

Гиперграф R не содержит ребер, поскольку $n \geq 2$ и T связно. В индуцированном двудольном гиперграфе между множествами Q и R каждое ребро содержит $k-1$ вершину множества Q и одну вершину множества R , поэтому

$$\sum_{u \in VQ} \deg u - kq = (k-1) \sum_{v \in VR} \deg v, \quad (7)$$

где VH обозначает множество вершин гиперграфа H . Поскольку $\sum_{u \in VQ} \deg u = \sum_{i=2}^n x_i k_i$, $\sum_{v \in VR} \deg v = p - \sum_{i=2}^n x_i$, то из (7) выводим $k(k-1) + \sum_{i=2}^n x_i(k_i-1) = (k-1)p$, откуда легко получаются (5) и (6). Предложение доказано.

Заметим, что предложение 2, в отличие от предложения 1, не дает достаточных условий. Например, в [6] показано, что множество $S = \{1, 4, 6\}$ не реализуется никаким 5-деревом, хотя при $x_2 = x_3 = 4$, $p = 13$ условия (4) — (6) выполняются.

Автор благодарен профессору Р. И. Тышкевич за руководство работой.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Caro S. F., Polimeni A. D., Wall C. E. // Fund. Math. 1977. V. 95. N 3. P. 189.
3. Sipka T. A. // J. Graph Theory. 1980. V. 4. P. 301.
4. Черняк А. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 5. С. 400.
5. Шевченко В. Н. // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, 1982. С. 166.
6. Duke R. A., Winkler P. M. // Israel J. Math. 1981. V. 40. N 3—4. P. 296.
7. Beineke L. W., Pippert R. E. // Mathematika. 1971. V. 18. P. 141.
8. Harary F., Palmer E. M. // Ibid. 1968. V. 15. P. 155.
9. Dewdney A. K. // J. Comb. Theory. Ser. B. 1974. V. 17. P. 160.

Поступила в редакцию 31.01.86.

УДК 519.4+51

Г. Л. ПЕТРОВА

О НЕПРИВОДИМОСТИ ПОРОЖДАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Пусть R — поле вещественных чисел; Z — кольцо целых чисел; Z^n — решетка n -мерных векторов над Z ; A — целочисленная невырожденная

матрица со столбцами $a_1, a_2, \dots, a_n$, $R(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in R, \alpha_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \right\}$.

Известно [1—3], что полиэдральная полугруппа $R(a_1, a_2, \dots, a_n) \cap Z^n$ является конечнопорожденной, причем в качестве порождающего множества можно взять векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ и все векторы из $P_Z = P \cap Z^n$,

где $P = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in R, 0 \leq \alpha_i < 1, i=1, 2, \dots, n \right\}$. Интересен вопрос:

когда указанное порождающее множество является неприводимым, т. е. когда никакой элемент из P_Z не равен сумме других ненулевых элементов?

Будем говорить, что $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если $\alpha_i \geq \beta_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Как известно [4], множество P_Z неприводимо тогда и только тогда, когда оно состоит из попарно несравнимых ненулевых векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где координаты берутся в базисе $a_1, a_2, \dots, a_n$. Опреде-

лив на множестве P_Z операцию сложения по модулю параллелепипеда P , введем на множестве P_Z структуру абелевой группы. Если $\det A = \pm p$ — простое число, то группа P_Z — циклическая.

Нашей целью является получение условий неприводимости множества P_Z в этом случае.

В работе [4] отмечено существование унимодулярной целочисленной матрицы U такой, что

$$UA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix},$$

где $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ — целые, $0 \leq b_i < p$. Причем группа и одновременно частично упорядоченное множество P_Z изоморфны аналогичной группе и частично упорядоченному множеству для матрицы UA . Таким образом, вместо матрицы A можно сразу взять матрицу UA . Тогда в качестве образующего группы P_Z выберем вектор $l = \left(\frac{p-b_1}{p}, \frac{p-b_2}{p}, \dots, \frac{p-b_{n-1}}{p}, \frac{1}{p} \right)$, координаты которого взяты в базисе, составленном из столбцов матрицы UA .

Рассмотрим кратные точки $0, l, 2l, \dots, (p-1)l$. Если числители их координат привести по mod p , то получим все точки из P_Z $0, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(p-1)}$. Так как нас интересуют условия, при которых векторы $\bar{l}, \bar{2l}, \dots, \overline{(p-1)l}$ попарно несравнимы, то прежде всего надо получить условие, при котором $\bar{x} > \bar{kx}$, где x, k — целые, $0 < x < p$, $1 < k \leq p-1$, а черта означает взятие наименьшего неотрицательного вычета по mod p .

Непосредственными вычислениями находим решения следующих неравенств:

$$\bar{x} > \bar{2x} : M_2 = \left(\frac{p}{2}, p \right);$$

$$\bar{x} > \bar{3x} : M_3 = \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{2} \right) \cup \left(\frac{2p}{3}, p \right);$$

.....

$$\bar{x} > \bar{kx} : M_k = \left(\frac{p}{k}, \frac{p}{k-1} \right) \cup \left(\frac{2p}{k}, \frac{2p}{k-1} \right) \cup \dots \cup \left(\frac{k-1}{k} p, p \right);$$

.....

$$\bar{x} > \overline{(p-1)x} : M_{p-1} = \left(\frac{p}{p-1}, \frac{p}{p-2} \right) \cup \left(\frac{2p}{p-1}, \frac{2p}{p-2} \right) \cup \dots \cup \left(\frac{p-2}{p-1} p, p \right).$$

Например, если $\bar{x} > \bar{3x}$, то $3x$ может попасть в один из интервалов $(p, 2p)$, $(2p, 3p)$. Если $3x \in (p, 2p)$, то $3x - p < x$, следовательно, $x \in \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{2} \right)$, если же $3x \in (2p, 3p)$, то $3x - 2p < x$, и, значит, $x \in \left(\frac{2p}{3}, p \right)$.

При проверке условий вида $\bar{ix} > \bar{jx}$ полезна следующая легко проверяемая

Лемма. Неравенства $\bar{x} > \bar{kx}$ и $\overline{(k-1)x} > \bar{kx}$ равносильны при $1 < k \leq p-1$, $1 < x \leq p-1$.

Теорема 1. Множество P_Z неприводимо тогда и только тогда, когда

числители координат каждого из векторов $l, \overline{2l}, \dots, \overline{(p-1)l}$ образуют систему представителей системы множеств $M_2, M_3, \dots, M_{p-1}$.

Доказательство. Пусть P_Z — неприводимо. Рассмотрим вектор $\overline{il}$, $1 \leq i \leq p-1$. В силу цикличности группы P_Z векторы $0, \overline{il}, \overline{2il}, \dots, \overline{(p-1)il}$ исчерпывают группу P_Z . Поскольку вектор $\overline{il}$ несравним со всеми ненулевыми элементами из множества P_Z , то у него найдутся координаты, обеспечивающие выполнение каждого из условий $\overline{x} > \overline{jx}$, $j=2, 3, \dots, p-1$, и поэтому система его координат представляет каждое из множеств $M_2, M_3, \dots, M_{p-1}$.

Пусть теперь у каждого ненулевого вектора $x \in P_Z$ координаты представляют каждое из множеств $M_2, M_3, \dots, M_{p-1}$. Пользуясь цикличностью группы P_Z , мы можем взять данный вектор в качестве образующего. Тогда у любого другого вектора из группы P_Z одна из координат будет меньше, чем соответствующая координата образующего. Таким образом, любые два ненулевых вектора из множества P_Z несравнимы.

Теорема 2. Если множество P_Z неприводимо, то у любого ненулевого вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_Z$ найдутся две координаты x_s и x_t такие, что

$$x_s + x_t > \frac{5}{6}.$$

Доказательство. Рассмотрим числители координат произвольного ненулевого вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_Z$, т. е. числа $px_1, px_2, \dots, px_n$. По теореме 1, среди них найдется представитель множества M_2 . Пусть это будет число px_s . Тогда $px_s > p/2$. Мы вправе предполагать, что все остальные координаты меньше, чем $p/2$, иначе есть две координаты, сумма которых больше 1. Обозначим через px_t самую большую из них.

Пусть теперь натуральное k выбрано так, что $\frac{1}{k+1}p < px_t < \frac{1}{k}p$. Тогда $px_i \notin M_i$, $i = 2, 3, \dots, k$. Поэтому $px_s \in \bigcap_{i=1}^k M_i$, т. е. $px_s > \frac{k-1}{k}p$.

Таким образом, $px_s + px_t > \frac{1}{k+1}p + \frac{k-1}{k}p = \frac{k^2 + k - 1}{k^2 + k}p$. Поскольку $\frac{k^2 + k - 1}{k^2 + k}$ монотонно возрастает, то $px_s + px_t > \frac{5}{6}p$.

Следствие. Если множество P_Z неприводимо, то у матрицы UA найдутся два элемента b_s и b_t такие, что $b_s + b_t < \frac{7}{6}p$.

Рассмотрим вектор $l = \left(\frac{p-b_1}{p}, \frac{p-b_2}{p}, \dots, \frac{p-b_{n-1}}{p}, \frac{1}{p} \right)$. Тогда найдутся две координаты $\frac{p-b_s}{p}$ и $\frac{p-b_t}{p}$ такие, что $\frac{p-b_s}{p} + \frac{p-b_t}{p} > \frac{5}{6}$ и, следовательно, $b_s + b_t < \frac{7}{6}p$.

Неравенство теоремы 2, вообще говоря, не может быть усилено. Это неравенство означает, что у любой точки $\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}, \dots, \frac{x_n}{p} \right) \in P_Z$ найдутся две координаты $\frac{x_s}{p}$ и $\frac{x_t}{p}$ такие, что их числители удовлетворяют неравенству $x_s + x_t > \frac{5}{6}p$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

Вычислив все векторы из множества P_Z , нетрудно убедиться, что они

попарно несравнимы. Однако среди них имеется вектор $\left(\frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}, \frac{9}{17}, \frac{1}{17}\right)$, у которого максимум попарных сумм числителей координат равен 15, а $\frac{5}{6}p = 14\frac{1}{6}$, в то время как между этими числами нет ни одного целого.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. С. 106.
2. Шевченко В. Н. // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 8. С. 1264.
3. Петрова Г. Л. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1976. № 2. С. 101.
4. Петрова Г. Л. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1985. № 4. С. 24.

Поступила в редакцию 10.01.86.

УДК 681.3

А. Е. ЛЮЛЬКИН

К ТЕСТОВОЙ ПРОВЕРКЕ ПРОГРАММИРУЕМОГО МУЛЬТИПЛЕКСОРА

Программируемый мультиплексор (ПМ) представляет собой двухъярусную каскадную логическую схему (т. е. схему, в которой элементы распределены по ярусам и выходные полюсы элементов из i -го яруса непосредственно могут соединяться с входными полюсами лишь элементов яруса $i+1$ [1]), общий вид которой показан на рисунке. Первый ярус составляют программируемые матрицы $M_1, \dots, M_t$ с общими входами $x_1, \dots, x_s$, идентичные дизъюнктивной матрице ПЛМ [2]. Второй ярус представляет собой t мультиплексоров $W_1, \dots, W_t$ с общими управляющими входами $v_1, \dots, v_n$, а информационные входы которых (их у каждого мультиплексора 2^n) соединены с выходами соответствующих матриц $M_1, \dots, M_t$. Напомним, что мультиплексор реализует следующую функцию:

$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} v_1^{\delta_1} \dots v_n^{\delta_n} z_j,$$

где $z_0, \dots, z_{2^n-1}$ — информационные входы мультиплексора; $\delta_n \dots \delta_1$ — двоичный код числа j , т. е. $j = \delta_1 \cdot 2^0 + \delta_2 \cdot 2^1 + \dots + \delta_n \cdot 2^{n-1}$; $v_i^0 = \bar{v}_i$, $v_i^1 = v_i$. Следовательно, значение сигнала на выходе мультиплексора совпадает со значением сигнала на том информационном входе, номер которого определяется двоичным набором, представляющим собой входное воздействие на управляющие входы мультиплексора. Таким образом, каждая программируемая матрица M_k содержит 2^n выходных шин.

Будем рассматривать следующие неисправности в ПМ: неисправности настройки матриц $M_1, \dots, M_t$; константные неисправности на входных полюсах $x_1, \dots, x_s$, $v_1, \dots, v_n$, линиях связи между программируемыми матрицами и мультиплексорами, на выходных полюсах $y_1, \dots, y_t$.

По аналогии с ПЛМ в качестве модели программируемой матрицы M_k будем использовать булеву матрицу $M^k = [m_{ij}^k]$, элементы которой соответствуют точкам коммутации шин и принима-

