

б) модель ОТ

$$M(EO) = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} [F_i F_f + G_i G_f] [R_0 - r] dr = \frac{-2}{\kappa R_0^2} \int_0^{R_0} [G_i F_f - G_f F_i] dr.$$

Из уравнения непрерывности (10) и формулы, связывающей плотность ядерного перехода $\rho_0(R)$ с плотностью заряда ядра в основном состоянии в модели Тасси $\rho_{\text{осн.}}(R)$:

$$\rho_0(R) R^2 = -\frac{d}{dR} [R^3 \rho_{\text{осн.}}(R)], \quad (17)$$

установим аналогию $J_0^1(R) \sim i k \rho_{\text{осн.}}(R) R$. Следовательно, для этой гидродинамической модели Тасси получим:

$$M(EO) = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty [G_f F_i - G_i F_f] R \rho_{\text{осн.}}(R) dR. \quad (18)$$

Непосредственная постановка (17) в (16 г) дает аналогичный результат.

Приложение А

Согласно (6), имеем:

$$F_f \frac{d}{dr} G_i = -\frac{\kappa_i}{r} G_i F_f + [E_i - V(r) + 1] F_i F_f,$$

$$G_i \frac{d}{dr} F_f = \frac{\kappa_f}{r} G_i F_f - [E_f - V(r) - 1] G_i G_f,$$

$$F_i \frac{d}{dr} G_f = -\frac{\kappa_f}{r} G_f F_i + [E_f - V(r) + 1] F_i F_f,$$

$$G_f \frac{d}{dr} F_i = \frac{\kappa_i}{r} G_f F_i - [E_i - V(r) - 1] G_i G_f.$$

Учитывая, что $k = E_f - E_i$, получаем:

$$\frac{d}{dR} [G_i F_f - F_i G_f] = \frac{\kappa_f - \kappa_i}{R} [F_i G_f + G_i F_f] - k [F_i F_f + G_i G_f].$$

Так как для ЕОК $\kappa_i = \kappa_f$, будем иметь:

$$\frac{d}{dR} [G_i F_f - F_i G_f] = -k [F_i F_f + G_i G_f].$$

Список литературы

1. Банд И. М. и др. Аномалии в КВК γ -лучей. Л., 1976.
2. Борисоглебский Л. А. // УФН. 1963. Т. 81. С. 271.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1959.

Поступила в редакцию 14.05.85.

УДК 530.12; 30.145

Г. В. ШИШКИН, В. ВИЛЬЯЛЬБА

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА ВО ВНЕШНИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЯХ

1. Проблема точных решений уравнения Дирака еще далека от окончательного завершения, несмотря на то, что изучается многие годы. Представляя собой фактически систему четырех уравнений в частных производных, уравнение Дирака приводит зачастую к непреодолимым трудностям уже на первом этапе поисков точных решений — при разделении переменных. Не случайно поэтому число точных решений уравнения Дирака долгие годы было весьма ограничено: наиболее известные из них — свободный электрон, водородоподобный атом, эффект Зеемана и электрон в поле плоской монохроматической электромагнитной волны.

Серьезный прогресс в рассматриваемой проблеме наметился благодаря планомерным исследованиям группы В. Г. Багрова и В. Н. Шаповалова [1] (Томск). Существенным вкладом в данную проблему является также использование метода проективных операторов, предложенного Ф. И. Федоровым [2] (Минск). Следует отметить, однако, что в работах [1] (см. также обзор [3]) основное внимание уделяется электромагнитным потенциалам, тогда как скалярное поле остается мало исследованным (авторы ограничиваются, как правило, потенциалами, зависящими от одной переменной). Наконец, укажем, что все сказанное относится к уравнению Дирака в плоских пространствах при наличии внешних полей, т. е. речь идет о пространстве Минковского (специальная теория относительности).

В последние годы исследователи обратили внимание на уравнение Дирака во внешних гравитационных полях, т. е. в римановых пространствах (общая теория относительности). И хотя здесь речь идет чаще всего пока лишь о конкретных полях [4—8], тем не менее появляются также частные методики, дающие надежду на возможность разработки общих методов разделения переменных в уравнении Дирака в произвольных римановых пространствах [9]. Метод, предложенный в [9], позволил найти ряд точных решений непосредственно в физическом четырехмерном пространстве-времени, тогда как ранее некоторые авторы предпочитали пользоваться искусственно вводимым пятимерием, где физическое пространство выступает в качестве некоторой гиперповерхности (см., например, [6—8]).

В настоящей работе предлагается процедура разделения переменных в уравнении Дирака в произвольных криволинейных ортогональных пространственных координатах в плоском пространстве-времени при наличии внешнего скалярного поля с последующим применением к конкретным координатам. Такой подход позволяет перечислить все скалярные поля, допускающие разделение переменных в уравнении Дирака.

Для скорости света и постоянной Планка принято $c=1$, $\hbar=1$.

2. Рассмотрим криволинейные координаты, вводимые в плоскости XV, т. е. по двум переменным, тогда как переменная z остается прежней. В качестве исходных рассматриваются декартовы координаты с интервалом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2. \quad (1)$$

Тогда, вводя криволинейные координаты в плоскости XY:

$$x=f(\mu, \nu), \quad y=g(\mu, \nu), \quad (2)$$

в соответствии с

$$dx=f_{,\mu}d\mu+f_{,\nu}d\nu, \quad dy=g_{,\mu}d\mu+g_{,\nu}d\nu \quad (3)$$

($f_{,\mu}$, $g_{,\mu}$ и $f_{,\nu}$, $g_{,\nu}$ — производные по μ , ν соответственно), для интервала имеем

$$ds^2 = (f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2) d\mu^2 + (f_{,\nu}^2 + g_{,\nu}^2) d\nu^2 + dz^2 - dt^2. \quad (4)$$

Здесь учтено, что в силу ортогональности μ и ν

$$f_{,\mu}f_{,\nu} + g_{,\mu}g_{,\nu} = 0. \quad (5)$$

Уравнение Дирака во внешнем скалярном поле V при этом принимает вид

$$\left\{ \gamma^\mu \frac{\partial_\mu}{(f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2)^{1/2}} + \gamma^\nu \frac{\partial_\nu}{(f_{,\nu}^2 + g_{,\nu}^2)^{1/2}} + \gamma^3 \partial_z + \gamma^4 \partial_t + i\gamma^4 V + m_0 \right\} \Psi = 0, \quad (6)$$

где

$$\gamma_\mu = f_{,\mu} \tilde{\gamma}_1 + g_{,\mu} \tilde{\gamma}_2, \quad \gamma_\nu = f_{,\nu} \tilde{\gamma}_1 + g_{,\nu} \tilde{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = \tilde{\gamma}_3, \quad \gamma_4 = \tilde{\gamma}_4. \quad (7)$$

Здесь γ — матрицы Дирака в криволинейных координатах такие, что

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} I, \quad (8)$$

и $\tilde{\gamma}$ — матрицы Дирака в декартовых координатах (постоянные)

$$\tilde{\gamma}_m \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_n \tilde{\gamma}_m = 2\eta_{mn} I, \quad (9)$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}\{f_{\mu}^2 + g_{\mu}^2, (f_{\nu}^2 + g_{\nu}^2), 1, -1\}, \quad \eta_{mn} = \text{diag}(1, 1, 1, -1). \quad (10)$$

Заметим, что в терминологии общей теории относительности, согласно (3), интервал (4) записан в декартовой калибровке, т. е. локальный пространственный трехмерный репер при переносе из одной точки пространства в другую не испытывает вращения и в связи с этим не возникает нефизических координатных «эффектов» в операторе момента [5]. Однако уравнение Дирака (6) при этом оказывается усложненным явной зависимостью матриц (7) от криволинейных координат. При этом представляется естественным следующий путь изучения и решения уравнения Дирака: 1) найти некоторое унитарное преобразование к представлению, в котором матрицы γ_{μ} , γ_{ν} становятся «плоскими», т. е. переходят в $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$; 2) решить полученное упрощенное уравнение (при этом, однако, следует ожидать, что решение, вообще говоря, может быть не однозначным [4]); 3) обратным унитарным преобразованием перейти в исходную калибровку (восстановить при этом однозначность волновой функции).

Итак, ищем такое S_{φ} , что

$$S_{\varphi}^{-1} \gamma S_{\varphi} = \tilde{\gamma}. \quad (11)$$

Из явного вида (7) и условия унитарности для S_{φ} имеем

$$S_{\varphi} = A - B \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2; \quad A^2 + B^2 = I. \quad (12)$$

Для выполнения (11) при $\gamma_{\mu} \rightarrow \tilde{\gamma}_1$ оказывается необходимым потребовать

$$A^2 - B^2 = \frac{f_{\mu}}{(f_{\mu}^2 + g_{\mu}^2)^{1/2}}, \quad 2AB = \frac{g_{\mu}}{(f_{\mu}^2 + g_{\mu}^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

и при требовании $\gamma_{\nu} \rightarrow \tilde{\gamma}_2$ имеем

$$\tilde{f}_{\mu} = g_{\nu}, \quad \tilde{f}_{\nu} = -g_{\mu}, \quad (14)$$

что не противоречит условию (5). Если ввести некоторую «угловую» переменную $\varphi(\mu, \nu)$ такую, что

$$A^2 - B^2 = \cos \varphi, \quad 2AB = \sin \varphi, \quad (15)$$

то окончательно для унитарного преобразования S_{φ} имеем

$$A = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad B = \sin \frac{\varphi}{2}; \quad S_{\varphi} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \right\}. \quad (16)$$

Ввиду того, что оператор S_{φ} зависит от координатных переменных μ, ν , преобразование (11) вместе с $\Psi = S_{\varphi} \psi$ приводит к появлению в уравнении Дирака дополнительных слагаемых со спинорной связностью Γ_{μ} , Γ_{ν} , т. е.

$$\left\{ \frac{\tilde{\gamma}^1 (\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}) + \tilde{\gamma}^2 (\partial_{\nu} - \Gamma_{\nu})}{(f_{\mu}^2 + g_{\mu}^2)^{1/2}} + \gamma^3 \partial_z + \gamma^4 \partial_t + i \tilde{\gamma}^4 V + m_0 \right\} \psi = 0, \quad (17)$$

где

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \quad \Gamma_{\nu} = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}. \quad (18)$$

Переходя к новой неизвестной функции Φ , согласно

$$\Phi = \frac{1}{(f_{\mu}^2 + g_{\mu}^2)^{1/4}} \psi, \quad (19)$$

избавляемся от этих слагаемых и получаем наиболее простой вид уравнения Дирака

$$\left\{ \frac{\tilde{\gamma}^1 \partial_\mu + \tilde{\gamma}^2 \partial_\nu}{(f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2)^{1/2}} + \tilde{\gamma}^3 \partial_z + \tilde{\gamma}^4 \partial_t + i\tilde{\gamma}^4 V + m_0 \right\} \Phi = 0, \quad (20)$$

где

$$\Psi = \frac{S_\varphi}{(f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2)^{1/4}} \Phi. \quad (21)$$

3. Связь наиболее общих криволинейных ортогональных координат с декартовыми можно записать в виде

$$x = f(\mu, \nu) \cos \varphi, \quad y = f(\mu, \nu) \sin \varphi, \quad z = g(\mu, \nu), \quad (22)$$

причем условия ортогональности μ, ν, φ (φ — угол, отсчитываемый вокруг оси Z) снова приводят к соотношению типа (14)

$$f_{,\mu} = -g_{,\nu}, \quad f_{,\nu} = g_{,\mu}. \quad (23)$$

Для интервала теперь имеем

$$ds^2 = (f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2) d\mu^2 + (f_{,\nu}^2 + g_{,\nu}^2) d\nu^2 + f^2 d\varphi^2 - dt^2. \quad (24)$$

Матрицы Дирака при декартовой калибровке тетрады записываем в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= f_{,\mu} \cos \varphi \tilde{\gamma}_1 + f_{,\mu} \sin \varphi \tilde{\gamma}_2 + g_{,\mu} \tilde{\gamma}_3, \\ \gamma_2 &= f_{,\nu} \cos \varphi \tilde{\gamma}_2 + f_{,\nu} \sin \varphi \tilde{\gamma}_2 + g_{,\nu} \tilde{\gamma}_3, \\ \gamma_3 &= -f \sin \varphi \tilde{\gamma}_1 + f \cos \varphi \tilde{\gamma}_2, \quad \gamma_4 = \tilde{\gamma}_4. \end{aligned} \quad (25)$$

По аналогии с п. 2 находим унитарное преобразование S , осуществляющее переход

$$\gamma_1 \rightarrow \tilde{\gamma}_1, \gamma_2 \rightarrow \tilde{\gamma}_2, \gamma_3 \rightarrow \tilde{\gamma}_3. \quad (26)$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\varphi, \theta} &= S_\varphi S_\theta \alpha = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \theta \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^1 \right\} \alpha, \\ \alpha &= \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3 + \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^1 + I), \quad \theta = \arctg (f_{,\mu}/f_{,\nu}). \end{aligned} \quad (27)$$

При этом порождается спинорная связность

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu}, \quad \Gamma_\nu = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial \theta}{\partial \nu}, \\ \Gamma_\varphi &= \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3 \cos \theta + \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^3 \sin \theta). \end{aligned} \quad (28)$$

По аналогии с (19) от соответствующих слагаемых избавляемся некоторым преобразованием неизвестной функции и получаем наиболее простую форму уравнения Дирака

$$\left\{ \frac{\tilde{\gamma}^1 \partial_\mu + \tilde{\gamma}^2 \partial_\nu}{(f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2)^{1/2}} + \frac{\tilde{\gamma}^3}{f} \partial_\varphi + \tilde{\gamma}^4 \partial_t + i\tilde{\gamma}^4 V + m_0 \right\} \Phi = 0, \quad (29)$$

где

$$\Psi = \frac{S_\varphi S_\theta \alpha}{(f_{,\mu}^2 + g_{,\mu}^2)^{1/4} f^{1/2}} \Phi. \quad (30)$$

4. Пусть имеется некоторое дифференциальное уравнение (либо система уравнений) в частных производных. Если в этом уравнении можно разделить переменные, например, x_α и x_β (под x_α и x_β мы понимаем не обязательно одну переменную, это может быть совокупность переменных), то оно с необходимостью представимо в форме

$$(\widehat{K}_\alpha + \widehat{K}_\beta)\Psi = 0, \quad (31)$$

причем операторы, относящиеся к разным переменным, естественно, коммутируют

$$[\widehat{K}_\alpha \widehat{K}_\beta]_- = 0. \quad (32)$$

Решение уравнения (31) при этом имеет вид

$$\Psi = A(x_\alpha) B(x_\beta) W, \quad (33)$$

где W — некоторый постоянный вектор (матрица-столбец); A, B — матрицы, зависящие от указанных переменных, и

$$[A, B]_- = 0. \quad (34)$$

При этом

$$\widehat{K}_\alpha A W = a A W, \quad \widehat{K}_\beta B W = b B W. \quad (35)$$

Согласно (20), (29), изучаемое уравнение Дирака можно представить в виде (31) при соответствующем определении скалярного потенциала V .

Исходя из уравнения Дирака для наиболее общих криволинейных координат (29), нетрудно видеть, что, допустив

$$V = V_{123}(x_1, x_2, x_3) + V_4(x_4) \quad (x_4 = t), \quad (36)$$

имеем

$$(\widehat{K}_{123} + \widehat{K}_4)\Phi = 0, \quad [\widehat{K}_{123}, \widehat{K}_4]_- = 0; \quad (37)$$

$$\widehat{K}_{123} = \frac{\widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^1 \partial_1 + \widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^2 \partial_2}{(f, \mu^2 + g, \mu^2)^{1/2}} + \frac{\widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^3}{f} \partial_3 - iV_{123} + m_0 \widetilde{\gamma}^4, \quad \widehat{K}_4 = -\partial_4 - iV_4. \quad (38)$$

Аналогично, если

$$V_{123} = V_{12}(x_1, x_2) \text{ либо } V_3(x_3), \quad (39)$$

отделение переменных x_1, x_2 от x_3 возможно двумя путями:

$$\text{а) } \widehat{K}_{12} = f \left\{ \frac{\widetilde{\gamma}^3 \widetilde{\gamma}^1 \partial_1 + \widetilde{\gamma}^3 \widetilde{\gamma}^2 \partial_2}{(f, \mu^2 + g, \mu^2)^{1/2}} + \widetilde{\gamma}^3 m_0 + \widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^3 (a - iV_{12}) \right\}, \quad \widehat{K}_3 = \partial_3; \quad (40)$$

$$\text{б) } \widehat{K}_{12} = f \left\{ \frac{-\widetilde{\gamma}^2 \partial_1 + \widetilde{\gamma}^1 \partial_2}{(f, \mu^2 + g, \mu^2)^{1/2}} + \widetilde{\gamma}^1 \widetilde{\gamma}^2 m_0 \right\}, \quad \widehat{K}_3 = \widetilde{\gamma}^1 \widetilde{\gamma}^2 \{ \widetilde{\gamma}^3 \partial_3 + \widetilde{\gamma}^4 (iV_3 - a) f \}. \quad (41)$$

Здесь a — собственное значение оператора $\widehat{K}_4$.

Поскольку $\widehat{K}_{12}$ зависит от комплекса $(f, \mu^2 + g, \mu^2)^{1/2}$, разделение x_1 и x_2 в общем случае произвольных криволинейных координат оказывается невозможным. Однако в частных случаях конкретных координат при некоторых потенциалах возможно полное разделение переменных.

Например, для общих сферических координат

$$x = e^\mu \sin \theta \cos \varphi, \quad y = e^\mu \sin \theta \sin \varphi, \quad z = e^\mu \cos \theta \quad (42)$$

при потенциале

$$V = V_1(\mu) + V_4(x_4) \quad (43)$$

имеет место

$$\widehat{K}_\mu = -\widetilde{\gamma}^4 \partial_\mu + \widetilde{\gamma}^1 \widetilde{\gamma}^4 e^\mu m_0 + \widetilde{\gamma}^1 (a - iV_1) e^\mu, \quad (44)$$

$$\widehat{K}_4 = -\partial_4 - iV_4, \quad \widehat{K}_{\theta, \varphi} = \left\{ \widetilde{\gamma}^1 \widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^2 \partial_\theta + \frac{\widetilde{\gamma}^1 \widetilde{\gamma}^4 \widetilde{\gamma}^3}{\sin \theta} \partial_\varphi \right\}.$$

Оператор $\widehat{K}_{\theta, \varphi}$ есть не что иное, как оператор «момента» при сферической калибровке тетрады [4, 5]. Переменные θ и φ здесь делятся.

5. В заключение в таблице приведены результаты разделения переменных в уравнении Дирака для всех известных типов ортогональных криволинейных координат.

Координаты	Преобразование	Потенциалы, допускающие полное либо частичное разделение переменных
Декартовы x, y, z	I	$V(t) + V(x), \quad V(t) + V(y),$ $V(t) + V(z)$
Цилиндрические $x = e^{\mu} \cos \Theta,$ $y = e^{\mu} \sin \Theta, \quad z$	$e^{-\frac{\mu}{2}} \exp\left(-\frac{\Theta}{2} \tilde{\gamma^1 \gamma^2}\right) =$ $= e^{-\frac{\mu}{2}} S_{\Theta}$	$V(t) + V(\mu), \quad V(t) + V(z),$ $V(t) + e^{-\mu} V(\Theta)$
Сферические $x = r \sin \theta \cos \varphi,$ $y = r \sin \theta \sin \varphi,$ $z = r \cos \theta$	$r^{-1} \sin^{-1/2} \theta \exp\left(-\frac{\varphi}{2} \tilde{\gamma^1 \gamma^2}\right) \times$ $\times \exp\left(-\frac{\theta}{2} \tilde{\gamma^3 \gamma^1}\right) \alpha =$ $= r^{-1} \sin^{-1/2} \theta S_{\varphi} S_{\theta} \alpha$	$V(t) + V(\mu),$ $V(t) + e^{-\mu} V(\Theta),$ $V(t) + e^{-\mu} \sin^{-1} \theta V(\varphi)$
Эллиптические цилиндрические $x = a \sin \mu \cos hv,$ $y = a \cos \mu \sin hv,$ z	$(\cos^2 hv + \sin^2 hv)^{-1/4} S_{\varphi}^*,$ $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sin \mu \sin hv}{\cos \mu \cos hv}\right)$	$V(t) + V(z),$ $V(t) + V(\mu, v)$
Параболические цилиндрические $x = \frac{\mu^2 - v^2}{2},$ $y = \mu v, \quad z$	$(\mu^2 + v^2)^{-1/4} S_{\varphi},$ $\varphi = \operatorname{arctg}(v/\mu)$	$V(t) + V(z),$ $V(t) + V(\mu, v)$
Параболические вращения $x = \mu v \cos \varphi,$ $y = \mu v \sin \varphi, \quad z = \frac{\mu^2 - v^2}{2}$	$\{(\mu^2 + v^2) \mu^2 v^2\}^{-1/4} S_{\varphi} S_{\theta} \alpha,$ $\alpha = \operatorname{arctg}(v/\mu)$	$V(t) + (\mu v)^{-1} V(\varphi),$ $V(t) + V(\mu, v)$
К-ты вытянутого эллипсоида вращения $x = a \cos \mu \sin hv \cos \varphi,$ $y = a \cos \mu \sin hv \sin \varphi,$ $z = a \sin \mu \cos hv$	$\{(\cos^2 hv - \sin^2 \mu) \times$ $\times \cos^2 \mu \sin^2 hv\}^{-1/4} S_{\varphi} S_{\theta} \alpha,$ $\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sin \mu \sin hv}{\cos \mu \cos hv}\right)$	$V(t) + \frac{V(\varphi)}{\cos \mu \sin hv},$ $V(t) + V(\mu, v)$
К-ты сплюсненного эллипсоида вращения $x = a \sin \mu \cos hv \cos \varphi,$ $y = a \sin \mu \cos hv \sin \varphi,$ $z = a \cos \mu \sin hv$	$\{(\cos^2 hv - \sin^2 \mu) \times$ $\times \sin^2 \mu \cos^2 hv\}^{-1/4} S_{\varphi} S_{\theta} \alpha,$ $\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos \mu \cos hv}{\sin \mu \sin hv}\right)$	$V(t) + \frac{V(\varphi)}{\sin \mu \cos hv},$ $V(t) + V(\mu, v)$
Торондальные $x = \frac{\alpha \sin h\mu \cos \varphi}{\cos h\mu + \cos v},$ $y = \frac{\alpha \sin h\mu \sin \varphi}{\cos h\mu + \cos v},$ $z = \frac{\alpha \sin \Theta}{\cos h\mu + \cos v}$	$\sin^{-1/2} h\mu S_{\theta} S_{\varphi} \alpha,$ $\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos h\mu \cos v + 1}{\sin^2 h\mu}\right)$	$V(t) +$ $+ \left(\frac{\cos h\mu + \cos \Theta}{\sin^2 h\mu}\right) V(\varphi),$ $V(t) + V(\mu, v)$

Координаты	Преобразование	Потенциалы, допускающие полное либо частичное разделение переменных
Биполярные $x = \frac{\alpha \sin v \cos \varphi}{\cos h\mu + \cos v},$ $y = \frac{\alpha \sin v \sin \varphi}{\cos h\mu + \cos v},$ $z = \frac{\alpha \sin \mu}{\cos h\mu + \cos v}$	$\sin^{-1/2} v S_{\Theta} S_{\varphi} \alpha,$ $\Theta = \arctg \left(\frac{\cos h\mu \sin v}{\cos h\mu \cos v + 1} \right)$	$V(t) + \left(\frac{\cos h\mu + \cos v}{\sin \mu} \right) V(\varphi),$ $V(t) + V(\mu, v)$

Список литературы

1. Багров В. Г., Шаповалов В. Н. и др. // Изв. вузов СССР. Физика. 1973. № 7. С. 95; 1975. № 4. С. 29; 1975. № 7. С. 6; 1975. № 8. С. 73; 1975. № 9. С. 106; 1977. № 6. С. 46; 1977. № 7. С. 105; 1978. № 2. С. 13; 1978. № 3. С. 46; 1980. № 4. С. 10; 1984. № 10. С. 33; 1985. № 1. С. 85.
2. Федоров Ф. И. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 495; Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. С. 334.
3. Cook A. H. // Proc. R. Soc. Lond. 1982. V. A384. P. 247.
4. Brill D., Wheeler J. // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 465.
5. Шишкин Г. В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1976. № 2. С. 22.
6. Черников Н. А., Шавохина Н. С. // ТМФ. 1973. Т. 16. С. 77.
7. Otchik V. S. // Class. Quant. Gravity. 1985. № 2. P. 539.
8. Riordar F. // Nuovo Cimento. 1974. V. B20. № 2. P. 309.
9. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 3. С. 26; 1976. № 1. С. 6; 1976. № 2. С. 5; 1976. № 3. С. 3.

Поступила в редакцию 15.06.85.

УДК 621.315.592

Л. А. КАЗАКЕВИЧ, П. Ф. ЛУГАКОВ

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В ДИСЛОКАЦИОННОМ КРЕМНИИ

Дислокации в кремнии создают сильное искажение кристаллической решетки и поля упругих напряжений, что приводит к изменению эффективности введения и температурной устойчивости радиационных дефектов (РД) [1—3]. При этом обнаруживается связь между природой РД и влиянием дислокаций на их параметры (эффективность образования, температура отжига), с целью установления которой выполнялась данная работа.

Исследования проводились на монокристаллах *n*- и *p*-кремния ($\rho = 20\text{—}1500 \text{ Ом}\cdot\text{см}$), выращенных по методу Чохральского, и бестигельной зонной плавкой в вакууме, концентрация остаточных примесей (кислород, углерод) в которых, согласно ИК измерениям, составляла соответственно величину $\leq 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $\leq 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Повышенная плотность дислокаций (N_D) создавалась при пластической деформации. Образцы подвергались четырехпорному изгибу вокруг направления $\langle 112 \rangle$ при температуре 750°C в течение 0,5—3 мин с последующим быстрым охлаждением (начальная скорость охлаждения $\geq 500^\circ\text{C}/\text{с}$). Исходные (бездислокационные) и пластически деформированные кристаллы облучались гамма-квантами ^{60}Co при $t \leq 50^\circ\text{C}$ на установке МРХ- γ -25М при плотности потока $J = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Изохронный 15-минутный отжиг проводился в интервале температур $80\text{—}600^\circ\text{C}$. Измерялись температурные ($80\text{—}400 \text{ K}$) зависимости коэффициента Холла на различных этапах облучения и отжига.