УДК 517.51

В. В. КАШЕВСКИЙ, В. Н. РУСАК

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В [1] установлено, что при достаточно быстром убывании коэффициентов ряда Тейлора его частные суммы осуществляют приближение того же порядка, что и многочлены наилучшего приближения в единичном круге $|z| \leqslant 1$. Для 2π-периодических функций, представимых рядами Фурье, дело обстоит аналогичным образом. Действительно, справедлива следующая

Теорема 1. Если 2π-периодическая функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k} \cos n_k (x + \varphi_k),$$

где коэффициенты c_{n_k} отличны от нуля и подчинены неравенству

$$\frac{1}{|c_{n_k}|} \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_{n_j}| = \gamma_k < 1,$$

то при любом k выполнены неравенства:

$$c_{n_k}(1 - \gamma_k) \leqslant E^T_{n_{k-1}}(f) \leqslant c_{n_k}(1 + \gamma_k).$$

Насколько нам известно, теорема 1 не встречалась в научной литературе, она дополняет один результат С. Н. Бернштейна, относящийся к лакунарным тригонометрическим рядам [2].

Теорема 1 позволяет находить асимптотические оценки наилучших полиномиальных приближений некоторых целых 2π-периодических функций и функций, аналитических в горизонтальной полосе, содержащей действительную ось.

Теорема 2.

$$E^T_{2n+1}(\sin\cos x) \asymp \left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+\frac{7}{2}}. \qquad (1)$$

Приведем коротко доказательство верхней оценки в соотношении (1). Уклонение функции $f(x) = \sin\cos x$ от частных сумм ее ряда Фурье представимо в форме (см. [3])

$$f(x) - S_{2n+1}(x, f) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x) - f(u)}{e^{ix} - e^{iu}} \left[\frac{e^{i(2n+2)u}}{e^{i(2n+2)x}} - \frac{e^{i(2n+3)x}}{e^{i(2n+3)u}} \right] e^{iu} du. \qquad (2)$$

Пользуясь аналитичностью функции $\frac{f(x) - f(u)}{e^{ix} - e^{iu}}$ по переменной $w = u + iv$ в полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}\, w \leqslant 2\pi$, разбиваем правую часть соотношения (2) на два интеграла, и в первом из них деформируем путь интегрирования в горизонтальный отрезок нижней полуплоскости. Тогда будем иметь

$$|I_1| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x) - f(u)}{e^{ix} - e^{iu}} \cdot e^{i(2n+3)u} du \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\cos x - \sin\cos(u + iv)}{e^{ix} - e^{i(u+iv)}} \cdot e^{i(2n+3)(u+iv)} du \right|_{v=\ln 2(2n+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{\sin u \cdot \mathrm{sh}\, v}}{1 - e^{-v}} \cdot e^{-(2n+3)v} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2(2n+1)}\right]^{2n+3}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin u\cdot \operatorname{sh} v}du =$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{2(2n+1)}\right]^{2n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2n+1)\sin u}du + O\left(\left(\frac{1}{2(2n+1)}\right)^{2n+2}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+\frac{7}{2}}\right). \qquad (3)$$

Для интеграла J_2 справедлива такая же оценка, поэтому из (2) и (3) следует

$$E^T_{2n+1}(\sin\cos x) \leqslant C\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+\frac{7}{2}}. \qquad (1')$$

З а м е ч а н и е 1. Изложенная схема доказательства применялась одним из авторов в случае рациональных приближений [3].

З а м е ч а н и е 2. Аналогичным образом устанавливаются порядковые оценки для наилучших приближений тригонометрическими полиномами целых 2π-периодических функций: $e^{\cos x}$, $e^{\sin x}$, $\sin\sin x$, $\cos\sin x$, $\operatorname{sh}\cos x$, $\operatorname{sh}\sin x$, $\cos\cos x$, $\operatorname{ch}\cos x$, $\operatorname{ch}\sin x$, и функций, аналитических в горизонтальной полосе $(|a|>1)$: $\ln(a+\sin x)$, $\ln(a+\cos x)$, $(a+\sin x)^\alpha$, $\operatorname{arctg}\cos x$.

Список литературы

1. Д з я д ы к В. К. // Мат. сб. 1979. Вып. 108 (150). № 2. С. 247.
2. Б е р н ш т е й н С. Н. Собр. соч.: В 4 т. М., 1954. Т. 2. С. 178.
3. Р у с а к В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.

Поступила в редакцию 30.01.86.

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$.

В общем случае нелинейной системы (1) часто численное решение исходной задачи сводят (на пути локальной линеаризации) к решению последовательности линейных задач. Проблема жесткости [1] при этом, однако, не снимается. Нужны специализированные методы численного решения линейных задач, поэтому ниже основное внимание будет уделено случаю системы вида

$$u'(t) = Au(t) + b, \qquad (2)$$

где квадратная матрица A и вектор b постоянны. Конструкция методов по мере конкретизации свойств матрицы A (скажем, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, где λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные значения A, $A < 0$, $A = A^T < 0$ и т. д.) может уточняться.

В устойчивом случае системы (2) при большом разбросе собственных значений матрицы A наиболее часто в настоящее время применяют неявные методы (см., например, [2]), несмотря на трудности их численной реализации. Использование же классических явных методов ограничено по причине жестких условий на величину шага численного интегрирования. Мы будем рассматривать сейчас лишь явные методы. Повы-