Доказательство леммы следует из почти очевидных равенств $Q^k z_0(t, s) = mc^k \frac{(k\alpha+\beta)^{k\alpha+\beta}}{\alpha^{k\alpha}\beta^{\beta}(k+1)!}(1-s)^{-k\alpha-\beta}t^{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и определения обобщенного спектрального радиуса оператора Q.

Допустим теперь, что задана функция $f(t, x):[0, T]\times E_0 \to E_0$, непрерывная по t в X_s при $x\in X_\sigma$ $(\sigma>s)$, причем выполнены условия

$$\|f(t, x_1)-f(t, x_2)\|_s \leqslant c(\sigma-s)^{-\alpha}\|x_1-x_2\|_\sigma \quad (0\leqslant s<\sigma<1) \tag{12}$$

и

$$\|f(t, x)\|_s \leqslant m(x)(1-s)^{-\beta} \quad (0\leqslant s<1). \tag{13}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(0)=x_0 \ \ (x_0\in \bigcap_{0<s<1} E_s). \tag{14}$$

Эта задача сводится к исследованию операторного уравнения (5) с оператором

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau; \tag{15}$$

этот оператор, очевидно, удовлетворяет условию (4), в котором Q определен равенством (11). Тем самым, из теоремы 1 и леммы 2 следует

Теорема 2. *Задача Коши (14) при $\alpha<1$ имеет единственное в X_δ решение, определенное на всем $[0, T]$. Задача Коши (14) при $\alpha=1$ имеет, по крайней мере, одно решение, определенное на $[0, T_*]$, где $T_*=$ $=\min\{T, (ce)^{-1}\}$; это решение единственно на множестве функций*

$$\mathbf{M}(x_0)=\{x(t)\in X_\delta:\ \sup_{1\leqslant s<0}\|x(t)-x_0\|_s(1-s)^\beta<\infty\}.$$

Таким образом, утверждение теоремы 2 в случае $\alpha=1$ является одним из обобщений классической теоремы Л. В. Овсянникова (см. [2—8]).

Список литературы

1. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенные методы решения операторных уравнений. М., 1969.
2. Yamanaka T. // Comment. Math. Univ. St. Paul. 1960. V. 9. P. 7.
3. Овсянников Л. В. // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 819.
4. Treves J. K. Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators // Notas. Math. (Mimeographed Notes). 1968. Т. 46.
5. Treves J. K. // Trans. Amer. Soc. Math. 1970. V. 150. P. 77.
6. Овсянников Л. В. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789.
7. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
8. Радыно Я. В. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1412.

Поступила в редакцию 17.04.86.

УДК 519.1

И. Э. ЗВЕРОВИЧ

СТЕПЕННОЕ МНОЖЕСТВО ДЕРЕВА

Рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Неопределяемые понятия можно найти в [1]. Степенным множеством D_G графа G называется множество степеней вершин G [2]. Известны условия реализуемости [3] и однозначной реализуемости [4] пары (S, p), где

$$S=\{k_1, \ldots, k_n\},\ 0<k_1<k_2<\ldots<k_n,\ n\geqslant 1 \tag{1}$$

и $p\geqslant 1$, графом G порядка p с $D_G=S$. Эти условия легко проверяются. Известны также условия реализуемости множества S деревом [2]: (1) реализуется деревом тогда и только тогда, когда $k_1=1$.

В этой статье доказано, что задача древесной реализуемости пары (S, p) NP-полна и описаны все пары (S, p) с единственной реализацией — деревом.

Предложение 1. Если $S=\{k_1, \ldots, k_n\}$, $1=k_1<k_2<\ldots<k_n$, $n\geqslant 1$ и $p\geqslant 1$, то существует дерево порядка p со степенным множеством S тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: 1) $n=1$, $p=2$; 2) $n\geqslant 2$, $p=2+\sum_{i=2}^{n} x_i(k_i-1)$ при некоторых целых $x_i\geqslant 1$ $(i=\overline{2, n})$.

Доказательство. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n\geqslant 2$.

Необходимость. Пусть дерево T порядка p имеет степенное множество S. Обозначим через x_i число вершин степени k_i в T $(i=\overline{1, n})$. По теоремам 2.1 и 4.1 [1] $\sum_{i=1}^{n} x_i k_i=2(p-1)$. Но $p=\sum_{i=1}^{n} x_i$, поэтому $\sum_{i=1}^{n} x_i(k_i-1)=$ $=p-2$ и $\sum_{i=2}^{n} x_i(k_i-1)+2=p$.

Достаточность. Рассмотрим граф $\bigcup_{i=2}^{n} x_i K_{1,k_i-2}$, составленный из дизъюнктных звезд. (Считаем, что $K_{1,0}=K_1$ и в звезде $K_{1,1}$ только одна вершина является центром.) Проведем простую цепь P через центры звезд в произвольной последовательности. Пусть u, v — концевые вершины P. Добавим две новые вершины u', v' вместе с ребрами (u, u'), (v, v'). Предложение доказано.

Следствие 1 [2]. Минимальный порядок дерева с данным степенным множеством $S=\{k_1, \ldots, k_n\}$, $1=k_1<k_2<\ldots<k_n$, $n\geqslant 1$, равен $\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)+2$.

Доказательство. Положим в предложении 1 $x_i=1$ для всех $i=\overline{2, n}$.

Теорема 1. Для пары (S, p) задача о существовании дерева порядка p со степенным множеством S является NP-полной.

Доказательство. Пусть

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=a \tag{2}$$

—уравнение с попарно различными целыми положительными коэффициентами, a — целое. В [5] показано, что задача о существовании решения уравнения (2) в множестве неотрицательных (без ограничения общности, положительных) целых чисел является NP-полной. Но эта задача сводится к рассматриваемой. Действительно, пусть $a_1<\ldots<a_n$. Положим $S=\{1, a_1+1, \ldots, a_n+1\}$ и $p=a+2$, а затем воспользуемся предложением 1. Теорема доказана.

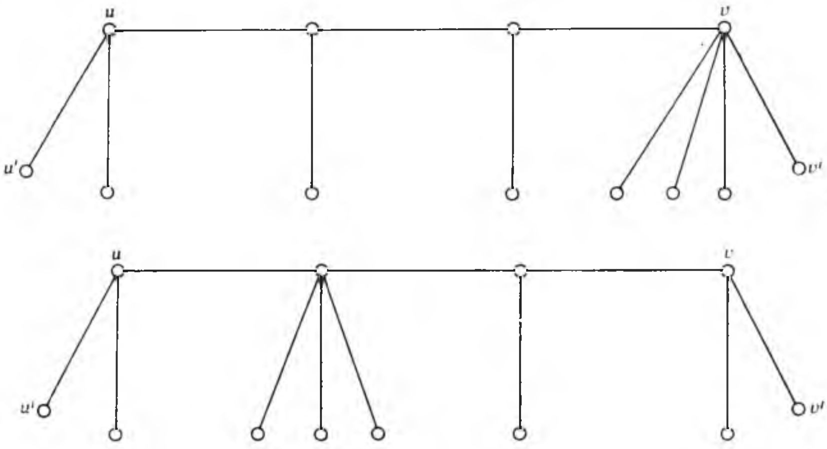
Теорема 2. Если существует дерево порядка p со степенным множеством S, то такое дерево единственно только в следующих случаях: 1) $S=\{1\}$, $p=2$; 2) $S=\{1, 2\}$, $p\geqslant 3$; 3) $S=\{1, k_2\}$, $p\in\{k_2+1, 2k_2, 3k_2-1\}$; 4) $S=\{1, k_2, k_3\}$, $p=k_2+k_3$.

Доказательство. Если в S $n\geqslant 3$ и

$$(S, p)\neq(\{1, k_2, k_3\}, k_2+k_3), \tag{3}$$

то воспользуемся доказательством достаточности предложения 1 для построения двух неизоморфных деревьев порядка p со степенным множеством S. В одном случае можно провести цепь $P=P(u, v)$ так, чтобы $\deg u=k_2$ и $\deg v=k_3$. Но при $n\geqslant 4$ можно еще взять $\deg u=k_2$, $\deg v=k_3$, а при $n=3$ условие (3) гарантирует наличие двух невисячих вершин одинаковой степени в любой древесной реализации пары (S, p), что позволяет построить цепь $P(u, v)$ с $\deg u=\deg v\in\{k_2, k_3\}$. Пример для $n=3$ показан на рисунке.

Пусть теперь $n=2$ и $k_2\geqslant 3$. Если p такое, как в 3), то единственность реализации легко проверяется. Если же $p=2+x_2(k_2-1)$, $x_2\geqslant 4$, то на вершинах степени k_2 можно построить два неизоморфных графа: простую цепь и дерево с одной вершиной степени 3. Оставшиеся случаи рассматриваются легко. Теорема доказана.



Две неизоморфные древесные реализации пары ({1, 3, 5}, 12)

Известна задача о существовании k-дерева с данным степенным множеством [6]. В связи с этим было бы полезно иметь аналог предложения 1 для k-деревьев. Напомним определение k-дерева ($k \geqslant 2$), которое называют еще (k—1)-деревом [7, 8] и (k—2, k—1)-деревом [9].

1. Гиперграф с k вершинами и единственным ребром мощности k является k-деревом.

2. Если T есть k-дерево, то гиперграф, полученный добавлением к T новой вершины v и одного ребра $\{v, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, где $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ — подмножество некоторого ребра гиперграфа T, является k-деревом.

3. Любое k-дерево может быть получено по правилам 1—2.

Заметим, что множество деревьев в обычном смысле совпадает с множеством 2-деревьев.

Предложение 2. Пусть множество $S=\{k_1, \ldots, k_n\}$, $1=k_1<\ldots<k_n$, $n \geqslant 2$, является степенным множеством некоторого k-дерева порядка p, $k \geqslant 2$. Тогда существуют целые $x_i \geqslant 1$, $i=\overline{2, n}$, такие, что

$$\sum_{i=2}^{n} x_i \geqslant k \text{ при } n \geqslant 3; \quad \sum_{i=2}^{n} x_i \geqslant k-1 \text{ при } n=2; \tag{4}$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_i (k_i - 1) \text{ делится на } (k-1); \quad p=k+\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i (k_i-1)}{k-1}. \qquad (5)—(6)$$

Доказательство. Пусть T является k-деревом порядка p со степенным множеством S. Обозначим через x_i ($i=\overline{2, n}$) число вершин степени k_i в T. Пусть Q, R обозначают гиперграфы, индуцированные вершинами степеней $k_2, \ldots, k_n$ и $k_1=1$ соответственно. Если $\sum_{i=2}^{n} x_i \geqslant k$, то T содержит ровно $q=\sum_{i=2}^{n} x_i-(k-1)$ ребер, так как в противном случае T несвязно. Если $\sum_{i=2}^{n} x_i<k$, то ясно, что тогда $\sum_{i=2}^{n} x_i=k-1$, $n=2$ и (5)—(6) проверяются непосредственно. Пусть в дальнейшем $\sum_{i=2}^{n} x_i \geqslant k$.

Гиперграф R не содержит ребер, поскольку $n \geqslant 2$ и T связно. В индуцированном двудольном гиперграфе между множествами Q и R каждое ребро содержит $k-1$ вершину множества Q и одну вершину множества R, поэтому

$$\sum_{u \in VQ} \deg u - kq = (k-1) \sum_{v \in VR} \deg v, \tag{7}$$

где VH обозначает множество вершин гиперграфа H. Поскольку $\sum_{u \in VQ} \deg u = \sum_{i=2}^{n} x_i k_i$, $\sum_{v \in VR} \deg v = p - \sum_{i=2}^{n} x_i$, то из (7) выводим $k(k-1) + \sum_{i=2}^{n} x_i (k_i - 1) = (k-1) p$, откуда легко получаются (5) и (6). Предложение доказано.

Заметим, что предложение 2, в отличие от предложения 1, не дает достаточных условий. Например, в [6] показано, что множество $S = \{1, 4, 6\}$ не реализуется никаким 5-деревом, хотя при $x_2 = x_3 = 4$, $p = 13$ условия (4)—(6) выполняются.

Автор благодарен профессору Р. И. Тышкевич за руководство работой.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Kapoor S. F., Polimeni A. D., Wall C. E. // Fund. Math. 1977. V. 95. N 3. P. 189.
3. Sipka T. A. // J. Graph Theory. 1980. V. 4. P. 301.
4. Черняк А. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 5. С. 400.
5. Шевченко В. Н. // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, 1982. С. 166.
6. Duke R. A., Winkler P. M. // Israel J. Math. 1981. V. 40. N 3—4. P. 296.
7. Beineke L. W., Pippert R. E. // Mathematika. 1971. V. 18. P. 141.
8. Harary F., Palmer E. M. // Ibid. 1968. V. 15. P. 155.
9. Dewdney A. K. // J. Comb. Theory. Ser. B. 1974. V. 17. P. 160.

Поступила в редакцию 31.01.86.

УДК 519.4+51

Г. Л. ПЕТРОВА

О НЕПРИВОДИМОСТИ ПОРОЖДАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Пусть R — поле вещественных чисел; Z — кольцо целых чисел; Z^n — решетка n-мерных векторов над Z; A — целочисленная невырожденная матрица со столбцами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in R, \alpha_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n\right\}$.

Известно [1—3], что полиэдральная полугруппа $R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap Z^n$ является конечнопорожденной, причем в качестве порождающего множества можно взять векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и все векторы из $P_Z = P \cap Z^n$, где $P = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in R,\ 0 \leqslant \alpha_i < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Интересен вопрос: когда указанное порождающее множество является неприводимым, т. е. когда никакой элемент из P_Z не равен сумме других ненулевых элементов?

Будем говорить, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqslant (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если $\alpha_i \geqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Как известно [4], множество P_Z неприводимо тогда и только тогда, когда оно состоит из попарно несравнимых ненулевых векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где координаты берутся в базисе $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Опреде-