аналитических функций проведено В. Р. Кравчуком [3]. Д. Браесс [4] провел полное исследование строк матрицы наилучших рациональных приближений экспоненты на отрезке $[-1, 1]$.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. Н. Русаку за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Русак В. Н. Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 810.
2. Русак В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128. (170). Вып. 4. (12). С. 412.
3. Кравчук В. Р. PA-метод и его применение к приближению элементарных функций (Препринт 85.18 / АН УССР. Киев, 1985. С. 7.)
4. Braess Dietrich. On rational approximation of the exponential and the square root functions // Lect. Notes. N. 1105. P. 89.

Поступила в редакцию 03.03.86.

УДК 519.853.5

А. В. ЛУБОЧКИН

МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$f(x)=\sum_{j\in J}c_j|x_j-\alpha_j|\to\min,\ Ax=b,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

где $x=x(J)\in R^n$; $b=b(I)\in R^m$; $I=\{1, 2, \ldots, m\}$; $J=\{1, 2, \ldots, n\}$; $c=(c_j\geqslant 0, j\in J)$; $\operatorname{rank} A=m$. Определения плана x, оптимального плана, опоры (ограничений) $J_{\text{оп}}$, опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ традиционны *. Опорный план считается невырожденным, если $d_{*j}<x_j<d^*_j$, $j\in J_{\text{оп}}$; $x_j\neq\alpha_j$, $j\in J_{c\,\text{оп}}=J_c\cap J_{\text{оп}}$, $J_c=\{j\in J:\ c_j>0\}$.

Пусть $\{x, J_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план; по нему построим вектор $s=A'u$, где $A'_{\text{оп}}u=c^*_{\text{оп}}$, $A_{\text{оп}}=A(I, J_{\text{оп}})$, $c^*_{\text{оп}}=c^*(J_{\text{оп}})$, $c^*=c^*(J)$, $c^*(J_c^+)=c(J_c^+)$, $c^*(J_c^-)=-c(J_c^-)$, $c^*(J_0)=0$, $J_0=J\setminus J_c$, $J_c^+=\{j\in J_c: x_j\geqslant\alpha_j\}$, $J_c^-=\{j\in J_c: x_j<\alpha_j\}$.

Критерий оптимальности. Соотношения $s_j\leqslant c_j\xi_j$ при $x_j=d_{*j}$; $s_j\geqslant c_j\xi_j$ при $x_j=d^*_j$; $s_j=c_j\xi_j$ при $x_j\neq\alpha_j$, $d_{*j}<x_j<d^*_j$; $|s_j|\leqslant c_j$ при $x_j=\alpha_j$, $d_{*j}<x_j<d^*_j$, $j\in J_{\text{н}}=J\setminus J_{\text{оп}}$, где $\xi_j=\operatorname{sign}(x_j-\alpha_j)$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ (здесь и далее $\operatorname{sign}(d_{*j}-\alpha_j=0)=1$, $\operatorname{sign}(d^*_j-\alpha_j=0)=-1$).

Предположим, что для $\{x, J_{\text{оп}}\}$ критерий оптимальности не выполняется. Введем параметры метода (положительные числа): ε, μ_1, μ_2. Опишем итерацию метода. Положим вначале $\nu^0(J_{\text{н}})=0$, $p^0(J_{\text{н}})=0$, $x^0=x$, $s^0=s$, $k=0$.

1. Построим вектор l^k: $l^k_j=d_{*j}-x^k_j$ при $s^k_j<c_j\xi_{*j}$; $l^k_j=d^*_j-x^k_j$ при $s^k_j>c_j\xi^*_j$, $j\in J_{\text{н}}$; $l^k_j=\alpha_j-x^k_j$ при $-c_j\leqslant s^k_j<c_j$, $x^k_j>\alpha_j$; $-c_j<s^k_j\leqslant c_j$, $x^k_j<\alpha_j$, $j\in J_{c\text{н}}=J_c\cap J_{\text{н}}$, $d_{*j}<\alpha_j<d^*_j$; $l^k_j=0$ в остальных случаях, $j\in J_{\text{н}}$; $l^k(J_{\text{оп}})=-A^{-1}_{\text{оп}}A(I, J_{\text{н}})\,l^k(J_{\text{н}})$, где $\xi_{*j}=\operatorname{sign}(d_{*j}-\alpha_j)$, $\xi^*_j=\operatorname{sign}(d^*_j-\alpha_j)$.

2. Положим: $\nu^{k+1}_j\operatorname{sign}l^k_j$, если $l^k_j\neq 0$; $\nu^{k+1}_j=\nu^k_j$, если $l^k_j=0$; $p^{k+1}_j=p^k_j+1$, если $\nu^{k+1}_j\nu^k_j<0$; $p^{k+1}_j=p^k_j$, если $\nu^{k+1}_j\nu^k_j\geqslant 0$, $j\in J_{\text{н}}$. Подсчитаем шаг Θ^k: $\Theta^k=\min\{1, \Theta^k_{\text{оп}}, \Theta^k_a\}$; $\Theta^k_{\text{оп}}=\min\Theta^k_j$, $j\in J_{\text{оп}}$; $\Theta^k_j=(d_{*j}-x^k_j)/l^k_j$,

* Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Методы линейного программирования. Минск, 1980. Ч. 3.

если $l^k_{j_0} < 0$; $\Theta^k_j = (d^*_j - x^k_j)/l^k_j$, если $l^k_j > 0$; $\Theta^k_j = \infty$, если $l^k_j = 0$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\Theta^k_a = \min \Theta^k_j$, $j \in J_{\text{соп}}$; $\Theta^k_j = (\alpha_j - x^k_j)/l^k_j$, если $(x^k_j - \alpha_j)\, l^k_j < 0$; $\Theta^k_j = 0$, если $x^k_j = \alpha_j$ и либо $l^k_j < 0$, $j \in J^+_{\text{соп}}$, либо $l^k_j > 0$, $j \in J^-_{\text{соп}}$; $\Theta^k_j = \infty$ в остальных случаях, $j \in J_{\text{соп}}$. Здесь $J^+_{\text{соп}} = J^+_c \cap J_{\text{оп}}$, $J^-_{\text{соп}} = J^-_c \cap J_{\text{оп}}$. Положим $x^{k+1} = x^k + \Theta^k l^k$. При $\Theta^k = 1$ план x^{k+1} оптимален; при $\Theta^k = \Theta^k_{\text{оп}} = \Theta^k_{j_0} < 1$ перейдем к п. 3; при $\Theta^k = \Theta^k_a = \Theta^k_{j_0} < 1$ — к п. 4.

3. Положим $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$, где $p^{k+1}_{j_*} = \max p^{k+1}_j$, $j \in J^* = \{j \in J_{\text{н}}: |s^{k+1}_j + c_j| < \mu_1$, $d_{*j} + \mu_2 < x^{k+1}_j < \alpha_j - \mu_2$, или $|s^{k+1}_j - c_j| < \mu_1$, $\alpha_j + \mu_2 < x^{k+1}_j < d^*_j - \mu_2$, $j \in J_{\text{сн}}$, $d_{*j} < \alpha_j < d^*_j$; $|s^{k+1}_j - c_j \xi_j| < \mu_1$, $d_{*j} + \mu_2 < x^{k+1}_j < d^*_j - \mu_2$, в остальных случаях, $j \in J_{\text{н}}$; $\beta > \varepsilon\}$; $\beta = |e'_{j_0} A^{-1}_{\text{оп}} A(I, j_*)|$. Если $J^* = \varnothing$, то увеличим μ_1 и (или) уменьшим μ_2, и (или) уменьшим ε. Итерация закончена.

4. Положим $\bar{s}_j = s^{k+1}_j - \gamma_j$ при $j_0 \in J^+_{\text{соп}}$; $\bar{s}_j = s^{k+1}_j + \gamma_j$ при $j_0 \in J^-_{\text{соп}}$; $\bar{J}^+_{\text{соп}} = J^+_{\text{соп}} \setminus j_0$, $\bar{J}^-_{\text{соп}} = J^-_{\text{соп}} \cup j_0$, если $j_0 \in J^+_{\text{соп}}$; $\bar{J}^-_{\text{соп}} = J^-_{\text{соп}} \setminus j_0$, $\bar{J}^+_{\text{соп}} = J^+_{\text{соп}} \cup j_0$, если $j_0 \in J^-_{\text{соп}}$, где $\gamma_j = 2c_{j_0} A^{-1}_{\text{оп}}(j_0, I)\, A(I, j)$. Построим вектор l^{k+1} по формулам п.1 при $s^{k+1} = \bar{s}$, $k = k+1$. Если $l^{k+1}_{j_0} > 0$, $j_0 \in \bar{J}^-_{\text{соп}}$, либо $l^{k+1}_{j_0} < 0$, $j_0 \in \bar{J}^+_{\text{соп}}$, то производим замену опоры (как и в п. 3). В противном случае переходим к п. 2.

На этом описание итерации алгоритма закончено.

Поступила в редакцию 20.03.86.

УДК 517.9

О. А. КАСТРИЦА

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СПЕКТРА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Обозначим M — множество всех симметричных положительно определенных $n \times n$-матриц. Рассмотрим функционал φ: $M \to \mathbf{R}$, определенный следующим образом: $\varphi: A \in M \mapsto \varphi(A) = \dfrac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$, где $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A. Для асимптотически устойчивой n-мерной стационарной дифференциальной системы

$$\dot{x} = Px \tag{1}$$

уравнение

$$P^T A + AP = -C \tag{2}$$

при любой $C \in M$ определяет единственным образом матрицу $A \in M$, задающую функцию Ляпунова $v(x) = x^T A x$ ([1], с. 34). Значение $\varphi(A)$ используется для характеристики поведения решений системы (1) — построения оценок решений, области притяжения и др. (см., например, [2], с. 73). В настоящей работе изучается влияние малых возмущений на поведение $\varphi(A)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{B}$ — множество симметричных матриц B таких, что $\|B\| \leqslant \varepsilon$. Обозначим $\Delta\varphi_B(A) = \varphi(A+B) - \varphi(A)$.

Задача. Для заданной матрицы $A \in M$ найти матрицу $B_0 \in \mathbf{B}$ такую, что $\Delta\varphi_{B_0}(A) = \max\limits_{B \in \mathbf{B}} \Delta\varphi_B(A)$.

Лемма. $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall\, B \in \mathbf{B}$ матрица $C_1 = -(P^T(A+B) + (A+B)P) \in M$.

Действительно, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ собственные значения матрицы $P^T B + BP$ близки к нулю и, следовательно, спектр матрицы C_1 близок к спектру матрицы C ([3], с. 103).

Спектром функции Ляпунова $v(x) = x^T A x$ будем называть множество собственных значений матрицы A.