбирается в соответствии с (2).

Мажоритарный элемент, как известно, предназначен для исправления ошибок в резервированной системе. Для обнаружения ошибок необходим элемент контроля. Функцию, описывающую его работу, найдем, применив к (4) закон исключения третьего (что не истинно, то ложно). Получим

$$F_m^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \bar{1}, & n^1 \geq \sum_i x_i \geq h, \\ 1, & \sum_i x_i < h. \end{cases} \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), видим, что для записи функции, описывающей работу устройства контроля, достаточно было в (4) поменять местами 1 и $\bar{1}$. Если же считать, что логические функции определены на всех 2^n наборах и их аргументы равноправны, то закон исключения третьего не применим. Применив его к (3), видим, что на нулевом наборе аргументов, где $\sum_i x_i = 0$, полученная таким образом функция должна принять значение единицы, т. е. из отсутствия сигналов должен сформироваться сигнал.

Функция (5) является допороговой. Если порог h выбран в соответствии с (2), то выражение (5) определяет миноритарную функцию.

Определение. Миноритарная функция — это такая логическая функция, определенная на всех наборах аргументов, кроме нулевого, которая принимает значение 1(0), когда меньшинство ее аргументов истинны, и значение $\bar{1}$ ($\bar{0}$), когда большинство ее аргументов истинны.

Т а б л и ц а 1

Номер набора	x_1	x_2	x_3	F_M^1	F_m^1
1	—	—	—	—	—
2	—	—	1	—	1
3	—	1	—	—	1
4	—	1	1	1	—
5	1	—	—	—	1
6	1	—	1	1	—
7	1	1	—	1	—
8	1	1	1	1	—

Т а б л и ц а

Номер набора	y_1	y_2	y_3	F_M^0	F_m^0
1	0	0	0	0	—
2	0	0	—	0	—
3	0	—	0	0	—
4	0	—	—	—	0
5	—	0	0	0	—
6	—	0	—	—	0
7	—	—	0	—	0
8	—	—	—	—	—

Соглашения положительной и отрицательной логики обратимы. Сравним табл. 1 и 2, являющиеся таблицами истинности мажоритарной и миноритарной функций. Прочерк в таблицах означает отсутствие сигнала, y_i — аргументы функций для соглашения отрицательной логики, нуль в обозначениях F_M^0 и F_m^0 указывает истинное значение аргумента. Если в табл. 2 нуль заменить на единицу, то после циклической перестановки строк получим табл. 1.

Из табл. 1 видим, что наборы 4, 6, 7, на которых $F_M^1 = 1$, неполные: в каждом из них один сигнал отсутствует. Такие ситуации в мажоритарно резервированной системе указывают на наличие отказа, как и ложный сигнал в наборах 2, 3, 5. Отказ (сбой) типа «отсутствие сигнала» в рамках соглашения положительной логики обнаружить невозможно. Это можно сделать в рамках соглашения отрицательной логики, как видно из табл. 2, причем функция контроля отсутствия сигнала идентична функции контроля наличия ложного сигнала (5) с точностью до типа сигнала. Здесь сигналом является нуль (например, для определенности, низкий уровень напряжения в ТТЛ-логике). Функцию контроля ложных сигналов для соглашения отрицательной логики F_m^0 (миноритарную) запишем в виде

$$F_m^0(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} \bar{0}, & n^0 > \sum_i y_i \geq h, \\ 0, & \sum_i y_i < h. \end{cases} \quad (6)$$

Для включения элемента, реализующего функцию контроля (6), в систему, построенную в соответствии с соглашением положительной логики, необходимо согласовать эти соглашения. Согласование осуществляется с помощью инвертора — элемента, который имеет один вход и один выход, превращает отсутствие сигнала в сигнал (или наоборот) и предназначен для перехода от соглашения положительной логики к соглашению отрицательной логики и обратно.

Алгоритм перехода следующий: 1) $n^0 \rightarrow n^1$; 2) $0 \rightarrow \bar{1}$, $\bar{0} \rightarrow 1$; 3) $y_i \rightarrow x_i$; 4) исключается равенство $n^0 = \sum_i y_i$ (исходное состояние системы).

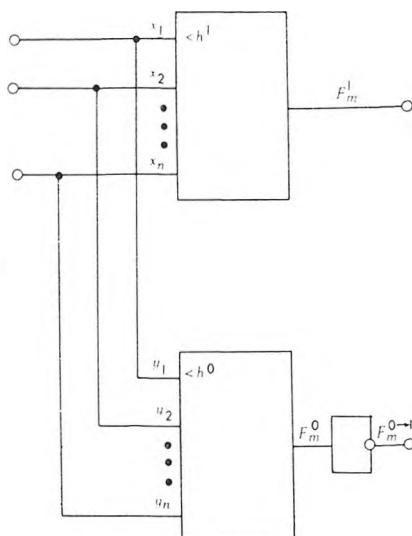
Функция (6), преобразованная в соответствии с указанным алгоритмом, имеет вид

$$F_m^{0 \rightarrow 1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & n^1 > \sum_i x_i \geq h, \\ \bar{1}, & \sum_i x_i < h, \end{cases} \quad (7)$$

где $F_m^{0 \rightarrow 1}$ обозначает, что функция реализована в соглашении отрицательной логики и приведена к соглашению положительной логики.

Полученные выражения (5) и (7) иллюстрируются схемой (см. рисунок), где $<h^1$ — миноритарный элемент, для которого сигнал — единица; $<h^0$ — миноритарный элемент, для которого сигнал — нуль. Элемент, реализующий (5), обнаруживает ложные сигналы, а устройство, реализующее (7), — ложные пропадания сигналов.

Использованный в работе подход позволяет строго обосновать определение миноритарной функции как функции меньшинства. При этом миноритарный элемент может быть определен как элемент, сигнал на выходе которого появляется при наличии сигналов на меньшинстве входов. Если сигнал единица, то единица на его выходе должна появиться при наличии единиц на меньшем, чем установленный порог, числе входов, а если сигнал нуль, то нуль на выходе появляется при наличии нулей на меньшем, чем установленный порог, числе входов. Соответ-



Устройство для контроля ошибок в мажоритарно резервированной системе

ственно миноритарная функция принимает истинное значение нуля, если меньшинство ее аргументов имеют истинное значение нуля, и истинное значение единица, если меньшинство ее аргументов имеют истинное значение единица.

В заключение отметим следующее. Если нет сигналов ни на одном из входов элемента, то и на его выходе сигнала быть не может, иначе это не элемент, а устройство, состоящее из нескольких (минимум из двух) элементов, по крайней мере, один из которых обязательно инвертор. Элемент, имеющий один вход и один выход, может только передать сигнал со входа на выход (если этот элемент рассматривать в рамках только одного соглашения), т. е. повторить, а элемент, имеющий несколько входов, может сформировать сигнал на своем выходе только при наличии сигнала хотя бы на одном из входов.

Выводы

1. Логические функции, определенные на $(2^n - 1)$ наборах аргументов (за исключением нулевого, когда истинный аргумент функции единица, и единичного, когда истинный аргумент нуля) являются более точной моделью логических элементов, чем функции, определенные на всех 2^n возможных наборах аргументов.

2. n -й набор аргументов логической функции соответствует исходному состоянию логического элемента. Любой элемент имеет исходное состояние: если нет сигналов на входах, то нет сигнала и на выходе.

3. Задачу контроля ошибок в резервированных системах можно решать, применяя закон исключения третьего к основной задаче.

4. Применение закона исключения третьего к пороговым функциям позволяет определить класс допороговых функций, одной из которых является миноритарная.

5. Миноритарная функция — это функция меньшинства, функция контроля ошибок (отказов) в мажоритарно резервированных системах.

Список литературы

1. Пакулов Н. И., Уханов В. Ф., Чернышов П. Н. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. М., 1974.
2. Вери́гин В. Н. Раздельное резервирование как метод повышения надежности ЦВМ. М., 1967.
3. Нейман Дж. // Автоматы. М., 1956. С. 68.
4. Доманицкий С. М. Построение надежных логических устройств. М., 1971.
5. МКИ⁴ НОЗК 19/23. Четвертая редакция. М., 1985.
6. Вавилов Е. Н., Егоров Б. М., Ланцев В. С., Тоценко В. Г. Синтез схем на пороговых элементах. М., 1970.

Поступила в редакцию 23.06.86.

К. Н. БАКИНОВСКИЙ, Н. Н. ВАСИЛЬЕВ, Г. И. РАЙ,
Г. В. ШАРОНОВ, А. П. ШКАДАРЕВИЧ

УСТОЙЧИВЫЙ РЕЖИМ МОДУЛЯЦИИ ДОБРОТНОСТИ И СИНХРОНИЗАЦИИ МОД АИГ: Nd^{3+} -ЛАЗЕРА НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ С НЕЛИНЕЙНО ПОГЛОЩАЮЩИМ КРИСТАЛЛОМ LiF С F_2 -ЦЕНТРАМИ ОКРАСКИ

Целесообразность применения нелинейно поглощающих кристаллов (НПК) LiF с F_2^- -центрами окраски (ЦО) для модуляции добротности (МД) как импульсных, так и непрерывных лазеров на иттрий-алюминиевом гранате показана в работах [1, 2]. В [3] впервые получен режим пассивной синхронизации мод (СМ) в непрерывном лазере с использованием кристаллов $\text{LiF}:\text{F}_2^-$ при больших длинах резонатора (~ 30 м) вследствие длительного времени релаксации верхнего возбужденного уровня F_2^- -центров в таком фильтре ~ 100 нс. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с влиянием уровня возбуждения активной среды, начального поглощения НПК, концентрации F_2^- -центров на временные и энергетические характеристики выходного излучения, изучены недостаточно. Не решена задача повышения стабильности выходных параметров лазера с пассивным затвором для его практического использования.

Нами проведены исследования выходных характеристик излучения непрерывного лазера на АИГ: Nd^{3+} с активной синхронизацией мод и пассивной модуляцией добротности резонатора НПК $\text{LiF}:\text{F}_2^-$ с целью получения стабильного режима генерирования мощных сверхкоротких оптических импульсов.

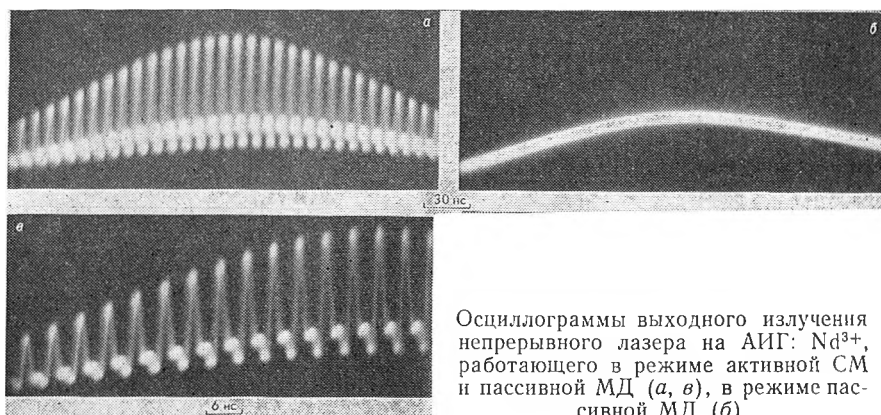
Экспериментальная установка собрана на базе промышленного квазинепрерывного лазера ЛТИ-502. Выходное зеркало лазера плоское, коэффициент пропускания 16 %; глухое зеркало с выпуклой отражающей поверхностью (радиус кривизны 400 мм и коэффициент пропускания $\leq 0,2$ %). Активная синхронизация мод в исследуемом лазере осуществлялась при помощи акустооптического синхронизатора мод (АОСМ) МЛ-202 с дифракционной эффективностью 32 % на рабочей частоте ~ 76 МГц и подводимой мощности ~ 2 Вт. Управляющий синусоидальный сигнал на частоте межмодовых биений подавался на АОСМ с генератора стандартных сигналов (Г4-44) через усилитель мощности (УЗ-11). Селекция поперечных мод обеспечивалась внутрирезонаторной диафрагмой диаметром 1,5 мм. Для сравнительной оценки характеристик выходного излучения режимов, помимо пассивных затворов для модуляции добротности, использовался также акустооптический затвор МЗ-301. Средняя мощность выходного излучения контролировалась измерителем мощности типа ИМО. Временная структура выходного излучения изучалась с помощью лавинного фотодиода ЛФД-2 и широкополосного осциллографа С1-75. Ширина полосы детектирующей системы ~ 250 МГц. В качестве НПК применялись кристаллы $\text{LiF}:\text{F}_2^-$, полученные при окрашивании кристаллов LiF γ -излучением источника Co^{60} дозой $5 \cdot 10^4$ Кл/кг. Для управления параметрами выходного излучения использовались кристаллы $\text{LiF}:\text{F}_2^-$ с коэффициентами начального пропускания на длине волны $\lambda = 1,064$ мкм 75, 82 и 96 % и потерями на отражение $\sim 0,5$ %.

Как видно из приведенных результатов (см. таблицу), использование НПК с начальным пропусканием 75—96 % приводит к генерации последовательности импульсов длительностью от 300 до 750 нс и периодом следования от 30 до 680 мкс в зависимости от плотности мощности излучения внутри резонатора. Наиболее устойчивый режим генерации наблюдался в случае НПК с начальным пропусканием 82 %. В этом слу-

Результаты экспериментов

Коэффициент начального пропускания, %	Ток накачки, А	$P_{\text{ср}}$, Вт режим МД	Период следования импульсов, мкс	Длительность импульсов, нс	$P_{\text{ср}}$, Вт, режим СМ (МЛ-202) и МД
75	32	0,2—0,4	400—200	300	0,35
НПК 82	30	0,2—0,8	680—200	400	0,75
96	28	1,6	30	750	1,5
МЗ-301	28	1,8	220	600	1,7

чае нестабильность амплитуды, длительности и периода следования импульсов при средней мощности выходного излучения $\sim 0,6$ Вт была $\sim 5\%$. С увеличением интенсивности излучения внутри резонатора наблюдалось уменьшение периода следования импульсов от 680 до 220 мкс. Длительность импульсов при этом оставалась постоянной (400 нс). Работа пассивного затвора в сочетании с акустооптическим модулятором добротности типа МЗ-301 с периодом следования 220 мкс приводила к сужению диапазона перестройки частоты следования импульсов, а стабильный режим генерации наблюдался только при определенных уровнях интенсивности излучения внутри резонатора лазера, что требовало дополнительной подстройки. В этом плане наибольший интерес представляет использование НПК $\text{LiF} : \text{F}_2^-$ (82 %) с акустооптическим синхронизатором мод (АОСМ) типа МЛ-202, осуществляющим внутрирезонаторную модуляцию потерь на частоте межмодовых биений. В этом случае наблюдается устойчивый режим СМ с МД, приводящий к генерации последовательности цугов сверхкоротких оптических импульсов. Временная структура излучения показана на рисунке. Зарегистрированная длительность одиночного импульса (~ 1 нс по полуширине) определялась шириной полосы детектирующей системы. При использовании кристалла $\text{LiF} : \text{F}_2^-$ стабильный режим СМ наблюдался при значительно меньшей мощности, подводимой к АОСМ (~ 6 раз), по сравнению с применением акустооптического затвора МЗ-301, что, видимо, свидетельствует о наличии у кристалла синхронизирующих свойств. Причем этот эффект наблюдался только у кристаллов, прошедших специальную термообработку, приводящую к отжигу F_2^- -центров с временем релаксации ~ 100 нс и возникновению в кристалле сложных ЦО с временем релаксации 0,5 нс, что подтверждалось прямыми измерениями времен релаксации образующихся центров окраски. Величина параметра δ , определяющего эффективность работы затвора [4] и рав-



Осциллограммы выходного излучения непрерывного лазера на АИГ: Nd^{3+} , работающего в режиме активной СМ и пассивной МД (а, в), в режиме пассивной МД (б)

ного отношению показателя поглощения НПК в просветленном состоянии к показателю начального поглощения на длине волны генерации 1,064 мкм, равна 0,5. Поэтому использование термообработанных кристаллов $\text{LiF}:\text{F}_2^-$ в резонаторе АИГ: Nd^{3+} -лазера с непрерывной накачкой при равной мощности, подводимой к АОСМ, позволяет осуществить более полный режим синхронизации мод, чем с АОЗ (МЗ-301), что особенно важно при больших уровнях накачки активной среды.

Полученные результаты указывают на перспективность использования для управления временными и энергетическими характеристиками АИГ: Nd^{3+} -лазеров с непрерывной накачкой пассивных лазерных затворов на основе термообработанных кристаллов $\text{LiF}:\text{F}_2^-$ в сочетании с активными устройствами модуляции лазерного излучения.

Список литературы

1. Головин А. Д., Лахно П. Р., Петров А. В., Созинов Б. П., Чураков В. П. // Тез. докл. IV Всесоюз. конферен. Оптика лазеров. Л., 1983. С. 128.
2. Майоров А. П., Макуха В. К., Смирнов В. А., Тарасов В. М. // ЖТФ. 1981. Т. 53. С. 2391.
3. Корниенко Л. С., Кравцов Н. В., Сидоров В. А., Сусов А. М., Яценко Ю. П. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 11. С. 2369.
4. Бураков В. С., Кононов В. А., Корочкин Л. С., Михнов С. А., Хулугуров В. М., Хюппенен В. Н., Чепурной В. А., Шкадаревич А. П. // ЖПС. 1982. Т. 36. Вып. 3. С. 494.

Поступила в редакцию 02.09.86.

УДК 620.179.153

АХМЕД БАКР, А. Д. ЛЕВКОВИЧ, А. Н. ПЕРЦЕВ

ВЛИЯНИЕ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ НА БЕТА-СПЕКТР ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ПОГЛОТИТЕЛЬ

Энергетические спектры позитронов и электронов (испускаемых при бета-распаде ^{22}Na и ^{208}Tl соответственно) демонстрируют свойство стабилизации, проходя слою поглотителя из бериллия, алюминия, никеля, слюды; положение наиболее вероятной энергии, средней энергии, относительной ширины слабо изменяется в широком диапазоне толщин поглотителя. Это свойство, видимо, носит общий характер и отражает особенности бета-спектров и взаимодействия бета-частиц с веществом. В данной работе рассматривается влияние ионизационных потерь на бета-спектр при прохождении через поглотитель.

Как известно [1], средние потери энергии на единицу пути описываются формулами:

для нерелятивистских энергий

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^2 NZ}{mv^2} \ln \frac{1,16 mv^2}{2I} = 0,306 \rho \frac{Z}{A} \beta^{-2} \ln \frac{1,16 E}{I}, \text{ МэВ/см}, \quad (1)$$

для релятивистской области

$$-\frac{dE}{dx} = 0,153 \rho \frac{Z}{A} \beta^{-2} \left[\ln \frac{E(E+mc^2)\beta^2}{2I^2 mc^2} + (1-\beta^2) - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \ln 2 + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 - \Delta \right], \text{ МэВ/см}, \quad (2)$$

где e — заряд электрона; N — число атомов в 1 см^3 ; ρ — плотность; A — атомный вес; Z — порядковый номер; I — средняя энергия возбуждения атомов; $\beta = \frac{v}{c}$; v — скорость электрона; c — скорость света; Δ — влияние поляризации среды.

Граничные энергии ^{22}Na и ^{208}Tl равны 540 и 760 кэВ соответственно; большая часть бета-частиц испускается с энергией меньше 500 кэВ. Расчет dE/dx по формулам (1) и (2) для бериллия, алюминия и никеля показывает, что с 5 %-ной точностью значения dE/dx в этой области энергий совпадают. Это позволяет в дальнейшем ограничиться использованием более простого выражения (1) и получить аналитические формулы для средних потерь энергии при прохождении бета-частиц через поглотитель конечной толщины.

Введя $E' = \frac{1,16 E}{I}$ и $C_1 = \left(\frac{1,16}{I}\right)^2 \frac{0,306 \rho Z m c^2}{2A}$, перепишем (1) в интегральной форме:

$$-\int_{E_0}^E \frac{E' dE'}{\ln E'} = C_1 \int_0^L dx, \quad (3)$$

где L — линейная толщина поглотителя.

Для области наиболее вероятных энергий $\ln E'$ аппроксимируем степенной зависимостью $\ln E' = K(E')^a$; с точностью 0,1 % имеем для бериллия $\ln E' = 2,819(E')^{0,13}$; для никеля $\ln E' = 2,450(E')^{0,15}$.

Интегрируя (3), получим $E_0^{2-a} - E^{2-a} = CL$, где $C = \left(\frac{I}{1,16}\right)^{2-a} K \times \times (2-a) C_1$, или, вводя $2-a \equiv \alpha$:

$$E_0^\alpha - E^\alpha = CL. \quad (4)$$

Выражение (4) сходно с приближенным законом Томсона-Уиддингтона [2]: $E_0^\alpha - E^\alpha = C\rho x$, описывающим энергию электрона E после прохождения слоя толщиной x .

Энергетическое распределение бета-частиц, испускаемых ядрами, как известно, имеет вид

$$P(E) dE = \gamma \sqrt{E(E + 2mc^2)} (E + mc^2) (E_{\text{гр.}} - E)^2 F(E, Z) S_l(E, E_{\text{гр.}}, Z) dE, \quad (5)$$

где γ — постоянная; F — множитель, учитывающий влияние кулоновского поля ядра; S_l — форм-фактор l -го порядка запрещения.

В силу преобразования (4) ординаты исходного спектра (5) трансформируются при прохождении через поглотитель. Определим правило трансформации. Пусть E_0 — некоторая энергия исходного спектра с ординатой h , ΔE_0 — выбранный шаг изменения энергии, H и ΔE — значения ординаты и шага после прохождения слоя поглотителя. Должно выполняться условие $h\Delta E_0 = H\Delta E$. Тогда трансформация шага $\Delta E = [(E_0 + \Delta E_0)^\alpha - CL]^{1/\alpha} - (E_0^\alpha - CL)^{1/\alpha}$ или, используя малость $\Delta E_0/E_0$ и разложение в ряд, $\Delta E = \Delta E_0 E_0^{\alpha-1}/(E_0^\alpha - CL)^{1-1/\alpha}$; трансформация ординаты $H = h(E_0^\alpha - CL)^{1-1/\alpha}/E_0^{\alpha-1}$.

Таким образом, изменение бета-спектра при прохождении поглотителя конечной толщины за счет ионизационных потерь определяется двумя преобразованиями: изменением положения на энергетической шкале $E = (E_0^\alpha - CL)^{1/\alpha}$, изменением ординаты

$$P(E) = P(E_0) (E_0^\alpha - CL)^{1-1/\alpha} E_0^{\alpha-1}. \quad (6)$$

При этом удобнее перейти от линейной толщины поглотителя L к поверхностной плотности поглотителя χ : $CL = \chi C\rho$.

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты расчета в соответствии с (6) для случая ^{22}Na и поглотителей из бериллия и никеля. Можно видеть, что как положение наиболее вероятной энергии, так и форма энергетического распределения обладают свойством стабильности в широком диапазоне толщин поглотителей. Это свойство отличает прохождение бета-частиц через поглотители от прохождения моноэнергетических электронов и позитронов. Следует подчеркнуть динамический характер этого свойства: моноэнергетические позитроны с исходной энергией,

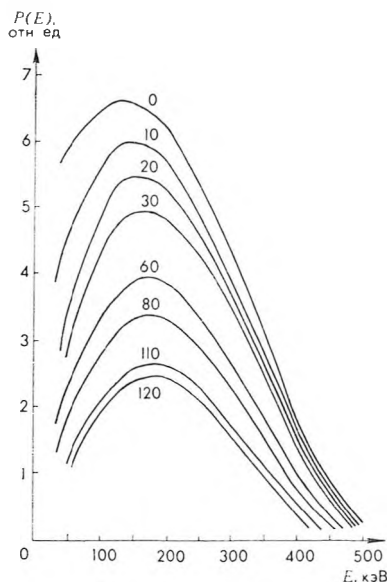


Рис. 1. Влияние ионизационных потерь на энергетический спектр позитронов (^{22}Na) при прохождении через бериллиевые поглотители конечной толщины, мг/см^2

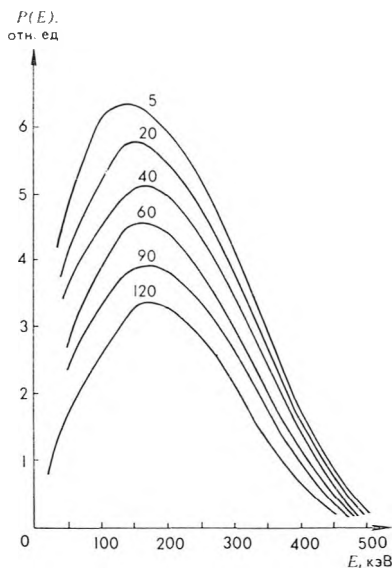


Рис. 2. Влияние ионизационных потерь на энергетический спектр позитронов (^{22}Na) при прохождении через никелевый поглотитель конечной толщины, мг/см^2

соответствующей наиболее вероятной энергии бета-спектра ~ 150 кэВ, поглощаются при толщине ~ 60 мг/см^2 . Представляет интерес также то обстоятельство, что наиболее вероятная энергия энергетических распределений остается в области наиболее вероятной энергии исходного спектра. Такое поведение энергетических распределений связано, видимо, с рассмотрением только ионизационных потерь; учет кулоновского рассеяния на ядрах поглотителя должен привести к смещению наиболее вероятной энергии.

Список литературы

1. Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия / Под ред. К. Зигбана. М., 1969. Т. 1.
2. Рид С. Электронно-зондовый микроанализ. М., 1979.

Поступила в редакцию 31.03.86.

УДК 621.315.592

В. В. ЛИТВИНОВ, Г. В. ПАЛЬЧИК, В. И. УРЕНЕВ

О КИНЕТИКЕ ОБРАЗОВАНИЯ ТЕРМОДОНОРОВ В КИСЛОРОДСОДЕРЖАЮЩЕМ ГЕРМАНИИ

Исследования кинетики накопления термодоноров (ТД) в Gc [1, 2] основывались до сих пор на результатах измерения их суммарной концентрации ($N_{\text{ТД}}$) без учета вклада в ее значение нескольких типов конфигурационно-бистабильных центров (ТД- i) [3, 4]. В данном сообщении приводятся результаты изучения кинетики образования ТД- i при 573 К в кристаллах $n\text{-Ge} < \text{Sb}, 0 >$ ($\rho \approx 40\text{--}45$ Ом·см) с различным содержанием междоузельного кислорода ($N_0 = 5 \cdot 10^{16} \text{--} 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$). Концентрация ТД- i ($N_{\text{ТД-}i}$) определялась из анализа эффекта Холла

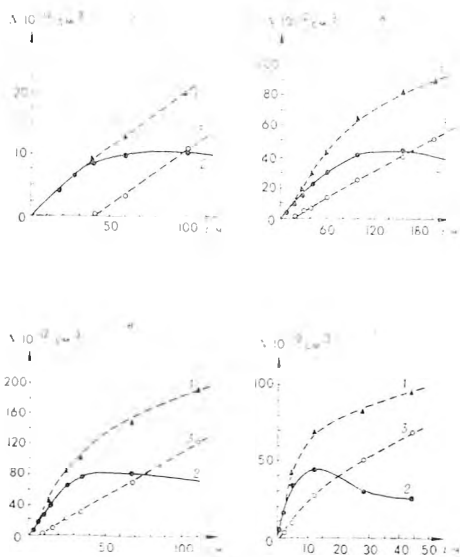


Рис. 1. Зависимость общей концентрации ТД (1), а также концентрации ТД-1 (2) и ТД-2 (3) от времени ТО при 573 К образцов $n\text{-Ge}\langle\text{Sb}, 0\rangle$ с различной исходной концентрацией кислорода:

а — $4,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; б — $5,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; в — $7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; г — $1,75 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$

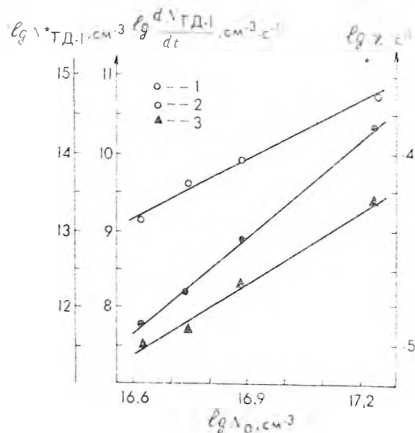


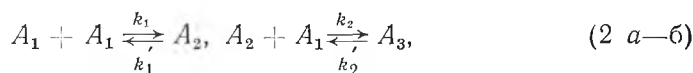
Рис. 2. Рассчитанные по данным рис. 1. параметры $N_{\text{ТД-1}}^*$ (1), $(dN_{\text{ТД-1}}/dt)$ (2) и z (3) как функция концентрации кислорода

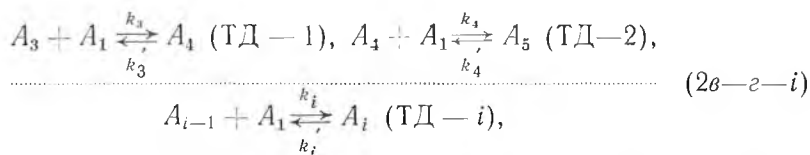
в области температур измерения 200—350 К по методике [4], которая использует функцию заполнения электронами центров с отрицательной эффективной корреляционной энергией.

Зависимость общей концентрации ТД и концентрации первоначально образующихся типов ТД-1 и ТД-2 от времени термообработки (t) кристаллов при 573 К, полученная нами, показана на рис. 1 (а — г). Ход кривых указывает на различный характер кинетики накопления отдельных типов ТД с изменяющимся со временем термообработки (ТО) вкладом в суммарное значение $N_{\text{ТД}}$. На начальной стадии ТО величина $N_{\text{ТД}}$ определяется введением ТД-1, а после насыщения процесса его образования доминирует центр ТД-2. При этом образование ТД-2 становится заметным после накопления в исследуемых кристаллах более $1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ центров ТД-1. Скорость образования и максимально достигаемая концентрация ТД-1 увеличиваются с ростом содержания растворенного в кристаллах кислорода, что еще раз подчеркивает его участие в образовании ТД. Далее из рис. 1 видно, что кинетика образования ТД-1 за исключением участка, отвечающего спаду $N_{\text{ТД-1}}$ на рис. 1, г, может быть аппроксимирована зависимостью вида:

$$N_{\text{ТД-1}} = N_{\text{ТД-1}}^* [1 - \exp(-\kappa t)]. \quad (1)$$

Рассчитанные при этом значения $(dN_{\text{ТД-1}}/dt)_{t \rightarrow 0}$, $N_{\text{ТД-1}}^*$ и κ пропорциональны исходной концентрации кислорода в степени 4, 3 и 1 соответственно (рис. 2). Эти результаты, как и наблюдаемая кинетика ТД-1 и ТД-2, могут быть описаны в рамках кинетической модели Кайзера [5] с помощью следующей схемы реакций:





где k_i, k'_i — константы скорости прямых и обратных реакций; A_i — комплексы, включающие в свой состав i атомов кислорода. Тогда, предполагая квазиравновесие для реакций (2 а — б), выполнение условия $k'_3 \ll k_4 A_1$ и постоянство концентрации $A_1 = N_0$ на начальной стадии ТО, можно аналитически удовлетворить экспериментальной зависимости (1) и данным рис. 2:

$$A_3 = K_1 K_2 N_0^3, (dN_{\text{ТД-1}}/dt)_{t \rightarrow 0} = k_3 N_0 A_3, \quad (3)-(4)$$

$$N_{\text{ТД-1}}^* = \frac{k_3}{k_4} A_3, \kappa = k_4 N_0, \quad (5)-(6)$$

где K_1 и K_2 — константы равновесия реакций (2 а — б) соответственно. Спад $N_{\text{ТД-1}}$, наблюдаемый в образцах с большой концентрацией кислорода (рис. 1, г), можно связать, согласно [5], с большей долей израсходованного в реакции кислорода и соответственно с понижением квазиравновесной концентрации A_2 и A_3 в процессе ТО.

Анализ зависимостей рис. 2 в соответствии с выражениями (4) и (6) позволил определить параметры $k_3 K_1 K_2$ и k_4 для температуры реакции 573 К: $2,5 \cdot 10^{-59} \text{ см}^{-9} \cdot \text{с}^{-1}$ и $2,9 \cdot 10^{-22} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Кроме того, если согласно схеме реакций (2) считать, что накопление ТД-2 становится заметным при сравнимых концентрациях A_3 и ТД-1, можно на основании наблюдаемого на рис. 1 порога в начале образования ТД-2 оценить квазистационарную концентрацию A_3 для образца с исходной концентрацией кислорода $4,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, равной $\sim 9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Тогда на основании (3) и (4) произведение констант равновесия при 573 К $K_1 K_2 \simeq 1 \cdot 10^{-37} \text{ см}^{-6}$, а величина $k_3 \simeq 2,5 \cdot 10^{-22} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Эти оценки показывают, что константы скоростей k_3 и k_4 реакций образования ТД-1 и ТД-2 близки между собой и тем самым могут контролироваться миграцией одной структурной кислородсодержащей единицы A_1 .

Список литературы

1. Fuller C. S. // J. Phys. Chem. Sol. 1961. V. 19. № 1/2. P. 18.
2. Fuller C. S., Kaiser W., Thurmond C. D. // J. Phys. Chem. Sol. 1960. V. 16. № 1/2. P. 161.
3. Clauiws P., Vennik J. // Phys. Rev. 1984. V. B30. № 8. P. 4837.
4. Литвинов В. В., Пальчик Г. В., Уренев В. И. // ФТП. 1985. Т. 19. Вып. 8. С. 1366.
5. Kaiser W., Frish H. L., Reiss H. // Phys. Rev. 1958. V. 112. № 5. P. 1546.

Поступила в редакцию 26.01.87.

УДК 513.88

П. П. ЗАБРЕЙКО, НГУЕН ХОНГ ТХАЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Цель настоящей работы — предложить определение пространств Орлича L_M вектор-функций, охватывающее случай, когда порождающие эти пространства N -функции $M(s, u)$ имеют вырождения (т. е. обращаются в нуль на некоторых зависящих от s нетривиальных подпространствах для значений s , образующих множество положительной меры), и исследовать некоторые их геометрические свойства. Общепринятое определение пространств Орлича вектор-функций (см., например, [1—3]) аналогично определению пространств Орлича скалярных функций [4—6]; так как в скалярном случае рассматриваются только невырожденные N -функции (вырожденный случай тривиальным образом сводится к невырожденному), это обычное определение для пространств Орлича вектор-функций в общем случае приводит к полунормированным пространствам и для перехода к нормированным пространствам требуется некоторая дополнительная факторизация, зависящая от исходной N -функции $M(s, u)$. В настоящей работе и описывается эта факторизация.

1. Пусть (Ω, A, μ) — некоторые множества, σ -алгебра его подмножеств и неотрицательная σ -конечная и счетно аддитивная мера; пусть, кроме того, σ -алгебра A является полной относительно μ , атомы Ω являются точками, и μ_* — некоторая вероятностная (т. е. нормированная) мера на A , эквивалентная μ .

Функцию $M(s, u) : \Omega \times R^m \rightarrow [0, \infty]$ назовем N -функцией, если почти при всех $s \in \Omega$ она обращается в нуль при $u = 0$, является четной, выпуклой и полунепрерывной снизу по $u \in R^m$ и если, кроме того, она является измеримой на $\Omega \times R^m$ относительно σ -алгебры $A \times B$ (B — алгебра борелевских множеств в R^m). Для каждой N -функции $M(s, u)$ положим $O_M(s) = \{u : M(s, \lambda u) = 0 (\lambda > 0)\}$, $D_M(s) = \{u : M(s, u) < \infty\}$ и $L_M(s) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda D_M(s)$.

Двойственная к N -функции $M(s, u)$ N -функция $M^*(s, u^*)$ определяется равенством

$$M^*(s, u^*) = \sup_{u \in R^m} \{(u, u^*) - M(s, u)\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^m . Отметим равенство $M^{**}(s, u) = M(s, u)$. N -функцию $M(s, u)$ будем называть N_o -функцией, если она почти при всех $s \in \Omega$ является положительно однородной по $u \in R^m$. Для N_o -функции $M(s, u)$ верна формула

$$M^*(s, u^*) = \begin{cases} 0 & \text{при } M_o(s, u^*) \leq 1, \\ \infty & \text{при } M_o(s, u^*) > 1. \end{cases}$$

Здесь N_0 -функция $M_0(s, u^*)$ определяется равенством

$$M_0(s, u^*) = \sup \{ (u, u^*) : M(s, u) \leq 1 \}.$$

2. Как обычно (см., например, [5, 7]), через S обозначается полное метрическое линейное пространство всех измеримых на Ω вектор-функций со значениями в R^m (точнее, классов измеримых вектор-функций, совпадающих друг с другом почти всюду) с обычными алгебраическими операциями и с метрикой, порожденной квазинормой $\|x\|_S = \int_{\Omega} \|x(s)\| \times (1 + \|x(s)\|)^{-1} d\mu_*(s)$ (здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма на R^m). Сходимость в этом пространстве эквивалентна сходимости по мере μ_* . Пусть O_M — замкнутое подпространство функций S , для которых почти при всех $s \in \Omega$ справедливо включение $x(s) \in O_M(s)$. Два элемента x_1 и x_2 из S назовем M -эквивалентными, если $x_1 - x_2 \in O_M$. Фактор-пространство S_M пространства S по O_M состоит из классов M -эквивалентных друг другу элементов из S ; однако ниже элементы S_M называются функциями. Пространство S_M с обычными алгебраическими операциями и с метрикой, порожденной квазинормой

$$\|x\|_{S_M} = \inf \{ \|x + z\|_S : z \in O_M \},$$

является полным метрическим линейным пространством.

Принимающий на S значения из $[0, \infty]$ функционал $M(x) = \int_{\Omega} M(s, x(s)) d\mu(s)$ назовем аналогично скалярному случаю модуляром. Отметим, что модуляр M определен и на S_M (т. е. $M(x_1) = M(x_2)$, если x_1 и x_2 — M -эквивалентны), и что $M(\lambda x) = 0$ ($\lambda > 0$) в том и только том случае, когда почти при всех $s \in \Omega$ справедливо включение $x(s) \in O_M(s)$.

Обозначим через L_M множество функций из S_M , для которых при некотором $\lambda > 0$ справедливо неравенство $M(\lambda x) < \infty$, и определим на этом множестве два функционала

$$\|x\|_{M,\alpha} = \inf \{ \lambda > 0 : M(\lambda^{-1}x) \leq 1 \}, \quad (1)$$

$$\|x\|_{M,\beta} = \inf_{\lambda > 0} \lambda^{-1} (1 + M(\lambda x)). \quad (2)$$

Множество L_M с обычными алгебраическими операциями является линейным пространством, а функционалы (1) и (2) являются нормами на нем, причем справедливы неравенства

$$\|x\|_{M,\alpha} \leq \|x\|_{M,\beta} \leq 2\|x\|_{M,\alpha}.$$

Теорема 1. Пусть $M(s, u)$ — N -функция. Тогда пространство L_M непрерывно вложено в S_M и является банаховым.

3. В случае, когда N -функция $M(s, u)$ является N_0 -функцией нормы (1) и (2) в пространствах L_M и L_{M^*} совпадают соответственно с нормами $\|x\|_M = \int_{\Omega} M(s, x(s)) d\mu(s)$, $\|x^*\|_{M^*} = \text{ess sup}_{s \in \Omega} M_0(s, x^*(s))$. Эти про-

странства среди остальных пространств Орлича вектор-функций играют роль «максимальных» и «минимальных». Точное утверждение составляет

Теорема 2. Пусть $M(s, u)$ — N -функция. Тогда справедливы равенства $L_M = \bigcup_{W \in E(M)} L_{W^*} = \bigcap_{W \in E(M^*)} L_W$, где $E(M)$ — совокупность N_0 -функций

$W(s, u)$, для которых почти при всех $s \in \Omega$ справедливы соотношения $O_{M^*}(s) = O_M(s)$, $L_{W^*}(s) = L_M(s)$ и включение $L_{W^*} \subset L_M$.

Используя теоремы 1, 2, на рассматриваемые обобщенные пространства Орлича можно по стандартным схемам перенести все основные утверждения теории пространств Орлича: условия сепарабельности, теоремы об общих видах линейных непрерывных функционалов на них и т. д.

Список литературы

1. Иоффе А. Д. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 5. С. 1018.
 2. Chatelain J. // C. R. Acad. Sci. 1976. Т. 238, A763.
 3. Kozek A. // Roczn. Pol. tow. mat. 1977. Т. 19. S. 259.
 4. Красносельский М. А. и Рутницкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
 5. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
 6. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1983.
 7. Данфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
- Поступила в редакцию 05.12.85.

УДК 517.977

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕННОЙ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуется одна из задач приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием. Основной результат (построение разрешающего задачу управления) опирается на спектральные свойства ядра интегрального уравнения Фредгольма I рода, что сближает предлагаемый подход исследования с основным методом исследования управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем [1—3].

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in [t_0, t_1] = T, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_0(\cdot) = \{x(t_0) = x_0, x(\tau) = \varphi(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0]\}, \quad (2)$$

где x — n -вектор положения системы; u — m -вектор управления из класса кусочно-непрерывных функций на T , ($u(\cdot) \in \tilde{C}(R^n, T)$), которое будем называть допустимым, $\varphi(\cdot) \in \tilde{C}(R^n, [t_0 - h, t_0])$, $g(\cdot) \in \tilde{C}(R^n, T)$ — заданные; $A(\cdot), A_1(\cdot) \in C(R^{n \times n}, T)$, $B(\cdot) \in C(R^{n \times m}, T)$; $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - h$, $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Определение 1. Систему (1) назовем приближенно нуль-управляемой на T , если для любого начального состояния (2) и любого $\varepsilon > 0$ существует допустимое управление $u(t) = u(t, x_0(\cdot), \varepsilon)$, $t \in T$, для которого решение системы (1) удовлетворяет условиям

$$x(t_1 - h) = 0, \quad \int_{-h}^0 x'(t_1 + s) x(t_1 + s) ds \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $F(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы (1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} &= -F(t, \tau) A(\tau) - F(t, \tau + h) A_1(\tau + h), \quad \tau < t, \\ F(t, t) &= E, \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t. \end{aligned} \quad (4)$$

Допустимое управление, обеспечивающее приближенную управляемость системы (1), будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= B'(t) [F'(t_1 - h, t) l + \int_{-h}^0 F'(t_1 + s, t) l(s) ds], \quad l \in R^n, \\ l(\cdot) &\in L^2(R^n, [-h, 0]). \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем решение системы (1) при управлении (5) в форме Коши в момент $t_1 + s$, $-h \leq s \leq 0$, используя теорему Фубини [4]:

$$x(t_1 + s) = F(t_1 + s, t_0) x_0 + \int_{-h}^0 F(t_1 + s, t_0 + h + \tau) A_1(t_0 + h + \tau) \varphi(t_0 + \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s, t) (B(t)u(t) + g(t)) dt = p(s) + W(t_1-h, s)l + \\ + \int_{-h}^0 W(t_1, s, r) l(r) dr, \quad (6)$$

$$p(s) = F(t_1, s, t_0) x_0 + \int_{-h}^0 F(t_1+s, t_0+h+\tau) A_1(t_0+h+\tau) \varphi(t_0+\tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s, \tau) q(\tau) d\tau,$$

$$W(t_1-h, s) = \int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s, t) D(t) F'(t_1-h, t) dt, \quad D(t) = B(t) B'(t),$$

$$W(t_1, s, r) = \int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s, t) D(t) F'(t_1+r, t) dt.$$

Будем считать, что система (1) относительно управляема на $[t_0, t_1-h]$, т. е. существует матрица $W^{-1}(t_1-h, -h)$.

Задача 1. Указать условия, при которых допустимое управление, обеспечивающее выполнение (3), существует, и установить формулы для получения $\{l, l(\cdot)\}$. Положим

$$l = W^{-1}(t_1-h, -h)p(-h) - \int_{-h}^0 W(t_1, -h, r) l(r) dr. \quad (7)$$

Очевидно, что независимо от $l(\cdot)$ при выбранном l из (6) следует $x(t_1-h) = 0$. Осталось подобрать нужным образом $l(\cdot)$. С этой целью подставим (7) в (6); имеем:

$$x(t_1+s) = p(s) - W(t_1-h, s) W^{-1}(t_1-h, -h) p(-h) + \int_{-h}^0 (W(t_1, s, r) - \\ - W(t_1-h, s) W^{-1}(t_1-h, -h) W(t_1, -h, r)) l(r) dr = \bar{p}(s) + \\ + \int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, s, r) l(r) dr, \quad (8)$$

$$\bar{p}(s) = p(s) - W(t_1-h, s) W^{-1}(t_1-h, -h) p(-h),$$

$$\bar{W}(t_1, s, r) = W(t_1, s, r) - W(t_1-h, s) W^{-1}(t_1-h, -h) W(t_1, -h, r).$$

Ядро $\bar{W}(t_1, s, r)$ является непрерывным, симметричным по s, r . Покажем, что при выполнении условия

$$\gamma(t, g, g(\cdot)) = (g' F(t_1-h, t) + \int_{-h}^0 g'(s) F(t_1+s, t) ds) B(t) \neq 0, \\ t \in [t_0, t_1-h], \quad (9)$$

для любого $g \in R^n$, $g(\cdot) \in L^2(R^n, [-h, 0])$, $g'g + \int_{-h}^0 g'(s) g(s) ds \neq 0$,

ядро $\bar{W}(t_1, s, r)$ является полным. С этой целью убедимся, что уравнение $\int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, s, r) \bar{l}(r) dr = 0$ имеет только тривиальное решение. Предположим противное, т. е. существует $\bar{l}^0(\cdot)$, $\|\bar{l}^0(\cdot)\|_{L^2} \neq 0$, для которого

$$0 = \int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, s, r) \bar{l}^0(r) dr, \quad s \in [-h, 0]. \quad (10)$$

Умножим (10) слева на $\bar{l}^0(s)$ и, полагая $\bar{l}^0 = - \int_{-h}^0 W^{-1}(t_1 - h, -h) W(t_1 - h, r) \bar{l}^0(r) dr$, получим, интегрируя по s :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-h}^0 \bar{l}^{0'}(s) \int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, s, r) \bar{l}^0(r) dr = - \int_{-h}^0 \bar{l}^{0'}(s) W(t_1 - h, s) ds \times \\ &\times \int_{-h}^0 W(t_1 - h, -h) W(t_1 - h, r) \bar{l}^0(r) dr + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \bar{l}^{0'}(s) W(t_1, s, r) l(r) ds dr = \\ &= \bar{l}^{0'} W(t_1 - h, -h) \bar{l}^0 + 2 \bar{l}^{0'} \int_{-h}^0 W'(t_1 - h, s) \bar{l}^0(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \bar{l}^{0'}(s) \times \\ &\times W(t_1, s, r) \bar{l}^0(r) ds dr = \int_{t_0}^{t_1 - h} \gamma(t, \bar{l}^0, \bar{l}^0(\cdot)) \gamma'(t, \bar{l}^0, \bar{l}^0(\cdot)) dt. \end{aligned}$$

Однако это невозможно в силу предположения (9).

Теорема 1. Для приближенной нуль-управляемости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия (9).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) приближенно нуль-управляема на T , а условие (9) не выполняется для некоторого единичного элемента $\{g^0, g^0(\cdot)\}$. Тогда из (6) имеем при $x_0(\cdot) = 0$ следующее выражение (с учетом сделанного предположения) при достаточно малом $\varepsilon^0 > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &\geq \int_{-h}^0 g^{0'}(s) x(t_1 + s) ds = \int_{-h}^0 g^{0'}(s) \int_{t_0}^{t_1 + s} F(t_1 + s, t) q(t) dt ds + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1 - h} g^{0'} F(t_1 - h, t) q(t) dt = (q(t) \equiv 0, t > t_1 - h) = \\ &= \int_{-h}^0 g^{0'}(s) \int_{t_0}^{t_1 - h} F(t_1 + s, t) q(t) dt ds + \int_{t_0}^{t_1 - h} g^{0'} F(t_1 - h, t) q(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1 - h} \left(\int_{-h}^0 g^{0'}(s) F(t_1 + s, t) ds + g^{0'} F(t_1 - h, t) \right) q(t) dt. \quad (11) \end{aligned}$$

В силу произвольности $q(t)$, $t \in [t_0, t_1 - h]$, неравенство (11) будет иметь место лишь при условии

$$\int_{-h}^0 g^{0'}(s) F(t_1 + s, t) ds + g^{0'} F(t_1 - h, t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1 - h]. \quad (12)$$

Из (12) получаем

$$-g^{0'} = \int_{-h}^0 g^{0'}(s) F(t_1 + s, t_1 - h) ds. \quad (13)$$

Рассмотрим (11) при $q(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1 - h]$. Имеем

$$\varepsilon^0 \geq \int_{-h}^0 g^{0'}(s) x(t_1 + s) ds = \int_{-h}^0 g^{0'}(s) F(t_1 + s) \int_{t_1 - h}^{t_1 + s} F^{-1}(t) q(t) dt ds, \quad (14)$$

где $F(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt} F(t) = A(t) F(t)$, $F(t_0) = E$, $t \in T$, так как множество

$$Q(R^n, [-h, 0]) = \left\{ \xi(s) : \xi(s) = \int_{-h}^s F^{-1}(t_1 + \tau) q(t_1 + \tau) d\tau, q(t_1 + \cdot) \in \right.$$

$$\in \tilde{C}(R^n, [-h, 0])\}$$

всюду плотно в пространстве $L^2(R^n, [-h, 0])$, то неравенство (14) в силу невырожденности $F(t_1 + s)$, $s \in [-h, 0]$, выполняется лишь при условии $\|g(\cdot)\|_{L^2} = 0$. Из последнего равенства и (13) следует $g^0 = 0$. Получили противоречие предположению относительно $\{g^0, g^0(\cdot)\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $p_k(s)$, $s \in [-h, 0]$, λ_k , $k = 1, 2, \dots$, — собственные функции и значения ядра $\bar{W}(t_1, s, r)$ интегрального уравнения Фредгольма I рода соответственно. Отметим, что система собственных функций симметричного полного ядра $\bar{W}(t_1, s, r)$ полна (замкнута) [5] в $L^2(R^n, [-h, 0])$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа α_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что при некотором конечном $N = N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left\| \bar{p}(\cdot) - \sum_{k=1}^N \alpha_k p_k(\cdot) \right\|_{L^2} \leq \varepsilon. \quad (15)$$

В соотношении (8) положим

$$l(r) = - \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^{-1} p_k(r), \quad r \in [-h, 0], \quad (16)$$

и, воспользовавшись (15), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x(t_1 + \cdot)\|_{L^2} &= \left\| \bar{p}(\cdot) - \int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, \cdot, r) \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^{-1} p_k(r) dr \right\|_{L^2} = \\ &= \left\| \bar{p}(\cdot) - \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^{-1} \int_{-h}^0 \bar{W}(t_1, \cdot, r) p_k(r) dr \right\|_{L^2} = \left\| \bar{p}(\cdot) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \alpha_k p_k(\cdot) \right\|_{L^2} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует достаточность. Теорема доказана.

Следствие 1. Если выполнено условие (9), то управление (5), (7), (16) разрешает задачу 1.

2. Дадим достаточное условие в разрешимости задачи 1, выраженное через параметры системы (1).

Теорема 2. Система (1) приближенно нуль-управляема на T , если выполнены условия:

$$\text{rank } B(t) = n, \quad t \in [t_1 - 2h, t_1 - h],$$

$$\text{rank } A_1(t) = n, \quad t \in [t_1 - h, t_1],$$

$$A_1(\cdot) \in \tilde{C}^{(1)}(R^n, [t_1 - 2h, t_1 - h]).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}(\cdot) \in \tilde{C}^{(1)}(R^n, [t_1 - 2h, t_1 - h])$, $\tilde{\varphi}(t_1 - h) = 0$. Множество таких функций плотно в $\tilde{C}(R^n, [t_1 - 2h, t_1 - h])$. Положим

$$u(t) = \begin{cases} -B^{-1}(t)(A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + q(t) + \tilde{\varphi}(t)), & t \in [t_1 - 2h, \\ t_1 - h], & 0, \quad t < t_1 - 2h. \end{cases}$$

Имеем

$$\dot{x}(t) = -\dot{\tilde{\varphi}}(t), \quad t \in [t_1 - 2h, t_1 - h], \quad (18)$$

отсюда следует

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(t, t_1 + s) (\hat{\varphi}(t_1 + s) + q(t_1 + s)) ds, \quad t \in [t_1 - h, t_1], \quad (19)$$

где $\hat{\varphi}(t_1 + s) = A_1(t_1 + s)\tilde{\varphi}(t_1 - h + s)$, $s \in [-h, 0]$; $\hat{\varphi}$, очевидно, обладает теми же аналитическими свойствами, что и φ . В силу сделанной оговорки относительно плотности для каждого $\varepsilon > 0$, функции q найдется функция $\tilde{\varphi}$, а следовательно, и $\hat{\varphi}$ такая, что из (19), согласно неравенству Коши — Буняковского, следует неравенство из (3). Равенство из (3) следует в силу (18).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Марченко В. М. // Докл. АН БССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083.
2. Шкляр Б. Ш. Там же. 1979. Т. 248. № 3. С. 549.
3. Jacobs M. Q., Langenhov C. E. // SIAM J. Control and Optimization. 1976. V. 14. № 6. P. 1009.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 4. Ч. 1. С. 336.

Поступила в редакцию 10.03.86.

УДК 519.852

Л. А. САВЕЛОВА

КОРРЕКТИРОВКА НАПРАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу

$$f(x) = c'x + x'Dx/2 \rightarrow \min, \quad b_* \leq Ax \leq b^*, \quad d_* \leq x \leq d^*, \quad (1)$$

где $A = A(I, J)$ — $m \times n$ -матрица; $m \leq n$, $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $D = D(J, J)$ — $n \times n$ -матрица; $D = D' \geq 0$.

При создании конечного метода [1] решения задачи (1) возникает задача: построить новый опорный план $\{x, K_{\text{оп}}\}$, такой что $\beta(x, K_{\text{оп}}) \leq \beta(x, K_{\text{оп}}) - \eta$, $\eta > 0$. В данной работе предлагается метод решения этой задачи с помощью процедуры корректировки подходящего направления. Здесь $\beta = \beta(x, K_{\text{оп}})$ — оценка субоптимальности, допускающая разложение: $\beta(x, K_{\text{оп}}) = \beta(x) + \beta(K_{\text{оп}})$, где $\beta(x)$ — мера неоптимальности опорного плана; $\beta(K_{\text{оп}})$ — мера неоптимальности опоры $K_{\text{оп}}$ [2].

Пусть, согласно методу [1], построен опорный план задачи (1) $\{\tilde{x}, K_{\text{оп}}^*\}$, $\beta(\tilde{x}, K_{\text{оп}}^*) > \varepsilon$, где $\tilde{x} = x + \theta^{(1)} \tilde{l}^*$. Направление $\tilde{l}^*$ и опоры $K_{\text{оп}}^* = \{K_0, K_{\text{ц}}^*, K_{\text{л}}^*\}$ построены по решению производной задачи [1]. Через $\bar{j}_1$ обозначим номер строки или столбца, на котором достигается шаг $\theta^{(1)}$.

Исходя из этой информации построим множества: $K_{(0)} = \{I_{(0)}, J_{(n)}\}$; $I_{(0)} = \{i \in I_0 \setminus I_{\text{ц}}^*: y_i^* = 0, \alpha_i = 0\}$, $J_{(n)} = \{j \in J_n \setminus J_{\text{ц}}^*: \Delta_j^* = 0, \alpha_j = 0\}$, где α_i, α_j получены из (2), (3).

$$\alpha_i = H_{11}(i, i) - [H_{21}(i, J_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(J_{\text{ц}}, J_{\text{ц}}) H_{12}(J_{\text{ц}}, i) + 2H_{21}(i, J_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(J_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}) H_{21}'(I_{\text{ц}}, i) + H_{11}(i, I_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(I_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}) H_{11}(I_{\text{ц}}, i)]; \quad (2)$$

$$H_{11}(I_0, I_0) = (A_{\text{оп}}^{-1})' D(J_0, J_0) A_{\text{оп}}^{-1};$$

$$H_{\text{ц}}^{-1}(I_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}) = H_{11}^{-1}(I_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}); \quad H_{\text{ц}}^{-1}(J_{\text{ц}}, J_{\text{ц}}) = -H_{22}^{-1} H_{21} H_{11}^{-1},$$

$$\alpha_j = H_{22}(j, j) - [H_{22}(j, J_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(J_{\text{ц}}, J_{\text{ц}}) H_{22}(J_{\text{ц}}, j) + 2H_{21}(j, J_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(J_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}) H_{21}'(I_{\text{ц}}, j) + H_{21}(j, I_{\text{ц}}) H_{\text{ц}}^{-1}(I_{\text{ц}}, I_{\text{ц}}) H_{21}'(I_{\text{ц}}, j)]. \quad (3)$$

Здесь матрицы

$$H_{21}(J_n, I_0) = H_{12}'(I_0, J_n) = (A_{\text{оп}}^{-1})' D(J_0, J_n) - (A_{\text{оп}}^{-1})' D(J_0, J_0) A_{\text{оп}}^{-1} A(I_0, J_n);$$

$$H_{22}(J_H, J_H) = D(J_H, J_H) - A'(I_0, J_H)(A_{оп}^{-1})' D(J_0, J_H) - \quad (4)$$

$$- D(J_H, J_0) A_{оп}^{-1} A(I_0, J_H) - A'(I_0, J_H)(A_{оп}^{-1})' D(J_0, J_0) A_{оп}^{-1} A(I_0, J_H).$$

Далее, полагая $\bar{\mu}_1 = \mu_1 = \text{sign } \tilde{l}_1^*$ при $\bar{j}_1 = j_1 \in J_0$, $\bar{\mu}_1 = \xi_1 \text{ sign } \omega_{i_1}$ при $\bar{j}_1 = i_1 \in I_H$ [2], выберем параметр $\eta > 0$. Начиная с данных: $s = 1$, $K_{оп}^*$, $K_{(H)} = K_{H0}^{(0)} = K_{(0)}$, $\theta^{(s)} = \theta^{(1)}$, $x^{(s)} = x^{(1)}$, $l^{(s)} = \tilde{l}^*$, $\bar{j}_0 = \emptyset$, $\bar{\mu}_s = \bar{\mu}_1$, $\bar{j}_s = \bar{j}_1$, $\beta_s = \beta(x, K_{оп}^*)$, осуществим приведенную ниже процедуру корректировки направления, которая строит новый опорный план $\{\bar{x}, \bar{K}_{оп}\}$ с требуемыми свойствами.

Пусть на шаге s известны: число s , параметр

$$\eta > 0, K_{оп} = \{K_0, K_ц, K_+\}, K_{(H)}, K_{H0}^{(k)}, k = \overline{1, s-1}; K_{H0}^{(s-1)}; \quad (5)$$

векторы $z_k(K_{H0}^{(k)})$, $k = \overline{1, s-1}$, план $x^{(s)}$, направление $l^{(s)}$, числа $\bar{j}_0, \bar{j}_k$, $\bar{\mu}_k$, $k = \overline{1, s}$; $\beta_s, \theta^{(s)}$.

Возможны следующие случаи:

- 1) $\bar{j}_s = j_s, j_s \in J_ц, K_{H0}^{(s-1)} = \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 2) $\bar{j}_s = j_s, j_s \in J_ц, K_{H0}^{(s-1)} \neq \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 3) $\bar{j}_s = j_0, j_0 \in J_0, K_{H0}^{(s-1)} = \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 4) $\bar{j}_s = j_0, j_0 \in J_0, K_{H0}^{(s-1)} \neq \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 5) $\bar{j}_s = i_s, i_s \in I_ц, K_{H0}^{(s-1)} = \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 6) $\bar{j}_s = i_s, i_s \in I_ц, K_{H0}^{(s-1)} \neq \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 7) $\bar{j}_s = i_H, i_H \in I_H, K_{H0}^{(s-1)} = \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 8) $\bar{j}_s = i_H, i_H \in I_H, K_{H0}^{(s-1)} \neq \emptyset, \bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$,
- 9) $\bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{s-1}\}$.

Для иллюстрации процедуры корректировки рассмотрим случаи 1) и 9).

Случай 1). При $s = 1$ заканчиваем корректировку на опорном плане $\{\bar{x}, K_{оп}^*\}$, $\bar{x} = x^{(1)}$, $K_{оп}^+ = K_{оп}$, $\bar{j}_* = j_1$, $\bar{\mu}_* = \mu_1$, $\gamma(0) = -\mu_1(1 - \theta^{(1)})l_{i_1}^{(1)}$.

При $s > 1$ полагаем: $z_s(J_H) = \mu_s e_{j_s} [H_{22}^{-1}(J_ц, J_ц) H_{22}(J_ц, J_{(H)}) + H_{21}^{-1}(J_ц, I_ц) H_{21}(J_{(H)}, I_ц)]$; $z_s(I_{(0)}) = \mu_s e_{j_s} [H_{22}^{-1}(J_ц, J_ц) H_{21}(J_ц, I_{(0)}) + H_{21}^{-1}(J_ц, I_ц) H_{11}(I_ц, I_{(0)})]$, где матрицы $H_{22}^{-1}, H_{21}^{-1}, H_{22}, H_{21}, H_{11}$ найдены по формулам (4).

Вычислим двойственные шаги вдоль направления $z_s(K_{H0}^{(k)})$: $\sigma(j) = -z_h(j)/z_s(j)$, если $z_h(j) z_s(j) < 0$, $\sigma(j) = \infty$, если $z_h(j) z_s(j) \geq 0$, $j \in K_{H0}^{(k)}$. При каждом $k, k = \overline{1, s-1}$, конечные элементы множества $\{\sigma(j), j \in K_{H0}^{(k)}\}$ упорядочим по возрастанию $\sigma(\bar{j}_1, k) \leq \sigma(\bar{j}_2, k) \leq \dots \leq \sigma(\bar{j}_{p_k}, k)$. Полагаем $\alpha(0, s-1) = -\mu_s(1 - \theta^{(s)})l_{j_s}^{(s)}$ и находим числа $\alpha(i, k)$, $i = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, s-1}$: $\alpha(i, k) = \alpha(i-1, k) + \Delta\alpha(i, k)$, где $\Delta\alpha(i, k) = |z_s(\bar{j}_i, k)| (d_{\bar{j}_i, k}^* - d_{* \bar{j}_i, k}^*)$ при $\bar{j}_i \in J_{(H)}$, $\Delta\alpha(i, k) = |z_s(\bar{j}_i, k)| (b_{\bar{j}_i, k}^* - b_{* \bar{j}_i, k}^*)$ при $\bar{j}_i \in I_{(0)}$.

Если $\alpha(p_1, 1) \geq 0$, то отметим такие числа v, s_* , что $\alpha(v, s_*) \geq 0$, $\alpha(v-1, s_*) < 0$. При $\bar{j}_{v, s_*} = j_{v, s_*}$ полагаем $\tilde{J}_ц = (J_ц \setminus j_s) \cup j_{v, s_*}$ и продолжаем корректировку с данными:

$$s_*, \tilde{K}_{оп} = \{K_0, \tilde{K}_ц, K_+\}, \tilde{K}_ц = \{\tilde{I}_ц, \tilde{J}_ц\}, \tilde{K}_{(H)} = \{\tilde{I}_{(0)}, \tilde{J}_{(H)}\},$$

$$\tilde{J}_{(H)} = (J_{(H)} \setminus j_{v, s_*}) \cup j_s, \tilde{I}_{(0)} = I_{(0)}; K_{H0}^{(k)}, k = \overline{1, s_*-1};$$

$$\tilde{K}_{n0}^{(s_*-1)} = \{\tilde{I}_{00}^{(s_*-1)}, \tilde{J}_{n0}^{(s_*-1)}\}, \tilde{J}_{n0}^{(s_*-1)} = \tilde{J}_{(n)}^{s_*-1} \bigcup_{k=1} J_{n0}^{(k)}, \quad (6)$$

$$\tilde{I}_{00}^{(s_*-1)} = \tilde{I}_{(0)}^{s_*-1} \bigcup_{k=1} I_{00}^{(k)}, k = \overline{1, s_*-1}; \tilde{I}^{(s_*)} = I^{(s)}, \tilde{j}_0, \tilde{j}_k, \tilde{\mu}_k, k = \overline{1, s_*}.$$

При $\tilde{j}_{v, s_*} = i_{v, s_*}$ полагаем $\tilde{J}_u = J_u \setminus j_s$, $\tilde{I}_u = I_u \cup i_{v, s_*}$, $\tilde{J}_{(n)} = J_{(n)} \cup j_s$, $\tilde{I}_{(0)} = I_{(0)} \setminus i_{v, s_*}$ и продолжаем корректировку с данными (6). Если $\alpha(p_1, 1) < 0$, то строим множества:

$$\begin{aligned} J_+^{(s)} &= \{j \in J_{nn}: I_j^{(s)} = d_j^* - x_j^{(s)}\}, J_-^{(s)} = \{j \in J_{nn}: I_j^{(s)} = d_{*j} - x_j^{(s)}\}, \\ J_* &= \{\bar{j}_{i, k}: \bar{j}_{i, k} = j_{i, k}, i = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, s-1}\}, J_+^* = (J_+^{(s)} \setminus J^*) \cup (J_-^{(s)} \cap J^*), \\ I_+^{(s)} &= \{i \in I_{он}: \omega_i^{(s)} = b_i^* - a_i' x^{(s)}\}, I_-^{(s)} = \{i \in I_{он}: \omega_{*i}^{(s)} = b_{*i} - a_i' x^{(s)}\}, \\ I^* &= \{\bar{j}_{j, k}: \bar{j}_{j, k} = i_{j, k}, j = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, s-1}\}, I_+^* = (I_+^{(s)} \setminus I^*) \cup (I_-^{(s)} \cap I^*). \end{aligned}$$

Заканчиваем корректировку на опорном плане $\{\bar{x}, K_{оп}^+\}$: $\bar{x} = x^{(s)}$, $K_{оп}^+ = \{K_0, K_u, K_+^*\}$, $K_+^* = \{J_+^*, J_-^*\}$, $\bar{j}_* = j_s$, $\bar{\mu}_* = \mu_s$.

Случай 9). Заканчиваем корректировку построением нового плана: $\{\bar{x}, \bar{K}_{оп}\}$, $\bar{x} = x^{(s)}$, $\bar{K}_{оп} = K_{оп}$. При этом обязательно $\beta(\bar{x}, \bar{K}_{оп}) \leq \beta(x^{(1)}, K_{оп}) - \eta$.

Теорема. При любых исходных данных процедура корректировки решает задачу за конечное число шагов.

Процедура корректировки для канонической задачи квадратичного программирования разработана О. И. Костюковой. Автор выражает благодарность О. И. Костюковой за возможность ознакомиться с ее результатом.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 1020.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1980. Ч. 3.

Поступила в редакцию 12.11.85.

УДК 519.1

А. Г. ТАРНОВСКИЙ

ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «МИНИМУМ СУММЫ КВАДРАТОВ»

Задано множество $I = \{1, \dots, n\}$. Каждому $i \in I$ поставлено в соответствие число $a_i > 0$. Требуется найти $k < n$ подмножеств T_j множества I таких, что $\bigcup_{j=1}^k T_j = I$, $T_j \cap T_i = \emptyset$ для любых $j \neq i$ и

$$c = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i \in T_j} a_i \right)^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

Поставленная задача является NP трудной [1]. ϵ -приближенный алгоритм ее решения предложен в [2], приближенный со следующей оценкой относительной погрешности:

$$1/24 \geq \Delta \geq \begin{cases} 1/38, & k \text{ четно,} \\ 2/81, & k=3, \\ 1/36 - 1/(36 * k), & k \geq 5 \text{ и нечетно} \end{cases}$$

предложен в [3]. В нашей работе исследуется погрешность решения задачи дискретным аналогом градиентного метода [4]. Заметим, что поставленная задача имеет многочисленные практические применения, например, при классификации объектов и при равномерной загрузке оборудования.

Лемма 1. Задача (1) равносильна задаче минимизации суммы квадратов отклонений величин $\delta_j = \sum_{i \in T_j} a_i$ от величины $b = \sum_{i=1}^n a_i/k$.

Действительно, справедливы равенства: $\sum_{j=1}^k \delta_j^2 = \sum_{j=1}^k (b + \delta_j - b)^2 = \sum_{j=1}^k (b^2 + 2b(\delta_j - b) + (\delta_j - b)^2) = kb^2 + 2b \left(\sum_{j=1}^k \delta_j - kb \right) + \sum_{j=1}^k (\delta_j - b)^2 = kb^2 + \sum_{j=1}^k (\delta_j - b)^2$, т. е. целевые функции в обеих задачах отличаются друг от друга на константу kb^2 .

Градиентный алгоритм: на каждом шаге f индекс i_f максимального из еще не просмотренных чисел a_i включаем в подмножество с минимальным весом, т. е. с наименьшей суммой чисел, индексы которых ранее включены в него. В дальнейшем число a_{i_f} считаем просмотренным.

Введем обозначения: $\delta(\bar{\delta})$ — вес самого «легкого» («тяжелого») из подмножеств T_j , полученных алгоритмом; c_g и c^* — значения целевой функции в задаче (1) на решении, построенном алгоритмом и на оптимальном решении соответственно; $\Delta = (c_g - c^*)/c^*$ — относительная погрешность алгоритма.

Оценим качество алгоритма, предполагая, что $a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$,

$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ и каждое a_i не превосходит b . Очевидно, что первые два предположения не ограничивают общность задачи. Докажем это для третьего предположения. Пусть r таково, что $a_i \geq b$, $i=1, \dots, r$ и $a_i < b$, $i=r+1, \dots, n$. Будем считать, что $r < k$, так как, если $r = k$, то задача (1) тривиальна, а случай $r > k$ невозможен. Тогда градиентный алгоритм включит для $j=1, \dots, r$ в каждое множество T_j только по одному индексу j .

Из леммы 1 следует, что существует оптимальное решение $\{T_j^*\}$ с тем же свойством: $T_j^* = \{j\}$, $j=1, \dots, r$. Поэтому качество построенного алгоритмом решения будет зависеть только от распределения индексов i для тех i , что $a_i < b$ по подмножествам T_j , $j=r+1, \dots, k$ (редуцированная задача). Действительно, если $B = \sum_{i=1}^r a_i^2$ и $c^{*'}, c_g', \Delta'$ соответствуют c^*, c_g, Δ в редуцированной задаче, то $c^* = c^{*'} + B$, $c_g = c_g' + B$, $\Delta = (c_g' - c^{*'})/(c^{*'} + B) \leq \Delta'$. Таким образом, качество решения произвольной задачи (1) градиентным алгоритмом оценивается относительной погрешностью решения соответствующей редуцированной задачи этим же алгоритмом. Заметим, что при наших предположениях $b = 1/k$. Из леммы 1 следует, что

$$c^* \geq kb^2 = b. \quad (2)$$

Лемма 2 (апостериорная оценка). $c_g \leq b + k/4(\bar{\delta} - \underline{\delta})^2$.

Доказательство. Пусть $c_g = b + f(\delta)$, где $f(\delta) = \sum_{j=1}^k (\delta_j - b)^2$

и $b = 1/k = \sum_{j=1}^k \delta_j/k$. Найдем максимум функции $f(\delta) = \sum_{j=1}^k (\delta_j - b)^2 = \sum_{j=1}^k (\delta_j^2 - 2\delta_j b + b^2) = \sum_{j=1}^k \delta_j^2 - 1/k \left(\sum_{j=1}^k \delta_j \right)^2$. Очевидно, что функция $f(\delta)$ достигает максимума на границе области определения $\delta \leq \delta_j \leq \bar{\delta}$, $j = 1, \dots, n$. В силу симметричности функции можно считать, что $f(\delta)$ достигает максимума в точке δ^0 с координатами $\delta_j^0 = \bar{\delta}$, $j = 1, \dots, l$ и $\delta_j^0 = \delta$, $j = l+1, \dots, k$, где $0 < l < k$. Получаем $f(\delta^0) = l\bar{\delta}^2 + (k-l)\delta^2 - (\bar{\delta} + (k-l)\delta)^2/k = l(\bar{\delta} - \delta)^2 - l^2/k(\bar{\delta} - \delta)^2 = (l - l^2/k)(\bar{\delta} - \delta)^2$. Теперь находим максимум выражения $f(\delta^0)$ в зависимости от параметра l : $f'_l = (1 - 2l/k)(\bar{\delta} - \delta)^2 = 0$, откуда $l = k/2$. $f''_l = -2/k(\bar{\delta} - \delta)^2 < 0$. Это означает, что при $l = k/2$ достигается максимум $f(\delta^0)$. Следовательно, $f(\delta) \leq (k/2 - 1/k(k/2)^2)(\bar{\delta} - \delta)^2 = k/4(\bar{\delta} - \delta)^2$ или $c_g \leq b + k/4(\bar{\delta} - \delta)^2$.

З а м е ч а н и е. В силу того, что l должно быть целым при нечетном k , оценку леммы 2 можно уточнить.

Для получения априорной оценки эффективности алгоритма необходимо оценить величину $\bar{\delta} - \delta$.

Теорема 1. Относительная погрешность градиентного алгоритма $\Delta \leq 1/4(a_{k+1}/b)^2$.

Доказательство. Рассмотрим подмножество веса $\bar{\delta}$. Пусть индекс j числа a_j включен последним в это подмножество. Заметим, что $j > k$, так как все $a_i < b$, $\bar{\delta} \geq b$.

Согласно описанию алгоритма, в момент включения индекса j рассматриваемое подмножество имело минимальный вес δ^* . Поэтому очевидно, что $\delta^* \leq \bar{\delta}$. Следовательно,

$$\bar{\delta} - \delta \leq \bar{\delta} - \delta^* = a_j \leq a_{k+1}. \quad (3)$$

С учетом леммы 2 и неравенства (2) теорема доказана.

Разобьем числа a_i на партии, первая из них содержит k первых чисел, а остальные по $k-1$ последующих.

Пусть $\bar{\delta}_j$ (δ_j) — вес самого «легкого» («тяжелого») из подмножеств после распределения алгоритмом j -й партии, $m = \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor$.

Рассмотрим теперь динамику изменений разности $\bar{\delta}_j - \delta_j$.

Лемма 3. Справедливы неравенства $\bar{\delta}_j - \delta_j \leq D_j$, где

$$D_1 = a_1 - a_k, D_j = \max(D_{j-1} - a_{j(k-1)+1}, a_{(j-1)(k-1)+2}), j = 2, \dots, m. \quad (4)$$

Доказательство проведем по индукции. При $j = 1$ справедливость леммы очевидна, так как $\bar{\delta}_1 - \delta_1 = a_1 - a_k = D_1$. Пусть $\bar{\delta}_{j-1} - \delta_{j-1} \leq D_{j-1}$. После распределения j -й партии возможны следующие два случая.

Случай 1 (число $\bar{\delta}$ не увеличилось). Это означает, что ни один индекс чисел j -й партии не попал в подмножества веса $\bar{\delta}_{j-1}$, и, следовательно, вся j -я партия была распределена между не более чем $k-1$ подмножествами. Это означает, что во все множества веса δ_{j-1} попал, по крайней мере, один индекс, и, следовательно, $\bar{\delta}_{j-1} + a_{j(k-1)+1} \leq \delta_j$, где $a_{j(k-1)+1}$ — наименьшее число в j -й партии. Следовательно,

$$\bar{\delta}_j - \delta_j \leq D_{j-1} - a_{j(k-1)+1}. \quad (5)$$

Случай 2 (число $\bar{\delta}$ увеличилось). Используя те же рассуждения, что

и при выводе оценки (3), и учитывая, что $a_{(j-1)(k-1)+2}$ максимальное число в j -й партии, имеем

$$\bar{\delta}_j - \underline{\delta}_j \leq a_{(j-1)(k-1)+2}. \quad (6)$$

Объединяя неравенства (5) и (6), убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 4. Величины D_j обладают следующими свойствами:

- 1) $0 < D_{j+1} \leq D_j$, $j = 2, \dots, m$;
- 2) $\bar{\delta} - \underline{\delta} \leq D_m$;
- 3) для любого $j > 0$ одна из величин D_{j+1} , D_{j+2} , $\dots$, $D_{j+\alpha}$, где $\alpha = [D_2/a_n] + \text{sign}\{D_2/a_n\}$, например D_v , равна $a_{(v-1)(k-1)+2}$.

Доказательство. Свойство 1) очевидно. Если $n-1$ кратно $k-1$, то свойство 2) есть следствие леммы 3. Иначе, увеличим n до $n' = n + \left(1 - \left\{\frac{n-1}{k-1}\right\}\right)(k-1)$ и положим $a_i = 0$, $i = n+1, \dots, n'$. Величина $\bar{\delta} - \underline{\delta}$ в новой задаче не изменится, поэтому в силу леммы 3 $\bar{\delta} - \underline{\delta} \leq \frac{D_{n'-1} - 1}{k-1} \leq D_m$.

В α следующих друг за другом величинах D_j максимум в (4) не может достигаться только на числах $D_{j-1} - a_{j(k-1)+1}$, так как в этом случае $0 < D_j \leq D_2$ и $a_{(j+1)(k-1)+1} + a_{(j+2)(k-1)+1} + \dots + a_{(j+\alpha)(k-1)+1} \geq \alpha a_n \geq D_2$ и, следовательно, $D_{j+\alpha} = D_j - a_{(j+1)(k-1)+1} - a_{(j+2)(k-1)+1} - \dots - a_{(j+\alpha)(k-1)+1} \leq 0$.

Следствие 1. $\bar{\delta} - \underline{\delta} \leq a_{(m-\alpha)(k-1)+2}$. (7)

Доказательство. Из свойства 3) леммы 4 следует, что среди чисел $D_{m-\alpha+1}$, $D_{m-\alpha+2}$, $\dots$, D_m найдется число D_v , равное $a_{(v-1)(k-1)+2}$. Из свойства 1) леммы 4 вытекает, что $D_m \leq D_v$. Учитывая, что $a_{(v-1)(k-1)+2} \leq a_{(m-\alpha)(k-1)+2}$, получаем утверждение следствия 1.

Следствие 2. Одна из величин $D_{m-\beta+1}$, $D_{m-\beta+2}$, $\dots$, D_m , где $\beta = \left\lfloor \frac{a_{(m-2\alpha)(k-1)+2}}{a_m(k-1)+1} \right\rfloor + \text{sign}\left\{\frac{a_{(m-2\alpha)(k-1)+2}}{a_m(k-1)+1}\right\}$, например D_v , равна $a_{(v-1)(k-1)+2}$.

Следствие 3. $\bar{\delta} - \underline{\delta} \leq a_{(m-\beta)(k-1)+2}$. (8)

Теорема 2. Справедливы следующие оценки относительной погрешности градиентного алгоритма:

- 1) $\Delta \leq 1/4(a_{(m-\alpha)(k-1)+2}/b)^2$, если $m > \alpha$;
- 2) $\Delta \leq 1/4(a_{(m-\beta)(k-1)+2}/b)^2$, если $m > 2\alpha$.

Доказательство теоремы вытекает из леммы 2 с учетом неравенств (7), (8) соответственно.

Оценки теоремы 2 более точны по сравнению с оценкой теоремы 1, однако последняя проще для вычислений.

Обозначим через $Z(l)$ класс задач (1) со свойством $[b/a_{k+1}] = l$. Теперь все задачи (1) можно представить в виде объединения семейства классов $Z(l)$, $l = 1, 2, 3, \dots$. Из теоремы 1 несложно получить следующую оценку относительной погрешности градиентного алгоритма для задач из класса $Z(l)$: $\Delta \leq 1/4 l^{-2}$.

Для задачи (1) l можно вычислять точнее по формуле $l = [b/(\bar{\delta} - \underline{\delta})]$. Очевидно, что с увеличением размерности n , при заданном k , задача усложняется. Однако при этом увеличивается среднее число индексов, попавших в одно подмножество, что, как правило, приводит к уменьшению значения $\bar{\delta} - \underline{\delta}$. Это означает, что в абсолютном большинстве случаев увеличение размерности задачи ведет к увеличению номера l класса $Z(l)$, к которому она принадлежит, т. е. к повышению точности алгоритма. Например, для классов $Z(3)$, $Z(4)$, $Z(5)$ оценка относительной погрешности соответственно равна $1/36$, $1/64$, $1/100$ и является наилучшей из известных. Только для классов $Z(1)$ и $Z(2)$ она несколько уступает оценкам, полученным в [3].

Аналогичные рассуждения можно провести для анализа оценок теоремы 2.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982. С. 285.
2. Ковалев М. Я. Вычислительная техника в машиностроении. Минск, 1984. С. 21.
3. Chandra A. K., Wong C. K. // SIAM J. on Comput. 1975. V. 4. № 3. P. 249.
4. Ковалев М. М. // Кибернетика. 1985. Т. 6. С. 77.

Поступила в редакцию 07.05.86.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ МАРШРУТАМИ

В систему, состоящую из $M > 1$ приборов, в момент времени $d = 0$ поступает множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ требований. Каждое требование $i \in N$ должно быть обслужено каждым прибором L , $1 \leq L \leq M$, в течение t_{iL} единиц времени (если $t_{iL} > 0$). Порядок, в котором требования обслуживаются приборами, заранее не задан и может быть различным для разных требований. Каждый прибор может обслуживать требования в произвольной последовательности, но не более одного требования одновременно. Каждое требование не может одновременно обслуживаться двумя и более приборами. Время завершения обслуживания требования $i \in N$ при некотором расписании s обозначим через $f_i(s)$. Рассмотрим задачу построения расписания s^* , которому соответствует наименьшее значение суммарного времени обслуживания $\sum_{i \in N} f_i(s)$.

Известно, что сформулированная задача NP -трудна в сильном смысле при $M \geq 2$ (если прерывания запрещены) [1] и при $M \geq 3$ (если прерывания разрешаются) [2]. Если все t_{iL} равны единице, за исключением некоторых, равных нулю, то задача построения расписания s^* является NP -трудной при переменном числе приборов [3].

Рассмотрим ситуацию, когда все $t_{iL} = 1$, $i \in N$, $L = \overline{1, n}$. Прерывания процесса обслуживания каждого требования каждым прибором не допускаются.

1. Произвольному расписанию s для рассматриваемой задачи соответствует расписание s' для задачи минимизации суммарного времени обслуживания множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ требований в системе, состоящей из M параллельных идентичных приборов, при условии, что в обслуживании каждого требования допускаются прерывания и каждое требование должно обслуживаться в течение M единиц времени. Отметим, что $f_i(s) = f_i(s')$, $i \in N$.

Известно [4], что оптимальное расписание для последней задачи можно искать в классе расписаний, при которых процесс обслуживания каждого требования протекает без прерываний. Пусть $n = kM + r$, $k \geq 0$, $0 \leq r < M$, k и r — целые числа. В качестве оптимального расписания для указанной задачи с параллельными приборами может быть выбрано, например, расписание, при котором r приборов функционируют без простоев во временном интервале $[0, (k+1)M]$ и обслуживают (без прерываний) по $k+1$ требований каждый, а остальные $M - r$ приборов функционируют без простоев в интервале $[0, kM]$ и обслуживают (без прерываний) по k требований каждый. Суммарное время обслуживания при таком расписании равно $(k+1)Mr + M^2k(k+1)/2$.

Таким образом, при любом расписании s для исходной задачи имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{kM+r} f_i(s) \geq (k+1)Mr + M^2k(k+1)/2. \quad (1)$$

Расписание s^* , при котором в (1) имеет место знак равенства, будет, очевидно, оптимальным. Укажем несколько способов построения такого расписания.

Любое расписание s однозначно определяется заданием матрицы $\|f_{iL}(s)\|$ моментов завершения обслуживания каждого требования $i \in N$ каждым прибором L , $1 \leq L \leq M$. Введем в рассмотрение матрицу $X = \|x_{Lq}\|$, где $x_{Lq} = i$, если прибор L обслуживает требование i q -ым по порядку.

Пусть $n = kM + r$, $k \geq 0$, $0 \leq r < M$. Если $r = 0$, положим $l = k$. В противном случае положим $l = k + 1$ и дополним множество N требований $M - r$ фиктивными требованиями $n + 1, n + 2, \dots, n + M - r$, длительность обслуживания каждого из которых любым прибором положим равной единице. Матрицу $X = \|x_{Lq}\|$ размерности $M \times lM$ разобьем на l подматриц X_j размерности $M \times M$, содержащих столбцы матрицы X с номерами $(j-1)M + 1, (j-1)M + 2, \dots, jM$, $j = \overline{1, l}$.

а) Пусть каждая из подматриц X_j представляет собой латинский квадрат [5], построенный на множестве $\{(j-1)M + 1, (j-1)M + 2, \dots, jM\}$, $1 \leq j \leq l$. Положим $f_{x_{Lq}, L}(s_1^*) = q$, $q = \overline{1, lM}$, $L = \overline{1, M}$, $x_{Lq} \leq n$.

При расписании s_1^* , определяемом матрицей $\|f_{iL}(s_1^*)\|$, ровно M требований обслуживаются к каждому моменту времени jM , $1 \leq j \leq k$, и r требований к моменту времени $(k+1)M$. Таким образом, при $s = s_1^*$ в (1) имеет место знак равенства.

Отметим, что при $r = 0$ или $k = 0$ расписание s_1^* будет также оптимальным по быстродействию. Нетрудно проверить, что для любого расписания s имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^p f_i(s_1^*) \leq \sum_{i=1}^p f_i(s), \quad p = \overline{1, n}. \quad (2)$$

б) Пусть $n = kM + r$, $k \geq 1$, $0 < r < M$. Матрицу X построим следующим образом. Пусть каждая из подматриц X_j представляет собой латинский квадрат, построенный на множестве $\{(j-1)M + 1, (j-1) \times M + 2, \dots, jM\}$, $1 \leq j \leq k-1$. Пусть подматрица X_k представляет собой латинский квадрат, построенный на множестве $\{(k-1)M + 1, (k-1)M + 2, \dots, (k-1)M + r, kM + r + 1, kM + r + 2, \dots, (k+1)M\}$, а подматрица X_{k+1} — латинский квадрат, построенный на множестве $\{(k-1)M + r + 1, (k-1)M + r + 2, \dots, kM + r\}$.

Если в некоторой строке L , $1 \leq L \leq M$, подматрицы X_k расположен элемент, равный $kM + r + u$, $1 \leq u \leq M - r$, заменим его на элемент, расположенный в этой же строке подматрицы X_{k+1} в столбце с номером $kM + r + u$. После того, как подматрица не будет содержать элементов, больших n , положим $f_{x_{Lq}, L}(s_2^*) = q$, $q = \overline{1, n}$, $L = \overline{1, M}$.

При расписании s_2^* , определяемом матрицей $\|f_{iL}(s_2^*)\|$, ровно M требований обслуживаются к каждому моменту времени jM , $1 \leq j \leq k-1$, и к моменту времени $kM + r$. Кроме того, r требований обслуживаются к моменту времени kM . Следовательно, расписание s_2^* — оптимально. Отметим, что это расписание будет также оптимальным по быстродействию.

Трудоемкость построения расписаний s_1^* и s_2^* составляет $O(nM)$ операций.

2. Рассмотренная выше ситуация допускает естественное обобщение. Каждому требованию $i \in N$ сопоставим «вес» $v_i > 0$ и укажем способ

построения расписания s^* , которому соответствует наименьшее значение взвешенного суммарного времени обслуживания $\sum_{i \in N} v_i f_i(s)$. Пронумеруем требования таким образом, что $v_i \geq v_{i+1}$, $i = 1, n-1$.

Известно (см., например, [6]), что для любой последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n$ неотрицательных чисел линейная форма $\sum_{i=1}^n v_i y_{j_i}$ достигает наименьшего значения, если $y_{j_1} \leq y_{j_2} \leq \dots \leq y_{j_n}$. Следовательно, расписание s^* следует искать среди таких расписаний s , при которых последовательность $f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)$ моментов завершения обслуживания требований является неубывающей.

Непосредственно из соотношения (2) и утверждения 3.Н.2.С. из [6] следует, что для получения расписания s^* достаточно перенумеровать требования таким образом, чтобы $v_i \geq v_{i+1}$, $i = 1, n-1$, и, пользуясь вышеописанным способом, построить расписание s_1^* . Трудоемкость построения s^* составляет $O(nM + n \log_2 n)$ операций.

Из приведенных рассуждений следует, что задача минимизации суммарного времени обслуживания в рассмотренной формулировке принадлежит к числу тех немногих задач теории расписаний, на сложность решения которых качественным образом влияет отсутствие нулевых длительностей обслуживания [7].

Автор выражает признательность В. С. Танаеву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Achugbue J. O., Chin F. Y. // SIAM J. Comput. 1982. V. 11. N 4. P. 709.
2. Liu C. Y., Bulfin R. L. // Oper. Res. Lett. 1985. V. 4. N 2. P. 71.
3. Gonzalez T. // Math. Oper. Res. 1982. V. 7. N 1. P. 57.
4. McNaughton R. // Manag. Sci. 1959. V. 6. N 1. P. 1.
5. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М., 1977.
6. Маршалл А., Олкин Н. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М., 1983.
7. Hefetz N., Adiri I. // Nav. Res. Log. Quart. 1982. V. 29. N 3. P. 535.

Поступила в редакцию 27.03.86.

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, К. А. ЗУБОВИЧ

СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ЕС ЭВМ

В настоящее время общепризнано, что вопросы, связанные с разработкой программ, являются определяющими в программировании. Однако основной инструмент программиста — традиционные языки программирования — обладают многочисленными недостатками: примитивный (пословный) стиль программирования; непосредственная связь семантики с преобразованиями состояний; неспособность эффективного использования комбинирующих форм для построения новых программ из уже существующих; отсутствие полезных математических свойств для исследования программ [1]. Как следствие, предпринимаются попытки выработать стиль программирования, отличный от традиционного, основанный на использовании четко определенных средств построения программ и обладающий развитыми методами исследования программ, с целью облегчения разработки и повышения надежности программ. В данной статье предлагается система, которая базируется на идеях композиционного [2, 3] и функционального [1] подходов к программированию, а также описывается процесс ее реализации методами и средствами СР-техноло-

гии программирования [4], что, на наш взгляд, представляет интерес с точки зрения демонстрации основных идей и достоинств этой технологии.

Следуя сформулированным в [3] общим принципам программирования: подчиненности, отделения, функциональности и композиционности, предлагаемую систему функционального программирования SFP можно определить заданием множества данных D , множества F функций над D и множества K композиций над F , причем структуры этих множеств совпадают с используемыми в FP-системе Бэкуса [1].

Множество D представляет собой множество объектов, каждый из которых есть: либо атом — цепочка заглавных букв, цифр и специальных символов; либо $\perp$ — неопределенность; либо последовательность $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — объекты, $n \geq 0$. Атомы Т и F используются для обозначения логических значений «истина» и «ложь». Пустая последовательность обозначается через $\emptyset$.

В качестве функций множества F рассматриваются функции двух видов: примитивные (базовые) и определенные. В качестве примера базовых функций рассмотрим только функции, которые будут использованы в данной статье, отметим, что в базис SFP включены все примитивные функции, введенные в [1]. При определении функций применяются условные выражения Маккарти.

FIRST: $x \equiv x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow x_1; \perp$

TAIL: $x \equiv x = \langle x_1 \rangle \rightarrow \emptyset,$
 $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $n \geq 2 \rightarrow \langle x_2, \dots, x_n \rangle; \perp$

TRANS: $x \equiv x = \langle \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \rightarrow \emptyset; x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \langle y_1, \dots, y_m \rangle; \perp$
 ,где $x_i = \langle x_{i1}, \dots, x_{im} \rangle$ и $y_j = \langle x_{1j}, \dots, x_{nj} \rangle; i=1, n; j=1, m$

NILL: $x \equiv x = \emptyset \rightarrow T; x \neq \perp \rightarrow F; \perp$

$+$: $x \equiv x = \langle y, z \rangle$ и y, z — числа $\rightarrow y + z; \perp$

$*$: $x \equiv x = \langle y, z \rangle$ и y, z — числа $\rightarrow y * z; \perp$

DISTR: $x \equiv x = x \langle \emptyset, y \rangle \rightarrow \emptyset;$
 $x = \langle y_1, \dots, y_n \rangle, z \rightarrow \langle y_1, z \rangle, \dots, \langle y_n, z \rangle; \perp$

Определенные функции задаются так называемыми функциональными уравнениями вида (1) DEF $L = R$; где L — имя определенной функции, R — функциональное выражение, возможно зависящее от L и построенное посредством композиций над F (посредством функциональных форм).

В множество K функциональных форм также введены все формы, описанные в [1], в том числе, например, и следующие.

Умножение, которое функциям f и g ставит в соответствие новую функцию $(f \circ g)$, значение которой на произвольном объекте x задается формулой $(f \circ g) : x \equiv f : (g : x)$.

Конструкция. $[f_1, \dots, f_n] : x \equiv \langle f_1 : x, \dots, f_n : x \rangle$.

Условие. $(\text{IF } p \rightarrow f!g) : x \equiv (p : x) = T \rightarrow f : x; (p : x) = F \rightarrow g : x; \perp$

Вставка. $\swarrow f : x \equiv x = \langle x_1 \rangle \rightarrow x_1;$

$x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $n \geq 2 \rightarrow f : \langle x_1, \swarrow f : \langle x_2, \dots, x_n \rangle \rangle; \perp$

Применить ко всем. $\alpha f : x \equiv x = \emptyset \rightarrow \emptyset; x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \langle f : x_1, \dots, f : x_n \rangle; \perp$

Программа в системе SFP есть последовательность предложений вида (1). Например, программа умножения матрицы на вектор представляется следующим образом:

DEF MV = (α PV $\circ$ DISTR);

DEF PV = ($/ + \circ \alpha * \circ$ TRANS);

Программа-функция определения последнего элемента последовательности, т. е. LAST : $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow x_n$, может быть записана так:

DEF LAST = IF(NILL $\circ$ TAIL) $\rightarrow$ FIRST! (LAST $\circ$ TAIL);

Уже из приведенных примеров достаточно очевидны преимущества подобных систем. Целью статьи не является подробное обсуждение достоинств и недостатков систем функционального программирования, поэтому здесь лишь ограничимся указанием основных черт (наглядность, ясность, верифицируемость, мобильность, возможность простого распараллеливания программ, построение в процессе решения задач расширяемой среды программирования), а также источников, где такое обсуждение проведено [1, 5], и отметим, что при эксплуатации описанной выше системы в процессе обучения студентов были получены интересные данные: использование, например, системы при программировании задач обработки символьной информации приводит по сравнению с традиционными языками к сокращению числа строк в программах более чем на порядок (с 60—70 до 4—6), времени разработки программ (в 2—3 раза). Более подробно вопросы применения SFP в обучении рассмотрены и проанализированы в [6]. В то же время установлено, что переход от программирования на традиционных языках к функциональному программированию представляет собой сложнейшую задачу, а сам процесс создания программ в системе SFP для некоторых классов задач, связанных с обработкой числовой информации, также вызывает определенные трудности, что обусловлено фиксированностью структуры данных, используемой в SFP. С целью упрощения процесса перехода от традиционного к функциональному программированию и для использования в случае необходимости средств традиционного программирования в более поздней версии системы SFP предусмотрена возможность совместного использования средств системы SFP и языка ПЛ/1, т. е. программист может писать программы на языке ПЛ/1, вставляя, где это целесообразно, фрагменты на языке SFP-системы, и наоборот, составляя программы в SFP-системе, он может оформлять функции в виде ПЛ/1-функций. Еще одним средством, упрощающим разработку SFP-программ, является раздельная компиляция программ-функций.

Система функционального программирования реализована по СР-технологии создания программного обеспечения [4], которая использует язык СР/ТРАН [4] и систему TRACS [7]. В рамках этой технологии предполагается такая последовательность действий.

Этап 1. Формальное определение логической структуры (ЛС) входных и выходных данных разрабатываемой системы с помощью схем Джексона [8] (ДТ-схем) (рис. 1) в соответствии с выбранным способом реализации. Было решено реализовать систему SFP посредством создания символьного процессора, осуществляющего перевод SFP-программ в эквивалентные ПЛ/1-программы так, чтобы SFP-программам был доступен аппарат языка ПЛ/1. Следуя этому, определение ЛС данных состояло в задании структуры системы SFP в виде, представленном на

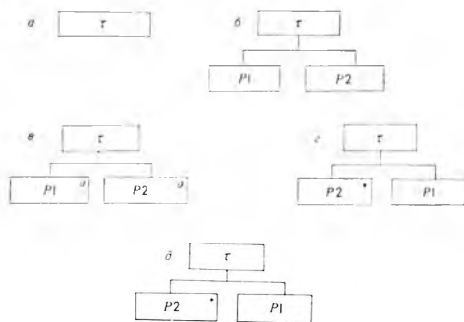


Рис. 1. Кодирование основных управляющих структур с помощью ДТ-схем:

терминальный символ (а); последовательная структура (б); выборная структура (в); циклическая структура: P_2 повторяется любое число раз (г); повторяется хотя бы один раз (д); P_1 , P_2 — некоторые понятия

рис. 2, и в сопоставлении выделенным структурам фрагментов ПЛ/1-программ, реализующих ту или иную функцию, функциональную форму SFP-системы.

Этап 2. Доопределение полученной ЛС входных данных до алгоритма перевода конструкций, используемых в SFP-программах, в соответствующие им фрагменты на языке ПЛ/1. Такое доопределение осуществлялось средствами языка СР/ТРАН [4], в котором допустимо использование операторов языка ПЛ/1 и аппарата абстрактных памяти.

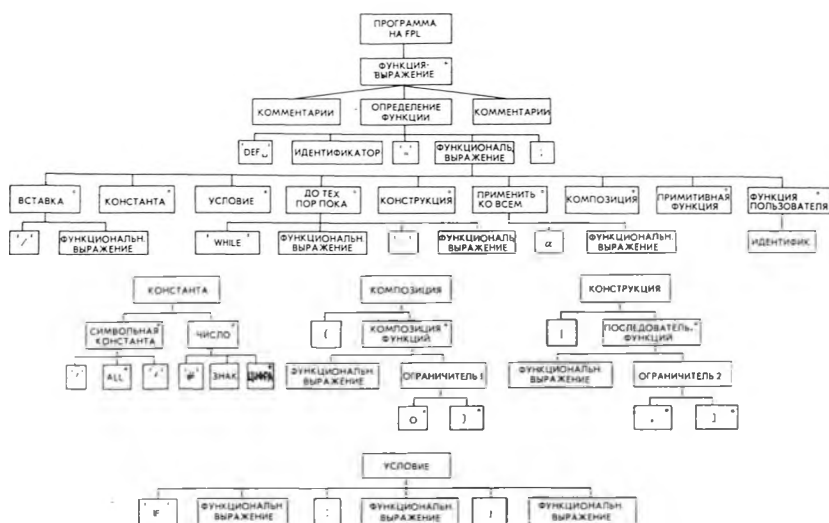


Рис. 2. Система функционального программирования

Этап 3. Кодирование схем Джексона, полученных на этапе 2, на языке СР/ТРАН, который характеризуется тем, что структура его программ соответствует процессу проектирования: в них четко разделяются описание ЛС входных данных и задание действий по преобразованию входных данных в выходные. При этом для кодирования ЛС, а соответственно и базовых управляющих структур, явно используются номера уровней вложенности.

Этап 4. Трансляция СР/ТРАН-программы. При реализации языка СР/ТРАН принят подход, основанный на создании препроцессора, переводящего СР/ТРАН-программы в программы на языке ПЛ/1. В силу этого в результате этапа был получен требуемый препроцессор — программа на языке ПЛ/1, осуществляющая перевод программ в SFP-системе в программы на ПЛ/1.

Этап 5. Исследование характеристик полученной SFP-системы, ее модификация и оптимизация.

Данные об использовании СР-технологии при реализации системы SFP приведены в [9].

Список литературы

1. Backus J. // Communications of the ACM. 1978. V. 21. N 8. P. 613.
2. Редько В. Н. // Программирование. 1978. № 5. С. 3.
3. Редько В. Н. // Программирование. 1979. № 3. С. 3.
4. Дробушевич Г. А., То Туан, Зубович К. А. // Программирование. 1984. № 3. С. 84.
5. Turner D. A. // Lecture Notes in Computer Science. 1981. V. 123. P. 334.
6. Зубович К. А. // ЭВМ — учебному процессу, науке и технике. Минск, 1985. С. 15.
7. Дробушевич Г. А., Зубович К. А., Кадан А. М., Коваленко А. Н., То Туан. // Автоматизация производства пакетов прикладных программ и трансляторов: Тез. III Всесоюз. конференц. Таллин, 1983. С. 25.
8. Jackson M. A. Principles of Program Design. Academic Press. London, 1975.
9. Дробушевич Г. А., Зубович К. А., То Туан. // Р-технология программирования. Ч. 2: Опыт применения (Тез. докл. I Всесоюз. конференц.). Киев, 1983. С. 83.

Поступила в редакцию 10.03.86.

НОРМАЛИЗАЦИЯ ЧИСЕЛ В МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

В процессе построения арифметики модулярных систем счисления (МСС) в режиме с плавающей запятой важную роль играет операция нормализации чисел. Известные алгоритмы нормализации мантиис результатов арифметических операций базируются на процедуре преобразования модулярного кода в полиадический код [1, 2]. Последовательный характер применяемого преобразования существенно увеличивает время нормализации чисел, а также затрудняет организацию конвейерной обработки информации. В данной работе предлагаются методы и алгоритмы нормализации чисел в МСС с использованием интервально-индексных характеристик [3], которые обладают высоким уровнем параллелизма и имеют конвейерную структуру.

В статье наряду с обозначениями работы [4] используются обозначения: $D = \{-p \cdot M_{k-1}, -p \cdot M_{k-1} + 1, \dots, p \cdot M_{k-1} - 1\}$ — диапазон МСС (p — фиксированное натуральное число); S — коэффициент нормализации.

Определение. Интервально-модулярным представлением произвольного целого числа $X \in D$ в МСС с модулями $m_1, m_2, \dots, m_k$ называется представление вида

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i, k-1} \cdot x_{i, k-1} + I_k(X) \cdot M_{k-1}, \quad (1)$$

где целое число $I_k(X)$ называется интервальным индексом числа X . Характеристика $J_k(X) = [I_k(X)/m_k]$ называется главным интервальным индексом числа X .

Предлагается метод умножения на константы. Данный метод основан на умножении нормализуемого числа $X \in D$, заданного своим модулярным кодом $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, на константы вида S^l , $l = 1, 2, \dots, n$, где $n = 1 + [\log_s p \cdot M_{k-1}]$. Если при умножении на константы S^l для всех $l = 1, 2, \dots, v$ выполняется условие $X^{(l)} = X \cdot S^l \in D^* = \{Y | -p - k + 2 \leq I_k(Y) \leq p - 1\}$, где $I_k(Y)$ — интервальный индекс числа Y , а для $l = v + 1$ данное условие не выполняется, т. е. $X^{(v+1)} = X \cdot S^{v+1} \notin D^*$, то число $X^{(v)}$ считается нормализованным. При этом исходное число X и нормализованное $X^{(v)}$ связаны между собой соотношением $X = \mu(X) \times \times S^{-v(X)}$, где $\mu(X) = X^{(v)}$ — мантисса, а $v(X) = v$ — порядок числа X .

Проверка принадлежности числа $X^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, n$ множеству D^* требует формирования интервального индекса $I_k(X^{(l)})$. Используя интервально-модулярное представление числа X (1) можно записать

$$X^{(l)} = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i, k-1} \cdot x_{i, k-1} \cdot S^l + I_k(X) \cdot M_{k-1} \cdot S^l. \quad (2)$$

Применяя вытекающее из леммы Евклида (теории делимости) соотношение

$$x_{i, k-1} \cdot S^l = x_{i, k-1}^{(l)} + m_k \cdot \left[\frac{x_{i, k-1} \cdot S^l}{m_k} \right],$$

где $x_{i, k-1}^{(l)} = |x_{i, k-1} \cdot S^l|_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, можно преобразовать число

(2) к виду $X^{(l)} = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i, k-1} \cdot x_{i, k-1}^{(l)} + I_k(X^{(l)}) \cdot M_{k-1}$, где $I_k(X^{(l)})$ — интервальный индекс числа $X^{(l)}$, для которого справедлива формула

$$I_k(X^{(l)}) = I_k(X) \cdot S^l + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{x_{i, k-1} \cdot S^l}{m_i} \right]. \quad (3)$$

По лемме Евклида интервальный индекс числа $X^{(l)}$ может быть представлен в виде $I_k(X^{(l)}) = \bar{I}_k(X^{(l)}) + m_k \cdot J_k(X^{(l)})$, где $\bar{I}_k(X^{(l)}) = |I_k(X^{(l)})|_{m_k}$ — машинный интервальный индекс числа $X^{(l)}$.

С точки зрения машинной реализации проверку условия $X^{(l)} \in D^*$, что эквивалентно проверке выполнения неравенства

$$-p - k + 2 \leq I_k(X^{(l)}) \leq p - 1, \quad (4)$$

удобно производить при помощи машинного интервального индекса $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и главного интервального индекса $J_k(X^{(l)})$. При этом проверка условия (4) сводится к проверке следующих соотношений:

$$\begin{cases} \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [0, p - 1]; J_k(X^{(l)}) = 0, \\ \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [m_k - p - k + 2, m_k - 1]; J_k(X^{(l)}) = -1, \end{cases} \quad (5)$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [0, p - 1]; |J_k(X^{(l)})|_{m_k} = 0, \\ \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [m_k - p - k + 2, m_k - 1]; |J_k(X^{(l)})|_{m_k} = m_k - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_k}$ могут быть получены непосредственно из формулы (3). Легко заметить, что предлагаемая процедура нормализации числа X наиболее просто реализуется при равенстве коэффициента нормализации S k -ому модулю выбранной МСС m_k . В этом случае для машинного и главного интервальных индексов числа $X^{(l)}$ справедливы соотношения

$$\bar{I}_k(X^{(l)}) = R_l, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$|J_k(X^{(l)})|_{m_k} = \begin{cases} |I_k(X) + Q_1|_{m_k}, & \text{если } l = 1, \\ |Q_l|_{m_k}, & \text{если } l = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } R_l = \left\lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\kappa_{i, k-1} \cdot m_k^l}{m_i} \right] \right\rfloor_{m_k}, \quad Q_l = \left\lfloor \frac{1}{m_k} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\kappa_{i, k-1} \cdot m_k^l}{m_i} \right] \right\rfloor.$$

На основании изложенного можно предложить следующий алгоритм нормализации числа X в системе с модулями $m_1, m_2, \dots, m_k$.

1. По модулярному коду $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k)$ числа $X \in D$ ($\kappa_i = |X|_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$) для всех $l = 1, 2, \dots, n$ вычисляются величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_k}$ по формулам (7) и (8).

2. Для всех $l = 1, 2, \dots, n$ проверяется принадлежность числа $X^{(l)}$ множеству D^* в соответствии с (6).

3. Определяется v такое, что $X^{(v)} \in D^*$, а $X^{(v+1)} \notin D^*$.

4. Определяется порядок $v(X) = v$ и модулярный код $(\kappa_1^{(v)}, \kappa_2^{(v)}, \dots, \kappa_k^{(v)})$ мантиссы $\mu(X) = X^{(v)}$ по формуле $\kappa_i^{(v)} = |X \cdot S^v|_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Приведенный алгоритм допускает как последовательную [5], так и параллельную реализацию. При максимальном распараллеливании вычислений он может быть выполнен за $4 + \lceil \log_2 k \rceil$ модульных операций. В соответствии с теоремами кодирования МСС [6, 7] и результатами, полученными в [8], такое быстроедействие можно считать предельным.

Главную часть оборудования устройства для нормализации чисел, функционирующего в соответствии с изложенным алгоритмом, составляют блоки суммирования вычетов (БСВ) по модулю m_k , число которых равно n . Использование идентичных БСВ следует считать достоинством описанного подхода, так как соответствующее устройство нормализации обладает высокой однородностью, что очень важно для реализации устройства в виде больших интегральных схем. Необходимо, однако, заметить, что неотъемлемым элементом арифметических устройств (АУ), функционирующих в МСС, является формирователь интегральных характеристик модулярного кода, в состав которого вхо-

дят БСВ по всем модулям МСС [9, 10]. В рамках структур АУ, обеспечивающих использование одних и тех же БСВ для выполнения различных немодульных операций, требуются устройства для нормализации чисел, в которых применяются БСВ по всем модулям $m_1, m_2, \dots, m_k$. Для получения соответствующего алгоритма нормализации чисел достаточно вместо множителей S^l ($l = 1, 2, \dots, n$) использовать константы $M^{(l)} = \prod_{j=k-l}^{k-1} m_j$ ($l = 1, 2, \dots, k-1$). При этом для рассматриваемого случая

справедливы следующие расчетные соотношения для машинного $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и главного $J_k(X^{(l)})$ интервальных индексов числа $X^{(l)} = X \cdot M^{(l)}$

$$\bar{I}_k(X^{(l)}) = \left| \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\kappa_{i, k-1} \cdot M^{(l)}}{m_i} \right] \right|_{m_{k-l}}, \quad (9)$$

$$|J_k(X^{(l)})|_{m_{k-l-1}} = \left[\left[\frac{1}{m_i} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\kappa_{i, k-1} \cdot M^{(l)}}{m_i} \right] \right] \right]_{m_{k-l-1}}, \quad (10)$$

где $l = 1, 2, \dots, k-1$.

Процесс нормализации с использованием множителей $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(k-1)}$ состоит в следующем.

1. По модулярному коду $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_k)$ числа $X \in D$ для всех $l = 1, 2, \dots, k-1$ вычисляются величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_{k-l-1}}$ по формулам (9) и (10).

2. Для всех $l = 1, 2, \dots, k-1$ проверяется принадлежность числа $X^{(l)}$ множеству D^* .

3. Определяется v такое, что $X^{(v)} \in D^*$, а $X^{(v+1)} \notin D^*$.

4. Определяется порядок $v(X) = \lfloor \log_S M^{(v)} \rfloor$.

5. Определяется модулярный код $(\kappa_1^{(v)}, \kappa_2^{(v)}, \dots, \kappa_k^{(v)})$ мантиссы $\mu(X)$ по формуле $\kappa_i^{(v)} = \lfloor X \cdot S^{v(X)} \rfloor_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Быстродействие устройства для нормализации чисел, работающего в соответствии с данным алгоритмом, является таким же, как и у описанного выше: $4 + \lfloor \log_2 k \rfloor$ модульных операций. При использовании БСВ, имеющих конвейерную древовидную структуру, частота поступления входной информации в предлагаемом устройстве для нормализации чисел составляет $f = 1/t_{MT}$, где t_{MT} — длительность модульного такта. Если, например, $t_{MT} = 50$ нс, то $f = 20$ МГц.

В заключение отметим, что выполнение наиболее быстродействующего из известных алгоритмов нормализации чисел в МСС занимает не менее чем $k + \lfloor \log_2 \log_S (2 \cdot p \cdot M_{h-1}) \rfloor$ тактов [1], т. е. применение предложенного метода позволяет ускорить процесс нормализации не менее чем в $n = (k + \lfloor \log_2 \log_S (2 \cdot p \cdot M_{h-1}) \rfloor) / (4 + \lfloor \log_2 k \rfloor)$ раз. Если, например, $k = 8$, $S = 2$ и $p \cdot M_{h-1} \approx 2^{31}$, то $n = 1,85$.

Список литературы

1. Taylor F. J., Huang C. H. // J. of the Franklin Institute. 1981. V. 311. N 1. P. 33.
2. Kinoshita E., Kosako H., Kojima Y. // IEEE Trans. on Comput. 1974. V. C-23. N 1. P. 9.
3. Коляда А. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1980. № 1. С. 6.
4. Коляда А. А. Там же. 1986. № 1. С. 46.
5. Буза М. К., Коляда А. А. А. с. 1242942 СССР // БИ. 1986. № 25. С. 192.
6. Сабо Н. // Кибернетический сборник. М., 1964. № 8. С. 149.
7. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики. Алма-Ата, 1976.
8. Виноград С. // Кибернетический сборник. М., 1969. Вып. 6.
9. Коляда А. А. А. с. 968802 СССР // БИ. 1982. № 39. С. 265.
10. Коляда А. А. А. с. 1007098 СССР // БИ. 1983. № 11. С. 253.

Поступила в редакцию 27.03.86.

ПРИМЕНЕНИЕ АБСТРАКТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ.

1. СТРУКТУРА И ПОИСК

Применение вычислительных машин в качестве интеллектуальных помощников человека невозможно без управления и манипулирования большими объемами данных. Общая эффективность образуемой в этом случае системы пользователь — ЭВМ определяется способом представления данных в памяти вычислительной машины. Модели данных [1] обеспечивают широкие возможности представления благодаря соединению данных со смысловой интерпретацией. Однако для использования в системах искусственного интеллекта, а также в качестве основы всякого процесса обработки данных необходимо придать им большую гибкость, достаточную для многоцелевого приложения в широком диапазоне задач.

Рассмотрим способ представления данных на абстрактных моделях, отличающийся возможностью фрагментарного описания предметной области задачи и наличием универсальной процедуры сборки фрагментов в единую модель. Способ ориентирован на аппаратную поддержку, обеспечивающую его эффективную реализацию.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество выделенных объектов в рамках предметной области; $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ — множество классов объектов; $f: X \rightarrow I$ — интерпретирующее отображение. Интерпретацией объекта $x \in X$ на множестве I классов объектов предметной области назовем двойку $v = (x, i)$ такую, что $f(x) = i$. Соответствие $\Phi = \{(v', v'') | v', v'' \in V, v' = (x', i'), v'' = (x'', i''), i' = i''\}$ в этом случае является эквивалентностью на множестве интерпретаций объектов V .

Определение 1. Абстрактной моделью предметной области называется тройка $z = (V, \Gamma, \Pi)$, где V — множество интерпретаций объектов; Γ — определяющее соответствие в V такое, что $\Gamma^k \cap \Delta_V = \emptyset$, $k = 1, 2$ (здесь Γ^k — k -я степень соответствия Γ ; Δ_V — диагональ в V [2]); Π — определяемое соответствие в V такое, что $\Pi = \Gamma^{-1}$.

В общем случае абстрактная модель составляется экспертным методом на основе профессионального представления пользователя о предметной области и на необходимом для решения задачи уровне детализации (уровень абстракции). Естественным для пользователя является фрагментарное формирование и манипулирование моделью предметной области. Для случая представления данных на абстрактных моделях всякий фрагмент предметной области также описывается абстрактной моделью. Подмоделью абстрактной модели $z = (V, \Gamma, \Pi)$ назовем абстрактную модель $z' = (V', \Gamma', \Pi')$, для которой $V' \subseteq V$, $\Gamma' = \{(v', v'') | v', v'' \in V', (v', v'') \in \Gamma\}$, $\Pi' = (\Gamma')^{-1}$. Для манипулирования абстрактной моделью используются подмодели специального вида — выражения. Выражением называется абстрактная модель $z = (V, \Gamma, \Pi)$ в том случае, если $\Gamma^k \cap \Delta_V = \Phi$, $k \in N$, где N — множество натуральных чисел. В выражении отсутствует циклическое взаимопределение объектов, возможное для абстрактной модели общего вида. Это и определяет их использование.

Реальные объекты, отношения, категории, связи и свойства, выделяемые в рамках предметной области решаемой задачи, представляются в абстрактной модели абстрактными объектами.

Определение 2. Абстрактным объектом, принадлежащим абстрактной модели $z = (V, \Gamma, \Pi)$, называется тройка $q = (v, \Gamma_q, \Pi_q)$, где $v \in V$; $\Gamma_q = \{(v, v') | v' \in V, (v, v') \in \Gamma\}$; $\Pi_q = \{(v, v') | v' \in V, (v, v') \in \Pi\}$.

Если абстрактная модель z имеет множество абстрактных объектов Q , то будем писать $z: Q$. Эквивалентность Ψ на множестве абстрактных объектов Q определяется рекурсивно: $\Psi = \{(q', q'') | q', q'' \in Q,$

$q' = (v', \Gamma_{q'}, \Pi_{q'})$, $q'' = (v'', \Gamma_{q''}, \Pi_{q''})$, $(v', v'') \in \Phi$, существует биективное соответствие A из $\Gamma_{q'}$ в $\Gamma_{q''}$ такое, что, если $\gamma' \in \Gamma_{q'}$, $\gamma'' \in \Gamma_{q''}$, $A(\gamma') = \gamma''$, $\gamma' = (v', \vartheta')$, $\gamma'' = (v'', \vartheta'')$, $\hat{q}' = (\vartheta', \Gamma_{\hat{q}'}, \Pi_{\hat{q}'})$, $\hat{q}'' = (\vartheta'', \Gamma_{\hat{q}''}, \Pi_{\hat{q}''})$, то $(\hat{q}', \hat{q}'') \in \Psi$ и существует биективное соответствие B из $\Pi_{q'}$ в $\Pi_{q''}$ такое, что, если $\pi' \in \Pi_{q'}$, $\pi'' \in \Pi_{q''}$, $B(\pi') = \pi''$, $\pi' = (v', \bar{\vartheta}')$, $\pi'' = (v'', \bar{\vartheta}'')$, $\bar{q}' = (\bar{\vartheta}', \Gamma_{\bar{q}'}, \Pi_{\bar{q}'})$, $\bar{q}'' = (\bar{\vartheta}'', \Gamma_{\bar{q}''}, \Pi_{\bar{q}''})$, то $(\bar{q}', \bar{q}'') \in \Psi$.

Пусть для абстрактной модели $z = (V, \Gamma, \Pi)$, $z : Q$, дана подмодель $z' = (V', \Gamma', \Pi')$, $z' : Q'$. Подобъектом абстрактного объекта $q \in Q$, $q = (v, \Gamma_q, \Pi_q)$ такого, что $v \in V'$, называется абстрактный объект $q' \in Q'$, $q' = (v, \Gamma_{q'}, \Pi_{q'})$. Из определения подмодели следует, что $\Gamma_{q'} \subseteq \Gamma_q$, $\Pi_{q'} \subseteq \Pi_q$. Абстрактный объект и его подобъект представляют в абстрактной модели один и тот же объект предметной области, но с разной степенью детализации.

Эквивалентность Υ на множестве абстрактных моделей Z устанавливается через эквивалентность абстрактных объектов: $\Upsilon = \{(z', z'') \mid z', z'' \in Z, z' : Q', z'' : Q'', \text{ существует биективное соответствие } E \text{ из } Q' \text{ в } Q'' \text{ такое, что, если } q' \in Q', q'' \in Q'', E(q') = q'', \text{ то } (q', q'') \in \Psi\}$.

Обозначим $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ множество операций над абстрактными объектами, где ω_1 — поиск; ω_2 — добавление и ω_3 — удаление абстрактного объекта.

Определение 3. Предложением называется двойка $s = (z, t)$, где z — выражение, $z : Q$; $t : Q \rightarrow W$ — отображение, для которого существует один и только один абстрактный объект $q \in Q$ такой, что $t(q) \in W$. Предложения называются вопросительными ($t(q) = \omega_1$), утвердительными ($t(q) = \omega_2$) или отрицательными ($t(q) = \omega_3$).

Пусть дано предложение $s = (z, t)$, в котором для абстрактного объекта $q \in Q$, $z : Q$, выполняется $t(q) \in W$. Связь объекта q с остальными объектами выражения задается проекцией выражения по абстрактному объекту.

Определение 4. Проекцией выражения $z = (V, \Gamma, \Pi)$, $z : Q$, по абстрактному объекту $q = (v, \Gamma_q, \Pi_q)$ называется четверка $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$, где q — проектируемый объект, $q \in Q$; $V_p = \{v\} \cup [\bigcup_{k=1}^{|V|} (\Gamma_p^k \cup \Pi_p^k)](v)$; $\Gamma_p = \bigcup_{j=1}^{|V|} \tilde{\Gamma}_j$; $\Pi_p = \bigcup_{j=1}^{|V|} \tilde{\Pi}_j$; $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_q$; $\tilde{\Pi}_1 = \Pi_q$; $\tilde{\Gamma}_j (j \geq 2) = \{(v', v'') \mid v' \in [\tilde{\Gamma}_{j-1} \cup \tilde{\Pi}_{j-1}](V), (v', v'') \in \Gamma / \bigcup_{n=1}^{j-1} (\tilde{\Pi}_n)^{-1}\}$; $\tilde{\Pi}_j (j \geq 2) = \{(v', v'') \mid v' \in [\tilde{\Gamma}_{j-1} \cup \tilde{\Pi}_{j-1}](V), (v', v'') \in \Pi / \bigcup_{n=1}^{j-1} (\tilde{\Gamma}_n)^{-1}\}$.

Пусть для выражения $z : Q$ построена проекция $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$. Проекцией абстрактного объекта q' , $q' \in Q$, $q' = (v', \Gamma_{q'}, \Pi_{q'})$, называется подобъект $q'' = (v', \Gamma_{q''}, \Pi_{q''})$, для которого $\Gamma_{q''} = \{(v', \vartheta') \mid \vartheta' \in V_p, (v', \vartheta') \in \Gamma_p\}$, $\Pi_{q''} = \{(v', \vartheta') \mid \vartheta' \in V_p, (v', \vartheta') \in \Pi_p\}$. В описанной проекции, таким образом, объекты предметной области представляются проекциями абстрактных объектов. Если проекция p имеет множество проекций абстрактных объектов Q , то будем писать $p : Q$.

Эквивалентность Λ на множестве проекций выражений P устанавливается через эквивалентность проекций абстрактных объектов: $\Lambda = \{(p', p'') \mid p', p'' \in P, p' : Q', p'' : Q'', \text{ существует биективное соответствие } H \text{ из } Q' \text{ в } Q'' \text{ такое, что, если } q' \in Q', q'' \in Q'', H(q') = q'', \text{ то } (q', q'') \in \Psi\}$.

Теорема 1. В проекции $p : Q$, $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$, выражения z для всякого $q' \in Q$, $q' \neq q$, $q' = (v', \Gamma_{q'}, \Pi_{q'})$, существует один и только один $q'' \in Q$, $q'' = (v'', \Gamma_{q''}, \Pi_{q''})$ такой, что $(v'', v') \in \Gamma_p \cup \Pi_p$.

С л е д с т в и е 1. Для проекции $p : Q$, $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$, выражения z существует, по крайней мере, один $q' \in Q$, $q' = (v', \Gamma_{q'}, \Pi_{q'})$ такой, что $\Gamma_{q'} = \emptyset$, $\Pi_{q'} = \emptyset$.

Теорема 2. Для существования в составе абстрактной модели z'

абстрактного объекта q' , имеющего подобъект q'' , $(q'', q') \in \Psi$, $s = (z, t)$, $z :: Q$, $q \in Q$, $t(q) \in W$, необходимо и достаточно наличие в z' подмодели z'' , имеющей проекцию p'' такую, что $(p'', p) \in \Lambda$, где $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$.

Пусть задана абстрактная модель $z' = (V', \Gamma', \Pi')$ и предложение $s = (z, t)$, $z :: Q$, $q = (v, \Gamma_q, \Pi_q)$, $q \in Q$, $t(q) = w_1$, $p = (q, V_p, \Gamma_p, \Pi_p)$. Требуется отыскать в z' абстрактный объект q' , представляющий тот же самый объект предметной области, что и абстрактный объект q в составе выражения z . Поиск осуществляется при помощи алгоритма 1, основанного на теоремах 1 и 2.

Алгоритм 1. Положить для множества Σ , $\Sigma = \emptyset$.

Шаг 1. Отыскать в составе $p :: Q$ проекцию $\bar{q} = (\bar{v}, \Gamma_{\sim}, \Pi_{\sim})$, $\bar{q} \in Q$, для которой $\Gamma_{\sim} = \emptyset$, $\Pi_{\sim} = \emptyset$, причем $\Sigma(\bar{q}) = \emptyset$. Если $\bar{q}$ найден, то перейти к шагу 2, иначе перейти к шагу 3.

Шаг 2. Отыскать в составе $z' :: Q'$ абстрактный объект $\hat{q} = (\hat{v}, \Gamma_{\sim}, \Pi_{\sim})$, $\hat{q} \in Q'$, для которого существует подобъект $\hat{q}'$ такой, что $(\hat{q}', \hat{q}) \in \Psi$.

Пусть найдено множество $\hat{Q} \subseteq Q'$ абстрактных объектов, удовлетворяющих указанному условию. Если $\hat{Q} = \emptyset$, тогда закончить алгоритм, поскольку в z' не существует искомого абстрактного объекта. Если же $\hat{Q} \neq \emptyset$, то положить Σ равным $\Sigma \cup \{(\bar{q}, \hat{q}') \mid \hat{q}' \in \hat{Q}\}$ и перейти к шагу 1, если $\Gamma_{\sim} = \emptyset$ и $\Pi_{\sim} = \emptyset$, или же к шагу 3 в противном случае.

Шаг 3. Отыскать в составе $p :: Q$ проекцию $\bar{q} = (\bar{v}, \Gamma_{\sim}, \Pi_{\sim})$, $\bar{q} \in Q$, для которой для каждого абстрактного объекта $\bar{q}' \in Q$, $\bar{q}' = (\bar{v}', \Gamma_{\sim}, \Pi_{\sim})$ такого, что $\bar{v}' \in [\Gamma_{\sim} \cup \Pi_{\sim}](\bar{v})$, выполняется $\Sigma(\bar{q}') \neq \emptyset$, причем $\Sigma(\bar{q}) = \emptyset$. Если $\bar{q}$ найден, то перейти к шагу 2. Иначе, закончить алгоритм, при этом последнее найденное на шаге 2 множество $\hat{Q}$ и есть множество искомых абстрактных объектов.

Список литературы

1. Цикритзис Д., Лоховски Ф. Модели данных. М., 1985.
2. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.

Поступила в редакцию 14.05.86.

Наши юбиляры



АЛЕКСЕЙ АДАМОВИЧ ГУСАК (К 60-летию со дня рождения)



Исполнилось 60 лет со дня рождения профессора кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ имени В. И. Ленина Алексея Адамовича Гусака.

А. А. Гусак в 1952 г. с отличием окончил физико-математический факультет БГУ имени В. И. Ленина и продолжил учебу в аспирантуре механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. В 1956 г. Алексей Адамович успешно защитил кандидатскую диссертацию и в 1960 г. ему было присвоено ученое звание доцента, а в 1976 — профессора.

С ноября 1955 г. Алексей Адамович Гусак работает в БГУ имени В. И. Ленина, где он прошел путь от ассистента до профессора кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. В 1963—1974 гг. А. А. Гусак был деканом математического факультета Белгосунiversитета имени В. И. Ленина, в 1968—1975 гг. заведовал кафедрой общей математики.

Профессор А. А. Гусак является видным специалистом по истории математики. В кандидатской диссертации им исследованы предистория и начало развития теории приближения функций. В частности, доказаны теоремы Чебышева о наилучшем устройстве параллелограмма Уатта, сформулированные в мемуаре «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», заложившем основы теории приближения функций. В трудах А. А. Гусака получил дальнейшее развитие метод поправок, предложенный П. Л. Чебышевым для приближения функций посредством алгебраических многочленов. Итоги этих исследований изложены в монографии «Теория приближения функций. Исторический очерк». Ряд его работ посвящен вопросам развития математики и математического образования в Белоруссии. А. А. Гусак участвует в исследованиях по научной программе «Развитие науки и культуры в Белоруссии».

Алексей Адамович Гусак — автор свыше 80 научных работ, которые относятся к истории математики, теории приближения функций, теории механизмов, численным методам, методике преподавания математики. Среди них — монография «Теория приближения функций. Исторический очерк», учебные пособия «Вышая математика» (для студентов естественных специальностей университетов) с грифом Минвуза СССР, «Задачи и упражнения по высшей математике». Учебное пособие с грифом Минвуза СССР «Сборник задач по дифференциальной геометрии» (под редакцией профессора А. С. Феденко) переведено на испанский и французский языки, а учебное пособие «Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии» переиздано на венгерском языке. Широко известны опубликованные им совместно с другими авторами научно-популярные книги для юных математиков: «Алгебраические уравнения», «Линии и поверхности», «В мире чисел».

А. А. Гусак награжден юбилейной медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина», нагрудным знаком Минвуза СССР «За отличные успехи в работе». За заслуги в подготовке специалистов и развитии науки Алексей Адамович награжден Почетной Грамотой Верховного Совета БССР и Грамотой Верховного Совета БССР.

Профессор А. А. Гусак — член КПСС с 1949 г. Принимает активное участие в общественной жизни университета. Он является ученым секретарем секции математики и механики научно-технического Совета Минвуза БССР, членом бюро методического объединения преподавателей математики вузов БССР, Совета Белорусского отделения Советского Национального объединения историков естествознания и техники, членом научно-методического Совета БГУ имени В. И. Ленина.

Сердечно поздравляя Алексея Адамовича с шестидесятилетием со дня рождения, желаем ему крепкого здоровья, дальнейших успехов в научной, педагогической и общественной деятельности.

М. Д. Мартыненко, Л. П. Примачук



УДК 530.12

А. В. ОСТАПЕНКО

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ФЕРМИОН-АНТИФЕРМИОННОМ УРАВНЕНИИ СО СКАЛЯРНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Проблема невылетания кварков в настоящее время является одной из важнейших в физике адронов. В этой связи все более актуальным становится рассмотрение двухчастичных релятивистских уравнений с запирающим потенциалом. Настоящая работа посвящена исследованию фермион-антифермионного уравнения типа Бете — Солпитера со скалярным линейным потенциалом и проблеме запираения кварков.

В работах [1—3] произведена редукция релятивистского фермион-антифермионного уравнения типа Бете — Солпитера для произвольного центрально-симметричного потенциала. Точное решение полученной в [2] системы радиальных уравнений для случая скалярного потенциала кулоновского типа дано в [4]. Дальнейшим естественным шагом является исследование радиальных уравнений для случая, когда потенциал содержит линейный член.

Будем исходить из уравнения, полученного в [4],

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + \omega^2 \right] \Phi(r) = 0, \quad (1)$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{4E^2} [E^2 - (m_1 + m_2 + 2V(r))^2] [E^2 - (m_1 - m_2)^2]; \quad (2)$$

J — полный спин системы связанных кварка и антикварка; m_1 и m_2 — массы составляющих кварков; E — энергия связанной системы.

При линейном потенциале

$$V(r) = C + \beta r \quad (3)$$

уравнение (1) в общем случае не имеет аналитического решения. Использование квазиклассического приближения (ВКБ) позволяет записать решение уравнения через громоздкие выражения, содержащие эллиптические интегралы. Однако в частном случае $J = 0$ уравнение (1) с линейным потенциалом имеет точное аналитическое решение, позволяющее получить полезную физическую информацию.

Итак, положим в (1) $J = 0$ и возьмем $V(r)$ в виде (3). Тогда вместо (1), получим:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - v^2 \left(\frac{M}{2} + \beta r \right)^2 + \sigma^2 \right] \Phi(r) = 0, \quad (4)$$

где $\sigma^2 = \frac{1}{4}(E^2 - m^2)$; $M = m_1 + m_2$, $m = m_1 - m_2$; $v^2 = (E^2 + m^2)/E^2$.

(Мы опустили константу C , так как она входит только в сумму $M/2 + C$ и может быть устранена заменой $M/2 + C \rightarrow M'/2$, что приводит лишь к сдвигу по M .)

Вводя новую переменную

$$x = (M/2 + \beta r)^2/\beta \quad (5)$$

и представив функцию $\Phi(r)$ в виде

$$\Phi(r) = \exp(-x/2)v(x), \quad (6)$$

из (4) легко получить следующее уравнение относительно функции

$$xv''(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right)v'(x) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\sigma^2}{4v\beta}\right)v(x) = 0. \quad (7)$$

Это известное уравнение Куммера. Его решение записывается через вырожденные гипергеометрические функции в виде

$$v(x) = C_1 F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\sigma^2}{4v\beta}, \frac{1}{4}, x\right) + C_2 F_2\left(\frac{3}{4} - \frac{\sigma^2}{4v\beta}, \frac{3}{2}, x\right)x^{1/2}. \quad (8)$$

Из (6) и (8) следует, что условие конечности функции $\Phi(r)$ при $r \rightarrow \infty$ приводит к следующему ограничению на аргументы функций F_1 и F_2 :

$$\frac{1}{4} - \frac{\sigma^2}{4v\beta} = -n_r', \quad n_r' = 0, 1, 2, \dots; \quad (9)$$

$$\frac{3}{4} - \frac{\sigma^2}{4v\beta} = -n_r'', \quad n_r'' = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Разрешая (9) и (10) относительно E , можно найти формулы для дискретного энергетического спектра решений уравнения (4) в виде:

$$E_{1;2} = (m + \sqrt{m^2 + 16(n_r' + 1; 3)^2 \beta^2})^{1/2}. \quad (11)$$

Объединяя формулы (11) в одну, для случая равных масс ($m_1 = m_2 = \mu$) получим

$$E = 2\sqrt{\beta(2n_r + 1)}, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Формулу (12) можно получить также путем исследования квазиклассического решения уравнения (4) для равных масс.

Условие ВКБ-квантования для (4) имеет вид:

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (13)$$

где

$$p(r) = \sqrt{\sigma^2 - (\mu + \beta r)^2}, \quad (14)$$

r_1 и r_2 — две классические точки поворота, являющиеся действительными решениями уравнения:

$$\sigma^2 - (\mu + \beta r)^2 = 0. \quad (15)$$

Из (15) имеем:

$$r_1 = (E - 2\mu)/(2\beta), \quad r_2 = -(E + 2\mu)/(2\beta). \quad (16)$$

Теперь легко получить:

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = \frac{E^2 \pi}{8\beta}. \quad (17)$$

Сравнивая (17) с (13), получаем формулу (12).

Требование положительности r налагает, как следует из (16), на E условие $|E| > 2\mu$. Отметим, что полученные результаты справедливы при условии применимости квазиклассического приближения:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\sqrt{E^2 - 4x}} \right) \ll 1. \quad (18)$$

Как показано в [4], в случае притягивающего кулоновского потенциала дискретный спектр энергий лежит в интервале $(0, 2\mu)$. В рассматриваемом нами случае отталкивающего линейного потенциала — в интервале $(2\mu, \infty)$. Отметим, что в области, где потенциал (3) существует, т. е. при больших r , выполняется условие $E \gg 2\mu$, что находится в согласии с условием (18).

В [5, 6] отмечено, что уравнение Клейна — Гордона с линейным потенциалом приводит к эффекту просачивания частиц через потенциальный барьер, т. е. к отсутствию запираания кварков. В рассматриваемом нами уравнении (4) этого не происходит. Действительно, коэффициент прохождения в ВКБ-приближении для нашего случая имеет вид:

$$T = \exp\left(-\frac{E^2\pi}{8\mu}\right). \quad (19)$$

Коэффициент прохождения не зависит от масс составляющих частиц и связан только с энергией и постоянной взаимодействия. При условии применимости квазиклассического приближения, т. е. при $E \gg 2\mu$, очевидно, что T стремится к нулю, т. е. при переходе от $r = 0$ к $r = \infty$ не происходит просачивания кварков через потенциальный барьер. Следовательно, линейный потенциал в области применимости ВКБ-приближения приводит к запираанию составляющих частиц.

Итак, показано, что для составной фермион-антифермионной системы равных масс с полным спином $J = 0$ наличие скалярного линейного потенциала приводит к дискретному спектру энергий в области $(2\mu, \infty)$, в которой имеет место эффект запираания кварков.

Список литературы

1. Krolikowski W., Rzewuski J. // Nuovo Cimento. 1956. V. 4. P. 975.
2. Fischer J., Limic N., Niederle J., Rachca R. // Nuovo Cimento. 1968. V. 55A. P. 33.
3. Krolikowski W., Rzewuski J. // Acta Phys. Pol. 1975. B 7, 487.
4. Богущ А. А., Остапенко А. В., Толкачев Е. А. // Ядерная физика. 1980. Т. 31. С. 188.
5. Kang J. S., Schnitzer H. J. // Phys. Rev. 1975. V. D12. P. 841.
6. Ram B. // Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23. P. 321.

Поступила в редакцию 23.06.86.

УДК 535.012.2+621.373.038.824

Л. И. БУРОВ, И. И. ГАНЧЕРЕНКО

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ И ГЕОМЕТРИИ НАКАЧКИ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛАЗЕРА НА КРАСИТЕЛЕ С АНИЗОТРОПНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

При накачке поляризованным излучением активная среда лазера на красителе становится анизотропной. Это оказывает существенное влияние на энергетические, спектральные и временные характеристики генерируемого излучения [1]. Однако в [1] рассмотрен лишь частный вариант продольной накачки линейно поляризованным излучением в пренебрежении вращательной релаксацией молекул, что соответствует сильно-вязкому растворителю в случае лазеров на красителях. Настоящая работа посвящена исследованию влияния поляризации и геометрии накачки на энергетические параметры жидкостного ОКГ в произвольном случае.

В качестве энергетической характеристики лазера будем рассматривать разность коэффициентов усиления и потерь ϵ . Для ее нахождения воспользуемся матричным методом. Как и в [1], матрицы будем записывать в прямоугольной системе координат, определяемой главными направлениями полного поляризатора, расположенного в резонаторе лазера. Тогда изменение амплитуды линейно поляризованной волны после полного обхода резонатора находится из равенства [1]

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix} = R_1 R_2 P(1, 0) \{ \kappa(-\varphi) \hat{L} \kappa(\varphi) \}^2 P(1, 0) \begin{pmatrix} E_{\parallel 0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $E_{\alpha 0}$ и E_{α} — амплитуды волн в начале и после обхода резонатора

вдоль направления пропускания поляризатора ($\parallel$) и перпендикулярного ему ($\perp$); $P(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица Джонса для полного поляризатора; $\kappa(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ — матрица поворота системы на угол φ ; R_1, R_2 —

амплитудные коэффициенты отражения зеркал резонатора; $\hat{L}$ — матрица активной среды, которая в приближении малого насыщения имеет вид [2]:

$$\hat{L} = \hat{I} + \lambda \hat{S}. \quad (2)$$

Здесь $\hat{I} = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ — оператор плоскости, ортогональной $\mathbf{n}$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления оси резонатора; точка означает диадное произведение; λ — малый параметр, линейно зависящий от интенсивности поля накачки [3]; $\hat{S}$ — тензор светоиндуцированной анизотропии, явный вид которого представлен в [4].

В дальнейшем предположим, что частоты накачки ω_n и генерации ω_r удовлетворяют условию $|\omega_n - \omega_r| > \gamma_1; \gamma_2^*$ (γ_1 и γ_2 — скорости продольной и поперечной релаксаций соответственно), что позволяет пренебречь вкладом в нелинейную восприимчивость низкочастотных резонансов [5] и существенно упростить вид тензора S [4]. В этом случае его можно записать следующим образом:

$$\hat{S} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1} + \hat{S}_0 \right), \quad (3)$$

где γ_3 — скорость вращательной релаксации, а тензор $\hat{S}_0$ при выполнении условий симметрии Клейнмана имеет вид [8]

$$\hat{S}_0 = \hat{I} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* + \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{a} = [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{e}]]$; $\mathbf{e}$ — вектор поляризации волны накачки.

Из равенства (1) с учетом (2) — (4) для изменения интенсивности ($I = |E|^2$) волны после полного обхода резонатора в линейном по параметру λ приближении получаем

$$I = R_1^2 R_2^2 [1 + 4 \operatorname{Re} \lambda (\cos^2 \varphi A + \sin^2 \varphi B)] I_0 = k I_0, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left[\frac{\gamma_3}{\gamma_1} + \left(1 + \frac{2(1 - |\mathbf{n}\mathbf{e}|^2)}{1 + \eta^2} \right) \right], \quad (6)$$

$$B = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left[\frac{\gamma_3}{\gamma_1} + \left(1 + \frac{2\eta^2(1 - |\mathbf{n}\mathbf{e}|^2)}{1 + \eta^2} \right) \right], \quad (7)$$

η — степень эллиптичности вектора $\mathbf{a}$; $k = \exp(2\varepsilon l)$; l — длина активной среды.

Как видно из выражения (5), в линейном по интенсивности поля накачки приближении фазовая анизотропия ($\operatorname{Im} \lambda$) не вносит дополнительных потерь, которые приводят к немонотонности в зависимости энергии генерации от угла φ [1] (φ — угол между направлениями большой оси эллипса $\mathbf{a}$ и пропускания поляризатора). С другой стороны, данное приближение хорошо работает при небольшом превышении накачки над пороговой [1, 9], при котором, как правило, выполняется условие малого насыщения.

Зависимость ε от геометрии и поляризации накачки отражена в выражениях (6) и (7). Из них следует, что энергия генерации лазера на красителе с полным поляризатором внутри резонатора не зависит от угла φ при круговой поляризации вектора $\mathbf{a}$ ($\eta = \pm 1$) либо при линей-

* В условиях эксперимента [1] $|\omega_n - \omega_r| \simeq 10^{14}$ Гц $> \gamma_1; \gamma_2$, которые для криптона-нинового красителя имеют порядок $5 \cdot 10^{10}$ Гц [6] и 10^{13} Гц [7] соответственно.

ной поляризации волны накачки ($[\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*] = 0$) с ориентацией вдоль оси резонатора ($|\mathbf{a}| = 0$).

В заключение проанализируем два частных, но наиболее распространенных варианта геометрии жидкостного ОКГ.

Продольная накачка. Поскольку теперь $\mathbf{a} = \mathbf{e}$, то η имеет прямой физический смысл как степень поляризации излучения накачки. Тогда при линейной поляризации поля накачки ($\eta = 0$) для параметров A и B имеем

$$A = \frac{3\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3}, \quad B = 1. \quad (8)$$

Из (5) и (8) следует, что увеличение скорости вращательной диффузии молекул должно приводить к уменьшению разности энергий генераций при $\varphi = 0$ и 90° , что и наблюдалось экспериментально [1] для лазера на криптоаниновом красителе при замене этиленгликолевого растворителя на этанольный.

Поперечная накачка. В этом случае $\eta \equiv 0$ независимо от поляризации излучения накачки. В результате вариант, когда $|\mathbf{ne}| = 0$, аналогичен случаю продольной накачки с линейной поляризацией.

Таким образом, предложенный подход позволяет качественно описать зависимость энергии генерации лазера на красителе от поляризации и геометрии оптической накачки. Полученные результаты коррелируют с известными в литературе экспериментальными данными.

Список литературы

1. Войтович А. П., Калинов В. С. // ЖПС. 1983. Т. 39. С. 25.
2. Ильюшенко Н. В., Свирина Л. П., Севериков В. Н. // Препринт ИФ АН БССР № 340. Минск, 1984.
3. Буров Л. И., Ганчеренок И. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 1. С. 61.
4. Буров Л. И., Воропай Е. С., Ганчеренок И. И., Саечников В. А. // Опт. и спектр. 1986. Т. 61. С. 64.
5. Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М., 1981.
6. Duguaу M. A., Hansen J. W. // Opt. comm. 1969. V. 1. P. 254.
7. Yajima T., Souma H., Ishida Y. // Phys. Rev. A. 1978. V. 17. P. 324.
8. Буров Л. И., Ганчеренок И. И. // Опт. и спектр. 1986. Т. 60. С. 567.
9. Ярошенко О. И., Рудик К. И. // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. С. 416.

Поступила в редакцию 16.06.86.

УДК 629.7.028.6

А. К. ЕВСЕЕНКО, И. М. ПОЛЕЩУК

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АНТЕННЫХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Традиционные методы измерений характеристик обтекателей антенн СВЧ основаны на сравнении диаграмм направленности защищенной и незащищенной антенн и делятся на два класса [1]: измерения в дальней и измерения в ближней зоне. Недостатки этих методов: узкополосность, необходимость проведения экспериментов в условиях специализированных полигонов или безэховых камер и большие затраты времени при измерениях.

Предлагается метод экспериментальных исследований характеристик антенных обтекателей, использующий импульсные измерения во временной области.

Применение коротких облучающих импульсов (длительность импульса должна быть меньше времени распространения энергии между излучающей антенной и облучаемым предметом) позволяет оценивать такие характеристики обтекателей, как внутренние отражения и переотражения, локальные неоднородности и т. п. Если спектр облучающего импуль-

са достаточно велик, возможно быстрое получение серии диаграмм направленности системы «антенна — обтекатель», а следовательно, и характеристик обтекателя в широком диапазоне частот. Значение принятого сигнала для различных положений исследуемой антенны под обтекателем можно интерпретировать как частотную передаточную характеристику обтекателя. Связав ее с пространственной передаточной характеристикой обтекателя [2], мы получим универсальный интегральный оператор, позволяющий описать влияние обтекателя на укрываемую антенну независимо от ее типа.

Внутренние отражения определяются по следующей методике. Приемная и передающая антенны ориентируются главными лепестками друг на друга, и передающая антенна укрывается исследуемым обтекателем. Расстояние между антеннами выбирается в три — пять раз больше высоты исследуемого обтекателя. За счет разности хода прямых прошедших импульсных сигналов и сигналов после отражений и переотражений возможна обработка этих сигналов отдельно друг от друга и, следовательно, оценка как прошедших, так и отраженных сигналов. Просканировав обтекатель при неподвижных антеннах, получим характеристику, выражающую зависимость энергии, отраженной внутрь обтекателя, от угла сканирования в широком диапазоне частот.

Для оценки отражений энергии обратно в антенну приемлем метод временного окна для системы «передающая антенна — исследуемый обтекатель», поскольку возможно выделение интересующего импульсного сигнала, пришедшего обратно в антенну, в заданном временном окне.

Время-импульсные методы позволяют также определять локальные неоднородности структуры материала обтекателя непосредственно при измерении параметров системы «антенна — обтекатель» методами антенных измерений.

Все характеристики обтекателей могут быть определены без использования дорогостоящих безэховых камер благодаря выделению исследуемых сигналов в заданном временном окне.

Извлечение полезной информации из принятого временного сигнала требует больших затрат вычислительных ресурсов (времени и объема памяти), и использование время-импульсных методов для исследования характеристик антенных обтекателей стало возможным лишь с появлением высокопроизводительных микро-ЭВМ.

Применение время-импульсных методов для определения характеристик обтекателей даст возможность значительно расширить число измеряемых параметров в широком диапазоне частот, значительно уменьшив при этом время получения результатов.

Список литературы

1. Пригода Б. А., Кокунько В. С. Обтекатели антенн летательных аппаратов. М., 1978.
2. Замятин В. И., Ключников А. С., Швец В. И. Антенные обтекатели. Минск, 1980.

Поступила в редакцию 16.02.87.

УДК 517.948

И. Н. ЗАБЕЛЛО

РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ ОДНОГО МАТРИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим матричное интегральное уравнение

$$A \int_{-1}^x \varphi(t) dt + B \int_x^1 \varphi(t) dt + \frac{C}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |x - t| \varphi(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $A = -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = 2 \operatorname{cth} \mu \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = \frac{1}{2\pi} \ln(3 - 4\nu)$, $0 < \nu < 1/2$, $f(x) = \left(0, -\frac{2}{\pi} \operatorname{cth} \mu \pi g(x)\right)^T$, $g(x)$ — вещественнозначная функция.

К уравнениям такого типа сводятся плоские контактные задачи теории ползучести при наличии сил сцепления или трения [1, 2]. В указанных работах дан приближенный метод решения уравнения вида (1). В настоящей работе дается решение матричного уравнения (1) в замкнутой форме. При этом используется развитый в работе [3] метод решения систем интегральных уравнений I рода с логарифмическими ядрами.

Сохраняя обозначения из [3], вектор-решение $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ будем искать в классе H_*^n , считая, что $f(x) \in C_*^{1,n}$ ($n = 2$). Учитывая, что $\det(A - B) \neq 0$, и используя методику работы [3], введем

$$\mu_j = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{1 + i\lambda_j}{1 - i\lambda_j}, \quad j = 1, 2,$$

где через λ_j обозначены собственные значения матрицы $(A - B)^{-1}C$. Поскольку здесь $\lambda_1 = -\lambda_2 = -i \operatorname{cth} \mu \pi$, то $\mu_1 = 1/2 + i\mu = 1/2 + \gamma$, $\mu_2 = \frac{1}{2} - i\mu = 1/2 - \gamma$, что соответствует неосциллиационному случаю. Сводя матричное уравнение (1) к системе двух сингулярных интегральных уравнений [3], преобразованная каноническая матрица которой имеет диагональную форму с элементами

$$Z_j(x) = (1+x)^{\mu_j} (1-x)^{1-\mu_j}, \quad (2)$$

и решая ее, получим, что для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{Z_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Таким образом, если вещественнозначная функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (3), то уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, компоненты которого определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2i}{\pi} \operatorname{ctg} \gamma \pi g'(x) + \frac{i \operatorname{ctg}^2 \gamma \pi}{\pi^2 Z_2(x)} \int_{-1}^1 \frac{Z_2(t) g'(t) dt}{t-x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \operatorname{ctg}^2 \gamma \pi}{\pi^2 Z_1(x)} \int_{-1}^1 \frac{Z_1(t) g'(t) dt}{t-x} \right\}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma \pi}{\pi^2 Z_2(x)} \int_{-1}^1 \frac{Z_2(t) g'(t) dt}{t-x} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma \pi}{\pi^2 Z_1(x)} \int_{-1}^1 \frac{Z_1(t) g'(t) dt}{t-x} \right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \frac{i}{2\pi} \ln(3 - 4\nu)$, $Z_j(x)$ определяются формулами (2).

Список литературы

1. Попов Г. Я. // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1963. Т. 16. № 2. С. 15.
2. Манукян М. П. // Изв. АН АрмССР. Сер. мех. 1969. Т. 22. № 3. С. 52.
3. Забелло И. Н. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 2. С. 47.

Поступила в редакцию 27.03.86.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ СДВИГАМИ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ

Решения линейного функционального уравнения с несколькими сдвигами внутрь области, имеющими одну неподвижную точку (см. [3]), с аналитическими коэффициентами

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n G_k(z) \varphi[h^k z] + g(z), \quad |z| \leq 1, \quad |h| < 1 \quad (1)$$

в классе аналитических функций являются решениями задачи сопряжения с несколькими сдвигами

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n G_k(t) \varphi[h^k t] + g(t), \quad |t| = 1 \quad (2)$$

и гильдеровскими коэффициентами $G_k(t)$, $g(t)$, причем будем предполагать, что $G_n(e^{i\theta}) \neq 0$.

Для решения задачи (2) введем в кольце $|h| < |z| \leq 1$ новые неизвестные функции $\Phi_k(z) = \varphi[h^{k-1}z]$, $k = \overline{1, n}$. Продолжим функции $\Phi_k(z)$ внутрь круга $|z| \leq |h|$ по формуле $\Phi_k(hz) = \Phi_k(z)$; таким образом, функции $\Phi_k(z)$ автоморфны относительно бесконечной циклической группы, порожденной преобразованием $T: z \mapsto hz$ (см. [2]). С учетом этого задача сопряжения (2) переходит в векторно-матричную задачу Римана для n пар функций на римановой поверхности, гомеоморфной тору (см. [2])

$$\Phi^+(t) = A(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad |t| = 1, \quad (3)$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} G_1(z) & G_2(z) & \dots & G_{n-1}(z) & G_n(z) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z))^T, \\ f(z) = (g(z), 0, \dots, 0)^T,$$

матрица которой невырождена ($\det A(t) = (-1)^{n-1} G_n(t) \neq 0$).

В случае постоянных коэффициентов G_k задача (3) легко решается путем домножения слева на матрицу трансформации S ($A = S^{-1}JS$, J — жорданова нормальная форма матрицы A). Для вектор-функции $\Psi(z) = S\Phi(z)$, составляющие которой также являются автоморфными относительно группы T , получаем задачу $\Psi^+(t) = J\Psi^-(t) + S f(t)$, $|t| = 1$ с треугольной матрицей. Эта задача решается непосредственно по формулам, приведенным в [1] и [2], тем самым находится решение уравнения (1) в кольце $|h|^n < |z| \leq 1$. Продолжение этого решения внутрь круга $|z| \leq |h|^n$ всегда возможно ($G_n \neq 0$) по формуле

$$\varphi[h^{n+1}z] = \frac{1}{G_n} \left(\varphi[hz] - \sum_{k=1}^{n-1} G_k \varphi[h^{k+1}z] - g(hz) \right).$$

Справедлива (см. [3])

Теорема. Функциональное уравнение (1) имеет единственное решение в классе аналитических функций, если для любого целого m , $\sum_{k=1}^n G_k(0) h^{mk} \neq 1$. Если же для $m_1, \dots, m_p$ $\sum_{k=1}^n G_k(0) h^{m_k k} = 1$, то при выполнении p условий разрешимости $\int_L g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{m_s+1}} = 0$ решение уравнения (1) существует и зависит от p произвольных комплексных постоянных.

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (1) может иметь и различные сдвиги h_1 и h_2 ; необходимо лишь, чтобы существовало рациональное число p/q , $h_1 = h_2^{p/q}$, тогда размерность задачи (3) равна pq .

З а м е ч а н и е 2. Подобным способом можно решить уравнение (1) и в некоторых случаях переменных коэффициентов.

Список литературы

1. Зверович Э. И., Крушевский Е. А., Митюшев В. В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 43.
2. Крушевский Е. А. Краевые задачи с разрывными коэффициентами для кольца // Редкол. ж. «Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». Минск, 1986. 23с. Деп. в ВИНТИ 11.04.86. № 2619-B86.
3. Митюшев В. В. О решении общей краевой задачи линейного сопряжения для нескольких concentрических окружностей / Редкол. ж. «Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». Минск, 1983. 10 с. Деп. в ВИНТИ 29.04.83. № 2279-83.

Поступила в редакцию 26.06.86.

УДК 517.948.32

Г. В. ГРИНКЕВИЧ

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ФУНКЦИЕЙ САРАНА F_M В ЯДРЕ

Рассмотрим следующее двумерное интегральное уравнение Вольтера первого рода:

$$\frac{1}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)} \int_0^x \int_0^y (x-u)^{c_1-1} (y-v)^{c_2-1} F_M(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; \frac{v-y}{u+v}, \frac{u-x}{u}, \frac{u-x}{u+v}) f(u, v) dudv = g(x, y); \quad (1)$$

$\operatorname{Re} c_1, \operatorname{Re} c_2, \operatorname{Re}(a_2 - b_2), \operatorname{Re}(b_1 - a_1 - a_2) > 0; 0 \leq x \leq d < \infty, 0 \leq y \leq d' < \infty$. Здесь $g(x, y)$ — заданная, $f(x, y)$ — искомая функции, а $F_M(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$ — гипергеометрическая функция Сарана [1, 2]. Функцию $f(x, y)$ будем искать в классе функций, для которых $(x+y)^q x^r f(x, y) \in L = L((0, d) \times (0, d'))$. В дальнейшем этот класс обозначим $R_{q,r}$. Через $I_{x,y}^{v,v'}$ обозначим оператор двумерного дробного интегриродифференцирования [3, 4], а через $I_{x,y}^{v,v'}(P)$ — образ некоторого пространства функций P после действия оператором $I_{x,y}^{v,v'}$.

Для следующего уравнения

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(y-v)^{\gamma'-1}}{\Gamma(\gamma')} \left(\frac{u+v}{x+y} \right)^\alpha \left(\frac{u}{x} \right)^\beta \mu(x, y, u, v) f(u, v) dudv = g(x, y); \quad (2)$$

$\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \gamma' > 0, x \in [0, d], y \in [0, d'], 0 < d, d' < \infty$, справедлива

Теорема 1. Если функция $\mu(x, y, u, v)$ дифференцируема n раз по x и n' раз по y , где $n = [\operatorname{Re} \gamma] + 1, n' = [\operatorname{Re} \gamma'] + 1$, и все эти смешанные производные ограничены, а $\mu(x, y, x, y) \neq 0$, то уравнение (2) тогда и только тогда имеет решение $f(x, y) \in R_{q,r}, q < \min(0, \operatorname{Re} \alpha), r < \min(0, \operatorname{Re} \beta)$, когда $g(x, y) \in I_{x,y}^{v,v'}(R_{q,r})$. Причем решение это единственно.

Уравнение (1) является частным случаем более общего уравнения (2), при $\gamma = c_1, \gamma' = c_2, \alpha = b_1, \beta = b_2$ и $\mu(x, y, u, v) = F_M(c_1 - a_1,$

$c_2 - a_2, c_2 - a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; \frac{y-v}{x+y}, \frac{x-u}{x}, \frac{x-u}{x+y}$), поэтому для него имеет место

Теорема 2. Интегральное уравнение (1) тогда и только тогда имеет решение $f(x, y) \in R_{q,r}$, $q < \min(0, \operatorname{Re} b_1)$, $r < \min(0, \operatorname{Re} b_2)$, когда $g(x, y) \in I_{x,y}^{c_1, c_2}(R_{q,r})$. При этом решение единственно.

Вид решения уравнения (1) определяется теоремой

Теорема 3. Если $\operatorname{Re} a_1, \operatorname{Re} a_2 > 0$ и $g(x, y) \in I_{x,y}^{c_1, c_2}(R_{q,r})$, где q и r удовлетворяют условиям теоремы 2, то уравнение (1) обращается по следующей формуле:

$$f(x, y) = x^{-b_2}(x+y)^{-b_1} I_{x,y}^{-a_1, -a_2} x^{b_2}(x+y)^{b_1} I_{x,y}^{a_1-c_1, a_2-c_2} g(x, y). \quad (3)$$

Список литературы

1. E x t o n H. Multiple Hypergeometric Functions and Applications.— Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1976.
2. K a r l s s o n W. // Math. Scand. 1974. V. 34. P. 243.
3. M o u r y a D. P. // Proc. Indian Acad. Sci. 1970. A72. N 4. P. 173.
4. R a i n a R. K. // Indian J. Pure and Appl. Math. 1984. V. 15. N 5. P. 510.

Поступила в редакцию 02.10.86.

УДК 519.633

Е. В. РАДКЕВИЧ

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПЕРВОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

В статье предлагаются разностные схемы с расширенной областью устойчивости. Построено и исследовано первое дифференциальное приближение.

В области $Q = (G \cup \Gamma) \times [0 \leq t \leq T]$, $G(0 < x_n < l_n)$, $n = \overline{1, p}$, Γ — граница области G , рассмотрим следующую граничную задачу для уравнений Бюргерса:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^p u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} = \mu \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_k^2}, \quad n = \overline{1, p}, \quad \mu > 0, \quad (1)$$

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x), \quad u_n|_{\Gamma} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_p).$$

На сетке ω_h^α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $h = (h_1, \dots, h_p)$, $\tau = \frac{h_p}{\alpha_h}$ предлагается разностная схема (приняты обозначения из [1, 2]):

$$\begin{aligned} & \tau^{-1} \left(\hat{y}_n - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{n, i_k - s_k} \right) + \sum_{k=1}^p (\sigma_{1,k} (\hat{y}_k^+ \hat{y}_{n, \bar{x}_k, i_k} + \\ & + \hat{y}_k^- \hat{y}_{n, x_k, i_k}) + (1 - \sigma_{1,k}) (y_k^+ y_{n, \bar{x}_k, i_k - s_k} + y_k^- y_{n, x_k, i_k - s_k})) = \\ & = \mu \sum_{k=1}^p (\sigma_{2,k} \hat{y}_{n, \bar{x}_k, x_k, i_k} + (1 - \sigma_{2,k}) y_{n, x_k, x_k, i_k - s_k}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $y_{n, i_k - s_k} = y_{n, i_1, \dots, i_k - s_k, \dots, i_p}$, $s_k = \operatorname{sign} y_k$, $y_k^\pm = (y_k - 1/ps_k \alpha_k \pm |y_k - 1/ps_k \alpha_k|)/2$.

Теорема. Если $\sigma_{1,k} = 0$, $\sigma_{2,k} = 1$ и выполняется условие $\alpha_k \geq 0,5 p \mu_{\max}$, то разностная схема (2) устойчива и справедливо неравен-

ство $\|\hat{y}_h\|_C \leq \|y_h\|_C$, где $u_{k\max} = \max_{x,t} |u_k|$, $\|\cdot\|_C$ — сеточный аналог нормы C , $k = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство теоремы проводится мажорантным методом.

Проведенный в [3, 4] анализ свойств разностных схем различного порядка аппроксимации показал, что наиболее характерные свойства приближенных решений определяются в основном слагаемыми, содержащими производные u_{xx} , u_{xxx} для схем первого и второго порядков соответственно. Схема (2) имеет порядок аппроксимации $O(h + \tau)$, поэтому для качественной демонстрации влияния аппроксимационной вязкости [5] рассмотрим первое дифференциальное приближение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^p u_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k} &= \sum_{k=1}^p (\mu + \tilde{\mu}_k) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_k^2}, \quad s_{1,k} = \text{sign} \left(u_k - \frac{1}{p} s_k \alpha_k \right), \\ \tilde{\mu}_k &= 0,5\tau (|u_k| (\alpha_k - |u_k|) + \alpha_k s_k (s_{1,k} s_k + 1) \left(u_k - \frac{1}{p} s_k \alpha_k \right)). \end{aligned} \quad (3)$$

Выбором α_k можно регулировать значения μ_k . Так, например, $\tilde{\mu}_k = 0$ при $\alpha_k = 0,5p \max_{x,t} |u_k| (3 + \sqrt{9 - 8/p})/2$. Отметим, что при $p = 1$ $\tilde{\mu}_1 = 0$, если $\alpha_1 = 0,5 \max_{x,t} |u|$ или $\alpha_1 = \max_{x,t} |u|$.

В качестве теста рассмотрена задача (1) при $p = 2$ со следующими начальными значениями: $u_1(x_1, x_2, 0) = 2 \sin(\pi x_1/2) \sin(\pi x_2)$, $u_2(x_1, x_2, 0) = \cos^2(\pi \eta)$, $\eta = \sqrt{(0,5(x_1 - 1))^2 + (x_2 - 0,5)^2}$, $0 \leq x_1 \leq 2$, $0 \leq x_2 \leq 1$.

Численные расчеты проводились с использованием схемы (2) и разностной схемы

$$\begin{aligned} \tau^{-1} (\hat{y}_n - y_n) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p y_k ((s_k + 1) y_{n, \bar{x}_k, i_k} - \\ - (s_k - 1) y_{n, x_k, i_k}) = \mu \sum_{k=1}^p \hat{y}_{n, \bar{x}_k, x_k, i_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

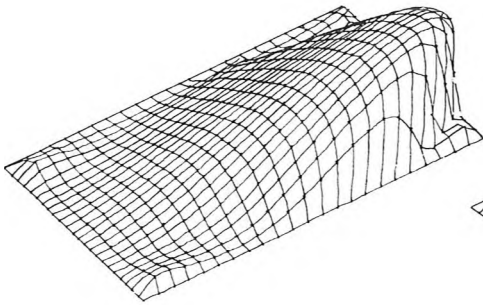


Рис. 1

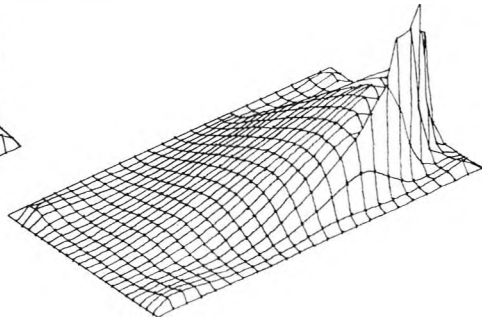


Рис. 2

На рис. 1 и 2 показаны результаты, полученные по схемам (2) и (4) при значениях параметров $\mu = 0,001$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

Разностная схема (2) позволяет получить достаточно точные результаты при крупных шагах сетки и малых значениях μ при относительно несложной реализации, так как нелинейные конвективные члены вычисляются на нижнем временном слое ($\sigma_{1,k} = 0$). Схема (4) при таких же параметрах дает сильно осциллирующее решение.

Список литературы

1. Абрашин В. Н., Муха В. А. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1264.
2. Радкевич Е. В. // Материалы республ. науч. совещ.: Применение матем. методов и вычислит. техники при решении народно-хозяйств. задач. Гомель, 1986. С. 68.
3. Мухин С. И., Попов С. Б., Попов Ю. П. Препринт № 150 / ИМП имени М. В. Келдыша. М., 1981.
4. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. // ЧММСС. 1980. Т. 11. № 1. С. 85.
5. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. // Докл. АН БССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 280.

Поступила в редакцию 19.06.86.

УДК 621.325

С. Ю. ЛОШКАРЕВА

О ЧИСЛЕ ПАКЕТОВ МАКСИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ В Ω -СЕТИ

Рассматривается система коммутации, известная под названием Ω -сети [1—3]; Ω — сеть D_l , связывающая $N = 2^l$ входных и выходных полюсов, состоит из $\log_2 N$ каскадов, в каждом из которых имеется $\frac{N}{2}$ узлов — двоичных коммутаторов. Путь от входного коммутатора p к выходному коммутатору q определяется двоичным разложением чисел p и q [3, 4]. Функционирование Ω -сети в рассматриваемой модели определяется следующим образом [5].

1. На входы Ω -сети подается пакет сигналов π , определяемый подстановкой $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 2^l - 1 \\ i_0 & i_1 & \dots & i_{2^l - 1} \end{pmatrix}$, где число i_p указывает номер выходного по-

люса для сигнала, поступившего на p -й входной полюс сети. Таким образом, π есть подстановка номеров адресов и не зависит от конкретного набора сигналов, поэтому задача рассматривается для некоторого фиксированного набора из 0 и 1 длины 2^l ; (p, i_p) называем далее связью из пакета π ; при этом разные сигналы могут быть адресованы одному полюсу, т. е. подстановка может быть вырожденной.

2. В случае, когда два сигнала направляются одновременно в один и тот же выходной полюс q коммутатора u , приоритет прохождения имеет сигнал, пришедший с q -го входного полюса u ; блокируемый сигнал освобождает занятый им путь.

3. Часть связей, не реализованная в j -ом такте работы пакета по тем же правилам начинает реализовываться в $j + 1$ -ом такте.

Определение 1. Пучком связей X длины T назовем множество связей $X = \{s_1, \dots, s_T\}$ такое, что связь s_j проходит сеть D_l в j -й такт работы пакета π , s_j блокирует s_{j+1} .

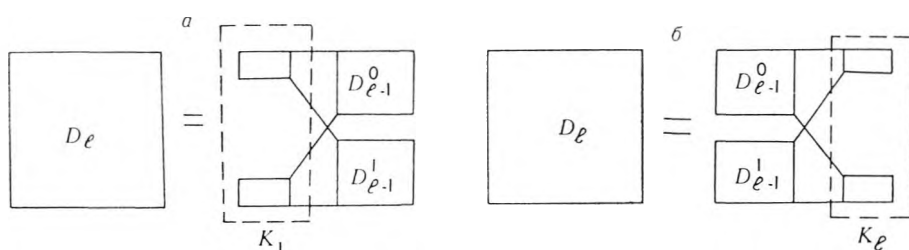
Очевидно, что число тактов прохождения пакета π через Ω -сеть D_l равно максимальной длине пучков связей в π .

Легко видеть, что максимальная длина пучков связей в D_l равна 2^l . Для этого достаточно все сигналы адресовать одному выходу сети. В [3] была доказана следующая

Лемма 1. Ω -сеть D_l размерности 2^l можно представить в виде схемы, изображенной на рисунке (а).

Следствие 1. Ω -сеть D_l можно представить в виде схемы (б). Здесь K_l, K_i — каскады из 2^{l-i} параллельно соединенных двоичных коммутаторов, D_{l-1} — Ω -сети размерности 2^{l-1} .

Подсчитаем число пучков максимальной длины следующим образом: имея две схемы D_{l-1} с их максимальными пучками, опишем такое их соединение в схему D_l (согласно рисунку (б)), чтобы получить один максимальный пучок для D_l . Из строения сети и вырожденности π следует, что все максимальные пучки могут быть получены таким способом.



Предложение 1. Не менее $2^{l-1} + 1$ первых связей максимального пучка в D_l адресовано одному выходу.

Доказательство следует из того, что, согласно строению сети [3, 5], максимальное число связей, пришедших в коммутатор и каскада K_j , равно 2^j , и для задержки связей, пришедших с одного входа u , достаточно задержать первую из них.

Теорема 1. Число пакетов, проходящих сеть D_l за 2^l тактов, равно 2^{2^l-1} .

Доказательство. Для сети D_1 , состоящей из одного каскада, есть 1 пучок длины 2, первые связи которого проходят через фиксированный выход сети. Рассмотрим сеть D_2 . Согласно рисунку (б), в коммутатор и каскада K_2 придут 4 связи (по 2 на каждый входной полюс u). По предложению 1, чтобы получить пучок связей длины 4, достаточно адресовать связи, пришедшие с q -го входного полюса u , q -му выходному полюсу u и туда же направить первую из связей, пришедших с q -го входного полюса u . Таким образом, в образовавшемся пучке длины 4 последние связи могут пойти по выходу q коммутатора u , отличному от того, по которому пошли первые связи, т. е. m_2 связей могут отделиться от основного выхода. В K_2 , $0 \leq m_2 \leq 1$, по основному выходу пойдут $2^2 - m_2$ связей пучка. Для сети D_3 в K_3 могут отделиться m_3 связей, $0 \leq m_3 \leq 2^2 - m_2 - 1$, причем для каждого m_3 есть $\binom{2^2 - m_2 - 1}{m_3}$

набора отделившихся связей. У связей, отделившихся от основного выхода в K_j , есть $2^{(l-j)m_j}$ вариантов путей до выхода их из D_l .

Введя обозначение $p_j = 2^{j-1} - m_{j-1} - \dots - m_2 - 1$, получим, что число пакетов максимальной длины, первые связи которых проходят через один выходной полюс сети D_l , равно

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m_2=0}^{p_2} \binom{p_2}{m_2} 2^{(l-2)m_2} \right) \times \left(\sum_{m_3=0}^{p_3} \binom{p_3}{m_3} 2^{(l-3)m_3} \right) \times \dots \times \\ & \times \left(\sum_{m_{l-1}=0}^{p_{l-1}} \binom{p_{l-1}}{m_{l-1}} 2^{m_{l-1}} \right) \times \left(\sum_{m_l=0}^{p_l} \binom{p_l}{m_l} \right) = \\ & = 2^{p_2 + (l-2)m_2} \times 2^{p_3 + (l-3)m_3} \times \dots \times 2^{p_{l-1} + m_{l-1}} \times 2^{p_l} = \\ & = 2^{2+2^2+\dots+2^{l-1}-l+1} = 2^{2^l-l-1}. \end{aligned}$$

Так как в D_l 2^l выходов, общее число пакетов максимальной сложности 2^l в сети D_l равно 2^{2^l-1} .

Список литературы

1. Golomb S. W. // SIAM Rev., Oct. 1961. V. 3. P. 293.
2. Офман Ю. П. // Тр. Московск. матем. об-ва. 1965. Т. 14. С. 186.
3. Butcher K. E. // Spring Joint Computer Conference. 1968. P. 307.
4. Горлов В. В., Шпаковский Г. И. // Модели информационных сетей и коммутационных схем. М., 1982. С. 129.
5. Лошкарёва С. Ю. // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. VIII Всесоюз. конференц. Иркутск, 1985. С. 125.

Поступила в редакцию 25.06.86.

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ КОКСА ВТОРОГО ПОРЯДКА

При рассмотрении систем обслуживания с повторными вызовами обычно предполагают, что входящий поток является простейшим [1] или простейшим с групповым поступлением вызовов [2]. В работе [3] получены производящие функции стационарного распределения состояний системы с эрланговским и квазигиперэкспоненциальным входящими потоками второго порядка. В данном сообщении рассматривается система обслуживания с входящим потоком Кокса второго порядка. Полученные результаты обобщают [3].

Пусть преобразование Лапласа — Стильтеса промежутка времени между моментами поступления первичных вызовов имеет вид

$$\alpha(s) = p + \bar{p}q \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \bar{p}\bar{q} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}, \quad (1)$$

где $\operatorname{Re} s \geq 0$, $\bar{p} = 1 - p$, $\bar{q} = 1 - q$, $0 \leq p, q \leq 1$; μ — интенсивность экспоненциального обслуживания; ν — интенсивность повторения.

Будем предполагать, что выполнено условие существования стационарного режима [3]: $\nu > 0$, $\lambda_1\lambda_2(\bar{p}\mu(\lambda_2 + \bar{q}\lambda_1))^{-1} < 1$.

Введем в рассмотрение стационарные вероятности состояний системы и их производящие функции: $p_i(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, C(t) = i\}$, $n \geq 0$,

$P_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(n)x^n$, $i = 0, 1$. Здесь для произвольного момента времени t обозначено: $N(t)$ — число источников повторных вызовов в системе, $N(t) = n$, $n = 0, \infty$, $C(t)$ — число обслуживаемых вызовов, $C(t) = i$, $i = 0, 1$.

Теорема. Функции $P_i(x)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= C \frac{\lambda_2\mu^2\bar{p} + \mu\lambda_1(\bar{q}\mu + \lambda_1 + \mu p q) + x\lambda_1(\lambda_1\mu\bar{p}\bar{q} - (\mu + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu\bar{p}))}{\lambda_2\mu^2\bar{p}} \times \\ &\times F(\alpha, \beta, \gamma; z(x)) - C \frac{g(x)\alpha\beta}{\lambda_2\mu^2\bar{p}\gamma(x_2 - x_1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(x)), \\ P_1(x) &= C \frac{\lambda_1(\mu + \lambda_1)}{\mu^2\bar{p}} F(\alpha, \beta, \gamma; z(x)) - \\ &- C \frac{\nu(\mu - \mu x - x\lambda_1)\alpha\beta}{\mu^2\bar{p}\gamma(x_2 - x_1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(x)), \end{aligned}$$

где $F(\dots; z)$ — гипергеометрическая функция, $z(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$, $\alpha = \lambda_1/\nu$, $\beta = (\nu + \lambda_2)/\nu$,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\nu)x_1}{\nu(x_2 - x_1)} + \frac{\mu(\lambda_2(\mu + \lambda_2) + \lambda_1(\mu\bar{q} + \lambda_1 + \mu p q) + \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu(1 + p)))}{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu(1 - \bar{p}\bar{q}) + (\lambda_2 + \mu)\mu p)(x_2 - x_1)}, \\ C &= \lambda_2\mu \left(\frac{\nu\alpha\beta}{\gamma(x_2 - x_1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; z(1)) + \right. \\ &\left. + (\mu + \lambda_1) F(\alpha, \beta, \gamma; z(1)) \right)^{-1} (\lambda_2 + \bar{q}\lambda_1)^{-1}, \end{aligned}$$

$$g(x) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu\lambda_1(1 - \bar{p}\bar{q}) + \lambda_2\mu p + \mu^2 p)x^2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu(1 + p)) \times x + \mu^2,$$

$x_1 < x_2$ — корни квадратного уравнения $g(x) = 0$.

Схема доказательства теоремы. Используем метод этапов Эрланга [4]. Тогда, в соответствии с (1), можно считать, что каждый первичный вызов либо с вероятностью p поступает в систему одновременно с предшествующим вызовом (имеет место групповое поступление, где с вероят-

ностью $p^{h-1}\bar{p}$ поступает k вызовов), либо с вероятностью $\bar{p}q$ проходит только один этап поступления, а с вероятностью $\bar{p}\bar{q}$ — два этапа. Длительность этапов поступления распределена по экспоненциальному закону с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Обозначим: $K(t)$ — номер этапа, на котором в момент времени t находится поступающий первичный вызов, $\omega(t) = (N(t), C(t), K(t))$ — однородный марковский процесс, описывающий функционирование системы. Введем стационарные вероятности состояний процесса $\omega(t)$ и их производящие функции:

$$p_i(n, k) = \lim P\{N(t) = n, C(t) = i, K(t) = k\}, n \geq 0,$$

$$P_{i,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(n, k) x^n, i = 0, 1; k = 1, 2.$$

Относительно вероятностей $p_i(n, k)$ составляем систему уравнений стохастического равновесия, затем переходим к соответствующей системе дифференциальных уравнений относительно функций $P_{i,k}(x)$. После несложных преобразований ее удастся свести к уравнению Гаусса, аналитическим решением которого в единичном круге является гипергеометрическая функция. Получив $P_{i,k}(x)$, окончательно имеем $P_i(x) = \sum_{k=1}^2 P_{i,k}(x)$, $i = 1, 2$.

Список литературы

1. Ф а л и н Г. И. // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1979. № 2. С. 107.
2. Ф а л и н Г. И. // Укр. мат. ж. 1976. Т. 28. № 4. С. 96.
3. Х о м и ч к о в И. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 51.
4. К л е й н р о к Л. Теория массового обслуживания. М., 1979.

Поступила в редакцию 02.12.86.

ЮРИЙ СТАНИСЛАВОВИЧ БОГДАНОВ



7 декабря 1987 г. после тяжелой болезни скончался доктор физико-математических наук профессор кафедры высшей математики БГУ имени В. И. Ленина Юрий Станиславович Богданов.

Ю. С. Богданов родился в 1921 г. в г. Великие Луки. После окончания с отличием математико-механического факультета Ленинградского государственного университета он работал в Ленинградском отделении Математического института АН СССР. С 1958 г. трудовая деятельность Ю. С. Богданова связана с БГУ имени В. И. Ленина, где он возглавлял кафедру общей математики, высшей математики и математической физики, высшей математики.

С первых шагов своей научной деятельности особое внимание Ю. С. Богданов уделял качественному исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Профессор Ю. С. Богданов один из создателей современной асимптотической теории этого класса уравнений. Ему принадлежат такие основополагающие принципиальные понятия, как коэффициент

неправильности Гробмана — Богданова, обобщенное преобразование Ляпунова — Богданова, асимптотическая эквивалентность линейных систем, характеристические нормы Ляпунова — Богданова, обобщенные vd -числа нелинейных систем. Ю. С. Богдановым получены в асимптотической теории и теории характеристических показателей замечательные результаты, наиболее значительные из которых: выяснение распределения решений линейной системы по характеристическим показателям; построение абстрактной теории норм Ляпунова — Богданова; получение критерия правильности линейной системы, состоящего в обобщенной ее приводимости; доказательство инвариантности характеристических показателей при специальных возмущениях системы; приведение всякой линейной системы к кусочно-постоянной с коэффициентами, принимающими лишь два значения. В его докторской диссертации введены аналоги характеристических показателей для нелинейных систем, с помощью которых построена теория исследования асимптотической устойчивости нелинейных систем, универсальная в том же смысле, в котором универсален второй метод Ляпунова. Этот метод Ю. С. Богданова еще ожидает своего детального изучения и последующего применения и развития.

Для Ю. С. Богданова характерно разнообразие научных интересов. Являясь одним из ведущих в стране специалистов по дифференциальным уравнениям, он получил также глубокие результаты по алгебре и теории функций. Ю. С. Богданов опубликовал около 100 научных статей и учебных пособий. Среди его учеников 40 докторов и кандидатов наук.

Широта научных взглядов Юрия Станиславовича проявилась и в его педагогической деятельности. Он читал лекции по фундаментальным математическим дисциплинам на всех естественных факультетах университета, разработал большое количество спецкурсов. Его педагогические воззрения нашли свое отражение в серии учебных пособий по математическому анализу и дифференциальным уравнениям, а также во многих работах методического характера.

Профессор Ю. С. Богданов был руководителем Республиканского научного семинара по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Республиканского межвузовского методического объединения преподавателей математики, заместителем ответственного редактора журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина», серия I, членом редколлегии всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения».

Светлая память о Юрии Станиславовиче Богданове, видном ученом-математике, талантливом организаторе, навсегда останется в сердцах всех, кто его знал.

УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в «Вестнике Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина», серия 1 (физика, математика и механика) в 1987 году

ФИЗИКА

Ананасевич А. П., Поликарпов И. В. Влияние ультразвука на резонансную и нерезонансную дифракцию в скользящей геометрии на тонком кристалле . . .	1	23
Ахмед Шах Бахтери, Тарасик М. И., Шварков Д. С., Янченко А. М. Применение одноосных нагрузок для изучения природы электрически активных дефектов в полупроводниках . . .	3	15
Барышевский В. Г., Черепица С. В. Аномальный случай динамической дифракции нейтронов в присутствии внешнего магнитного поля . . .	1	12
Боровков Г. И., Шарашкин С. Н. Текстура пузырьковых доменов в поляризованном свете . . .	2	6
Боровков Г. И. Определение направления вращения электрического вектора эллиптически поляризованного света интерференционным методом . . .	3	23
Бык А. П., Воропай Е. С., Гусенков С. Н., Ревинский В. В., Саечников В. А. Устройство сопряжения стробоскопических преобразователей напряжения В9-5 и мини-ЭВМ «СМ-3» . . .	3	34
Врублевский А. И., Кузовков П. В., Меженцев В. А. Анализ величин g -фактора галогенозамещенных 2, 4, 6-триарилпирильных радикалов . . .	3	29
Гайсенков В. А., Слободянюк А. И., Фохт Ш. Концентрационная деполяризация люминесценции при ступенчатом возбуждении . . .	2	22
Грубич А. О., Ле Тьен Хай. Параметрическое рентгеновское излучение с учетом многократного рассеяния заряженных частиц в кристаллах . . .	1	20
Гулич И. М., Саечников К. А., Цвирко В. А. Генерация перестраиваемых по длине волны сверхкоротких световых импульсов с высокой частотой повторения в резонаторе с малой базой . . .	3	26
Гурачевский В. Л., Машлан М., Пиви Пепе, Холмецкий А. Л., Чудаков В. А., Шпеньков Г. П. Изучение аустенита в поверхностном слое серого чугуна методом конверсионной мессбауэровской спектроскопии . . .	2	17
Демчук М. И., Денисенко В. Н., Иванов М. А. Сбор и обработка данных при анализе стохастических перекрывающихся потоков фотонов . . .	1	5
Дзагидзе М. Г., Муравский В. А. Расчет резонансного значения магнитного поля и ширины линии электронного парамагнитного резонанса в автоматизированном магнитно-резонансном радиоспектрометре . . .	1	18
Дорожкин Н. Н., Леонтьев А. В., Леонтьева Ю. С. Применение кубических сплайнов к расчету оптических функций по соотношению Крамерса — Кронига . . .	1	15
Казакевич Л. А., Лукаков П. Ф. Изменение параметров радиационных дефектов в дислокационном кремнии . . .	3	12
Камера М. С., Лукашевич М. Г. Влияние электрического поля на магниторезистивный эффект в германии при низких температурах . . .	1	8
Коваленко А. Н., Полецук И. М. Проектирование систем «антенна — РПУ» . . .	1	26
Комаров Ф. Ф., Новиков А. П., Ань Туан Хоанг. Учет особенностей экранирования при описании электрон-примесного взаимодействия в ковалентных кристаллах . . .	2	10
Коляда А. А. Метод знаковых чисел для формирования интегральных характеристик модулярного кода . . .	1	3
Лавренев А. Н. Калибровочные преобразования в ЕО-конверсии . . .	3	3
Лавриненко А. В., Рубанов А. С., Сташкевич И. В., Чалей А. В. Влияние аннотропии на дифракционные свойства системы «рельефная решетка — жидкий кристалл» . . .	2	19
Масленко Ю. С., Педченко О. М., Янчук В. В., Янчук В. А., Вавельский Б. Л. Переходные тепловые процессы в аппаратах высокого давления . . .	3	19
Миксюк Ю. И., Гулис И. М., Горбачевич С. К. Влияние межмолекулярных взаимодействий на реакцию фотопереноса протона в полярных растворах 3-метоксibenзантрона . . .	2	26
Пряхин А. Е., Оробей И. О., Файбышев А. Е., Минько И. Р. Релаксационные погрешности меточных ядерно-магнитных расходомеров при турбулентном течении жидкости . . .	3	31
Сидорук С. Н. Преобразователь «скорость — аналог» . . .	3	38
Тимощенко А. И. Общие свойства некоторых теорий тяготения с неполной геометризацией и теория Логанова — Власова . . .	2	3
Фо Тхи Нгуен Ханг. Тензоры нормальной рефракции и импеданса в оптике магнитных материалов . . .	2	13
Шишкин Г. В., Вильяльба В. Разделение переменных в уравнении Дирака во внешних скалярных полях . . .	3	6

Бураковский В. Н., Зеленков Н. И., Балыкина Е. Н. Специализированные средства диалога для автоматизированных обучающих систем	1	46
Гайшин И. В., Горячкин В. В. Построение решений одного класса распределенных дискретных систем	2	58
Гляков П. В., Ковалев М. М., Котов В. М. Серия градиентных алгоритмов для задачи о разбиении дерева	1	37
Джураев О. Эффективное построение поля алгебраических функций, соответствующего четырехлистному накрытию сферы, и приложения	1	43
Забрейко П. П., Макаревич Т. А. Принцип неподвижной точки и теорема Л. В. Овсянникова	3	53
Зверович И. Э. Степенное множество дерева	3	55
Зубович К. А., Мелешко А. Н. Об автоматическом доказательстве правильности программ в системе функционального программирования	1	31
Ерошенко Л. Д. Оптимизация динамической системы управления с подвижными краевыми условиями	2	33
Ерошенко В. А. О существенном спектре функций от линейных операторов в банаховом пространстве	2	50
Калинин А. И., Счастный С. Ф. Минимизация квадратичных функционалов на траекториях линейных сингулярно возмущенных систем	3	42
Калитин Б. С. Относительная устойчивость компактных множеств	1	34
Каретко Н. П. Решение задачи термоупругости для пластины с трещиной, нагреваемой потоком тепла	2	37
Крахотко В. В., Павлов В. В. Оптимизация нестационарной линейной системы с быстроменяющимися параметрами	2	54
Люлькин А. Е. К тестовой проверке программируемого мультиплексора	3	61
Наумович Н. Ф. Замена времени в векторном дифференциальном уравнении и ее влияние на закон площадей	2	31
Павлова Т. Г. Явное решение интегрального уравнения первого рода с алгебраическим ядром специального вида	1	39
Петрова Г. Л. О неприводимости порождающего множества полиэдральной полугруппы	3	58
Рогозин С. В., Чумаков Ф. В. Обобщенное уравнение Карлемана на симметричном отрезке	3	50
Савелова Л. А. Конечный метод решения интервальной задачи квадратичного программирования	2	47
Самодуров А. А. О построении общего решения дифференциального уравнения Абеля по известным частным решениям	1	49
Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов высших порядков агрегированных случайных характеристик однородной марковской цепи	2	40
Суворов В. В. Пространства, порожденные автоморфизмами группы Ли, и их морфизмы	2	45
Хомищев И. И. Производящие функции вероятностей состояний однолинейной системы с повторными вызовами	1	51
Шлома Л. И. Восстановление функции по формулам прямоугольников	3	46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н. Измерение распределения поглощенных частиц и энергии по глубине поглотителя для бета-излучателей	2	63
Белявский С. С. О размерности множества достижимости одной системы дифференциальных уравнений с переключением	2	74
Березкина Л. Л. Сравнение строк рациональной таблицы Чебышева — Гончара для некоторых 2π -периодических функций	3	75
Бобков В. В. Об одном способе численного интегрирования жестких систем	2	72
Бринкевич Д. И., Горбачева Н. И., Петров В. В., Просолович В. С., Туровский Б. М. Термические дефекты в кремнии, легированном германием	2	65
До Зуй Чунь. Преобразование нецелочисленного максимума вогнутой функции в целочисленный	1	62
Горелик С. Б. Условия типа Лежандра — Клебша и Келли в системах с последствием нейтрального типа	2	69
Дайнеко Л. Н., Полицук И. М. Автоматизированный измерительно-вычислительный комплекс для антенных измерений	2	67
Зенченко С. А. Область захвата лазера на АИГ: Nd в режим синхронизации мод	1	56
Кастрица О. А. О чувствительности спектра функции Ляпунова	3	77
Кашевский В. В., Русак В. Н. К вопросу об оценке наилучших полиномиальных приближений периодических аналитических функций	2	71
Курейчик К. П., Гайсенок В. А., Козловский Н. В. Метод измерения коэффициента селективного пропускания при учете неселективного поглощения	3	65
Лубочкин А. В. Метод первого порядка решения выпуклой кусочно-линейной сепарабельной задачи	3	76

Малый С. В., Кравченко И. Т. Метод «матрешки» в решении некоторых задач прикладной электродинамики	3	69
Медведев В. Г. Алгоритм решения двухэтапной задачи линейного стохастического программирования	1	64
Меленец Ю. В. Бинарные случайные последовательности, порожденные авторегрессиями	3	72
Михалев А. С., Сидорук С. Н., Чушенков И. М. Цифровой широтно-импульсный модулятор с перемножающими входами	1	58
Неуен Динь Зунг. Кинематическая дифракция нейтронов в кристаллах с поляризованными ядрами	2	61
Онищенко Н. С. Нелинейность релаксации и ее влияние на сигнал затухания свободной индукции	1	60
Рубанова Е. А., Сташкевич И. В. Спектральные характеристики системы «рельефная решетка — жидкий кристалл»	3	67
Труш Н. Н. Некоторые свойства функции, встречающейся в анализе временных рядов	3	70
Урбанович А. И. Вынужденное четырехфотонное параметрическое рассеяние света в режиме «второго звука»	1	66
Фам Тхе Лонг. Двухшаговый метод решения дробно-линейной задачи оптимального управления дискретными системами	1	68

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Владимир Гаврилович Вафиади	1	72
-----------------------------	---	----

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12 : 531.51 + 530.13 : 531.62

Тимошенко А. И. **Формулировка теории гравитации Эйнштейна в виде теории поля с неполной геометризацией в римановом пространстве-времени** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 3.

Показано, что в теории тяготения в римановом пространстве при неполной геометризации лагранжиана гравитационного поля сохраняются лишь смешанные компоненты тензора энергии-импульса Гильберта, а тензор момента энергии-импульса не сохраняется. Гравитационное поле описывается лагранжианом Розена. Показано, что энергия поля Шварцшильда отрицательна, что связано с характером гравитационных сил. Найдено, что тензор энергии-импульса Гильберта для волны Переса равен нулю.

Библиогр. 3 назв.

УДК 535

Барковский Л. М., Фо Тхи Нгуен Ханг. **Обратная задача отражения для магнитоэлектрических и оптически активных кристаллов средних сингоний** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 5.

Предлагается новый метод определения тензоров оптических материальных констант магнитоэлектрических и оптически активных кристаллов средних сингоний с использованием трех взаимно перпендикулярных граней. Установлена общая связь экспериментально измеряемых тензоров отражения от этих граней с соответствующими тензорами поверхностного импеданса. Это дает решение задачи определения по отраженному свету многокомпонентных тензоров материальных констант в произвольных базисах.

Библиогр. 5 назв.

УДК 537.622 : 537.84

Вислович А. Н., Лобко С. И., Лобко Г. С. **Плавание немагнитных тел в жидких магнетиках в однородном магнитном поле** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 8.

Рассматривается задача с взаимодействием немагнитных тел, взвешенных в жидком магнетике, с плоской границей раздела магнетика и немагнитной среды в однородном магнитном поле. Для сферического тела исследована зависимость этой силы от напряженности магнитного поля в широком диапазоне изменения поля.

Библиогр. 6 назв., ил. 2.

УДК 535.33 : 535.36

Малыревич А. М., Последович М. Р., Тарасевич Е. В. **Температурные зависимости в спектрах КР кристалла триглицинсульфата** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 11.

Проведено экспериментальное исследование температурной зависимости положения максимумов, относительных интенсивностей и полуширин полос внутренних и внешних колебаний в спектрах комбинационного рассеяния сегнетоэлектрического кристалла триглицинсульфата. Сделано предположение об искажении всех структурных групп кристаллической решетки с понижением температуры и об участии их в подготовке фазового перехода.

Библиогр. 8 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592; 621.382

Суслов В. А., Хоанг Суан Хонг, Хоанг Шон. **Долговременные релаксации и позиционная зависимость фото-ЭДС в системе полупроводник — электролит** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 15.

Предложены и реализованы модельные эксперименты по изучению долговременных релаксаций и позиционной зависимости фотоотклика с помощью метода фото-ЭДС в системе полупроводник — электролит на образцах кремния. Установлены основные закономерности проявления указанных эффектов в конкретных условиях эксперимента.

Библиогр. 4 назв., ил. 2.

УДК 534.6:534.843.224

Добрянский В. М., Крылович В. И., Рубанов Ан. С. **Выходные характеристики акустического интерферометра с периодическим качанием частоты входного напряжения** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 17.

Получены и анализируются амплитудная и частотная характеристики акустического интерферометра с двумя линейными преобразователями при периодическом качании частоты входного напряжения. Описаны возможности применения полученных результатов для контроля настройки интерферометров и определения акустических характеристик среды.

Библиогр. 3 назв.

Тарасевич Н. Н. Миноритарная функция — функция контроля ошибок в мажоритарно резервированных системах // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 20.

Рассматривается вопрос контроля ошибок в мажоритарно резервированных системах. Показано, что, если область определения логических функций ($2^n - 1$) наборов аргументов (за исключением нулевого, когда истинный аргумент функции единица, и единичного, когда истинный аргумент нуль), задачу контроля можно решать, применяя закон исключения третьего к основной задаче. При этом логические функции, определенные на $(2^n - 1)$ наборах, являются более точной моделью логических элементов, чем функции, определенные на всех 2^n возможных наборах аргументов.

Библиогр. 6 назв., ил. 1, табл. 2.

УДК 621.378.325

Бакиновский К. Н. [], Васильев Н. Н., Рай Г. И., Шаронов Г. В., Шкадаревич А. П. Устойчивый режим модуляции добротности и синхронизации мод АИГ: Nd^{3+} -лазера непрерывного действия с нелинейно поглощающим кристаллом LiF с F_2^- -центрами окраски // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 25.

Представлены результаты экспериментального исследования выходных характеристик излучения непрерывного лазера на АИГ: Nd^{3+} , работающего в режиме активной синхронизации мод и пассивной модуляции добротности резонатора при помощи нелинейно поглощающих кристаллов (НПК) LiF с F_2^- -центрами окраски (начальное пропускание 75—96 %) для получения стабильного режима генерирования сверхкоротких оптических импульсов.

Библиогр. 4 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 620.179.153

Ахмед Бакр, Левкович А. Д., Перцев А. Н. Влияние ионизационных потерь на бета-спектр при прохождении через поглотитель // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 27.

На основе формулы Бете — Блоха для средних ионизационных потерь энергии бета-частицами на единице пути получены правила трансформации энергетических спектров бета-частиц, испускаемых ядрами, при прохождении через поглотитель конечной толщины. Приведены результаты расчетов для позитронного источника (^{22}Na) и поглотителей из никеля и бериллия. Для энергетических распределений наблюдается стабилизация наиболее вероятной энергии и формы распределения.

Библиогр. 2 назв., ил. 2.

УДК 621.315.592

Литвинов В. В., Пальчик Г. В., Уренов В. И. О кинетике образования термодоноров в кислородсодержащем германии // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 29.

Изучена кинетика накопления отдельных типов термодоноров (ТД) на начальной стадии термообработки (573 К) образцов $n\text{-Ge}$ с различным исходным содержанием междоузельного кислорода. Показано, что структура различных типов ТД отличается числом входящих в их состав кислородсодержащих единиц, которые группируются согласно диффузионной модели Кайзера. Из анализа кинетических кривых определены константы скорости реакции образования ТД при 573 К и установлен факт участия в образовании первоначально образующихся центров четырех атомов кислорода.

Библиогр. 5 назв., ил. 2.

УДК 513.88

Забрейко П. П., Нгуен Хонг Тхай. Об одном классе пространств Орлича вектор-функций // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 32.

Изучаются пространства Орлича L_M вектор-функций со значениями в конечномерных пространствах, порожденные произвольной N -функцией $M(s, u)$ (т. е. выпуклой по $u \in R^m$ почти при всех $s \in \Omega$ и измеримой по совокупности переменных функцией из $\Omega \times R^m$ в $[0, \infty]$ без дополнительных предположений невырожденности). Основные результаты — теорема о полноте и теорема о существовании двойственного пространства.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.977

Забелло Л. Е. К исследованию приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 34.

Исследуется одна из задач приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием. Полученный основной результат — алгоритм построения разрешающего задачу управления — опирается на спектральные свойства ядра интегрального уравнения Фредгольма I рода, что сближает предлагаемый подход исследования с основным методом исследования управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем [1—3].

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.852

Савелова Л. А. Корректировка направления в конечном методе решения интервальной задачи квадратичного программирования // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 38.

Строится специальная процедура корректировки подходящего направления для задач квадратичного программирования с интервальными ограничениями, обеспечивающая конечность метода без каких-либо дополнительных условий.

Библиогр. 2 назв.

УДК 519.1

Тарновский А. Г. Градиентный алгоритм решения задачи «минимум суммы квадратов» // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 40.

Рассматривается градиентный алгоритм решения задачи «минимум суммы квадратов». Построены оценки его эффективности, использующие информацию о входных данных, для каждой конкретной задачи.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.854.2

Струсович В. А. Минимизация суммарного времени обслуживания для системы с нефиксированными маршрутами // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 44.

Предложены полиномиальные алгоритмы построения расписаний, которым соответствует наименьшее значение суммарного и взвешенного суммарного времени обслуживания требований в системе с нефиксированным порядком прохождения приборов. Предполагается, что длительности обслуживания каждого требования каждым прибором равны между собой.

Библиогр. 6 назв.

УДК 681.3.06

Дробушевич Г. А., Зубович К. А. Система функционального программирования и ее реализации для ЕС ЭВМ // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 46.

Предлагается система создания программного обеспечения, основанная на идеях композиционного и функционального программирования. Рассматриваются вопросы реализации системы методами и средствами СР-технологии программирования.

Библиогр. 9 назв., ил. 2.

УДК 681.325

Коляда А. А., Селянинов М. Ю. Нормализация чисел в модулярной системе счисления // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 50.

Предлагаются методы и алгоритмы нормализации чисел в модулярной системе счисления с использованием интервально-индексных характеристик, которые обладают высоким уровнем параллелизма и имеют конвейерную структуру.

Библиогр. 10 назв.

УДК 519.711:681.3

Музалевский И. М. Применение абстрактных моделей для представления данных. 1. Структура и поиск // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 2. С. 53.

Рассматривается способ представления данных совместно с их интерпретацией. Построение способа основано на критерии адекватного описания предметной области задачи, требовании минимальности трудозатрат на манипулирование со стороны пользователя. Определяется понятие абстрактной модели предметной области, исследуются ее свойства и предлагается алгоритм поиска данных на модели.

Библиогр. 2 назв.

УДК 530.12

Остапенко А. В. О релятивистском фермион-антифермионном уравнении со скалярным линейным потенциалом // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 57.

Получено точное решение релятивистского фермион-антифермионного уравнения со скалярным линейным потенциалом для полного спина связанной системы $J = 0$. Исследовано также ВКБ-приближение уравнения. Показано, что дискретный спектр энергий находится в области $(2\mu, \infty)$, в которой имеет место запираание кварков.

Библиогр. 6 назв.

УДК 535.012.2+621.373.038.824

Буров Л. И., Ганчеренок И. И. Влияние поляризации и геометрии накачки на энергетические характеристики лазера на красителе с анизотропным резонатором // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 59.

На основе матриц Джонса теоретически исследуется влияние геометрии и поляризации накачки на энергетические параметры лазеров на растворах красителей произвольной вязкости. Полученные соотношения коррелируют с известными в литературе экспериментальными данными.

Библиогр. 9 назв.

УДК 629.7.028.6

Евсеев А. К., Полещук И. М. Исследование характеристик антенных обтекателей во временной области // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 61.

Рассматривается возможность применения время-импульсных методов для исследования характеристик обтекателей антенн СВЧ. Предлагается методика определения внутренних переотражений, локальных неоднородностей, частотной передаточной функции и других характеристик обтекателей.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.948

Забелло И. Н. Решение в квадратурах одного матричного интегрального уравнения // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 62.

Дается решение матричного интегрального уравнения с логарифмическим ядром I рода в замкнутой форме, к которому сводятся некоторые плоские контактные задачи теории ползуности при наличии сил сцепления или трения по участку контакта.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.544.8+948.3

Крушевский Е. А. Решение линейных функциональных уравнений с несколькими сдвигами внутрь области // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 64.

Линейное функциональное уравнение с несколькими сдвигами внутрь области

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n G_k(z) \varphi[h_k z] + g(z), \quad |z| \leq 1, \quad |h_k| < 1 \text{ в случае аналитических коэффициентов}$$

сведено к задаче сопряжения для n пар функций на римановой поверхности рода 1. Получено явное решение в некоторых частных случаях.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.948.32

Гринкевич Г. В. Двумерное интегральное уравнение с функцией Сарана F_M в ядре // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 65.

Для двумерного интегрального уравнения Вольтерра первого рода с функцией Сарана F_M в ядре получены необходимые и достаточные условия разрешимости в классе локально интегрируемых с некоторым весом функций. С помощью аппарата двумерного дробного интегриродифференцирования приведено решение этого уравнения в явном виде.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.633

Радкевич Е. В. Разностная схема первого порядка аппроксимации решения системы многомерных уравнений Бюргерса // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 66.

Для уравнений Бюргерса предложена разностная схема с расширенной областью устойчивости. Построено первое дифференциальное приближение. Приведены результаты численных расчетов.

Библиогр. 5 назв., ил. 2.

Лошкарева С. Ю. О числе пакетов максимальной сложности в Ω -сети // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 68.

Дается описание модели функционирования системы коммутации, называемой Ω -сеть. Найдена формула для числа пакетов связей, реализуемых Ω -сетью за максимально возможное число тактов.

Библиогр. 5 назв., ил. 1.

Хомичков И. И. Однолинейная система с повторными вызовами и входящим потоком Кокса второго порядка // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 1. С. 70.

Получены производящие функции стационарного распределения состояний однолинейной системы обслуживания с повторными вызовами и входящим потоком Кокса второго порядка.

Библиогр. 4 назв.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «УНИВЕРСИТЕТСКОЕ»
ГОТОВИТ К ИЗДАНИЮ В 1988 ГОДУ КНИГУ

АПАНАСОВИЧА В. В., КОЛЯДЫ А. А., ЧЕРНЯВСКОГО А. Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. 15 л. 2 р. 60 к.

Развивается системный подход при решении проблемы статистического анализа случайных потоков в физическом эксперименте, основанный на использовании теории коррелированных случайных точек. Предлагается ряд методов и конкретных алгоритмов определения временных характеристик как отдельных случайных потоков, так и потоков, взаимодействующих между собой в условиях воздействия шумов и аппаратных искажений. Разработан комплекс имитационных моделей для оценки эффективности функционирования автоматизированных измерительно-вычислительных систем спектрометрического анализа случайных потоков и реализованных на них процедур регистрации, накопления и обработки измерительной информации.

На основе развитого подхода рассмотрены перспективные практические методы решения задач статистических временных измерений для некоторых современных направлений экспериментальной физики.

Предназначена для научных работников и инженеров, занимающихся разработкой и созданием измерительно-вычислительных систем обеспечения физических экспериментов. Может быть использована студентами и аспирантами, специализирующимися в области автоматизации научных исследований и информационно-измерительной техники.

ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСЕЙ ДЛЯ ОПУБЛИКОВАНИЯ В ЖУРНАЛЕ

1. Статья должна быть изложена с предельной краткостью, окончательно отредактирована и оформлена. Статья является оригиналом для печати.

2. Статьи, напечатанные на машинке (не портативной) через два интервала с полями не менее 4 см на одной стороне листа, представляют в редакцию в двух экземплярах.

3. Объем статьи не должен превышать 8 страниц машинописного текста (включая приложения) и 3 рисунков; кратких сообщений — 3 страниц и 2 рисунков.

4. К статье должны быть приложены: рекомендация кафедры, реферат статьи (до 0,25 стр. машинописного текста) и сведения об авторе (место работы, должность, адрес, рабочий и домашний телефоны).

5. Особое внимание следует обращать на тщательность внесения в текст математических и химических формул, на оформление таблиц, списка литературы, рисунков и подписей к ним. Следует избегать повторения в тексте данных, содержащихся в таблицах и графиках, а также представления численных результатов одновременно в виде таблиц и графиков.

6. Формулы и буквенные обозначения необходимо аккуратно и разборчиво вписать в два экземпляра от руки черными чернилами и разметить синими чернилами: греческие буквы обвести красными; латинские, набираемые курсивом, подчеркнуть волнистой чертой; прописные двумя черточками снизу ($\underline{\underline{A}}$), строчные — двумя черточками свер-

ху ($\underline{\underline{a}}$). Следует различать буквы $\underline{\underline{O}}$ (прописную), $\underline{\underline{o}}$ (строчную) и $\underline{0}$ (нуль), для чего

буквы $\underline{\underline{O}}$ и $\underline{\underline{o}}$ подчеркивают двумя черточками и волнистой чертой (курсив), а нуль отмечают квадратной скобкой снизу ($\underline{\underline{O}}$, $\underline{\underline{o}}$, $\underline{0}$). Необходимо различать в написании бук-

вы $\underline{\underline{l}}$ (эль), $\underline{\underline{e}}$, а также $\underline{\underline{I}}$ и $\underline{\underline{J}}$ (йот), для чего букву $\underline{\underline{I}}$ пишут, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками и волнистой чертой снизу. Векторы подчеркивают черными чернилами одной чертой сверху. Математические символы $\underline{\underline{\cos}}$, $\underline{\underline{ig}}$ и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов ($\underline{\underline{H_2O}}$, $\underline{\underline{Ag}}$ и т. д.) отмечают квадратной скобкой снизу. Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечают дугой A^2 (для верхнего индекса) и A_2 (для нижнего).

7. Для формул и символов, а также между ними следует оставлять достаточные пробелы в тексте.

8. Необходимо придерживаться Международной системы единиц (СИ).

9. Рисунки представляют в двух экземплярах в виде графиков, схем, фотографий отдельно от текста; фотографии, отпечатанные на глянцевой бумаге с накатом, должны иметь четкое и контрастное изображение. Чертежи и схемы выполняют тушью на плотной белой бумаге или кальке в формате, обеспечивающем ясность понимания всех деталей, и вместе с тем компактно в целях экономии места. На обороте карандашом необходимо указать фамилию автора, название статьи и номер рисунка.

10. Таблицы (обязательно с заголовками) и подписи к рисункам следует печатать на отдельных листах. Кривые на рисунках нумеруются арабскими цифрами, которые расшифровываются в подписях к рисункам. Представление одного и того же материала в виде таблиц и рисунков не допускается. Места для таблиц и рисунков необходимо указать на полях рукописи.

11. Ссылки на литературу даются в порядке цитирования (порядковый номер в квадратных скобках). Список литературы (прилагается на отдельном листе) должен быть оформлен в соответствии с ГОСТом 7.1—84 следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, год издания, страницы;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, принятое сокращенное название журнала, год издания, том, номер выпуска, страницы.

12. Ссылки на неопубликованные работы, диссертации и авторефераты не допускаются.

13. В конце статьи (после литературы) ставится название кафедры, где выполнена работа. Статью должны подписать все авторы.

14. В случае возвращения статьи автору на доработку первоначальный текст ее необходимо вернуть в редакцию. При задержке статьи автором на месяц и более первоначальная дата поступления не сохраняется.

15. Редакция посылает автору одну корректуру для исправления только ошибок набора. Изменения и дополнения как в тексте, так и в рисунках не допускаются. Корректур за подписью автора и датой ее подписания сдается в редакцию в течение двух дней с момента ее получения.

16. Статьи, оформленные с нарушением «Правил», редакция не принимает.

