

мой Чебышева и Маркова. // Редкол. ж. «Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук». Минск, 1985, 21 с. Деп. в ВІНІТИ 20.05.86. № 3637-В86.

5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1.

6. Ramapujan S. // Proc. Lond. Math. Soc., 1915. V. 2. N 14. P. 347.

Поступила в редакцию 01.11.85.

УДК 517.968

С. В. РОГОЗИН, Ф. В. ЧУМАКОВ

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КАРЛЕМАНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим на вещественном отрезке $[-a; a]$ интегральное уравнение первого рода с суммарно-разностным ядром

$$\int_{-a}^a \left(\frac{A(x)}{|x-t|^\alpha} + \frac{B(x)}{|x+t|^\alpha} \right) \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Будем предполагать, что известные вещественнозначные функции $A(x)$, $B(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$A(x), B(x) \in H_\lambda[-a; a] \quad (\lambda > 1 - \alpha), \quad (2)$$

$$f(x) = (a^2 - x^2)^{\varepsilon - \alpha} f^*(x), \quad (\varepsilon > 0), \quad f^*(x) \in H_\lambda. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) ищем в классе функций

$$\varphi(x) = (a^2 - x^2)^{\varepsilon - \alpha} \varphi^*(x), \quad (4)$$

где $\varphi^*(x)$ — гильбертовская на $[-a; a]$ функция. Приведенное уравнение является обобщением известного уравнения Карлемана [1, с. 580], часто встречающегося в различных областях математики и механики. Дадим решение этого уравнения в замкнутой форме и приложение его к исследованию одной четырехэлементной краевой задачи.

1. Пусть

$$I(x) = \int_{-a}^a \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^\alpha}. \quad (5)$$

Запишем тогда уравнение (1) в виде

$$A(x)I(x) + B(x)I(-x) = f(x) \quad (6)$$

(см. [3, 4]). Заменяя x на $-x$ в (6), получаем систему двух функциональных уравнений:

$$\begin{cases} A(x)I(x) + B(x)I(-x) = f(x), \\ B(-x)I(x) + A(-x)I(-x) = f(-x). \end{cases} \quad (7)$$

Решение (6) ищем в классе (3). Система (7) равносильна функциональному уравнению (6) в том смысле, что каждое решение $I(x)$ уравнения (6), удовлетворяющее условию (3), является решением системы (7) и наоборот. Функцию $\varphi(x)$ находим, решая уравнение Карлемана (5), которое при сделанных предположениях безусловно разрешимо.

Рассмотрим возможные случаи.

1°. Пусть определитель системы (7)

$$\Delta(x) \equiv A(x)A(-x) - B(x)B(-x) \neq 0, \quad x \in [-a; a]. \quad (8)$$

Из (7) находим

$$I(x) = \frac{f(x)A(-x) - f(-x)B(x)}{\Delta(x)}. \quad (9)$$

Очевидно, $I(x)$ удовлетворяет условию (3).

Решая уравнение (5) [1, с. 580], находим φ в классе (4), которая определяется по формуле

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-a}^x \frac{I(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} -$$

$$-\frac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi^2} \int_{-a}^x \frac{Z(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-a}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \int_{\tau}^a \frac{I(s) ds}{Z(s)(s-\tau)^{1-\alpha}} \right) dt, \quad (10)$$

$$Z(t) \equiv (t+a)^{\frac{1+\alpha}{2}} (a-t)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

2°. В вырожденном случае, когда

$$\Delta(x) \equiv 0 \quad (x \in [-a; a]), \quad (11)$$

система (7) будет неразрешимой относительно $I(x)$, если

$$\Delta_1(x) \equiv A(-x)f(x) - B(x)f(-x) \neq 0 \text{ на } [-a; a]. \quad (12)$$

Таким образом, система (7), а следовательно, и исходное уравнение не имеют нетривиальных решений.

Пусть имеет место (11) и выполняется дополнительное условие

$$\Delta_1(x) \equiv 0 \text{ на } \{-a; a\}. \quad (13)$$

Если $A(x) \neq 0$, то из (11) следует, что и $B(x) \neq 0$. Положим

$$K(x) \equiv \frac{A(-x)}{B(x)} = \frac{B(-x)}{A(x)} = \frac{f(-x)}{f(x)}. \quad (14)$$

Очевидно, $K(x) \neq 0$. Предположим вначале, что $K(x) > 0$. Умножаем (6) на арифметический корень $\sqrt{K(x)}$ и получаем

$$U(x) + U(-x) = G(x), \quad (15)$$

$$\text{где } U(x) \equiv A(x) \sqrt{K(x)} I(x), \quad G(x) \equiv f(x) \sqrt{K(x)}. \quad (16)$$

Здесь $G(x)$ — четная функция.

Решение функционального уравнения (15) дается формулой

$$U(x) = \frac{1}{2} G(x) + F(x), \quad (17)$$

где $F(x)$ — произвольная нечетная функция. Будем считать, что $F(x)$ принадлежит классу (3). Находя из (16) и (17) функцию $I(x)$ и подставляя ее в (10), получим решение исходного уравнения (1). В этом случае однородное уравнение ($f(x) \equiv 0$) имеет бесконечно много решений из класса (4), неоднородное уравнение (1) разрешимо при любой правой части из класса (3).

Умножая уравнение (6) в случае $K(x) < 0$ на $\sqrt{-K(x)}$, получаем функциональное уравнение

$$V(x) - V(-x) = R(x), \quad (18)$$

$$\text{где } V(x) \equiv A(x) \sqrt{-K(x)} I(x), \quad R(x) \equiv f(x) \sqrt{-K(x)}. \quad (19)$$

Здесь $R(x)$ — нечетная функция.

Решение (18) дается формулой

$$V(x) = \frac{1}{2} R(x) + P(x), \quad (20)$$

где $P(x)$ — произвольная четная функция. Будем считать, что $P(x)$ берется из класса функций (3).

Находя $I(x)$ из (19) и подставляя в (10), получим искомое решение φ . Характер решения (1) такой же, как и при $K(x) > 0$.

Случай обращения в нуль или бесконечность функции $K(x)$ в точках отрезка $[-a; a]$ здесь нами не рассматривается.

3°. Рассмотрим случай, когда определитель системы (7) обращается в нуль на множестве $M \subset [-a; a]$, причем $\text{mes } M = 0$. В каждой точке $x \notin M$ однородная система (7) имеет нулевое решение, независимо от разрешимости этой системы в точках множества M . Отсюда можно сделать вывод, что решение однородной системы тождественно равно нулю

на $(-a; a)$. Предположим, что функция $\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}$ ($x \in (-a; a) \setminus M$) допускает продолжение по непрерывности на $(-a; a)$, причем $\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} \equiv$

$\in H_\mu(-a; a)$, $\mu > 1 - \alpha$. Тогда функция $I_0(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}$ будет единственным решением неоднородной системы (7). Следовательно, в этом случае уравнение (1) будет иметь единственное решение в искомом классе, определяемое по формуле (10), где $I(x)$ следует заменить на $I_0(x)$. Однородное уравнение (1) будет иметь лишь тривиальное решение. Если $\frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}$ не допускает упомянутого продолжения по непрерывности, то система (7) неразрешима в класса (3), а значит, исходное уравнение не будет иметь решения в классе (4).

2. Рассмотрим однородное интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром с внутренними коэффициентами, союзное к уравнению (1)

$$\int_{-a}^a \left(\frac{A(t)}{|x-t|^\alpha} + \frac{B(t)}{|x+t|^\alpha} \right) \psi(t) dt = 0. \quad (21)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\int_{-a}^a \frac{A(t)\psi(t) + B(-t)\psi(-t)}{|x-t|^\alpha} dt = 0. \quad (21')$$

Уравнение (21') [1, с. 580] имеет только тривиальное решение, т. е. уравнение (21) равносильно функциональному уравнению

$$A(t)\psi(t) + B(-t)\psi(-t) = 0 \quad (22)$$

или системе функциональных уравнений

$$\begin{cases} A(t)\psi(t) + B(-t)\psi(-t) = 0, \\ B(t)\psi(t) + A(-t)\psi(-t) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Для этой системы можно сделать выводы, аналогичные выводам для системы (7), а именно:

- 1) система (23) имеет только тривиальное решение, если $\Delta(t) \equiv A(t)A(-t) - B(t)B(-t) \neq 0$;
- 2) система (23) имеет бесконечно много решений (такого же типа, как и система (7)), если $\Delta(t) \equiv 0$, $A(t) \neq 0$;
- 3) неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (21)

$$\int_{-a}^a \left(\frac{A(t)}{|x-t|^\alpha} + \frac{B(t)}{|x+t|^\alpha} \right) \psi(t) dt = h(x),$$

имеет единственное решение, если $\Delta(t) \neq 0$, и имеет бесконечно много решений, зависящих от произвольной четной или нечетной функции,

если $\Delta(t) \equiv 0$, $\Delta_1(t) \equiv A(-t)\tilde{h}(t) - B(-t)\tilde{h}(-t) \equiv 0$, $A(t) \neq 0$.

3. Четырехэлементная краевая задача Карлемана [2, с. 236]

$$\begin{aligned} & A(x)\Phi^+(x) + B(x)\Phi^+(-x) + A(x)\Phi^-(x) + \\ & + B(x)\Phi^-(-x) = \frac{1 - e^{-\alpha\pi i}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} f(x), \end{aligned} \quad (24)$$

$$(-a < x < a, 0 < \alpha < 1),$$

где f удовлетворяет условию (3), A, B — условию (2), равносильна интегральному уравнению (1) — каждому решению (1) из класса (4) соответствует решение задачи (24)

$$\Phi(z) = \frac{1}{(a^2 - z^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} \int_{-a}^a \frac{\varphi(t) dt}{(t-z)^\alpha}, \quad (25)$$

и, наоборот, каждому решению $\Phi(z)$ задачи (24), предельные значения которого удовлетворяют условию

$$\Phi^{\pm}(x) = \frac{\Phi_{*}^{\pm}(x)}{(a^2 - x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{\frac{1+\alpha}{2}}} \quad (\varepsilon > 0), \quad \Phi_{*}^{\pm}(x) \in H_{\lambda}, \quad (26)$$

соответствует решение φ уравнения (1), определяемое по формуле (10), в которой следует заменить $I(x)$ на функцию

$$\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{1 - e^{-\alpha\pi i}} (\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x)).$$

При сделанных предположениях φ принадлежит классу (4).

Из равносильности в соответствующих классах (1) и (24) вытекает

Теорема. Пусть f удовлетворяет условию (3), A, B — условию (2). Если $\Delta(x) \neq 0$ на $[-a; a]$, то краевая задача (24) имеет в классе (26) единственное решение.

Если $\Delta(x) \equiv 0$ и $\Delta_1(x) \equiv 0$ на $[-a; a]$, то краевая задача (24) имеет в классе (26) бесконечно много решений, зависящих от произвольной четной или нечетной функции.

Решения задачи (24) находятся по формуле (25), где $\varphi(t)$ — соответствующее решение уравнения (1).

З а м е ч а н и е. Из п. 1, 2 вытекает, что уравнение (1) (и равносильная ему задача (24)) является нётеровым (и даже фредгольмовым) тогда и только тогда, когда

$$\Delta(x) \equiv A(x)A(-x) - B(x)B(-x) \neq 0, \quad x \in [-a; a].$$

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.
3. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. // Изв. АН АрмССР. Математика. 1970. Т. 5. № 5. С. 441.
4. Кўсзта М. Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968.

Поступила в редакцию 20.02.86.

УДК 517.988.8; 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, Т. А. МАКАРЕВИЧ

ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ТЕОРЕМА Л. В. ОВСЯННИКОВА

Известная теорема Л. В. Овсянникова и ее многочисленные обобщения внесли большой вклад в решение проблемы о разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений, однако она стоит несколько в стороне от классических принципов неподвижной точки разрешимости операторных уравнений. В настоящей статье показывается, что теорема Л. В. Овсянникова является следствием одного варианта принципа сжимающих отображений в псевдометрических (К-метрических) пространствах. Предлагаемый вариант принципа сжимающих отображений основан на естественном обобщении понятия спектрального радиуса на не обязательно линейные операторы, действующие в упорядоченных линейных пространствах.

1. Пусть Ω — произвольное множество, $F(\Omega)$ — пространство всех вещественных функций на Ω с обычными линейными операциями и порядком, в $F(\Omega)$ определена естественная (поточечная) сходимости; пусть $K(\Omega)$ — конус неотрицательных функций из $F(\Omega)$.

Допустим, что оператор Q определен на некотором подмножестве из $K(\Omega)$, содержащем 0, и принимает на этом множестве значения из $K(\Omega)$. Нас будет интересовать вопрос о множестве $\Sigma(Q)$ элементов $z \in K(\Omega)$, для которых ряд Неймана