

ричных элементов, стоящих в правых от данного элемента столбцах и нижних строках.

Рассмотрим класс структур, которые образованы из основной структуры путем отсечения ее части, причем считается, что усечение проводится только с одной стороны. В общем случае формирование указанных подструктур проводится за счет ограничения числа элементов в исходной структуре за счет отбрасывания элементов с номерами больше заданного. Другими словами, мы рассматриваем вложенные подструктуры с общим концом, являющимся первым элементом. В рамках подструктуры пропуск элементов не допускается.

На рисунке показаны диаграммы соответствия подструктур и их LU -разложений. Из вложенности подструктур следует и вложенность соответствующих LU -разложений. А это означает, что для проведения многовариантного анализа структур, которые можно представить в виде вложенных подструктур, достаточно провести однократную LU -факторизацию матрицы для варианта с максимальным числом элементов (для решеток) или максимальной длины (для проволочно-щелевых структур сложной геометрии).

LU -разложение для любой вложенной подструктуры получается без каких-либо дополнительных вычислительных затрат, поэтому затраты на проведение исследования структур указанного типа в диапазоне изменения их геометрических параметров будут сравнимы с затратами однократного анализа, следовательно, предложенный метод «матрешки» является эффективным методом анализа (многовариантного) вложенных проволочно-щелевых структур и их решеток.

Следует отметить, что вложенность подструктур может быть различной; она определяется нумерацией элементов, которая может отличаться от естественной. Предложенный метод применим и в решении электродинамических задач других типов при условии, если разложение матрицы может быть проведено без выбора ведущего элемента.

Список литературы

1. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры; Пер. с англ. Под ред. Э. Л. Бурштейна. М., 1977.
2. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. М., 1975.

Поступила в редакцию 23.02.87.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

При статистическом анализе временных рядов, а именно: при исследовании оценок спектральных плоскостей вторых порядков дискретных стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, необходимо знать свойства функций вида

$$\Phi_T(x-\lambda_1, x-\lambda_2) = (2\pi T)^{-1} \Delta_T(x-\lambda_1) \Delta_T(x-\lambda_2),$$

где

$$\Delta_T(x) = \frac{\sin \frac{Tx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

T — произвольное натуральное число; $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$, $x \in R$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $\Phi_T(x-\lambda_1, x-\lambda_2) = \Phi_T(x-\lambda)$, где $\Phi_T(x)$ — ядро Фейера, свойства которого рассматриваются во многих работах [1, 2]. Некоторые свойства функции $\Phi_T(x-\lambda_1, x-\lambda_2)$ исследуются в монографии [2], статьях [3, 4].

Нетрудно видеть, что для любых точек $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$, $\Phi_T(x-\lambda_1, x-\lambda_2)$ периодическая функция с периодом 2π и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(x - \lambda_1, x - \lambda_2) dx = T^{-1} \cdot \Delta_T(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (1)$$

Лемма 1. Для любых $\lambda \in (0, \pi]$ и $\alpha \in (0, 1]$ при всех натуральных $T > \frac{3}{\lambda}$ справедливо неравенство

$$I_{[-\pi, \pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |x|^\alpha |\Phi_T(x, x + \lambda)| dx \leq \frac{C_\alpha \pi \left(\ln T + \ln \frac{e\pi}{2} \right)}{T^\alpha},$$

где

$$C_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 3^\alpha, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$. Пусть $\lambda > 0$, тогда, выбирая некоторое δ , $0 < \delta < \lambda$, имеем

$$I_{[-\pi, \pi]} = I_{[-\pi, -\delta]} + I_{[-\delta, \delta]} + I_{[\delta, \pi]},$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| \geq \frac{|x|}{\pi}, \quad (3)$$

справедливое для $|x| \leq \pi$, получаем

$$I_{[-\pi, -\delta]} \leq \frac{1}{2T\delta^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{-\delta} |\Delta_T(x + \lambda)| dx,$$

$$I_{[\delta, \pi]} \leq \frac{1}{2T\delta^{1-\alpha}} \int_{\delta}^{\pi} |\Delta_T(x + \lambda)| dx.$$

Применяя неравенство

$$\left| \sin \frac{x + \lambda}{2} \right| \geq |\sin \delta|,$$

справедливое для любых $x \in [-\delta, \delta]$, $\delta \leq \frac{x + \lambda}{2} \leq \pi - \delta$,

$$I_{[-\delta, \delta]} \leq \frac{\delta^\alpha}{2\pi T \sin \delta} \int_{-\delta}^{\delta} |\Delta_T(x)| dx.$$

Таким образом, нетрудно видеть, что

$$I_{[-\pi, \pi]} \leq \frac{3}{2T\delta^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_T(x)| dx.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_T(x)| dx \leq 2\pi \ln T + 2\pi \ln \frac{e\pi}{2}, \quad (4)$$

то, полагая $\delta = \frac{1}{T} \leq \frac{\lambda}{3}$, имеем требуемое. Для $\lambda < 0$ доказательство проводится аналогичным образом. Используя неравенства (3), (4), нетрудно получить утверждение леммы для случая $\alpha = 1$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть $f(x)$ — спектральная плотность стационарного случайного процесса, удовлетворяющая соотношению

$$\hat{f}(x + \lambda) = \hat{f}(\lambda) + R(x, \lambda), \quad (5)$$

где

$$|R(x, \lambda)| \leq C|x|^\alpha, \quad (6)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $C > 0$ — некоторая постоянная. Тогда для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $T \geq \frac{3}{|\lambda_1 - \lambda_2|}$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi_T(x - \lambda_1, x - \lambda_2) dx - \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} \Delta_T(\lambda_2 - \lambda_1) \right| \leqslant \frac{C_\alpha C \cdot \pi \left(\ln T + \ln \frac{e\pi}{2} \right)}{T^\alpha}, \quad (7)$$

где константа C_α задана соотношением (2).

Доказательство. Обозначим выражение под модулем в (7) через I . В силу соотношения (1)

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) - f(\lambda_1)}{2} \Phi_T(x - \lambda_1, x - \lambda_2) dx + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) - f(\lambda_2)}{2} \Phi_T(x - \lambda_1, x - \lambda_2) dx = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим I_1 . Так как периодическая функция имеет период 2π , то, делая замену переменных $x - \lambda_1 = z$, получаем

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z + \lambda_1) - f(\lambda_1)}{2} \Phi_T(z, z + (\lambda_1 - \lambda_2)) dz.$$

Используя (5), имеем

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} R(z, \lambda_1) \Phi_T(z, z + (\lambda_1 - \lambda_2)) dz.$$

Отсюда, учитывая (6), следует, что

$$|I_1| \leqslant \frac{C}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |z|^\alpha |\Phi_T(z, z + (\lambda_1 - \lambda_2))| dz.$$

Аналогичным образом нетрудно получить такую же оценку и для I_2 . Тогда, применяя лемму, получаем доказательство теоремы.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972. С. 388.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976. С. 511.
3. Журбенко И. Г., Труш Н. Н. Об оценке спектральных плотностей стационарных процессов: Литовский матем. сб. 1979. Вып. 19. С. 1.
4. Труш Н. Н. Исследование оценок спектральных плотностей однородных случайных полей / Редкол. ж. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех.». Минск, 1978. Деп. в ВИНТИ 11.05.78. № 1572-78.

Поступила в редакцию 14.06.85.

УДК 519.246

Ю. В. МЕЛЕНЕЦ

БИНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПОРОЖДЕННЫЕ АВТОРЕГРЕССИЯМИ

Пусть стационарный случайный процесс u_t , $1 \leqslant t \leqslant n$, $u_t \in R$ порождает случайную последовательность $\{X_t, 1 \leqslant t \leqslant n\}$ при помощи монотонно неубывающей функции $F: R \rightarrow [0, 1]$:

$$P\{X_t = 1 | u_t\} = F(u_t), \quad P\{X_t = 0 | u_t\} = 1 - F(u_t). \quad (1)$$

Вопросам исследования свойств последовательности X_t , получаемой при помощи (1), посвящен ряд работ [1—3]. В настоящей статье статистический анализ последовательности X_t проводится для случая, когда F есть функция распределения нормального закона с параметрами $(0, b^2)$. Рассматриваются две задачи.