$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2(2n+1)}\right]^{2n+3}\cdot 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin u\cdot \operatorname{sh} v} du =$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{2(2n+1)}\right]^{2n+3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2n+1)\sin u} du + O\left(\left(\frac{1}{2(2n+1)}\right)^{2n+2}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+\frac{7}{2}}\right). \qquad (3)$$

Для интеграла J_2 справедлива такая же оценка, поэтому из (2) и (3) следует

$$E_{2n+1}^{T}(\sin\cos x) \leqslant C\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+\frac{7}{2}}. \qquad (1')$$

Замечание 1. Изложенная схема доказательства применялась одним из авторов в случае рациональных приближений [3].

Замечание 2. Аналогичным образом устанавливаются порядковые оценки для наилучших приближений тригонометрическими полиномами целых 2π-периодических функций: $e^{\cos x}$, $e^{\sin x}$, $\sin\sin x$, $\cos\sin x$, $\operatorname{sh}\cos x$, $\operatorname{sh}\sin x$, $\cos\cos x$, $\operatorname{ch}\cos x$, $\operatorname{ch}\sin x$, и функций, аналитических в горизонтальной полосе $(|a|>1)$: $\ln(a+\sin x)$, $\ln(a+\cos x)$, $(a+\sin x)^{\alpha}$, $\operatorname{arctg}\cos x$.

Список литературы

1. Дзядык В. К. // Мат. сб. 1979. Вып. 108 (150). № 2. С. 247.
2. Бернштейн С. Н. Собр. соч.: В 4 т. М., 1954. Т. 2. С. 178.
3. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.

Поступила в редакцию 30.01.86.

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$.

В общем случае нелинейной системы (1) часто численное решение исходной задачи сводят (на пути локальной линеаризации) к решению последовательности линейных задач. Проблема жесткости [1] при этом, однако, не снимается. Нужны специализированные методы численного решения линейных задач, поэтому ниже основное внимание будет уделено случаю системы вида

$$u'(t) = Au(t) + b, \qquad (2)$$

где квадратная матрица A и вектор b постоянны. Конструкция методов по мере конкретизации свойств матрицы A (скажем, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, где λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные значения A, $A < 0$, $A = A^T < 0$ и т. д.) может уточняться.

В устойчивом случае системы (2) при большом разбросе собственных значений матрицы A наиболее часто в настоящее время применяют неявные методы (см., например, [2]), несмотря на трудности их численной реализации. Использование же классических явных методов ограничено по причине жестких условий на величину шага численного интегрирования. Мы будем рассматривать сейчас лишь явные методы. Повышение их эффективности будет основано на более глубоком учете свойств исходной системы.

Введем в рассмотрение две сетки узлов численного интегрирования: основную с шагом $\tau > 0$ и вспомогательную с шагом $h > 0$. Величины τ и h могут изменяться в процессе вычислений, однако пусть в пределах одного шага основной сетки величина h остается постоянной и $\tau = 2^k h$, $k \geqslant 0$. Обозначим $u(t) = u \approx y$, $u(t+\tau) = \hat{u} \approx \hat{y}$, $u(t+jh) \approx y_j$ и рассмотрим некий явный метод, который в пределах данного шага τ применительно к (2) приводит к расчетным формулам вида

$$y_0 = y,\ y_{j+1} = Sy_j + g,\ j = 0, 1, \dots, 2^k - 1,\ k \geqslant 0, \tag{3}$$

где квадратная матрица S и вектор g от j не зависят. В качестве $\hat{y}$ примем величину y_{2^k}. Тогда можно записать:

$$\hat{y} = S^{2^k} y + (E + S + S^2 + \dots + S^{2^k-1})\, g = S^{2^k} y + (E - S^{2^k})(E - S)^{-1} g =$$
$$= S^{2^k} y + \prod_{i=1}^{k} (E + S^{2^{i-1}})\, g,\ k \geqslant 1. \tag{4}$$

Сравним вычислительные затраты в случае расчетных формул (3) и (4), измеряя их, скажем, лишь числом умножений матрицы на вектор и считая при этом, что операция возведения матрицы в квадрат выполняется путем умножения ее на каждый из n столбцов. При $k \geqslant 3$ преимущество расчетной формулы (4) может быть оценено посредством неравенства

$$(k-1)n + k + 2 < 2^k. \tag{5}$$

Как следует из (5), это преимущество быстро растет при повышении k (скажем, с ростом разброса собственных значений матрицы A при работе в области регулярного режима [3] системы (2)).

Для точного решения системы (2) справедливо [4] равенство

$$u(t+h) = S^* u(t) + g^*, \tag{6}$$

где $S^* = \exp(Ah)$, $g^* = \int_0^h \exp(Ax)\, dx b$. Аналогично переходу от (3) к (4) на основании (6) можно получить точное соотношение

$$\hat{u} = [\exp(Ah)]^{2^k} u + \prod_{i=1}^{k} (E + [\exp(Ah)]^{2^{i-1}}) \int_0^h \exp(Ax)\, dx b. \tag{7}$$

Если же еще ввести в рассмотрение и функцию $\Delta(x) = u(t+x) - u(t)$, которая, очевидно, является решением задачи Коши

$$\Delta'(x) = A\Delta(x) + v,\quad \Delta(0) = 0, \tag{8}$$

где $v = Au + b$, то по аналогии с (2), (6), (7) на основании (8) можно записать

$$\Delta(\tau) = \prod_{i=1}^{k} (E + [\exp(Ah)]^{2^{i-1}})\, \Delta(h), \tag{9}$$

где

$$\Delta(h) = \int_0^h \exp(Ax)\, dx v, \tag{10}$$

или

$$\hat{u} = u + \prod_{i=1}^{k} (E + [\exp(Ah)]^{2^{i-1}}) \int_0^h \exp(Ax)\, dx (Au + b). \tag{11}$$

Равенства (7), (9), (10), (11) могут служить основой при конструировании методов численного интегрирования системы (2), если воспользоваться подходящими способами аппроксимации входящих в эти равенства матричной экспоненты и интеграла от нее. Полезным для случая отрицательно определенной матрицы A может оказаться, например, прием предварительного выделения из матричной экспоненты спектральной составляющей [5]: $\exp(Ax) = \exp[(A-\mu E)x]\exp(\mu x) \approx$ $\approx [E + \frac{x}{1!}(A-\mu E) + \ldots + \frac{x^s}{s!}(A-\mu E)^s]\exp(\mu x)$, $\mu = \mu_0(z) =$ $= (Az, z)/(z, z)$ $(z = v,\ z = \Delta(h), \ldots)$. Применительно, скажем, к (10) использование такого приема позволяет в простейшем случае получить метод вида (3), где $S = E + h\rho(h)A$, $g = h\rho(h)b$, $\rho(h) = [\exp(\mu h) - 1]/(\mu h)$, $\mu = \mu_0(Ay + b)$. Непосредственно проверяется, что этот метод точен на решениях $u(t) = c\xi\exp(\lambda t) - A^{-1}b$ системы (2), где $c = \mathrm{const}$, $A\xi = \lambda\xi$, а также удовлетворяет естественному требованию $(E-S)^{-1}g = -A^{-1}b$ (см. (2) при $t \to \infty$ и (4) в случае $S^{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$). Последнее условие заведомо будет выполнено при ограничении $h < \frac{1}{\mu}\ln(1 + \mu/\|A\|)$, обеспечивающем монотонное поведение отношения Релея $\mu_0(Ay_j + b)$ для случая $A = A^T < 0$.

Список литературы

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.

2. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под. ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М., 1979.

3. Самарский А. А. Теория разностных систем. М., 1983.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.

5. Бобков В. В. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1117.

Поступила в редакцию 04.06.86.

УДК 517.925

С. С. БЕЛЯВСКИЙ

О РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x' = f(x)u(t) + g(x)v(t), \tag{1}$$

где вектор-функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в области $G \subset R^n$, $u(t)$ и $v(t)$ — скалярные кусочно-постоянные функции, определенные при $t \geqslant 0$, и принимают значения -1, 0, 1, причем $v^2(t) + u^2(t) = 1$ для всех $t \geqslant 0$.

Точку $x_1 \in G$ назовем точкой достижимости из $x_0 \in G$, если существуют такие функции $u(t)$ и $v(t)$, при которых решение системы (1) удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где $t_1 \geqslant 0$. Множество всех точек достижимости из точки x_0 назовем множеством достижимости и обозначим $M(x_0)$.

Очевидно, что для любой точки $x_1 \in M(x_0)$ имеет место равенство $M(x_0) = M(x_1)$. Таким образом, либо $M(x_0) = G$ для любой точки $x_0 \in G$, либо область G распадается на попарно непересекающиеся множества достижимости.

Будем говорить, что множество M имеет размерность k, если в M существует подмножество гомеоморфное R^k.

Пусть область G распадается на множества достижимости, максимальная размерность которых k, тогда говорим, что система (1) имеет k-мерное расслоение.

Предположим, что системы

$$x_1' = f(x_1), \tag{2}$$

$$x_2' = g(x_2) \tag{3}$$